

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Воронежский государственный технический университет»



Круссер Анастасия Игоревна

Анализ нелинейных колебаний упругих пластин на вязкоупругом основании при
помощи реологических моделей с дробными производными

Специальность 1.1.8 Механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д-р. ф.-м. наук, профессор

Шитикова М.В.

Воронеж 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	12
1.1. Модели вязкоупругости	12
1.1.1 Двухэлементные модели.....	12
1.1.2 Трехэлементные модели.....	14
1.1.3 Четырехэлементные модели.....	19
1.1.4 Многоэлементные модели.....	21
1.2. Модели вязкоупругости с дробными производными.....	24
1.2.1. Первые упоминания о дробном исчислении в теории вязкоупругости.	25
1.2.2. Простейшие модели вязкоупругости с дробными производными	27
1.2.3. Другие модели вязкоупругости с дробными производными	32
1.3. Модели упругих и вязкоупругих оснований.....	33
1.3.1. Модель Фусса-Винклера	34
1.3.2. Двух- и трехпараметрические модели	34
1.3.3. Модели вязкоупругих оснований.....	37
1.3.4. Модели оснований с дробной производной.....	40
1.4. Пластинки на вязкоупругом основании.....	42
1.5. Выводы по первой главе.....	46
2. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ПОМОЩИ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ	48
2.1. Постановка задачи	48
2.2. Метод решения	54
2.2.1 Метод вариации произвольной постоянной.....	63
2.3. Численные исследования	66
2.4. Влияние граничных условий опирания пластины.....	74
2.5. Влияние порядка малости внешнего возмущения.....	78
2.5.1. Нерезонансное жесткое возбуждение	81
2.5.2. Супергармонический резонанс	82

2.5.3. Субгармонический резонанс	83
3. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ	88
3.1. Задачи на воздействие подвижной нагрузки	88
3.2. Постановка задачи и метод решения	89
3.3. Численные исследования	93
4. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ НАГРУЗКИ	96
4.1. Постановка задачи	97
4.2. Малая вязкость осциллятора	99
4.3. Конечная вязкость осциллятора	105
4.4. Численные исследования	111
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	116
Список литературы	1188
ПРИЛОЖЕНИЕ А	152
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	153
ПРИЛОЖЕНИЕ В	154

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследований. Возрастающий интерес к изучению динамического поведения пластин, опирающихся на вязкоупругое основание, обусловлен широким спектром применения решений данного класса задач для моделирования многих реальных инженерных приложений. Например, конструкция дорожного полотна или взлетно-посадочной полосы аэродромов часто состоит из железобетонных плит, что моделируется в виде пластины, лежащей на вязкоупругом основании, которое обеспечивает внешнее демпфирование и оказывает значительное влияние на динамические прогибы системы.

При нелинейных колебаниях конструкций может возникнуть явление внутреннего резонанса, которое проявляется в перекачке энергии между модами колебаний с близкими значениями собственных частот. Устранение данного типа резонанса возможно только за счет изменения геометрических размеров конструкции или граничных условий опирания на стадии проектирования, в отличие от внешнего резонанса, появление которого можно избежать путем изменения частоты возмущающей гармонической силы или скорости нагрузки на стадии эксплуатации. Наложение внутреннего и внешнего резонансов в конструкции может привести к катастрофическим последствиям.

В инженерной практике часто возникает задача определения различных динамических параметров пластинчатых конструкций на вязкоупругом основании в результате воздействия подвижных нагрузок. Влияние подобного вида внешних сил, таких как, например, давление шин автомобилей или шасси самолетов, напрямую зависит от скорости нагрузки. Движение современных автомобилей с высокими скоростями или самолётов при взлёте и посадке может приводить к возрастанию амплитуды колебаний пластинки за счет появления явления внешнего резонанса.

Для описания демпфирующих свойств вязкоупругого основания в динамических контактных задачах твердых тел используется несколько реологических моделей, среди которых модель Кельвина-Фойгта, Максвелла,

стандартного линейного твердого тела. Как следует из экспериментальных данных, модель стандартного линейного твердого тела более пригодна для изучения физико-механических свойств вязкоупругих оснований, поскольку она способна описать и свойства ползучести, и свойства релаксации вязкоупругих материалов (грунтов), в то время как модель Кельвина-Фойгта непригодна для описания релаксации материалов и модель Максвелла не описывает явление ползучести.

В недавней обзорной статье, посвященной анализу упругих и вязкоупругих оснований [283], замечено, что одним из будущих направлений развития механики грунтов является разработка новых моделей оснований с учетом нелинейности и демпфирования с помощью операторов дробного порядка. Действительно, в настоящее время широкое распространение получили модели вязкоупругих оснований типа Фусса-Винклера или Пастернака с дробной производной, поскольку дробное исчисление имеет важное значение при решении динамических контактных задач механики деформируемого твердого тела. Данной тематике посвящено большое количество научных трудов, обзор которых представлен в работах проф. Россихина Ю. А. и проф. Шитиковой М. В. [39, 41]. В механике грунтов модели с дробной производной продемонстрировали преимущества при описании наследственного поведения с длительной памятью [159].

Степень разработанности темы исследования. Развитию моделей вязкоупругих материалов посвящены труды Ржаницына А.Р. [50], Ишлинского А.Ю. [18-20], Работнова А.Н. [47], Сорокина Е.С. [52], Максвелла Дж.К. [180], Кельвина [255, 256], Фойгта В. [258, 259], Зинера К. [14], Джеффриса Г [140, 141].

Одними из первых исследователей, которые построили модели вязкоупругости с дробными производными, были Мешков С.И. [34], Шермергор Т.Д. [58], Caputo M. [86-88], Bagley R.L. и Torvik P.J. [74-77], Gemant A. [115-116], Watanabe S.W. [266] и другие ученые. Два пути развития теории линейной вязкоупругости на основе операторов дробного порядка описаны в ретроспективной статье Россихина Ю.А. [213].

Различные модели упругих и вязкоупругих оснований были рассмотрены в работах Фусса Н.И. [56], Пастернака П.Л. [43], Филоненко – Бородича М.М. [55], Власова В.З. [5,6], Winkler E. [270], Zimmermann H. [302], Hetényi M. [130], Reissner E. [210] и других исследователей.

Динамические контактные задачи пластин на вязкоупругом основании анализировали в своих трудах Ю.А. Россихин [217], М.В. Шитикова [60, 217], Dumir P. [99], Amalibi M. [68-70], Zhang C.C. [288-291], Zhu H.H. [301], Younesian D. [283] и другие авторы.

Колебания балок и пластин при воздействии подвижных нагрузок изучали следующие авторы: Ерофеев Н.И. [13], Fryba L. [109], Praharaј R.K. [203], Dang-Trung H. [94], Hien T.D. [133] и другие отечественные и зарубежные ученые.

Научно-техническая гипотеза состоит в том, что при нелинейных колебаниях упругих пластин на вязкоупругом основании может возникнуть внутренний резонанс, в том числе и в сочетании с внешним резонансом.

Объект исследования – упругие прямоугольные пластины с геометрической нелинейностью на вязкоупругом основании.

Предмет исследования – амплитуды и фазы нелинейных колебаний упругих прямоугольных пластин на вязкоупругом основании, свойства которого описываются реологическими моделями с дробными производными.

Цель диссертационной работы. Анализ нелинейных колебаний упругой пластины на вязкоупругом основании под действием внешних сил в условиях сочетания внешнего и внутреннего резонансов, при наличии демпфирования среды и основания, которое описывается реологическими моделями с дробными производными.

Задачи диссертации:

– постановка задачи о нелинейных колебаниях упругой пластины на вязкоупругом основании при воздействии гармонической и осциллирующей нагрузок при наличии демпфирования среды и основания, которое описывается моделями вязкоупругости с дробными производными;

– получение численно-аналитического решения систем разрешающих дифференциальных уравнений для определения амплитуд и фаз нелинейных колебаний с использованием обобщенного метода многих временных масштабов и метода Рунге-Кутты четвертого порядка;

– сравнение безразмерных амплитуд колебаний системы для различных моделей вязкоупругих оснований;

– изучение влияния параметров дробности окружающей среды и вязкоупругого основания на процесс перекачки энергии, происходящий при нелинейных колебаниях пластинок на вязкоупругом основании, находящихся в условиях сочетания внутреннего и внешнего резонансов;

– анализ влияния граничных условий опирания пластинки, а также амплитуды и порядка вязкости внешней нагрузки на характер нелинейных колебаний пластины.

Научная новизна работы заключается в том, что

– при помощи обобщенного метода многих временных масштабов получены системы дифференциальных уравнений для определения амплитуд и фаз нелинейных вынужденных колебаний шарнирно опертой по контуру пластинки для случаев воздействия гармонической и осциллирующей нагрузок, и выполнено их численное исследование при помощи алгоритма Рунге-Кутты четвертого порядка;

– проанализировано влияние граничных условий опирания на амплитудно-частотные характеристики нелинейных колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании;

– представлен сравнительный анализ безразмерных амплитуд колебаний системы для различных реологических моделей вязкоупругого основания;

– изучено влияние параметров дробности вязкоупругого основания и среды, а также рассмотрено влияние амплитуды и порядка вязкости внешнего воздействия на изменение амплитуд и фаз нелинейных колебаний пластины.

Теоретическая и практическая значимость работы. Задача о нелинейных колебаниях пластинки на вязкоупругом основании может найти много

инженерных приложений, таких как взаимодействие самолета и взлетно-посадочной полосы или автомобиля и дорожного покрытия, проектирование фундаментной плиты на грунтовом основании, динамика системы вертолетных площадок, палубы кораблей (особенно авианосцев), система железнодорожных путей и т.д. В связи с этим особую важность имеет изучение явления внутреннего резонанса в подобных конструкциях, когда частоты двух собственных мод колебаний близки по значению друг к другу.

В диссертационной работе разработан алгоритм решения уравнений движения системы «пластина+вязкоупругое основание», который реализован в виде программного комплекса, зарегистрированного в государственном реестре программ для ЭВМ. Данная программа позволит построить решение для вычисления амплитуд и фаз нелинейных вынужденных колебаний пластины на вязкоупругом основании, а также определить перемещения пластины при различных геометрических параметрах конструкции и реологических параметрах среды и основания.

При воздействии подвижной нагрузки представленная методика расчета позволит избежать наложения внешнего резонанса на внутренний. За счет изменения скорости прохождения нагрузки или частоты возмущающей гармонической силы можно регулировать явление возникновения внешнего резонанса, не допуская его сочетания с внутренним резонансом, что может привести к необратимым разрушениям конструкции.

Положения, выносимые на защиту:

– постановка задачи о нелинейных свободных и вынужденных колебаниях упругой пластины на вязкоупругом основании Фусса-Винклера или Пастернака, демпфирующие свойства которого описываются различными реологическими моделями с дробной производной;

– алгоритм расчета нелинейных упругих прямоугольных пластин на вязкоупругом основании для различных типов граничных условий опирания;

– решение задачи о вынужденных нелинейных колебаниях пластинки на вязкоупругом основании для случая воздействия подвижной гармонической силы, когда система находится в условиях внешнего и внутреннего резонансов;

– анализ результатов численных исследований системы нелинейных уравнений для определения амплитуд и фаз упругой прямоугольной пластинки на вязкоупругом основании для случая внутреннего резонанса при свободных и вынужденных колебаниях;

– решение задачи о вынужденных нелинейных колебаниях пластины на вязкоупругом основании для случая воздействия подвижной подрессоренной нагрузки, когда демпфирующие свойства осциллятора описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной по времени.

Степень достоверности базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов.

Реализация работы. Разработан программный комплекс численных исследований нелинейных колебаний прямоугольных пластинок на вязкоупругом основании с использованием операторов дробного порядка и получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022668236.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались и обсуждались: на XLIV International Conference “Advanced Problems in Mechanics” (Санкт-Петербург, 2016); 24th International Congress on Sound and Vibration (London, 2017); на юбилейной XXX Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (Москва, 2018); на XXXI Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (Москва, 2019); на XI International Conference on Structural Dynamics, EURO DYN 2020 (Athens, 2020); на Second International Nonlinear Dynamics Conference, NODYCON 2021 (Rome,

2021); на International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety, ICAATS 2021 (Сочи, 2021); на XV Международной научно-технической конференции «Актуальные вопросы архитектуры и строительства» (Новосибирск, 2022); на 15th International Conference on Vibration Problems, ICOVP 2023 (Doha, 2023).

Диссертация в целом докладывалась и обсуждалась на научных семинарах Международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук Воронежского государственного технического университета (руководитель центра: д-р ф.-м. наук, профессор Шитикова М.В.), 2020-2023 гг., на научном семинаре кафедры «Математическая теория упругости и биомеханики» Саратовского государственного университета (руководитель семинара: д-р ф.-м. наук, профессор Коссович Л.Ю.), 2022г., и на научном семинаре кафедры «Математический и прикладной анализ» Воронежского государственного университета (руководитель семинара: д-р ф.-м. наук, профессор Шашкин А.И.), 2023г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, в том числе 9 статей в изданиях, индексируемых в научных базах данных Scopus и Web of Science, из которых 1 статья в издании, рекомендуемом ВАК РФ, и 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения, списка литературы и 3-х приложений. Полный объем работы составляет 159 страниц, включает в себя 46 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 303 источника, в том числе 241 иностранный.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В **первой главе** приводится обзор существующей литературы, посвященной колебаниям пластинок на вязкоупругом основании, демпфирующие свойства которого описываются при помощи различных реологических моделей. Представлены классификация и краткий исторический обзор классических моделей вязкоупругости, а также моделей вязкоупругих материалов с использованием дробной производной. Изучены модели вязкоупругих оснований

и примеры их применения для описания свойств различных типов грунтов. Рассмотрены экспериментальные и теоретические исследования свободных и вынужденных колебаний пластинок на вязкоупругом основании при воздействии различных видов внешних сил.

Вторая глава посвящена нелинейным колебаниям упругой шарнирно опертой пластины, лежащей на вязкоупругом основании, свойства которого описываются при помощи моделей Фусса-Винклера или Пастернака с дробной производной. Для решения нелинейных дифференциальных уравнений используется обобщенный метод многих временных масштабов. Получены системы разрешающих уравнений для определения амплитуд и фаз колебаний в случае сочетания внутреннего резонанса один-к-одному с внешним резонансом. Проведен сравнительный анализ численных исследований полученной системы уравнений для различных типов граничных условий опирания пластинки. Изучено влияние порядка малости амплитуды внешней гармонической силы на процесс колебаний.

В третьей главе приведено решение задачи для вынужденных нелинейных колебаний пластинки на вязкоупругом основании при воздействии подвижной гармонической силы. Система дифференциальных уравнений решена численным методом для случая наложения внешнего резонанса на внутренний резонанс один-к-одному. Рассмотрено изменение безразмерных амплитуд затухающих колебаний пластинки в зависимости от параметров дробности среды и основания.

В четвертой главе исследованы нелинейные вынужденные колебания упругой пластинки на вязкоупругом основании при воздействии подвижной подрессоренной силы. Внешняя нагрузка представлена в виде осциллятора по модели Кельвина-Фойгта с дробной производной. Получена разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений, которая позволяет исследовать динамическое поведение пластинки в зависимости от изменения параметров дробности среды, вязкоупругого основания и вязкости амортизатора внешней нагрузки.

ГЛАВА 1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Модели вязкоупругости

Первую модель для описания свойств твердых тел сформулировал Р. Гук в 1676г. в его знаменитом заявлении [134] "ut tensio sic vis" (каково растяжение, такова и сила), впервые опубликованном в виде анаграммы (CEIINOSSTTUU). Гук представил идеально-упругое твердое тело в виде пружины, относительная деформация которой прямо пропорциональна напряжению:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.1)$$

где σ - напряжение, ε - относительная деформация пружины, E - постоянная, называемая модулем упругости. Пружина обладает свойством накапливать механическую энергию.

В 1687г. Ньютон записал определяющее уравнение для идеально-вязкой жидкости, согласно которому скорость деформации прямо пропорциональна напряжению [190]:

$$\sigma = \eta D\varepsilon, \quad (1.2)$$

где η - коэффициент вязкости амортизатора, D обозначает дифференцирование по времени. Идеально-вязким элементом в теории вязкоупругости считается амортизатор, который проявляет способность рассеивать механическую энергию.

1.1.1 Двухэлементные модели

Тела, напряжения в которых зависят от деформации и скорости деформации, включают процесс деформации как идеально-упругого, так и идеально-вязкого тела, поэтому они получили название вязкоупругих тел. Для того чтобы наглядно изобразить работу вязкоупругих материалов были предложены различные механические модели, состоящие из комбинации пружин и амортизаторов, соединенных между собой последовательно или параллельно [3, 22].

В 1867г. Максвелл описал уравнение для последовательного соединения упругого и вязкого элементов. Данная схема получила название *элемента*

Максвелла [180] (Рис.1.1а), что также можно записать в виде формулы $M=N-N$ [49]. Уравнение, описывающее зависимость напряжения от деформации, имеет вид:

$$\sigma + \tau_{\varepsilon} D\sigma = E\tau_{\varepsilon} D\varepsilon, \quad (1.3)$$

где τ_{ε} - время релаксации.

В 1865г. лорд Кельвин в своих экспериментах [255] наблюдал явление изменения скорости диссипации энергии в зависимости от частоты колебаний в различных материалах, которое позднее объяснил существованием «эффекта упругого последствия» [256]. Кельвин также обнаружил, что «в упругом твердом теле существует молекулярное трение, которое с должным основанием может быть названо вязкостью твердого тела», а также предложил модель материала в виде упругого пористого твердого тела, у которого поры и промежутки между ними заполнены вязкой жидкостью, подчиняющейся закону Стокса (являющегося обобщением закона Ньютона) [49]. Вскоре после этого в 1892г. Фойгт записал дифференциальное уравнение математической [258, 259], описывающее такое же поведение анизотропных материалов, которое наблюдал Кельвин в ходе своих экспериментов по исследованию свойств различных металлов. Данная модель, которая схематично представлена в виде параллельного соединения упругого и вязкого элементов, получила название *элемента Кельвина-Фойгта* (Рис.1.1б). Параллельное соединение упругого и вязкого элементов можно представить в виде формулы $KV=N|N$. Уравнение, описывающее зависимость напряжения от деформации, имеет вид:

$$\sigma = E\varepsilon + E\tau_{\sigma} D\varepsilon, \quad (1.4)$$

где $\tau_{\sigma} = \frac{\eta}{E}$ – время ретардации (время запаздывания [48]).

В своем подробном обзоре моделей вязкоупругости [254] упоминает, что в 1873 году Меуер также предложил соотношения, линейно связывающие компоненты напряжения в твердом теле с компонентами деформации и скорости

деформации, при помощи которых автор попробовал описать явление упругого последействия [183].

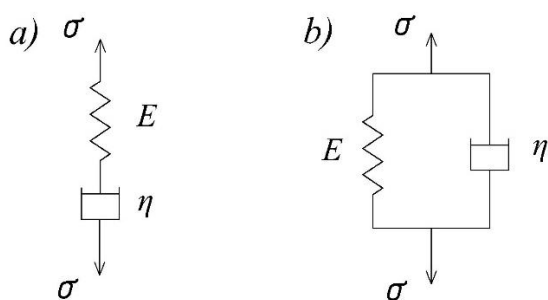


Рисунок 1.1 – Схемы двухэлементных моделей: а) элемент Максвелла; б) элемент Кельвина-Фойгта.

1.1.2 Трехэлементные модели

1.1.2.1 Трехэлементные модели стандартного линейного твердого тела

Трехэлементные упругие модели [3], получившие также название моделей стандартного линейного твердого тела [101, 156, 176, 191, 230, 265, 296], состоят из пружины, присоединенной последовательно к элементу Кельвина-Фойгта (Рис.1.2а) или параллельно к элементу Максвелла (Рис.1.2б). Хотя в трудах многих исследователей приведены ссылки на первооткрывателей данных моделей, в научном сообществе до сих пор отсутствует общепринятая система их названий [24, 59, 154, 242].

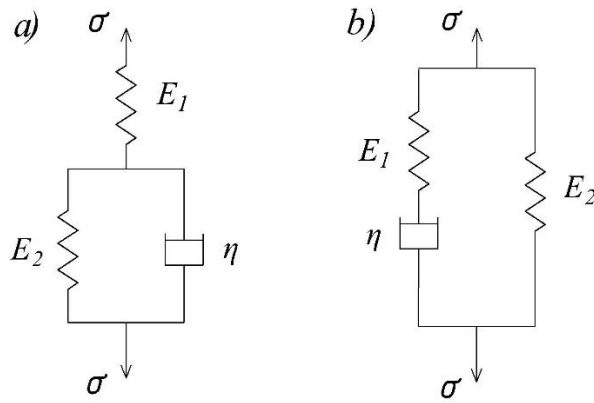


Рисунок 1.2 – Схемы трехэлементных моделей стандартного линейного твердого тела: а) Н–KV элемент; б) Н|М элемент.

Первое упоминание о модели, представленной на рис. 1.2а, в литературе [4, 156, 163, 257] зачастую связывают с книгой Дж. Пойнтинга и Дж. Томсона [201], вышедшей в свет в 1902 году. Однако если внимательно прочитать данную работу [201], то можно убедиться, что авторы привели лишь схему (Рис.1.3а), которая только является первой попыткой «представить твердое тело в виде подходящей механической модели», как и было замечено К. Зинером [14].

Обзор литературы показал, что дифференциальное уравнение модели стандартного линейного тела было впервые получено А.Ю. Ишлинским в 1940 году [18,19] в виде:

$$\sigma + \tau_{\varepsilon} D\sigma = E_0(\varepsilon + \tau_{\sigma} D\varepsilon), \quad (1.5)$$

где E_0 - релаксированный (длительный) модуль упругости модели, $\tau_{\sigma} = \eta / E_2$,

$\tau_{\varepsilon} = \eta / (E_1 + E_2)$, $E_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ для модели на рис.1.2а;

$\tau_{\varepsilon} = \eta / E_1$, $\tau_{\sigma} = (E_1 + E_2) \cdot \eta / E_1 E_2$, $E_0 = E_2$ для модели на рис.1.2б.

В своих исследованиях А.Ю. Ишлинский [19] применил полученное уравнение для решения задачи о продольных колебаниях однородного стержня длиной l постоянного поперечного сечения. В связи с этим данную модель корректно называть в дальнейшем моделью Пойнтинга-Томсона-Ишлинского, схему которой можно представить в виде структурной формулы РТI=Н– Н|N= Н–

KV. Из Рис. 1.3 видно, что модель стандартного линейного твердого тела Пойнтинга-Томсона—Ишлинского представляет собой последовательное соединение пружины и элемента Кельвина-Фойгта. В работе [20] Ишлинский А.Ю. также отмечает возможность иллюстрации частных случаев представленной механической модели с соответствующим упрощением ее конструкции. Например, если удалить внутреннюю пружину (Рис. 1.3в), то получится модель Максвелла, лишённая последствия, а если, оставив внутреннюю пружину, заменить внешнюю пружину жестким стержнем ($b = \infty$), то модель будет соответствовать модели Кельвина-Фойгта (Рис. 1.3г).

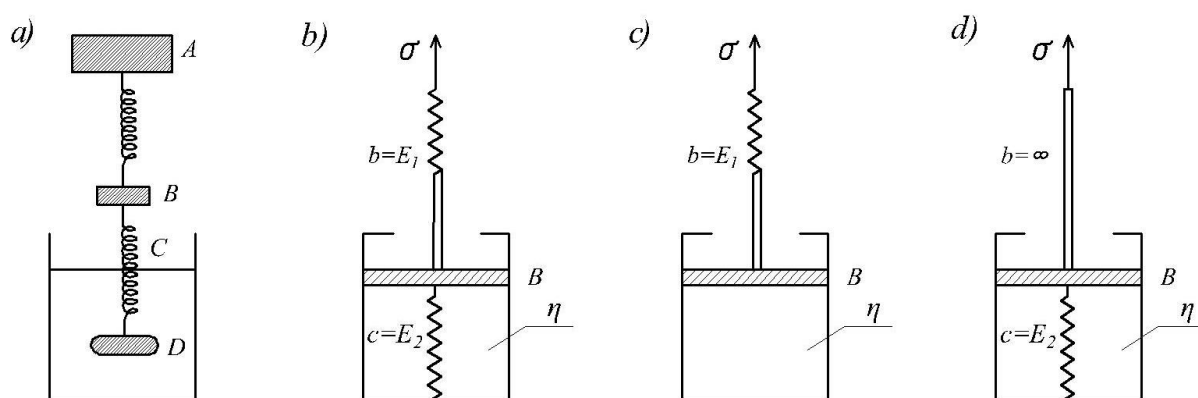


Рисунок 1.3 - Схема механической модели стандартного линейного твердого тела: а) модель Пойнтинга-Томсона [201]; б) модель Ишлинского [18]; в), г) частные случаи модели Ишлинского [20]

Следует заметить, что Пойнтинг, Томсон и Ишлинский представили стандартное линейное твердое тело в виде механической модели (Рис.1.3а,б), а ее схематическое изображение в виде пружин и демпферов было впервые приведено Зинером (Рис. 1.2б) [14] и Ржаницыным А.Р. (Рис. 1.2а,б) [50]. Позднее данные схемы стали широко использовать и другие ученые, такие как Бленд, Работнов Ю.Н. и их последователи. Уравнения модели, представленной на рис. 1.2б, были также впервые записаны Зинером в 1948 году [14] и Ржаницыным А.Р. в 1949г. [50]. В связи с приведенными рассуждениями данную модель будем в дальнейшем называть моделью Зинера-Ржаницына, которая имеет формулу

$ZR=N|(H-N)= N|M$. В своей книге 1960г. Сорокин Е.С. также называет модель стандартного линейного тела моделью упруго-вязкого тела Ишлинского и Ржаницына [52].

Зинер обратил внимание на важность соотношения $\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} = \frac{E_0}{E_\infty}$, с помощью которого можно определить неизвестные величины при известных трех параметрах модели. Ржаницын А.Р. показал, что обе модели, приведенные на Рис.1.2, описываются одним и тем же математическим уравнением (1.5) с точностью до коэффициентов. Эквивалентность моделей стандартного линейного твердого тела Кельвина (Рис.1.2а) и Максвелла (Рис.1.2б) также отмечалась в работах [103, 249].

В литературе встречаются работы, в которых модель стандартного линейного тела некоторые исследователи называют телом Кельвина [8, 32, 48, 113, 114].

Как известно, зачастую авторы приходят к похожим результатам, пользуясь одними и теми же математическими моделями для описания явлений и процессов в различных областях науки, таких как механика, геотехника, электротехника или биомеханика, при этом оставаясь в неведении относительно недавних достижений ученых в смежных областях. Так, Christie [92] показал, что уравнения данной модели совпадают с уравнениями, представленными в 1939 году в работе Merchant по геомеханике [181], в которой исследовалось одноосное отвердевание глинистых пород.

1.1.2.2 Трехэлементные модели стандартной линейной жидкости

Трехэлементные вязкие модели [3] в литературе получили название моделей Джеффриса [49, 141, 156, 176] или моделей стандартной линейной жидкости [156, 176]. Схемы данных моделей состоят из амортизатора, присоединенного последовательно к элементу Кельвина-Фойгта $N-KV$ (Рис.1.4а) или параллельно к элементу Максвелла $N|M$ (Рис.1.4б). Некоторые авторы [176, 297] ошибочно называют модели стандартной линейной твердой жидкости моделями Зинера или анти-Зинера, не зная о работе Джеффриса.

Уравнение данной модели было записано Джеффрисом в следующем виде [139]:

$$n \left(S + t_2 \frac{dS}{dt} \right) = F + \frac{I}{t_1} \int F dt, \quad (1.6)$$

где S - деформация, F – напряжение, n, t_1, t_2 - некоторые постоянные. Джеффрис также рассматривал возможность описания поведения неидеально упругих тел при помощи упруго-вязких соотношений гипотезы Максвелла или гипотезы Фойгта, которые являются частными случаями уравнения (1.6) при $t_2 = 0$ и $t_1 = \infty$, соответственно [139, 140]. Позднее Джеффрис более подробно изложил свои выкладки в книге [141], третье издание которой было также переведено на русский язык [12].

Уравнение (1.6) может быть переписано в виде:

$$\sigma + \tau_\varepsilon D\sigma = \eta_0 (D\varepsilon + \tau_\sigma D^2\varepsilon), \quad (1.7)$$

где $\tau_\varepsilon = (\eta_1 + \eta_2) / E$, $\tau_\sigma = \eta_2 / E$, $\eta_0 = \eta_1$ для модели на рис.1.4а; $\tau_\varepsilon = \eta_1 / E$, $\tau_\sigma = \eta_1 \eta_2 / E(\eta_1 + \eta_2)$, $\eta_0 = \eta_1 + \eta_2$ для модели на рис.1.4б; η_0 - релаксированная вязкость модели, η_∞ - нерелаксированная вязкость модели. По аналогии с моделями стандартного линейного твердого тела для моделей стандартной линейной жидкости выполняется следующее соотношение $\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}$.

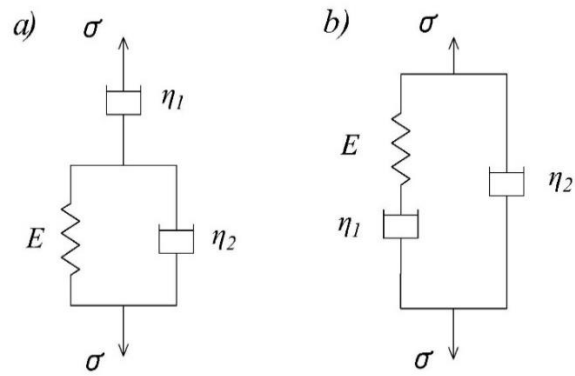


Рисунок 1.4 - Схемы трехэлементных моделей стандартной линейной жидкости: а) N–KV элемент; б) N|M элемент.

В 1949 году Ржаницын А.Р. привел обе схемы модели стандартной линейной жидкости, а также показал, что обе модели описываются одним и тем же дифференциальным уравнением второго порядка с разницей лишь в коэффициентах [50].

1.1.3. Четырехэлементные модели

1.1.3.1 Четырехэлементные модели первого типа

На рис.1.5 представлены четырехэлементная модель первого типа и ее эквивалентные схемы [3]. Четырехэлементная модель первого типа, называемая также моделью Бюргерса [4, 33, 83, 84, 156, 176, 257, 296], получается при последовательном соединении элементов Максвелла и Кельвина-Фойгта, что можно обозначить как (Н–N)–(Н|N)=M–KV (Рис.1.5а). В литературе данную модель называют также жидкостью Бюргерса (Андрате) [156].

Уравнение, определяющее зависимость между напряжением и деформацией, имеет вид:

$$\sigma + p_1 D\sigma + p_2 D^2\sigma = q_1 D\varepsilon + q_2 D^2\varepsilon, \quad (1.8)$$

где $p_2 = \frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}$; $p_1 = \frac{E_1\eta_2 + \eta_1(E_1 + E_2)}{E_1E_2}$; $q_2 = \frac{\eta_1\eta_2}{E_2}$; $q_1 = \eta_1$ - для модели на Рис.1.5а.

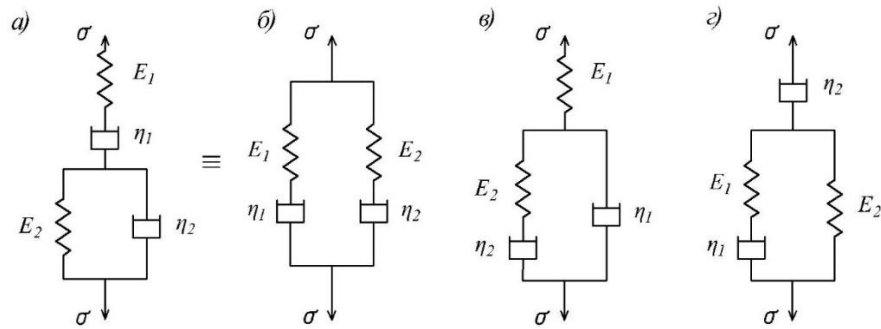


Рисунок 1.5 - Схемы четырехэлементных моделей первого типа: модель Бюргерса и ее эквивалентные схемы.

В работе [2] показано, что поведение любого полимера, вязкоупругие свойства которого описываются при помощи модели на рис.1.5а, могут быть одинаково точно описаны и при помощи модели на рис.1.5б, а постоянные одной модели выражены через эквивалентные постоянные другой. Хотя в математическом отношении данные модели равноценны, но, с точки зрения интерпретации физического смысла, модель на рис.1.5а имеет преимущества и чаще применяется.

1.1.3.2 Четырехэлементные модели второго типа

Четырехэлементные модели второго типа [3] представлены на рис.1.6. Данные модели называют также нестандартными четырехпараметрическими моделями Фойгта (Рис.1.6а) и Максвелла (Рис.1.6б) соответственно [257]. Модель на рис.1.6в называют также обобщенной четырехпараметрической моделью стандартного линейного твердого тела [156].

Уравнение, определяющее зависимость между напряжением и деформацией, имеет вид:

$$\sigma + p_1 D\sigma = q_0 \varepsilon + q_1 D\varepsilon + q_2 D^2 \varepsilon, \quad (1.9)$$

где $p_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1 + E_2}$; $q_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 + E_2}$; $q_1 = \frac{\eta_2 E_1 - \eta_1 E_2}{E_1 + E_2}$; $q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ для модели на

Рис.1.6а.

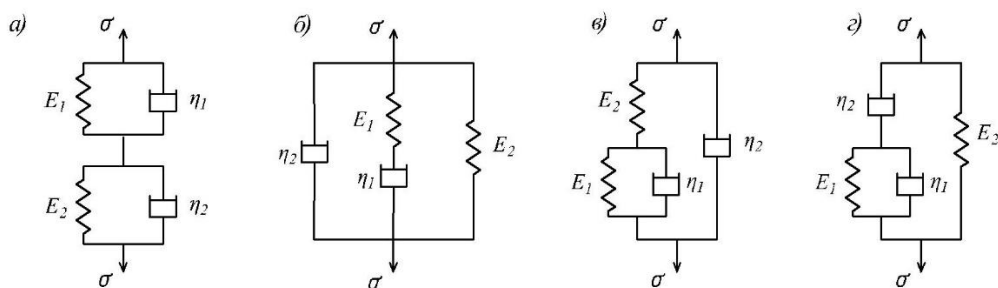


Рисунок 1.6 - Схемы четырехэлементных моделей второго типа.

1.1.4 Многоэлементные модели

Стандартные трех- или четырехэлементные модели могут описывать наблюдаемое поведение вязкоупругих материалов с достаточно хорошим приближением. Как правило, однако, представление поведения большинства вязкоупругих материалов требует моделей с большим или даже бесконечным числом элементов. При этом Ржаницын А.Р. определил важные правила, позволяющие сделать вывод о физическом смысле любой модели вязкоупругости [50]. Из его выводов следует, что реологические уравнения описывают поведение вязкоупругого твердого тела, если они включают слагаемое $E_0 \varepsilon$, в противном случае такие уравнения описывают поведение вязкоупругой жидкости.

Эти правила будут использоваться в дальнейшем для определения типа многоэлементных моделей. Аналогичные рассуждения можно найти в работе Flugge [105], в которой автор предоставил классификацию вязкоупругих моделей, показывающую, что все они могут быть разделены на две группы: модели твердых тел и модели жидкостей.

1.1.4.1 Обобщенные модели Максвелла

Добавляя дополнительные элементы Максвелла к стандартной четырехпараметрической модели Максвелла, мы получаем обобщенную модель Максвелла со структурной формулой $GM = M_1 | M_2 | M_3 \dots | M_n$, где n – число элементов Максвелла, соединенных параллельно [22, 54, 65, 103, 257] (Рис.1.7). Такая модель вводится для описания так называемого «реодиктического» поведения, когда в вязкоупругом материале присутствует установившееся течение [257]. В такой постановке данная модель не способна отображать

обратимую ползучесть, поэтому в литературе часто используют другие разновидности классической обобщенной модели Максвелла [211].

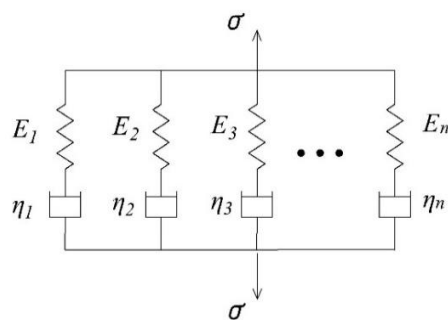


Рисунок 1.7 - Схема обобщенной модели Максвелла.

Добавляя дополнительные элементы Максвелла к стандартной трехпараметрической модели Максвелла, получаем обобщенную модель Максвелла с дополнительной пружиной, присоединенной параллельно (Рис.1.8а). Данную модель также называют моделью Вичерта [101, 148, 179, 184, 211, 230, 257, 269, 296]. Такая модель вводится для описания так называемого «ареодиктического» поведения, когда нет установившегося течения вязкоупругого материала [257].

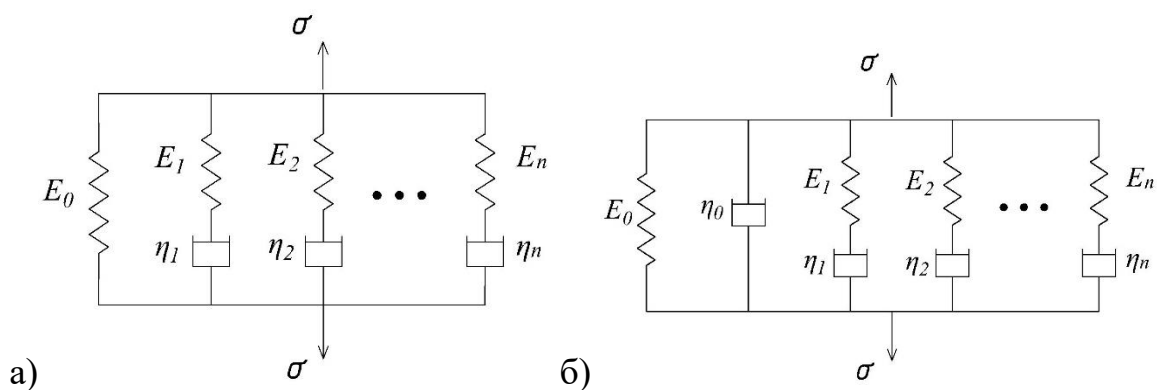


Рисунок 1.8 - Схемы обобщенной модели Максвелла с дополнительными элементами.

В литературе также известна обобщенная модель Максвелла, полученная путем добавления элементов Максвелла параллельно к элементу Фойгта [3] (Рис.1.8б). Данная модель использовалась Блендом в тесте на релаксацию напряжений для исследования функции релаксации материала и спектра времен релаксации.

1.1.4.2 Обобщенные модели Фойгта

Добавляя дополнительные элементы Фойгта к стандартной четырех- или трехпараметрической модели Фойгта, получаем разновидности обобщенной модели Фойгта или Кельвина (Рис.1.9) [3, 101, 257]. По аналогии с обобщенными моделями Максвелла, модель на рис.1.10а вводится для описания так называемого «реодиктического» поведения, а модель на рис.1.9б описывает «ареодиктическое поведение» вязкоупругого материала [257]. Модель на рис.1.9а использовалась Блендом в тесте на ползучесть деформаций для исследования функции ползучести материала, его податливости и спектра времен ретардации [3].

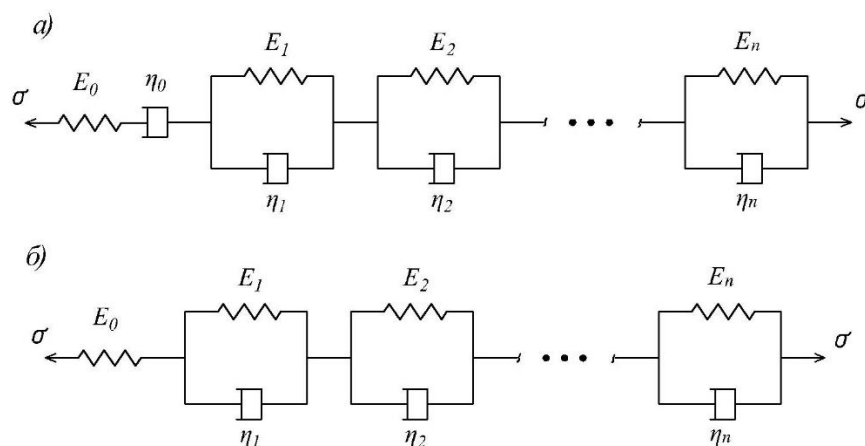


Рисунок 1.9 - Схемы обобщенной модели Фойгта.

Кристенсен ввел в рассмотрение обобщенную модель Кельвина, полученную путем последовательного соединения конечного числа элементов Кельвина-Фойгта. Данную модель можно обозначить структурной формулой $GKV=KV_1 - KV_2 - KV_3 - \dots - KV_n$, где n – число элементов Кельвина-Фойгта, соединенных последовательно (Рис.1.10) [22, 54, 103, 148, 249].

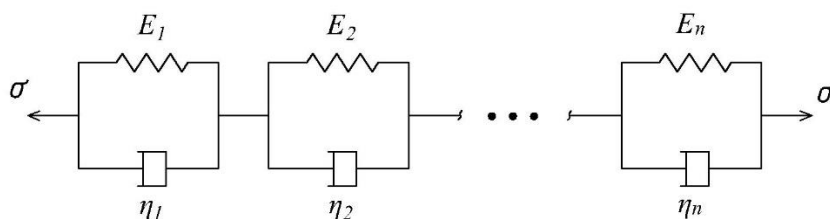


Рисунок 1.10 - Схемы обобщенной модели Кельвина [22].

Основные соотношения моделей выражены через напряжение и деформацию, однако данные соотношения могут быть записаны через силу F и удлинение a для элемента с площадью поперечного сечения A и длиной L , с учетом того, что $F = \sigma A$ и $a = \varepsilon L$. Так как правила для последовательного и параллельного соединения элементов одинаковы в обоих случаях, то каждая модель, описывающая зависимость между силой и удлинением, будет такой же по общему виду, что и модель, связывающая напряжения и деформации.

Некоторые исследователи проводят аналогию между схемами моделей вязкоупругих материалов и электрических контуров и их элементов, несмотря на их различный физический смысл [2, 118, 121, 257].

1.2 Модели вязкоупругости с дробными производными

Дробное дифференцирование и дробное интегрирование функций являются обобщением классического дифференцирования и интегрирования. Эти обобщения были впервые предложены Лиувилем в 1832г. [166] и Риманом в 1876г. [212] и легко формулируются в области обобщенных функций, в результате чего записывается выражение для дробной производной Римана-Лиувилля [51]:

$${}^{RL}D^\gamma \sigma = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sigma(t')}{\Gamma(1-\gamma)(t-t')^\gamma} dt', \quad (1.10)$$

где $0 < \gamma < 1$ - порядок дробной производной и $\Gamma(1-\gamma)$ - Гамма-функция.

В 1867г. А.К. Грюнвальд [120] и в 1868г. А.В. Летников [31] развивают подход к дробному интегродифференцированию, основанный на распространении

формулы Римана $f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n}$ на случай нецелых n :

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}. \quad (1.11)$$

А.В. Летников показал, что так определенное выражение для $D^{-\alpha} f$ совпадает с конструкцией дробной производной Римана-Лиувилля. Подход

Грюнвальда-Летникова и его сопоставление с другими определениями дробного интегродифференцирования изложены в работе [51].

Наряду с публикациями Лиувилля, Римана, Грюнвальда и Летникова, на рубеже 19-20 веков появилось немало других подходов к описанию дробной производной, часть из которых вступали в полемику с предшественниками, другие развивали и дополняли некоторые вопросы [122, 123, 268].

В литературе также известен другой подход к определению дробной производной: так называемой производной Герасимова-Капуто [9, 86]. Так, советский ученый Герасимов А.Н. ввел производную по времени порядка α ($0 < \alpha < 1$) для функции деформации $\varepsilon(t)$ [9]:

$$\frac{\partial^\alpha \varepsilon(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\dot{\varepsilon}(t-\tau) d\tau}{\tau^\alpha}. \quad (1.12)$$

Позднее было показано, что оба определения дробной производной по формулам Римана-Лиувилля и Герасимова-Капуто дают эквивалентное математическое описание поведения вязкоупругих материалов, когда нижний предел интегрирования стремится к $-\infty$ [74].

1.2.1 Первые упоминания о дробном исчислении в теории вязкоупругости

В течение двадцатого века многие авторы использовали дробное исчисление как эмпирический метод описания свойств вязкоупругих материалов. Первое упоминание о данном новом подходе в теории вязкоупругости встречается в работе Nutting [192], который предположил, что явление релаксации напряжений может моделироваться при помощи дробных порядков времени [76, 175]. Из серии экспериментов, которые охватывали целый ряд материалов от упругого твердого тела до вязкой жидкости, Nutting полагал, что общий закон деформации, который касается напряжения сдвига, деформации сдвига и времени, когда напряжение сдвига поддерживается постоянным, может быть выражен как

$$\varepsilon = a\sigma^m t^n, \quad (1.13)$$

где ε - деформация сдвига, σ - напряжение сдвига, t - время, a, m, n - константы. Nutting установил экспериментально, что значения n для вязкоупругих

материалов лежат в диапазоне от 0 до 1. Причем при $n=0$ и $m=1$ уравнение (1.13) описывает поведение линейного упругого твердого тела, а при $n=1$ и $m=1$ - поведение вязкой жидкости Ньютона [150]. Позднее Gemant обосновал необходимость применения дробных дифференциальных операторов для вычисления формы кривых релаксации для некоторых упруго-вязких жидкостей [155, 116].

Scott-Blair [235, 236] впервые предложил ввести дробную производную по времени, что одновременно объединяло наблюдения Nutting и Gemant [44, 45]. Scott-Blair рассмотрел линейный случай уравнения Nutting (1.13) при $m=1$, которое можно представить в виде:

$$\sigma = KD^n \varepsilon \quad (0 < n < 1), \quad (1.14)$$

где K – положительная постоянная, $D^n \varepsilon$ - дробная производная деформации по времени t . Уравнение (1.10) представляет собой модель Ньютоновской жидкости дробного порядка. Scott-Blair и его коллеги показали, что напряжение сдвига пропорционально дробной производной деформации сдвига по времени, однако не смогли дать определение дробной производной, которое удовлетворило бы математиков того времени [33] [175].

Следует отметить, что советский ученый Герасимов А.Н. в 1948 году предложил использовать модель вязкоупругости с дробными производными, аналогичную модели Scott-Blair, однако его работа осталась неизвестной для большинства западных ученых, в связи с отсутствием перевода его статьи на английский язык в течение долгого времени [220]. Так, Герасимов А.Н. предложил линейное соотношение между функциями деформации $\varepsilon(t)$ и напряжения $\sigma(t)$

$$\sigma(t) = \alpha \frac{\partial^\alpha \varepsilon(t)}{\partial t^\alpha}, \quad (1.15)$$

которое для предельных значений $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ превращается в закон упругости Гука и закон внутреннего трения Ньютона, соответственно.

Зависимость между напряжением и деформацией, выраженная через дробный оператор, также использовалась Bland для материалов, не проявляющих ни мгновенной упругости, ни длительного вязкого течения [3].

Несколько лет спустя тот же оператор дробного порядка также обсуждался Ю.Н. Работновым [48] со ссылкой на Герасимова [9] в монографии, опубликованной в Москве.

Простейший элемент с дробными производными, предложенный Scott Blair, был позднее назван Koeller «пружиной-демпфером» [149], а уравнение модели переписано в виде:

$$\sigma = E\tau_{\sigma}^{\gamma} D^{\gamma} \varepsilon \quad (0 < \gamma < 1), \quad (1.16)$$

где $\tau_{\sigma}^{\gamma} = \frac{\eta}{E}$ – время ретардации, γ - параметр памяти. Таким образом, Koeller показал, что в отличие от модели Scott-Blair, данное уравнение более точно описывает два граничных случая, а именно: при $\gamma = 0$ модель соответствует материалу с идеальной памятью (упругое твердое тело), а при $\gamma = 1$ описывает материал без памяти (вязкая жидкость).

Koeller указал в своей работе, что ранее советский ученый Работнов Ю.Н. предложил форму записи зависимости между напряжением и деформацией для модели стандартного линейного твердого тела с использованием интегрального оператора Вольтерры [47].

1.2.2 Простейшие модели вязкоупругости с дробными производными

В 60-е годы прошлого столетия были предложены простейшие модели вязкоупругости с использованием дробных производных. В их основе лежит замена производной целого порядка в классических моделях вязкоупругости на производную дробного порядка Римана-Лиувилля.

1.2.2.1 Модель Максвелла с дробными производными

Модель Максвелла с дробными производными (Рис.1.11б) была впервые представлена Мешковым С.И. в 1967 году [34] и имеет вид:

$$\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma = E_\infty \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \varepsilon, \quad (1.17)$$

где E_∞ - нерелаксированный (мгновенный) модуль упругости и τ_ε^γ - время релаксации.

Следует отметить, что Gemant первым предпринял попытку расширить классическую модель Максвелла и использовал в своей работе [115] модель с дробной производной порядка $1/2$:

$$\sigma + \tau_\varepsilon^{1/2} D^{1/2} \sigma = \eta \dot{\varepsilon}, \quad (1.18)$$

Модель Максвелла с дробной производной также была независимо введена в рассмотрение в работе Капуто [87].

Уравнение модели Максвелла с дробными производными можно представить в виде соотношений Больцмана-Вольтерры с дробно-экспоненциальной функцией в качестве слабо сингулярного ядра наследственности [58]

$$\sigma = E_\infty \left[\varepsilon - \int_0^t \varepsilon_\gamma (-t'/\tau_\varepsilon) \varepsilon(t-t') dt' \right] \quad (1.19)$$

или выразить через оператор дробного порядка [228]

$$\sigma = E_\infty [1 - \varepsilon_\gamma^* (t_\sigma^\gamma)] \varepsilon(t), \quad (1.20)$$

где $\varepsilon_\gamma^* (t_\sigma^\gamma) = \frac{1}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}$ - безразмерный дробный оператор Работнова [222],

$\varepsilon_\gamma (-t'/\tau_\varepsilon) = \frac{t'^{\gamma-1}}{\tau_\varepsilon^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t'/\tau_\varepsilon)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]}$ - дробно-экспоненциальная функция Работнова,

которая при $\gamma = 1$ сводится к обычной экспоненциальной функции.

Свой подход к описанию соотношений между напряжениями и деформациями Больцман называл теорией упругого последствия, основным предположением которой является то, что деформация тела зависит не только от силы, действующей в данный момент, но и от тех сил, которые действовали на тело в предшествующей его истории [52]. Данная теория считается наиболее

общей теорией, отражающей все особенности квазистатического и динамического поведения вязкоупругих материалов [17, 45, 46].

После перевода трудов Работнова Ю.Н. на английский язык его теория в мировой научной литературе получила название *теории наследственной механики твердого тела Ю.Н. Работнова*. Россихин Ю.А. и Шитикова М.В. позднее показали эквивалентность реологических уравнений моделей вязкоупругости с дробными производными и уравнений обобщенной теории Работнова [218]. Исторический сравнительный анализ работ российских и западных ученых, использующих дробное исчисление в механике твердого тела с 1940-х по 1970-е годы представлен в [213].

Koeller [150] представил модель, состоящую из конечного числа элементов Максвелла с дробными производными, соединенных параллельно (Рис.1.12а), и записал зависимость между деформацией и общим напряжением, которое является суммой напряжений в отдельных элементах модели Максвелла. Соотношение между напряжением и деформацией системы, выраженное через безразмерный дробный оператор Работнова, имеет вид:

$$\sigma = \sum_{n=0}^N \sigma_n = E_{\infty n} [1 - \varepsilon_{\gamma_n}^* (t_n^{\gamma_n})] \varepsilon(t). \quad (1.21)$$

1.2.2.2 Модель Кельвина-Фойгта с дробными производными

Модель Кельвина-Фойгта с дробными производными (Рис.1.11а) была впервые представлена Шермергором Т.Д. в 1966 году [58] и имеет вид:

$$\sigma = E_0 \varepsilon + E_0 \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \varepsilon, \quad (1.22)$$

где E_0 - релаксированный модуль упругости. При $\gamma = 1$ модель, описываемая уравнением (1.22), превращается в классическую модель Кельвина-Фойгта (1.4).

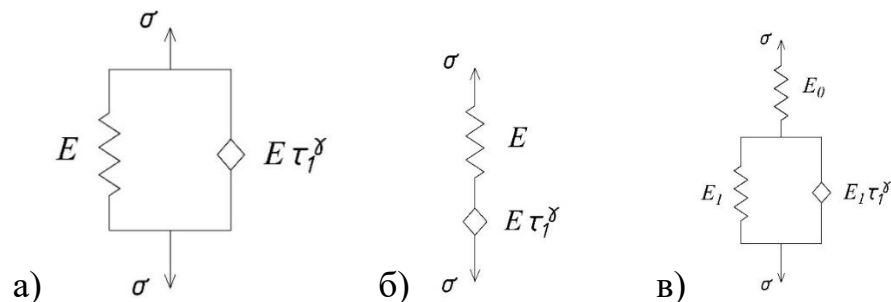


Рисунок 1.11 - Схемы простейших моделей вязкоупругости с дробными производными: а) модель Кельвина-Фойгта; б) модель Максвелла; в) модель стандартного линейного твердого тела.

Преимущество модели с дробной производной по сравнению с классической моделью Кельвина-Фойгта состоит в соответствии теоретических выкладок с экспериментальными данными [100]. Также для однозначного определения зависимости между функциями напряжения и деформации необходимо, чтобы изначально были известны три параметра (константы): E_0, τ_σ и γ . Для идентификации параметров модели Кельвина-Фойгта с дробной производной был разработан итерационный численный метод, показавший хорошее сопоставление с экспериментальными данными для вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластика [39].

Почти одновременно с Д.Т. Шермергором дробную модель Кельвина-Фойгта представили в своих работах западные ученые [86, 247], а также Ш. Ватанабэ [266], чья работа появилась раньше, но была опубликована в журнале японского общества текстильной промышленности, поэтому оставалась малоизвестной для исследователей в области механики.

Уравнение модели Кельвина-Фойгта с дробными производными можно также представить в виде соотношений Больцмана-Вольтерры с дробно-экспоненциальной функцией в качестве слабо сингулярного ядра наследственности [58]

$$\varepsilon = J_0 \int_0^t \mathfrak{E}_\gamma (-t' / \tau_\sigma) \sigma(t-t') dt' \quad (1.23)$$

или выразить через дробный оператор [228]

$$\varepsilon = J_0 \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_\sigma^\gamma) \sigma(t). \quad (1.24)$$

Koeller [150] представил модель, состоящую из конечного числа элементов Кельвина-Фойгта с дробными производными, соединенных последовательно (Рис.1.126), и записал зависимость между напряжением и общей деформацией,

которая является суммой деформаций отдельных элементов. Соотношение между напряжением и деформацией системы, выраженное через безразмерный дробный оператор Работнова, имеет вид:

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^N \varepsilon_n = J_{0n} \mathfrak{D}_{\gamma_n}^* (\tau_n^{\gamma_n}) \sigma(t), \quad (1.25)$$

где $N+1$ - общее число элементов в модели.

Katicha et.al. [143] получили аналитические выражения для функции ползучести для обобщенной модели Максвелла с дробными производными и функции релаксации для обобщенной модели Кельвина-Фойгта с дробными производными.

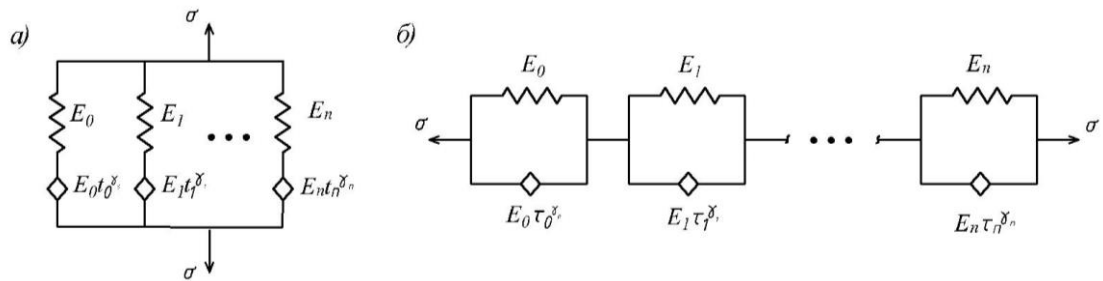


Рисунок 1.12 - Схемы моделей вязкоупругости с конечным числом элементов: а) модель Максвелла; б) модель Кельвина-Фойгта.

1.2.3 Модель стандартного линейного твердого тела с дробными производными

Модель стандартного линейного твердого тела с дробными производными (Рис. 1.11в) была впервые представлена Мешковым С.И. в 1967 году [34] и имеет вид:

$$\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma = E_0 (\varepsilon + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \varepsilon), \quad (1.26)$$

где $\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)^\gamma = \frac{E_0}{E_\infty} = \frac{J_\infty}{J_0}$, $J_\infty = E_\infty^{-1}$ - мгновенная (нерелаксированная) податливость,

$J_0 = E_0^{-1}$ - длительная (релаксированная) податливость.

Данная модель также была позже независимо введена в рассмотрение в работе Капуто в 1971 году [88].

Модель стандартного линейного твердого тела с дробными производными (1.26) известна в литературе [77, 137, 205, 267] как четырехпараметрическая дробная модель, поскольку для однозначного определения зависимости между функциями напряжения и деформации необходимо, чтобы изначально были заданы четыре параметра (константы): $E_0, E_\infty, \tau_\varepsilon$ и γ .

Уравнение модели стандартного линейного тела с дробными производными можно также представить в виде соотношений Больцмана-Вольтерры с дробно-экспоненциальной функцией в качестве слабо сингулярного ядра наследственности [47, 117]

$$\sigma = E_\infty [\varepsilon - \nu_\varepsilon \int_0^t \partial_\gamma (-t' / \tau_\varepsilon) \varepsilon(t-t') dt'] \quad (1.27)$$

или выразить через дробный оператор [228]

$$\sigma = E_\infty [1 - \nu_\varepsilon \partial_\gamma^* (t_\sigma^\gamma)] \varepsilon(t), \quad (1.28)$$

где $\nu_\varepsilon = \Delta E E_\infty^{-1}$, $\Delta E = E_\infty - E_0$ - дефект модуля упругости.

Применения простейших моделей вязкоупругости, в частности их приложение к решению динамических контактных задач, обсуждалось многими авторами, обзор работ которых представлен в [1, 167, 214, 220, 231, 296], а также в недавней статье Vonfanti и др. [81], включая такие примеры, как моделирование тканей мозга, стенок артерий, раковых клеток, поведение горных пород, песчаников и различных полимерных материалов.

1.2.3 Другие модели вязкоупругости с дробными производными

В литературе также известны более сложные модели вязкоупругости с большим количеством параметров. Это связано с тем, что такие модели позволяют варьировать реологические параметры в широких пределах и, что более важно, позволяют получить наилучшее соответствие экспериментальных данных с теоретическим результатом.

Обобщение вязкоупругих моделей дробного порядка (1.17), (1.22), (1.26) было впоследствии развито несколькими способами:

1. Добавлением дополнительных членов с дробной производной с различными дробными порядками и/или времен релаксации/ретардации в реологических уравнениях [48, 72, 75, 76, 107, 108, 125, 126, 131, 147, 149, 150, 177, 193, 194, 205, 216, 220, 248, 267];

2. Заменой постоянных порядков дробных производных на зависящие от времени величины $\gamma_i(t)$ (обзор приложений операторов переменного дробного порядка был недавно сделан в работе [199]);

3. Использованием моделей распределенного дробного порядка [97];

4. Применением дробных производных к нелинейным характеристическим величинам [2, 40, 63, 64, 69, 70, 78-80, 95, 98, 106, 110-112, 124, 145, 147, 165, 172, 185, 209, 245, 246, 271, 303,];

5. Использованием дробной производной для описания обоих типов релаксации: сдвиговой и объемной, что приводит к зависящим от времени операторам для всех вязкоупругих характеристик материала: модуля Юнга, модуля сдвига, объемного модуля, констант Ламе и коэффициента Пуассона [23, 59, 155, 223-226, 228];

6. Заменой всех пружин и амортизаторов в классических моделях на элементы Скотта-Блэра с дробной производной [131, 132, 167, 178, 233, 234, 264, 273, 297];

7. Заменой постоянной вязкости амортизатора (на больших временных масштабах [104]) на зависящую от времени величину $\eta(t)$, изменяющуюся по различным законам: линейному [82], степенному [278] и экспоненциальному [295].

1.3 Модели упругих и вязкоупругих оснований

Влияние реакции основания на динамическое поведение плит, балок и оболочек представляет общий интерес для инженеров, занимающихся проектированием конструкций, в течение последних нескольких десятилетий. Для вычисления силы реакции основания в динамических задачах было предложено несколько моделей.

1.3.1 Модель Фусса-Винклера

Первой попыткой описать реакцию основания была модель, согласно которой основание считается упругим [29, 144, 283]. В литературе встречается несколько названий данной модели, в которой возникающие деформации в грунтовом основании пропорциональны приложенному напряжению. В работах западных авторов модель упругого основания называют моделью Винклера, первое упоминание о которой относится к 1867 г. [270] и которая впоследствии была развита Циммерманом [302]. Однако ретроспективный анализ показал, что модель Винклера впервые была предложена русским академиком Н.И. Фуссом в 1801г. в работе о движении повозок по дороге [56], в которой было выдвинуто положение о прямой пропорциональности давления местной осадке грунта [6, 11, 30, 57]. Таким образом, в русскоязычной литературе упругую модель основания принято называть моделью Фусса-Винклера, согласно которой

$$p(x,t) = kw(x,t), \quad (1.29)$$

где $w(x,t)$ - перемещение по вертикали поверхности основания, k – коэффициент жесткости основания.

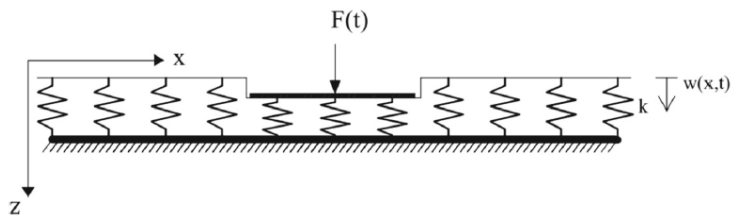


Рисунок 1.13 - Схема основания по модели Фусса-Винклера.

1.3.2 Двух- и трехпараметрические модели

Позднее однопараметрическая модель Фусса-Винклера была развита и дополнена несколькими учеными, в результате чего появились так называемые двух- и трехпараметрические модели основания [144]. Двухпараметрические модели отличаются тем, что верхний слой соединяет элементы основания друг с другом, поэтому помимо вертикальной составляющей силы реакции основания,

учитываются также касательные напряжения и распределительная способность грунта. К двухпараметрическим моделям основания относятся модели Филоненко–Бородича, Гетеньи, Пастернака, Власова, Рейсснера [144, 283].

В модели Филоненко-Бородича верхний слой основания представляет собой растянутую упругую мембрану (Рис.1.14). Сила реакции основания вычисляется по формуле [55]:

$$p(x, y, t) = kw(x, y, t) - T \nabla^2 w(x, y, t), \quad (1.30)$$

где T – сила растяжения мембраны, ∇^2 - оператор Лапласа.

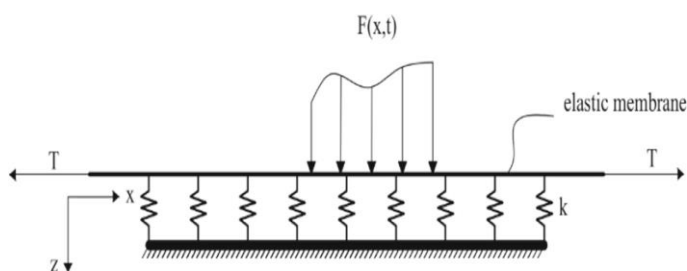


Рисунок 1.14 - Схема основания по модели Филоненко – Бородича.

Модель Пастернака предполагает наличие сдвиговых взаимодействий между пружинными элементами, что осуществляется за счет введения дополнительного сдвигающего слоя, объединяюще верхние концы пружин (Рис.1.15) Сила реакции основания вычисляется по следующей формуле [43]:

$$p(x, y, t) = kw(x, y, t) - G \nabla^2 w(x, y, t), \quad (1.31)$$

где G – коэффициент вязкости, соответствующий сдвиговой деформации.

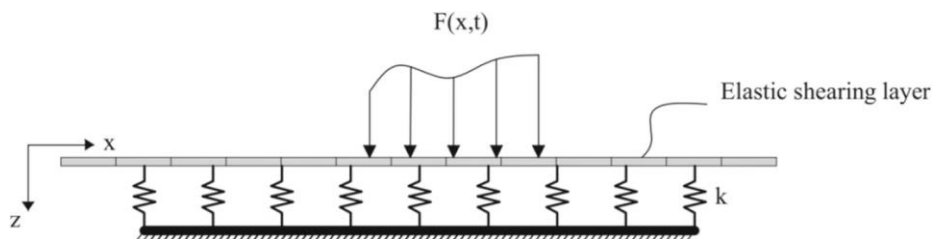


Рисунок 1.15 - Схема основания по модели Пастернака.

В модели Гетеньи верхний слой основания представлен тонкой упругой пластинкой (Рис.1.16). Сила реакции основания вычисляется по формуле [130]:

$$p(x, y, t) = kw(x, y, t) + D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y, t), \quad (1.32)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины.

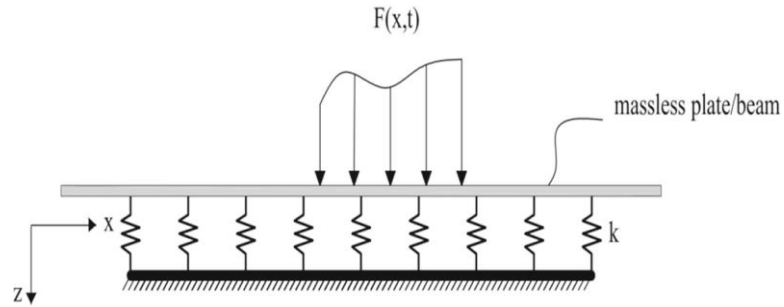


Рисунок 1.16 - Схема основания по модели Гетеньи.

В 1949г. советский ученый-механик Власов В.З. представил двухпараметрическую континуальную модель основания (Рис.1.17). Этот метод упрощает модель упругой сплошной среды путем наложения нескольких ограничений на верхний слой. Сила реакции основания вычисляется по формуле [5]:

$$p(x, y, t) = kw(x, y, t) - k_1 \nabla^2 w(x, y, t), \quad (1.33)$$

где k и k_1 – параметры модели.

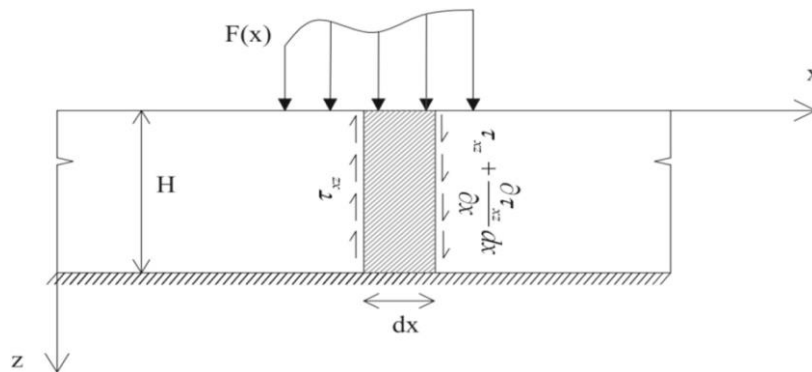


Рисунок 1.17 - Схема основания по модели Власова.

Предполагая, что напряжения в плоскости во всем слое основания ничтожно малы и что горизонтальные смещения на верхней и нижней поверхности слоя основания равны нулю, Рейсснер получил следующую двухпараметрическую модель [210]:

$$p(x, y, t) = c_1 w(x, y, t) - c_2 \nabla^2 w(x, y, t) - \frac{c_2}{4c_1} \nabla^2 p(x, y, t), \quad (1.34)$$

где $c_1 = E/H$, $c_2 = HG/3$; E и G - упругие постоянные основания, H - толщина слоя основания.

В работе [13] было показано, что несмотря на различие в названии, все двухпараметрические модели основания сводятся к единой обобщенной модели упругого основания с двумя коэффициентами или модели Вигхардта–Кармана–Филоненко–Бородича–Пастернака–Власова–Леонтьева–Рейсснера–Хетеньи.

В модели, предложенной Керром в 1964 году [144], основание было схематично представлено в виде балки, погруженной в упругую среду (Рис.1.18). Соответственно, для вычисления силы реакции основания необходимо задать три независимых параметра c (кН/м³), k (кН/м³) и G (кН/м):

$$\left(1 + \frac{k}{c}\right)p(x, y, t) - \frac{G}{c}\nabla^2 p(x, y, t) = kw(x, y, t) - G\nabla^2 w(x, y, t), \quad (1.35)$$

где c и k - коэффициенты жесткости пружин, G - изгибная жесткость балки.

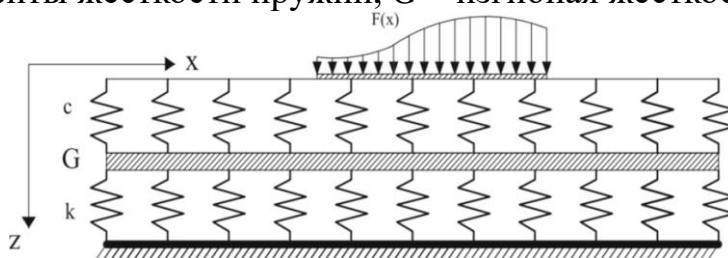


Рисунок 1.18 – Схема трехпараметрической модели основания Керра.

Обзор динамического поведения пластин и балок на упругом основании представлен в работах [44, 263, 283].

1.3.3 Модели вязкоупругих оснований

Основным недостатком линейно-упругой модели является непоследовательность в представлении вязкоупругого поведения материалов. В связи с этим к упругим моделям Фусса-Винклера и Пастернака был добавлен вязкий элемент (или элементы), в результате чего было предложено несколько вязкоупругих моделей основания, обзор которых представлен в работе Younesian и др. [283].

Так, основание по модели Кельвина-Фойгта получается на основе модели Фусса-Винклера, при помощи добавления амортизатора параллельно к пружине (Рис.1.19). Сила реакции основания в этом случае определяется следующим образом:

$$p(x, y, t) = kw(x, y, t) + c \frac{\partial}{\partial t} w(x, y, t), \quad (1.36)$$

где c – коэффициент вязкости амортизатора.

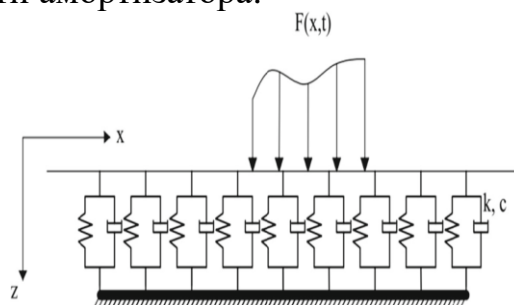


Рисунок 1.19 – Схема вязкоупругого основания по модели Кельвина-Фойгта.

Модель Максвелла для вязкоупругого основания получается на основе модели Фусса-Винклера, при помощи добавления амортизатора последовательно к пружине (Рис.1.20):

$$p(x, y, t) = k\Delta_1(x, y, t) = c \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2(x, y, t), \quad (1.37)$$

$$w(x, y, t) = \Delta_1(x, y, t) + \Delta_2(x, y, t),$$

где Δ_1 и Δ_2 – перемещения пружины и амортизатора соответственно (Рис.1.20).

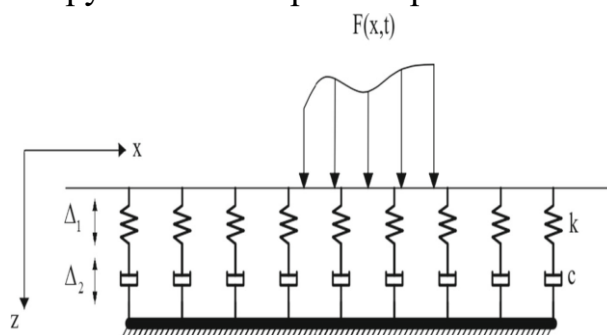


Рисунок 1.20 – Схема вязкоупругого основания по модели Максвелла.

Вязкоупругое основание по модели Пойнтинга-Томсона-Ишлинского получается путем последовательного соединения пружины и элемента Кельвина-Фойгта (Рис. 1.21а):

$$p(x, y, t) = k_2 \Delta_2(x, y, t) + k_1 \Delta_{s1}(x, y, t) = k_2 \Delta_2(x, y, t) + c_1 \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{d1}(x, y, t), \quad (1.38)$$

$$w(x, y, t) = \Delta_{s1}(x, y, t) + \Delta_{d1}(x, y, t) = \Delta_2(x, y, t).$$

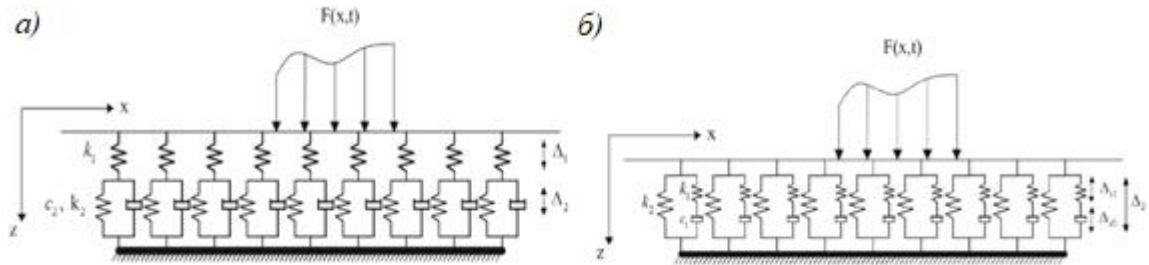


Рисунок 1.21 – Модели вязкоупругих оснований:

а) модель Пойнтинга-Томсона-Ишлинского; б) модель Зинера-Ржаницына.

Вязкоупругое основание по модели Зинера-Ржаницына получается путем параллельного соединения пружины и элемента Максвелла (Рис. 1.21б):

$$p(x, y, t) = k_1 \Delta_1(x, y, t) = k_2 \Delta_2(x, y, t) + c_2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2(x, y, t), \quad (1.39)$$

$$w(x, y, t) = \Delta_1(x, y, t) + \Delta_2(x, y, t).$$

Вязкоупругое основание по модели Бюргерса можно получить при помощи последовательного соединения элемента Кельвина-Фойгта и элемента Максвелла (Рис. 1.22). Сила реакции основания в этом случае определяется следующим образом:

$$p(x, y, t) = k_1 \Delta_2(x, y, t) = c_1 \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2(x, y, t) = k_2 \Delta_3(x, y, t) + c_2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta_3(x, y, t), \quad (1.40)$$

$$w(x, y, t) = \Delta_1(x, y, t) + \Delta_2(x, y, t) + \Delta_3(x, y, t).$$

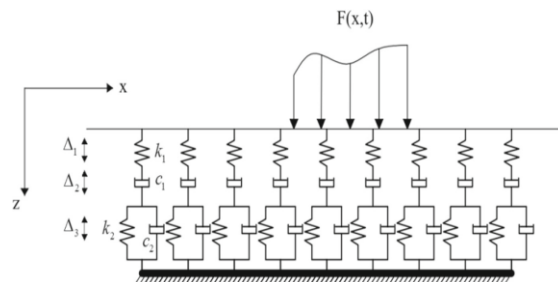


Рисунок 1.22 – Схема вязкоупругого основания по модели Бюргерса.

Двухпараметрическая модель Пастернака также может быть обобщена для случая вязкоупругого основания. В качестве примера на рис. 1.23 приведена модель вязкоупругого основания типа Пастернака, демпфирующие свойства которого описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной. Сила реакции основания в этом случае определяется следующим образом:

$$p(x, y, t) = kw(x, y, t) + c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w(x, y, t). \quad (1.41)$$

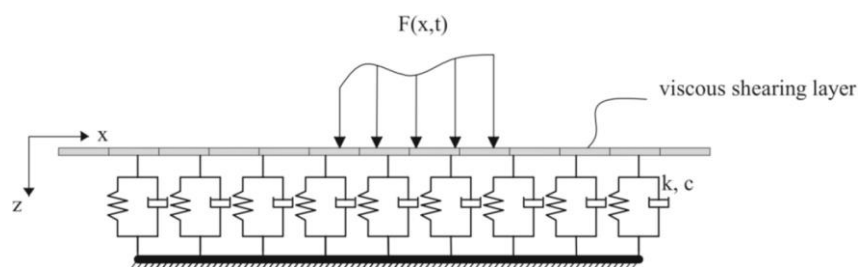


Рисунок 1.23 – Схема вязкоупругого основания на основе модели Пастернака.

Остальные модели вязкоупругих оснований, учитывающие деформации сдвига, могут быть получены на основе различных моделей вязкоупругости по аналогии с моделями оснований типа Фусса-Винклера. В литературе известны также модели оснований с так называемым «грунтовым подвесом», то есть механические системы, состоящие в общем случае из пружин, амортизаторов и масс, позволяющие учесть инерционные свойства грунта при расчете сооружений [53].

1.3.4 Модели оснований с дробной производной

Younesian и др. [54] отметили, что одним из будущих направлений в механике грунтов является разработка новых моделей оснований с учетом нелинейности и демпфирования с помощью соотношений с операторами дробного порядка. Действительно, в настоящее время все большее распространение получают модели вязкоупругих оснований Фусса-Винклера или Пастернака с использованием дробных производных, поскольку дробное исчисление имеет широкое приложение в динамических задачах механики деформируемого твердого тела и строительной механики. Основы и приложения дробного исчисления к динамике сооружений обобщены в работах Ю.А.

Россихина и М.В. Шитиковой [214, 220, 223, 229]. Использование дробной производной позволяет получить данные, хорошо совпадающие с результатами экспериментальных исследований [119, 197, 215], в отличие от моделей вязкоупругости с производной целого порядка.

Начиная с 2005 г., различные модели вязкоупругости с дробными производными (модели Кельвина-Фойгта, Максвелла, стандартного линейного твердого тела и Бюргера) часто используются в механике грунтов для рассмотрения вязкоупругих свойств каркаса грунта [66, 89, 90, 93, 127-129, 136, 159, 164, 169, 171, 196, 250, 251, 253, 261, 262, 272, 274, 277, 280-282, 292, 294, 295, 299, 300], включая задачи взаимодействия сваи и грунта [168, 170, 260, 277, 284, 287]. Обзор моделирования при помощи дробного исчисления для геотехнической инженерии был сделан в работе Lai и др. [159], в котором подчеркивается, что модели с дробной производной продемонстрировали преимущества при описании наследственного поведения с длительной памятью и являются наиболее эффективными и точными подходами для описания реологии геотехнических процессов в различных типах почв, в том числе: в мягких грунтах [127-129, 250, 262, 282], глинах [93, 274, 300], горных породах [89, 90, 171, 272, 294, 295], оттаивающих мерзлых грунтах [164, 287] и водонасыщенных грунтах [66, 170, 282]. Обзор применения моделей вязкоупругости с дробными производными для описания свойств различных грунтов приведен в Таблице 1.

Таблица 1.1 – Модели грунтов с дробной производной

Название модели	Вид грунта
Модель Скотта-Блэра	Скальные породы [129]; Мягкие глины [282]; Водонасыщенные грунты, почвы зоны оползней, мерзлые грунты, соляные породы [282]
Модель Максвелла	Скальные породы [272]

Модель Кельвина-Фойгта	Скальные породы [128]; Глины [93]; Оттаивающие мерзлые грунты [287]; Почвы [292, 299]
Модель Пойнтинга-Томсона-Ишлинского (модель Мерчанта)	Многослойные водонасыщенные грунты [66]; Шанхайская морская глина [274]; Глины Наньша [300]
Модель Зинера-Ржаницына	Многослойная вязкоупругая пористая порода [91]
Модель Бюргерса	Мягкая глина [127]
Вязкоупруго-пластическая модель (модель Нишихара)	Скальные породы [89]; Соляные породы [90, 295]; Мягкая глина [262]; Каменная соль Чаншань [253]; Уголь [136]

1.4 Пластинки на вязкоупругом основании

В литературе имеются различные сведения об исследовании динамического поведения балок, пластин и оболочек, опирающихся на вязкоупругие основания с дробной производной. Первая статья в этой области была опубликована в 2001 году Россихиным Ю.А. и Шитиковой М.В. [217], которые исследовали свободные изгибные колебания шарнирно опертой вязкоупругой балки, покоящейся на вязкоупругом основании Фусса-Винклера, свойства которого описываются обобщенной моделью стандартного линейного твердого тела с различными параметрами дробности. Позже, в 2004 году, Атанакович и Станкович [73] проанализировали устойчивость упругого стержня на основании по модели стандартного линейного твердого тела с дробной производной. В дальнейшем многие исследования были посвящены динамическому поведению балок, опирающихся на основания по моделям с дробной производной, но далее мы ограничимся только рассмотрением задач о динамическом взаимодействии пластин на вязкоупругом основании, поскольку они являются основным объектом исследования в данной диссертационной работе.

Так, Zhu и др. [301] исследовали квазистатическую задачу о прямоугольной пластине, которая опирается на вязкоупругое основание типа Фусса-Винклера и подвергается воздействию равномерно распределенных нагрузок, при этом демпфирующие свойства основания описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной. Результаты исследования показывают, что вязкоупругая модель с дробной производной более адаптивна, чем классическая вязкоупругая модель. Влияние параметров модели на зависимость прогиба пластины от времени исследуется с помощью параметрического анализа. Модель Кельвина-Фойгта с дробной производной также использовалась в работе [299] для учета поведения грунтового основания с течением времени при вертикальной линейной нагрузке. Аналитическое решение для вычисления осадки основания выводилось с использованием преобразования Лапласа. Результаты показывают, что по сравнению с классической моделью Кельвина-Фойгта модель с дробной производной может обеспечить более точный прогноз долгосрочных осадок грунтового основания.

Этот подход был недавно развит в работе [202], где была показана важность применения модели Кельвина-Фойгта с дробной производной для описания вязкоупругого основания типа Фусса-Винклера, поддерживающего упругую прямоугольную пластину Кирхгофа-Лява. В работе было проанализировано динамическое поведение пластины, к которой в центре приложена сосредоточенная ступенчатая нагрузка, для различных типов граничных условий: все четыре грани пластины шарнирно-оперты (SSSS), все грани защемлены (CCCC) или когда две грани шарнирно-оперты и две другие защемлены (SCSC). Авторы подчеркивают, что модель основания целого порядка переоценивает демпфирование системы «пластина-основание», что приводит к недооценке прогибов пластины и связанных с ними напряжений.

Динамический анализ пластины с нелинейной жесткостью, опирающейся на основание, описываемое обобщенной моделью с дробным демпфированием, при случайном возбуждении, был проведен в работе [135]. Вязкоупругое основание моделировалось нелинейной пружиной, жесткость которой пропорциональна

кубической скорости перемещения, соединенной параллельно с элементом Скотта-Блэра, то есть при помощи нелинейной модели Кельвина-Фойгта с дробной производной. Определяющее дифференциальное уравнение получено методом Галеркина. Рассматривая далее только первую моду колебаний, авторы привели полученное уравнение к уравнению, описывающему динамическое поведение осциллятора Дуффинга при случайном возбуждении. Достоверность процедуры решения была подтверждена численно с использованием моделирования Монте-Карло.

Демпфирующие свойства вязкоупругого основания типа Фусса-Винклера можно также описать другими моделями, а именно: моделью Максвелла с дробной производной, как это было сделано в [290] для долгосрочной оценки оснований круговой пластины на глинистых грунтах, а также при помощи модели стандартного линейного твердого тела с дробной производной, которая, как известно [59], может быть представлена двумя механическими схемами, но описывается одним и тем же реологическим уравнением.

Так, поведение линейной упругой прямоугольной пластины с шарнирным опиранием по контуру на вязкоупругом основании типа Фусса-Винклера было исследовано в работе [288] с помощью модели Пойнтинга-Томсона-Ишлинского с дробными производными, которую авторы также называют дробной моделью Мерчанта. При этом использовался принцип соответствия с применением преобразований Лапласа для получения решений в замкнутой форме, описывающих динамическое поведение пластины при равномерно распределенной нагрузке. Прогиб плиты, изгибающий момент и реакция основания, рассчитанные с помощью модели с дробными производными, сравнивались с результатами, полученными с помощью аналогичной упругой модели и классической модели стандартного линейного твердого тела с производными первого порядка по времени. Подчеркивается, что песчаное основание имеет небольшое значение параметра дробности, в то время как для моделирования явления ползучести глиняного основания требуется большее значение порядка дробной производной. Результаты [288] показали, что данная

модель может использоваться для прогнозирования поведения конструкции плиты на многие десятилетия.

Второй вариант модели стандартного линейного твердого тела, то есть модель Зинера-Ржаницына с дробной производной, используется в работе [289] для изучения динамического поведения равномерно нагруженной прямоугольной тонкой фундаментной плиты на основании Фусса-Винклера. Показано, что модель стандартного линейного тела с дробными производными может учитывать процессы первичной и вторичной консолидации грунта основания.

В работах [144] и [135] отмечалось, что другой, наиболее часто используемой моделью упругого основания, является модель Пастернака. Эта модель была также обобщена для вязкоупругого случая с использованием дробного исчисления [85, 151-153]. Так, динамическое поведение прямоугольной упругой или вязкоупругой пластины на вязкоупругом основании, которое описывается двухпараметрической моделью Пастернака с демпфированием по модели Кельвина-Фойгта с дробной производной, анализируется в [151-153]. Разрешающие уравнения решались методом Галеркина и численным методом, корректность решений проверялась на примерах свободных колебаний. Взаимодействие между шарнирно опертой прямоугольной пластиной и основанием типа Пастернака, свойства которого задаются при помощи дробной модели Скотта-Блэра, рассматривалось в статье [85] для изучения перемещений и изгибающих моментов, изменяющихся во времени. На основе численных результатов авторы обнаружили, что порядок параметра дробности оказывает серьезное влияние на прогиб плиты и изгибающий момент, особенно на протяжении длительного периода времени. Также были изучены различия между моделями вязкоупругого основания Пастернака и Фусса-Винклера с производными дробного порядка.

Колебания пластин с геометрической или физической нелинейностью изучались в [21, 68, 69, 157, 158], а также в работах других авторов, обзор которых можно найти в [21]. Однако, колебания пластин и балок на вязкоупругом основании на основе моделей с дробной производной изучались в большинстве

случаев в линейной постановке. Задачи о нелинейных колебаниях конструкций на вязкоупругом основании мало изучены, чаще всего решение представлено для балок на основании [102, 138, 189, 207].

Нелинейное динамическое поведение изотропных тонких прямоугольных пластин, опирающихся на упругие линейные основания Фусса-Винклера, Пастернака и нелинейно-упругое основание Фусса-Винклера, было рассмотрено в [99]. Для решения задачи использовались основные уравнения фон Кармана, выраженные через функцию поперечного прогиба и функцию напряжений. Прогиб аппроксимирован при помощи одночленной формы колебаний, удовлетворяющей граничным условиям. Для получения дифференциального уравнения прогиба в центре пластины использовался метод Галеркина. Рассмотрены защемленные по контуру и шарнирно-опертые пластины с подвижным и неподвижным закреплением в плоскости для каждой грани.

1.5 Выводы по первой главе

1. В литературе встречается большое разнообразие названий одних и тех же моделей вязкоупругости, и зачастую многие авторы некорректно цитируют друг друга, не ссылаясь на первоисточники. Одной из основных ошибок в общепринятой классификации вязкоупругих моделей является некорректное авторство моделей стандартного линейного твердого тела. Сравнительный анализ работ российских и западных ученых показывает, что правильными названиями для двух вариантов стандартного линейного твердого тела должны быть следующие: модель Пойнтинга–Томсона–Ишлинского и модель Зинера–Ржаницына, поскольку эти ученые первыми представили графические схемы и математические уравнения для соответствующих моделей.

2. В настоящее время различные модели вязкоупругости с дробными производными используются в механике грунтов для рассмотрения вязкоупругих свойств каркаса грунта, включая задачи взаимодействия свай и грунта. Модели с дробной производной продемонстрировали преимущества при описании наследственного поведения с длительной памятью и являются наиболее

эффективными и точными подходами для описания реологии геотехнических процессов в различных типах почв.

3. Влияние реакции основания на динамическое поведение конструкций представляет общий интерес для инженеров и ученых в течение последних нескольких десятилетий. Большая часть научных трудов по динамике пластин на вязкоупругом основании на основе моделей с дробной производной рассматривалось в линейной постановке. Задачи о нелинейных колебаниях конструкций на вязкоупругом основании при воздействии различных видов внешней нагрузки мало изучены, решение для которых было представлено чаще всего для балок на основании.

ГЛАВА 2. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ПОМОЩИ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную упругую пластинку, шарнирно опертую по контуру, со сторонами a и b на вязкоупругом основании под действием поперечной нагрузки $q = q(x, y, t)$, зависящей от координат (x, y) и времени t (Рис.2.1). Вязкоупругие свойства основания Фусса-Винклера могут быть описаны различными моделями вязкоупругости, а именно: моделью Кельвина-Фойгта (Рис.2.1а), моделью Максвелла (Рис. 2.1б), моделью стандартного линейного твердого тела (схема Зинера-Ржаницына на Рис. 2.1в и схема Пойнтинга-Томсона-Ишлинского-Мерчанта на Рис. 2.1г).

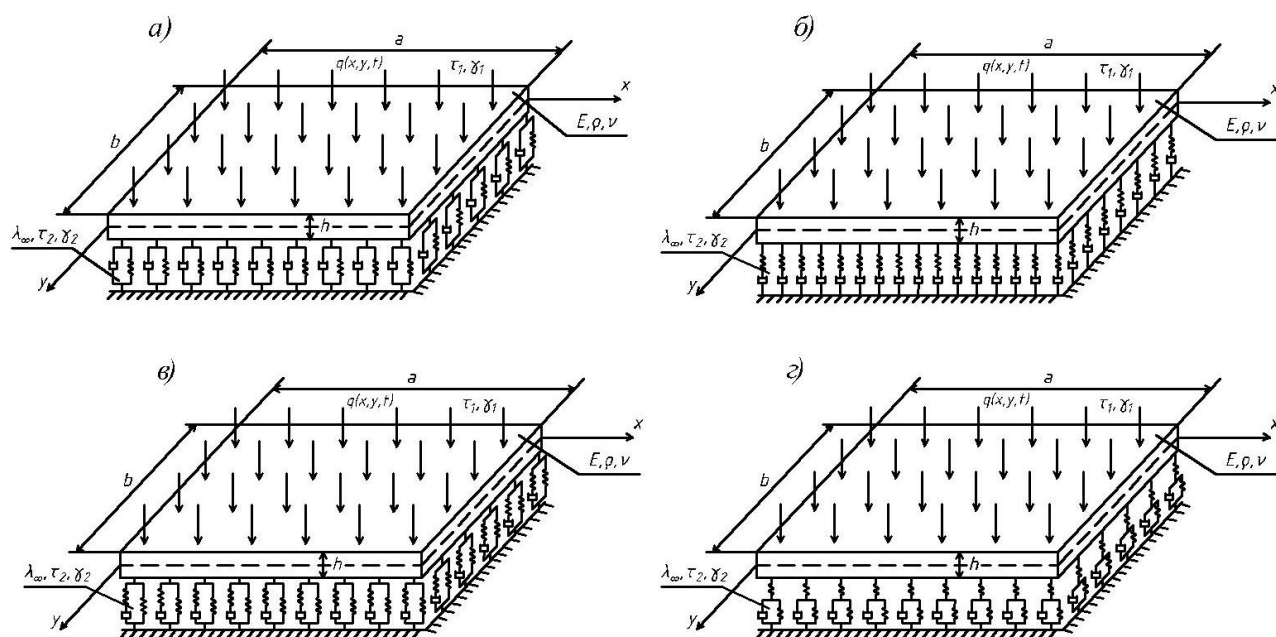


Рисунок 2.1 - Схема прямоугольной пластинки на вязкоупругом основании Фусса-Винклера, демпфирующие свойства которого описываются при помощи моделей с дробными производными: а) модель Кельвина-Фойгта; б) модель Максвелла; в) модель Зинера-Ржаницына; г) модель Пойнтинга-Томсона-Ишлинского-Мерчанта.

Следует отметить, что модель Максвелла подходит для вязкоупругих жидкостей, тогда как модели Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твердого тела используются для описания свойств грунтов, которые моделируются как вязкоупругие твердые тела.

Помимо моделей вязкоупругих оснований типа Фусса-Винклера, приведенных на рис. 2.1, будем использовать модель вязкоупругого основания типа Пастернака (Рис.2.2).

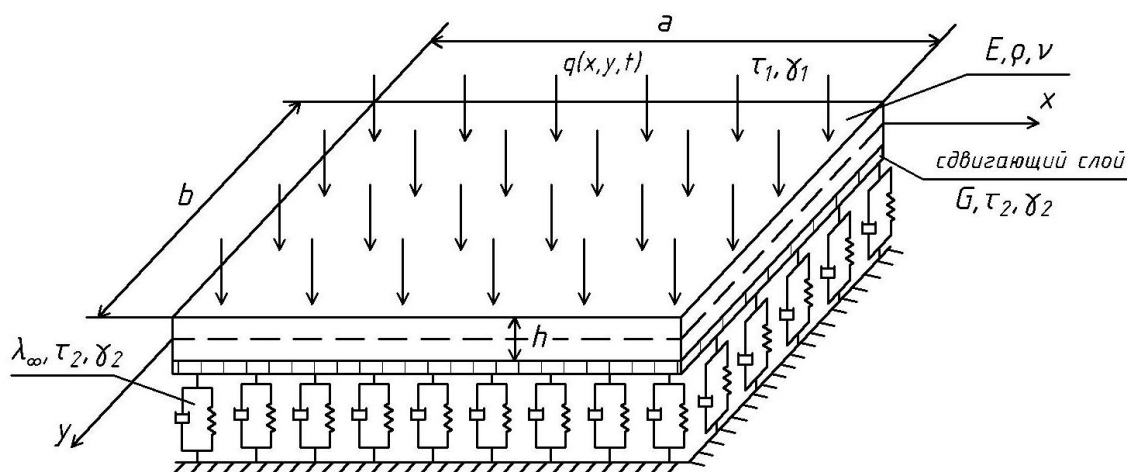


Рисунок 2.2 - Схема прямоугольной пластинки на вязкоупругом основании Пастернака, демпфирующие свойства которого описываются при помощи модели Кельвина-Фойгта с дробной производной.

Уравнение движения пластинки фон Кармана, колеблющейся в вязкоупругой окружающей среде под действием гармонической нагрузки, относительно поперечного прогиба $w = w(x, y, t)$ получено путем обобщения уравнений фон Кармана [142] за счет включения слагаемых, описывающих реакцию основания и силу сопротивления окружающей среды [25, 60, 239, 243]:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = q - F_1 - F_2, \quad (2.1)$$

где h – толщина пластинки, $\nabla^4 = \partial^4 / \partial x^4 + 2\partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 / \partial y^4$ – бигармонический оператор, $\phi(x, y, t)$ – функция напряжений Эйри, которая связана с прогибом пластинки соотношением [7]

$$\nabla^4 \phi = Eh \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (2.2)$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость, ν , E и ρ – коэффициент Пуассона, модуль упругости и плотность материала пластинки,

$q = F \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \cos \Omega_F t$ – внешняя нагрузка, F и Ω_F – амплитуда и частота внешней гармонической силы, $\delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ – дельта-функция Дирака, $F_1 = \alpha_1 D^{\gamma_1} w$ – сила сопротивления вязкоупругой среды, свойства которой описываются при помощи модели Кельвина-Фойгта с дробной производной Римана-Лиувилля порядка γ ($0 < \gamma \leq 1$), когда $\gamma = \gamma_1$ [51, 222]

$$D^\gamma x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t-t') dt'}{\Gamma(1-\gamma) t'^\gamma}, \quad (2.3)$$

$\Gamma(1-\gamma)$ – гамма-функция, τ_1 и $\alpha_1 = E_0 \tau_1^{\gamma_1}$ – время ретардации и коэффициент демпфирования вязкоупругой среды, E_0 – релаксированное значение модуля упругости.

Реакция вязкоупругого основания F_2 в уравнении (2.1) описывается

(1) либо при помощи модели Фусса-Винклера $F_2 = \tilde{\lambda} w$,

(2) либо при помощи модели Пастернака $F_2 = \tilde{\lambda} w - G \tau_2^{\gamma_2} D_{0+}^{\gamma_2} \nabla^2 w$,

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа, G – модуль сдвига для модели Пастернака.

Также предположим, следуя [217, 220], что оператор податливости вязкоупругого основания $\tilde{\lambda}$ описывается либо моделью Кельвина-Фойгта с

дробной производной, либо моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной Римана-Лиувилля D_{0+}^γ (2.3), когда $\gamma = \gamma_2$:

$$\tilde{\lambda} = \lambda_0 (1 + \tau_2^\gamma D^{\gamma_2}), \quad (2.4)$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \frac{1}{1 + \tau_2^\gamma D^{\gamma_2}} \right], \quad (2.5)$$

где λ_0 и λ_∞ - релаксированное и нерелаксированное значения коэффициента податливости основания, $\nu_\varepsilon = \Delta\lambda\lambda_\infty^{-1}$, $\Delta\lambda = \lambda_\infty - \lambda_0$ - величина, характеризующая уменьшение коэффициента податливости от его нерелаксированного значения до релаксированного, τ_2 - время ретардации для вязкоупругого основания по модели Кельвина-Фойгта и время релаксации вязкоупругого основания по модели стандартного линейного твердого тела.

Граничные условия для пластинки, шарнирно опертой по контуру, имеют вид:

$$\text{при } x=0 \text{ и } a, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \text{при } y=0 \text{ и } b, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (2.6)$$

В процессе нелинейных колебаний пластинки на вязкоупругом основании может возникнуть явление внутреннего резонанса, в связи с этим предположим, что в процессе колебаний доминируют две собственные моды, связанные некоторым соотношением, а остальные формы колебаний быстро затухают [186, 188]. Тогда выражение для прогиба пластинки можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= x_1(t)W_{m_1 n_1}(x, y) + x_2(t)W_{m_2 n_2}(x, y) = \\ &= x_1(t) \sin \frac{\pi m_1 x}{a} \sin \frac{\pi n_1 y}{b} + x_2(t) \sin \frac{\pi m_2 x}{a} \sin \frac{\pi n_2 y}{b}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $x_i(t)$ ($i=1,2$) – обобщенные перемещения, соответствующие перемещениям мод колебаний с номерами $m_1 n_1$ и $m_2 n_2$ соответственно, и $W_{m_i n_i}(x, y)$ – собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям (2.6).

Подставляя соотношения (2.7) в уравнение (2.2) с учетом граничных условий (2.6) и интегрируя на отрезках $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq b$ с учетом свойства ортогональности собственных функций, получим выражение для функции напряжений в виде:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) = Eh \left[\sum_i \sum_p \sum_q \phi_{ipq} X_{ip} Y_{iq} x_i(t)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (B_1^2 M_{11} N_{21} + C_1^2 M_{21} N_{11} - A_1^2 M_{11} N_{11} - D_1^2 M_{21} N_{21}) x_1(t) x_2(t) \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\xi = \frac{b}{a}$, $\eta_i = \frac{m_i}{n_i}$, $i=1,2$, $X_{ip} = \cos \frac{\pi p m_i x}{a}$, $Y_{iq} = \cos \frac{\pi q n_i y}{b}$,

$$M_{1p} = \cos \frac{\pi p (m_1 + m_2) x}{a}, \quad M_{2p} = \cos \frac{\pi p (m_1 - m_2) x}{a}, \quad \phi_{i02} = \frac{\xi^2 \eta_i^2}{32}, \quad \phi_{i20} = \frac{1}{32 \xi^2 \eta_i^2},$$

$$N_{1q} = \cos \frac{\pi q (n_1 + n_2) y}{b}, \quad N_{2q} = \cos \frac{\pi q (n_1 - n_2) y}{b},$$

$$A_1 = \frac{\xi (m_1 n_2 - m_2 n_1)}{(m_1 + m_2)^2 \xi^2 + (n_1 + n_2)^2}, \quad B_1 = \frac{\xi (m_1 n_2 + m_2 n_1)}{(m_1 + m_2)^2 \xi^2 + (n_1 - n_2)^2},$$

$$C_1 = \frac{\xi (m_1 n_2 + m_2 n_1)}{(m_1 - m_2)^2 \xi^2 + (n_1 + n_2)^2}, \quad D_1 = \frac{\xi (m_1 n_2 - m_2 n_1)}{(m_1 - m_2)^2 \xi^2 + (n_1 - n_2)^2}.$$

При выводе дифференциальных уравнений также будем учитывать фильтрующее свойство дельта-функции:

$$\iint \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} F \cos \Omega_F t \iint \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} dx dy = \\ = F \sin \frac{\pi m x_0}{a} \sin \frac{\pi n y_0}{b} \cos \Omega_F t. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя соотношения для функции прогиба пластинки (2.7) и функции напряжений Эйри (2.8) в уравнение движения (2.1) и интегрируя на отрезках $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq b$, получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных перемещений:

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \left[1 - \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) \right] x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + \frac{E_0 \tau_1^{\gamma_1}}{\rho h} D^{\gamma_1} x_1 - \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \nu_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1 \\ - \frac{4F}{ab\rho h} \sin \pi m_1 \frac{x}{a} \sin \pi n_1 \frac{y}{b} \cos \Omega_F t = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \left[1 - \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) \right] x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + \frac{E_0 \tau_1^{\gamma_1}}{\rho h} D^{\gamma_1} x_2 - \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \nu_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 \\ - \frac{4F}{ab\rho h} \sin \pi m_2 \frac{x}{a} \sin \pi n_2 \frac{y}{b} \cos \Omega_F t = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \left[1 - \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) \right] x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + \frac{E_0 \tau_1^{\gamma_1}}{\rho h} D^{\gamma_1} x_1 + \frac{\lambda_0}{\rho h} \tau_2^{\gamma_2} D^{\gamma_2} x_1 \\ + \frac{G \tau_2^{\gamma_2} \pi^2}{\rho h b^2} (\xi^2 m_1^2 + n_1^2) D^{\gamma_2} x_1 - \frac{4F}{ab\rho h} \sin \pi m_1 \frac{x}{a} \sin \pi n_1 \frac{y}{b} \cos \Omega_F t = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \left[1 - \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) \right] x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + \frac{E_0 \tau_1^{\gamma_1}}{\rho h} D^{\gamma_1} x_2 + \frac{\lambda_0}{\rho h} \tau_2^{\gamma_2} D^{\gamma_2} x_2 \\ + \frac{G \tau_2^{\gamma_2} \pi^2}{\rho h b^2} (\xi^2 m_2^2 + n_2^2) D^{\gamma_2} x_2 - \frac{4F}{ab\rho h} \sin \pi m_2 \frac{x}{a} \sin \pi n_2 \frac{y}{b} \cos \Omega_F t = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для перехода к уравнениям в безразмерном виде, введем следующие безразмерные величины (обозначенные звездочками) [293]:

$$x_i^* = \frac{(ab)^{1/2}}{h^2} x_i, \quad (i=1,2), \quad t^* = \frac{\pi^2 h}{ab} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} t, \quad x^* = \frac{x}{a}, \quad y^* = \frac{y}{b}. \quad (2.15)$$

Тогда получим следующие системы уравнений в безразмерном виде:

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела [244]

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1^* + (\Omega_1^{*2} + \lambda_\infty^*) x_1^* + \alpha_1 x_1^{*3} + \alpha_2 x_1^* x_2^{*2} + E_0^* \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_1^* - \lambda_\infty^* \nu_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1^* - \\ - 4F^* \sin \pi m_1 x_0^* \sin \pi n_1 y_0^* \cos \Omega_F^* t^* = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2^* + (\Omega_2^{*2} + \lambda_\infty^*) x_2^* + \alpha_3 x_2^{*3} + \alpha_4 x_2^* x_1^{*2} + E_0^* \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_2^* - \lambda_\infty^* \nu_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2^* - \\ - 4F^* \sin \pi m_2 x_0^* \sin \pi n_2 y_0^* \cos \Omega_F^* t^* = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта [244]

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1^* + (\Omega_1^{*2} + \lambda_\infty^*)x_1^* + \alpha_1 x_1^{*3} + \alpha_2 x_1^* x_2^{*2} + E_0^* \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_1^* + \lambda_0^* \tau_2^{\gamma_2} D^{\gamma_2} x_1^* \\ + G^* \tau_2^{\gamma_2} \pi^2 (\xi^2 m_1^2 + n_1^2) D_{0+}^{\gamma_2} x_1^* - 4F^* \sin \pi m_1 x_0^* \sin \pi n_1 y_0^* \cos \Omega_F^* t^* = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2^* + (\Omega_2^{*2} + \lambda_\infty^*)x_2^* + \alpha_3 x_2^{*3} + \alpha_4 x_2^* x_1^{*2} + E_0^* \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_2^* + \lambda_0^* \tau_2^{\gamma_2} D^{\gamma_2} x_2^* \\ + G^* \tau_2^{\gamma_2} \pi^2 (\xi^2 m_2^2 + n_2^2) D_{0+}^{\gamma_2} x_2^* - 4F^* \sin \pi m_2 x_0^* \sin \pi n_2 y_0^* \cos \Omega_F^* t^* = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_0^* = \frac{12a^2 b^2 (1-\nu^2)}{\pi^4 E h^3} \lambda_0, \quad \lambda_\infty^* = \frac{12a^2 b^2 (1-\nu^2)}{\pi^4 E h^3} \lambda_\infty, \quad E_0^* = \frac{12a^2 b^2 (1-\nu^2)}{\pi^4 E h^3} E_0, \\ G^* = \frac{12a^2 (1-\nu^2)}{\pi^4 E h^3} G, \quad \Omega_F^* = \frac{ab}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}} \Omega_F, \quad F^* = \frac{12(ab)^{3/2} (1-\nu^2)}{\pi^4 E h^5} F, \end{aligned}$$

α_i – коэффициенты при нелинейных членах уравнений, представленные в

Приложении В, $\Omega_i^* = \frac{\xi^2 m_i^2 + n_i^2}{\xi}$ – собственные частоты линейных колебаний

пластинки и $\mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2})$ – безразмерный дробный оператор Работнова Ю.Н., записываемый в виде [222]

$$\mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) = \frac{1}{1 + \tau_2^{\gamma_2} D_{0+}^{\gamma_2}}. \quad (2.20)$$

Следует заметить, что уравнения для основания Фусса-Винклера по модели Кельвина-Фойгта были впервые представлены в [21, 60]. Уравнения для свободных колебаний являются частным случаем уравнений (2.16)-(2.19) при $F = 0$. Решение уравнений (2.16)-(2.19) можно получить при помощи различных численных методов, однако ни один из них не позволяет качественно исследовать такие нелинейные явления, как сильное взаимодействие мод колебаний с близкими значениями собственных частот, приводящее к различным видам внутренних резонансов и перекачке энергии.

2.2 Метод решения

Разрешающие уравнения (2.16)-(2.17) и (2.18)-(2.19) с операторами дробного порядка можно решить с помощью метода разложения дробного

оператора [237], который является обобщением метода многих временных масштабов [35], впервые предложенный для разложения дробной производной в [215].

Профессор А.Х. Найфэ в своих знаменитых монографиях "Методы возмущений" [35] и "Нелинейные колебания" [187] подчеркивал, при изучении вынужденных колебаний следует различать четыре случая в зависимости от того, является ли возбуждение (внешняя сила) «мягким» или «жестким», резонансным или нерезонансным.

В его работах также показано, что при изучении внешнего резонанса «чтобы получить равномерно пригодное приближенное решение такой задачи, необходимо задать порядок малости возбуждения так, чтобы оно возникало при появлении демпфирования и нелинейности». С этой целью рассмотрим сначала случай мягкого внешнего возбуждения и представим слагаемые с силой в виде [244]

$$\varepsilon^3 f_i = F^* \sin \pi m_i x_0^* \sin \pi n_i y_0^* \quad (i = 1, 2). \quad (2.21)$$

При этом принимаются следующие коэффициенты при силах демпфирования среды

$$\varepsilon^2 \mu_1 = E_0^* \tau_1^{\gamma_1} \quad (2.22)$$

и основания Фусса-Винклера по модели Кельвина-Фойгта

$$\varepsilon^2 \mu_2 = \lambda_0^* \tau_2^{\gamma_2}, \quad (2.23)$$

или модели стандартного линейного твердого тела

$$\varepsilon^2 \mu_2 = \lambda_\infty^* \nu_\varepsilon, \quad (2.24)$$

а также основания Пастернака

$$\varepsilon^2 \mu_3 = G^* \tau_2^{\gamma_2} \pi^2 (\xi^2 m_i^2 + n_i^2), \quad (2.25)$$

где ε - малый параметр, μ_i и f_i - конечные величины.

Заметим, что принятый порядок малости для внешних сил и сил демпфирования среды и основания согласуется с представлениями о внешнем резонансе [187]; а именно, ожидается, что в системе со слабым демпфированием возбуждение с малой амплитудой вызывает отклик с относительно большой амплитудой.

Подставляя безразмерные величины, а также соотношения (2.21)-(2.25) в уравнения (2.16)-(2.19) и опуская звездочки у безразмерных величин, получим следующие уравнения:

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела [244]

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + \varepsilon^2 \mu_1 D^{\gamma_1} x_1 - \varepsilon^2 \mu_2 \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1 - 4\varepsilon^3 f_1 \cos \Omega_F t = 0, \quad (2.26)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + \varepsilon^2 \mu_1 D^{\gamma_1} x_2 - \varepsilon^2 \mu_2 \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 - 4\varepsilon^3 f_2 \cos \Omega_F t = 0, \quad (2.27)$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта [244]

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + \varepsilon^2 \mu_1 D^{\gamma_1} x_1 + \varepsilon^2 \mu_2 D^{\gamma_2} x_1 + \varepsilon^2 \mu_3 D_{0+}^{\gamma_2} x_1 - 4\varepsilon^3 f_1 \cos \Omega_F t = 0, \quad (2.28)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + \varepsilon^2 \mu_1 D^{\gamma_1} x_2 + \varepsilon^2 \mu_2 D^{\gamma_2} x_2 + \varepsilon^2 \mu_3 D_{0+}^{\gamma_2} x_2 - 4\varepsilon^3 f_2 \cos \Omega_F t = 0, \quad (2.29)$$

где ω_1 и ω_2 – безразмерные частоты колебаний механической системы «пластинка + вязкоупругое основание» для модели Кельвина-Фойгта

$$\omega_i^2 = \Omega_i^2 + \lambda_0, \quad (2.30)$$

и модели стандартного линейного твердого тела

$$\omega_i^2 = \Omega_i^2 + \lambda_\infty. \quad (2.31)$$

Приближенное решение уравнений (2.16)-(2.17) и (2.18)-(2.19) можно записать в виде разложения по новым временным масштабам в следующем виде:

$$x_i(t) = \varepsilon X_{i1}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 X_{i3}(T_0, T_2) + \dots \quad (i = 1, 2), \quad (2.32)$$

где $T_0 = t$ – быстрое время, характеризующее движения с собственными частотами линейных колебаний, и $T_2 = \varepsilon^2 t$ – медленное время, характеризующее модуляцию амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

Следует заметить, что в разложении (2.32) отсутствуют медленный масштаб $T_1 = \varepsilon T_0$, а также слагаемые $\varepsilon^2 X_{i2}$, поскольку изучается кубическая нелинейность. Если учесть T_1 и X_{i2} , то можно обнаружить, что решение не зависит от T_1 и что

X_{i2} удовлетворяет точно тем же уравнениям, что и X_{i1} . Поэтому X_{i2} можно опустить без потери общности выкладок.

При решении уравнений обобщенным методом многих временных масштабов, производные по времени первого, второго и дробного порядков раскладываются в ряд по малому параметру [215, 237] в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + \dots, \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma = (D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^\gamma = D_0^\gamma + \varepsilon^2 \gamma D_0^{\gamma-1} D_2 + \dots, \quad (2.34)$$

где $D_n = \partial / \partial T_n$.

Заметим, что [51]

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma \varphi = D_+^\gamma \varphi = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{\varphi(t') dt'}{(t-t')^\gamma \Gamma(1-\gamma)}. \quad (2.35)$$

Но поскольку процесс колебаний начинается в момент времени $t=0$, выражение для дробной производной $D_{0+}^\gamma \varphi$ Римана-Лиувилля (2.3) следует изменить.

В работе [221] было показано, что несмотря на то, что дробные производные (2.35) и (2.3) экспоненциальной функции $e^{\lambda t}$ имеют разные выражения

$$D_+^\gamma e^{\lambda t} = \lambda^\gamma e^{\lambda t} \quad (2.36)$$

и

$$D_{0+}^\gamma e^{\lambda t} = \lambda^\gamma e^{\lambda t} + \frac{\sin \pi x}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^\gamma}{u + \lambda} e^{-ut} du, \quad (2.37)$$

при рассмотрении приближений только нулевого и первого порядков вторым слагаемым в соотношении (2.37) можно пренебречь.

Безразмерный дробный оператор Ю.Н. Работнова также можно разложить в ряд по малому параметру, в результате чего получим [227]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_\gamma^*(\tau^\gamma) &= \frac{1}{1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma} = (1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma)^{-1} = \left[1 + \tau^\gamma (D_0^\gamma + \varepsilon^2 \gamma D_0^{\gamma-1} D_2)\right]^{-1} = \\ &= (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-1} - \varepsilon^2 (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-2} \tau^\gamma \gamma D_0^{\gamma-1} D_2 + \dots\end{aligned}\quad (2.38)$$

После подстановки (2.32) с учетом соотношений (2.33), (2.34) и (2.38) в (2.16)-(2.17) и (2.18)-(2.19) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε к нулю, получим следующие системы уравнений:

порядка ε

$$D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = 0, \quad (2.39)$$

$$D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = 0, \quad (2.40)$$

порядка ε^3

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела

$$\begin{aligned}D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} &= -2D_0 D_2 X_{11} - \left(\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}\right) X_{11} - \\ &- \alpha_1 X_{11}^3 - \alpha_2 X_{11} X_{21}^2 + 4f_1 \cos(\Omega_F T_0),\end{aligned}\quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} &= -2D_0 D_2 X_{21} - \left(\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}\right) X_{21} - \\ &- \alpha_3 X_{21}^3 - \alpha_4 X_{21} X_{11}^2 + 4f_2 \cos(\Omega_F T_0),\end{aligned}\quad (2.42)$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта

$$\begin{aligned}D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} &= -2D_0 D_2 X_{11} - \left(\mu_1 D_0^{\gamma_1} + \mu_2 D_0^{\gamma_2} + \mu_3 D_0^{\gamma_2}\right) X_{11} - \\ &- \alpha_1 X_{11}^3 - \alpha_2 X_{11} X_{21}^2 + 4f_1 \cos(\Omega_F T_0),\end{aligned}\quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} &= -2D_0 D_2 X_{21} - \left(\mu_1 D_0^{\gamma_1} + \mu_2 D_0^{\gamma_2} + \mu_3 D_0^{\gamma_2}\right) X_{21} - \\ &- \alpha_3 X_{21}^3 - \alpha_4 X_{21} X_{11}^2 + 4f_2 \cos(\Omega_F T_0),\end{aligned}\quad (2.44)$$

Решение уравнений (2.39)-(2.40) будем искать в виде

$$X_{j1} = A_j(T_2) \exp(i\omega_j T_0) + \bar{A}_j(T_2) \exp(-i\omega_j T_0), \quad (2.45)$$

где $A_j(T_2)$ ($j=1,2$) – неизвестные комплексные функции и $\bar{A}_j(T_2)$ – комплексно-сопряжённые функции с $A_j(T_2)$.

Для того чтобы решить системы уравнений (2.41)-(2.42) и (2.43)-(2.44), необходимо определить действие дробной производной $D_{0+}^{\gamma_i}$ (2.3) и безразмерного дробного оператора Работнова $\mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_2^{\gamma_2})$ (2.20) на функции X_{j1} , т.е. вычислить $D_{0+}^{\gamma_i} e^{i\omega_j t}$ и $\frac{1}{1 + \tau_2^{\gamma_2} D_{0+}^{\gamma_2}} e^{i\omega_j t}$. Как было показано в работах [220, 227], данные выражения сводятся к следующему виду:

$$D_{0+}^\gamma e^{i\omega_j t} \simeq (i\omega_j)^\gamma e^{i\omega_j t}, \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{1 + \tau_2^{\gamma_2} D_{0+}^{\gamma_2}} e^{i\omega_j t} \simeq \frac{1}{1 + (i\omega_j \tau_2)^{\gamma_2}} e^{i\omega_j t}. \quad (2.47)$$

Подставляя решение (2.45) в уравнения (2.41)-(2.42) и (2.43)-(2.44) с учетом выражений (2.46)-(2.47), получим следующие соотношения:

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = & -2i\omega_1 D_2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\ & - \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\ & - \alpha_1 \left[A_1 \exp(3i\omega_1 T_0) + 3\bar{A}_1 \exp(i\omega_1 T_0) \right] A_1^2 - \\ & - \alpha_2 \left\{ A_2^2 \exp[i(\omega_1 + 2\omega_2)T_0] + 2A_2 \bar{A}_2 \exp(i\omega_1 T_0) + \bar{A}_2^2 \exp[i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0] \right\} A_1 + \\ & + 2f_1 \exp(i\Omega_F T_0) + cc, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = & -2i\omega_2 D_2 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\ & - \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\ & - \alpha_3 \left[A_2 \exp(3i\omega_2 T_0) + 3\bar{A}_2 \exp(i\omega_2 T_0) \right] A_2^2 - \\ & - \alpha_4 \left\{ A_1^2 \exp[i(2\omega_1 + \omega_2)T_0] + 2A_1 \bar{A}_1 \exp(i\omega_2 T_0) + \bar{A}_1^2 \exp[i(\omega_2 - 2\omega_1)T_0] \right\} A_2 + \\ & + 2f_2 \exp(i\Omega_F T_0) + cc. \end{aligned} \quad (2.49)$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = & -2i\omega_1 D_2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} + \mu_2 (i\omega_1)^{\gamma_2} + \mu_3 (i\omega_1)^{\gamma_2} \right] A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\
& - \alpha_1 \left[A_1 \exp(3i\omega_1 T_0) + 3\bar{A}_1 \exp(i\omega_1 T_0) \right] A_1^2 - \\
& - \alpha_2 \left\{ A_2^2 \exp[i(\omega_1 + 2\omega_2)T_0] + 2A_2 \bar{A}_2 \exp(i\omega_1 T_0) + \bar{A}_2^2 \exp[i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0] \right\} A_1 + \\
& + 2f_1 \exp(i\Omega_F T_0) + cc,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = & -2i\omega_2 D_2 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} + \mu_2 (i\omega_2)^{\gamma_2} + \mu_3 (i\omega_2)^{\gamma_2} \right] A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
& - \alpha_3 \left[A_2 \exp(3i\omega_2 T_0) + 3\bar{A}_2 \exp(i\omega_2 T_0) \right] A_2^2 - \\
& - \alpha_4 \left\{ A_1^2 \exp[i(2\omega_1 + \omega_2)T_0] + 2A_1 \bar{A}_1 \exp(i\omega_2 T_0) + \bar{A}_1^2 \exp[i(\omega_2 - 2\omega_1)T_0] \right\} A_2 + \\
& + 2f_2 \exp(i\Omega_F T_0) + cc,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

где cc обозначает комплексно-сопряженную часть к предыдущим членам уравнения.

Анализ уравнений (2.48)-(2.49) и (2.50)-(2.51) показывает, что возможен случай возникновения внутреннего резонанса один-к-одному, когда какие-либо две частоты колебаний из плоскости пластинки в направлениях x и y близки друг к другу

$$\omega_1 = \omega_2 + \varepsilon^2 \sigma_1, \tag{2.52}$$

в сочетании с внешним резонансом:

$$\Omega_F = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2, \tag{2.53}$$

где σ_i – параметры «расстройки» между значениями частот.

Для того чтобы исключить вековые члены из уравнений (2.48)-(2.49) и (2.50)-(2.51), записываются следующие системы уравнений:

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела

$$\begin{aligned}
2i\omega_1 D_2 A_1 + \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + \\
+ \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 \exp(-2i\sigma_1 T_2) + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 - 2f_1 \exp(i\sigma_2 T_2) = 0,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 \exp(2i\sigma_1 T_2) + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 - 2f_2 \exp(i(\sigma_1 + \sigma_2)T_2) = 0; \quad (2.55)$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} + \mu_2 (i\omega_1)^{\gamma_2} + \mu_3 (i\omega_1)^{\gamma_2} \right] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 \exp(-2i\sigma_1 T_2) + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 - 2f_1 \exp(i\sigma_2 T_2) = 0, \quad (2.56)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} + \mu_2 (i\omega_2)^{\gamma_2} + \mu_3 (i\omega_2)^{\gamma_2} \right] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 \exp(2i\sigma_1 T_2) + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 - 2f_2 \exp(i(\sigma_1 + \sigma_2)T_2) = 0. \quad (2.57)$$

С целью устранения $\exp(\pm 2i\sigma_1 T_2)$ из уравнений (2.54)-(2.55) и (2.56)-(2.57) введем замену

$$A_2(T_2) = A_2 \exp(i\sigma_1 T_2). \quad (2.58)$$

Записывая функции A_1 и A_2 в полярной системе координат

$$A_i(T_2) = a_i(T_2) e^{i\varphi_i(T_2)}, \quad (2.59)$$

где $a_i(T_2)$ и $\varphi_i(T_2)$ - функции амплитуд и фаз нелинейных колебаний, умножая уравнения (2.54) и (2.56) на \bar{A}_1 и уравнения (2.55) и (2.57) на \bar{A}_2 , соответственно, затем складывая и вычитая комплексно-сопряженные к ним уравнения, приходим к следующей системе уравнений [244]:

$$(a_1^2)^{\cdot} + s_1 a_1^2 = -\omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta - 2f_1 \omega_1^{-1} a_1 \sin \beta_1, \quad (2.60)$$

$$(a_2^2)^{\cdot} + s_2 a_2^2 = \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta - 2f_2 \omega_2^{-1} a_2 \sin \beta_2, \quad (2.61)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} a_1^2 + \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta - f_1 (\omega_1 a_1)^{-1} \cos \beta_1, \quad (2.62)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \lambda_2 + \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} a_2^2 + \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 \cos \delta - f_2 (\omega_2 a_2)^{-1} \cos \beta_2 - \sigma_1, \quad (2.63)$$

где $\delta = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$ - сдвиг фаз колебаний, $\beta_i = \varphi_i - \sigma_2 T_2$, а коэффициенты s_i и λ_i в уравнениях (2.60)-(2.63) имеют вид:

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела

$$\begin{aligned}
 s_i &= \mu_1 \omega_i^{\gamma_1 - 1} \sin \psi_1 + \mu_2 \omega_i^{-1} R_i \sin \Phi_i, \\
 \lambda_i &= \mu_1 \omega_i^{\gamma_1 - 1} \cos \psi_1 - \mu_2 \omega_i^{-1} R_i \cos \Phi_i, \\
 \psi_j &= \frac{1}{2} \pi \gamma_j \quad (j=1,2), \quad R_i = \sqrt{1 + 2(\tau_2 \omega_i)^{\gamma_2} \cos \psi_2 + (\tau_2 \omega_i)^{2\gamma_2}}, \\
 \tan \Phi_i &= \frac{(\tau_2 \omega_i)^{\gamma_2} \sin \psi_2}{1 + (\tau_2 \omega_i)^{\gamma_2} \cos \psi_2}.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта

$$\begin{aligned}
 s_i &= \mu_1 \omega_i^{\gamma_1 - 1} \sin \psi_1 + \mu_2 \omega_i^{\gamma_2 - 1} \sin \psi_2 + \mu_3 \omega_i^{\gamma_2 - 1} \sin \psi_2, \\
 \lambda_i &= \mu_1 \omega_i^{\gamma_1 - 1} \cos \psi_1 + \mu_2 \omega_i^{\gamma_2 - 1} \cos \psi_2 + \mu_3 \omega_i^{\gamma_2 - 1} \cos \psi_2.
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Согласно определяющим уравнениям (2.60)-(2.63), для всех случаев вязкоупругого основания получены одни и те же определяющие уравнения с точностью до коэффициентов (2.64) и (2.65) для различных моделей. Коэффициенты затухания в полученных уравнениях зависят от собственных частот линейных колебаний Ω_i и реологических параметров основания и среды. При больших временах релаксации материала основания $\tau_2 \rightarrow \infty$, $\Phi_i = \psi_2$ и $R_i = (\tau_2 \omega_i)^{\gamma_2}$, и коэффициенты s_i и λ_i для модели стандартного линейного твердого тела (2.64) совпадают с коэффициентами для модели Кельвина-Фойгта [60].

В случае мягкого нерезонансного возбуждения в процессе колебаний пластины будет возникать только внутренний резонанс, связывающий собственные моды колебаний, без сочетания с внешним резонансом. Выражения для определения нелинейных амплитуд и фаз в данном случае примут вид выражений (2.60)-(2.63) при $f_i = 0$, что совпадает со случаем свободных колебаний. Таким образом, наличие мягкого нерезонансного возбуждения не влияет в первом приближении на амплитуды и фазы колебаний, а собственные колебания системы преобладают над вынужденными.

2.2.1 Метод вариации произвольной постоянной

Аналитическое решение системы нелинейных уравнений (2.60)-(2.63) можно получить при помощи метода вариаций произвольных постоянных. Тогда в качестве начального приближения рассмотрим однородную часть системы (2.60)-(2.63):

$$\dot{a}_1 + \frac{1}{2}s_1 a_1 = 0, \quad (2.66)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\lambda_1 = 0, \quad (2.67)$$

$$\dot{a}_2 + \frac{1}{2}s_2 a_2 = 0, \quad (2.68)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0, \quad (2.69)$$

решение которой имеет вид

$$a_1 = a_{10} e^{-\frac{1}{2}s_1 T_2}, \quad (2.70)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\lambda_1 T_2 + \varphi_{10}, \quad (2.71)$$

$$a_2 = a_{20} e^{-\frac{1}{2}s_2 T_2}, \quad (2.72)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\lambda_2 T_2 + \varphi_{20}, \quad (2.73)$$

где a_{i0} и φ_{i0} ($i=1,2$) – значения амплитуд и фаз колебаний в начальный момент времени, которые следует определять из начальных условий.

Подставляя теперь решение на нулевом шаге (2.70)-(2.73) в исходную систему уравнений (2.60)-(2.63), получим

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + \frac{1}{2}s_1 a_1 = & -\frac{1}{2}\omega_1^{-1}\alpha_2 a_{10} a_{20}^2 e^{-\frac{1}{2}(s_1+s_2)T_2} \sin(\Sigma T_2 + \delta_0) \\ & - f_1 \omega_1^{-1} \sin(\Sigma_1 T_2 + \varphi_{10}), \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 + \frac{1}{2}s_2 a_2 = & \frac{1}{2}\omega_2^{-1}\alpha_4 a_{10}^2 a_{20} e^{-(s_1+\frac{1}{2}s_2)T_2} \sin(\Sigma T_2 + \delta_0) \\ & - f_2 \omega_2^{-1} \sin(\Sigma_2 T_2 + \varphi_{20}), \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 = & \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\alpha_1 \omega_1^{-1} a_{10}^2 e^{-s_1 T_2} + \alpha_2 \omega_1^{-1} a_{20}^2 e^{-s_2 T_2} + \frac{1}{2}\alpha_2 \omega_1^{-1} a_{20}^2 e^{-s_2 T_2} \cos(\Sigma T_2 + \delta_0) \\ & - f_1 \omega_1^{-1} a_{10}^{-1} e^{1/2 s_1 T_2} \cos(\Sigma_1 T_2 + \varphi_{10}), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 = & \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{3}{2}\alpha_3 \omega_2^{-1} a_{20}^2 e^{-s_2 T_2} + \alpha_4 \omega_2^{-1} a_{10}^2 e^{-s_1 T_2} + \frac{1}{2}\alpha_4 \omega_2^{-1} a_{10}^2 e^{-s_1 T_2} \cos(\Sigma T_2 + \delta_0) \\ & - f_2 \omega_2^{-1} a_{20}^{-1} e^{1/2 s_2 T_2} \cos(\Sigma_2 T_2 + \varphi_{20}) - \sigma_1, \end{aligned} \quad (2.77)$$

где $\delta_0 = 2(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ – начальный сдвиг фаз колебаний, $\Sigma = \lambda_2 - \lambda_1$ и $\Sigma_i = \frac{1}{2}\lambda_i - \sigma_2$ ($i=1,2$).

Решение полученных уравнений (2.74)-(2.77) имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1 = & a_{10} e^{-\frac{1}{2}s_1 T_2} + \frac{1}{2}\omega_1^{-1}\alpha_2 a_{10} a_{20}^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}(s_1+s_2)T_2}}{s_2^2 + \Sigma^2} \left[s_2 \sin(\Sigma T_2 + \delta_0) + \Sigma \cos(\Sigma T_2 + \delta_0) \right] - \\ & - \frac{2f_1 \omega_1^{-1} a_{10}}{s_1^2 + 4\Sigma_1^2} \left[s_1 \sin(\Sigma_1 T_2 + \varphi_{10}) - 2\Sigma_1 \cos(\Sigma_1 T_2 + \varphi_{10}) \right] + c_{10} e^{-\frac{1}{2}s_1 T_2}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} a_2 = & a_{20} e^{-\frac{1}{2}s_2 T_2} - \frac{1}{2}\omega_2^{-1}\alpha_4 a_{10}^2 a_{20} \frac{e^{-\frac{1}{2}(s_2+s_1)T_2}}{s_1^2 + \Sigma^2} \left[s_1 \sin(\Sigma T_2 + \delta_0) + \Sigma \cos(\Sigma T_2 + \delta_0) \right] - \\ & - \frac{2f_2 \omega_2^{-1} a_{20}}{s_2^2 + 4\Sigma_2^2} \left[s_2 \sin(\Sigma_2 T_2 + \varphi_{20}) - 2\Sigma_2 \cos(\Sigma_2 T_2 + \varphi_{20}) \right] + c_{20} e^{-\frac{1}{2}s_2 T_2}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_{10} + \frac{1}{2} \lambda_1 T_2 + \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} a_{10}^2 \int e^{-s_1 T_2} dT_2 + \alpha_2 \omega_1^{-1} a_{20}^2 \int e^{-s_2 T_2} dT_2 + \\
&+ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_{20}^2 \int e^{-s_2 T_2} \cos(\Sigma T_2 + \delta_0) dT_2 - f_1 \omega_1^{-1} a_{10}^{-1} \int e^{1/2 s_1 T_2} \cos(\Sigma_1 T_2 + \varphi_{10}) dT_2 = \\
&= \varphi_{10} + \frac{1}{2} \lambda_1 T_2 - \frac{3}{2 s_1} \alpha_1 \omega_1^{-1} a_{10}^2 e^{-s_1 T_2} - \frac{1}{s_2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_{20}^2 e^{-s_2 T_2} + \\
&+ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_{20}^2 \frac{e^{-s_2 T_2}}{s_2^2 + \Sigma^2} [-s_2 \cos(\Sigma T_2 + \delta_0) + \Sigma \sin(\Sigma T_2 + \delta_0)] - \\
&- f_1 \omega_1^{-1} a_{10}^{-1} \frac{2e^{1/2 s_1 T_2}}{s_1^2 + 4\Sigma_1^2} [2\Sigma_1 \sin(\Sigma_1 T_2 + \varphi_{10}) + s_1 \cos(\Sigma_1 T_2 + \varphi_{10})] + c_{\varphi_{10}},
\end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \varphi_{20} + \left(\frac{1}{2} \lambda_2 - \sigma_1 \right) T_2 + \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} a_{20}^2 \int e^{-s_2 T_2} dT_2 + \alpha_4 \omega_2^{-1} a_{10}^2 \int e^{-s_1 T_2} dT_2 + \\
&+ \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_{10}^2 \int e^{-s_1 T_2} \cos(\Sigma T_2 + \delta_0) dT_2 - f_2 \omega_2^{-1} a_{20}^{-1} \int e^{1/2 s_2 T_2} \cos(\Sigma_2 T_2 + \varphi_{20}) dT_2 = \\
&= \varphi_{20} + \left(\frac{1}{2} \lambda_2 - \sigma_1 \right) T_2 - \frac{3}{2 s_2} \alpha_3 \omega_2^{-1} a_{20}^2 e^{-s_2 T_2} - \frac{1}{s_1} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_{10}^2 e^{-s_1 T_2} + \\
&+ \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_{10}^2 \frac{e^{-s_1 T_2}}{s_1^2 + \Sigma^2} [-s_1 \cos(\Sigma T_2 + \delta_0) + \Sigma \sin(\Sigma T_2 + \delta_0)] - \\
&- f_2 \omega_2^{-1} a_{20}^{-1} \frac{2e^{1/2 s_2 T_2}}{s_2^2 + 4\Sigma_2^2} [2\Sigma_2 \sin(\Sigma_2 T_2 + \varphi_{20}) + s_2 \cos(\Sigma_2 T_2 + \varphi_{20})] + c_{\varphi_{20}}.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

В полученных уравнениях произвольные константы могут быть выбраны таким образом, чтобы начальные условия всех последующих приближений были нулевыми. Тогда для решения на первом шаге константы принимают вид:

$$\begin{aligned}
c_{10} &= -\frac{\alpha_2 a_{10} a_{20}^2 (s_2 \sin \delta_0 + \Sigma \cos \delta_0)}{2\omega_1 (s_2^2 + \Sigma^2)} + f_1 \omega_1^{-1} a_{10} \frac{2(s_1 \sin \varphi_{10} - 2\Sigma_1 \cos \varphi_{10})}{s_1^2 + 4\Sigma_1^2}, \\
c_{20} &= \frac{\alpha_4 a_{10}^2 a_{20} (s_1 \sin \delta_0 + \Sigma \cos \delta_0)}{2\omega_2 (s_1^2 + \Sigma^2)} + f_2 \omega_2^{-1} a_{20} \frac{2(s_2 \sin \varphi_{20} - 2\Sigma_2 \cos \varphi_{20})}{s_2^2 + 4\Sigma_2^2},
\end{aligned}$$

$$c_{\varphi_{10}} = \frac{3}{2s_1} \alpha_1 \omega_1^{-1} a_{10}^2 + \frac{1}{s_2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_{20}^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_2 \omega_1^{-1} a_{20}^2 s_2}{s_2^2 + \Sigma^2} +$$

$$+ f_1 \omega_1^{-1} a_{10}^{-1} \frac{2(2\Sigma_1 \sin \varphi_{10} + s_1 \cos \varphi_{10})}{s_1^2 + 4\Sigma_1^2},$$

$$c_{\varphi_{20}} = \frac{3}{2s_2} \alpha_3 \omega_2^{-1} a_{20}^2 + \frac{1}{s_1} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_{10}^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_4 \omega_2^{-1} a_{10}^2 s_1}{s_1^2 + \Sigma^2} +$$

$$+ f_2 \omega_2^{-1} a_{20}^{-1} \frac{2(2\Sigma_2 \sin \varphi_{20} + s_2 \cos \varphi_{20})}{s_2^2 + 4\Sigma_2^2}.$$

Таким образом, соотношения (2.78)-(2.81) описывают аналитическое решение системы уравнений (2.60)-(2.63) с точностью до первого приближения при любых значениях параметров дробности γ_1 и γ_2 , отличных от нуля.

2.3 Численные исследования

Для решения полученной системы уравнений (2.60)-(2.63) также использовался численный метод Рунге-Кутты четвертого порядка, на основе которого был составлен алгоритм, записанный в государственном реестре программ для ЭВМ для случаев свободных и вынужденных колебаний пластины [28].

Для подтверждения достоверности результатов было проведено сравнение аналитического и численного решения исходной системы уравнений, полученной при помощи двух методов. В качестве первого примера была рассмотрена квадратная пластинка при $m_1 = 1$, $n_1 = 3$, $m_2 = 3$, $n_2 = 1$. Собственные частоты в этом случае определяются как $\Omega_1 = \Omega_2 = 10$, и параметр расстройки между ними не учитывается. На рисунке 2.3 представлено сравнение безразмерных амплитуд свободных затухающих колебаний пластины, полученных при помощи численного метода Рунге-Кутты четвертого порядка и аналитического метода вариации произвольной постоянной для различных значений параметров дробности.

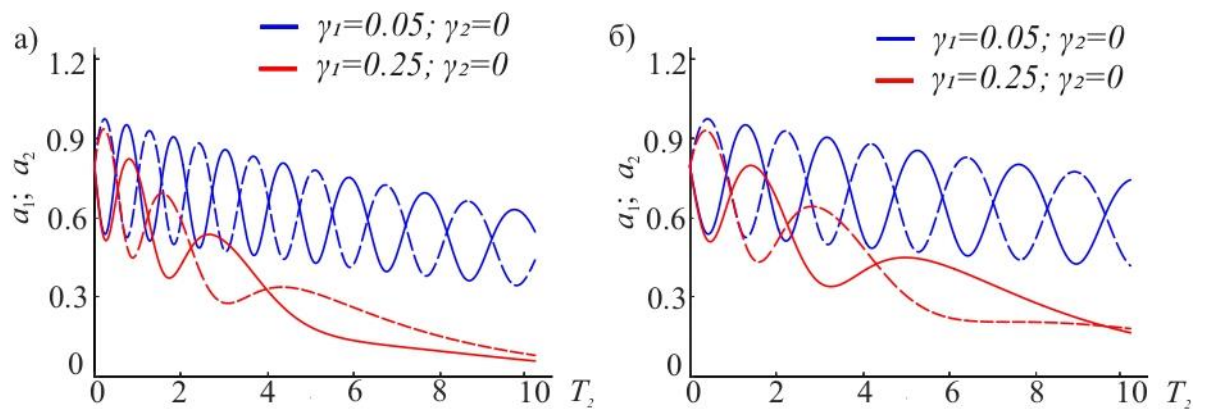


Рисунок 2.3 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от времени T_2 для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела а) решение методом Рунге-Кутты четвертого порядка; б) решение методом вариации произвольной постоянной; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

Из графиков на Рис. 2.3 видно качественное сходство результатов, полученных при помощи двух методов, а более точное количественное сходство можно получить при проведении большего числа итераций в методе вариаций произвольных постоянных, что существенно увеличивает трудоемкость расчетов. Также следует заметить, что система уравнений (2.78)-(2.81), полученная при помощи метода вариаций произвольных постоянных, не позволяет построить решение для упругого основания и окружающей среды при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. В связи с этим далее в диссертационной работе использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка для решения систем разрешающих уравнений, так как он позволяет получить точные результаты, а также проанализировать решение при любых значениях параметров дробности в диапазоне $0 \leq \gamma_i \leq 1$.

На Рис. 2.4 представлены зависимости амплитуд свободных колебаний пластинки на вязкоупругом основании с демфирующими свойствами по модели стандартного линейного твердого тела для случая внутреннего резонанса 1:1 для различных параметров дробности среды и основания. Из Рис. 2.4 следует уменьшение безразмерных амплитуд нелинейных колебаний с увеличением параметра дробности вязкоупругого основания и окружающей среды, а также прослеживается энергообмен между взаимодействующими модами колебаний.

Сравнительный анализ амплитуд свободных и вынужденных колебаний пластинки представлен на Рис. 2.5 для случаев основания Фусса-Винклера по модели Кельвина-Фойгта и модели стандартного линейного твердого тела. Начальные условия приняты следующие: $a_1 = a_2 = 1.5$. На рис. 2.5 показан обмен энергией между взаимодействующими модами колебаний для свободных незатухающих и затухающих колебаний соответственно при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (Рис. 2.5а) и $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.4$ (Рис. 2.5б). На Рис. 2.5а хорошо видны следующие отличия: период колебаний для модели Кельвина-Фойгта больше, чем у модели стандартного линейного твердого тела, но, в свою очередь, диапазон изменения амплитуды у последней модели выше, что следует учитывать при расчете конструкций. Из Рис. 2.5б видно, что затухание колебаний по модели стандартного линейного твердого тела происходит быстрее, чем по модели Кельвина-Фойгта, а значит, чем выше вязкость среды, тем правильнее использовать модель Кельвина-Фойгта в расчетах конструкций, так как значения амплитуд колебаний больше. На Рис. 2.5в,г показаны незатухающие и затухающие вынужденные колебания при $f = 20$ в безразмерном виде для случая, когда не учитывается параметр расстройки между собственной частотой колебаний и частотой внешней силы.

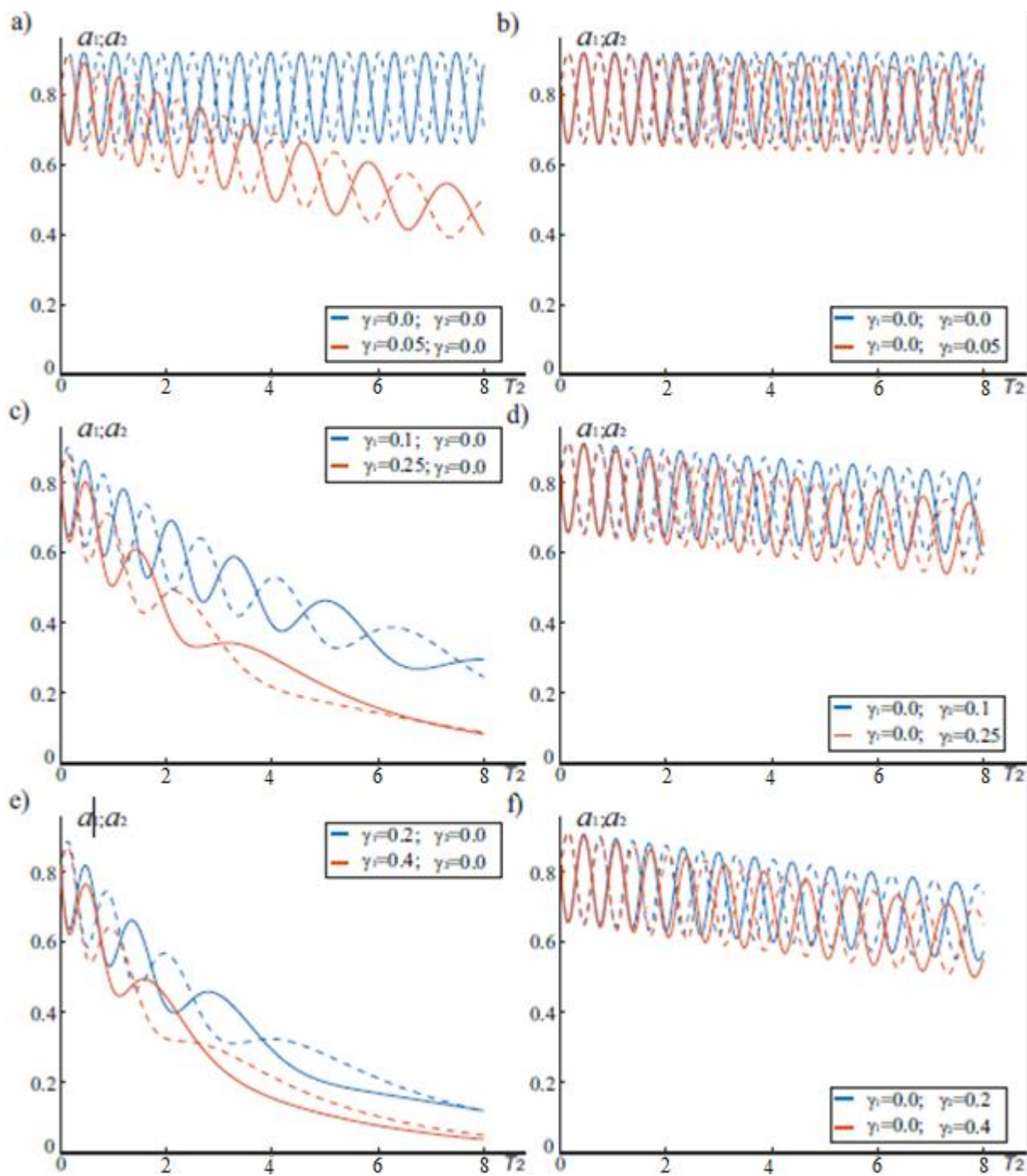


Рисунок 2.4 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от времени T_2 для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела: a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

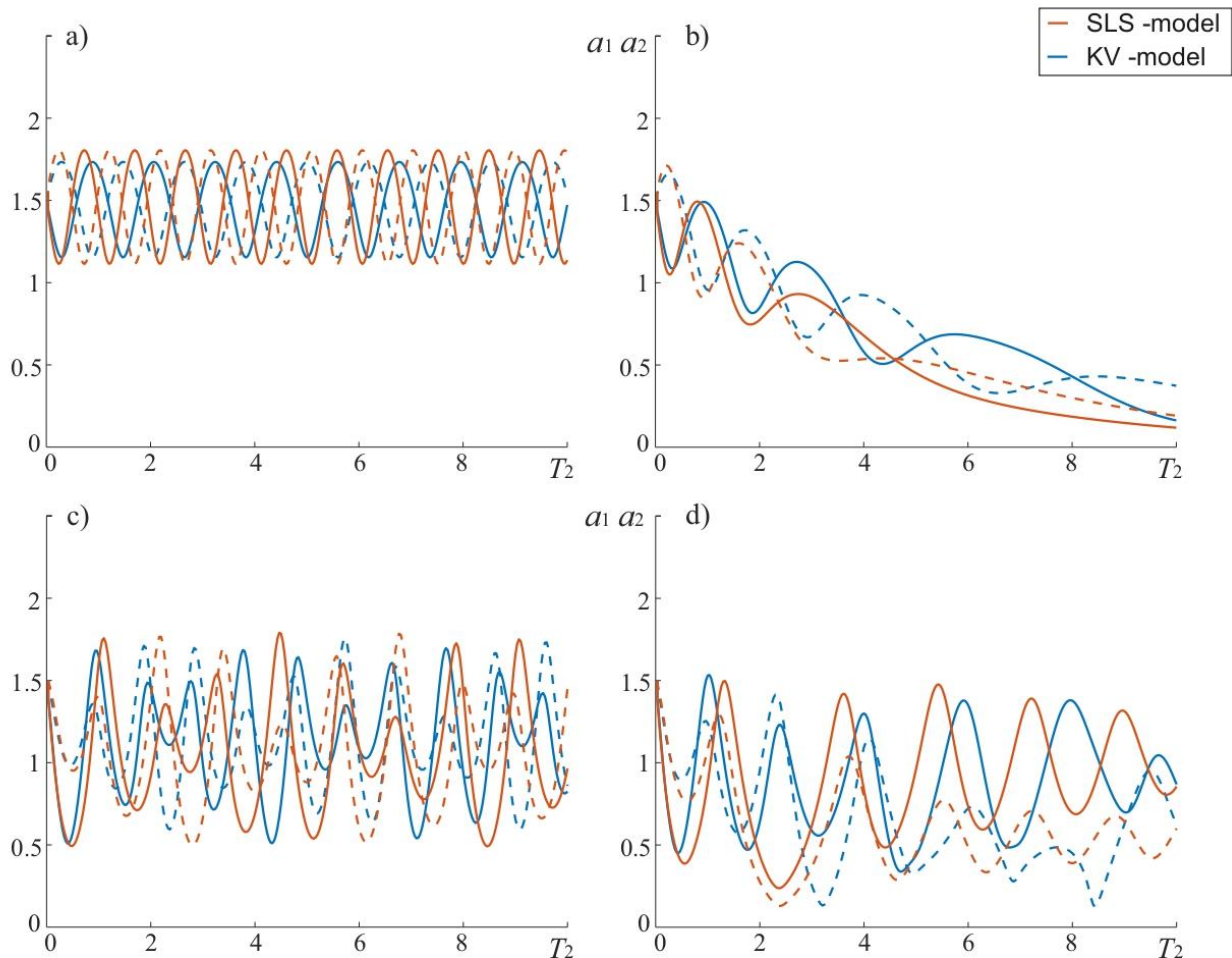


Рисунок 2.5 - Сравнение моделей Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твердого тела: свободные колебания при а) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и б) $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.4$; вынужденные колебания при в) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и г) $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.4$, где a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

Сравнительный анализ моделей вязкоупругого основания Фусса-Винклера и Пастернака представлен на Рис. 2.6 для свободных затухающих колебаний пластинки при $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$. Из Рис. 2.6 видно, что все модели практически эквивалентны, но амплитуды для моделей основания Фусса-Винклера затухают во времени медленнее, чем амплитуды для модели основания Пастернака, поэтому представляют больший интерес для дальнейших исследований.

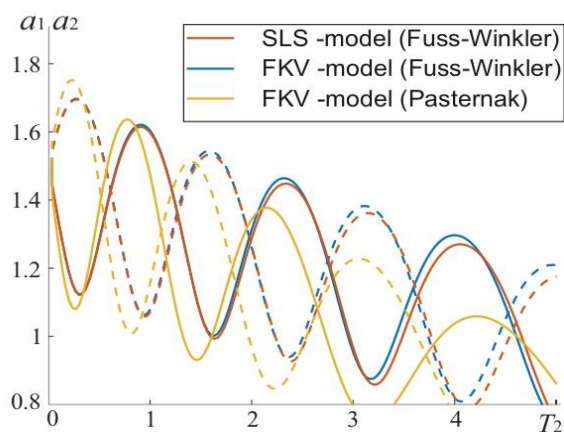


Рисунок 2.6 – Сравнение моделей Фусса-Винклера и Пастернака, где a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

На Рис. 2.7 показаны графики зависимости перемещений пластинки от времени для модели стандартного линейного твердого основания типа Фусса-Винклера. Из Рис. 2.7 следует уменьшение безразмерных перемещений X_i шарнирно опертой пластины с увеличением параметров дробности окружающей среды и вязкоупругого основания.

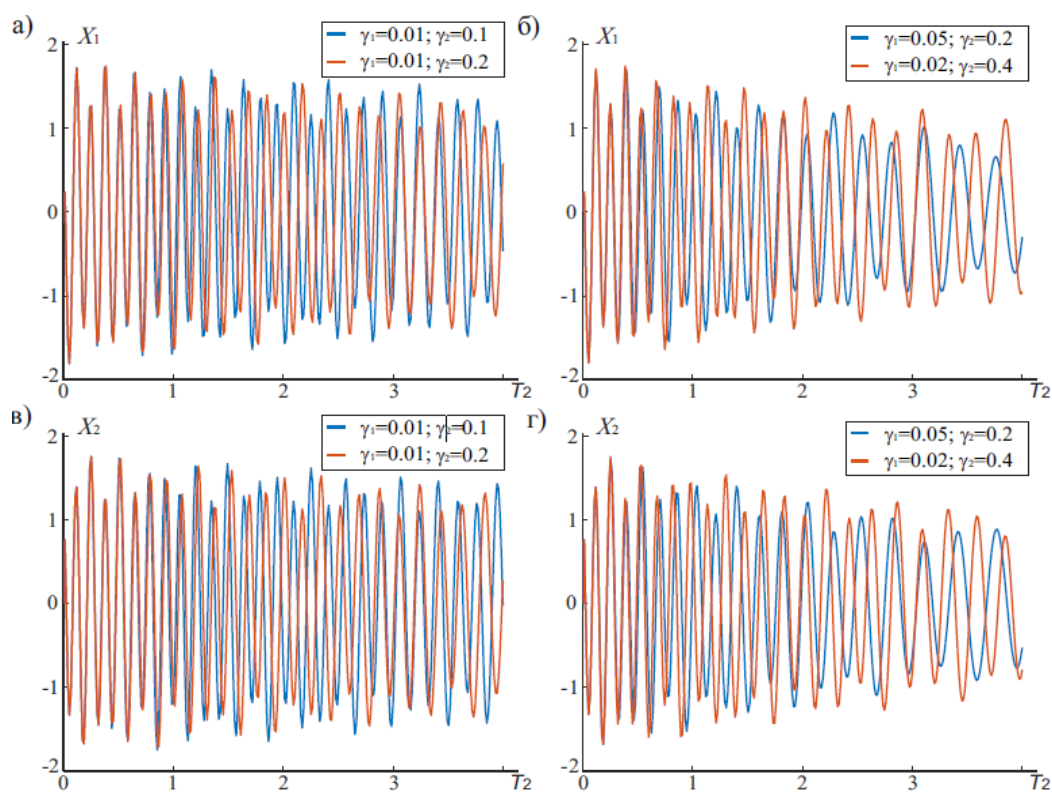


Рисунок 2.7 - Зависимость безразмерных перемещений пластинки от времени на основании Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела.

Рассмотрим в качестве второго примера прямоугольную пластину с $\xi = 0.4$, $m_1 = 2$, $n_1 = 3$, $m_2 = 6$, $n_2 = 2$, когда собственные частоты равны: $\Omega_1 = 24.1$ и $\Omega_2 = 24.4$. В данном случае учитывается параметр расстройки между собственными частотами. На Рис.2.8а и 2.8б показаны случаи свободных колебаний для моделей Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твердого тела, соответственно, причем, как и в случае квадратной пластины, имеются различия в периоде колебаний и диапазоне изменения амплитуд. Кроме того, на амплитуды, определяемые моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной, больше влияет вязкость среды и затухание колебаний происходит быстрее, чем для модели Кельвина-Фойгта с дробной производной. На Рис. 2.8в-2.8е показаны случаи вынужденных колебаний, когда не учитывался параметр расстройки между собственной частотой и частотой внешнего воздействия. На всех графиках наблюдается влияние внешней силы в виде увеличения размаха амплитуд и периодов колебаний.

Следует отметить, что для прямоугольных пластин наличие внутреннего резонанса возможно без введения параметра расстройки между собственными частотами, например, при $\xi = 0.25$, $m_1 = 1$, $n_1 = 3$, $m_2 = 9$, $n_2 = 2$, когда $\Omega_1 = \Omega_2 = 36.25$.

Рассмотрим теперь случай квадратной пластины, когда параметр расстройки между собственной частотой и частотой внешнего воздействия не равен нулю, на примере, когда вязкость окружающей среды много меньше вязкости основания: $\gamma_1 = 0.01$, $\gamma_2 = 0.1$. На Рис.2.9 показаны вынужденные колебания пластины, описываемые моделями Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твердого тела с дробной производной при различных значениях параметра внешней нагрузки. Из Рис.2.9 хорошо видно, что для всех случаев наблюдается уменьшение перекачки энергии с увеличением значения параметра расстройки.

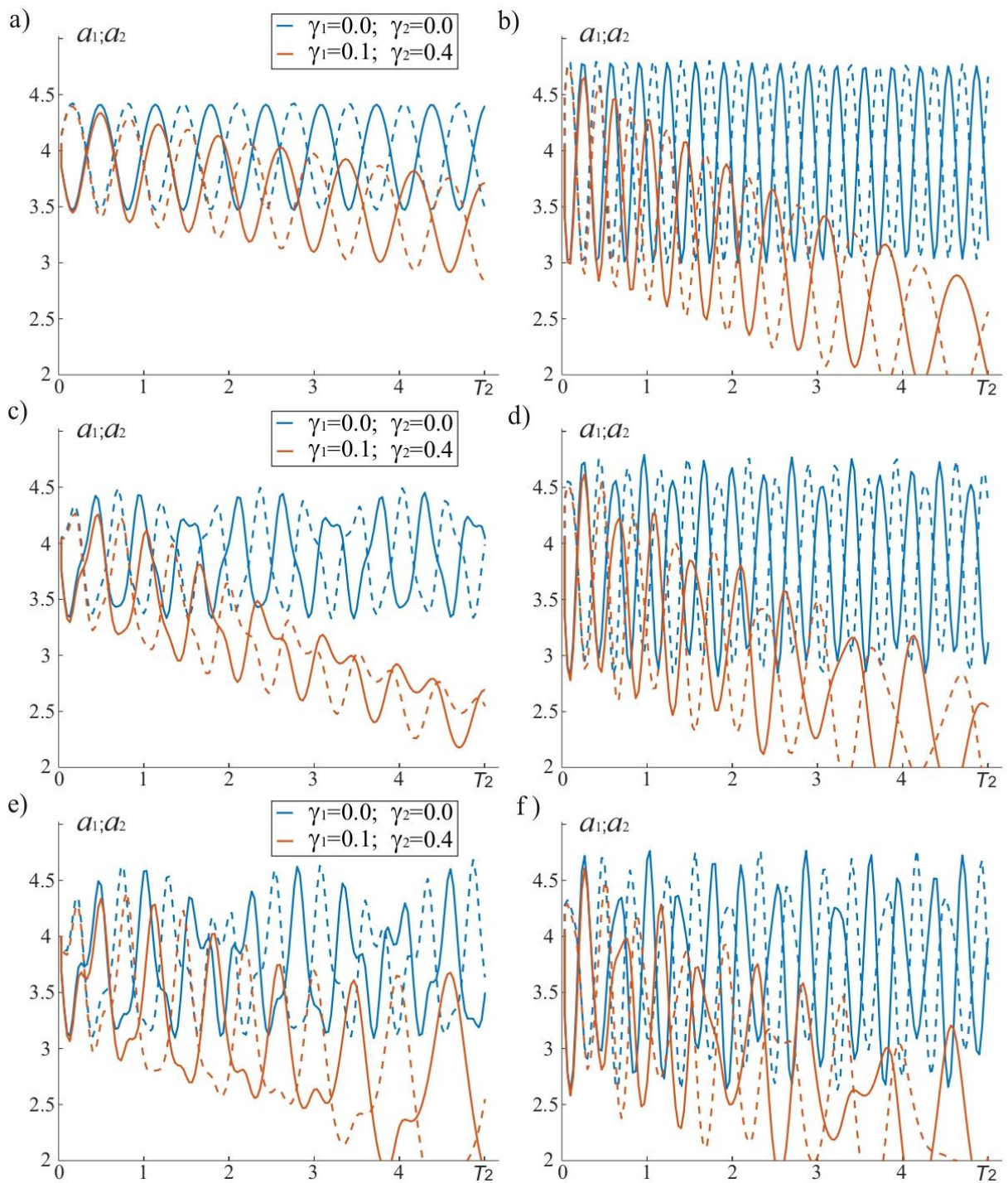


Рисунок 2.8 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от времени T_2 пластинки на вязкоупругом основании: свободные колебания для моделей а) Кельвина-Фойгта и б) стандартного линейного твердого тела; вынужденные колебания при $f = 20$ для моделей в) Кельвина-Фойгта и г) стандартного линейного твердого тела; вынужденные колебания при $f = 40$ для моделей д) Кельвина-Фойгта и е) стандартного линейного твердого тела, где a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

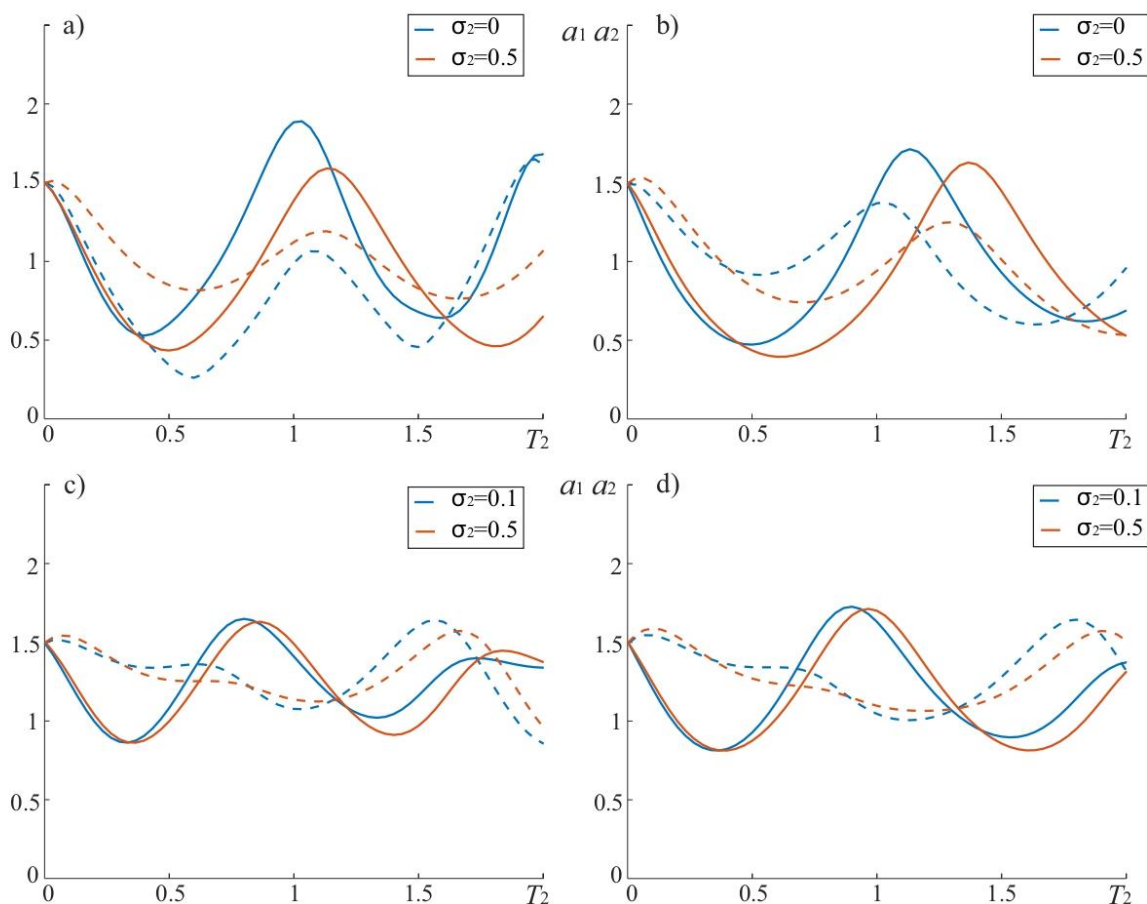


Рисунок 2.9 - Влияние параметра расстройки между собственной частотой и частотой внешней силы на нелинейные колебания пластины на вязкоупругом основании: вынужденные колебания при $f = 20$ для моделей а) Кельвина-Фойгта и б) стандартного линейного твердого тела; вынужденные колебания при $f = 10$ для моделей в) Кельвина-Фойгта и г) стандартного линейного твердого тела, где a_1 – штриховая линия, a_2 – сплошная линия.

2.4. Влияние граничных условий опирания пластины

При решении динамических задач, учитывающих зависящие от времени вязкоупругие свойства материала плиты или основания, авторы обычно ограничиваются изучением шарнирно опертых по контуру пластин [286]. Тем не менее, в литературе есть решения для прямоугольных пластин с различными комбинациями простых граничных условий (например, защемление (C), шарнирное опирание (SS) или свободное опирание (F)) [160].

Так, в работе [68] были рассчитаны частоты нелинейных колебаний прямоугольных пластин для трех различных типов граничных условий. В работе [203] исследуется динамическое поведение тонких пластин, опирающихся на вязкоупругое основание Кельвина-Фойгта с дробной производной, при воздействии подвижной точечной нагрузки для четырех типов граничных условий. Полуаналитические решения и сравнительный анализ собственных частот и перемещений точек срединной плоскости для колебаний вязкоупругой пластины Кирхгофа–Лява на вязкоупругом основании Кельвина-Фойгта с различными граничными условиями представлены в [146].

В связи с этим следующие граничные условия могут быть добавлены к системе уравнений (2.1) и (2.2) для каждой грани:

1) Шарнирно-опертые грани (S)

$$\text{при } x = 0 \text{ и } a, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \text{при } y = 0 \text{ и } b, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (2.82)$$

2) Защемленные грани (C)

$$\text{при } x = 0 \text{ и } a, \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \text{при } y = 0 \text{ и } b, \quad w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (2.83)$$

При дальнейшем анализе могут быть рассмотрены следующие три типа граничных условий для пластинки с симметрично опертыми гранями:

- шарнирное опирание по контуру (SSSS);
- защемление всех граней по контуру (CCCC);
- две противоположные грани защемлены и две другие шарнирно оперты (CSCS).

В аббревиатуре названия типа граничных условий используются буквенные символы, например, CSCS обозначает пластину с защемленной гранью $x = 0$ (C), шарнирно опертой гранью $y = 0$ (S), защемленной гранью $x = a$ (C) и шарнирно опертой гранью $y = b$ (S).

Собственные функции колебаний пластины $W_{m,n_i}(x, y)$ для определения прогибов плиты из уравнения (2.7) представлены в Таблице 2 для различных типов граничных условий (ГУ) [146].

Таблица 2.1 - Собственные функции и собственные частоты линейных колебаний пластины для различных типов граничных условий

Тип ГУ	$W_{m,n_i}(x, y)$	Ω_i^2
SSSS	$\sin \frac{\pi m_i x}{a} \sin \frac{\pi n_i y}{b}$	$\Omega_i^2 = \frac{(\xi^2 m_i^2 + n_i^2)^2}{\xi^2}$,
CCCC	$(1 - \cos \frac{2\pi m_i x}{a})(1 - \cos \frac{2\pi n_i y}{b})$	$\Omega_i^2 = \frac{16}{9\xi^2} (3\xi^4 m_i^4 + 2\xi^2 m_i^2 n_i^2 + 3n_i^4)$
CSCS	$(1 - \cos \frac{2\pi m_i x}{a}) \sin \frac{\pi n_i y}{b}$	$\Omega_i^2 = \frac{4}{3\xi^2} (4\xi^4 m_i^4 + 2\xi^2 m_i^2 n_i^2 + 0.75n_i^4)$
CCSC	$(\cos \frac{3\pi m_i x}{2a} - \cos \frac{\pi m_i x}{2a}) \times$ $\times (1 - \cos \frac{2\pi n_i y}{b})$	$\Omega_i^2 = \frac{2}{3\xi^2} (3.85\xi^4 m_i^4 + 5\xi^2 m_i^2 n_i^2 + 8n_i^4)$

Подставляя решение (2.7) в уравнение (2.2), учитывая граничные условия для каждого отдельного случая и интегрируя с учетом свойства ортогональности собственных функций, получим выражения для функции напряжений, которые для случая шарнирного опирания по контуру имеют вид выражения (2.8), а для случаев CCCC и CSCS представлены в Приложении Б.

Выполняя ту же последовательность математических преобразований для всех случаев граничных условий, что и для шарнирно-опертой по контуру пластины, приходим к той же самой системе нелинейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных перемещений для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела (2.16)-(2.17), где коэффициенты α_i зависят от моды колебаний и типа граничных условий и представлены в Приложении В.

Согласно выражениям для собственных частот, представленным в Табл.2, колебания прямоугольной упругой пластины, защемленной по контуру (CCCC), происходят с наибольшей собственной частотой по сравнению с остальными типами граничных условий. Далее в порядке убывания следуют частоты для случаев CSCS и SSSS опирания.

Далее процедура решения системы нелинейных дифференциальных уравнений для всех представленных случаев граничных условий аналогична решению для шарнирно опертой по контуру пластины. Полученная система разрешающих уравнений (2.60)-(2.63) для определения амплитуд и фаз нелинейных колебаний пластинки является универсальной для различных типов граничных условий, для каждого из которых вычисляются отдельно лишь коэффициенты α_i и собственные частоты колебаний механической системы ω_1 и ω_2 .

Уравнения (2.60)-(2.63) могут быть решены численно подобно тому, как показано в [239] для свободных колебаний пластинок, подверженных явлению внутреннего резонанса, а также обобщены для случая вынужденных колебаний [238]. В качестве численного примера на Рис. 2.10 представлен сравнительный анализ амплитуд свободных и вынужденных колебаний для двух типов граничных условий пластины: жестко защемленной по контуру (CCCC) и шарнирно опертой по контуру (SSSS). Сравнение результатов численных исследований для двух случаев показало, что колебания пластины, жестко защемленной по контуру, происходят с меньшей амплитудой и большей частотой относительно шарнирно опертой пластины.

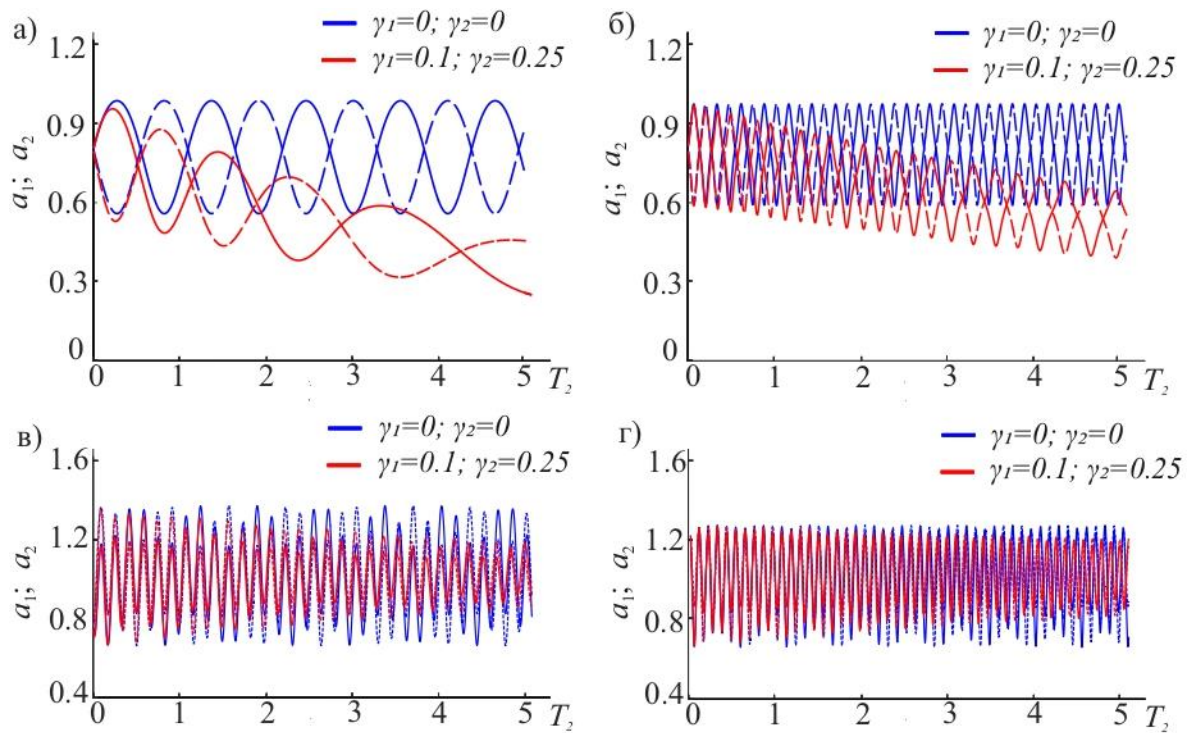


Рисунок 2.10 – Сравнительный анализ безразмерных амплитуд нелинейных колебаний пластины для двух типов граничных условий: свободные колебания ($f = 0$) а) SSSS; б) CCCC и вынужденные колебания ($f = 20$) в) SSSS; г) CCCC; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

2.5 Влияние порядка малости внешнего возмущения

Когда частота внешней силы Ω_F отлична от ω_i , эффект от возбуждения будет мал, если его амплитуда не велика [187]. В связи с этим рассмотрим случай «жесткого» воздействия внешней силы. В этом случае слагаемые от внешней нагрузки в уравнениях (2.16)-(2.17) представим в виде:

$$\varepsilon f_i = F \sin \frac{\pi m_i x_0}{a} \sin \frac{\pi m_i y_0}{b} \quad (i = 1, 2), \quad (2.84)$$

где f_i - конечные величины.

Подставляя выражения (2.22)-(2.24) и (2.84) в уравнения (2.16)-(2.17) и опуская звездочки при безразмерных величинах, получим:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + \varepsilon^2 \mu_1 D^{\gamma_1} x_1 - \varepsilon^2 \mu_2 \varepsilon_{\gamma}^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1 - 4\varepsilon f_1 \cos \Omega_F t = 0, \quad (2.85)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + \varepsilon^2 \mu_1 D^{\gamma_1} x_2 - \varepsilon^2 \mu_2 \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 - 4\varepsilon f_2 \cos \Omega_F t = 0. \quad (2.86)$$

После подстановки (2.32) в уравнения (2.85)-(2.86) с учетом (2.33), (2.34) и (2.38) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε к нулю, получим следующие системы уравнений:

порядка ε

$$D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = 4f_1 \cos(\Omega_F T_0), \quad (2.87)$$

$$D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = 4f_2 \cos(\Omega_F T_0), \quad (2.88)$$

порядка ε^3

$$D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = -2D_0 D_2 X_{11} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{11} - \alpha_1 X_{11}^3 - \alpha_2 X_{11} X_{21}^2, \quad (2.89)$$

$$D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = -2D_0 D_2 X_{21} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{21} - \alpha_3 X_{21}^3 - \alpha_4 X_{21} X_{11}^2. \quad (2.90)$$

Решение уравнений (2.87)-(2.88) будем искать в виде

$$X_{j1} = A_j(T_2) \exp(i\omega_j T_0) + \Lambda_j \exp(i\Omega_F T_0) + \bar{A}_j(T_2) \exp(-i\omega_j T_0) + \Lambda_j \exp(-i\Omega_F T_0), \quad (2.91)$$

где $\Lambda_j = \frac{2f_j}{\omega_j^2 - \Omega_F^2}$ ($j = 1, 2$) – неизвестные константы.

Подставляя решение (2.91) в уравнения (2.89)-(2.90) с учетом выражений (2.46)-(2.47), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = & - \left[2i\omega_1 D_2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) + \mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} A_1 - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} A_1 \right. \\
& + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + 6\alpha_1 A_1 \Lambda_1^2 + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + 2\alpha_2 A_1 \Lambda_2^2 \left. \right] \exp(i\omega_1 T_0) \\
& - \Lambda_1 \left[\mu_1 (i\Omega_F)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\Omega_F)^{\gamma_2})^{-1} + 3\alpha_1 \Lambda_1^2 + 6\alpha_1 A_1 \bar{A}_1 \right. \\
& + 2\alpha_2 A_2 \bar{A}_2 + 3\alpha_2 \Lambda_2^2 \left. \right] \exp(i\Omega_F T_0) - \alpha_1 \left\{ A_1^3 \exp(3i\omega_1 T_0) + \Lambda_1^3 \exp(3i\Omega_F T_0) \right. \\
& + 3A_1^2 \Lambda_1 \exp[i(2\omega_1 + \Omega_F)T_0] + 3\bar{A}_1^2 \Lambda_1 \exp[i(\Omega_F - 2\omega_1)T_0] \\
& + 3A_1 \Lambda_1^2 \exp[i(\omega_1 + 2\Omega_F)T_0] + 3A_1 \Lambda_1^2 \exp[i(\omega_1 - 2\Omega_F)T_0] \left. \right\} \\
& - \alpha_2 \left\{ A_1 A_2^2 \exp[i(\omega_1 + 2\omega_2)T_0] + \bar{A}_1 A_2^2 \exp[i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0] \right. \\
& + 4A_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp(i\omega_2 T_0) + 2A_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 - \Omega_F)T_0] \\
& + 2A_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp[i(\omega_2 - 2\Omega_F)T_0] + 2A_1 \bar{A}_2 \Lambda_2 \exp[i(\omega_1 - \omega_2 + \Omega_F)T_0] \\
& + 2A_1 A_2 \Lambda_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 + \Omega_F)T_0] + 2A_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp[i(\omega_2 + 2\Omega_F)T_0] \\
& + 2\bar{A}_1 A_2 \Lambda_2 \exp[i(\omega_2 - \omega_1 + \Omega_F)T_0] + A_2^2 \Lambda_1 \exp[i(2\omega_2 + \Omega_F)T_0] \\
& + A_2^2 \Lambda_1 \exp[i(2\omega_2 - \Omega_F)T_0] + \Lambda_2^2 A_1 \exp[i(\omega_1 + 2\Omega_F)T_0] \\
& \left. + \Lambda_2^2 \Lambda_1 \exp(3i\Omega_F T_0) + \Lambda_2^2 A_1 \exp[i(\omega_1 - 2\Omega_F)T_0] \right\} + cc, \tag{2.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = & - \left[2i\omega_2 D_2 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) + \mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} A_2 - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} A_2 \right. \\
& + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + 6\alpha_3 A_2 \Lambda_2^2 + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 + 2\alpha_4 A_2 \Lambda_1^2 \left. \right] \exp(i\omega_2 T_0) \\
& - \Lambda_2 \left[\mu_1 (i\Omega_F)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\Omega_F)^{\gamma_2})^{-1} + 3\alpha_3 \Lambda_2^2 + 6\alpha_3 A_2 \bar{A}_2 \right. \\
& + 2\alpha_4 A_1 \bar{A}_1 + 3\alpha_4 \Lambda_1^2 \left. \right] \exp(i\Omega_F T_0) - \alpha_3 \left\{ A_2^3 \exp(3i\omega_2 T_0) + \Lambda_2^3 \exp(3i\Omega_F T_0) \right. \\
& + 3A_2^2 \Lambda_2 \exp[i(2\omega_2 + \Omega_F)T_0] + 3\bar{A}_2^2 \Lambda_2 \exp[i(\Omega_F - 2\omega_2)T_0] \\
& + 3A_2 \Lambda_2^2 \exp[i(\omega_2 + 2\Omega_F)T_0] + 3A_2 \Lambda_2^2 \exp[i(\omega_2 - 2\Omega_F)T_0] \left. \right\} \\
& - \alpha_4 \left\{ A_2 A_1^2 \exp[i(\omega_2 + 2\omega_1)T_0] + \bar{A}_2 A_1^2 \exp[i(\omega_2 - 2\omega_1)T_0] \right. \\
& + 4A_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp(i\omega_1 T_0) + 2A_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 - \Omega_F)T_0] \\
& + 2A_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp[i(\omega_1 - 2\Omega_F)T_0] + 2A_2 \bar{A}_1 \Lambda_1 \exp[i(\omega_2 - \omega_1 + \Omega_F)T_0] \\
& + 2A_2 A_1 \Lambda_1 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 + \Omega_F)T_0] + 2A_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp[i(\omega_1 + 2\Omega_F)T_0] \\
& + 2\bar{A}_2 A_1 \Lambda_1 \exp[i(\omega_1 - \omega_2 + \Omega_F)T_0] + A_1^2 \Lambda_2 \exp[i(2\omega_1 + \Omega_F)T_0] \\
& + A_1^2 \Lambda_2 \exp[i(2\omega_1 - \Omega_F)T_0] + \Lambda_1^2 A_2 \exp[i(\omega_2 + 2\Omega_F)T_0] \\
& \left. + \Lambda_1^2 \Lambda_2 \exp(3i\Omega_F T_0) + \Lambda_1^2 A_2 \exp[i(\omega_2 - 2\Omega_F)T_0] \right\} + cc. \tag{2.93}
\end{aligned}$$

Анализ выражений (2.92)-(2.93) показывает, что в данном случае возможно сочетание внутреннего резонанса один-к-одному (2.52) с внешним резонансом (2.53) или с одним из двух других случаев резонансов:

$$3\Omega_F = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2, \quad (2.94)$$

$$\Omega_F = 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2, \quad (2.95)$$

Известно, что помимо внешнего резонанса в системах с кубической нелинейностью при жестком воздействии внешней силы могут возникать вторичные резонансы, а именно: супергармонический резонанс (2.94) и субгармонический резонанс (2.95) [187]. Нелинейные колебания различных конструкций из материалов, описываемых моделями с дробной производной, в условиях сочетания внешнего и вторичных резонансов исследовались в [138, 200, 206].

2.5.1 Жесткое нерезонансное возбуждение

В этом случае частота внешней силы Ω_F отлична от ω_i , $\frac{1}{3}\omega_i$ и $3\omega_i$, т.е. в пластине возникает только внутренний резонанс.

Для того чтобы исключить вековые члены из уравнений (2.92)-(2.93) с учетом соотношения (2.52), записываются следующие системы уравнений:

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + 4\alpha_2 A_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp(-i\sigma_1 T_2) + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 \exp(-2i\sigma_1 T_2) + 6\alpha_1 A_1 \Lambda_1^2 + 2\alpha_2 A_1 \Lambda_2^2 = 0, \quad (2.96)$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 + 4\alpha_4 A_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp(i\sigma_1 T_2) + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 \exp(2i\sigma_1 T_2) + 6\alpha_3 A_2 \Lambda_2^2 + 2\alpha_4 A_2 \Lambda_1^2 = 0. \quad (2.97)$$

Представляя функции A_1 и A_2 в полярной форме (2.59), умножая уравнение (2.96) на \bar{A}_1 и уравнение (2.97) на \bar{A}_2 , соответственно, затем складывая и вычитая сопряженные к ним уравнения с учетом (2.58), приходим к следующей системе уравнений:

$$(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 = -\omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta - 4\omega_1^{-1} \alpha_2 a_1 a_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \sin \frac{\delta}{2}, \quad (2.98)$$

$$(a_2^2)^{\cdot} + s_2 a_2^2 = \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 4 \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1 a_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \sin \frac{\delta}{2}, \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = & \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} (a_1^2 + 2\Lambda_1^2) + \alpha_2 \omega_1^{-1} (a_2^2 + \Lambda_2^2) \\ & + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta + 2 \alpha_2 (a_1 \omega_1)^{-1} a_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \cos \frac{\delta}{2}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 = & \frac{1}{2} \lambda_2 + \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} (a_2^2 + 2\Lambda_2^2) + \alpha_4 \omega_2^{-1} (a_1^2 + \Lambda_1^2) \\ & + \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 \cos \delta + 2 \alpha_4 (a_2 \omega_2)^{-1} a_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \cos \frac{\delta}{2} - \sigma_1, \end{aligned} \quad (2.101)$$

где коэффициенты демпфирования s_i и λ_i определяются выражениями (2.64).

Следует отметить, что в отличие от случая мягкого нерезонансного возбуждения наличие жесткого возбуждения оказывает влияние на амплитуды и фазы нелинейных колебаний пластинки на вязкоупругом основании.

Уравнения для амплитуд и фаз в случае жесткого возбуждения в условиях сочетания внутреннего резонанса один-к-одному (2.52) с внешним резонансом (2.53), могут быть получены из системы уравнений (2.60)-(2.63) для мягкого резонансного возбуждения в качестве частного случая при больших значениях амплитуды внешней силы [35].

2.5.2 Супергармонический резонанс $\Omega_F \approx \frac{1}{3} \omega_1$

Рассмотрим случай сочетания внутреннего резонанса (2.52) с супергармоническим резонансом (2.94), когда $\Omega_F \approx \frac{1}{3} \omega_1$. Для того чтобы исключить вековые члены из уравнений (2.92)-(2.93) с учетом соотношений (2.52) и (2.94), записываются следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_2 A_1 + \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + \\ + 4\alpha_2 A_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp(-i\sigma_1 T_2) + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 \exp(-2i\sigma_1 T_2) + 6\alpha_1 A_1 \Lambda_1^2 + 2\alpha_2 A_1 \Lambda_2^2 + \\ + \alpha_1 \Lambda_1^3 \exp(i\sigma_2 T_2) + \alpha_2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 \exp(i\sigma_2 T_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_2 D_2 A_2 + \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 + \\
& + 4\alpha_4 A_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp(-i\sigma_1 T_2) + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 \exp(-2i\sigma_1 T_2) + 6\alpha_3 A_2 \Lambda_2^2 + 2\alpha_4 A_2 \Lambda_1^2 + \\
& + \alpha_3 \Lambda_2^3 \exp(i(\sigma_1 + \sigma_2) T_2) + \alpha_4 \Lambda_2 \Lambda_1^2 \exp(i(\sigma_1 + \sigma_2) T_2) = 0.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Представляя функции A_1 и A_2 в полярной форме (2.59) и применяя те же самые процедуры, как это было выполнено выше для случая жесткого нерезонансного возбуждения, приходим к следующей системе уравнений для определения нелинейных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned}
(a_1^2)^{\cdot} + s_1 a_1^2 &= -\omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta - 4\omega_1^{-1} \alpha_2 a_1 a_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \sin \frac{\delta}{2} + \\
& + \omega_1^{-1} a_1 \Lambda_1 (\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2) \sin \beta_1,
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
(a_2^2)^{\cdot} + s_2 a_2^2 &= \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 4\omega_2^{-1} \alpha_4 a_1 a_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \sin \frac{\delta}{2} + \\
& + \omega_2^{-1} a_2 \Lambda_2 (\alpha_3 \Lambda_2^2 + \alpha_4 \Lambda_1^2) \sin \beta_2,
\end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 &= \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} (a_1^2 + 2\Lambda_1^2) + \alpha_2 \omega_1^{-1} (a_2^2 + \Lambda_2^2) + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta + \\
& + 2\alpha_2 (a_1 \omega_1)^{-1} a_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \cos \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} (a_1 \omega_1)^{-1} \Lambda_1 (\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2) \cos \beta_1,
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_2 &= \frac{1}{2} \lambda_2 + \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} (a_2^2 + 2\Lambda_2^2) + \alpha_4 \omega_2^{-1} (a_1^2 + \Lambda_1^2) + \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 \cos \delta + \\
& + 2\alpha_4 (a_2 \omega_2)^{-1} a_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \cos \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} (a_2 \omega_2)^{-1} \Lambda_2 (\alpha_3 \Lambda_2^2 + \alpha_4 \Lambda_1^2) \cos \beta_2 - \sigma_1.
\end{aligned} \tag{2.107}$$

2.5.3 Субгармонический резонанс $\Omega_F \approx 3\omega_1$

Теперь рассмотрим случай сочетания внутреннего резонанса (2.52) с субгармоническим резонансом (2.95), когда $\Omega_F \approx 3\omega_1$. Для того чтобы исключить вековые члены из уравнений (2.92)-(2.93) с учетом соотношений (2.52) и (2.95), записываются следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_1 D_2 A_1 + \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + \\
& + 4\alpha_2 A_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp(-i\sigma_1 T_2) + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 \exp(-2i\sigma_1 T_2) + 6\alpha_1 A_1 \Lambda_1^2 + 2\alpha_2 A_1 \Lambda_2^2 + \\
& + 3\alpha_1 \bar{A}_1^2 \Lambda_1 \exp(i\sigma_2 T_2) + \alpha_2 \bar{A}_2^2 \Lambda_1 \exp(i(2\sigma_1 + \sigma_2) T_2) = 0,
\end{aligned} \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_2 D_2 A_2 + \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 + \\
& + 4\alpha_4 A_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \exp(-i\sigma_1 T_2) + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 \exp(-2i\sigma_1 T_2) + 6\alpha_3 A_2 \Lambda_2^2 + 2\alpha_4 A_2 \Lambda_1^2 + \\
& + 3\alpha_3 \bar{A}_2^2 \Lambda_2 \exp(i(3\sigma_1 + \sigma_2) T_2) + \alpha_4 \bar{A}_1^2 \Lambda_2 \exp(i(\sigma_1 + \sigma_2) T_2) = 0.
\end{aligned} \quad (2.109)$$

Представляя функции A_1 и A_2 в полярной форме (2.59) и применяя те же самые процедуры, как это было выполнено выше для случая жесткого нерезонансного возбуждения, приходим к следующей системе уравнений для определения нелинейных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned}
(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 = & -\omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta - 4\omega_1^{-1} \alpha_2 a_1 a_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \sin \frac{\delta}{2} + \\
& + 3\omega_1^{-1} \alpha_1 a_1^3 \Lambda_1 \sin \beta_3 + \omega_1^{-1} \alpha_2 a_1 a_2^2 \Lambda_1 \sin \beta_4,
\end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned}
(a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 = & \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 4\omega_2^{-1} \alpha_4 a_1 a_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \sin \frac{\delta}{2} + \\
& + 3\omega_2^{-1} \alpha_3 a_2^3 \Lambda_2 \sin \beta_5 + \omega_2^{-1} \alpha_4 a_2 a_1^2 \Lambda_2 \sin \beta_6,
\end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 = & \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} (a_1^2 + 2\Lambda_1^2) + \alpha_2 \omega_1^{-1} (a_2^2 + \Lambda_2^2) + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta + \\
& + 2\alpha_2 (a_1 \omega_1)^{-1} a_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \cos \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} a_1 \Lambda_1 \cos \beta_3 + \frac{1}{2} \alpha_2 (a_1 \omega_1)^{-1} a_2^2 \Lambda_1 \cos \beta_4,
\end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_2 = & \frac{1}{2} \lambda_2 + \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} (a_2^2 + 2\Lambda_2^2) + \alpha_4 \omega_2^{-1} (a_1^2 + \Lambda_1^2) + \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 \cos \delta + \\
& + 2\alpha_4 (a_2 \omega_2)^{-1} a_1 \Lambda_1 \Lambda_2 \cos \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} a_2 \Lambda_2 \cos \beta_5 + \frac{1}{2} \alpha_4 (a_2 \omega_2)^{-1} a_1^2 \Lambda_2 \cos \beta_6 - \sigma_1,
\end{aligned} \quad (2.113)$$

где $\beta_3 = 3\varphi_1 - \sigma_2 T_2$, $\beta_4 = \varphi_1 + 2\varphi_2 - \sigma_2 T_2$, $\beta_5 = 3\varphi_2 - \sigma_2 T_2$ и $\beta_6 = \varphi_2 + 2\varphi_1 - \sigma_2 T_2$.

Системы уравнений (2.98)-(2.101), (2.104)-(2.107) и (2.110)-(2.113) решаются численным методом, предложенным в [238] для случая свободных и вынужденных колебаний пластины без учета параметров расстройки $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. В качестве примера была рассмотрена квадратная пластина при $\Omega_1 = \Omega_2 = 10$. На Рис. 2.11 наглядно показан энергообмен между взаимодействующими модами свободных (Рис. 2.11а) и вынужденных колебаний пластины на упругом и вязкоупругом основании для случаев нерезонансного жесткого возбуждения (Рис.

2.11б), супергармонического резонанса (Рис. 2.11в) и субгармонического резонанса (Рис. 2.11г) в сочетании с внутренним резонансом 1:1.

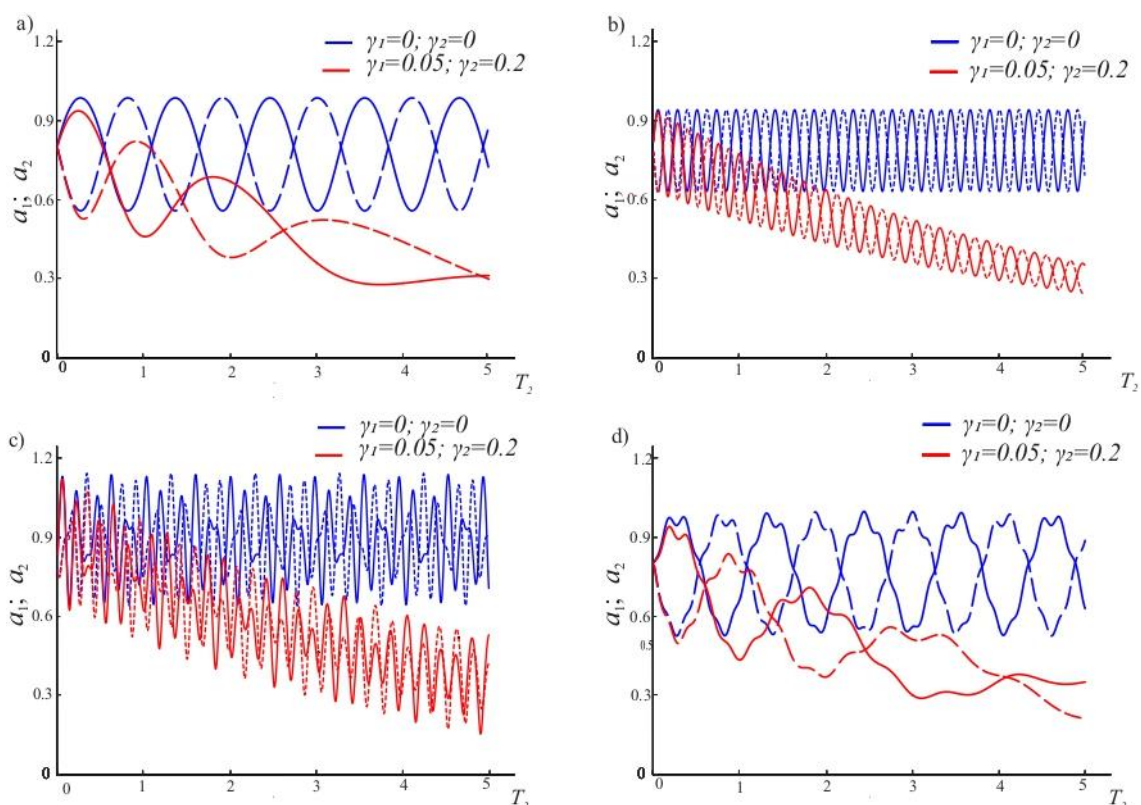


Рисунок 2.11 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от времени T_2 пластинки на вязкоупругом основании: а) свободные колебания; б) вынужденные колебания при $f_1 = f_2 = 40$ в случае нерезонансного возбуждения $\Omega_f = 0,25\omega_1$; в) супергармонический резонанс $3\Omega_f = \omega_1$; г) субгармонический резонанс $\Omega_f = 3\omega_1$, где a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

Из Рис.2.11б следует, что жесткое нерезонансное возбуждение влияет на амплитуду как незатухающих ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), так и затухающих ($\gamma_1 = 0.05, \gamma_2 = 0.2$) колебаний пластины, а частота колебаний является функцией амплитуды приложенной силы в отличие от случая мягкого нерезонансного возбуждения. В случае вторичных резонансов (Рис.2.11в,г) результирующие колебания пластины складываются из общего решения от свободных колебаний и частного решения от вынужденных колебаний. В случае супергармонического резонанса (Рис. 2.11в) наблюдается уменьшение периода колебаний и заметный рост амплитуд в

сравнении со свободными колебаниями (Рис.2.11а), в то время как в случае субгармонического резонанса (Рис. 2.11г) заметно увеличение периода колебаний. Влияние жесткого возбуждения на характер колебаний заметно только при больших амплитудах внешней нагрузки, в противном случае графики изменения амплитуд приближаются к кривым для свободных колебаний.

Зависимость безразмерных амплитуд нелинейных колебаний от времени в случае нерезонансного жесткого возмущения внешней силы представлена на Рис. 2.12 для различных значений частоты гармонической силы. Из Рис.2.12 следует, что период колебаний системы уменьшается с увеличением частоты внешней силы.

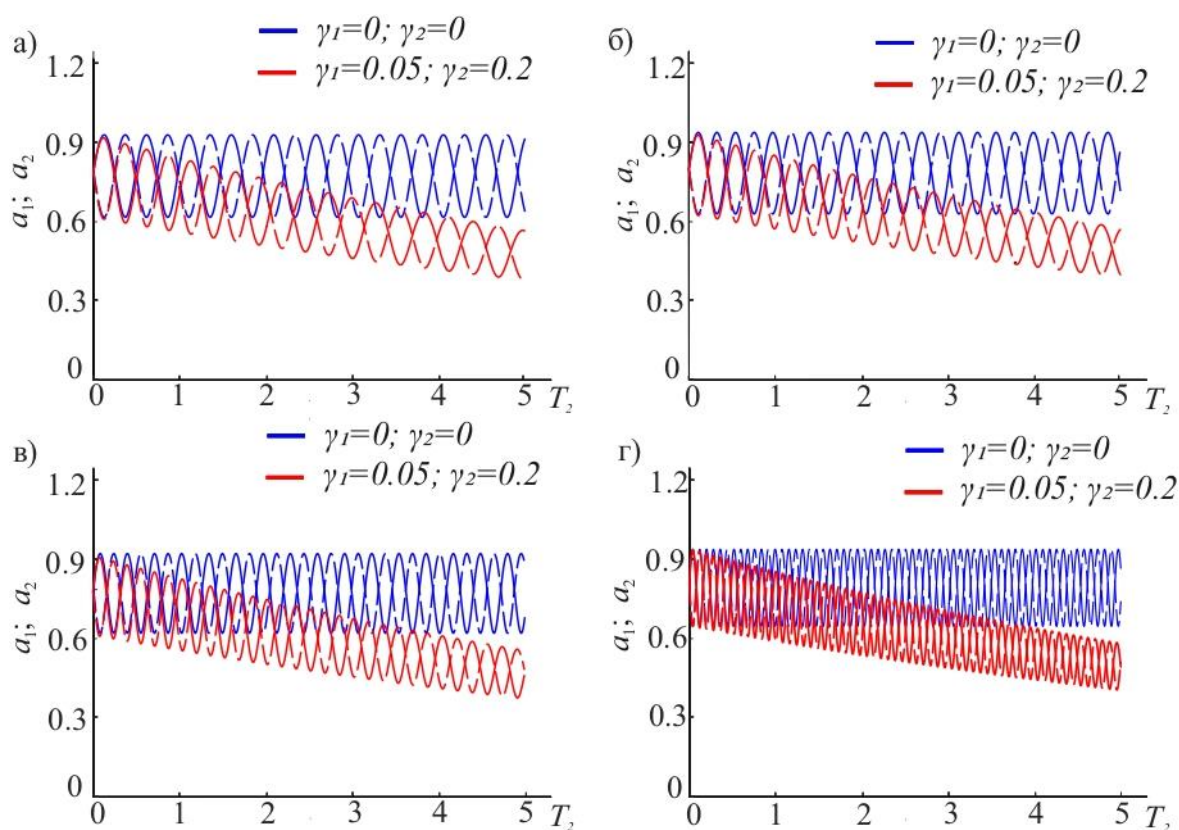


Рисунок 2.12 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от времени T_2 пластинки на вязкоупругом основании при $f_1 = f_2 = 40$ в случае нерезонансного возбуждения: а) $\Omega_f = 0,1\omega_1$; б) $\Omega_f = 0,3\omega_1$; в) $\Omega_f = 0,5\omega_1$; г) $\Omega_f = 0,7\omega_1$, где a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

На рис. 2.13 и 2.14 показана зависимость безразмерных амплитуд колебаний от безразмерного времени в случаях супергармонического и субгармонического

резонансов, соответственно, при различных значениях параметров дробности окружающей среды и основания.

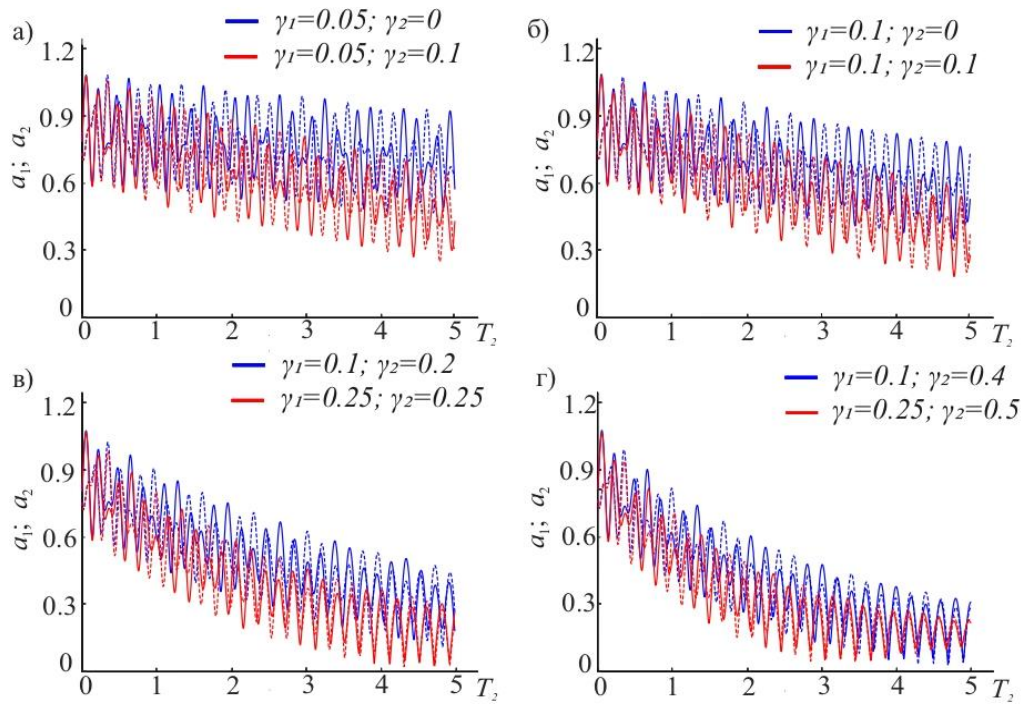


Рисунок 2.13 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от времени T_2 пластинки на вязкоупругом основании при $f_1 = f_2 = 40$ в случае супергармонического резонанса для различных значений параметров дробности;

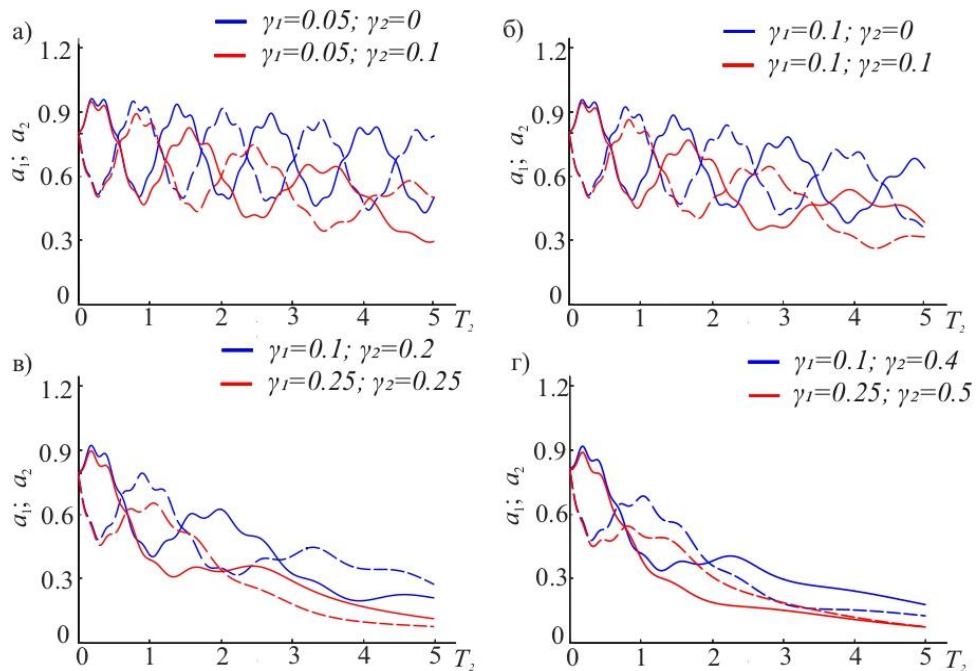


Рисунок 2.14 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от времени T_2 пластинки на вязкоупругом основании при $f_1 = f_2 = 40$ в случае субгармонического резонанса для различных значений параметров дробности

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

3.1 Задачи на воздействие подвижной нагрузки

Изучение поведения пластин или балок, опирающихся на вязкоупругое основание, при воздействии подвижной нагрузки получает в настоящее время все большее распространение. Обширные исследования в этой области для различных видов подвижных нагрузок изложены в монографии Fryba [109]. Данная задача может найти много инженерных приложений, таких как взаимодействие самолета со взлетно-посадочной полосой или транспортного средства с дорожным полотном, взаимодействие фундамента и грунтового основания, динамика системы вертолетных площадок, проектирование палубы кораблей (особенно авианосцев), устройство железнодорожных путей и т.д. [202].

Задача о динамическом поведении прямоугольной пластины на вязкоупругом основании, подверженной воздействию подвижных нагрузок, вызывает большой интерес среди исследователей. Так, Li и др. исследовали колебания тонкой шарнирно опертой (SSSS) пластины на вязкоупругом основании по модели Кельвина-Фойгта с производной целого порядка, подвергаемой воздействию сосредоточенной силы,двигающейся с переменной скоростью, включая случаи ускорения, торможения и постоянной скорости, при помощи метода модальной суперпозиции [161]. Представлены аналитические решения для определения динамического прогиба пластины с обобщенными граничными условиями. Динамическое поведение пластины типа Рейснера-Миндлина, опирающейся на вязкоупругое основание Кельвина-Фойгта, под действием подвижной нагрузки моделируется в работе [94] при помощи трехузлового пластинчатого элемента Миндлина. В работе [133] при помощи принципа Гамильтона получены определяющие уравнения для колебаний прямоугольной плиты, на которую действует сосредоточенная подвижная нагрузка, при этом вязкоупругие свойства основания определялись моделью

Кельвина–Фойгта типа Фусса-Винклера. Luong и др. изучили динамическое поведение толстой плиты на основании Кельвина-Фойгта, на которую действует подвижная нагрузка, с использованием метода конечных элементов [173]. Динамическое поведение пластины на вязкоупругом основании Пастернака при воздействии подвижной гармонической нагрузки анализируется в [174].

Согласно проведенному обзору литературы количество работ, посвященных колебаниям конструкций на вязкоупругом основании с дробной производной, вызванных действием подвижных нагрузок, достаточно невелико. Anague и др. [5] [71] представили аналитическое и численное решение для описания линейных колебаний балки Рэлея от воздействия движущейся нагрузки, опирающейся на вязкоупругое основание по модели Пастернака дробного порядка. В работе [207] анализируется динамическое поведение балки Эйлера-Бернулли на вязкоупругом нелинейном основании на основе модели Кельвина-Фойгта с дробной производной при воздействии подвижной нагрузки с различной скоростью, в том числе для случаев ускорения, торможения и равномерного движения.

Динамическое поведение тонкой упругой пластины на вязкоупругом основании Кельвина-Фойгта дробного порядка было изучено в [203] для четырех типов граничных условий опирания в случае воздействия нагрузки, движущейся с постоянной скоростью или постоянным ускорением.

3.2 Постановка задачи и метод решения

В данной главе рассматривается динамическое поведение упругой пластины на вязкоупругом основании при воздействии на нее подвижной гармонической силы (Рис. 3.1). Уравнение движения пластинки фон Кармана, колеблющейся в вязкоупругой окружающей среде, относительно поперечного прогиба $w = w(x, y, t)$ в этом случае запишется в виде [240, 241]:

$$\begin{aligned}
& D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \\
& + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = P \delta(x - f(t)) \delta(y - b/2) \sin \Omega_p t - F_1 - F_2,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где P и Ω_p – амплитуда и частота приложенной силы, $f(t)$ – функция, определяющая положение подвижной нагрузки. Значения функции $f(t)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(t) \leq a$, и в случае движения с постоянной скоростью $f(t) = Vt$.

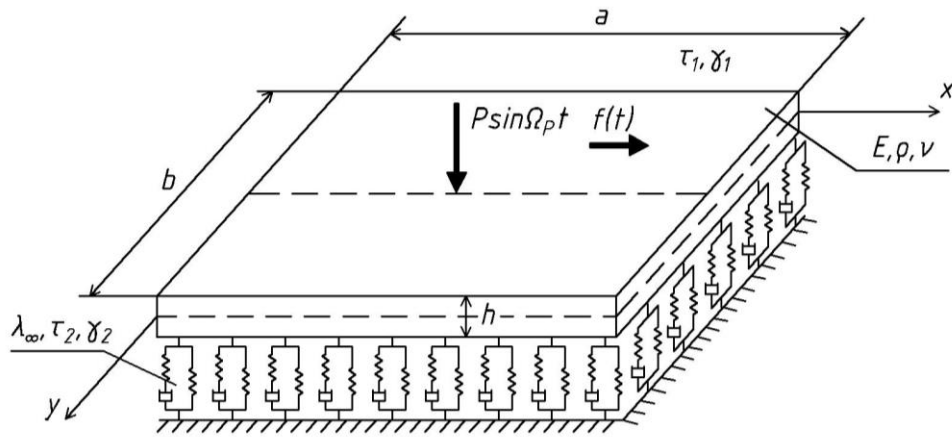


Рисунок 3.1 – Схема пластинки на вязкоупругом основании при воздействии подвижной гармонической силы.

Тогда система уравнений движения относительно обобщенных перемещений с учетом фильтрующего свойства дельта функции (2.10) записывается в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
& \ddot{x}_1^* + (\Omega_1^{*2} + \lambda_\infty^*) x_1^* + \alpha_1 x_1^{*3} + \alpha_2 x_1^* x_2^{*2} + E_0^* \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_1^* - \lambda_\infty^* \nu_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1^* - \\
& - 4P^* \sin(\pi m_1 V^* t^*) \sin\left(\frac{\pi n_1}{2}\right) \sin \Omega_p^* t^* = 0,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{x}_2^* + (\Omega_2^{*2} + \lambda_\infty^*) x_2^* + \alpha_3 x_2^{*3} + \alpha_4 x_2^* x_1^{*2} + E_0^* \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_1^* - \lambda_\infty^* \nu_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2^* - \\
& - 4P^* \sin(\pi m_2 V^* t^*) \sin\left(\frac{\pi n_2}{2}\right) \sin \Omega_p^* t^* = 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\text{где } \Omega_p^* = \frac{ab}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}} \Omega_p, \quad P^* = \frac{12(ab)^{3/2}(1-\nu^2)}{\pi^4 E h^5} P, \quad V^* = \frac{b}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}} V.$$

Считая амплитуду подвижной гармонической силы малой величиной в случае мягкого возбуждения в уравнениях (3.3)-(3.4)

$$\varepsilon^3 p_i = P^* \sin\left(\frac{\pi n_i}{2}\right), \quad (3.4)$$

а также опуская звездочки у безразмерных величин, с учетом выражений (2.22) и (2.24) получим

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + \varepsilon^2 \mu_1 D_{0+}^{\gamma_1} x_1 - \varepsilon^2 \mu_2 \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_{11} - 4\varepsilon^3 p_1 \sin \omega_{f_1} t \sin \Omega_p t = 0, \quad (3.5)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + \varepsilon^2 \mu_1 D_{0+}^{\gamma_1} x_2 - \varepsilon^2 \mu_2 \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 - 4\varepsilon^3 p_2 \sin \omega_{f_2} t \sin \Omega_p t = 0, \quad (3.6)$$

где $\omega_{f_i} = \pi m_i V$ - частоты, зависящие от скорости движения и номеров мод колебаний.

Решение системы уравнений (3.5)-(3.6) будем искать в виде разложения (2.32) с помощью обобщенного метода многих временных масштабов по аналогии со случаем действия гармонической силы, приложенной в точке. Тогда применяя процедуру, описанную в предыдущей главе, приходим к следующим уравнениям: на шаге ε^3

$$D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = -2D_0 D_2 X_{11} - X_{11} \left(\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1} \right) - \alpha_1 X_{11}^3 - \alpha_2 X_{11} X_{21}^2 + 2p_1 \cos((\omega_{f_1} + \Omega_p)T_0) - 2p_1 \cos((\omega_{f_1} - \Omega_p)T_0), \quad (3.7)$$

$$D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = -2D_0 D_2 X_{21} - X_{21} \left(\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1} \right) - \alpha_3 X_{21}^3 - \alpha_4 X_{21} X_{11}^2 + 2p_2 \cos((\omega_{f_2} + \Omega_p)T_0) - 2p_2 \cos((\omega_{f_2} - \Omega_p)T_0). \quad (3.8)$$

Подставляя решение (2.45), полученное для уравнений на шаге ε , в правую часть уравнений (3.7)-(3.8), в результате имеем

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = & -2i\omega_1 D_2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\ & - \left[\bar{\mu}_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \bar{\mu}_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\ & - \alpha_1 \left[A_1 \exp(3i\omega_1 T_0) + 3\bar{A}_1 \exp(i\omega_1 T_0) \right] A_1^2 - \\ & - \alpha_2 \left\{ A_2^2 \exp[(\omega_1 + 2\omega_2)T_0] + 2A_2 \bar{A}_2 \exp(i\omega_1 T_0) + \bar{A}_2^2 \exp[i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0] \right\} A_1 + \\ & + p_1 \exp(i(\omega_{f_1} + \Omega_p)T_0) - p_1 \exp(i(\omega_{f_1} - \Omega_p)T_0) + cc, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = & -2i\omega_2 D_2 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
& - \left[\bar{\mu}_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \bar{\mu}_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
& - \alpha_3 \left[A_2 \exp(3i\omega_2 T_0) + 3\bar{A}_2 \exp(i\omega_2 T_0) \right] A_2^2 - \\
& - \alpha_4 \left\{ A_1^2 \exp[(2\omega_1 + \omega_2)T_0] + 2A_1 \bar{A}_1 \exp(i\omega_2 T_0) + \bar{A}_1^2 \exp[i(\omega_2 - 2\omega_1)T_0] \right\} A_2 + \\
& + p_2 \exp(i(\omega_{f_2} + \Omega_p)T_0) - p_2 \exp(i(\omega_{f_2} - \Omega_p)T_0) + cc.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Анализ выражений (3.9)-(3.10) показывает, что в данном случае возможно возникновение внутреннего резонанса 1:1, когда любые две частоты колебаний механической системы «пластина+вязкоупругое основание» близки друг к другу, а именно:

$$\omega_1 = \omega_2, \quad \text{и поэтому,} \quad \Omega_1 = \Omega_2. \tag{3.11}$$

Из уравнений (3.9)-(3.10) следует, что внутренний резонанс (3.11) может сопровождаться внешним резонансом, когда выполняется одно из следующих условий:

$$(1) \omega_i = \omega_{fi} + \Omega_p, \tag{3.12}$$

$$(2) \omega_i = \omega_{fi} - \Omega_p. \tag{3.13}$$

После исключения вековых членов из уравнений (3.9)-(3.10) с учетом уравнений (3.11)-(3.12), получим следующую систему уравнений:

$$2i\omega_1 D_2 A_1 + \left[\bar{\mu}_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \bar{\mu}_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 - p_1 = 0, \tag{3.14}$$

$$2i\omega_2 D_2 A_2 + \left[\bar{\mu}_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \bar{\mu}_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 - p_2 = 0. \tag{3.15}$$

Представляя функции A_1 и A_2 в полярной форме (2.59), повторяя те же преобразования, что и в предыдущей главе, приходим к следующей системе уравнений:

$$(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + p_1 \omega_1^{-1} a_1 \sin \varphi_1 = 0, \tag{3.16}$$

$$(a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 - \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + p_2 \omega_2^{-1} a_2 \sin \varphi_2 = 0, \tag{3.17}$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} a_1^2 - \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta + \frac{1}{2} p_1 (\omega_1 a_1)^{-1} \cos \varphi_1 = 0, \tag{3.18}$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{3}{2}\alpha_3\omega_2^{-1}a_2^2 - \alpha_4\omega_2^{-1}a_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_4\omega_2^{-1}a_1^2 \cos \delta + \frac{1}{2}p_2(\omega_2 a_2)^{-1} \cos \varphi_2 = 0, \quad (3.19)$$

где коэффициенты демпфирования s_i и λ_i определяются с помощью выражений (2.64).

3.3 Численные исследования

Уравнения (3.16)-(3.19) решены при помощи программного комплекса, предназначенного для численного исследования нелинейных колебаний пластин на вязкоупругом основании с использованием операторов дробного порядка [28], свидетельство о государственной регистрации которого представлено в приложении А. В качестве численного примера рассматривалась квадратная пластина при $m_1 = n_2 = 1, m_2 = n_1 = 3$. Гармоническая сила движется с постоянной скоростью $V = 0,318$ ($V = 30 \text{ м/с}$) и частотой $\Omega_p = 9,13$ ($\Omega_p = 95 \text{ с}^{-1}$) вдоль оси x .

Пластина находится в условиях внутреннего резонанса 1:1 при $\omega_1 = \omega_2 = 10,13$, сопровождающегося внешним резонансом:

$$\omega_1 = \omega_{f_1} + \Omega_F = 3,14 \cdot 1 \cdot 0,318 + 9,13 = 10,13. \quad (3.20)$$

На Рис. 3.2 наглядно показан обмен энергией между взаимодействующими модами нелинейных свободных и вынужденных колебаний шарнирно опертой пластины на упругом ($\gamma_2 = 0$) и вязкоупругом ($\gamma_2 \neq 0$) основании по модели стандартного линейного твердого тела с дробной производной для различных значений амплитуды гармонической силы. Из Рис. 3.2 следует, что увеличение величины внешней силы приводит к увеличению безразмерных амплитуд колебаний пластины. Зависимость амплитуд нелинейных колебаний от значений дробных параметров представлена на Рис. 3.3. С появлением демпфирующих свойств вязкоупругой среды демпфирование колебаний увеличивается.

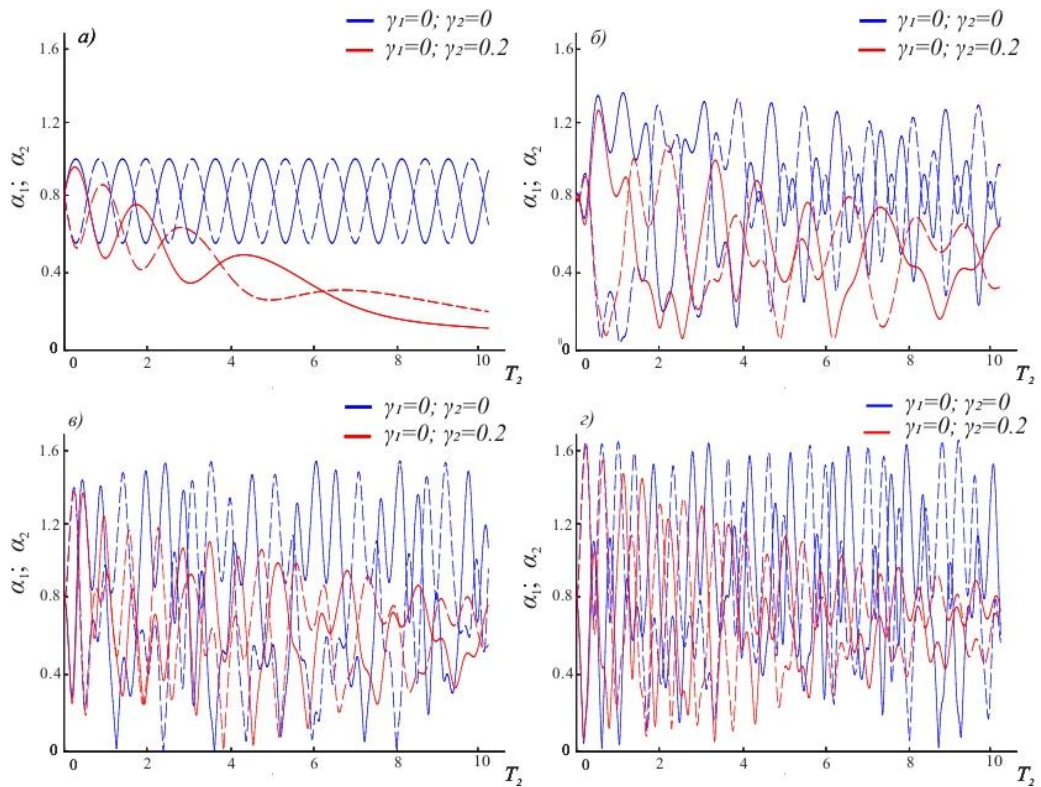


Рисунок 3.2 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от времени T_2 пластинки на вязкоупругом основании при воздействии подвижной гармонической силы: а) свободные колебания; вынужденные колебания при б) $p_1 = -3, p_2 = 3$; в) $p_1 = -7, p_2 = 7$; г) $p_1 = -10, p_2 = 10$; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

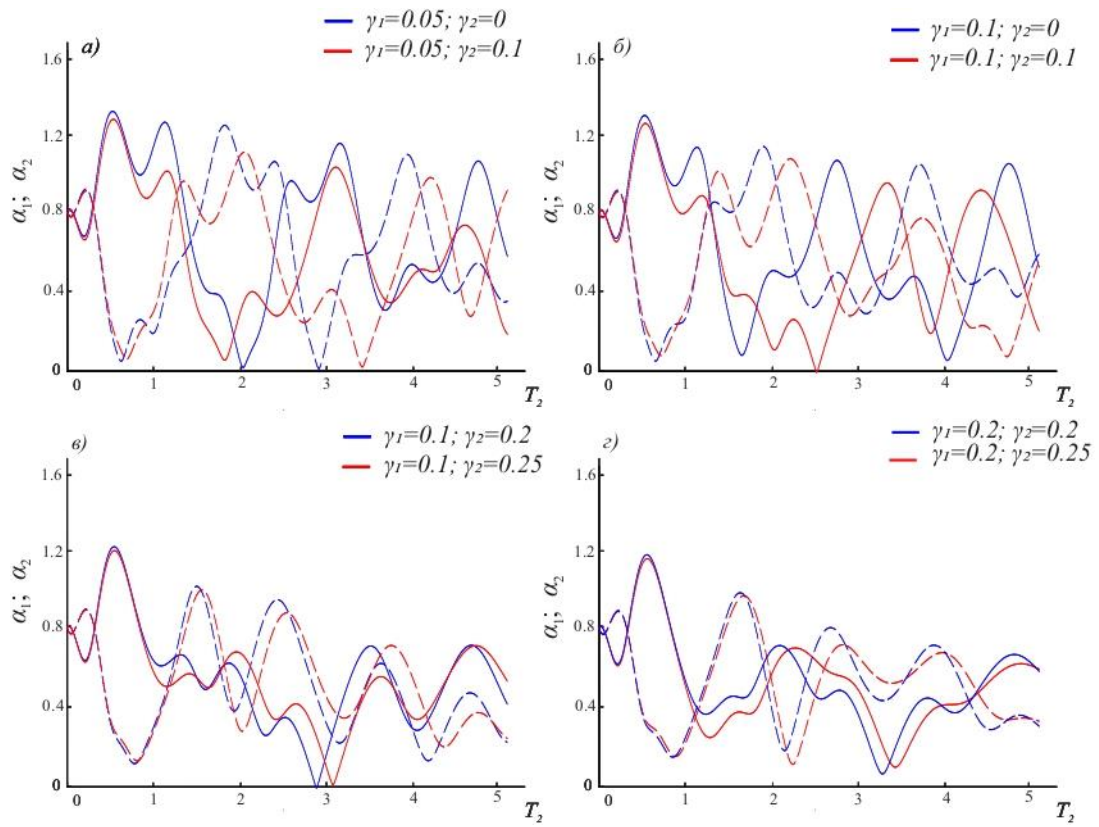


Рисунок 3.3 - Зависимость безразмерных амплитуд вынужденных колебаний от времени T_2 пластинки на вязкоупругом основании при $p_1 = -3, p_2 = 3$ для различных значений параметров дробности; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

Следует отметить, что в случае мягкого воздействия подвижной силы амплитуды и фазы нелинейных колебаний пластины не зависят от скорости движения нагрузки в условиях сочетания внутреннего и внешнего резонансов. Задавая параметр скорости можно лишь регулировать условие наложения внешнего резонанса на внутренний, меняя значение резонансной частоты колебаний системы и номера мод собственных колебаний, соответствующих данной частоте.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ ПОДРЕССОРЕННОЙ НАГРУЗКИ

Подвижные нагрузки оказывают большое влияние на напряженно-деформированное состояние различных твердых тел и конструкций, вызывая их интенсивные колебания даже при небольших скоростях. Особый практический интерес представляют задачи взаимодействия автомобиля с дорожным полотном или самолета с покрытием взлетно-посадочной полосы. Для моделирования такой системы необходимо учитывать инерционные свойства и жесткостные характеристики движущегося объекта, т.е. представить транспортное средство в виде движущегося осциллятора.

Обширные исследования в области колебаний балок и пластин при воздействии подвижных нагрузок также обобщены в работах [10, 15, 16, 36, 37, 61, 62, 109, 283]. Так, динамическое поведение балок, в том числе опирающихся на вязкоупругое основание, подверженных воздействию подвижной подрессоренной нагрузки, изучалось в [67, 96, 198, 208, 232, 275].

Начиная с 1971 года, когда вышла в свет теперь уже классическая работа [182], в которой впервые было предложено представить свойства одномассовой механической системы в виде модели линейного стандартного тела с дробными производными, для описания свойств вязкоупругих осцилляторов широко используются различные модели с дробными производными и другими операторами дробного порядка [38, 41, 42, 214, 219, 220].

Задачи, посвященные анализу колебаний пластин на вязкоупругом основании, подверженных воздействию подвижной подрессоренной нагрузки, рассмотрены в работах [162, 252, 277, 285]. Так, Taheri и Ting использовали функцию Грина для анализа поведения упругих пластин на линейном вязкоупругом основании по модели Кельвина-Фойгта целого порядка с произвольными граничными условиями, под действием подвижных масс, опирающихся на пластину через систему пружины и амортизатора, соединенных

параллельно [252]. Zaman и др. моделировали бетонные покрытия, которые подвержены воздействию движущихся авиационных нагрузок, с помощью ряда толстых пластинчатых элементов, поддерживаемых дискретными пружинами и амортизаторами в узловых точках, представляющих вязкоупругое основание по модели Кельвина-Фойгта [285]. Динамическое взаимодействие между самолетом и покрытием учитывалось путем идеализации нагрузки от самолета массами, поддерживаемыми системой линейной рессорно-поршневой подвески и имеющими заданную начальную горизонтальную скорость и ускорение. Yang и др. изучали влияние действия сцепления на взаимодействие автомобиля с дорогой [276]. Автомобиль моделировался как масса, опирающаяся на систему подвески из четырех осцилляторов, соединенных с колесами, а дорожное покрытие моделировалось как двухслойная прямоугольная тонкая пластина на линейном вязкоупругом основании, описываемом моделью Кельвина-Фойгта. Этот подход был расширен в [162] для случая нелинейных жесткости подвески, демпфирования подвески и жесткости шин, а также нелинейной модели основания.

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим теперь случай воздействия подвижной осциллирующей нагрузки на пластину на вязкоупругом основании (Рис. 4.1). Уравнения движения системы «пластина + вязкоупругое основание» можно получить путем обобщения уравнений фон Кармана [142] за счет включения слагаемых, описывающих реакцию основания и силу сопротивления окружающей среды, а также воздействие внешней осциллирующей нагрузки [26, 27]:

$$\begin{aligned}
 D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \\
 = -m \left(g + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) \delta(x - s(t)) \delta(y - 0.5b) - F_1 - F_2,
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

где m – масса осциллятора, $q = q(t)$ – перемещение осциллятора, g – ускорение свободного падения, $s(t)$ – функция, определяющая положение осциллирующей

нагрузки. Значения функции $s(t)$ удовлетворяют условию $0 \leq s(t) \leq a$, и в случае движения с постоянной скоростью $s(t) = Vt$.

Уравнение движения осциллятора получено на основе выражения, представленного в [252], при помощи замены производной целого порядка на производную дробного порядка:

$$m \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + c \left(\frac{d}{dt} \right)^\beta q + kq = c \left(\frac{d}{dt} \right)^\beta w(Vt, t) + kw(Vt, t) - mg, \quad (4.2)$$

где k – жесткость пружины, $c = k\tau_\sigma^\beta$ – коэффициент демпфирования амортизатора, τ_σ – время ретардации, $0 \leq \beta \leq 1$ – порядок дробной производной осциллятора, $w(Vt, t)$ – прогиб пластины в точке приложения подрессоренной нагрузки.

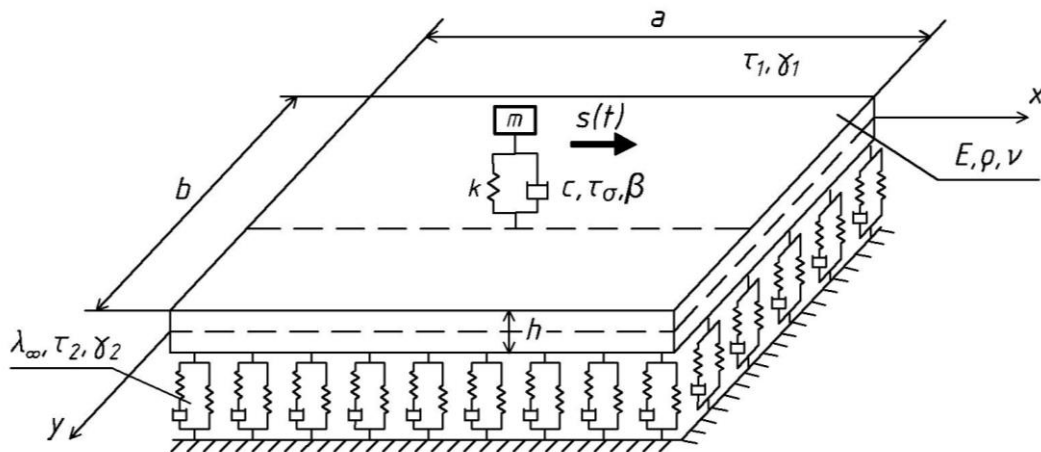


Рисунок 4.1 – Схема пластинки на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки.

К системе уравнений (4.1)-(4.2) необходимо добавить выражения для функции Эйри (2.2), граничные условия для шарнирно опертой пластинки (2.6) и начальные условия для осциллятора

$$q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = 0. \quad (4.3)$$

После представления функции прогиба пластинки в виде двучленного разложения (2.7) разрешающая система уравнений движения относительно обобщенных перемещений с учетом фильтрующего свойства дельта-функции (2.10) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1^* + (\Omega_1^{*2} + \lambda_\infty^*)x_1^* + \alpha_1 x_1^{*3} + \alpha_2 x_1^* x_2^{*2} + E_0^* \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_1^* - \lambda_\infty^* \nu_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1^* - \\ + 4m^* (g^* + \ddot{q}^*) \sin\left(\frac{\pi n_1}{2}\right) \sin \omega_{f_1}^* t^* = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2^* + (\Omega_2^{*2} + \lambda_\infty^*)x_2^* + \alpha_3 x_2^{*3} + \alpha_4 x_2^* x_1^{*2} + E_0^* \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_1^* - \lambda_\infty^* \nu_\varepsilon \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2^* - \\ + 4m^* (g^* + \ddot{q}^*) \sin\left(\frac{\pi n_2}{2}\right) \sin \omega_{f_2}^* t^* = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}^* + \omega_0^{*2} (1 + \tau_\sigma^{*\beta} D_{0+}^\beta) q^* = \omega_0^{*2} (1 + \tau_\sigma^{*\beta} D_{0+}^\beta) x_1^* \sin\left(\frac{\pi n_1}{2}\right) \sin \omega_{f_1}^* t^* + \\ + \omega_0^{*2} (1 + \tau_\sigma^{*\beta} D_{0+}^\beta) x_2^* \sin\left(\frac{\pi n_2}{2}\right) \sin \omega_{f_2}^* t^* - g^*, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $q^* = \frac{(ab)^{1/2}}{h^2} q$, $m^* = \frac{m}{ab\rho h}$, $g^* = \frac{12\rho(ab)^{5/2}(1-\nu^2)}{\pi^4 E h^4} g$, $\omega_0^* = \frac{ab}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}} \omega_0$,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота упругого осциллятора.

Следует заметить, что уравнения для свободных колебаний могут быть получены из (4.4)-(4.5) при $m = 0$. Уравнения (4.4)-(4.6) можно решать различными численными методами, однако ни один из них не позволяет качественно исследовать такие нелинейные явления, как сильная взаимосвязь мод колебаний с близкими значениями собственных частот, приводящая к различным типам внутреннего резонанса и перекачке энергии. В связи с этим решение системы уравнений (4.4)-(4.6) будем искать с помощью обобщенного метода многих временных масштабов.

4.2 Малая вязкость осциллятора

Рассмотрим решение задачи для случая, когда нелинейность пластинки и вязкость амортизатора осциллирующей нагрузки задаются величинами порядка ε .

Также будем считать, что ускорение $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$ является малой величиной в сравнении с ускорением свободного падения g . Коэффициенты при силах демпфирования среды и основания представим в виде

$$\varepsilon \mu_1 = E_0^* \tau_1^{\gamma_1}, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon\mu_2 = \lambda_\infty^* \nu_\varepsilon. \quad (4.8)$$

Подставляя соотношения (4.7)-(4.8) в уравнения (4.4)-(4.6) и опуская звездочки у безразмерных величин, предполагая также, что вес осциллятора оказывает наибольшее влияние на динамический отклик пластины [67], получим разрешающие уравнения для механической системы "пластина на вязкоупругом основании+подвижная осциллирующая нагрузка":

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon\alpha_1 x_1^3 + \varepsilon\alpha_2 x_1 x_2^2 + \varepsilon\mu_1 D_{0+}^{\gamma_1} x_1 - \varepsilon\mu_2 \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1 + \\ + 4h_1 g \sin \omega_{f_1} t + 4\varepsilon h_1 \ddot{q} \sin \omega_{f_1} t = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \varepsilon\alpha_3 x_2^3 + \varepsilon\alpha_4 x_2 x_1^2 + \varepsilon\mu_1 D_{0+}^{\gamma_1} x_2 - \varepsilon\mu_2 \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 + \\ + 4h_2 g \sin \omega_{f_2} t + 4\varepsilon h_2 \ddot{q} \sin \omega_{f_2} t = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon\tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta) q = \varepsilon\eta_1 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta) x_1 \sin \omega_{f_1} t + \\ + \varepsilon\eta_2 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta) x_2 \sin \omega_{f_2} t - g, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\eta_i = \sin\left(\frac{\pi n_i}{2}\right)$, $h_i = m\eta_i$.

Обобщенные перемещения $x_i(t)$ ($i=1,2$) и $q(t)$ можно представить в виде разложения по двум временным масштабам T_0 и T_1 :

$$x_i(t) = X_{i0}(T_0, T_1) + \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1) + \dots, \quad (4.12)$$

$$q(t) = Q_0(T_0, T_1) + \varepsilon Q_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (4.13)$$

где $T_1 = \varepsilon t$ - медленное время, характеризующее модуляцию амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

В данном случае производные по времени первого, второго и дробного порядков будут раскладываться в ряд по малому параметру [35, 237] в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 + \dots, \quad (4.14)$$

$$D_+^\gamma = \left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma = (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)^\gamma = D_0^\gamma + \varepsilon\gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \dots, \quad (4.15)$$

где $D_n = \partial / \partial T_n$ ($n=0,1,\dots$).

Безразмерный дробный оператор Ю.Н. Работнова также можно разложить в ряд по малому параметру в виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\gamma^* (\tau^\gamma) &= \frac{1}{1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma} = (1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma)^{-1} = \left[1 + \tau^\gamma (D_0^\gamma + \varepsilon \gamma D_0^{\gamma-1} D_1) \right]^{-1} = \\ &= (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-1} - \varepsilon (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-2} \tau^\gamma \gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

После подстановки (4.12) и (4.13) с учетом соотношений (4.14)-(4.16) в уравнения (4.9)-(4.11) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε к нулю, получим следующие системы уравнений:

порядка ε^0

$$D_0^2 X_{10} + \omega_1^2 X_{10} = -4h_1 g \sin(\omega_{f_1} T_0), \quad (4.17)$$

$$D_0^2 X_{20} + \omega_2^2 X_{20} = -4h_2 g \sin(\omega_{f_2} T_0), \quad (4.18)$$

$$D_0^2 Q_0 + \omega_0^2 Q_0 = -g, \quad (4.19)$$

порядка ε

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} &= -2D_0 D_1 X_{10} - \left(\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1} \right) X_{10} - \\ &- \alpha_1 X_{10}^3 - \alpha_2 X_{10} X_{20}^2 + 4D_0^2 Q_0 h_1 \sin(\omega_{f_1} T_0), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} &= -2D_0 D_1 X_{20} - \left(\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1} \right) X_{20} - \\ &- \alpha_3 X_{20}^3 - \alpha_4 X_{20} X_{10}^2 + 4D_0^2 Q_0 h_2 \sin(\omega_{f_2} T_0), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 Q_1 + \omega_0^2 Q_1 &= -2D_0 D_1 Q_0 - \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta D_0^\beta Q_0 + \eta_1 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) X_{10} \sin \omega_{f_1} t + \\ &+ \eta_2 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) X_{20} \sin \omega_{f_2} t. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Решение неоднородных дифференциальных уравнений (4.17)-(4.19) имеет вид:

$$\begin{aligned} X_{j0} &= A_j(T_1) \exp(i\omega_j T_0) + \Psi_j \exp(i\omega_{f_j} T_0) + \\ &+ \bar{A}_j(T_1) \exp(-i\omega_j T_0) + \bar{\Psi}_j \exp(-i\omega_{f_j} T_0), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$Q_0 = A_3(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_3(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0) + C, \quad (4.24)$$

где $A_j(T_1)$ ($j=1,2,3$) - пока неизвестные функции и $\bar{A}_j(T_1)$ - комплексно-сопряжённые функции с $A_j(T_1)$, $\Psi_j = -\frac{2ih_j g}{\omega_{f_j}^2 - \omega_j^2}$ ($j=1,2$), $\bar{\Psi}_j$ - константа, сопряженная с Ψ_j , и $C = -\frac{g}{\omega_0^2}$.

Подставляя выражения (4.23)-(4.24) в уравнения (4.20)-(4.22), получим:

$$\begin{aligned}
& D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = -2i\omega_1 D_1 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_{f_1})^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_{f_1})^{\gamma_2})^{-1} \right] \Psi_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) - \\
& - \alpha_1 \left[\Psi_1 \exp(3i\omega_{f_1} T_0) + 3\bar{\Psi}_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) \right] \Psi_1^2 - \\
& - 6\alpha_1 A_1 \Psi_1^2 \exp(i\omega_1 T_0) - 6\alpha_1 A_1 \bar{A}_1 \Psi_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) - \\
& - \alpha_1 \left\{ 3A_1^2 \Psi_1 \exp[(2\omega_1 + \omega_{f_1})T_0] + 3\bar{A}_1^2 \Psi_1 \exp[(\omega_{f_1} - 2\omega_1)T_0] + \right. \\
& + 3A_1 \Psi_1^2 \exp[(\omega_1 + 2\omega_{f_1})T_0] + 3A_1 \bar{\Psi}_1^2 \exp[(\omega_1 - 2\omega_{f_1})T_0] \left. \right\} - \\
& - \alpha_1 \left[A_1 \exp(3i\omega_1 T_0) + 3\bar{A}_1 \exp(i\omega_1 T_0) \right] A_1^2 - \alpha_2 \left\{ A_2^2 A_1 \exp[(\omega_1 + 2\omega_2)T_0] + \right. \\
& + 2A_2 \bar{A}_2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) + \bar{A}_2^2 A_1 \exp[i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0] + 2\Psi_2 \bar{\Psi}_2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) + \\
& + 2A_2 \bar{\Psi}_2 A_1 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{f_2})T_0] + 2A_2 \bar{\Psi}_2 \Psi_1 \exp[i(\omega_{f_1} + \omega_2 - \omega_{f_2})T_0] + \\
& + 2A_2 \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_1} - \omega_{f_2})T_0] + 2\bar{A}_2 \Psi_2 A_1 \exp[i(\omega_{f_2} + \omega_1 - \omega_2)T_0] + \\
& + 2A_2 \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_1} - \omega_{f_2})T_0] + 2A_2 \Psi_2 A_1 \exp[i(\omega_2 + \omega_1 + \omega_{f_2})T_0] + \\
& + 2A_2 \Psi_2 \Psi_1 \exp[i(\omega_2 + \omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + 2A_2 \Psi_2 \bar{A}_1 \exp[i(\omega_2 - \omega_1 + \omega_{f_2})T_0] + \\
& + 2A_2 \Psi_2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + A_2^2 \Psi_1 \exp[i(2\omega_2 + \omega_{f_1})T_0] + \\
& + A_2^2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(2\omega_2 - \omega_{f_1})T_0] + 2A_2 \bar{A}_2 \Psi_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) + \Psi_2^2 A_1 \exp[i(2\omega_{f_2} + \omega_1)T_0] + \\
& + \Psi_2^2 \Psi_1 \exp[i(2\omega_{f_2} + \omega_{f_1})T_0] + \Psi_2^2 \Psi_1 \exp[i(2\omega_{f_2} + \omega_{f_1})T_0] + \\
& + \Psi_2^2 \bar{A}_1 \exp[i(2\omega_{f_2} - \omega_1)T_0] + \Psi_2^2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(2\omega_{f_2} - \omega_{f_1})T_0] + \\
& \left. + 2\bar{\Psi}_2 \Psi_2 \Psi_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) \right\} + 2ih_1 \omega_0^2 \exp[i(\omega_{f_1} + \omega_0)T_0] A_3 + cc, \tag{4.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = & -2i\omega_2 D_1 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_{f_2})^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_{f_2})^{\gamma_2})^{-1} \right] \Psi_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) - \\
& - \alpha_3 \left[\Psi_2 \exp(3i\omega_{f_2} T_0) + 3\bar{\Psi}_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) \right] \Psi_2^2 - \\
& - 6\alpha_3 A_2 \Psi_2^2 \exp(i\omega_2 T_0) - 6\alpha_3 A_2 \bar{A}_2 \Psi_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) - \\
& - \alpha_3 \left\{ 3A_2^2 \Psi_2 \exp[(2\omega_2 + \omega_{f_2})T_0] + 3\bar{A}_2^2 \Psi_2 \exp[(\omega_{f_2} - 2\omega_2)T_0] \right\} + \\
& + 3A_2 \Psi_2^2 \exp[(\omega_2 + 2\omega_{f_2})T_0] + 3A_2 \bar{\Psi}_2^2 \exp[(\omega_2 - 2\omega_{f_2})T_0] \left\} - \\
& - \alpha_3 \left[A_2 \exp(3i\omega_2 T_0) + 3\bar{A}_2 \exp(i\omega_2 T_0) \right] A_2^2 - \alpha_4 \left\{ A_1^2 A_2 \exp[(\omega_2 + 2\omega_1)T_0] + \right. \\
& + 2A_1 \bar{A}_1 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) + \bar{A}_1^2 A_2 \exp[i(\omega_2 - 2\omega_1)T_0] + 2A_2 \Psi_1 \bar{\Psi}_1 \exp(i\omega_2 T_0) + \\
& + 2A_1 \bar{\Psi}_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{f_1})T_0] + 2A_1 \bar{\Psi}_1 \Psi_2 \exp[i(\omega_{f_2} + \omega_1 - \omega_{f_1})T_0] + \\
& + 2A_1 \bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_2} - \omega_{f_1})T_0] + 2\bar{A}_1 \Psi_1 A_2 \exp[i(\omega_{f_1} + \omega_2 - \omega_1)T_0] + \\
& + 2A_1 \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_2} - \omega_{f_1})T_0] + 2A_1 \Psi_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_{f_1})T_0] + \\
& + 2A_1 \Psi_1 \Psi_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + 2A_1 \Psi_1 \bar{A}_2 \exp[i(\omega_1 - \omega_2 + \omega_{f_1})T_0] + \\
& + 2A_1 \Psi_1 \bar{\Psi}_2 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_2} + \omega_{f_1})T_0] + A_1^2 \Psi_2 \exp[i(2\omega_1 + \omega_{f_2})T_0] + \\
& + A_1^2 \bar{\Psi}_2 \exp[i(2\omega_1 - \omega_{f_2})T_0] + 2A_1 \bar{A}_1 \Psi_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) + \Psi_1^2 A_2 \exp[i(2\omega_{f_1} + \omega_2)T_0] + \\
& + \Psi_1^2 \Psi_2 \exp[i(2\omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + \Psi_1^2 \Psi_2 \exp[i(2\omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + \\
& + \Psi_1^2 \bar{A}_2 \exp[i(2\omega_{f_1} - \omega_2)T_0] + \Psi_1^2 \bar{\Psi}_2 \exp[i(2\omega_{f_1} - \omega_{f_2})T_0] + \\
& \left. + 2\bar{\Psi}_1 \Psi_1 \Psi_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) \right\} + 2ih_2 \omega_0^2 \exp[i(\omega_{f_2} + \omega_0)T_0] A_3 + cc, \tag{4.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 Q_1 + \omega_0^2 Q_1 = & -2i\omega_0 D_1 A_3 \exp(i\omega_0 T_0) - \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta (i\omega_0)^\beta A_3 \exp(i\omega_0 T_0) + \\
& + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) \eta_1 A_1 \exp[i(\omega_1 + \omega_{f_1})T_0] - \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_1})^\beta) \eta_1 \Psi_1 \exp(2i\omega_{f_1} T_0) + \\
& + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) \eta_1 A_1 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_1})T_0] + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_1})^\beta) \eta_1 \Psi_1 - \tag{4.27} \\
& - \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) \eta_2 A_2 \exp[i(\omega_2 + \omega_{f_2})T_0] - \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_2})^\beta) \eta_2 \Psi_2 \exp(2i\omega_{f_2} T_0) + \\
& + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) \eta_2 A_2 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_2})T_0] + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_2})^\beta) \eta_2 \Psi_2 + cc.
\end{aligned}$$

Внешний резонанс в данном случае наложится на внутренний резонанс 1:1 при следующих условиях:

$$\begin{aligned} (1) \quad \omega_i &= \omega_0 + \omega_{fi}, \\ (2) \quad \omega_i &= \omega_0 - \omega_{fi}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

После исключения вековых членов из уравнений (4.25)-(4.27) с учетом уравнений (3.11) и (4.28), получим систему из трех определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A_1 + \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + \\ + 6\alpha_1 A_1 \Psi_1^2 + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + 2\alpha_2 \Psi_2 \bar{\Psi}_2 A_1 + 2i\omega_0^2 h_1 A_3 = 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A_2 + \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + \\ + 6\alpha_3 A_2 \Psi_2^2 + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 + 2\alpha_4 \Psi_1 \bar{\Psi}_1 A_2 + 2i\omega_0^2 h_2 A_3 = 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$2i\omega_0 D_1 A_3 + \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta (i\omega_0)^\beta A_3 - \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) \eta_1 A_1 - \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) \eta_2 A_2 = 0. \quad (4.31)$$

Умножая (4.29) на \bar{A}_1 , (4.30) на \bar{A}_2 и (4.31) на \bar{A}_3 , соответственно, складывая и вычитая сопряженные к ним уравнения, а также представляя функции в полярном виде

$$A_i(T_1) = a_i(T_1) e^{i\varphi_i(T_1)} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.32)$$

где $a_i = a_i(T_1)$ и $\varphi_i = \varphi_i(T_1)$ - функции амплитуд и фаз колебаний, получим:

$$(a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2h_1 \omega_0^2 \omega_1^{-1} a_1 a_3 \cos \beta_7 = 0, \quad (4.33)$$

$$(a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 - \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2h_2 \omega_0^2 \omega_2^{-1} a_2 a_3 \cos \beta_8 = 0, \quad (4.34)$$

$$(a_3^2)^\cdot + s_3 a_3^2 - \frac{1}{2} \eta_1 \omega_0 a_1 a_3 (l_1 + \cos \beta_7) - \frac{1}{2} \eta_2 \omega_0 a_2 a_3 (l_2 + \cos \beta_8) = 0, \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} (a_1^2 + 2K_1) - \alpha_2 \omega_1^{-1} (a_2^2 - K_2) - \\ - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta - h_1 \omega_0^2 (\omega_1 a_1)^{-1} a_3 \sin \beta_7 = 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{3}{2}\alpha_3\omega_2^{-1}(a_2^2 + 2K_2) - \alpha_4\omega_2^{-1}(a_1^2 - K_1) - \\ - \frac{1}{2}\alpha_4\omega_2^{-1}a_1^2 \cos \delta - h_2\omega_0^2(\omega_2 a_2)^{-1} a_3 \sin \beta_8 = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{1}{4}\eta_1\omega_0 a_1 a_3^{-1}(k_1 + \sin \beta_7) - \frac{1}{4}\eta_2\omega_0 a_2 a_3^{-1}(k_2 + \sin \beta_8) = 0, \quad (4.38)$$

где $\beta_7 = \varphi_1 - \varphi_3$, $\beta_8 = \varphi_2 - \varphi_3$ - сдвиги фаз колебаний,

$$\begin{aligned} s_3 = \omega_0^{\beta+1} \tau_\sigma^\beta \sin \theta, \quad \lambda_3 = \omega_0^{\beta+1} \tau_\sigma^\beta \cos \theta, \quad \theta = \frac{1}{2} \pi \beta, \\ l_i = \omega_i^\beta \tau_\sigma^\beta \cos(\theta + \beta_i), \quad k_i = \omega_i^\beta \tau_\sigma^\beta \sin(\theta + \beta_i), \quad K_i = -\frac{4h_i^2 g^2}{(\omega_{f_i}^2 - \omega_i^2)^2} \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Согласно определяющим уравнениям (4.33)-(4.38) нелинейные совместные колебания механической системы «упругая пластинка на вязкоупругом основании + подвижная осциллирующая нагрузка» в вязкоупругой окружающей среде определяются коэффициентами s_i и λ_i ($i=1,2$) (2.64) и s_3 и λ_3 (4.39). Коэффициенты затухания s_i при $0 < \gamma_i \leq 1$ и $0 < \beta \leq 1$ зависят от частот колебаний ω_i и ω_0 , а при $\gamma_i = 0$ и $\beta = 0$ обращаются в ноль ($s_i = 0$).

4.3 Конечная вязкость осциллятора

Рассмотрим теперь решение задачи для случая, когда нелинейность пластинки описывается величинами порядка ε , а вязкость амортизатора осциллирующей нагрузки задается конечной величиной порядка ε^0 . Также будем считать, что ускорение $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$ является малой величиной в сравнении с ускорением свободного падения g .

Тогда уравнение движения осциллятора с учетом (4.7)-(4.8) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \omega_0^2(1 + \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta)q = \varepsilon\eta_1\omega_0^2(1 + \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta)x_1 \sin \omega_{f_1} t + \\ + \varepsilon\eta_2\omega_0^2(1 + \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta)x_2 \sin \omega_{f_2} t - g. \end{aligned} \quad (4.40)$$

В случае конечной вязкости осциллятора уравнения для различных порядков ε примут вид:

порядка ε^0

$$D_0^2 Q_0 + \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) Q_0 = -g, \quad (4.41)$$

порядка ε

$$D_0^2 Q_1 + \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) Q_1 = -2D_0 D_1 Q_0 - \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta \beta D_0^{\beta-1} D_1 Q_0 + \\ + \eta_1 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) X_{10} \sin \omega_{f_1} t + \eta_2 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) X_{20} \sin \omega_{f_2} t. \quad (4.42)$$

Решение линейного уравнения (4.41) для осциллятора имеет вид:

$$Q_0 = B_1 \exp(z_1 T_0) + B_2 \exp(z_2 T_0) + C, \quad (4.43)$$

где B_1, B_2, z_1, z_2 – некоторые константы.

Подставив решение (4.43) в уравнение (4.41), получим характеристическое уравнение

$$z^2 + \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta z^\beta + \omega_0^2 = 0, \quad (4.44)$$

которое имеет два комплексных корня [214, 220]

$$z_{1,2} = -\alpha \pm i\omega, \quad (4.45)$$

где ω - частота затухающих колебаний осциллятора Кельвина-Фойгта с коэффициентом демпфирования α .

Корни характеристического уравнения (4.44) впервые были исследованы Россихиным Ю.А. и Шитиковой М.В. в 1997 году [214], поведение которых при различных величинах параметра дробности γ , значения которых указаны у соответствующих кривых, показано на Рис.4.2.

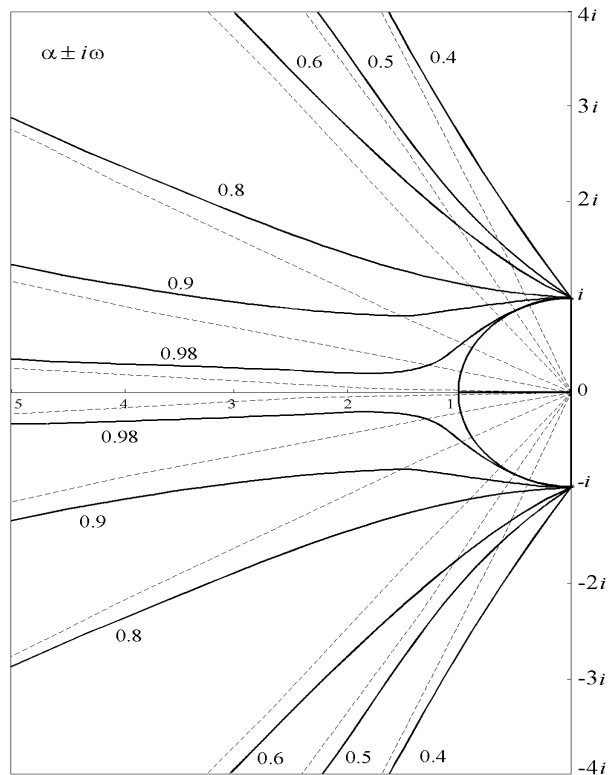


Рисунок 4.2 - Корни характеристического уравнения осциллятора Кельвина-Фойгта на основе модели с дробной производной (4.44) согласно [214].

Подставляя решения (4.23) и (4.43) в уравнения (4.20), (4.21) и (4.42), получим:

$$\begin{aligned}
& D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = -2i\omega_1 D_1 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_{f_1})^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_{f_1})^{\gamma_2})^{-1} \right] \Psi_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) - \\
& - \alpha_1 \left[\Psi_1 \exp(3i\omega_{f_1} T_0) + 3\bar{\Psi}_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) \right] \Psi_1^2 - \\
& - 6\alpha_1 A_1 \Psi_1^2 \exp(i\omega_1 T_0) - 6\alpha_1 A_1 \bar{A}_1 \Psi_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) - \\
& - \alpha_1 \left\{ 3A_1^2 \Psi_1 \exp[(2\omega_1 + \omega_{f_1})T_0] + 3\bar{A}_1^2 \Psi_1 \exp[(\omega_{f_1} - 2\omega_1)T_0] + \right. \\
& + 3A_1 \Psi_1^2 \exp[(\omega_1 + 2\omega_{f_1})T_0] + 3A_1 \bar{\Psi}_1^2 \exp[(\omega_1 - 2\omega_{f_1})T_0] \left. \right\} - \\
& - \alpha_1 \left[A_1 \exp(3i\omega_1 T_0) + 3\bar{A}_1 \exp(i\omega_1 T_0) \right] A_1^2 - \alpha_2 \left\{ A_2^2 A_1 \exp[(\omega_1 + 2\omega_2)T_0] + \right. \\
& + 2A_2 \bar{A}_2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) + \bar{A}_2^2 A_1 \exp[i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0] + 2\Psi_2 \bar{\Psi}_2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) + \\
& + 2A_2 \bar{\Psi}_2 A_1 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{f_2})T_0] + 2A_2 \bar{\Psi}_2 \Psi_1 \exp[i(\omega_{f_1} + \omega_2 - \omega_{f_2})T_0] + \\
& + 2A_2 \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_1} - \omega_{f_2})T_0] + 2\bar{A}_2 \Psi_2 A_1 \exp[i(\omega_{f_2} + \omega_1 - \omega_2)T_0] + \\
& + 2A_2 \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_1} - \omega_{f_2})T_0] + 2A_2 \Psi_2 A_1 \exp[i(\omega_2 + \omega_1 + \omega_{f_2})T_0] + \\
& + 2A_2 \Psi_2 \Psi_1 \exp[i(\omega_2 + \omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + 2A_2 \Psi_2 \bar{A}_1 \exp[i(\omega_2 - \omega_1 + \omega_{f_2})T_0] + \\
& + 2A_2 \Psi_2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + A_2^2 \Psi_1 \exp[i(2\omega_2 + \omega_{f_1})T_0] + \\
& + A_2^2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(2\omega_2 - \omega_{f_1})T_0] + 2A_2 \bar{A}_2 \Psi_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) + \Psi_2^2 A_1 \exp[i(2\omega_{f_2} + \omega_1)T_0] + \\
& + \Psi_2^2 \Psi_1 \exp[i(2\omega_{f_2} + \omega_{f_1})T_0] + \Psi_2^2 \Psi_1 \exp[i(2\omega_{f_2} + \omega_{f_1})T_0] + \\
& + \Psi_2^2 \bar{A}_1 \exp[i(2\omega_{f_2} - \omega_1)T_0] + \Psi_2^2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(2\omega_{f_2} - \omega_{f_1})T_0] + \\
& \left. + 2\bar{\Psi}_2 \Psi_2 \Psi_1 \exp(i\omega_{f_1} T_0) \right\} - 2h_1 i(-\alpha + i\omega)^2 \exp(-\alpha T_0) \exp[i(\omega_{f_1} + \omega)T_0] B_1 + cc, \quad (4.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = & -2i\omega_2 D_1 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
& - \left[\mu_1 (i\omega_{f_2})^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_{f_2})^{\gamma_2})^{-1} \right] \Psi_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) - \\
& - \alpha_3 \left[\Psi_2 \exp(3i\omega_{f_2} T_0) + 3\bar{\Psi}_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) \right] \Psi_2^2 - \\
& - 6\alpha_3 A_2 \Psi_2^2 \exp(i\omega_2 T_0) - 6\alpha_3 A_2 \bar{A}_2 \Psi_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) - \\
& - \alpha_3 \left\{ 3A_2^2 \Psi_2 \exp[(2\omega_2 + \omega_{f_2})T_0] + 3\bar{A}_2^2 \Psi_2 \exp[(\omega_{f_2} - 2\omega_2)T_0] \right\} + \\
& + 3A_2 \Psi_2^2 \exp[(\omega_2 + 2\omega_{f_2})T_0] + 3A_2 \bar{\Psi}_2^2 \exp[(\omega_2 - 2\omega_{f_2})T_0] \left\} - \\
& - \alpha_3 \left[A_2 \exp(3i\omega_2 T_0) + 3\bar{A}_2 \exp(i\omega_2 T_0) \right] A_2^2 - \alpha_4 \left\{ A_1^2 A_2 \exp[(\omega_2 + 2\omega_1)T_0] \right\} + \\
& + 2A_1 \bar{A}_1 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) + \bar{A}_1^2 A_2 \exp[i(\omega_2 - 2\omega_1)T_0] + 2A_2 \Psi_1 \bar{\Psi}_1 \exp(i\omega_2 T_0) + \\
& + 2A_1 \bar{\Psi}_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_{f_1})T_0] + 2A_1 \bar{\Psi}_1 \Psi_2 \exp[i(\omega_{f_2} + \omega_1 - \omega_{f_1})T_0] + \\
& + 2A_1 \bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_2} - \omega_{f_1})T_0] + 2\bar{A}_1 \Psi_1 A_2 \exp[i(\omega_{f_1} + \omega_2 - \omega_1)T_0] + \\
& + 2A_1 \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_1 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_2} - \omega_{f_1})T_0] + 2A_1 \Psi_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_{f_1})T_0] + \\
& + 2A_1 \Psi_1 \Psi_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + 2A_1 \Psi_1 \bar{A}_2 \exp[i(\omega_1 - \omega_2 + \omega_{f_1})T_0] + \\
& + 2A_1 \Psi_1 \bar{\Psi}_2 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_2} + \omega_{f_1})T_0] + A_1^2 \Psi_2 \exp[i(2\omega_1 + \omega_{f_2})T_0] + \\
& + A_1^2 \bar{\Psi}_2 \exp[i(2\omega_1 - \omega_{f_2})T_0] + 2A_1 \bar{A}_1 \Psi_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) + \Psi_1^2 A_2 \exp[i(2\omega_{f_1} + \omega_2)T_0] + \\
& + \Psi_1^2 \Psi_2 \exp[i(2\omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + \Psi_1^2 \bar{\Psi}_2 \exp[i(2\omega_{f_1} + \omega_{f_2})T_0] + \\
& + \Psi_1^2 \bar{A}_2 \exp[i(2\omega_{f_1} - \omega_2)T_0] + \Psi_1^2 \bar{\Psi}_2 \exp[i(2\omega_{f_1} - \omega_{f_2})T_0] + \\
& + 2\bar{\Psi}_1 \Psi_1 \Psi_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) \left\} - 2h_2 i (-\alpha + i\omega)^2 \exp(-\alpha T_0) \exp[i(\omega_{f_2} + \omega)T_0] B_1 + cc, \quad (4.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 Q_1 + \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) Q_1 = & -2i\omega_0 D_1 A_3 \exp(i\omega_0 T_0) - \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta (i\omega_0)^\beta A_3 \exp(i\omega_0 T_0) + \\
& + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) \eta_1 A_1 \exp[i(\omega_1 + \omega_{f_1})T_0] - \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_1})^\beta) \eta_1 \Psi_1 \exp(2i\omega_{f_1} T_0) + \\
& + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) \eta_1 A_1 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_1})T_0] + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_1})^\beta) \eta_1 \Psi_1 - \quad (4.48) \\
& - \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) \eta_2 A_2 \exp[i(\omega_2 + \omega_{f_2})T_0] - \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_2})^\beta) \eta_2 \Psi_2 \exp(2i\omega_{f_2} T_0) + \\
& + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) \eta_2 A_2 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_2})T_0] + \frac{1}{2} i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_2})^\beta) \eta_2 \Psi_2 + cc.
\end{aligned}$$

Внешний резонанс в данном случае наложится на внутренний резонанс 1:1 при следующих условиях:

$$\begin{aligned} (1) \quad \omega_i &= \omega + \omega_{fi}, \\ (2) \quad \omega_i &= \omega - \omega_{fi}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

После исключения вековых членов из уравнений (4.46)-(4.47) с учетом уравнений (3.11) и (4.49), получим систему из двух определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A_1 + \left[\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + \\ + 6\alpha_1 A_1 \Psi_1^2 + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + 2\alpha_2 \Psi_2 \bar{\Psi}_2 A_1 - 2i(-\alpha + i\omega)^2 h_1 B_1 = 0, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A_2 + \left[\mu_1 (i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1} \right] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + \\ + 6\alpha_3 A_2 \Psi_2^2 + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 + 2\alpha_4 \Psi_1 \bar{\Psi}_1 A_2 - 2i(-\alpha + i\omega)^2 h_2 B_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Умножая (4.50) на \bar{A}_1 и (4.51) на \bar{A}_2 , соответственно, складывая и вычитая сопряженные к ним уравнения, а также представляя функции A_1 и A_2 в полярном виде (4.32), и принимая константу B_1

$$B_1 = a_{30} e^{i\varphi_{30}}, \quad (4.52)$$

где a_{30} и φ_{30} - амплитуда и фаза колебаний осциллятора, определяемые из начальных условий (4.3), приходим к следующей системе уравнений:

$$(a_1^2) + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2h_1 \omega_1^{-1} a_1 a_{30} \left[2\alpha\omega \sin \chi_1 - (\alpha^2 - \omega^2) \cos \chi_1 \right] = 0, \quad (4.53)$$

$$(a_2^2) + s_2 a_2^2 - \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2h_2 \omega_2^{-1} a_2 a_{30} \left[2\alpha\omega \sin \chi_2 - (\alpha^2 - \omega^2) \cos \chi_2 \right] = 0, \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} (a_1^2 + 2K_1) - \alpha_2 \omega_1^{-1} (a_2^2 - K_2) - \\ - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta + h_1 (\omega_1 a_1)^{-1} a_{30} \left[2\alpha\omega \cos \chi_1 + (\alpha^2 - \omega^2) \sin \chi_1 \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \lambda_2 - \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} (a_2^2 + 2K_2) - \alpha_4 \omega_2^{-1} (a_1^2 - K_1) - \\ - \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 \cos \delta + h_2 (\omega_2 a_2)^{-1} a_{30} \left[2\alpha\omega \cos \chi_2 + (\alpha^2 - \omega^2) \sin \chi_2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

где $\chi_1 = \varphi_1 - \varphi_{30}$, $\chi_2 = \varphi_2 - \varphi_{30}$ - сдвиги фаз колебаний.

4.4 Численные исследования

В качестве примера рассматривалась квадратная пластина с собственными частотами $\Omega_1 = \Omega_2 = 10$ при $m_1 = n_2 = 1, m_2 = n_1 = 3$.

Подрессоренная нагрузка в виде вязкоупругого осциллятора, свойства которого описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, движется с постоянной скоростью $V = 0.16 \left(V = 60 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$ вдоль оси x .

Вынужденные колебания пластинки изучались для различных случаев величины массы осциллятора, при этом принималось, что $\beta = 0.5, q_0 = 0.5$.

Пластинка находится в условиях внутреннего резонанса 1:1 при $\omega_1 = \omega_2 = 10,13$, в сочетании с внешним резонансом:

(1) для случая малой вязкости

$$\omega_2 = \omega_{f_2} + \omega_0 = 3.14 \cdot 3 \cdot 0.16 + 8.63 = 10.13, \quad (4.57)$$

(2) для случая конечной вязкости

$$\omega_2 = \omega_{f_2} + \omega = 3,14 \cdot 3 \cdot 0,16 + 8,63 = 10,13. \quad (4.58)$$

В уравнении (4.58) частота колебаний ω для вязкоупругого осциллятора по модели Кельвина-Фойгта с дробной производной определяется совместно с коэффициентом демпфирования α по диаграмме для корней характеристического уравнения данной модели в зависимости от параметра дробности осциллятора, частоты упругих колебаний системы и времени ретардации [214, 220]. Следует отметить, что характерной особенностью модели с дробной производной в отличие от классической модели Кельвина-Фойгта является то, что для некоторых диапазонов значений времени ретардации, собственная частота колебаний осциллятора ω возрастает с увеличением коэффициента демпфирования α и может в несколько раз превышать частоту упругих колебаний системы ω_0 .

На Рис. 4.3 и 4.4 наглядно показан энергообмен между взаимодействующими модами нелинейных свободных ($m = 0$) и вынужденных ($m \neq 0$) колебаний шарнирно опертой пластины на упругом и вязкоупругом ($\gamma_2 \neq 0$) основании от нагрузки в виде осциллятора с малой вязкостью и с

конечной вязкостью, соответственно. На Рис. 4.3-4.4 синим цветом показаны вынужденные колебания при отсутствии сил сопротивления среды и основания ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$), красным цветом изображены вынужденные колебания, огибающие амплитуд которых затухают по экспоненциальному закону при $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$. Увеличение величины нагрузки приводит к увеличению безразмерных амплитуд колебаний пластины и значительному уменьшению периода колебаний.

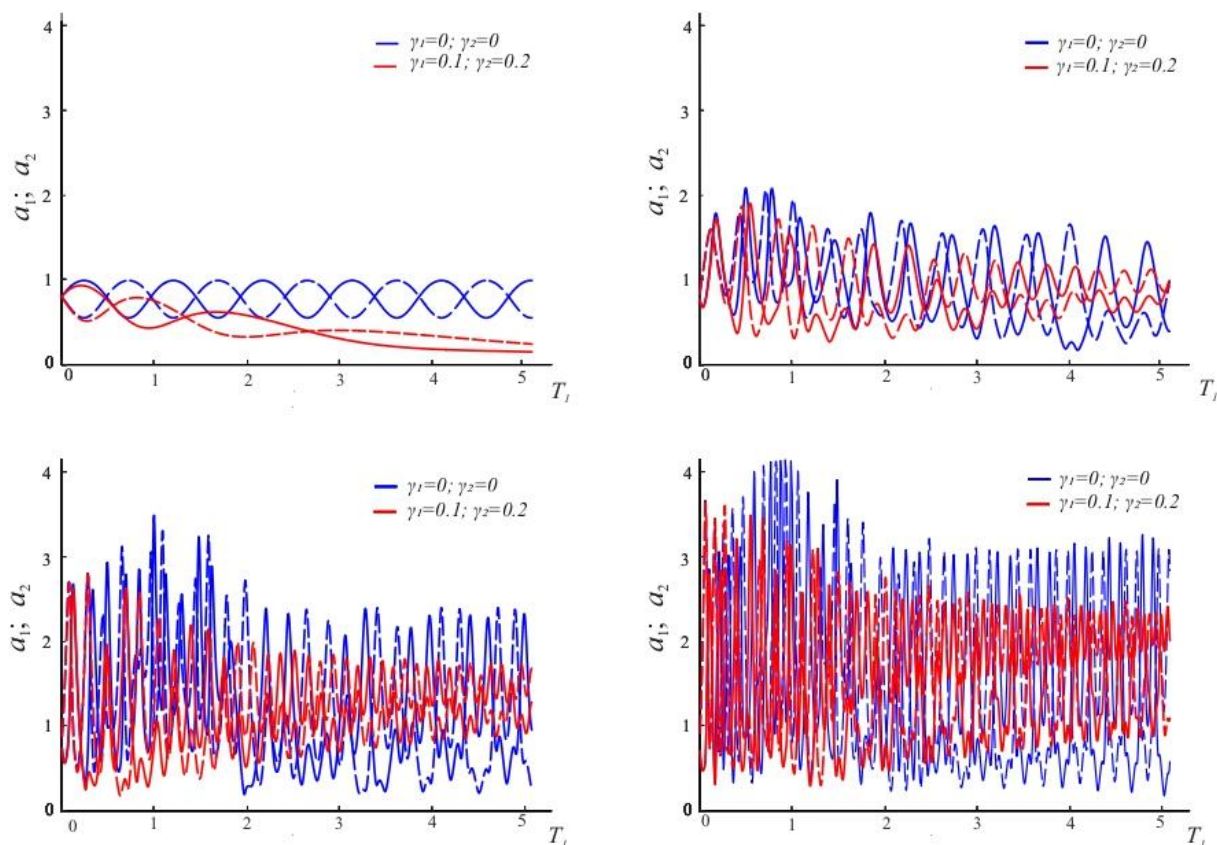


Рисунок 4.3 - Зависимость безразмерных амплитуд нелинейных свободных (а) и вынужденных колебаний от безразмерного времени T_1 для шарнирно опертой пластинки при воздействии подвижной нагрузки в виде осциллятора с малой вязкостью: б) $f_1 = -25, f_2 = 25$; в) $f_1 = -50, f_2 = 50$; г) $f_1 = -75, f_2 = 75$; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

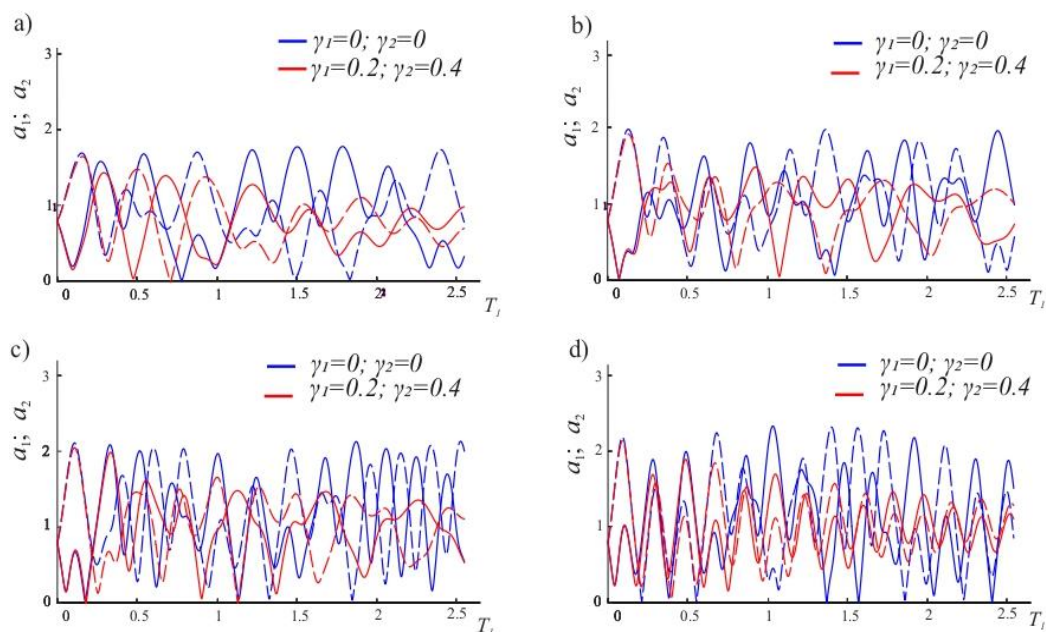


Рисунок 4.4 - Зависимость безразмерных амплитуд нелинейных вынужденных колебаний от безразмерного времени T_1 для шарнирно опертой пластинки при воздействии подвижной нагрузки в виде осциллятора с конечной вязкостью:

а) $f_1 = -10, f_2 = 10$; б) $f_1 = -15, f_2 = 15$; в) $f_1 = -20, f_2 = 20$; г) $f_1 = -25, f_2 = 25$;

a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

Зависимость амплитуд нелинейных колебаний от значений дробных параметров окружающей среды γ_1 и вязкоупругого основания γ_2 представлена на Рис. 4.5 для случая воздействия осциллятора с малой вязкостью. С увеличением параметров дробности вязкоупругого основания и окружающей среды демпфирование колебаний усиливается.

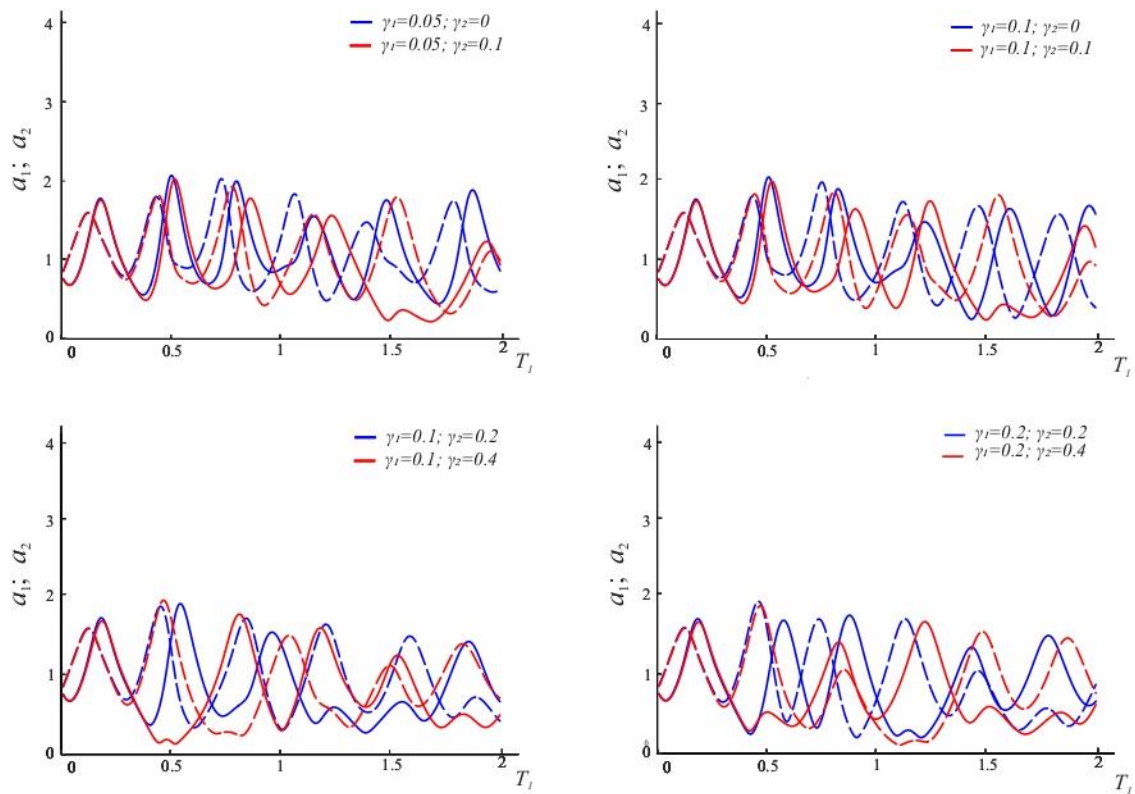


Рисунок 4.5 - Зависимость безразмерных амплитуд нелинейных вынужденных колебаний от времени T_1 для пластинки на вязкоупругом основании при воздействии подвижной подрессоренной нагрузки в виде осциллятора с малой вязкостью ($f_1 = -25, f_2 = 25$) для различных значений параметров дробности; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

Результаты сравнительного численного анализа нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом под действием движущегося осциллятора с конечной вязкостью (FV) и малой вязкостью (SV) представлены на Рис.4.6 для различных значений реологических параметров. Из Рис. 4.6 следует, что затухание колебаний по модели внешней нагрузки с малой вязкостью происходит быстрее, чем по модели с конечной вязкостью, а период колебаний для первой модели больше. Затухание амплитуд колебаний увеличивается с увеличением параметров дробности окружающей среды и основания для обоих случаев вязкости осциллятора.

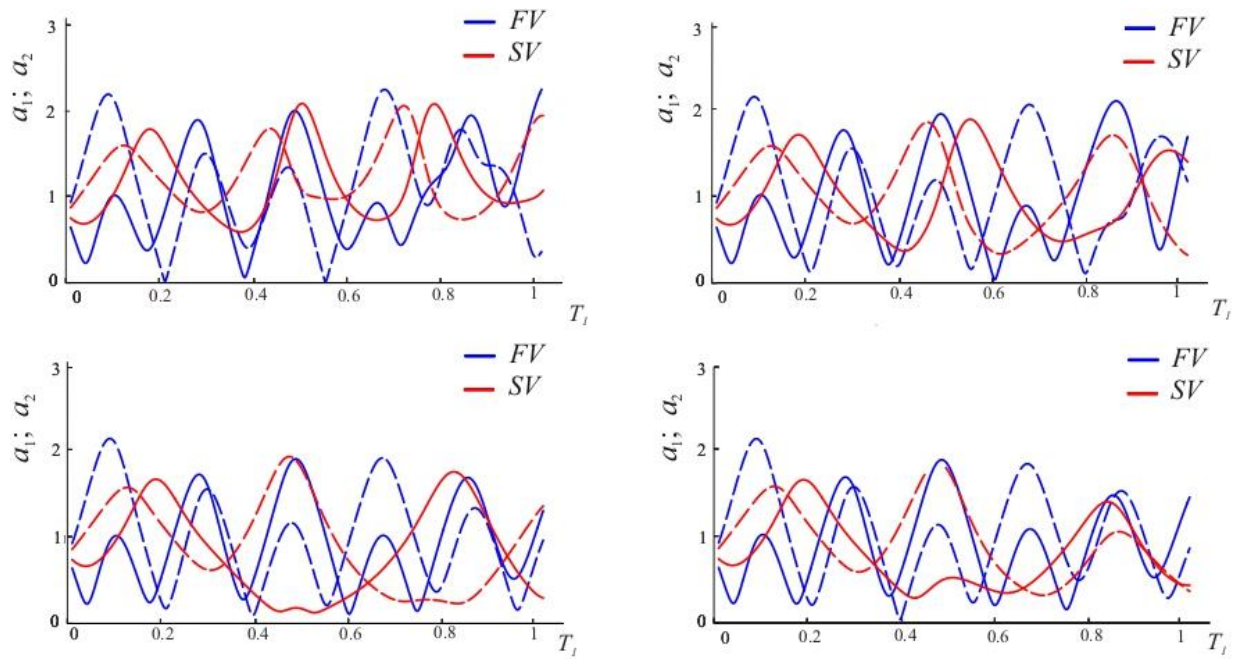


Рисунок 4.6 – Сравнительный анализ безразмерных амплитуд нелинейных вынужденных колебаний для случаев воздействия осциллятора с малой вязкостью и конечной вязкостью при $f_1 = -25, f_2 = 25$ для различных значений параметров

дробности: а) $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$; б) $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$; в) $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.4$;

г) $\gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 0.4$; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты проведенных исследований можно сформулировать следующим образом:

1. При помощи обобщенного метода многих временных масштабов получены разрешающие уравнения для определения нелинейных амплитуд и фаз вынужденных колебаний при воздействии гармонической силы, приложенной в точке или движущейся с постоянной скоростью. Данная система уравнений позволяет изменять характер вязкости окружающей среды и основания при различных параметрах дробности. Приближенные численные решения полученных уравнений найдены с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка, на основе которого для выполнения численных экспериментов был разработан алгоритм, зарегистрированный в государственном реестре программ для ЭВМ. По найденным амплитудам колебаний построены графики зависимости безразмерных перемещений от времени.

2. Проведен сравнительный анализ безразмерных амплитуд колебаний системы «пластина+вязкоупругое основание» для моделей основания Фусса-Винклера и Пастернака, а также для моделей вязкоупругости Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твердого тела с дробной производной. Период колебаний для модели Кельвина-Фойгта больше, чем у модели стандартного линейного твердого тела, но, в свою очередь, диапазон изменения амплитуды у последней модели шире, что также следует учитывать при расчете конструкций.

3. При использовании моделей с дробной производной для описания свойств вязкоупругих сред и материалов коэффициенты демпфирования в определяющих системах уравнений зависят от собственных частот колебаний системы, что находится в хорошем соответствии с гипотезой модального демпфирования и экспериментальными данными. Показано также, что при больших временах релаксации материала основания коэффициенты затухания для модели стандартного линейного твердого тела совпадают с коэффициентами для модели Кельвина-Фойгта.

4. Изучено влияние граничных условий на процесс нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании. Показано, что полученная система разрешающих уравнений для определения амплитуд и фаз нелинейных колебаний пластинки является универсальной для различных типов граничных условий, для каждого из которых вычисляются отдельно лишь коэффициенты и собственные частоты колебаний механической системы. Колебания прямоугольной упругой пластины, заземленной по контуру, происходят с наибольшей собственной частотой по сравнению с остальными типами граничных условий.

5. Рассмотрено влияние порядка малости амплитуды внешней гармонической силы на процесс нелинейных колебаний системы в случаях ее «мягкого» и «жесткого» возмущения. Показано, что в случае «жесткого» воздействия внешней силы при нелинейных колебаниях пластины могут возникнуть дополнительные виды внешних резонансов, а именно супергармонический и субгармонический резонансы, для каждого из которых получены разрешающие системы уравнений для определения амплитуд и фаз колебаний пластины в условиях сочетания с внутренним резонансом один-к-одному.

6. Изучено влияние амплитуды подвижной нагрузки на характер нелинейных вынужденных колебаний. Показано, что с ростом амплитуды внешней силы увеличивается диапазон изменения амплитуд колебаний. Условие наступления внешнего резонанса при действии подвижной нагрузки можно регулировать за счет изменения ее скорости.

7. Решена задача о нелинейных колебаниях упругой пластинки на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки. Получены разрешающие системы уравнений для определения нелинейных амплитуд и фаз колебаний для случаев малой и конечной вязкости осциллятора. Сравнительный анализ двух случаев показал, что затухание колебаний для модели внешней осциллирующей нагрузки с малой вязкостью происходит быстрее, чем для модели с конечной вязкостью, в то время как период колебаний у последней модели меньше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов, В.П. Матвеев, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.
2. Алфрей Т. Механические свойства высокополимеров / Т. Алфрей. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1952. – 720 с.
3. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости / Д. Бленд. – М.: Мир, 1965. – 199 с.
4. Богомолв В. О. Вязкоупругая структурная модель асфальтобетона / В. О. Богомолв, В. К. Жданюк, А. О. Цинка // Автомобильный транспорт. – 2016. – №. 38. – С. 117-125.
5. Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем / В. З. Власов. – М.: Стройиздат, 1949. – 435 с.
6. Власов В.З., Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. – 492 с.
7. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – М.: Наука. 1972. – 432 с.
8. Георгиевский Д. В. Особенности поведения вязкоупругих моделей / Д. В. Георгиевский, Д. М. Климов, Б. Е. Победря // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2004. – № 1. – С. 119-157.
9. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения / А. Н. Герасимов // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12. – № 3. – С. 251-260.
10. Герасимов С. И. Динамика деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки (обзор публикаций и диссертационных исследований) / С. И. Герасимов, В. И. Ерофеев, Д. А. Колесов, Е. Е. Лисенкова // Вестник научно-технического развития. – 2021. – № 160. – С. 25-47.
11. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Стройиздат, 1973. - 628 с.

12. Джеффрис Г. Земля, ее происхождение, история и строение / Г. Джеффрис. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1960. – 486 с.
13. Ерофеев В.И. Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой / В. И. Ерофеев, Е. Е. Лисенкова, И. С. Царев // Прикладная математика и механика. – 2021. –Т. 85. – № 2. – С. 193-209. DOI: 10.31857/S0032823521020041
14. Зинер С. Упругость и неупругость металлов. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. - 394 с.
15. Иванченко И.И. Динамика мостовых и путевых конструкций при действии железнодорожной подвижной нагрузки / И.И. Иванченко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 158–177.
16. Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений / И.И. Иванченко. – М.: Наука, 2011. – 574 с.
17. Ильюишин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термо-вязкоупругости / А.А. Ильюишин, Б.Е. Победря. –М.: Наука, 1970. – 280 с.
18. Ишлинский А. Ю. Линейные законы деформирования не вполне упругих тел / А. Ю. Ишлинский // Доклады Академии Наук СССР. – 1940. – Т. 26. – № 1. – С. 22-26.
19. Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня / А. Ю. Ишлинский // Прикладная математика и механика. – 1940. – Т. 4. – № 1. – С. 79-92.
20. Ишлинский А. Ю. Уравнения деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел / А. Ю. Ишлинский // Известия академии наук СССР. – 1945. – № 1-2. – С. 34-45.
21. Канду В. В. Анализ нелинейных колебаний тонких пластинок, находящихся в условиях внутреннего и внешнего резонансов: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / В. В. Канду. – Воронеж, 2019. – 164 с.
22. Кристенсен Р. Введению в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1974. –338 с.
23. Круссер А.И. Анализ ударного взаимодействия нелинейной вязкоупругой ауксетичной пластинки / А.И. Круссер, Ю.А. Россихин, М.В. Шитикова // Труды

юбилейной XXX международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения. – Москва, 20-23 ноября 2018. – Москва: Изд-во ИМАШ РАН, 2019. – С. 609-612.

24. Круссер А.И. Классификация моделей линейной вязкоупругости / А.И. Круссер, М.В. Шитикова // Труды XXXI международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения. – Москва, 4-6 декабря 2019. – Москва: Изд-во ИМАШ РАН, 2020. – С. 28-31.

25. Круссер А.И. Анализ динамического поведения нелинейных пластинок на вязкоупругом основании при наличии внутреннего резонанса / А.И. Круссер, М.В. Шитикова // Сборник научных трудов РААСН. – М.: Издательство АСВ, 2021. – Т.2. – С. 315-328.

26. Круссер А.И. Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными / А.И. Круссер, М.В. Шитикова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2022. – Т. 26(4). – С.1-21. DOI: 10.14498/vsgtu1957

27. Круссер А.И. Динамический анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной подрессоренной нагрузки / А.И. Круссер // Тезисы XV Международной научно-технической конференции «Актуальные вопросы архитектуры и строительства». – Новосибирск, 19-21 апреля 2022. – С.13. http://www.sibstrin.ru/conference/15_mntk/

28. Круссер А.И. Программный комплекс численных исследований нелинейных колебаний прямоугольных пластин на вязкоупругом основании с использованием операторов дробного порядка: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022668236 Российская Федерация / А.И.Круссер, М. В. Шитикова. – № 2022667282; заявл. 21.09.2022; опубл. 04.10.2022. – 1 с.

29. Кузнецов В. И. Упругое основание : расчеты балок, плит и рам / В. И. Кузнецов. - Москва : Госстройиздат, 1952. - 296 с.

30. Леденев В.В. Механические и реологические модели оснований и фундаментов : учебное пособие / В.В. Леденев, А.В. Худяков. – Тамбов : Изд-во

ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 80 с.

31. Летников А. В. Теория дифференцирования с произвольным указателем / А. В. Летников // Математический сборник. – 1868. – № 3. – С. 1-68.
32. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М.: «Машиностроение», 1975. – 400 с.
33. Малкин А. Я. Реология: Концепции, Методы, Приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев. – Санкт-Петербург : ЦОП Профессия, 2010. - 560 с.
34. Мешков С. И. Описание внутреннего трения в наследственной теории упругости при помощи ядер, имеющих слабую сингулярность / С. И. Мешков // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1967. – Т. 1. – № 4. – С. 147-151.
35. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ; пер. с англ. А. А. Меликяна. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
36. Нгуен В.Х. Совершенствование метода динамического расчета жестких покрытий аэродромов для условий СРВ: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.11 / В. Х. Нгуен. – Москва, 2017. – 166 с.
37. Нгуен Ч.Т. Воздействие высокоскоростных подвижных нагрузок на балки, плиты и полупространство: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Ч. Т. Нгуен. – Москва, 2015. – 122 с.
38. Огородников Е. Н. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов / Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Н. С. Яшагин // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2011. – Т. 15. – №1. – С. 255–268. DOI: 10.14498/vsgtu932
39. Огородников Е. Н. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана— Лиувилля / Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Л.Г. Унгарова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2016. – Т. 20. – № 1. – С. 167–194. DOI: 10.14498/vsgtu1456
40. Огородников Е.Н. Математические модели нелинейной вязкоупругости с операторами дробного интегро-дифференцирования / Е.Н. Огородников, В.П.

Радченко, Л.Г. Унгарова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 147–161. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.13

41. Огородников Е. Н. Вынужденные колебания дробных осцилляторов // Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин // Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. – Самара, СамГТУ, 29–31 мая 2008. – С. 215–221.

42. Паровик Р. И., Зуннунов Р. Т. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора / Р. И. Паровик, Р. Т. Зуннунов // Проблемы прочности. – 2019. – № 4. – С. 20–23.

43. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – Москва : Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 56 с.

44. Попов Г. Я. Пластинки на линейно деформируемом основании: Обзор / Г. Я. Попов // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8. – № 3. – С. 231–242.

45. Пшеничнов С.Г. Нестационарные динамические задачи линейной вязкоупругости / С.Г. Пшеничнов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2013. – № 1. – С. 84-96.

46. Пшеничнов С.Г. Задачи о свободных колебаниях элементов конструкций из линейно-вязкоупругого материала / С.Г. Пшеничнов // Проблемы безопасности на транспорте. – 2021. – Т.2. – 176-177.

47. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием / Ю. Н. Работнов // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12. – № 1. – С. 81-91.

48. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М.: «НАУКА», 1966. – 752 с.

49. Рейнер М. Деформация и течение. Введение в реологию / М. Рейнер; пер. со 2-го англ. изд. и ред. Л. В. Никитина. – Москва : Гостоптехиздат, 1963. – 381 с.

50. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени / А. Р. Ржаницын. – Москва : Гостехиздат, 1949. – 252 с.

51. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их

приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

52. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. / Е.С.Сорокин. – Москва: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. – 130 с.

53. Тяпин А.Г. Расчет сооружений на сейсмические воздействия с учетом взаимодействия с грунтовым основанием / А.Г.Тяпин. – М.: Издательство АСВ, 2016. – 392 с.

54. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров / Д. Ферри. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 535 с.

55. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые приближенные теории упругого основания / М. М. Филоненко-Бородич // Ученые записки Московского Государственного Университета. – 1940. – Т. 46. – С. 3-18.

56. Фусс Н. И. Опыт теории о сопротивлении причиняемом дорогами всякаго рода четырехколесным и двухколесным повозкам, с определением обстоятельств, при которых одне из сих повозок полезнее других / Сочинение г. академика Фуса // Академическая сочинения. – 1801. Ч.1. – С.373-422.

57. Цытович Н.А. Механика грунтов / Н.А. Цытович. – Москва : Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1963. – 637 с.

58. Шермергор Т. Д. Об использовании операторов дробного дифференцирования для описания наследственных свойств материалов / Т. Д. Шермергор // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1966. – Т. 18. – № 1. – С. 118-121.

59. Шитикова М. В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела / М. В. Шитикова // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2022. – № 1. – С. 3-40. DOI: 10.31857/S0572329921060118

60. Шитикова М. В. Анализ нелинейных колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании при наличии внутреннего резонанса один-к-одному / М.

В. Шитикова, В. В. Канду // Известия вузов. Строительство. – 2020. – № 3. – С. 5-22.

61. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок / Н.З. Якушев // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: изд-во Казанского университета. – 1972. – № 8. – С. 3–42.

62. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок. Часть II. Полупространства, пластинки и оболочки под действием подвижных нагрузок / Н.З. Якушев // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: изд-во Казанского университета. – 1972. – № 9. – С. 118–156.

63. Adolfsson K. Nonlinear fractional order viscoelasticity at large strains / K. Adolfsson // Nonlinear Dynamics. – 2004. – Vol. 38. – Issue 1-4. – P. 233-246. DOI: 10.1007/s11071-004-3758-4

64. Adolfsson K. Fractional derivative viscoelasticity at large deformations / K. Adolfsson, M. Enelund // Nonlinear Dynamics. – 2003. – Vol. 33. – Issue 3. – P. 301-321. DOI: 10.1023/A:1026003130033

65. Adolfsson K. On the fractional order model of viscoelasticity / K. Adolfsson, M. Enelund, P. Olsson // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 2005. – Vol. 9. – Issue 1. – P. 15-34. DOI: 10.1007/s11043-005-3442-1

66. Ai Z. Y. 3-D time-dependent analysis of multilayered cross-anisotropic saturated soils based on the fractional viscoelastic model / Z. Y. Ai, J. C. Gui, J. J. Mu // Applied Mathematical Modelling. – 2019. – Vol. 76. – P. 172-192. DOI: 10.1016/j.apm.2019.06.018

67. Almbaidin A. Vibration of functionally graded beam subjected to moving oscillator using Caputo-Fabrizio fractional derivative model / A. Almbaidin, I. Abu-Alshaikh // Romanian Journal of Acoustics and Vibration. – 2019. – Vol. 16. – Issue 2. – P. 137-146.

68. Amabili M. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: Theory and experiments / M. Amabili // Computers and Structures. – 2004. – Vol. 82. – Issue 31-32. – P. 257-267. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.077

69. Amabili M. Nonlinear damping in large-amplitude vibrations: modelling and experiments / M. Amabili // *Nonlinear Dynamics*. – 2018. – Vol. 93. – Issue 1. – P. 5-18. DOI: 10.1007/s11071-017-3889-z
70. Amabili M. Derivation of nonlinear damping from viscoelasticity in case of nonlinear vibrations / M. Amabili // *Nonlinear Dynamics*. – 2019. – Vol. 97. – Issue 3. – P. 1785-1797. DOI: 10.1007/s11071-018-4312-0
71. Anague Tabejieu L. M. On the dynamics of Rayleigh beams resting on fractional-order viscoelastic Pasternak foundations subjected to moving loads / L. M. Anague Tabejieu, B. R. Nana Nbandjo, P. Woafu // *Chaos, Solitons and Fractals*. – 2016. – Vol. 93. – P. 39-47. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.10.001
72. Arikoglu A. A new fractional derivative model for linearly viscoelastic materials and parameter identification via genetic algorithms / A. Arikoglu // *Rheologica Acta*. – 2014. – Vol. 53. – Issue 3. – P. 219-233. DOI: 10.1007/s00397-014-0758-2
73. Atanackovic T. M. Stability of an elastic rod on a fractional derivative type of foundation / T. M. Atanackovic, B. Stankovic // *Journal of Sound and Vibration*. – 2004. – Vol. 277. – Issue 1-2. – P. 149-161. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.08.050
74. Bagley R. L. On the equivalence of the Riemann–Liouville and the Caputo fractional order derivatives in modeling of linear viscoelastic materials / R. L. Bagley // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. – 2007. – Vol. 10. – Issue 2. – P. 123-126.
75. Bagley R. L. A generalized derivative model for an elastomer damper / R. L. Bagley, P. J. Torvik // *Shock and Vibration*. – 1979. – Vol. 49. – Issue 2. – P. 135-143.
76. Bagley R. L. A Theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity / R. L. Bagley, P. J. Torvik // *Journal of Rheology*. – 1983. – Vol. 27. – Issue 3. – P. 201-210. DOI: 10.1122/1.549724
77. Bagley R. L. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior / R. L. Bagley, P. J. Torvik // *Journal of Rheology*. – 1986. – Vol. 30. – Issue 1. – P. 133-155. DOI: 10.1122/1.549887
78. Bird R. B. Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1. / R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager. – New-York: Wiley, 1987. – 672 p.

79. Bird R. B. Dynamics of polymeric liquids. Vol.2 / R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, O. Hassager. – New-York: Wiley, 1987. – 464 p.
80. Bonet J. Large strain viscoelastic constitutive models / J. Bonet // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38. – Issue 17. – P. 2953-2968. DOI: 10.1016/S0020-7683(00)00215-8
81. Bonfanti A. Fractional viscoelastic models for power-law materials / A. Bonfanti, J. L. Kaplan, G. Charras, A. Kabla. // Soft Matter. – 2020. – Vol. 16. – Issue 26. – P. 6002–6020. DOI: 10.1039/d0sm00354a
82. Buckingham M. J. Wave propagation, stress relaxation, and grain-to-grain shearing in saturated, unconsolidated marine sediments / M. J. Buckingham // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2000. – Vol. 108. – Issue 6. – P. 2796-2815. DOI: 10.1121/1.1322018
83. Burgers J. M. First Report on Viscosity and Plasticity / J. M. Burgers // Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. – 1935. – Vol. 15. – Issue 1.
84. Burgers J. M. Mechanical considerations—model systems—phenomenological theories of relaxation and viscosity / J. M. Burgers // First Report on Viscosity and Plasticity, 2nd edn. – New-York : Nordemann Publishing Company, Inc., 1939.
85. Cai W. Fractional modeling of Pasternak-type viscoelastic foundation / W. Cai, W. Chen, W. Xu // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 2017. – Vol. 21. – Issue 1. – P. 119-131. DOI: 10.1007/s11043-016-9321-0
86. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II / M. Caputo // Earth. – 1967. – Vol. 13. – P. 529-539. DOI: 10.1111/j.1365-246x.1967.tb02303.x
87. Caputo M. Linear models of dissipation in anelastic solids / M. Caputo, F. Mainardi // La Rivista del Nuovo Cimento. – 1971. – Vol. 1. – Issue 2. – P. 161-198. DOI: 10.1007/BF02820620
88. Caputo M. A new dissipation model based on memory mechanism / M. Caputo, F. Mainardi // Pure and Applied Geophysics PAGEOPH. – 1971. – Vol. 91. – Issue 1. – P. 134-147. DOI: 10.1007/BF00879562

89. Chen H. A nonlinear viscoelastic-plastic rheological model for rocks based on fractional derivative theory / H. Chen, W. Xu, W. Wang, R. Wang, C. Shi // *International Journal of Modern Physics B*. – 2013. – Vol. 27. – Issue 25. DOI: 10.1142/S021797921350149X
90. Chen J. A non-linear creep constitutive model for salt rock based on fractional derivatives / J. Chen, D. Lu, F. Wu, J. Fan, W. Liu// *Thermal Science*. – 2019. – Vol. 23. DOI: 10.2298/TSCI180510092C
91. Chen Y. F. Viscoelastic analysis of transversely isotropic multilayered porous rock foundation by fractional Poyting-Thomson model / Y. F. Chen, Z. Y. Ai // *Engineering Geology*. – 2020. – Vol. 264. DOI: 10.1016/j.enggeo.2019.105327
92. Christie I. F. A re-appraisal of Merchant's contribution to the theory of consolidation / I. F. Christie // *Geotechnique*. – 1964. – Vol. 14. – Issue 4. – P. 309-320. DOI: 10.1680/geot.1964.14.4.309
93. Cosenza P. Secondary consolidation of clay as an anomalous diffusion process / P. Cosenza, D. Korošak // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2014. – Vol. 38. – Issue 12. – P. 1231-1246. DOI: 10.1002/nag.2256
94. Dang-Trung H. Analyses of stiffened plates resting on viscoelastic foundation subjected to a moving load by a cell-based smoothed triangular plate element / H. Dang-Trung, H. Luong-Van, T. Nguyen-Thoi, K. K. Ang // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2017. – Vol. 17. – Issue 1. DOI: 10.1142/S0219455417500110
95. Deng R. A nonlinear fractional derivative model for large uni-axial deformation behavior of polyurethane foam / R. Deng, P. Davies, A. K. Bajaj // *Signal Processing*. – 2006. – Vol. 86. – Issue 10. – P. 2728-2743. DOI: 10.1016/j.sigpro.2006.02.029
96. Ding H. Vibration of vehicle-pavement coupled system based on a Timoshenko beam on a nonlinear foundation / H. Ding, Y. Yang, L.-Q. Chen, S.-P. Yang // *Journal of Sound and Vibration*. – 2014. – Vol. 333. – Issue 24. – P. 6623-6636. DOI: 10.1016/j.jsv.2014.07.016

97. Ding W. Applications of distributed-order fractional operators: A review / W. Ding, S. Patnaik, S. Sidhardh, F. Semperlotti // *Entropy*. – 2021. – Vol. 23. – Issue 1. – P. 1-42. DOI: 10.3390/e23010110
98. Drozdov A. D. Fractional differential models in finite viscoelasticity / A. D. Drozdov // *Acta Mechanica*. – 1997. – Vol. 124. – Issue 1-4. – P. 155-180. DOI: 10.1007/BF01213023
99. Dumir P. Nonlinear dynamic response of isotropic thin rectangular plates on elastic foundations / P. Dumir // *Acta Mechanica*. – 1988. – Vol. 71. – P. 233–244. DOI: 10.1007/BF01173950
100. Eldred L. B. Kelvin-Voigt versus fractional derivative model as constitutive relations for viscoelastic materials / L. B. Eldred, W. P. Baker, A. N. Palazotto // *AIAA Journal*. – 1995. – Vol. 33. – Issue 3. – P. 547-550. DOI: 10.2514/3.12471
101. Emri I. Time-Dependent Behavior of Solid Polymers. Vol. 1 / I. Emri, M. Gergesova. – United Kingdom : Eolss Publishers Co. Ltd., 2010. - 330 p.
102. Eyebe G. J. Nonlinear vibration of a nonlocal nanobeam resting on fractional-order viscoelastic Pasternak foundations / G. J. Eyebe, G. Betchewe, A. Mohamadou, T. C. Kofane // *Fractal and Fractional*. – 2018. – Vol. 2. – Issue 3. – P. 1-17. DOI: 10.3390/fractalfract2030021
103. Fedaa J. Creep of soils and related phenomena / J. Fedaa. – Elsevier, 1992. – 13-46 p.
104. Findley W. N. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials / W. N. Findley. – New York : Dover publications, INC., 1976. – 402 p.
105. Flugge W. Viscoelasticity / W. Flugge. – Blaisdel Publishing Company, 1967. - 203 p.
106. Freed A. D. Fractional calculus in biomechanics: A 3D viscoelastic model using regularized fractional derivative kernels with application to the human calcaneal fat pad / A. D. Freed, K. Diethelm // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. – 2006. – Vol. 5. – Issue 4. – P. 203-215. DOI: 10.1007/s10237-005-0011-0

107. Friedrich C. Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives / C. Friedrich // *Rheologica Acta*. – 1991. – Vol. 30. – P. 151-158. DOI: 10.1007/978-3-030-20524-9_5
108. Friedrich C. Generalized Cole-Cole behavior and its rheological relevance / C. Friedrich, H. Braun // *Rheologica Acta*. – 1992. – Vol. 31. – Issue 4. – P. 309-322. DOI: 10.1007/BF00418328
109. Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads / L. Fryba. – Default Book Series, 1999. – 494 p.
110. Fukunaga M. Analysis of impulse response of a gel by nonlinear fractional derivative models / M. Fukunaga, N. Shimizu // Volume 4: 7th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B and C. – ASME/EDC, 2009. – P. 1113-1118. DOI: 10.1115/DETC2009-86803
111. Fukunaga M. Nonlinear fractional derivative models of viscoelastic impact dynamics based on entropy elasticity and generalized maxwell law / M. Fukunaga, N. Shimizu // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2011. – Vol. 6. – Issue 2. – P. 021005. DOI: 10.1115/1.4002383
112. Fukunaga M. Fractional derivative constitutive models for finite deformation of viscoelastic materials / M. Fukunaga, N. Shimizu // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2015. – Vol. 10. – Issue 6. – P. 061002. DOI: 10.1115/1.4028438
113. Fung Y. C. Foundations of Solid Mechanics / Y. C. Fung. – New Jersey : Prentice-hall, inc, 1965. – 525 p.
114. Fung Y. C. Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues / Y. C. Fung. – New York : Springer Science+Business Media, LLC, 1981. – 568 p.
115. Gemant A. A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies / A. Gemant // *Journal of Applied Physics*. – 1936. – Vol. 7. – Issue 8. – P. 311-317. DOI: 10.1063/1.1745400
116. Gemant A. On fractional differentials / A. Gemant // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1938. – Vol. 25. – Issue 168. – P. 540-549. DOI: 10.1080/14786443808562036

117. Gross B. On creep and relaxation / B. Gross // *Journal of Applied Physics*. – 1947. – Vol. 18. – Issue 2. DOI: 10.1063/1.1697606
118. Gross B. Electrical analogs for viscoelastic systems / B. Gross // *Journal of Polymer Science*. – 1956. – Vol. 20. – Issue 95. – P. 371-380. DOI: 10.1002/pol.1956.120209512
119. Grosso P. A method for the experimental identification of equivalent viscoelastic models from vibration of thin plates / P. Grosso, A. De Felice, S. Sorrentino // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2021. – Vol. 153. – P. 107527. DOI: 10.1016/j.ymsp.2020.107527
120. Grünwald A. K. Über “begrenzte” Derivationen und deren Anwendung / A. K. Grünwald // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. – 1867. – Vol. 12. – P. 441-480.
121. Guido A. Viscoelasticity: An electrical point of view / A. Guido, M. Di Paola, E. Francomano, Y. Li, F. Pinnola // *2014 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications, ICFDA 2014*. – 2014. DOI: 10.1109/ICFDA.2014.6967407
122. Hadamard J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor / J. Hadamard // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. – 1892. – Vol. 8. – P. 101-186.
123. Hardy G. H. The general theory of Dirichlet's series / G. H. Hardy, M. Riesz // *The Mathematical Gazette*. – 1916. – Vol. 8. – Issue 124. DOI: 10.2307/3604811
124. Haupt P. On finite linear viscoelasticity of incompressible isotropic materials / P. Haupt, A. Lion // *Acta Mechanica*. – 2002. – Vol. 159. – Issue 1-4. DOI: 10.1007/BF01171450
125. Havriliak S. A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers / S. Havriliak, S. Negami // *Polymer*. – 1967. – Vol. 8. – Issue C. – P. 161-210. DOI: 10.1016/0032-3861(67)90021-3
126. Havriliak S. On the equivalence of dielectric and mechanical dispersions in some polymers; e.g. poly(*n*-hexyl methacrylate) / S. Havriliak, S. Negami // *Polymer*. – 1969. – Vol. 10. – Issue C. – P. 859-872. DOI: 10.1016/0032-3861(69)90118-9

127. He L.J. A description of creep model for soft soil with fractional derivative / L. J. He, L. W. Kong, W. J. Wu, X.W. Zhang, Y. Cai // *Yantu Lixue/Rock and Soil Mechanics*. – 2011. – Vol. 32. – Issue SUPPL.2. – P. 239-243.
128. He M. M. Dynamic deformation behavior of rock based on fractional order calculus / M. M. He, N. Li, Y. S. Chen, C. H. Zhu // *Yantu Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Geotechnical Engineering*. – 2015. – Vol. 37. – P. 178-184. DOI: 10.11779/CJGE2015S1034
129. He M. M. The volume deformation behavior of rock based on fractional calculus and its experimental study / M. M. He, N. Li, C. H. Zhu, Y. S. Chen // *Yantu Lixue/Rock and Soil Mechanics*. – 2016. – Vol. 37. – Issue 11. – P. 3137-3144. DOI: 10.16285/j.rsm.2016.11.013
130. Hetényi M. Beams on elastic foundation: Theory with applications in the fields of Civil and Mechanical Engineering / M. Hetényi. – Michigan : University of Michigan Press, 1946. – 255 p.
131. Heymans N. Hierarchical models for viscoelasticity: Dynamic behaviour in the linear range / N. Heymans // *Rheologica Acta*. – 1996. – Vol. 35. – Issue 5. – P. 508-519. DOI: 10.1007/BF00369000
132. Heymans N. Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior / N. Heymans, J. C. Bauwens // *Rheologica Acta*. – 1994. – Vol. 33. – Issue 3. – P. 210-219. DOI: 10.1007/BF00437306
133. Hien T. D. Vibration of functionally graded plate resting on viscoelastic elastic foundation subjected to moving loads / T. D. Hien, N. N. Lam // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. – 2018. – Vol. 143. DOI: 10.1088/1755-1315/143/1/012024
134. Hooke R. A description of helioscopes and some other instruments / Hooke R. – London: T.R., 1676. – 32 p.
135. Hosseinkhani A. Dynamic analysis of a plate on the generalized foundation with fractional damping subjected to random excitation / A. Hosseinkhani, D. Younesian, S. Farhangdoust // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2018. – Vol. 2018. – Issue 2. – P. 1-10. DOI: 10.1155/2018/3908371

136. Huang P. Deformation response of roof in solid backfilling coal mining based on viscoelastic properties of waste gangue / P. Huang, J. Zhang, X. Yan, A. Spearing, M. Li, S. Liu // *International Journal of Mining Science and Technology*. – 2021. – Vol. 31(2). DOI: 10.1016/j.ijmst.2021.01.004
137. Huang Y. Fractional order creep model for dam concrete considering degree of hydration / Y. Huang, L. Xiao, T. Bao, Y. Liu // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2019. – Vol. 23. – Issue 3. – P. 361-372. DOI: 10.1007/s11043-018-9389-9
138. Javadi M. Nonlinear vibration of fractional Kelvin–Voigt viscoelastic beam on nonlinear elastic foundation / M. Javadi, M. Rahmanian // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2021. – Vol. 98. DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.105784
139. Jeffreys H. The Viscosity of the Earth (Third paper) / H. Jeffreys // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1917. – Vol. 77. – Issue 5. – P. 447-449. DOI: 10.1093/mnras/77.5.447
140. Jeffreys H. The Viscosity of the Earth / H. Jeffreys // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1915. – Vol. 75. – Issue 8. – P. 648-658. DOI: 10.1093/mnras/75.8.648
141. Jeffreys H. *The Earth: Its Origin, History and Physical Constitution* / H. Jeffreys. – Cambridge : Cambridge University Press, 1929. – 352 p.
142. Karman T. V. *Festigkeits probleme im maschinenbau* / T. V. Karman // Leipzig: [publisher not identified]. – 1910.
143. Katicha S. W. Fractional viscoelastic models: Master curve construction, interconversion, and numerical approximation / S. W. Katicha, G. W. Flintsch // *Rheologica Acta*. – 2012. – Vol. 51. – Issue 8. – P. 675-689. DOI: 10.1007/s00397-012-0625-y
144. Kerr A. D. Elastic and viscoelastic foundation models / A. D. Kerr // *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. – 1964. – Vol. 31. – Issue 3. – P. 491-498. DOI: 10.1115/1.3629667
145. Khajehsaeid H. Application of fractional time derivatives in modeling the finite deformation viscoelastic behavior of carbon-black filled NR and SBR / H. Khajehsaeid

- // Polymer Testing. – 2018. – Vol. 68. – P. 110-115. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2018.04.004
146. Kiasat M. S. On the transient response of viscoelastic beams and plates on viscoelastic medium / M. S. Kiasat, H. A. Zamani, M. M. Aghdam // International Journal of Mechanical Sciences. – 2014. – Vol. 83. – P. 133-145. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.03.007
147. King A. W. Nonlinear fractional order derivative models of components and materials in hearing aids and transducers: Ph.D. thesis / A. W. King. – Technical University of Denmark, 2019. – 170 p.
148. Knauss W. G. Mechanics of Polymers: Viscoelasticity / W. G. Knauss, I. Emri, H. Lu // Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics / W. Sharpe ed. – Boston : Springer, 2008. – P. 49-95. DOI: 10.1007/978-0-387-30877-7_3
149. Koeller R. C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity / R. C. Koeller // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. – 1984. – Vol. 51. – Issue 2. – P. 299-307. DOI: 10.1115/1.3167616
150. Koeller R. C. Polynomial operators, Stieltjes convolution, and fractional calculus in hereditary mechanics / R. C. Koeller // Acta Mechanica. – 1986. – Vol. 58. – Issue 3-4. – P. 251-264. DOI: 10.1007/BF01176603
151. Kou L. Response of rectangular plate on fractional derivative two-parameter viscoelastic foundation / L. Kou // Chinese Quarterly of Mechanics. – 2013. – Vol. 34. – Issue 1. – P. 154-160.
152. Kou L. Dynamic response of rectangular plates on two-parameter viscoelastic foundation with fractional derivatives / L. Kou, Y. Bai // Journal of Vibration and Shock. – 2014. – Vol. 33. – Issue 8. – P. 141-147. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2014.08.025
153. Kou L. Response for a loaded rectangular plate on viscoelastic foundation with fractional derivative model / L. Kou, J. Xu, B. Wang // Proceedings of GeoShanghai 2018 International Conference: Fundamentals of Soil Behaviours. – Springer Singapore, 2018. – P. 166-176. DOI: 10.1007/978-981-13-0125-4

154. Krusser A.I. Classification of viscoelastic models with integer and fractional order derivatives / A. I. Krusser, M. V. Shitikova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 747, Article ID 012007. DOI: 10.1088/1757-899X/747/1/012007
155. Krusser A.I. Impact response of a nonlinear viscoelastic auxetic plate / A. I. Krusser, Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 489, Article ID 012038. DOI: 10.1088/1757-899X/489/1/0120386
156. Kružík M. Mathematical Methods in Continuum Mechanics of Solids / M. Kružík, T. Roubíček. – Springer Nature Switzerland AG, 2019. – 1-472 p. DOI: 10.1007/978-3-030-02065-1
157. Krysko A.V. Mathematical modeling of planar physically nonlinear inhomogeneous plates with rectangular cuts in the three-dimensional formulation / A.V. Krysko, J. Awrejcewicz, K.S. Bodyagina, V. A. Krysko // Acta Mechanica. – 2021. – Vol. 232. – P. 4933–4950. DOI: 10.1007/s00707-021-03096-0
158. Krysko V.A. Non-symmetric forms of non-linear vibrations of flexible cylindrical panels and plates under longitudinal load and additive white noise / V.A. Krysko, J. Awrejcewicz, E. Yu Krylova, I.V. Papkova, A.V. Krysko // Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Vol.423. – P. 212-229. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.02.065
159. Lai J. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering / J. Lai, S. Mao, J. Qiu, H. Fan, Q. Zhang, Z. Hu, J. Chen // Mathematical Problems in Engineering. – 2016. – Vol. 2016. – Issue 3. – P. 1-15. DOI: 10.1155/2016/9183296
160. Leissa A. Vibration of Plates / A. Leissa. – Scientific and Technical Information Division, Office of Technology Utilization, NASA, Washington, D.C., 1969. – 353 p.
161. Li M. Dynamic Response of the Rectangular Plate Subjected to Moving Loads with Variable Velocity / M. Li, T. Qian, Y. Zhong, H. Zhong // Journal of Engineering Mechanics. – 2014. – Vol. 140. – Issue 4. – P. 06014001. DOI: 10.1061/(asce)em.1943-7889.0000687

162. Li S. A Nonlinear Vehicle-Road Coupled Model for Dynamics Research / S. Li, S. Yang, L. Chen // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2013. – Issue 2 (8). DOI: 10.1115/1.4006784
163. Liang J. Application of a Viscoelastic Model to Creep Settlement of High-Fill Embankments / J. Liang, G. Huang // *Advances in Civil Engineering*. – 2019. – Vol. 2019. – P. 1-8. DOI: 10.1155/2019/4627174
164. Liao M. A fractional order creep constitutive model of warm frozen silt / M. Liao, Y. Lai, E. Liu, X. Wan // *Acta Geotechnica*. – 2017. – Vol. 12. – Issue 2. – P. 377-389. DOI: 10.1007/s11440-016-0466-4
165. Lion A. The Payne effect in finite viscoelasticity: Constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales / A. Lion, C. Kardelky // *International Journal of Plasticity*. – 2004. – Vol. 20. – Issue 7. – P. 1313-1345. DOI: 10.1016/j.ijplas.2003.07.001
166. Liouville J. Mémoire sur quelques Quéstions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quéstions. / J. Liouville // *Journal de l'école Polytechnique*. – 1832. – Vol. 13. – Issue 21. – P. 1-69.
167. Liu J. G. Higher-order fractional constitutive equations of viscoelastic materials involving three different parameters and their relaxation and creep functions / J. G. Liu, M. Y. Xu // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2006. – Vol. 10. – Issue 4. – P. 263-279. DOI: 10.1007/s11043-007-9022-9
168. Liu L. C. Lateral vibration of single pile in viscoelastic soil described by fractional derivative model / L. C. Liu, Q. F. Yan // *Gongcheng Lixue / Engineering Mechanics*. – 2011. – Vol. 28. – Issue 12. – P. 78-89.
169. Liu L. C. Analysis on settlement of semi-infinite viscoelastic ground based on fractional derivative model / L. C. Liu, X. Yang // *Gongcheng Lixue / Engineering Mechanics*. – 2009. – Vol. 26. – Issue 1. – P. 13-17.
170. Liu L. C. Analysis of vertical vibrations of a pile in saturated soil described by fractional derivative model / L. C. Liu, X. Yang // *Yantu Lixue / Rock and Soil Mechanics*. – 2011. – Vol. 32. – Issue 2. – P. 526-532.

171. Liu L. C. Deformation properties of horizontal round adits in viscoelastic rocks with fractional Kelvin model / L. C. Liu, W. Zhang // *Yantu Lixue / Rock and Soil Mechanics*. – 2005. – Vol. 26. – Issue 2. – P. 287-289.
172. Lodge A. S. *Elastic Liquids* / A. S. Lodge. – London : Academic Press, 1964. – 389 p.
173. Luong V. H. Static and dynamic analyses of Mindlin plates resting on viscoelastic foundation by using moving element method / V. H. Luong, T. N. T. Cao, J. N. Reddy, K.K. Ang, M.T. Tran, J. Dai // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2018. – Vol. 18. – Issue 11. – P. 1850131. DOI: 10.1142/S0219455418501316
174. Luong V. H. Moving element method for dynamic analyses of functionally graded plates resting on Pasternak foundation subjected to moving harmonic load / V. H. Luong, T. N. T. Cao, Q. X. Lieu, X. V. Nguyen // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2020. – Vol. 20. – Issue 1. DOI: 10.1142/S0219455420500030
175. Mainardi F. Short survey : An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity / F. Mainardi // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. – 2012. – Vol. 15. – Issue 4. – P. 712-717. DOI: 10.2478/s13540-012-0048-6
176. Mainardi F. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology / F. Mainardi, G. Spada // *European Physical Journal: Special Topics*. – 2011. – Vol. 193. – Issue 1. – P. 133-160. DOI: 10.1140/epjst/e2011-01387-1
177. Makris B. N. Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers / B. N. Makris, M. C. Constantinou // *Journal of Structural Engineering*. – 1991. – Vol. 117. – Issue 9. – P. 2708-2724. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1991)117:9(2708)
178. Makris N. Time-response functions of fractional derivative rheological models / N. Makris, E. Efthymiou // *Rheologica Acta*. – 2020. – Vol. 59. – Issue 12. – P. 849-873. DOI: 10.1007/s00397-020-01241-5
179. Mattei G. A new analytical method for estimating lumped parameter constants of linear viscoelastic models from strain rate tests / G. Mattei, A. Ahluwalia // *Mechanics*

- of Time-Dependent Materials. – 2019. – Vol. 23. – Issue 3. – P. 327-335. DOI: 10.1007/s11043-018-9385-0
180. Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases / J. C. Maxwell // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. – 1867. – Vol. 157. – P. 49-88. DOI: 10.1098/rstl.1867.0004
181. Merchant W. Some theoretical considerations on the one-dimensional consolidation of clay / W. Merchant. – Massachusetts Inst. of Technology, 1939.
182. Meshkov S. I. Integral representations of ε_γ -functions and their application to problems in linear viscoelasticity / S. I. Meshkov, G. N. Pachevskaya, V. S. Postnikov, Yu. A. Rossikhin // *International Journal of Engineering Science*. – 1971. – Vol. 9. – Issue 4. – P. 387–398. DOI: 10.1016/0020-7225(71)90059-0.
183. Meyer O. E. Zur Theorie der inneren Reibung / O. E. Meyer // *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. – 1874. – Vol. 1874. – Issue 78. – P. 130-135.
184. Morro A. Modelling of viscoelastic materials and creep behaviour / A. Morro // *Meccanica*. – 2017. – Vol. 52. – Issue 13. – P. 3015-3021. DOI: 10.1515/crll.1874.78.130
185. Müller S. A nonlinear fractional viscoelastic material model for polymers / S. Müller, M. Kästner, J. Brummund, V. Ulbricht // *Computational Materials Science*. – 2011. – Vol. 50. – Issue 10. – P. 2938-2949. DOI: 10.1016/j.commatsci.2011.05.011
186. Nayfeh A. H. Modal Interactions in Dynamical and Structural Systems / A. H. Nayfeh, B. Balachandran // *Applied Mechanics Reviews*. – 1989. – Vol. 42. – Issue 11S. – P. S175-S201. DOI: 10.1115/1.3152389
187. Nayfeh A. H. Nonlinear Oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. – New York: Wiley. – 1995.
188. Nayfeh A. H. Nonlinear interaction: Analytical, computational, and experimental methods / A. H. Nayfeh. – New York: Wiley. – 2000.
189. Nešić N. Nonlinear vibration of a nonlocal functionally graded beam on fractional visco-Pasternak foundation / N. Nešić, M. Cajić, D. Karličić, A. Obradović, J.

- Simonović Azrar. – Text : electronic // *Nonlinear Dynamics*. – 2022. DOI: 10.1007/s11071-021-07081-z
190. Newton I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* / I. Newton; H. Pemberton ed. – London, 1687. – 502 p.
191. Nonnenmacher T. F. A fractional model for mechanical stress relaxation / T. F. Nonnenmacher, W. G. Glockle // *Philosophical Magazine Letters*. – 1991. – Vol. 64. – Issue 2. – P. 89-93. DOI: 10.1080/09500839108214672
192. Nutting P. G. A new general law of deformation / P. G. Nutting // *Journal of the Franklin Institute*. – 1921. – Vol. 191. – Issue 5. – P. 679-685. DOI: 10.1016/S0016-0032(21)90171-6
193. Okuka A. S. Formulation of thermodynamically consistent fractional Burgers models / A. S. Okuka, D. Zorica // *Acta Mechanica*. – 2018. – Vol. 229. – Issue 8. – P. 3557-3570. DOI: 10.1007/s00707-018-2198-z
194. Okuka A. S. Fractional Burgers models in creep and stress relaxation tests / A. S. Okuka, D. Zorica // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – Vol. 77. – P. 1894-1935. DOI: 10.1016/j.apm.2019.09.035
195. Ouzizi A. Nonlinear dynamics of beams on nonlinear fractional viscoelastic foundation subjected to moving load with variable speed / A. Ouzizi, F. Abdoun, L. Azrar. – Text : electronic // *Journal of Sound and Vibration*. – 2022. – Vol. 523. – P. 116730. DOI: 10.1016/J.JSV.2021.116730
196. Paola M. Di. A generalized model of elastic foundation based on long-range interactions: Integral and fractional model / M. Di Paola, F. Marino, M. Zingales // *International Journal of Solids and Structures*. – 2009. – Vol. 46. – Issue 17. – P. 3124-3137. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.03.024
197. Paola M. Di. Visco-elastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results / M. Di Paola, A. Pirrotta, A. Valenza // *Journal of Materials Science*. – 2011. – Vol. 43. – Issue 12. – P. 799-806. DOI: 10.1016/j.mechmat.2011.08.016
198. Patil V. Finite element analysis of rigid pavement on a nonlinear two parameter foundation model / V. Patil, V. Sawant, K. Deb // *International Journal of Geotechnical*

- Engineering. – 2012. – Vol. 6. – Issue 3. – P. 275-286. DOI: 10.3328/IJGE.2012.06.03.274-286
199. Patnaik S. Applications of variable-order fractional operators: A review / S. Patnaik, J. P. Hollkamp, F. Semperlotti // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* – 2020. – Vol. 476. – № 2234. DOI: 10.1098/rspa.2019.0498
200. Permoon M.R. Nonlinear vibration of fractional viscoelastic plate: Primary, subharmonic, and superharmonic response / M.R. Permoon, H. Haddadpour, M. Javadi // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* – 2018. – Vol. 99. – P. 154-164. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.11.010
201. Poynting J. H. *Properties of Matter* / J. H. Poynting, J. J. Thomson. – London : C. Griffin and Co, 1902. – 228 p.
202. Praharaj R. K. On the transient response of plates on fractionally damped viscoelastic foundation / R. K. Praharaj, N. Datta // *Computational and Applied Mathematics.* – 2020. – Vol. 39. – Issue 4. DOI: 10.1007/s40314-020-01285-6
203. Praharaj R. K. Dynamic response of plates resting on a fractional viscoelastic foundation and subjected to a moving load / R. K. Praharaj, N. Datta // *Mechanics Based Design of Structures and Machines.* – 2020. – P. 1-16. DOI: 10.1080/15397734.2020.1776621
204. Pritz T. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials / T. Pritz // *Journal of Sound and Vibration.* – 1996. – Vol. 195. – Issue 1. – P. 103-115. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0406
205. Pritz T. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials / T. Pritz // *Journal of Sound and Vibration.* – 2003. – Vol. 265. – Issue 5. – P. 935-952. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01530-4
206. Qing J. Primary and secondary resonance responses of fractional viscoelastic PET membranes / J. Qing, S. Zhou, J. Wu, M. Shao // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2023. – Vol. 116. – 106810. DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.106810

207. Quzizi A. Nonlinear dynamics of beams on nonlinear fractional viscoelastic foundation subjected to moving load with variable speed / A. Ouzizi, F. Abdoun, L. Azrar // *Journal of Sound and Vibration*. – 2022. – Vol. 523. – 116730. DOI: 10.1016/j.jsv.2021.116730
208. Rajabi K. Dynamic analysis of a functionally graded simply supported Euler-Bernoulli beam subjected to a moving oscillator / K. Rajabi, M. H. Kargarnovin, M. Gharini // *Acta Mechanica*. – 2013. – Vol. 224. – Issue 2. – P. 425-446. DOI: 10.1007/s00707-012-0769-y
209. Ramrakhyani D. S. Modeling of elastomeric materials using nonlinear fractional derivative and continuously yielding friction elements / D. S. Ramrakhyani, G. A. Lesieutre, E. C. Smith // *International Journal of Solids and Structures*. – 2004. – Vol. 41. – Issue 14. – P. 3929-3948. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.02.034
210. Reissner E. A Note on Deflections of Plates on a Viscoelastic Foundation / E. Reissner // *Journal of Applied Mechanics*. – 1958. – Vol. 25. – Issue 1. – P. 144-145. DOI: 10.1115/1.4011704
211. Renaud F. A new identification method of viscoelastic behavior: Application to the generalized Maxwell model / F. Renaud, J. L. Dion, G. Chevallier [et al.] // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2011. – Vol. 25. – Issue 3. – P. 991-1010. DOI: 10.1016/j.ymsp.2010.09.002
212. Riemann B. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation / B. Riemann. – Leipzig : Gesammelte Mathematische Werke, 1876. – 14 p.
213. Rossikhin Y. A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids / Y. A. Rossikhin // *Applied Mechanics Reviews*. – 2010. – Vol. 63. – Issue 1. – P. 1-12. DOI: 10.1115/1.4000246
214. Rossikhin Y. A. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Applied Mechanics Reviews*. – 1997. – Vol. 50. – Issue 1. – P. 15-67. DOI: 10.1115/1.3101682

215. Rossikhin Y. A. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1998. – Vol. 124. – P. 1029-1036. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1998)124:9(1029)
216. Rossikhin Y. A. Analysis of rheological equations involving more than one fractional parameters by the use of the simplest mechanical systems based on these equations / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2001. – Vol. 5. – Issue 2. – P. 131-175. DOI: 10.1023/A:1011476323274
217. Rossikhin Y. A. A new method for solving dynamic problems of fractional derivative viscoelasticity / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *International Journal of Engineering Science*. – 2001. – Vol. 39. – Issue 2. – P. 149-176. DOI: 10.1016/S0020-7225(00)00025-2
218. Rossikhin Y. A. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. – 2007. – Vol. 10. – Issue 2. – P. 111-121.
219. Rossikhin Y. A. New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Shock and Vibration*. – 2009. – Vol. 16. – Issue 4. – P. 365-387. DOI: 10.1155/2009/387676.
220. Rossikhin Y. A. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Applied Mechanics Reviews*. – 2010. – Vol. 63. – Issue 1. – P. 1-52. DOI: 10.1115/1.4000563
221. Rossikhin Y. A. On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann–Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Mechanics Research Communications*. – 2012. – Vol. 45. – P. 22-27. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.07.001
222. Rossikhin Y. A. Centennial jubilee of Academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. – 2014. – Vol. 17. – Issue 3. – P. 647-683. DOI: 10.2478/s13540-014-0192-2

223. Rossikhin Y. A. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Fractional Calculus: Applications*. – 2015. – Vol. 8. – P. 165-226.
224. Rossikhin Y. A. Fractional operator models of viscoelasticity / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. – Springer Berlin Heidelberg, 2020. – P. 971-982. DOI: 10.1007/978-3-662-55771-6_77
225. Rossikhin Y. A. The simplest fractional derivative models of viscoelasticity and their correctness in problems of thin body dynamics / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, A.I. Krusser // *Book of abstracts XLIV International Summer School-Conference «Advanced problems in mechanics»*. – St. Petersburg, June 27 – July 01, 2016. – St. Petersburg: IMASH, 2016. – P.70.
226. Rossikhin Y. A. To the question on the correctness of fractional derivative models in dynamic problems of viscoelastic bodies / Y. A. Rossikhin, M.V. Shitikova, A.I. Krusser // *Mechanics Research Communications*. – 2016. – Vol. 77. – P. 44–49. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2016.09.002
227. Rossikhin Y. A. Impact response of a nonlinear viscoelastic auxetic doubly curved shallow shell / Y. A. Rossikhin, A.I. Krusser, M.V. Shitikova // *24th International Congress on Sound and Vibration, ICSV 2017*. – London, UK, 23-27 July 2017. – Paper ID 129801.
228. Rossikhin Y. A. Fractional calculus models in dynamic problems of viscoelasticity / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // *Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A*. – 2019. – Vol. 7. – P. 139-158. DOI: 10.1515/9783110571905-008
229. Rossikhin Y. A. Fractional calculus in structural mechanics / Y. A. Rossikhin, M.V. Shitikova // *Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A*. – 2019. – P. 159-192. DOI: 10.1515/9783110571905-009 Brought
230. Roylance D. Engineering viscoelasticity / D. Roylance // *Department of Materials Science and Engineering*. – 2001. – Vol. 2139. – P. 1-37. DOI: 10.1007/978-1-4614-8139-3

231. Sasso M. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems / M. Sasso, G. Palmieri, D. Amodio // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2011. – Vol. 15. – Issue 4. – P. 367-387. DOI: 10.1007/s11043-011-9153-x
232. Sawant V. A. Effect of vehicle–pavement interaction on dynamic response of rigid pavements / V. A. Sawant, V. A. Patil, K. Deb // *Geomechanics and Geoengineering*. – 2011. – Vol. 6. – Issue 1. – P. 31-39. DOI: 10.1080/17486025.2010.521591
233. Schiessel H. Generalized viscoelastic models: Their fractional equations with solutions / H. Schiessel, R. Metzler, A. Blumen, T. F. Nonnenmacher // *Journal of Physics A: General Physics*. – 1995. – Vol. 28. – Issue 23. – P. 6567-6584. DOI: 10.1088/0305-4470/28/23/012
234. Schiessel H. Hierarchical analogues to fractional relaxation equations / H. Schiessel, A. Blumen // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. – 1993. – Vol. 26. – Issue 19. – P. 5057-5069. DOI: 10.1088/0305-4470/26/19/034
235. Scott Blair G. W. Analytical and integrative aspects of the stress-strain-time problem / G. W. Scott Blair // *Journal of Scientific Instruments*. – 1944. – Vol. 21. – Issue 5. – P. 80-84. DOI: 10.1088/0950-7671/21/5/302
236. Scott Blair G. W. A survey of general and applied rheology / G. W. Scott Blair. – London : PITMAN, 1949. – 196 p.
237. Shitikova M. V. The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures / M. V. Shitikova // *Nonlinear Dynamics*. – 2020. – Vol. 99. – Issue 1. – P. 109-122. DOI: 10.1007/s11071-019-05055-w
238. Shitikova M. V. Force driven vibrations of fractionally damped plates subjected to primary and internal resonances / M. V. Shitikova, V. V. Kandu // *European Physical Journal Plus*. – 2019. – Vol. 134. – Issue 9. DOI: 10.1140/epjp/i2019-12812-x
239. Shitikova M. V. Nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation modelled by the fractional derivative standard linear solid model / M. V. Shitikova, A. I. Krusser // *EASD Procedia*. – 2020. – P. 355-368. Paper ID 20091. DOI: 10.47964/1120.9028.20091

240. Shitikova M. V. Force driven vibrations of nonlinear plates on a viscoelastic Winkler foundation under the harmonic moving load / M. V. Shitikova, A.I. Krusser // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2021. – Vol. 17(4). – P. 161–180. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-4-161-180.
241. Shitikova M. V. Dynamic analysis of an elastic plate resting on a nonlinear fractional-order viscoelastic Pasternak foundation and subjected to moving load / M. V. Shitikova, A.I. Krusser // *Lecture Notes in Civil Engineering*. – 2022. – Vol.168. – P.13-24. DOI: 10.1007/978-3-030-91145-4_2
242. Shitikova M. V. Models of viscoelastic materials: a review on historical development and formulation / M. V. Shitikova, A. I. Krusser // *Advanced Structured Materials*. – 2022. – Vol. 175. – P. 285-326. DOI: 10.1007/978-3-031-04548-6_14
243. Shitikova M. V. The effect of boundary conditions on nonlinear vibrations of plates on a viscoelastic base via the fractional calculus standard linear solid model / M. V. Shitikova, A.I. Krusser // *Advances in Nonlinear Dynamics*. –2022. – Vol.1. – P.179-188. DOI: 10.1007/978-3-030-81162-4_16
244. Shitikova M. V. On nonlinear vibrations of an elastic plate on a fractional viscoelastic foundation in a viscoelastic medium in the presence of the one-to-one internal resonance / M.V. Shitikova, V.V. Kandu, A. I. Krusser // *Journal of Sound and Vibration*. – 2023. – Vol. 549. – 117564. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117564.
245. Singh A. Experiment and modelling of the strain-rate-dependent response during in vitro degradation of PLA fibres / A. Singh, R. M. Guedes, D. Paiva, F. D. Magalhães // *SN Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 2. – Issue 177. DOI: 10.1007/s42452-020-1964-4
246. Sjoeborg M. On dynamic properties of rubber isolators : Doctoral thesis / M. Sjoeborg. – Sweden : Royal Institute of Technology, 2002.
247. Smit W. Rheological models containing fractional derivatives / W. Smit, H. de Vries // *Rheologica Acta*. – 1970. – Vol. 9. – Issue 4. – P. 525-534. DOI: 10.1007/BF01985463
248. Song D. Y. Study on the constitutive equation with fractional derivative for the viscoelastic fluids - modified Jeffreys model and its application / D. Y. Song, T. Q.

- Jiang // *Rheologica Acta*. – 1998. – Vol. 37. – Issue 5. – P. 512-517. DOI: 10.1007/s003970050138
249. Steinmann P. *Visco-Elasticity* / P. Steinmann, K. Runesson // *The Catalogue of Computational Material Models*. – Cham : Springer International Publishing, 2021.
250. Sun H. Z. Analysis of soft soil with viscoelastic fractional derivative Kelvin model / H. Z. Sun, W. Zhang // *Yantu Lixue/Rock and Soil Mechanics*. – 2007. – Vol. 28. – Issue 9. – P. 1983-1986.
251. Sun Y. Stress-fractional soil model with reduced elastic region / Y. Sun, S. Nimbalkar // *Soils and Foundations*. – 2019. – Vol. 59. – Issue 6. – P. 2007-2023. DOI: 10.1016/j.sandf.2019.10.001
252. Taheri M. R. *Dynamic Response of Plate To Moving Loads: Structural Impedance Method* / M. R. Taheri // *Computers & Structures*. – 1989. – Vol. 33. – Issue 6. – P. 1379-1393. DOI: 10.1016/0045-7949(89)90478-1
253. Tang H. A new rock creep model based on variable-order fractional derivatives and continuum damage mechanics / H. Tang, D. Wang, R. Huang [et al.] // *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*. – 2018. – Vol. 77. – Issue 1. – P. 375-383. DOI: 10.1007/s10064-016-0992-1
254. Thompson J. H. On the theory of visco-elasticity: A thermodynamical treatment of visco-elasticity, and some problems of the vibrations of visco-elastic solids / J. H. Thompson // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1933. – Vol.231. –Issue 694-706. – P. 339-407. DOI: 10.1098/rsta.1933.0010
255. Thomson W. On the elasticity and viscosity of metals / W. Thomson // *Proceedings of the Royal Society of London*. – 1865. – Vol. 14. – P. 289-297. DOI: 10.1098/rspl.1865.0052
256. Thomson W. *Elasticity* / W. Thomson // *Encyclopaedia Britannica*. – 1875. – P. 796-825.
257. Tschoegl N. W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior* / N. W. Tschoegl. – Berlin : Springer-Verlag, 1989. – 769 p.

258. Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper / W. Voigt // *Annalen Der Physik*. – 1889. – Vol. 274. – Issue 12. – P. 573-587. DOI: 10.1002/andp.18892741206
259. Voigt W. Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle / W. Voigt // *Annalen der Physik*. – 1892. – Vol. 283. – Issue 12. – P. 671-693. DOI: 10.1002/andp.18922831210
260. Wang J. Vertical impedance of a tapered pile in inhomogeneous saturated soil described by fractional viscoelastic model / J. Wang, D. Zhou, Y. Zhang, W. Cai // *Applied Mathematical Modelling*. – 2019. – Vol. 75. – P. 88-100. DOI: 10.1016/j.apm.2019.05.006
261. Wang L. Semi-analytical solution for one-dimensional consolidation of fractional derivative viscoelastic saturated soils / L. Wang, D. Sun, P. Li, Y. Xie // *Computers and Geotechnics*. – 2017. – Vol. 83. – P. 30-39. DOI: 10.1016/j.compgeo.2016.10.020
262. Wang L. Y. Fractional derivative in the elastic-viscoplastic stress-strain state model describing anisotropic creep of soft clays / L. Y. Wang, F. X. Zhou // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2020. DOI: 10.1007/s11043-020-09480-y
263. Wang Y. H. Beams and plates on elastic foundations: A review / Y. H. Wang, L. G. Tham, Y. K. Cheung // *Progress in Structural Engineering and Materials*. – 2005. – Vol. 7. – Issue 4. – P. 174-182. DOI: 10.1002/pse.202
264. Wang Y. Seismic attenuation models: Multiple and fractional generalizations / Y. Wang, J. M. Harris // *SEG 2020*. – 2020. – P. 2754-2758. DOI: 10.1190/segam2020-3421172.1
265. Ward I. M. Mechanical properties of solid polymers / I. M. Ward, J. Sweeney. – John Wiley & Sons, Ltd., 1983. – 480 p. DOI: 10.1002/9781119967125
266. Watanabe S. An Approach to Visco-Elastic Behaviors with a Mathematical Method / S. Watanabe // *Journal of the Textile Machinery Society of Japan*. – 1959. – Vol. 5. – Issue 2. – P. 10-13. DOI: 10.4188/jte1955.5.2_10
267. Welch S. W. J. Application of time-based fractional calculus methods to viscoelastic creep and stress relaxation of materials / S. W. J. Welch, R. A. L. Rorrer, R.

- G. Duren // *Mechanics Time-Dependent Materials*. – 1999. – Vol. 3. – Issue 3. – P. 279-303. DOI: 10.1023/A:1009834317545
268. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung / H. Weyl // *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*. – 1917. – Vol. 62.
269. Wiechert E. Gesetze der elastischen Nachwirkung für constante Temperatur / E. Wiechert // *Annalen der Physik*. – 1893. – Vol. 286. – Issue 11. DOI: 10.1002/andp.18932861110
270. Winkler E. Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit / E. Winkler. – Prague : Dominicius, 1867. – 388 p.
271. Wollscheid D. The benefit of fractional derivatives in modelling the dynamics of filler-reinforced rubber under large strains: A comparison with the Maxwell-element approach / D. Wollscheid, A. Lion // *Computational Mechanics*. – 2014. – Vol. 53. – Issue 5. – P. 1015-1031. DOI: 10.1007/s00466-013-0946-4
272. Wu F. An improved Maxwell creep model for rock based on variable-order fractional derivatives / F. Wu, J. F. Liu, J. Wang // *Environmental Earth Sciences*. – 2015. – Vol. 73. – Issue 11. – P. 6965-6971. DOI: 10.1007/s12665-015-4137-9
273. Xu M. Representation of the constitutive equation of viscoelastic materials by the generalized fractional element networks and its generalized solutions / M. Xu, W. Tan // *Science in China*. – 2003. – Vol. 46. – Issue 2. DOI: 10.1360/03yg9020
274. Xu X. B. Investigation of a fractional derivative creep model of clay and its numerical implementation / X. B. Xu, Z. D. Cui // *Computers and Geotechnics*. – 2020. – Vol. 119. – P. 103387. DOI: 10.1016/j.compgeo.2019.103387
275. Yang S. Modeling and Dynamic Analysis of Vehicle–Road Coupled Systems / S. Yang, L. Chen, S. Li // *Dynamics of Vehicle-Road Coupled System*. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2015. – P. 215-250. DOI: 10.1007/978-3-662-45957-7_7
276. Yang S., Li S., Lu Y. Investigation on dynamical interaction between a heavy vehicle and road pavement / S. Yang, S. Li, Y. Lu // *Vehicle System Dynamics*. – 2010. – Vol. 8 (48). – P. 923–944.

277. Yang W. Torsional dynamic impedance of single pile in layered and saturated soil based on transfer matrix method / W. Yang, L. Yu, B. Lin // *Noise and Vibration Control*. – 2012. – Vol. 2. – P. 45–93.
278. Yang X. A novel representation of time-varying viscosity with power-law and comparative study / X. Yang, W. Cai, Y. Liang, S. Holm // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2020. – Vol. 119. – P. 103372. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103372
279. Yang X. Dynamic characteristics of saturated fractional derivative type viscoelastic soil and lining system with a deeply embedded circular tunnel / X. Yang, M. J. Wen // *Gongcheng Lixue/Engineering Mechanics*. – 2012. – Vol. 29. – Issue 12. – P. 248-255.
280. Yin D. New rheological model element for geomaterials / D. Yin, J. Ren, C. He, W. Chen // *Yanshilixue Yu Gongcheng Xuebao/ Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*. – 2007. – Vol. 26. – Issue 9. – P. 1899-1903.
281. Yin D. Fractional order constitutive model of geomaterials under the condition of triaxial test / D. Yin, H. Wu, C. Cheng, Y. Chen // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2013. – Vol. 37. – Issue 8. – P. 961-972. DOI: 10.1002/nag.2139
282. Yin D. S. Fractional description of mechanical property evolution of soft soils during creep / D. S. Yin, Y. Q. Li, H. Wu, X. M. Duan // *Water Science and Engineering*. – 2013. – Vol. 6. – Issue 4. – P. 446-455. DOI: 10.3882/j.issn.1674-2370.2013.04.008
283. Younesian D. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications / D. Younesian, A. Hosseinkhani, H. Askari, E. Esmailzadeh // *Nonlinear Dynamics*. – 2019. – Vol. 97. – Issue 1. – P. 853-895. DOI: 10.1007/s11071-019-04977-9
284. Yu H.-X. Magnification Effect of the Action of Seismic Wave at the Head of a Single Pile in FDV Soil Foundation / H.-X. Yu // *Noise and vibration control (in Chinese)*. – 2012. – Issue 2. – P. 45-48.

285. Zaman M. Dynamic response of a thick plate on viscoelastic foundation to moving loads / M. Zaman, M. R. Taheri, A. Alvappillai // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 1991. – Vol. 15. – Issue 9. – P. 627-647. DOI: 10.1002/nag.1610150903
286. Zamani H. A. Free vibration of viscoelastic foam plates based on single-term Bubnov–Galerkin, least squares, and point collocation methods / H. A. Zamani // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2021. – Vol. 25. – Issue 3. – P. 495-512. DOI: 10.1007/s11043-020-09456-y
287. Zatar W. Identification of Viscoelastic Property of Pile-Soil Interactions with Fractional Derivative Model / W. Zatar, F. Xiao, G. S. Chen, J. L. Hulseley // *Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control*. – 2021. – Vol. 40. – Issue 3. – P. 1-9. DOI: 10.1177/1461348420979478
288. Zhang C. C. Theoretical investigation of interaction between a rectangular plate and fractional viscoelastic foundation / C. C. Zhang, H. H. Zhu, B. Shi, L. Liu // *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. – 2014. – Vol. 6. – Issue 4. – P. 373-379. DOI: 10.1016/j.jrmge.2014.04.007
289. Zhang C. C. Bending of a rectangular plate resting on a fractionalized Zener foundation / C. C. Zhang, H. H. Zhu, B. Shi, G. X. Mei // *Structural Engineering and Mechanics*. – 2014. – Vol. 52. – Issue 6. – P. 1069-1084. DOI: 10.12989/sem.2014.52.6.1069
290. Zhang C.C. A long term evaluation of circular mat foundations on clay deposits using fractional derivatives / C. C. Zhang, H. H. Zhu, B. Shi, B. Fatahi // *Computers and Geotechnics*. – 2018. – Vol. 94. – P. 72-82. DOI: 10.1016/j.compgeo.2017.08.018
291. Zhang C. C. Nonlinear creep damage constitutive model of concrete based on fractional calculus theory / C.C. Zhang, Z. Zhu, S. Zhu, Z. He, D. Zhu, J. Liu, S. Meng // *Materials*. – 2019. – Vol. 12. – Issue 9. DOI: 10.3390/ma12091505
292. Zhang Q. Dynamic Mechanical Properties of Soil Based on Fractional-Order Differential Theory / Q. Zhang, Q. Zhang, M. Ji // *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. – 2019. – Vol. 55. – Issue 6. – P. 366-373. DOI: 10.1007/s11204-019-09550-5

293. Zhang W. Global and chaotic dynamics for a parametrically excited thin plate / W. Zhang // *Journal of Sound and Vibration*. – 2001. – Vol. 239. – Issue 5. – P. 1013-1036. DOI: 10.1006/jsvi.2000.3182
294. Zhou H.W. A creep constitutive model for salt rock based on fractional derivatives / H. W. Zhou, C. P. Wang, B. B. Han, Z. Q. Duan // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. – 2011. – Vol. 48. – Issue 1. – P. 116-121. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2010.11.004
295. Zhou H.W. A fractional derivative approach to full creep regions in salt rock / H. W. Zhou, C. P. Wang, L. Mishnaevsky, Z. Q. Duan, J. Y. Ding // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2013. – Vol. 17. – Issue 3. – P. 413-425. DOI: 10.1007/s11043-012-9193-x
296. Zhou X. Q. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review / X. Q. Zhou, D. Y. Yu, X. Y. Shao, S.Q. Zhang, S. Wang // *Composite Structures*. – 2016. – Vol. 136. – P. 460-480. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.10.014
297. Zhou X. Mechanics constitutive models for viscoelastic solid materials: Development and a critical review / X. Zhou, D. Yu, O. Barrera // *Advances in Applied Mechanics, Elsevier*. – 2022. DOI: org/10.1016/bs.aams.2022.09.003
298. Zhou Y. F. Transverse vibration characteristics of axially moving viscoelastic plate / Y. F. Zhou, Z. M. Wang // *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*. – 2007. – Vol. 28. – Issue 2. – P. 209-218. DOI: 10.1007/s10483-007-0209-1
299. Zhu H. H. Settlement analysis of viscoelastic foundation under vertical line load using a fractional Kelvin-Voigt model / H. H. Zhu, L. C. Liu, H. F. Pei, B. Shi // *Geomechanics and Engineering*. – 2012. – Vol. 4. – Issue 1. – P. 67-78. DOI: 10.12989/gae.2012.4.1.067
300. Zhu H. H. Prediction of one-dimensional compression behavior of Nansha clay using fractional derivatives / H. H. Zhu, C. C. Zhang, G. X. Mei, B. Shi, L. Gao // *Marine Georesources and Geotechnology*. – 2017. – Vol. 35. – Issue 5. – P. 688-697. DOI: 10.1080/1064119X.2016.1217958

301. Zhu H. H. Response of a loaded rectangular plate on fractional derivative viscoelastic foundation / H. H. Zhu, L. Liu, X. Ye // *Journal of Basic Science and Engineering*. – 2011. – Vol. 19. – Issue 2. – P. 271-278. DOI: 10.3969/j.issn.1005-0930.2011.02.011
302. Zimmerman H. Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues / H. Zimmerman. – Berlin: Verlag von Ernst & Korn, 1888. – 326 pp.
303. Zopf C. Comparison of approaches to model viscoelasticity based on fractional time derivatives / C. Zopf, S. E. Hoque, M. Kaliske // *Computational Materials Science*. – 2015. – Vol. 98. – P. 287-296. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.11.012

ПРИЛОЖЕНИЕ А

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022668236

**Программный комплекс численных исследований
нелинейных колебаний прямоугольных пластин на
вязкоупругом основании с использованием операторов
дробного порядка**

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»
(RU)**

Авторы: **Круссер Анастасия Игоревна (RU), Шитикова Марина
Вячеславовна (RU)**

Заявка № 2022667282

Дата поступления **21 сентября 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **04 октября 2022 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Выражения для функции напряжений Эйри для различных типов граничных условий

1) Жесткое защемление по контуру (СССС)

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) = Eh \left\{ \sum_i \sum_p \sum_q \phi_{ipq} X_{ip} Y_{iq} x_i(t)^2 + \left[\frac{1}{64} (A_1^2 M_{12} N_{12} + D_1^2 M_{22} N_{22} - \right. \right. \\ \left. \left. - B_1^2 M_{12} N_{22} - C_1^2 M_{22} N_{12}) - \frac{m_1^2 n_2^2}{32} (B_2^2 M_{12} Y_{21} + C_2^2 M_{22} Y_{21} - \right. \right. \\ \left. \left. - A_2^2 X_{11} N_{12} - D_2^2 X_{11} N_{22} - E_2^2 X_{11} Y_{21}) - \frac{m_2^2 n_1^2}{32} (B_3^2 M_{12} Y_{11} + C_3^2 M_{22} Y_{11} - \right. \right. \\ \left. \left. - A_3^2 X_{21} N_{12} - D_3^2 X_{21} N_{22} - E_3^2 X_{21} Y_{11}) \right] x_1(t) x_2(t) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

$$\text{где } \phi_{i04} = -\frac{\xi^2 \eta_i^2}{512}, \quad \phi_{i40} = -\frac{1}{512 \xi^2 \eta_i^2},$$

$$\phi_{i42} = \frac{\xi^2 \eta_i^2}{32 [4 \eta_i^2 \xi^2 + 1]^2}, \quad \phi_{i22} = -\frac{\xi^2 \eta_i^2}{32 [\eta_i^2 \xi^2 + 1]^2}, \quad \phi_{i24} = \frac{\xi^2 \eta_i^2}{32 [\eta_i^2 \xi^2 + 4]^2},$$

$$A_2 = \frac{\xi}{m_1^2 \xi^2 + (n_1 + n_2)^2}, \quad B_2 = \frac{\xi}{(m_1 + m_2)^2 \xi^2 + n_2^2},$$

$$C_2 = \frac{\xi}{(m_1 - m_2)^2 \xi^2 + n_2^2}, \quad D_2 = \frac{\xi}{m_1^2 \xi^2 + (n_1 - n_2)^2}, \quad E_2 = \frac{\xi}{m_1^2 \xi^2 + n_2^2},$$

$$A_3 = \frac{\xi}{m_2^2 \xi^2 + (n_1 + n_2)^2}, \quad B_3 = \frac{\xi}{(m_1 + m_2)^2 \xi^2 + n_1^2},$$

$$C_3 = \frac{\xi}{(m_1 - m_2)^2 \xi^2 + n_1^2}, \quad D_3 = \frac{\xi}{m_2^2 \xi^2 + (n_1 - n_2)^2}, \quad E_3 = \frac{\xi}{m_2^2 \xi^2 + n_1^2}$$

2) Две защемленные грани и две шарнирно опертые (ССКС)

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) = Eh \left\{ \sum_i \sum_p \sum_q \phi_{ipq} X_{ip} Y_{iq} x_i(t)^2 + \left[\frac{1}{4} (A_4^2 M_{12} N_{11} - D_4^2 M_{22} N_{21} - \right. \right. \\ \left. \left. - B_4^2 M_{12} N_{21} + C_4^2 M_{22} N_{11}) + \frac{m_1^2 n_2^2}{2} (A_5^2 X_{11} N_{21} - B_5^2 X_{11} N_{11}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m_2^2 n_1^2}{2} (C_5^2 X_{21} N_{21} - D_5^2 X_{21} N_{11}) \right] x_1(t) x_2(t) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

$$\text{где } A_4 = \frac{\xi(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{4(m_1 + m_2)^2 \xi^2 + (n_1 + n_2)^2}, \quad B_4 = \frac{\xi(m_1 n_2 + m_2 n_1)}{4(m_1 + m_2)^2 \xi^2 + (n_1 - n_2)^2},$$

$$C_4 = \frac{\xi(m_1 n_2 + m_2 n_1)}{4(m_1 - m_2)^2 \xi^2 + (n_1 + n_2)^2}, \quad D_4 = \frac{\xi(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{4(m_1 - m_2)^2 \xi^2 + (n_1 - n_2)^2},$$

$$A_5 = \frac{\xi}{4m_1^2 \xi^2 + (n_1 - n_2)^2}, \quad B_5 = \frac{\xi}{4m_1^2 \xi^2 + (n_1 + n_2)^2},$$

$$C_5 = \frac{\xi}{4m_2^2 \xi^2 + (n_1 - n_2)^2}, \quad D_5 = \frac{\xi}{4m_2^2 \xi^2 + (n_1 + n_2)^2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Выражения для коэффициентов при нелинейных членах для различных типов граничных условий

1) Шарнирное опирание по контуру (SSSS)

$$\alpha_1 = -6(1 - \nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b K_{11}^2 L_{11}^2 \left[\frac{m_1^4}{a^4} Y_{12} + \frac{n_1^4}{b^4} X_{12} \right] dx dy, \quad (\text{B.1})$$

$$\alpha_3 = -6(1 - \nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b K_{21}^2 L_{21}^2 \left[\frac{m_2^4}{a^4} Y_{22} + \frac{n_2^4}{b^4} X_{22} \right] dx dy \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & -6(1 - \nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ K_{11} L_{11} \left[\frac{m_1^2 m_2^2}{a^4} Y_{22} + \frac{n_1^2 n_2^2}{b^4} X_{22} \right] + \right. \\ & \frac{2m_2^2}{a^2 b^2} K_{21} L_{21} M_{11} \times \left[-A_1^2 (n_1 + n_2)^2 N_{11} + B_1^2 (n_1 - n_2)^2 N_{21} \right] + \\ & + \frac{2m_2^2}{a^2 b^2} K_{21} L_{21} M_{21} \left[-D_1^2 (n_1 - n_2)^2 N_{21} + C_1^2 (n_1 + n_2)^2 N_{11} \right] + \\ & + \frac{2n_2^2}{a^2 b^2} K_{21} L_{21} N_{11} \left[B_1^2 (m_1 - m_2)^2 M_{21} - A_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{11} \right] + \\ & + \frac{2n_2^2}{a^2 b^2} K_{21} L_{21} N_{21} \left[-D_1^2 (m_1 - m_2)^2 \cos M_{11} + C_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{21} \right] - \\ & - \frac{4m_2 n_2}{a^2 b^2} X_{21} Y_{21} (m_1 + m_2) S_{11} \left[-A_1^2 (n_1 + n_2) T_{11} + B_1^2 (n_1 - n_2) T_{21} \right] - \\ & \left. - \frac{4m_2 n_2}{a^2 b^2} X_{21} Y_{21} (m_1 - m_2) S_{21} \left[-D_1^2 (n_1 - n_2) T_{21} + C_1^2 (n_1 + n_2) T_{11} \right] \right\} K_{11} L_{11} dx dy, \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4 = & -6(1-\nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ K_{21}L_{21} \left[\frac{m_1^2 m_2^2}{a^4} Y_{12} + \frac{n_1^2 n_2^2}{b^4} X_{12} \right] + \right. \\
& + \frac{2m_1^2}{a^2 b^2} K_{11}L_{11}M_{11} \left[-A_1^2 (n_1 + n_2)^2 N_{11} + B_1^2 (n_1 - n_2)^2 N_{21} \right] + \\
& + \frac{2m_1^2}{a^2 b^2} K_{11}L_{11}M_{21} \left[-D_1^2 (n_1 - n_2)^2 N_{21} + C_1^2 (n_1 + n_2)^2 N_{11} \right] + \\
& + \frac{2n_1^2}{a^2 b^2} K_{11}L_{11}N_{11} \left[B_1^2 (m_1 - m_2)^2 M_{21} - A_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{11} \right] + \\
& + \frac{2n_1^2}{a^2 b^2} K_{11}L_{11}N_{21} \left[-D_1^2 (m_1 - m_2)^2 M_{21} + C_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{11} \right] - \\
& - \frac{4m_1 n_1}{a^2 b^2} X_{11}Y_{11} (m_1 + m_2) S_{11} \left[-A_1^2 (n_1 + n_2) T_{11} + B_1^2 (n_1 - n_2) T_{21} \right] - \\
& \left. - \frac{4m_1 n_1}{a^2 b^2} X_{11}Y_{11} (m_1 - m_2) S_{21} \left[-D_1^2 (n_1 - n_2) T_{21} + C_1^2 (n_1 + n_2) T_{11} \right] \right\} K_{21}L_{21} dx dy, \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

где $K_{ip} = \sin \frac{\pi p m_i x}{a}$, $L_{iq} = \sin \frac{\pi q n_i y}{b}$, $S_{1p} = \sin \frac{\pi p (m_1 + m_2) x}{a}$, $S_{2p} = \sin \frac{\pi p (m_1 - m_2) x}{a}$, $T_{1q} = \sin \frac{\pi q (n_1 + n_2) y}{b}$, $T_{2q} = \sin \frac{\pi q (n_1 - n_2) y}{b}$.

2) Жесткое защемление по контуру (CCCC)

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = & \frac{8}{3}(1-\nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[\frac{m_1^4}{a^4} X_{12} (1 - Y_{12}) (Y_{12} - \frac{Y_{14}}{4}) + \frac{n_1^4}{b^4} Y_{12} (1 - X_{12}) (X_{12} - \frac{X_{14}}{4}) \right] - \right. \\
& + \frac{m_1^4 n_1^4}{a^2 b^2} \left[A^2 X_{14} Y_{12} (X_{12} + 4Y_{12} - 5X_{12} Y_{12} + 4K_{12} L_{12}) - B^2 X_{12} Y_{12} (X_{12} + 2K_{12} L_{12} + \right. \\
& \left. \left. + Y_{12} - 2X_{12} Y_{12}) + C^2 X_{12} Y_{14} (4X_{12} + Y_{12} - 5X_{12} Y_{12} + 4K_{12} L_{12}) \right] \right\} (1 - X_{12})(1 - Y_{12}) dx dy, \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 = & \frac{8}{3}(1-\nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[\frac{m_2^4}{a^4} X_{22} (1 - Y_{22}) (Y_{22} - \frac{Y_{24}}{4}) + \frac{n_2^4}{b^4} Y_{22} (1 - X_{22}) (X_{22} - \frac{X_{24}}{4}) \right] - \right. \\
& + \frac{m_2^4 n_2^4}{a^2 b^2} \left[D^2 X_{24} Y_{22} (X_{22} + 4Y_{22} - 5X_{22} Y_{22} + 4K_{22} L_{22}) - E^2 X_{22} Y_{22} (X_{22} + 2K_{22} L_{22} + \right. \\
& \left. \left. + Y_{22} - 2X_{22} Y_{22}) + F^2 X_{22} Y_{24} (4X_{22} + Y_{22} - 5X_{22} Y_{22} + 4K_{22} L_{22}) \right] \right\} (1 - X_{22})(1 - Y_{22}) dx dy, \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 = & \frac{8}{3}(1-v^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[\frac{m_1^2 m_2^2}{a^4} X_{12}(1-Y_{12})(Y_{22} - \frac{Y_{24}}{4}) + \frac{n_1^2 n_2^2}{b^4} Y_{12}(1-X_{12})(X_{22} - \frac{X_{24}}{4}) \right] + \right. \\
& + \frac{m_1^2 m_2^2 n_2^4}{a^2 b^2} X_{12}(1-Y_{12}) \left[D^2 X_{24} Y_{22} - E^2 X_{22} Y_{22} + 4F^2 X_{22} Y_{24} \right] + \\
& + \frac{n_1^2 n_2^2 m_2^4}{a^2 b^2} Y_{12}(1-X_{12}) \left[4D^2 X_{24} Y_{22} - E^2 X_{22} Y_{22} + F^2 X_{22} Y_{24} \right] + \\
& + \frac{2m_1 n_1 m_2^3 n_2^3}{a^2 b^2} K_{12} L_{12} \left[2D^2 K_{24} L_{22} - E^2 K_{22} L_{22} + 2F^2 K_{22} L_{24} \right] - \\
& - \frac{m_2^2}{2a^2 b^2} X_{22}(1-Y_{22}) \left[A_1^2 (n_1 + n_2)^2 M_{12} N_{12} + B_1^2 (n_1 - n_2)^2 M_{12} N_{22} + \right. \\
& + C_1^2 (n_1 + n_2)^2 M_{22} N_{12} + D_1^2 (n_1 - n_2)^2 M_{22} N_{22} - 2B_2^2 m_1^2 n_2^4 M_{12} Y_{22} - \\
& - 2C_2^2 m_1^2 n_2^4 M_{22} Y_{22} + 2A_2^2 m_1^2 n_2^2 (n_1 + n_2)^2 N_{12} X_{12} + 2D_2^2 m_1^2 n_2^2 (n_1 - n_2)^2 N_{22} X_{12} + \\
& + 2E_2^2 m_1^2 n_2^4 X_{12} Y_{22} - 2B_3^2 m_2^2 n_1^4 M_{12} Y_{12} - 2C_3^2 m_2^2 n_1^4 M_{22} Y_{12} + \\
& \left. + 2A_3^2 m_2^2 n_1^2 (n_1 + n_2)^2 N_{12} X_{22} + 2D_3^2 m_2^2 n_1^2 (n_1 - n_2)^2 N_{22} X_{22} + 2E_3^2 m_2^2 n_1^4 X_{22} Y_{12} \right] - \\
& - \frac{n_2^2}{2a^2 b^2} Y_{22}(1-X_{22}) \left[A_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} N_{12} + B_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} N_{22} + \right. \\
& + C_1^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} N_{12} + D_1^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} N_{22} - 2B_2^2 m_1^2 n_2^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} Y_{22} - \\
& - 2C_2^2 m_1^2 n_2^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} Y_{22} + 2A_2^2 m_1^4 n_2^2 N_{12} X_{12} + 2D_2^2 m_1^4 n_2^2 N_{22} X_{12} + \\
& + 2E_2^2 m_1^4 n_2^2 X_{12} Y_{22} - 2B_3^2 m_2^2 n_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} Y_{12} - 2C_3^2 m_2^2 n_1^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} Y_{12} + \\
& \left. + 2A_3^2 m_2^4 n_1^2 N_{12} X_{22} + 2D_3^2 m_2^4 n_1^2 N_{22} X_{22} + 2E_3^2 m_2^4 n_1^2 X_{22} Y_{12} \right] - \\
& - \frac{m_2 n_2}{2a^2 b^2} K_{22} L_{22} \left[B_1^2 (m_1 + m_2)(n_1 - n_2) S_{12} T_{22} + A_1^2 (m_1 + m_2)(n_1 + n_2) S_{12} T_{12} + \right. \\
& + C_1^2 (m_1 - m_2)(n_1 + n_2) S_{22} T_{12} + D_1^2 (m_1 - m_2)(n_1 - n_2) S_{22} T_{22} - \\
& - 2B_2^2 m_1^2 n_2^3 (m_1 + m_2) S_{12} L_{22} - 2C_2^2 m_1^2 n_2^3 (m_1 - m_2) S_{22} L_{22} + 2A_2^2 m_1^3 n_2^2 (n_1 + n_2) T_{12} K_{12} + \\
& + 2D_2^2 m_1^3 n_2^2 (n_1 - n_2) T_{22} K_{12} + 2E_2^2 m_1^3 n_2^3 K_{12} L_{22} - 2B_3^2 m_2^2 n_1^3 (m_1 + m_2) S_{12} L_{12} \\
& - 2C_3^2 m_2^2 n_1^3 (m_1 - m_2) S_{22} L_{12} + 2A_3^2 m_2^3 n_1^2 (n_1 + n_2) T_{12} K_{22} + \\
& \left. + 2D_3^2 m_2^3 n_1^2 (n_1 - n_2) T_{22} K_{22} + 2E_3^2 m_2^3 n_1^3 K_{22} L_{12} \right] \left. \right\} (1-X_{12})(1-Y_{12}) dx dy, \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4 = & \frac{8}{3}(1-\nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[\frac{m_1^2 m_2^2}{a^4} X_{22}(1-Y_{22}) \left(Y_{12} - \frac{Y_{14}}{4} \right) + \frac{n_1^2 n_2^2}{b^4} Y_{22}(1-X_{22}) \left(X_{12} - \frac{X_{14}}{4} \right) \right] + \right. \\
& + \frac{m_1^2 m_2^2 n_1^4}{a^2 b^2} X_{22}(1-Y_{22}) \left[A^2 X_{14} Y_{12} - B^2 X_{12} Y_{12} + 4C^2 X_{12} Y_{14} \right] + \\
& + \frac{n_1^2 n_2^2 m_1^4}{a^2 b^2} Y_{22}(1-X_{22}) \left[4A^2 X_{14} Y_{12} - B^2 X_{12} Y_{12} + C^2 X_{12} Y_{14} \right] + \\
& + \frac{2m_2 n_2 m_1^3 n_1^3}{a^2 b^2} K_{22} L_{22} \left[2A^2 K_{14} L_{12} - B^2 K_{12} L_{12} + 2C^2 K_{12} L_{14} \right] - \\
& - \frac{m_1^2}{2a^2 b^2} X_{12}(1-Y_{12}) \left[A_1^2 (n_1 + n_2)^2 M_{12} N_{12} + B_1^2 (n_1 - n_2)^2 M_{12} N_{22} + \right. \\
& + C_1^2 (n_1 + n_2)^2 M_{22} N_{12} + D_1^2 (n_1 - n_2)^2 M_{22} N_{22} - 2B_2^2 m_1^2 n_2^4 M_{12} Y_{22} - \\
& - 2C_2^2 m_1^2 n_2^4 M_{22} Y_{22} + 2A_2^2 m_1^2 n_2^2 (n_1 + n_2)^2 N_{12} X_{12} + 2D_2^2 m_1^2 n_2^2 (n_1 - n_2)^2 N_{22} X_{12} + \\
& + 2E_2^2 m_1^2 n_2^4 X_{12} Y_{22} - 2B_3^2 m_2^2 n_1^4 M_{12} Y_{12} - 2C_3^2 m_2^2 n_1^4 M_{22} Y_{12} + \\
& + 2A_3^2 m_2^2 n_1^2 (n_1 + n_2)^2 N_{12} X_{22} + 2D_3^2 m_2^2 n_1^2 (n_1 - n_2)^2 N_{22} X_{22} + 2E_3^2 m_2^2 n_1^4 X_{22} Y_{12} \left. \right] - \\
& - \frac{n_1^2}{2a^2 b^2} Y_{12}(1-X_{12}) \left[A_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} N_{12} + B_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} N_{22} + \right. \\
& + C_1^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} N_{12} + D_1^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} N_{22} - 2B_2^2 m_1^2 n_2^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} Y_{22} - \\
& - 2C_2^2 m_1^2 n_2^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} Y_{22} + 2A_2^2 m_1^4 n_2^2 N_{12} X_{12} + 2D_2^2 m_1^4 n_2^2 N_{22} X_{12} + \\
& + 2E_2^2 m_1^4 n_2^4 X_{12} Y_{22} - 2B_3^2 m_2^2 n_1^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} Y_{12} - 2C_3^2 m_2^2 n_1^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} Y_{12} + \\
& + 2A_3^2 m_2^4 n_1^2 N_{12} X_{22} + 2D_3^2 m_2^4 n_1^2 N_{22} X_{22} + 2E_3^2 m_2^4 n_1^2 X_{22} Y_{12} \left. \right] - \\
& - \frac{m_1 n_1}{2a^2 b^2} K_{12} L_{12} \left[B_1^2 (m_1 + m_2)(n_1 - n_2) S_{12} T_{22} + A_1^2 (m_1 + m_2)(n_1 + n_2) S_{12} T_{12} + \right. \\
& + C_1^2 (m_1 - m_2)(n_1 + n_2) S_{22} T_{12} + D_1^2 (m_1 - m_2)(n_1 - n_2) S_{22} T_{22} - \\
& - 2B_2^2 m_1^2 n_2^3 (m_1 + m_2) S_{12} L_{22} - 2C_2^2 m_1^2 n_2^3 (m_1 - m_2) S_{22} L_{22} + 2A_2^2 m_1^3 n_2^2 (n_1 + n_2) T_{12} K_{12} + \\
& + 2D_2^2 m_1^3 n_2^2 (n_1 - n_2) T_{22} K_{12} + 2E_2^2 m_1^3 n_2^3 K_{12} L_{22} - 2B_3^2 m_2^2 n_1^3 (m_1 + m_2) S_{12} L_{12} - \\
& - 2C_3^2 m_2^2 n_1^3 (m_1 - m_2) S_{22} L_{12} + 2A_3^2 m_2^3 n_1^2 (n_1 + n_2) T_{12} K_{22} + \\
& + 2D_3^2 m_2^3 n_1^2 (n_1 - n_2) T_{22} K_{22} + 2E_3^2 m_2^3 n_1^3 K_{22} L_{12} \left. \right\} (1-X_{22})(1-Y_{22}) dx dy, \\
\end{aligned}$$

(B.8)

$$\text{где } A^2 = \frac{32\varphi_{142}}{m_1^2 n_1^2}, B^2 = \frac{32\varphi_{122}}{m_1^2 n_1^2}, C^2 = \frac{32\varphi_{124}}{m_1^2 n_1^2}, D^2 = \frac{32\varphi_{242}}{m_2^2 n_2^2}, E^2 = \frac{32\varphi_{222}}{m_2^2 n_2^2}, F^2 = \frac{32\varphi_{224}}{m_2^2 n_2^2}.$$

3) Две защемленные грани и две шарнирно опертые (CSCS)

$$\alpha_1 = 8(1-\nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ X_{12} L_{11} \left[\frac{m_1^4}{a^4} Y_{12} + \frac{n_1^4}{4b^4} (X_{12} - 1) \right] - \frac{n_1^4}{16b^4} X_{14} L_{11} (X_{12} - 1) - \right. \\ \left. - \frac{m_1^4 n_1^4}{4a^2 b^2} G^2 L_{11} X_{12} Y_{12} (5X_{12} - 1) - \frac{m_1^4 n_1^4}{a^2 b^2} G^2 K_{12}^2 L_{12} Y_{11} \right\} (1 - X_{12}) L_{11} dx dy, \quad (B.9)$$

$$\alpha_3 = 8(1-\nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ X_{22} L_{21} \left[\frac{m_2^4}{a^4} Y_{22} + \frac{n_2^4}{4b^4} (X_{22} - 1) \right] - \frac{n_2^4}{16b^4} X_{24} L_{21} (X_{22} - 1) - \right. \\ \left. - \frac{m_2^4 n_2^4}{4a^2 b^2} H^2 L_{21} X_{22} Y_{22} (5X_{22} - 1) - \frac{m_2^4 n_2^4}{a^2 b^2} H^2 K_{22}^2 L_{22} Y_{21} \right\} (1 - X_{22}) L_{21} dx dy, \quad (B.10)$$

$$\alpha_2 = 8(1-\nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[\frac{m_1^2 m_2^2}{a^4} X_{12} L_{11} Y_{22} + \frac{n_1^2 n_2^2}{4b^4} L_{11} (1 - X_{12}) (X_{22} - \frac{X_{24}}{4}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{m_2^2 n_2^2}{4a^2 b^2} H^2 L_{11} X_{22} Y_{22} (4m_1^2 n_2^2 X_{12} - n_1^2 m_2^2 (1 - X_{12})) - \frac{m_1 n_1 m_2^3 n_2^3}{a^2 b^2} H^2 K_{12} Y_{11} K_{22} L_{22} - \right. \\ \left. - \frac{2m_2^2}{a^2 b^2} X_{22} L_{21} \left[N_{11} (n_1 + n_2)^2 (2B_5^2 m_1^2 n_2^2 X_{12} + 2D_5^2 m_2^2 n_1^2 X_{22} - A_4^2 M_{12} - C_4^2 M_{22}) + \right. \right. \\ \left. \left. + N_{21} (n_1 - n_2)^2 (B_4^2 M_{12} + D_4^2 M_{21} - 2C_5^2 m_2^2 n_1^2 X_{22} - 2A_5^2 m_1^2 n_2^2 X_{12}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{2n_2^2}{a^2 b^2} (1 - X_{22}) L_{21} \left[-A_4^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} N_{11} + B_4^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} N_{21} - \right. \right. \\ \left. \left. - C_4^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} N_{11} + \frac{1}{4} D_4^2 (m_1 - m_2)^2 M_{21} N_{22} + 2B_5^2 m_1^4 n_2^2 X_{12} N_{11} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2C_5^2 m_2^4 n_1^2 X_{22} N_{21} - 2A_5^2 m_1^4 n_2^2 N_{21} X_{12} + 2D_5^2 m_2^4 n_1^2 N_{11} X_{22} \right] + \right. \\ \left. + \frac{4m_2 n_2}{a^2 b^2} K_{22} Y_{21} \left[-B_4^2 (m_1 + m_2) (n_1 - n_2) S_{12} T_{21} + A_4^2 (m_1 + m_2) (n_1 + n_2) S_{12} T_{11} + \right. \right. \\ \left. \left. + C_4^2 (m_1 - m_2) (n_1 + n_2) S_{22} T_{11} - D_4^2 (m_1 - m_2) (n_1 - n_2) S_{12} T_{22} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2B_5^2 m_1^3 n_2^2 (n_1 + n_2) T_{11} K_{12} + 2C_5^2 m_2^3 n_1^2 (n_1 - n_2) T_{21} K_{22} + 2A_5^2 m_1^3 n_2^2 (n_1 - n_2) T_{21} K_{12} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2D_5^2 m_2^3 n_1^2 (n_1 + n_2) T_{11} K_{22} \right] \right\} (1 - X_{12}) L_{11} dx dy, \quad (B.11)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4 = & 8(1-\nu^2)h^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[\frac{m_1^2 m_2^2}{a^4} X_{22} L_{21} Y_{12} + \frac{n_1^2 n_2^2}{4b^4} L_{21} (1-X_{22}) \left(X_{12} - \frac{X_{14}}{4} \right) \right] - \right. \\
& - \frac{m_1^2 n_1^2}{4a^2 b^2} G^2 L_{21} X_{12} Y_{12} \left(4m_2^2 n_1^2 X_{22} - n_2^2 m_1^2 (1-X_{22}) \right) - \frac{m_1^3 n_1^3 m_2 n_2}{4a^2 b^2} G^2 K_{22} Y_{21} K_{12} L_{12} \\
& - \frac{2m_1^2}{a^2 b^2} X_{12} L_{11} \left[N_{11} (n_1 + n_2)^2 \left(2B_5^2 m_1^2 n_2^2 X_{12} + 2D_5^2 m_2^2 n_1^2 X_{22} - A_4^2 M_{12} - C_4^2 M_{22} \right) + \right. \\
& + N_{21} (n_1 - n_2)^2 \left(B_4^2 M_{12} + D_4^2 M_{21} - 2C_5^2 m_2^2 n_1^2 X_{22} - 2A_5^2 m_1^2 n_2^2 X_{12} \right) \left. \right] - \\
& + \frac{2n_1^2}{a^2 b^2} (1-X_{12}) L_{11} \left[-A_4^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} N_{11} + B_4^2 (m_1 + m_2)^2 M_{12} N_{21} - \right. \\
& - C_4^2 (m_1 - m_2)^2 M_{22} N_{11} + \frac{1}{4} D_4^2 (m_1 - m_2)^2 M_{21} N_{22} + 2B_5^2 m_1^4 n_2^2 X_{12} N_{11} - \\
& - 2C_5^2 m_2^4 n_1^2 X_{22} N_{21} - 2A_5^2 m_1^4 n_2^2 N_{21} X_{12} + 2D_5^2 m_2^4 n_1^2 N_{11} X_{22} \left. \right] + \\
& + \frac{4m_1 n_1}{a^2 b^2} K_{12} Y_{11} \left[-B_4^2 (m_1 + m_2) (n_1 - n_2) S_{12} T_{21} + A_4^2 (m_1 + m_2) (n_1 + n_2) S_{12} T_{11} + \right. \\
& + C_4^2 (m_1 - m_2) (n_1 + n_2) S_{22} T_{11} - D_4^2 (m_1 - m_2) (n_1 - n_2) S_{12} T_{22} - \\
& - 2B_5^2 m_1^3 n_2^2 (n_1 + n_2) T_{11} K_{12} + 2C_5^2 m_2^3 n_1^2 (n_1 - n_2) T_{21} K_{22} + 2A_5^2 m_1^3 n_2^2 (n_1 - n_2) T_{21} K_{12} \quad (\text{B.12}) \\
& \left. - 2D_5^2 m_2^3 n_1^2 (n_1 + n_2) T_{11} K_{22} \right] \left. \right\} (1-X_{22}) L_{21} dx dy,
\end{aligned}$$

где $G^2 = -\frac{32\varphi_{122}}{m_1^2 n_1^2}$, $H^2 = -\frac{32\varphi_{222}}{m_2^2 n_2^2}$.