

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Московский Политех)

На правах рукописи



ФОМИН Денис Юрьевич

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ
ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ И НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ
ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор Бондарь В.С.

Москва – 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, АНАЛИЗИРУЕМЫЕ ПРИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ	14
1.1 Основные положения и уравнения теорий пластичности	14
1.2 Базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций..	18
1.3 Материальные функции конструкционных сталей и сплавов	26
1.4 Уравнения моделей для частных случаев деформирования	31
1.5 Метод расчета кинетики напряженно-деформированного состояния	34
2 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ ПО ПЛОСКИМ ТРАЕКТОРИЯМ ДЕФОРМАЦИЙ	41
2.1 Многозвенные ломаные траектории деформаций в виде квадрата и треугольника.....	41
2.2 Криволинейные траектории деформаций постоянной кривизны в виде окружностей.....	55
2.3 Криволинейные траектории деформаций переменной кривизны в виде астроида и спирали.....	67
3 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ТРАЕКТОРИЯМ ДЕФОРМАЦИЙ	82
3.1 Винтовые траектории деформаций постоянной кривизны и кручения	82
3.2 Винтовые траектории деформаций переменной кривизны и кручения....	98
4 ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, АНАЛИЗИРУЕМЫЕ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ	114

4.1	Основные положения и уравнения теорий пластичности	114
4.2	Базовый эксперимент и метод идентификации	116
4.3	Материальные функции конструкционных сталей и сплавов	124
4.4	Моделирование процессов одноосного нагружения.....	127
5	СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ.....	131
5.1	Экспериментальные исследования посадки петли пластического гистерезиса при несимметричном жестком циклическом нагружении	131
5.2	Теории пластичности при несимметричном жестком циклическом нагружении	133
5.3	Экспериментальные исследования вышагивания петли пластического гистерезиса при несимметричном мягком циклическом нагружении	139
5.4	Теории пластичности при несимметричных мягких циклических нагружениях.....	141
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	145
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	147
	ПРИЛОЖЕНИЕ А (обязательное). Код программы для расчета кинетики напряженно-деформированного состояния	164

ВВЕДЕНИЕ

В отдельных элементах ответственных конструкций ракетно-космической и авиационной техники, тепловой и ядерной энергетики, химической промышленности и других областей машиностроения, работающих в экстремальных условиях эксплуатации, могут возникать процессы циклического упругопластического деформирования. Эти процессы могут иметь как пропорциональный, так и непропорциональный характер нагружения. В таких условиях деформирования возникают различные эффекты, влияющие на кинетику напряженно-деформированного состояния материала.

В случае сжатия после предварительного растяжения в материале возникает эффект Баушингера, который определяется как изменение предела текучести материала после его предварительного нагружения в противоположном направлении [1, 7, 28, 122]. При пропорциональном циклическом нагружении проявляются эффекты упрочнения или разупрочнения материала, то есть у материалов возрастает или уменьшается сопротивление пластическому деформированию [157, 175]. У некоторых материалов наблюдается смешанное поведение. Упрочнение и разупрочнение наблюдается на протяжении некоторого числа циклов, после чего, как правило, происходит стабилизация свойств материала. При жестком циклическом нагружении (контролируемый размах деформаций) при упрочнении материала наблюдается увеличение размаха напряжений, при разупрочнении – уменьшение. При мягком циклическом нагружении (контролируемый размах напряжений) при упрочнении наблюдается уменьшение размаха деформаций, а при разупрочнении – увеличение.

При несимметричных режимах нагружения для некоторых материалов наблюдаются эффекты посадки и вышагивания петли пластического гистерезиса [11]. Посадка петли проявляется при жестком несимметричном циклическом нагружении и показывает смещение петли вдоль оси напряжений, при этом среднее напряжение от цикла к циклу стремится к нулю [1]. Вышагивание проявляется при мягком несимметричном циклическом нагружении и

заключается в смещении петли вдоль оси деформации, что приводит к одностороннему накоплению деформаций [11, 151].

При непропорциональном (сложном) нагружении наблюдаются эффекты запаздывания векторных и скалярных свойств [63, 67]. При запаздывании векторных свойств ориентация вектора напряжений определяется лишь некоторым конечным участком траектории деформаций, который является следом запаздывания. Запаздывание скалярных свойств проявляется в нырке кривой деформирования сразу после излома траектории деформаций и приближению к значению напряжений, достигнутому до нырка по исчерпанию скалярного следа запаздывания.

Экспериментальному исследованию процессов поведения материалов при пропорциональном и непропорциональном циклическом нагружении посвящены работы И. Баушингера [129, 130], Л. Берстоу [131], Г. Мазинга [161], Г. Закса и Х. Шойи [178], Н.Н. Давиденкова [44], С.И. Ратнера и Ю.С. Данилова [108, 109], А.М. Жукова [48, 49], К.Я. Шульца [122], Д.М. Васильева [28], В.С. Ленского [87-89], Н.И. Марина [92, 93], Л.Ф. Коффина [145-148], И.М. Ройтмана и Я.Б. Фридмана [110], Р.М. Шнейдеровича [117-121], А.С. Вавакина [25-27], Д. Соси [112], Р.А. Васина [35-38], В.Г. Зубчанинова, Н.Л. Охлопкова и В.И. Гульяева [54, 55, 57-61], Г. Канга [152-156] и др.

Развитие теории пластичности и разработка определяющих уравнений описания процессов упругопластического деформирования имеет два основных направления. К первому направлению относятся различные варианты теории упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [66, 67]. Ко второму направлению относятся различные варианты теории пластического течения, базирующиеся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым [102, 103].

А.А. Ильюшиным было предложено изображать процессы нагружения и деформирования как траектории в пятимерных векторных пространствах напряжений и деформаций, им был разработан постулат изотропии и принцип запаздывания скалярных и векторных свойств. Принципиальным отличием от

большинства других моделей является то, что упругие и пластические деформации не разделяются.

В деформационной теории пластичности, связывающей напряжения и деформации, тело представляется как нелинейно упругое. Напряженное состояние тела не зависит от истории деформирования. Данный класс теорий успешно применяют для моделирования неупругого поведения материалов, обладающих свойством начальной изотропии.

Деформационные теории пластичности развивались в работах А.П. Гусенкова [42, 43], В.В. Москвитина [101], Н.А.Махутова, С.В. Серенсена и С.М. Шнейдеровича [111], И.А. Биргера и Б.Ф. Шора [6], Ю.М. Темиса и И.В. Пучкова [113, 114] и др.

Основные достоинства деформационной теории пластичности заключаются в ее простоте и возможности предсказания максимальных напряжений при монотонном пропорциональном нагружении. Основным недостатком теории заключается в ее неприменимости при непропорциональном (сложном) нагружении, а также в сложности переформулировки уравнений теории в случае смены направления пропорционального нагружения. Деформационные теории, как правило, применяются для решения определенных задач и являются трудно встраиваемыми в программные комплексы расчета напряженно-деформированного состояния конструкций.

На основе общей математической теории пластичности получила развитие теория процессов. Теория процессов успешно применяется для моделирования неупругого поведения материалов, обладающих начальной изотропией. Соотношения теории процессов конкретизируются путем выбора функционалов процесса для различных траекторий деформирования и ее соотношения являются весьма общими. Модели теории процессов развивались в работах В.Г. Зубчанинова [51, 54, 55, 60, 61], Р.А. Васина [30, 33, 36-38], В.С. Бондаря [19], А.А. Маркина и М.Ю. Соколовой [94], В.И. Малого [91], В.П. Дегтярева [47], А.М. Жукова [48, 49], И.Н. Молодцова [98, 99] и др.

В теориях течения деформации разделяются на упругую и пластическую составляющую. При этом напряжения описываются функцией упругих деформаций, а приращения пластических деформаций или скоростей пластических деформаций зависят от напряжений. В вариантах теории течения введена поверхность нагружения в пространстве напряжений, разделяющая области упругого и упругопластического деформирования. Основные достоинства теории течения заключаются в их универсальности и возможности описания эффектов, возникающих при циклическом пропорциональном и непропорциональном нагружениях, таких как эффект Баушингера, упрочнение или разупрочнение материалов в процессе нагружения, посадка и вышагивание петли упругопластического гистерезиса, эффекты запаздывания векторных и скалярных свойств при сложном нагружении. Модели теории течения допускают обобщение для учета эффектов, наблюдаемых при пластических деформациях таких как повреждаемость и усталостное разрушение, нагрев материала и зависимость пластических свойств от температуры.

Развитие теорий течения дано в работах А.Ю. Ишлинского [70, 71], В. Прагера [176], В.В. Новожилова и Ю.И. Кадашевича [73-78, 104], И.А. Биргера [6], В.С. Бондаря [8-18, 20-24, 123, 133-135], Ж. Леметра и Ж.-Л. Шабоша [137-144, 159, 160], Ю.Г. Коротких, Л.А. Игумнова и И.А. Волкова [39-41, 82, 83], И.В. Демьянушко и Ю.М. Темиса [45, 46, 115, 116], Ж. Бакхауза [125], З. Мруза [161], Б.Е. Мельникова [95], А.А. Мовчана [96], P.J. Armstrong и C.O. Frederick [127], N. Ohno и J.-D. Wang [172-174], E. Tanaka [179] и др.

В настоящее время разработано большое количество вариантов математических моделей, основанных на этой теории. Они нашли применение при проведении практических расчетов напряженно-деформированного состояния элементов изделий в том числе в современных конечно-элементных комплексах. При этом, наиболее распространенным вариантом теории течения является модель пластичности при изотропном упрочнении [80], в которой поверхность нагружения может только изотропно расширяться, не меняя свою форму и координаты положения центра поверхности, который находится в начале

координат. Такая модель не позволяет описывать эффекты, возникающие при циклическом деформировании.

Простейшим вариантом теории течения при комбинированном упрочнении, когда при деформировании поверхность нагружения смещается и изменяет свой размер, является модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова [70, 71, 74-78, 176]. Кинематическое упрочнение материала происходит по линейному закону. Широко распространенным для проведения расчетов циклических процессов деформирования является модель с нелинейным кинематическим упрочнением Армстронга-Фредерика-Кадашевича [72, 73, 124]. Модели пластичности с комбинированным упрочнением достаточно точно описывают эффект Баушингера.

Современным развитием теории течения является класс моделей пластичности с комбинированным, изотропным и кинематическим упрочнением. Развитию этих моделей посвящены работы [8-18, 80, 83, 137-144]. Они могут точно описывать эффекты циклического упрочнения и разупрочнения, посадки и вышагивания петли пластического гистерезиса. Такие модели различаются эволюционными уравнениями, описывающими смещение поверхности нагружения. Структура этих уравнений более сложная, чем в моделях Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова и Армстронга-Фредерика-Кадашевича. Эффекты упрочнения и разупрочнения в моделях, как правило, описываются изотропным упрочнением, а диаграммы деформирования – кинематическим.

В.С. Бондарем [9] было показано, что для моделирования процессов сложного циклического нагружения хорошо подходит трехчленная структура уравнений для смещения центра поверхности нагружения (микронапряжений [75-78], добавочных напряжений [6]). Для описания таких эффектов, как посадка и вышагивание петли пластического гистерезиса необходимо разделение микронапряжений на различные типы [14], каждый из которых позволяет описать тот или иной эффект.

Большинство этих моделей апробировано для решения конкретных задач, однако комплексные исследования по возможности их применения для расчета кинетики напряженно-деформированного состояния при пропорциональном и непропорциональном циклическом нагружении отсутствуют.

В настоящей работе проводится сравнение вариантов теорий пластичности, наиболее распространенных в практических расчетах кинетики напряженно-деформированного состояния. Эти теории позволяют описать вышеперечисленные эффекты циклического деформирования. Рассматриваются варианты теории: модель изотропного упрочнения, модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, модель Оно-Ванга, модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, модель Шабоша с тремя и четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений, модель Темиса-Худяковой, построенная на основе инвариантной теории пластичности, модель Бондаря с трехчленной структурой эволюционного уравнения для микронапряжений, модифицированная модель Бондаря с учетом и без учета микронапряжений Оно-Ванга.

Сравнение моделей проводится путем моделирования процессов деформирования при непропорциональном циклическом нагружении по плоским траекториям деформаций, при нагружении по пространственным траекториям деформаций и при несимметричном и нестационарном пропорциональном циклическом нагружении.

Актуальность работы обусловлена выбором моделей поведения материалов. Рассматриваемые варианты теорий являются широко используемыми в практике расчета напряженно-деформированного состояния высоконагруженных элементов конструкций. Сравнение выбранных моделей проводится на основе процессов пропорциональных и непропорциональных циклических нагружений, возникающих при эксплуатации отдельных элементов ответственных высоконагруженных конструкций.

Степень разработанности темы исследования. В настоящее время для моделирования процессов пропорциональных и непропорциональных циклических нагружений различными авторами разработан ряд математических

моделей. Верификация этих моделей проводится как правило по результатам эксперимента. Однако не всегда эти эксперименты охватывают весь спектр реализуемых в конструкциях режимов нагружения. Ошибки при моделировании процессов нагружений при таких режимах могут привести к завышенным или заниженным оценкам ресурса всей конструкции.

Цель работы. Проведение сравнительного анализа моделей упругопластического деформирования материалов и выбор модели, наиболее подходящей для моделирования процессов пропорционального и непропорционального нестационарного циклического нагружения.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач:

1) Выбор моделей пластичности, широко используемых при проведении моделирования процессов пропорциональных и непропорциональных циклических нагружений;

2) Выбор экспериментальных исследований по непропорциональному нагружению, в которых реализуется широкий ряд особенностей процесса упругопластического деформирования;

3) Разработка методов идентификации материальных параметров для всех выбранных моделей и определение материальных параметров применяемых в экспериментах материалов;

4) Разработка алгоритма и программы для проведения расчетов кинетики напряженно-деформированного состояния;

5) Проведение расчетов выбранных экспериментов с помощью моделей пластичности и сравнение результатов расчетов с результатами эксперимента при непропорциональном нагружении;

6) Проведение экспериментов по жесткому и мягкому несимметричному циклическому нагружению образцов материала 12X18H10T, в которых проявляются процессы посадки и вышагивания петли пластического гистерезиса;

7) Выбор моделей пластичности, позволяющих описывать эффекты посадки и вышагивания петли пластического гистерезиса. Разработка метода идентификации материальных параметров этих моделей;

8) Проведение расчетов экспериментов по несимметричному пропорциональному циклическому нагружению как жесткому, так и мягкому. Сравнение результатов расчетов и экспериментов;

9) Формулировка выводов об использовании различных моделей пластичности при расчете кинетики напряженно-деформированного состояния при различных режимах нагружения.

Научная новизна работы. На широком спектре программ экспериментальных исследований проведен сравнительный анализ наиболее используемых в практических расчетах вариантов теорий пластичности при пропорциональных и непропорциональных режимах циклического нагружения. Рассмотрены плоские и пространственные траектории деформаций, нестационарные несимметричные жесткие и мягкие режимы циклических нагружений. Расчеты кинетики напряженно-деформированного состояния при пропорциональных и непропорциональных циклических нагружениях для рассматриваемых теорий не проводились ранее. Проведены эксперименты по мягкому и жесткому циклическому нагружению с посадкой и вышагиванием петли пластического гистерезиса.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные результаты имеют теоретическую ценность и практическую значимость для моделирования процессов деформирования изделий, работающих в условиях пропорционального и непропорционального циклического нагружения. Полученные результаты позволят увеличить точность моделирования этих процессов.

Методология и методы исследования. Математическое моделирование процессов пропорциональных и непропорциональных циклических нагружений проводится с использованием разработанного программного обеспечения.

Экспериментальные исследования проведены на универсальной испытательной машине Zwick Z100.

Положения, выносимые на защиту:

1) Метод идентификации материальных функций для всех описанных теорий пластичности, материальные функции сплавов 40X16H9Г2С, 9Х2, 12Х18Н10Т, 12Х18Н9, SS304, стали 45;

2) Программа расчета кинетики напряженно-деформированного состояния;

3) Результаты сравнительного анализа теорий пластичности при непропорциональных циклических нагружениях по плоским (многозвенным ломаным, криволинейным постоянной и переменной кривизны) траекториям деформаций;

4) Результаты сравнительного анализа теорий пластичности при непропорциональных циклических нагружениях по пространственным (винтовые траектории постоянной и переменной кривизны и кручения) траекториям деформаций;

5) Результаты проведения экспериментов по жесткому и мягкому несимметричному пропорциональному циклическому нагружению сплава 12Х18Н10Т.

6) Результаты сравнительного анализа теорий пластичности при жестком и мягком несимметричном циклическом нагружении.

Достоверность результатов подтверждается проверкой полученных материальных функций всех рассматриваемых моделей по результатам расчета экспериментов по одноосному растяжению. Сравнением результатов всех расчетов с помощью выбранных вариантов теорий пластичности с результатами экспериментов при пропорциональных и непропорциональных циклических нагружениях.

Апробация работы. Основные результаты исследований были представлены на:

- 1) Машиноведение и инновации. XXIX Конференции молодых ученых и студентов (МИКМУС-2017) (Москва, 2017 г.);
- 2) Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2018» (Москва, 2018 г.);
- 3) IX международном научном симпозиуме «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела», посвященного 90-летию со дня рождения Заслуженного деятеля науки и техники РФ, профессора Зубчанинова Владимира Георгиевича (Тверь, 2020 г.);
- 4) Международной конференции «Наука и техника в дорожной отрасли» (Москва, 2021 г.);
- 5) Отраслевой научно-практической конференции «Космонавтика XXI века» (Королев, 2021 г.);
- 6) XXX Всероссийской школы-конференции «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2021 г.);
- 7) 64-ой Всероссийской научной конференции МФТИ (Москва, 2021 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 6 [22-24, 133-135] научных работах, в том числе в 4 статьях [24, 133-135], входящих в Перечень Российских рецензируемых научных изданий, и 3 [133-135] из которых в изданиях, индексируемых в базе Scopus.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, получены лично соискателем в процессе научной деятельности. Заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка источников и одного приложения. Общий объем работы составляет 174 страницы, в том числе 142 страницы основного текста, содержит 140 рисунков, 32 таблицы и 1 приложение. Список использованных источников включает в себя 180 наименований на 17 страницах. Объем приложения составляет 11 страниц.

1 ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, АНАЛИЗИРУЕМЫЕ ПРИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

1.1 Основные положения и уравнения теорий пластичности

Предполагается, что материал однороден и начально изотропен. В процессе упругопластического деформирования в материале может возникать только пластическая деформационная анизотропия. Рассматриваются малые деформации при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими и реологическими эффектами можно пренебречь.

Для всех вариантов теорий тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ и пластической $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (1.1.1)$$

Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})], \quad (1.1.2)$$

где E, ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона; σ_{ij} – тензор напряжений; $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ – среднее напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера.

Поверхность нагружения, ограничивающая область упругого деформирования, изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Уравнение поверхности нагружения для всех рассматриваемых вариантов теорий принимается в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C_p^2 = 0. \quad (1.1.3)$$

Здесь $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных [9] напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$ – девиатор напряжений; a_{ij} – девиатор микронапряжений (добавочных напряжений, остаточных микронапряжений) характеризует смещение поверхности нагружения, т.е. направленное (анизотропное) упрочнение. Скаляр C_p отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение.

Для определения тензора скоростей пластической деформации используется ассоциированный с (1.1.3) градиентальный закон течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda = \frac{3 s_{ij}^*}{2 \sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p. \quad (1.1.4)$$

Здесь $\sigma_u^* = \left(\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^* \right)^{\frac{1}{2}}$ – интенсивность активных напряжений;

$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}}$ – скорость накопленной пластической деформации.

Для всех рассматриваемых вариантов теорий изотропное упрочнение определяется зависимостью радиуса поверхности нагружения от накопленной пластической деформации

$$C_P = C_P(\varepsilon_{u^*}^p). \quad (1.1.5)$$

Для каждого варианта моделей пластичности зависимость (1.1.5) задается в виде табличной функции.

Рассматриваемые варианты отличаются эволюционными уравнениями для смещения центра поверхности нагружения (анизотропное упрочнение). Далее приводятся эволюционные уравнения для каждого варианта теории.

Модель изотропного упрочнения

Анизотропное упрочнение отсутствует и поверхность нагружения может только изменять свой размер. Поэтому значения микронапряжений равны 0:

$$a_{ij} = 0. \quad (1.1.6)$$

Модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова

Значения компонент тензора микронапряжений пропорциональны компонентам тензора пластических деформаций [70, 71, 75, 176].

$$a_{ij} = \frac{2}{3} g \varepsilon_{ij}^p, \quad (1.1.7)$$

где g – параметр материала.

Модель Оно-Ванга

Смещение центра поверхности нагружения согласно принципу суммирования микронапряжений Новожилова-Шабоша [76, 139] определяется

суммой независимых микронапряжений, каждое из которых описывается своим эволюционным уравнением, аналогичным уравнению Оно-Ванга [173, 174].

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_{ij}^{(m)}, \dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (1.1.8)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)}, \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \geq \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0, \end{cases} a_u^{(m)} = \left(\frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1.9)$$

где $\sigma_a^{(m)}, \beta^{(m)}$ – параметры материала, M – количество уравнений (далее в работе M принимается равным 10).

Модель Шабоса

В модели Шабоса [134-141, 156, 157] используется принцип суммирования микронапряжений Новожилова-Шабоса. Каждое микронапряжение описывается уравнением Армстронга-Фредерика-Кадашевича [72, 73, 124].

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_{ij}^{(m)}, \quad (1.1.10)$$

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} C^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma^{(m)} a_{ij}^{(m)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (1.1.11)$$

где $C^{(m)}$ и $\gamma^{(m)}$ – параметры материала. Далее в работе рассматривается вариант модели Шабоса при $M = 3$.

Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

Микронапряжения описываются с помощью эволюционного уравнения Армстронга-Фредерика-Кадашевича.

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma a_{ij} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (1.1.12)$$

где C и γ – параметры материала.

Модель Бондаря

В модели используется трехчленная структура эволюционного уравнения для микронапряжений [8-18, 21-22, 123, 133-135]:

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \left(\frac{2}{3} g_\varepsilon \varepsilon_{ij}^p + g_a a_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (1.1.13)$$

$$g = E_a + \beta \sigma_a, g_\varepsilon = E_a \beta, g_a = -\beta, \quad (1.1.14)$$

где E_a, σ_a и β – параметры материала.

Модель Темиса-Худяковой

Микронапряжения описываются с помощью уравнений [45, 46, 115, 116]:

$$a_{ij} = a_1(\varepsilon_{u^*}^p) \varepsilon_{ij}^p + a_2(\varepsilon_{u^*}^p) \xi_{ij}, \quad (1.1.15)$$

$$\dot{\xi}_{ij} = K(\sigma_u, \varepsilon_{u^*}^p) \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (1.1.16)$$

Здесь a_1, a_2, K – материальные функции.

Материальные функции, которые замыкают рассматриваемые модели пластичности, приведены в таблице 1.1.1.

Таблица 1.1.1. Материальные функции рассматриваемых моделей.

Название модели	Упругие параметры	Параметры анизотропного упрочнения	Функция изотропного упрочнения
Модель изотропного упрочнения	E, ν	-	$C_P(\varepsilon_{u^*}^p)$
Модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова		g	
Модель Оно-Ванга		$\beta^{(1)}, \sigma_a^{(1)}, \beta^{(2)}, \sigma_a^{(2)}, \dots, \beta^{(10)}, \sigma_a^{(10)}$	
Модель Шабоша		$C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$	
Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича		C, γ	
Модель Бондаря		E_a, σ_a, β	
Модель Темиса-Худяковой		$a_1(\varepsilon_{u^*}^p), a_2(\varepsilon_{u^*}^p), K(\sigma_u, \varepsilon_{u^*}^p)$	

1.2 Базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций

Базовым экспериментом, по которому в дальнейшем определяются материальные функции, является испытание при одноосном растяжении. По результатам эксперимента определяется диаграмма растяжения, связывающая значения деформации с соответствующими им значениями напряжения:

$$\sigma_{\text{раст}} = f(\varepsilon_{\text{раст}}). \quad (1.2.1)$$

Для определения параметров анизотропного упрочнения для моделей Оно-Ванга, Шабоша, Армстронга-Фредерика-Кадашевича и Бондаря используется диаграмма $\sigma_{\text{рпс}} = f(\varepsilon_{\text{рпс}})$ растяжения материала после предварительного сжатия до деформации порядка 1 %. В случае отсутствия экспериментальных данных диаграмма растяжения после предварительного сжатия определяется путем перестроения диаграммы растяжения по принципу Мазинга:

$$\varepsilon_{\text{рпс}} = 2 \cdot \varepsilon_{\text{раст}}, \quad (1.2.2)$$

$$\sigma_{\text{рпс}} = 2 \cdot \sigma_{\text{раст}}. \quad (1.2.3)$$

Упругие параметры E, ν для всех материалов определяются традиционными методами и приводятся в справочных материалах.

Для определения остальных параметров моделей диаграммы растяжения и растяжения после предварительного сжатия необходимо перестроить в координатах пластическая деформация – напряжение:

$$\varepsilon_{\text{раст}}^p = \varepsilon_{\text{раст}} - \frac{\sigma_{\text{раст}}}{E}, \quad (1.2.4)$$

$$\varepsilon_{\text{рпс}}^p = \varepsilon_{\text{рпс}} - \frac{\sigma_{\text{рпс}}}{E}. \quad (1.2.5)$$

Начальное значение размера поверхности нагружения $C_p^{(0)}$ для всех моделей пластичности определяется по диаграмме растяжения и заданному допуску на пластическую деформацию. Значение допуска выбрано равным 0,0002.

Далее по зависимостям $\sigma_{\text{раст}} = f(\varepsilon_{\text{раст}}^p)$ и $\sigma_{\text{рпс}} = f(\varepsilon_{\text{рпс}}^p)$ определяются параметры микронапряжений, для этого уравнения теорий пластичности необходимо записать для случая одноосного нагружения. В этом случае

компоненты тензоров напряжения, смещения центра поверхности нагружения, а также пластической деформации можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \sigma, & \sigma_{22} &= 0, & \sigma_{33} &= 0, & \sigma_{12} &= \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, \\
 a_{11} &= \frac{2}{3}a, & a_{22} &= -\frac{1}{3}a, & a_{33} &= -\frac{1}{3}a, & a_{12} &= a_{23} = a_{31} = 0, \\
 \varepsilon_{11}^p &= \varepsilon^p, & \varepsilon_{22}^p &= -\frac{1}{2}\varepsilon^p, & \varepsilon_{33}^p &= -\frac{1}{2}\varepsilon^p, & \varepsilon_{12}^p &= \varepsilon_{23}^p = \varepsilon_{31}^p = 0,
 \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

где σ , a , ε^p – напряжение, смещение поверхности нагружения и пластическая деформация вдоль оси нагружения.

Далее приводится метод определения параметров анизотропного упрочнения для каждой модели.

Модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова

В случае одноосного нагружения, уравнение (1.1.7) примет вид

$$a = g\varepsilon^p. \tag{1.2.7}$$

Параметр g определяет скорость линейного упрочнения материала. Для его определения участок линейного упрочнения диаграммы растяжения аппроксимируют по методу наименьших квадратов. Параметр g равняется угловому коэффициенту полученной линейной функции.

Модель Оно-Ванга

Для определения параметров анизотропного упрочнения модели Оно-Ванга используется метод, описанный в [173]. Из диаграммы пластического деформирования после предварительного сжатия $\sigma_{\text{рпс}} = f(\varepsilon_{\text{рпс}}^p)$ необходимо определить зависимость $a_{\text{рпс}} = f(\varepsilon_{\text{рпс}}^p)$. Для этого по заданному допуску на пластическую деформацию, равному 0,0002 определяется значение размера поверхности нагружения после предварительного сжатия $C_p^{(\text{рпс})}$. Тогда, пренебрегая изотропным упрочнением, можно определить значения микронапряжений:

$$a_{\text{рпс}} = \sigma_{\text{рпс}} - C_p^{(\text{рпс})}. \tag{1.2.8}$$

Далее зависимость $a_{\text{рпс}} = f(\varepsilon_{\text{рпс}}^p)$ разбивается на (M) частей, равных по величине изменению микронапряжения $a_{\text{рпс}}$ (Рисунок 1.2.1). Параметры анизотропного упрочнения, соответствующие модели Оно-Ванга, вычисляются по следующим формулам:

$$\beta^{(m)} = 2/\varepsilon_{m(\text{рпс})}^p \quad (m = 1, \dots, M); \quad (1.2.9)$$

$$\sigma_a^{(M)} = \frac{a_M^{\text{рпс}} - a_{M-1}^{\text{рпс}}}{\varepsilon_{(M)\text{рпс}}^p - \varepsilon_{(M-1)\text{рпс}}^p} \frac{1}{\beta^{(M)}} \quad (1.2.10)$$

$$\sigma_a^{(m)} = \frac{1}{\beta^{(m)}} \left[\frac{a_m^{\text{рпс}} - a_{m-1}^{\text{рпс}}}{\varepsilon_{(m)\text{рпс}}^p - \varepsilon_{(m-1)\text{рпс}}^p} - \frac{a_{m+1}^{\text{рпс}} - a_m^{\text{рпс}}}{\varepsilon_{(m+1)\text{рпс}}^p - \varepsilon_{(m)\text{рпс}}^p} \right]. \quad (1.2.11)$$

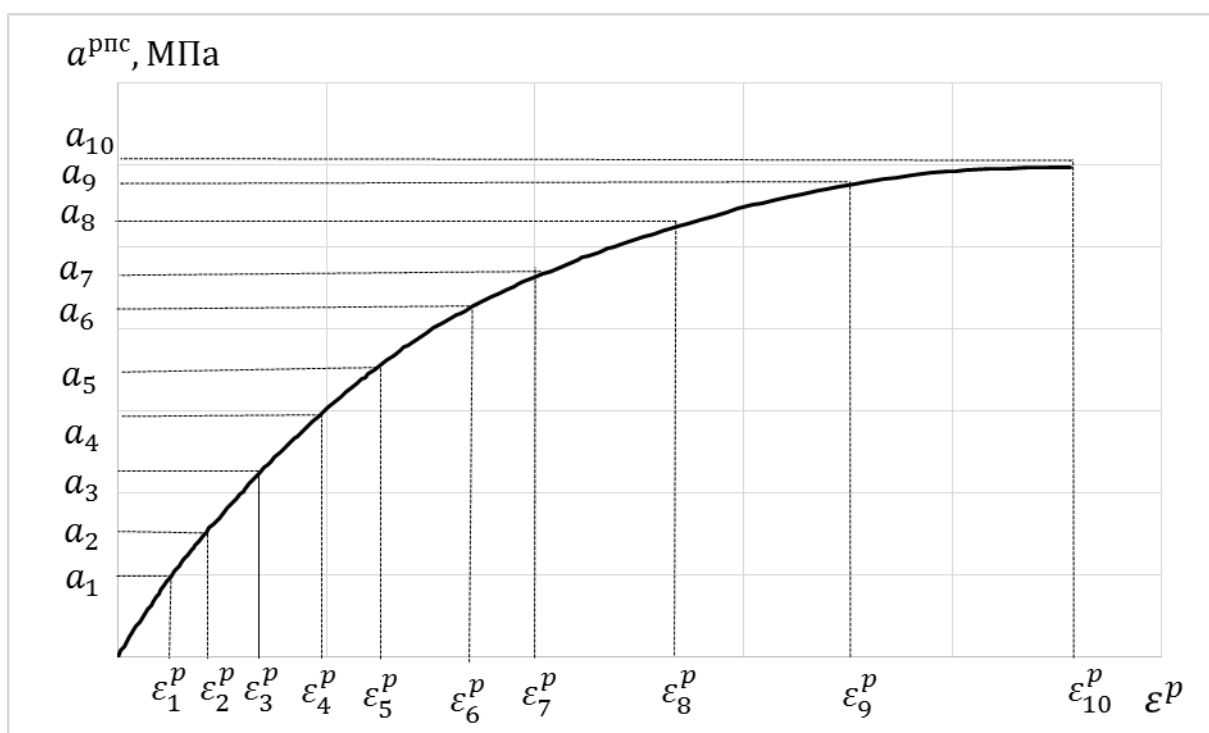


Рисунок 1.2.1 – Изменение микронапряжений

Модель Шабоса

Для определения параметров анизотропного упрочнения модели Шабоса необходимо проинтегрировать выражение (1.1.10) для испытания по растяжению после предварительного сжатия. В случае одноосного нагружения, выражение (1.1.10) можно записать в виде

$$\dot{a}^{(m)} = C^{(m)} \dot{\varepsilon}^p - \gamma^{(m)} a^{(m)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (1.2.12)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = |\dot{\varepsilon}^p|.$$

Тогда, для процесса предварительного сжатия, значения микронапряжений $a_{сж}^{(m)}$ определяются следующим уравнением:

$$a_{сж}^{(m)} = -\frac{C^{(m)}}{\gamma^{(m)}} \left(1 - e^{\gamma^{(m)} \varepsilon_{сж}^p}\right), \quad (1.2.13)$$

где $\varepsilon_{сж}^p$ – пластическая деформация сжатия (имеет отрицательное значение).

Уравнение, определяющее значения микронапряжений при растяжении после сжатия

$$a_{рпс}^{(m)} = \frac{C^{(m)}}{\gamma^{(m)}} \left[1 - \left(1 - \frac{\gamma^{(m)}}{C^{(m)}} A_{сж}^{(m)}\right) e^{-\gamma^{(m)} \varepsilon_{рпс}^p}\right], \quad (1.2.14)$$

где $A_{сж}^{(m)}$ – значение микронапряжений при сжатии, определяется по (1.2.13).

Параметры анизотропного упрочнения модели Шабоса определяются путем минимизации суммы квадратов разности между экспериментальными значениями микронапряжений $a_{рпс}$ и вычисленными по выражению (1.2.13) с учетом закона суммирования (1.1.11)

Модель Бондаря

В случае одноосного растяжения уравнение (1.1.13) с учетом (1.1.14) примет вид:

$$\dot{a} = (E_a + \beta \sigma_a) \dot{\varepsilon}^p + (\beta E_a \varepsilon^p - \beta a) \dot{\varepsilon}^p \quad (1.2.15)$$

Для определения параметров E_a , σ_a и β диаграммы растяжения и растяжения после предварительного сжатия представляются, вычитая из полных деформаций упругую, в виде зависимостей между напряжениями $\sigma_{раст}$ и $\sigma_{рпс}$ соответственно и накопленной пластической деформации [9] (Рисунок 1.2.2).

$$\varepsilon_{u^*}^p = \varepsilon_{сж}^p + \varepsilon_{рпс}^p \quad (1.2.16)$$

$$\varepsilon_{u^*}^p = \varepsilon_{раст}^p \quad (1.2.17)$$

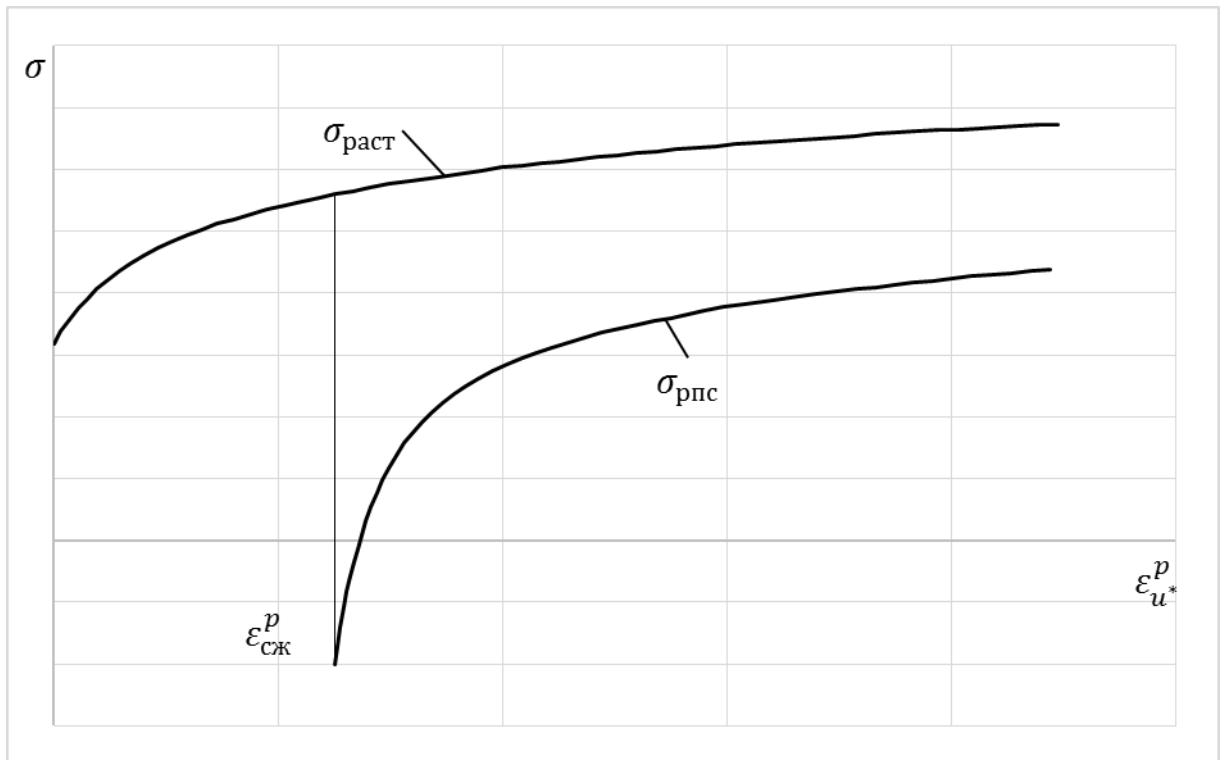


Рисунок 1.2.2 – Зависимости между напряжениями и накопленной пластической деформацией.

Из разности величин напряжений растяжения и растяжения после предварительного сжатия при одинаковых значениях накопленной пластической деформации, интегрируя выражение (1.2.15) можно получить следующую зависимость:

$$\frac{\sigma_{\text{раст}} - \sigma_{\text{рпс}}}{2\varepsilon_{\text{сж}}^p} = E_a + \frac{\sigma_a}{\varepsilon_{\text{сж}}^p} [1 - \exp(-\beta|\varepsilon_{02}^p|)] \times \exp[-\beta(\varepsilon_{u^*}^p - \varepsilon_{\text{сж}}^p)]. \quad (1.2.18)$$

Горизонтальной асимптотой (1.2.18) в координатах

$$y = \frac{(\sigma_{\text{раст}} - \sigma_{\text{рпс}})}{(2\varepsilon_{\text{сж}}^p)}, x = \varepsilon_{u^*}^p - \varepsilon_{\text{сж}}^p \quad (1.2.19)$$

является прямая $y = E_a$, это позволяет графически определить значение E_a (Рисунок 1.2.3).

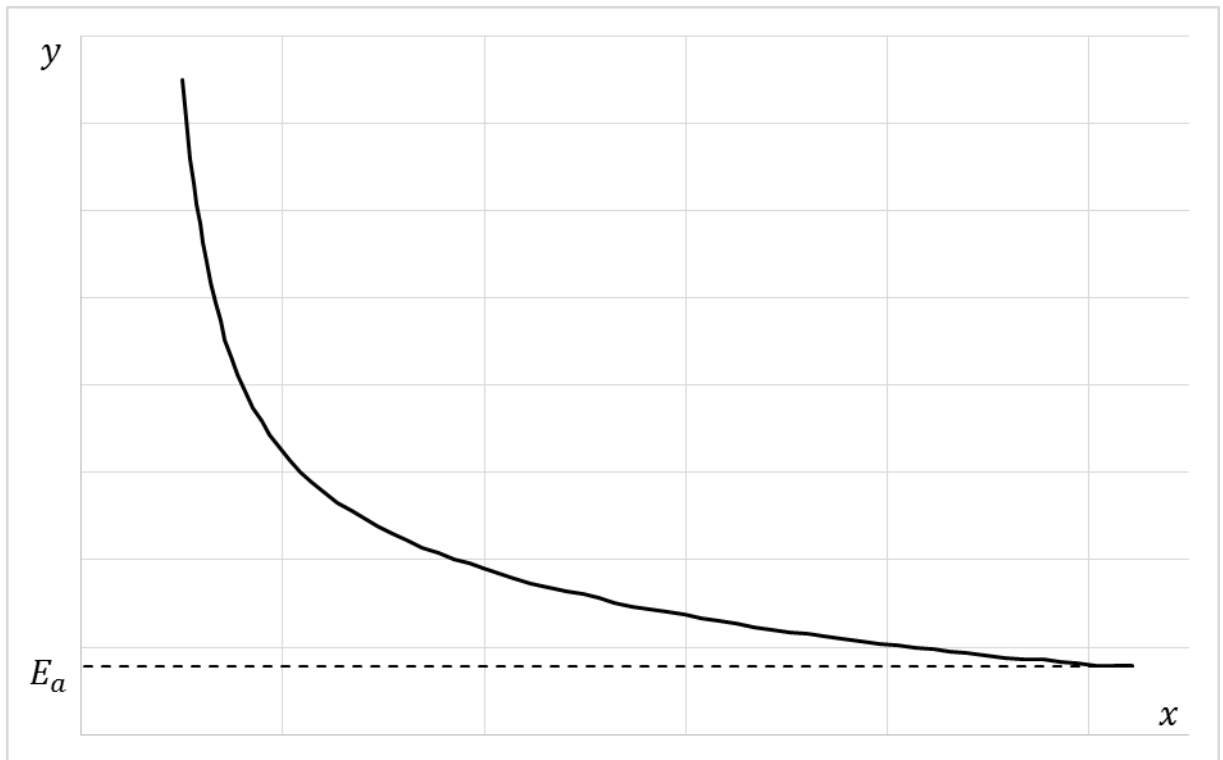


Рисунок 1.2.3 – Кривая для определения E_a

Для получения параметров β и σ_a (1.2.19) перестраивается в координатах:

$$z = \ln\left(\frac{y - E_a}{E_a}\right), x = \varepsilon_{u^*}^p - \varepsilon_{сж}^p. \quad (1.2.20)$$

Полученная зависимость

$$z = z_0 - \beta x \quad (1.2.21)$$

позволяет по углу наклона φ и ординате z_0 (рис. 1.2.4) определить β и σ_a путем аппроксимации экспериментальных данных по методу наименьших квадратов:

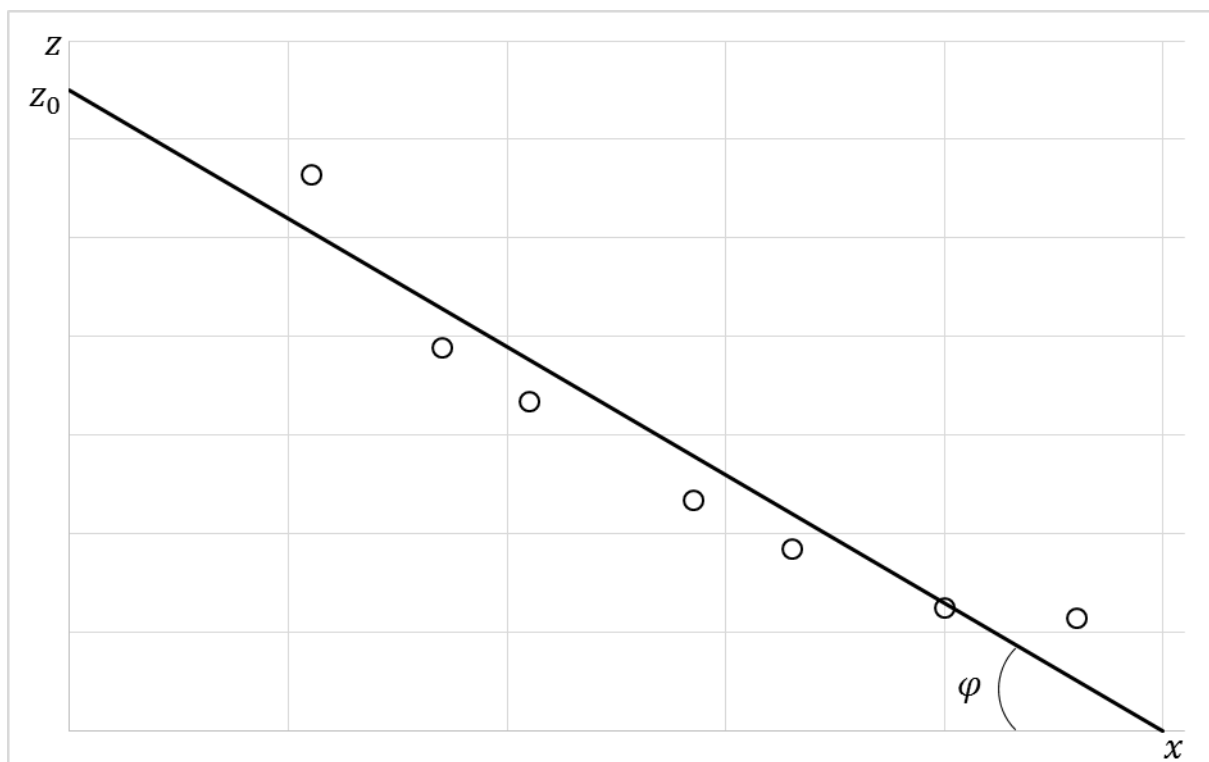


Рисунок 1.2.4 – Экспериментальная кривая в координатах z и x

$$\beta = \operatorname{tg}\varphi, \sigma_a = \frac{E_a \varepsilon_{сж}^p \exp(z_0)}{1 - \exp(-\beta \varepsilon_{сж}^p)}. \quad (1.2.22)$$

Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

В модели Армстронга-Фредерика-Кадашевича участок линейного упрочнения является изотропным. Для определения параметров микронапряжений из диаграммы растяжения после предварительного сжатия необходимо выделить участок без линейного упрочнения. Для этого из зависимости $a_{\text{рпс}} = f(\varepsilon_{\text{рпс}}^p)$ вычитается произведение, определенное для модели Бондаря, параметра E_a и пластической деформации $\varepsilon_{\text{рпс}}^p$:

$$a_{\text{АФК}} = a_{\text{рпс}} - E_a \varepsilon_{\text{рпс}}^p. \quad (1.2.23)$$

Максимальное значение микронапряжений на полученной зависимости $a_{\text{АФК}} = f(\varepsilon_{\text{рпс}}^p)$ равняется половине отношения параметров $\frac{C}{\gamma}$:

$$\frac{C}{\gamma} = 2a_{\text{АФК}}^{\max}. \quad (1.2.24)$$

Параметр γ определяется, решая следующее уравнение для одной из точек зависимости $a_{\text{АФК}} = f(\varepsilon_{\text{рпс}}^p)$:

$$a_{\text{рпс}}^{(m)} = 2a_{\text{АФК}}^{\text{max}} \left[1 - \left(1 - \frac{A_{\text{сж}}^{(m)}}{2a_{\text{АФК}}^{\text{max}}} \right) e^{-\gamma^{(m)} \varepsilon_{\text{рпс}}^p} \right], \quad (1.2.25)$$

$$A_{\text{сж}}^{(m)} = -2a_{\text{АФК}}^{\text{max}} \left(1 - e^{\gamma^{(m)} \varepsilon_{\text{сж}}^p} \right), \quad (1.2.26)$$

Функция изотропного упрочнения определяется для всех моделей пластичности по диаграмме растяжения $\sigma_{\text{раст}} = f(\varepsilon_{\text{раст}}^p)$. Сначала вычисляются по определенным ранее параметрам значения микронапряжений в процессе растяжения с помощью следующих соотношений:

Модель изотропного
упрочнения

$$a_{\text{раст}} = 0. \quad (1.2.27)$$

Модель Ишлинского-
Прагера-Кадашевича-
Новожилова

$$a_{\text{раст}} = g \varepsilon_{\text{раст}}^p; \quad (1.2.28)$$

Модель Оно-Ванга

$$a_{\text{раст}} = \sum a_{\text{раст}}^{(m)}, \quad (1.2.29)$$

$$a_{\text{раст}}^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)} \varepsilon_{\text{раст}}^p, \\ \sigma_a^{(m)}, \text{ если } \beta^{(m)} \varepsilon_{\text{раст}}^p \geq 1; \end{cases}$$

Модель Шабоса

$$a_{\text{раст}} = \sum a_{\text{раст}}^{(m)}, \quad (1.2.30)$$

$$a_{\text{раст}}^{(m)} = \frac{C^{(m)}}{\gamma^{(m)}} \left(1 - \exp(-\gamma \varepsilon_{\text{раст}}^p) \right);$$

Модель Бондаря

$$a_{\text{раст}} = E_a \varepsilon_{\text{раст}}^p + \sigma_a [1 - \exp(-\beta \varepsilon_{\text{раст}}^p)]. \quad (1.2.31)$$

Модель Армстронга-
Фредерика-
Кадашевича

$$a_{\text{раст}} = \frac{C}{\gamma} \left(1 - \exp(-\gamma \varepsilon_{\text{раст}}^p) \right); \quad (1.2.32)$$

Тогда функция размера поверхности нагружения определяется путем вычитания из диаграммы растяжения $\sigma_{\text{раст}} = f(\varepsilon_{\text{раст}}^p)$ определенных по выражениям (1.2.27 – 1.2.32) значений микронапряжений:

$$C_p = \sigma_{\text{раст}} - a_{\text{раст}} \cdot \quad (1.2.33)$$

Метод идентификации материальных функций и базовый эксперимент для модели Темиса-Худяковой описаны в работах [115, 116].

1.3 Материальные функции конструкционных сталей и сплавов

Модель изотропного упрочнения

Материальные функции конструкционной стали 40X16H9Г2С

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3$$

Таблица 1.3.1. Функция изотропного упрочнения стали 40X16H9Г2С

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,00016	0,00061	0,0011	0,0021	0,0048	0,0071	0,01	0,1
C_p , МПа	62	144	204	228	256	295	335	350	800

Модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова

Материальные функции конструкционной стали 40X16H9Г2С

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3, g = 3350 \text{ МПа}$$

Таблица 1.3.2. Функция изотропного упрочнения стали 40X16H9Г2С

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	62	151	173	208	247	287	297	324	414

Модель Оно-Ванга

Материальные функции конструкционной стали 40X16H9Г2С

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$\beta^{(1)} = 10000, \beta^{(2)} = 3400, \beta^{(3)} = 2000, \beta^{(4)} = 1400, \beta^{(5)} = 1050,$$

$$\beta^{(6)} = 700, \beta^{(7)} = 450, \beta^{(8)} = 2801, \beta^{(9)} = 161, \beta^{(10)} = 90$$

$$\sigma_a^{(1)} = 1.5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(3)} = 7.5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(4)} = 9 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^{(5)} = 15 \text{ МПа}, \sigma_a^{(6)} = 26 \text{ МПа}, \sigma_a^{(7)} = 33.5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(8)} = 29 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^{(9)} = 11.5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(10)} = 41 \text{ МПа}$$

Таблица 1.3.3. Функция изотропного упрочнения стали 40X16H9Г2С

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	62	125	131	137	124	147	157	224	534

Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

Материальные функции конструкционной стали 40X16H9Г2С

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3, C = 38250 \text{ МПа}, \gamma = -300$$

Таблица 1.3.4. Функция изотропного упрочнения стали 40X16H9Г2С

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	62	143	160	185	190	201	213	281	316

Модель Шабоса

Материальные функции конструкционной стали 40X16H9Г2С

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$C^{(1)} = 16150 \text{ МПа}, \gamma^{(1)} = 147, C^{(2)} = 126300 \text{ МПа},$$

$$\gamma^{(2)} = 1570, C^{(3)} = 768650 \text{ МПа}, \gamma^{(3)} = 14730$$

Таблица 1.3.5. Функция изотропного упрочнения стали 40X18H9Г2С

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	62	123	130	141	143	143	144	178	269

Модель Бондаря

Материальные функции конструкционной стали 40X16H9Г2С

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$E_a = 3550 \text{ МПа}, \sigma_a = 140 \text{ МПа}, \beta = -445$$

Таблица 1.3.6. Функция изотропного упрочнения стали 40X16H9Г2С

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	62	137	150	166	153	151	159	190	274

Модель изотропного упрочнения

Материальные функции конструкционной стали 9Х2

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3$$

Таблица 1.3.7. Функция изотропного упрочнения стали 9Х2

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,00025	0,00075	0,0015	0,002	0,0055	0,0079	0,01	0,1
C_p , МПа	209	240	270	300	310	370	395	440	940

Модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича

Материальные функции конструкционной стали 9Х2

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3, g = 5000 \text{ МПа}$$

Таблица 1.3.8. Функция изотропного упрочнения стали 9Х2

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	241	263	282	299	345	357	408	468

Модель Оно-Ванга

Материальные функции конструкционной стали 9Х2

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$\beta^{(1)} = 8870, \beta^{(2)} = 1811, \beta^{(3)} = 985, \beta^{(4)} = 666, \beta^{(5)} = 499,$$

$$\beta^{(6)} = 358, \beta^{(7)} = 240, \beta^{(8)} = 142, \beta^{(9)} = 114, \beta^{(10)} = 82$$

$$\sigma_a^{(1)} = 1.2 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 8 \text{ МПа}, \sigma_a^{(3)} = 12 \text{ МПа}, \sigma_a^{(4)} = 15 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^{(5)} = 19 \text{ МПа}, \sigma_a^{(6)} = 28 \text{ МПа}, \sigma_a^{(7)} = 36 \text{ МПа}, \sigma_a^{(8)} = 24 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^{(9)} = 8 \text{ МПа}, \sigma_a^{(10)} = 87 \text{ МПа}$$

Таблица 1.3.9. Функция изотропного упрочнения стали 9Х2

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,021
C_p , МПа	209	229	233	232	211	187	188	255	1120

Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

Материальные функции конструкционной стали 9Х2

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3, C = 33750 \text{ МПа}, \gamma = -250$$

Таблица 1.3.10. Функция изотропного упрочнения стали 9Х2

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	235	239	252	253	261	305	356	1300

Модель Шабоса

Материальные функции конструкционной стали 9Х2

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$C^{(1)} = 9200 \text{ МПа}, \gamma^{(1)} = 10, C^{(2)} = 63960 \text{ МПа},$$

$$\gamma^{(2)} = 1000, C^{(3)} = 14130 \text{ МПа}, \gamma^{(3)} = 10000$$

Таблица 1.3.11. Функция изотропного упрочнения стали 9Х2

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	228	227	237	240	259	285	266	301

Модель Бондаря

Материальные функции стали 9Х2.

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$E_a = 4770 \text{ МПа}, \sigma_a = 160 \text{ МПа}, \beta = -265$$

Таблица 1.3.12. Функция изотропного упрочнения стали 9Х2

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	246	249	248	230	220	230	246	320

Модель изотропного упрочнения

Материальные функции стали 45.

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3$$

Таблица 1.3.13. Функция изотропного упрочнения стали 45

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0.0003	0.0006	0.0026	0.0055	0.018	0.027	0.047	0.1
C_p , МПа	287	428	444	484	512	630	395	703	1180

Модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова

Материальные функции стали 45.

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3, g = 6770 \text{ МПа}$$

Таблица 1.3.14. Функция изотропного упрочнения стали 45

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	324	341	365	374	405	416	425	432

Модель Оно-Ванга

Материальные функции стали 45.

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3$$

$$\beta^{(1)} = 8865, \beta^{(2)} = 544, \beta^{(3)} = 841, \beta^{(4)} = 481, \beta^{(5)} = 500,$$

$$\beta^{(6)} = 363, \beta^{(7)} = 192, \beta^{(8)} = 64, \beta^{(9)} = 116, \beta^{(10)} = 9$$

$$\sigma_a^{(1)} = 14 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 42 \text{ МПа}, \sigma_a^{(3)} = 12 \text{ МПа}, \sigma_a^{(4)} = 13 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^{(5)} = 0 \text{ МПа}, \sigma_a^{(6)} = 0 \text{ МПа}, \sigma_a^{(7)} = 9 \text{ МПа}, \sigma_a^{(8)} = 27 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^{(9)} = 1 \text{ МПа}, \sigma_a^{(10)} = 772 \text{ МПа}$$

Таблица 1.3.15. Функция изотропного упрочнения стали 45

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	387	387	387	387	387	387	387	387

Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

Материальные функции стали 45.

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3, C = 43735 \text{ МПа}, \gamma = -326$$

Таблица 1.3.16. Функция изотропного упрочнения стали 45

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	313	320	305	300	393	464	609	974

Модель Шабша

Материальные функции стали 45.

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$C^{(1)} = 7070 \text{ МПа}, \gamma^{(1)} = 0,37, C^{(2)} = 5991 \text{ МПа},$$

$$\gamma^{(2)} = 91, C^{(3)} = 160375 \text{ МПа}, \gamma^{(3)} = 2622$$

Таблица 1.3.17. Функция изотропного упрочнения стали 45

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	289	289	289	286	286	289	288	288

Модель Бондаря

Материальные функции стали 45.

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$E_a = 6770 \text{ МПа}, \sigma_a = 140 \text{ МПа}, \beta = -265$$

Таблица 1.3.18. Функция изотропного упрочнения стали 45

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	314	321	295	266	266	276	285	292

1.4 Уравнения моделей для частных случаев деформирования

Далее в работе проводится сравнительный анализ теорий пластичности при нагружении по плоским и пространственным траекториям деформаций.

В случае нагружения по плоским траекториям следующие компоненты тензора напряжений равны нулю

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0.$$

Рассматриваются эксперименты, проведенные по программе жесткого нагружения, получаемой при задании осевого удлинения и угла поворота сечения тонкостенного цилиндрического образца при проведении испытаний. В этом случае заданы следующие компоненты скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ как функции времени t :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \varphi_{11}(t), \dot{\varepsilon}_{12} = \varphi_{12}(t).$$

Скорость накопленной пластической деформации $\varepsilon_{u^*}^p$ определяется следующим уравнением, являющимся частным вариантом уравнения, полученного в [9]:

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{3G}{E_* + 3G_*} \frac{(1 + \nu)s_{11}^* \dot{\varepsilon}_{11} + 2s_{12}^* \dot{\varepsilon}_{12}}{\sigma_u^*}, \quad (1.4.1)$$

$$G_* = G \frac{3(1 + \nu)(s_{11}^*)^2 + 2(s_{12}^*)^2}{(\sigma_u^*)^2}. \quad (1.4.2)$$

Здесь $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига. Параметр E_* для моделей пластичности определяется следующим образом:

модель изотропного упрочнения

$$E_* = \frac{dC_P}{d\varepsilon_{u^*}^p}. \quad (1.4.3)$$

модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова

$$E_* = g + \frac{dC_P}{d\varepsilon_{u^*}^p}. \quad (1.4.4)$$

модель Оно-Ванга

$$E_* = \sum_{m=1}^M g^{(m)} + \frac{dC_P}{d\varepsilon_{u^*}^p}. \quad (1.4.5)$$

модель Шабаша

$$E_* = \sum_{m=1}^M \left(C^{(m)} - \gamma^{(m)} a_u^{*(m)} \right) + \frac{dC_P}{d\varepsilon_{u^*}^p}, \quad (1.4.6)$$

$$a_u^{*(m)} = \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}^{(m)}}{2 \sigma_u^*}. \quad (1.4.7)$$

модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

$$E_* = C - \gamma a_u^* + \frac{dC_P}{d\varepsilon_{u^*}^p}, \quad (1.4.8)$$

$$a_u^* = \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*}. \quad (1.4.9)$$

модель Бондаря

$$E_* = g + g_\varepsilon \varepsilon_u^{p*} + g_a a_u^* + \frac{dC_P}{d\varepsilon_{u^*}^p}, \quad (1.4.10)$$

$$\varepsilon_u^{p*} = \frac{3 s_{ij}^* \varepsilon_{ij}^p}{2 \sigma_u^*}. \quad (1.4.11)$$

Скорости искоемых компонент напряжений и деформаций вычисляются с помощью следующих уравнений:

$$\dot{\sigma}_{11} = E(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{11}^p), \quad (1.4.12)$$

$$\dot{\epsilon}_{22} = -\nu(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{11}^p) + \dot{\epsilon}_{22}^p, \quad (1.4.13)$$

$$\dot{\epsilon}_{33} = -\nu(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{11}^p) + \dot{\epsilon}_{33}^p, \quad (1.4.14)$$

$$\dot{\sigma}_{12} = \frac{E}{1 + \nu}(\dot{\epsilon}_{12} - \dot{\epsilon}_{12}^p), \quad (1.4.15)$$

$$\dot{\epsilon}_{23} = \dot{\epsilon}_{31} = 0. \quad (1.4.16)$$

В случае нагружения по пространственным траекториям следующие компоненты тензора напряжений равны нулю

$$\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0.$$

Рассматриваются эксперименты, проведенные по программе жесткого нагружения, получаемой при задании осевого удлинения, изменения диаметра и угла поворота сечения тонкостенного цилиндрического образца при проведении испытаний. В этом случае заданы следующие компоненты скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ как функции времени t :

$$\dot{\epsilon}_{11} = \varphi_{11}(t), \dot{\epsilon}_{22} = \varphi_{22}(t), \dot{\epsilon}_{12} = \varphi_{12}(t).$$

Скорость накопленной пластической деформации $\dot{\epsilon}_{u^*}^p$ определяется следующим уравнением:

$$\dot{\epsilon}_{u^*}^p = 3G \frac{(s_{11}^* + \nu s_{22}^*)\dot{\epsilon}_{11} + (\dot{s}_{22} + \nu s_{11}^*)\dot{\epsilon}_{22} + 2(1 - \nu)s_{12}^*\dot{\epsilon}_{12}}{(E_* + 3G_*)(1 - \nu)\sigma_u^*}, \quad (1.4.17)$$

$$G_* = G \frac{3(s_{11}^*)^2 + (s_{22}^*)^2 + 2\nu s_{11}^* s_{22}^* + 2(1 - \nu)(s_{12}^*)^2}{(1 - \nu)(\sigma_u^*)^2}. \quad (1.4.18)$$

Скорости искоемых компонент напряжений и деформаций вычисляются с помощью следующих уравнений:

$$\dot{\sigma}_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} [(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{11}^p) + \nu(\dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{22}^p)], \quad (1.4.19)$$

$$\dot{\sigma}_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} [(\dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{22}^p) + \nu(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{11}^p)], \quad (1.4.20)$$

$$\dot{\epsilon}_{33} = -\frac{\nu}{1 - \nu} [(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{11}^p) + (\dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{22}^p)] + \dot{\epsilon}_{33}^p, \quad (1.4.21)$$

$$\dot{\sigma}_{12} = \frac{E}{1 + \nu} (\dot{\epsilon}_{12} - \dot{\epsilon}_{12}^p), \quad (1.4.22)$$

$$\dot{\epsilon}_{23} = \dot{\epsilon}_{31} = 0. \quad (1.4.23)$$

1.5 Метод расчета кинетики напряженно-деформированного состояния

Для проведения расчетов кинетики напряженно-деформированного состояния при нагружении по плоским и пространственным траекториям деформирования на языке Fortran-95 разработана программа. В основе этой программы лежит метод решения системы дифференциальных уравнений Рунге-Кутты 4 порядка для решение задачи Коши:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}); \quad (1.5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h\mathbf{k}_1}{2}\right), \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h\mathbf{k}_2}{2}\right), \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_3), \\ \Delta \mathbf{y} = \frac{h}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \\ t_{n+1} = t_n + h, \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta \mathbf{y}. \end{array} \right. \quad (1.5.2)$$

где t – время, n – номер шага интегрирования, h – шаг интегрирования.

Для удобства все модели пластичности объединены в одну с помощью принципа суперпозиции Новожилова-Шабоса. Микронапряжения есть сумма 14 независимых микронапряжений, каждое из которых описывается своим эволюционным уравнением:

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^{14} \dot{a}_{ij}^{(m)}, \quad (1.5.3)$$

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \left(\frac{2}{3} g_\varepsilon \varepsilon_{ij}^p + g_a^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right) \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, & m = 1, \\ \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(m)} a_{ij}^{(m)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, & 2 \leq m \leq 4, \\ \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, & 5 \leq m \leq 14. \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Значения параметров g_ε , $g^{(m)}$ и $g_a^{(m)}$, соответствующие различным моделям пластичности, приведены в Таблице 1.5.1.

Таблица 1.5.1. Значения материальных параметров для моделей пластичности

	Модель изотропного упрочнения.	Модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова	Модель Оно-Ванга	Модель Шабоша	Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича	Модель Бондаря
g_ε	0	0	0	0	0	$E_a \beta$
$g^{(1)}$	0	g	0	0	0	$E_a + \beta \sigma_a$
$g_a^{(1)}$	0	0	0	0	0	$-\beta$
$g^{(2)}$	0	0	0	$C^{(1)}$	C	0
$g_a^{(2)}$	0	0	0	$-\gamma^{(1)}$	$-\gamma$	0
$g^{(3)}$	0	0	0	$C^{(2)}$	0	0
$g_a^{(3)}$	0	0	0	$-\gamma^{(2)}$	0	0
$g^{(4)}$	0	0	0	$C^{(3)}$	0	0
$g_a^{(4)}$	0	0	0	$-\gamma^{(3)}$	0	0
$g^{(5...14)}$	0	0	в соотв. с (1.1.9)	0	0	0

Решаемая система уравнений приведена в таблице 1.5.2.

Таблица 1.5.2. Решаемая система уравнений

№ п.п	Функция	Эволюционное уравнение
-------	---------	------------------------

1	2	3	4
1	ε_{u*}^p	Накопленная пластическая деформация	(1.4.1), (1.4.2) в случае нагружения по плоским траекториям; (1.4.17), (1.4.18) в случае нагружения по пространственным траекториям.
2	σ_{11}	Компоненты тензора напряжения	(1.4.12) в случае нагружения по плоским траекториям; (1.4.19) в случае нагружения по пространственным траекториям.
3	σ_{22}		Равна 0 в случае нагружения по плоским траекториям; (1.4.20) в случае нагружения по пространственным траекториям.
4	σ_{12}		(1.4.15) в случае нагружения по плоским траекториям; (1.4.22) в случае нагружения по пространственным траекториям.
5	ε_{11}		Компоненты тензора деформации
6	ε_{22}	(1.4.13) в случае нагружения по плоским траекториям; Заданная функция времени в случае нагружения по пространственным траекториям.	
7	ε_{12}	Функция времени, в зависимости от траектории нагружения	

№ п.п	Функция		Эволюционное уравнение
1	2	3	4
8	ε_{11}^p	Компоненты тензора пластической деформации	Закон ассоциированного течения (1.1.4)
9	ε_{22}^p		
10	ε_{12}^p		
11	$a_{11}^{(m)}$	Компоненты тензора независимых микронапряжений	Выражение (1.5.4)
12	$a_{22}^{(m)}$		
13	$a_{12}^{(m)}$		

Параметр E_* , необходимый для определения скорости накопленной пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{u^*}^p$ вычисляется следующим образом:

$$E_* = g_\varepsilon \varepsilon_u^{p*} + \sum_{m=1}^{14} g^{(m)} + \sum_{m=1}^4 g_a^{(m)} a_u^{*(m)} + \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u^*}^p},$$

Для вычисления значений скоростей пластической деформации используется ассоциированный закон течения (1.1.4). Компонента каждого из независимых микронапряжений $a_{33}^{(m)}$ и пластических деформаций ε_{33}^p вычисляется с помощью следующего уравнения:

$$a_{33}^{(m)} = -a_{11}^{(m)} - a_{22}^{(m)} \quad (1.5.5)$$

$$\varepsilon_{33}^p = -\varepsilon_{11}^p - \varepsilon_{22}^p \quad (1.5.6)$$

Процессы упругого и упругопластического деформирования разделяются по следующему условию:

$$\sigma_u^* < C_p(\varepsilon_{u^*}^p) \cup \dot{\varepsilon}_{u^*}^p \leq 0 \text{ — упругость,} \quad (1.5.7)$$

$$\sigma_u^* = C_p(\varepsilon_{u^*}^p) \cap \dot{\varepsilon}_{u^*}^p > 0 \text{ — упругопластичность,}$$

Для удобства сопоставления расчетных и экспериментальных результатов используется векторное представление [31, 32, 67] процессов деформирования.

Компоненты векторов напряжения \bar{S} и деформации $\bar{\mathcal{E}}$ связаны с компонентами девиаторов напряжений s_{ij} и деформаций e_{ij} следующими формулами:

$$\bar{S} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} s_{11} \\ \sqrt{2} \left(s_{22} + \frac{s_{11}}{2} \right) \\ \sqrt{2} s_{12} \\ \sqrt{2} s_{13} \\ \sqrt{2} s_{23} \end{Bmatrix}, \quad (1.5.8)$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_4 \\ \mathcal{E}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} e_{11} \\ \sqrt{2} \left(e_{22} + \frac{e_{11}}{2} \right) \\ \sqrt{2} e_{12} \\ \sqrt{2} e_{13} \\ \sqrt{2} e_{23} \end{Bmatrix}, \quad (1.5.9)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0, \quad (1.5.10)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}. \quad (1.5.11)$$

Помимо компонент векторов напряжений, сравнение расчетных и экспериментальных результатов проводится по векторным и скалярным свойствам. Скалярные свойства сравниваются по изменению модуля вектора напряжений σ по траектории деформации s :

$$\sigma = (s_{ij} s_{ij})^{\frac{1}{2}}, \quad (1.5.12)$$

$$s = \int_0^t |\dot{\bar{\mathcal{E}}}| dt = \int_0^t (\dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij})^{1/2} dt. \quad (1.5.13)$$

Векторные свойства сравниваются по изменению угла сближения ϑ вектора напряжений и касательной к траектории деформации:

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{(\bar{S} \cdot \dot{\bar{\mathcal{E}}})}{|\bar{S}| |\dot{\bar{\mathcal{E}}}|} \right). \quad (1.5.14)$$

Расчетный шаг h принимается постоянным и вычисляется таким образом, чтобы изменение траектории деформации s за одну итерацию не превышало 0,0001:

$$h < \frac{0,0001}{(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}} \quad (1.5.15)$$

Работа с программой осуществляется с помощью входных и выходных ASCII файлов и самой программы. Материальные параметры (Таблица 1.5.1) и функция изотропного упрочнения (1.1.5) задаются в двух файлах формата *.txt (MatParam.txt, Cp.txt). В первой строке файла MatParam.txt содержатся обозначения параметров, во второй – значения материальных параметров. Материальные параметры, задаваемые для различных моделей пластичности приведены в Таблице 1.5.3.

Таблица 1.5.3. Материальные параметры, задаваемые для используемых моделей пластичности

№	Параметр	Модель изотропного упрочнения	Модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова	Модель Оно-Ванга (M=1)	Модель Шабоша (M=3)	Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича	Модель Бондаря
1	2	3	4	5	6	7	8
1	E	E	E	E	E	E	E
2	ν	ν	ν	ν	ν	ν	ν
3	E_a	0	g	0	0	0	E_a
4	σ_a	0	0	0	0	0	σ_a
5	β	0	0	0	0	0	β
6	$C^{(1)}$	0	0	0	$C^{(1)}$	C	0
7	$\gamma^{(1)}$	0	0	0	$\gamma^{(1)}$	$-\gamma$	0
8	$C^{(2)}$	0	0	0	$C^{(2)}$	0	0
9	$\gamma^{(2)}$	0	0	0	$\gamma^{(2)}$	0	0
10	$C^{(3)}$	0	0	0	$C^{(3)}$	0	0
11	$\gamma^{(3)}$	0	0	0	$\gamma^{(3)}$	0	0
12	$\sigma_a^{(1...10)}$	0	0	$\sigma_a^{(1...10)}$	0	0	0
13	$\beta^{(1...10)}$	0	0	$\beta^{(1...10)}$	0	0	0

В файле Cr.txt содержится функция изотропного упрочнения. В первой строке файла содержатся значения накопленной пластической деформации, во втором – соответствующие им значения параметра C_p .

Результаты расчета сохраняются в файл формата *.csv (results.csv). В первой строке файла содержатся обозначения параметров, во второй и следующей строках – параметры нагружения ($t, S_1, S_2, S_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \sigma, \vartheta$). Каждому столбцу файла соответствует один параметр нагружения.

2 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ ПО ПЛОСКИМ ТРАЕКТОРИЯМ ДЕФОРМАЦИЙ

2.1 Многозвенные ломаные траектории деформаций в виде квадрата и треугольника

Проведено сравнение результатов расчета с помощью моделей пластичности с результатами экспериментальных исследований [60, 105] по деформированию образцов стали 40Х16Н9Г2С по многозвенной ломанной траектории деформации в виде квадрата (Рисунок 2.1.1) со стороной равной 0,01 на плоскости $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ вектора деформаций $\bar{\varepsilon}$ (1.5.9).

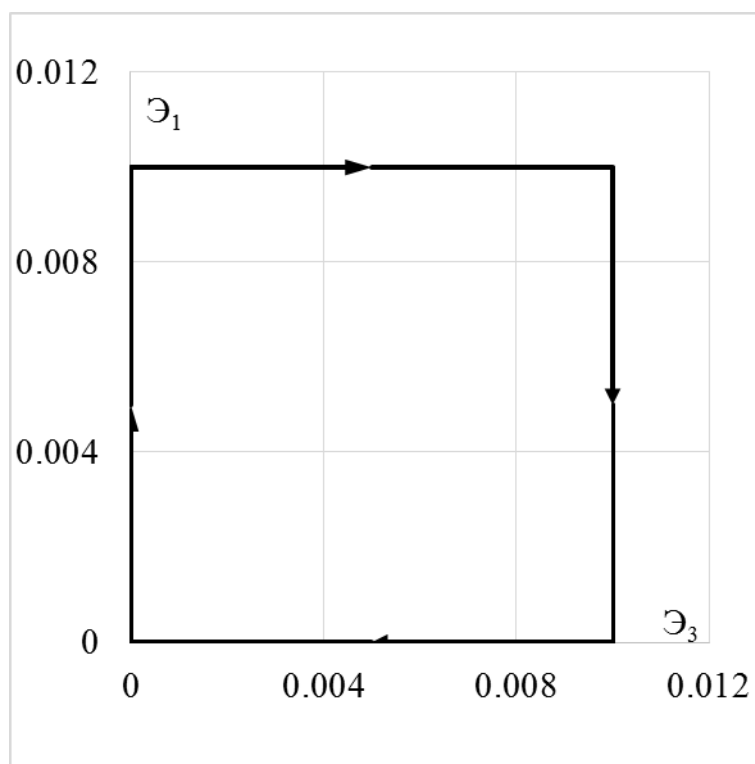


Рисунок 2.1.1 – Траектория деформаций. Квадрат

Функции компонент вектора деформации и их скорости описываются следующими уравнениями:

$$\dot{\vartheta}_1 = \begin{cases} \frac{0,01}{0,25} t & (t - [t]) < 0,25 \\ \frac{0,01}{0,25} & 0,25 \leq (t - [t]) < 0,5, \\ -\frac{0,01}{0,25} & 0,5 \leq (t - [t]) < 0,75 \\ 0 & 0,75 \leq (t - [t]) < 1 \end{cases}, \quad (2.1.1)$$

$$\dot{\vartheta}_3 = \begin{cases} \frac{0,01}{0,25} t & (t - [t]) < 0,25 \\ \frac{0,01}{0,25} & 0,25 \leq (t - [t]) < 0,5, \\ -\frac{0,01}{0,25} & 0,5 \leq (t - [t]) < 0,75 \\ 0 & 0,75 \leq (t - [t]) < 1 \end{cases}, \quad (2.1.2)$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \begin{cases} \frac{0,01}{0,25} & (t - [t]) < 0,25 \\ 0 & 0,25 \leq (t - [t]) < 0,5, \\ -\frac{0,01}{0,25} & 0,5 \leq (t - [t]) < 0,75 \\ 0 & 0,75 \leq (t - [t]) < 1 \end{cases}, \quad (2.1.3)$$

$$\dot{\vartheta}_3 = \begin{cases} 0 & (t - [t]) < 0,25 \\ \frac{0,01}{0,25} & 0,25 \leq (t - [t]) < 0,5 \\ 0 & 0,5 \leq (t - [t]) < 0,75' \\ -\frac{0,01}{0,25} & 0,75 \leq (t - [t]) < 1 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Экспериментальные [60, 105] и полученные по результатам расчета ответные траектории напряжений для первого цикла нагружения показаны на рисунках 2.1.2, 2.1.3 и 2.1.4. Скалярные свойства (изменение модуля вектора напряжений σ (1.5.12) по траектории деформаций s (1.5.13)) приведены на рисунках 2.1.5, 2.1.6 и 2.1.7. Векторные свойства (изменение угла сближения ϑ (1.5.14) по траектории деформаций s) показаны на рисунках 2.1.8, 2.1.9 и 2.1.10. Скалярные и векторные свойства приведены для 3 циклов нагружения. Экспериментальные результаты на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми.

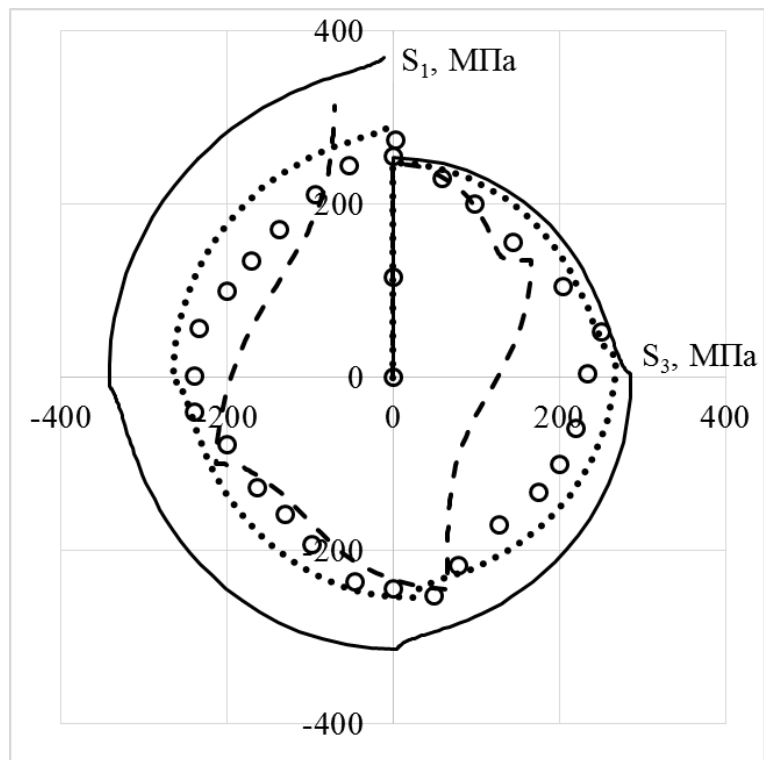


Рисунок 2.1.2 – Траектория напряжений. Квадрат (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

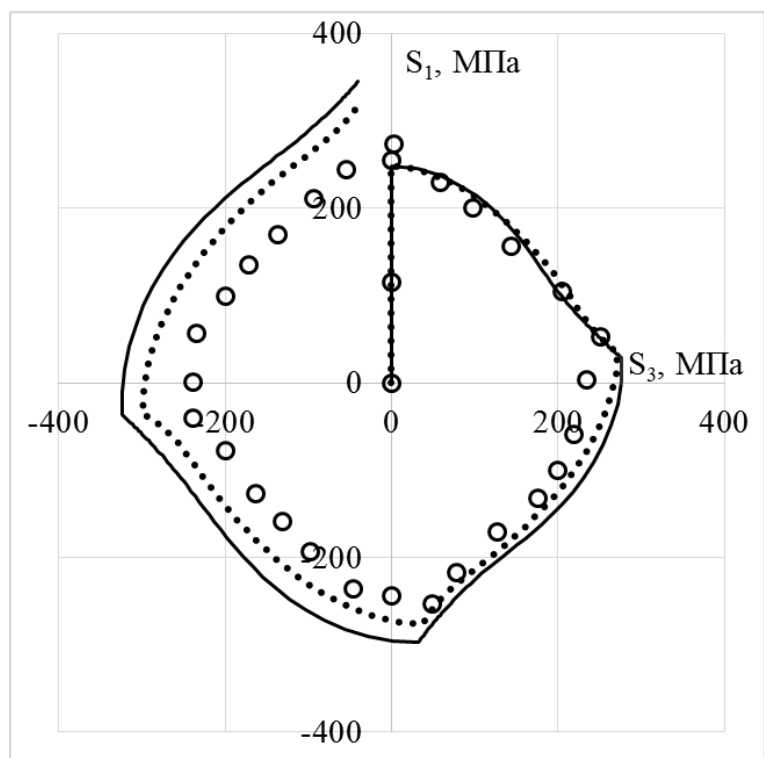


Рисунок 2.1.3 – Траектория напряжений. Квадрат (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

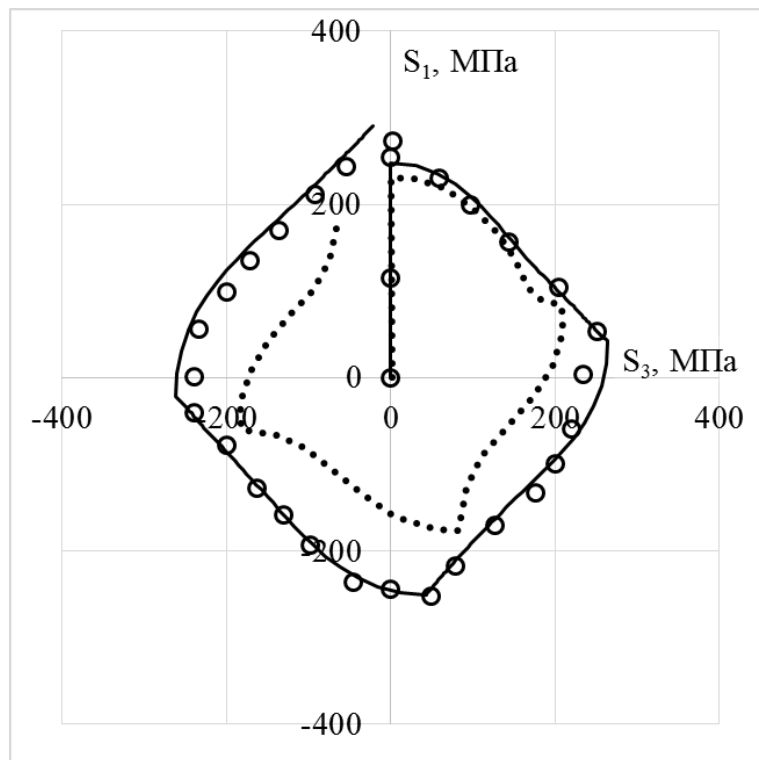


Рисунок 2.1.4 – Траектория напряжений. Квадрат (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

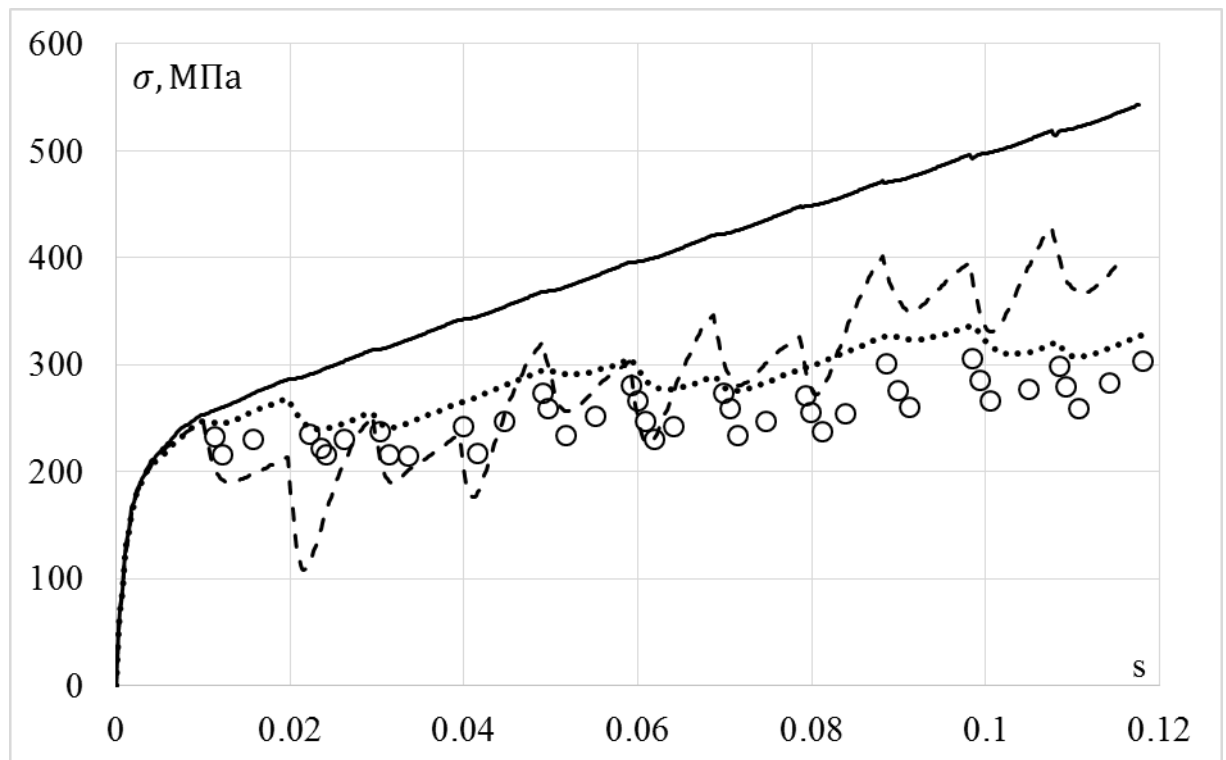


Рисунок 2.1.5 – Скалярные свойства. (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

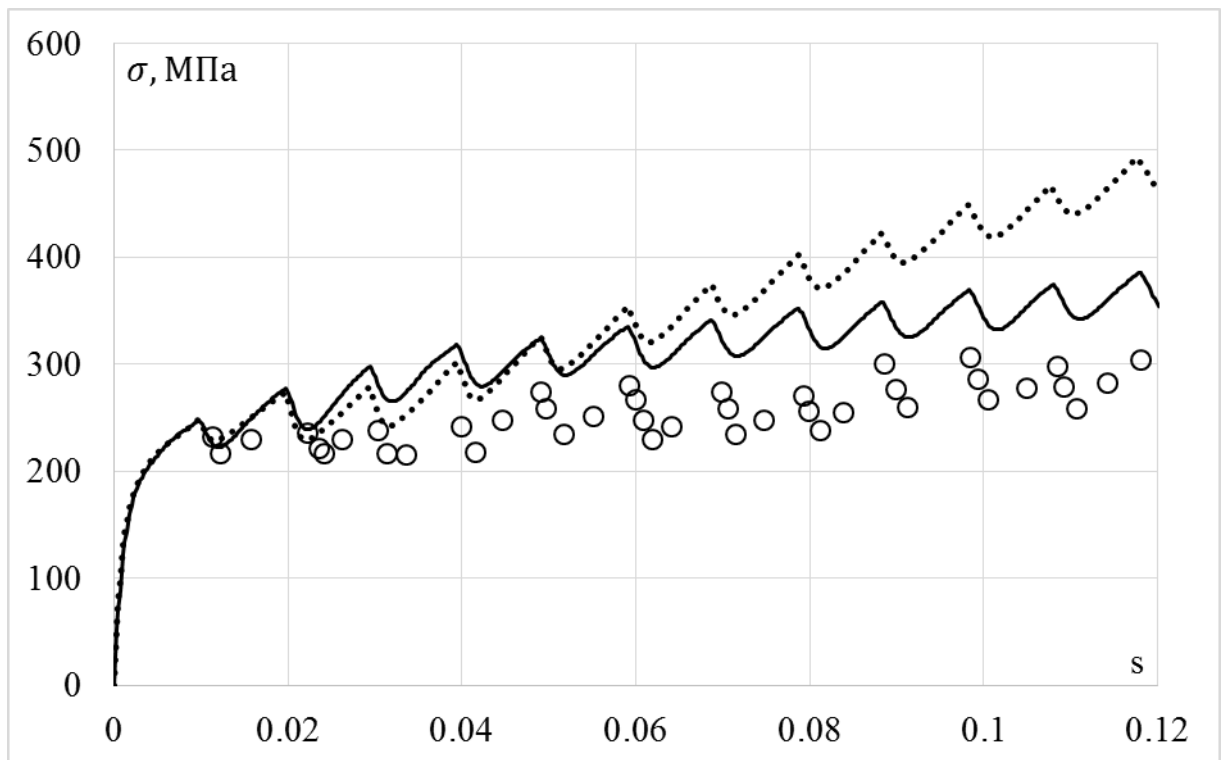


Рисунок 2.1.6 – Скалярные свойства. Квадрат (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

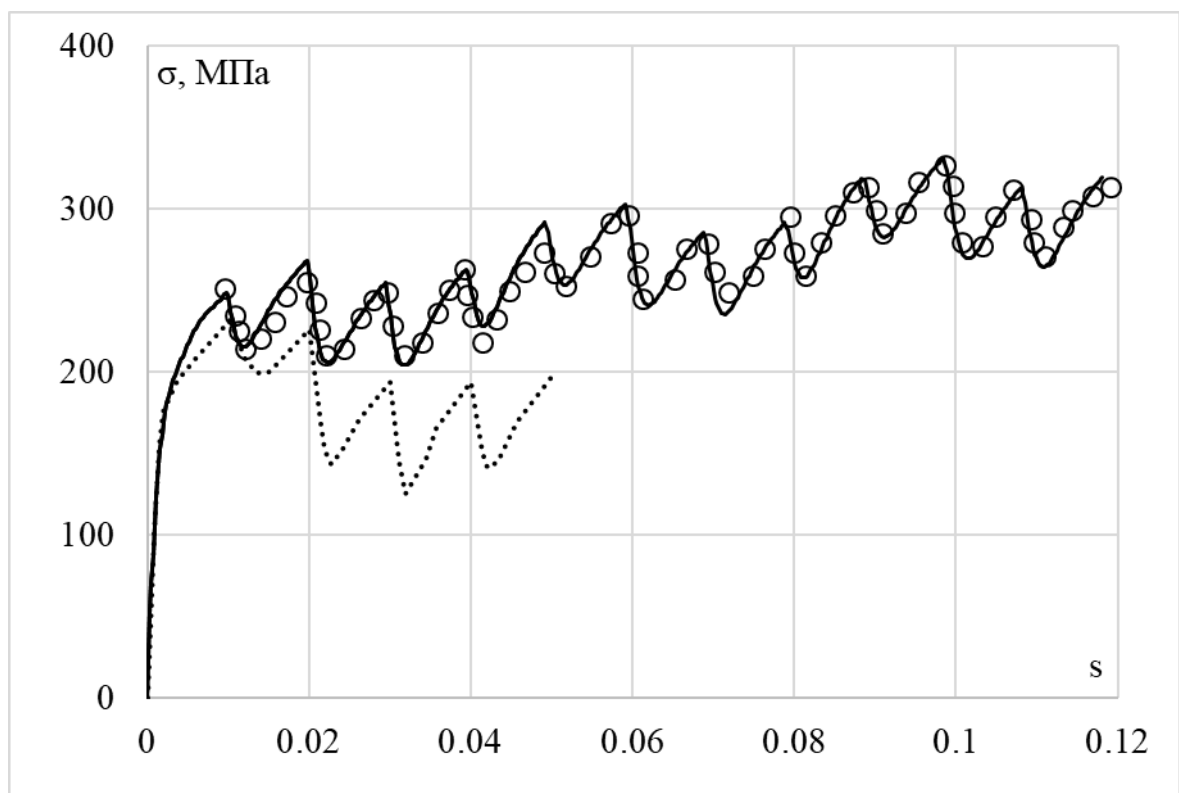


Рисунок 2.1.7 – Скалярные свойства. Квадрат (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

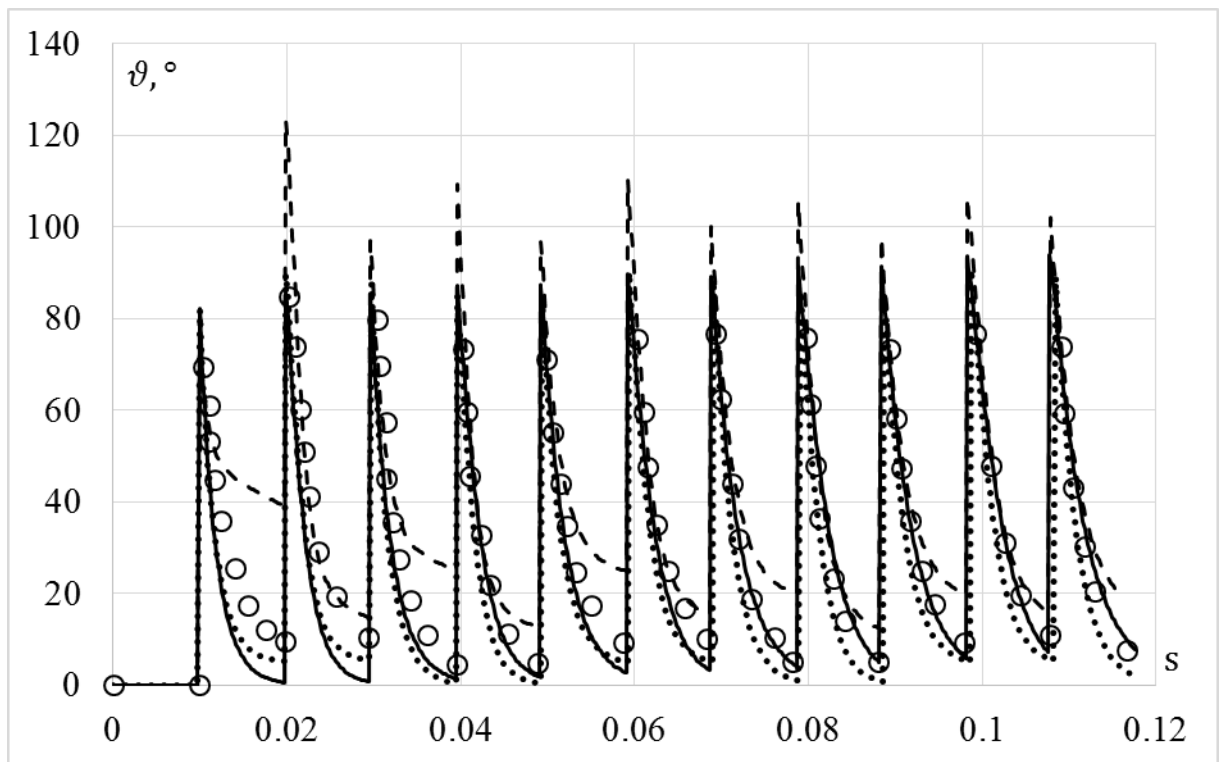


Рисунок 2.1.8 – Векторные свойства. Квадрат (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

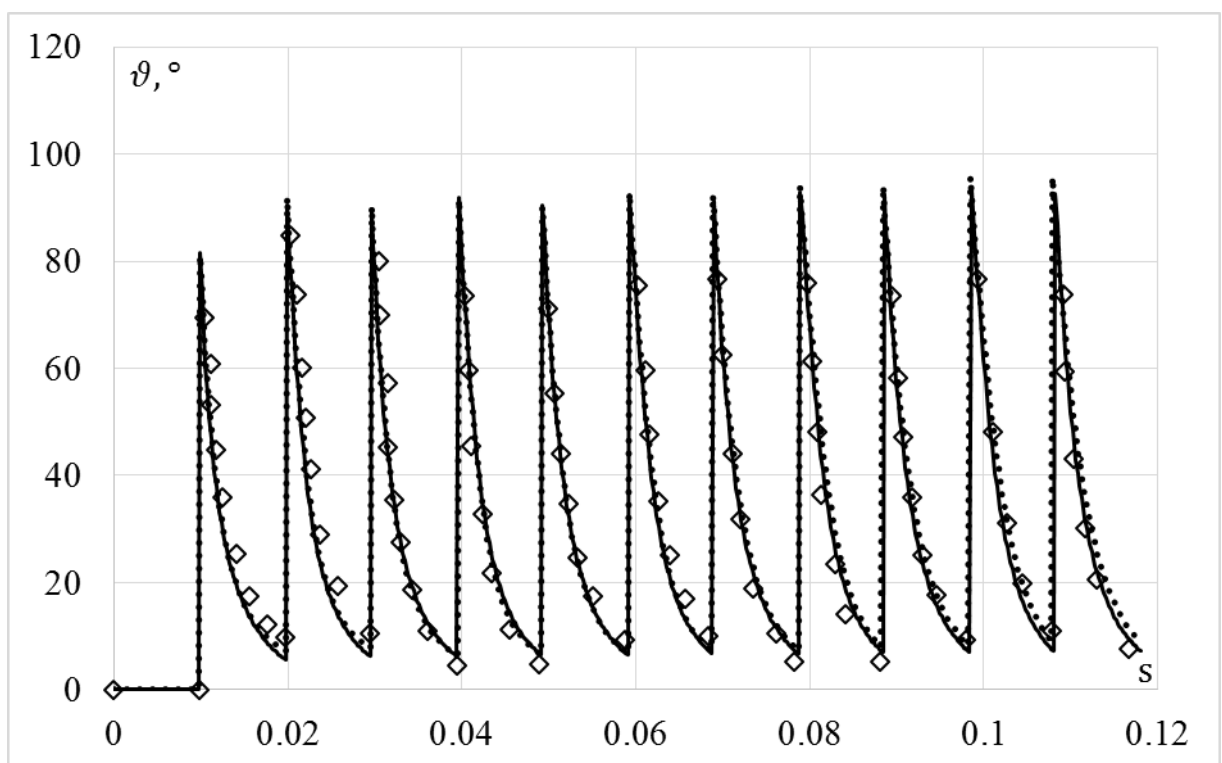


Рисунок 2.1.9 – Векторные свойства. Квадрат (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

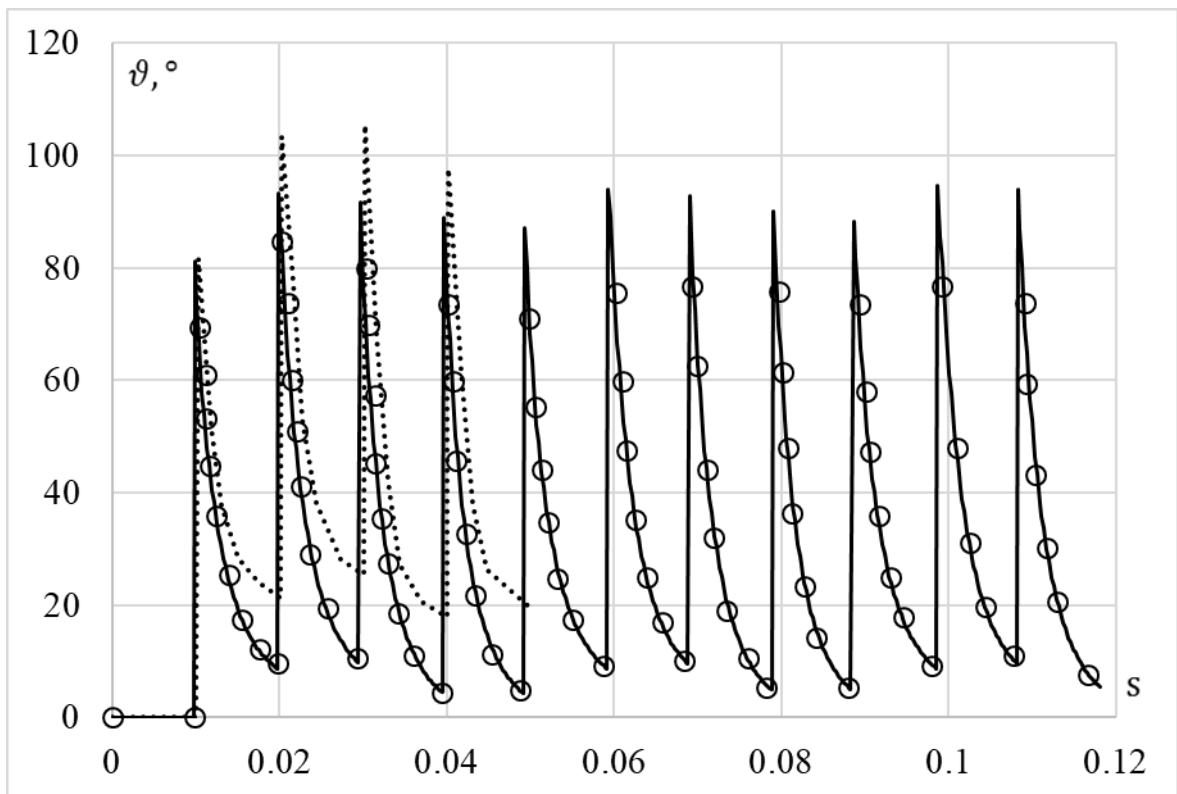


Рисунок 2.1.10 – Векторные свойства. Квадрат (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

Далее сравнение моделей пластичности проводится по результатам экспериментальных исследований деформирования стали 45 [57] по многозвенной ломаной траектории деформаций в виде треугольника на плоскости $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_3)$ (Рисунок 2.1.11) с углами излома траектории равными 135° , 135° и 90° вектора деформаций $\bar{\varepsilon}$ (1.5.9).

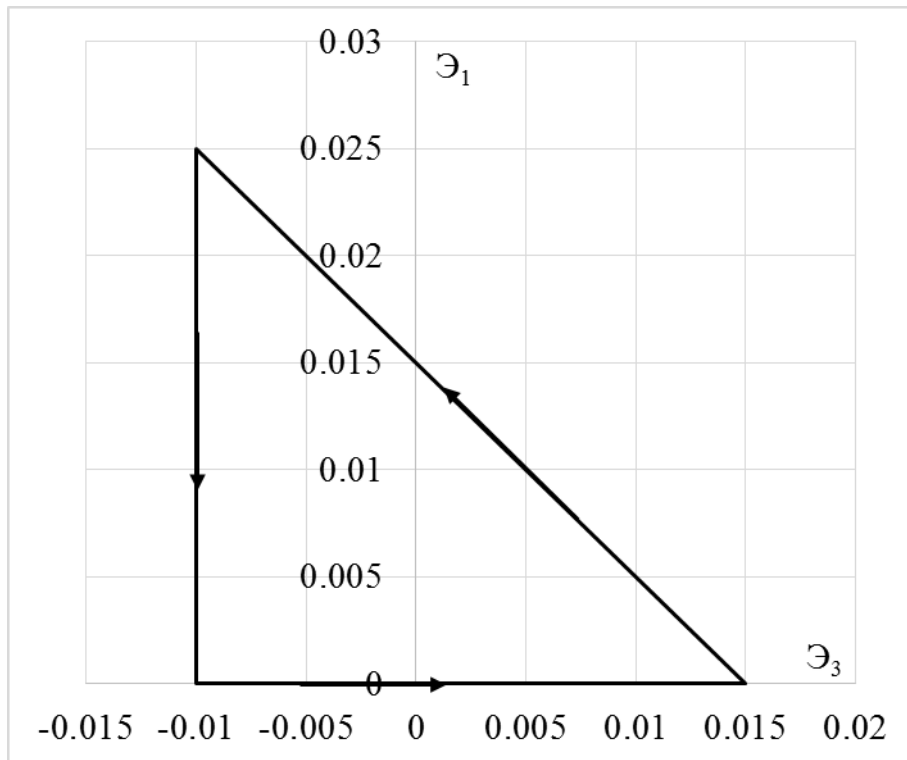


Рисунок 2.1.11 – Траектория деформаций. Треугольник

Функции компонент скоростей деформации задаются по следующему закону:

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & (t - [t]) < 0,25 \\ \frac{0,025}{0,25} t & 0,25 \leq (t - [t]) < 0,5 \\ -\frac{0,025}{0,25} t & 0,5 \leq (t - [t]) < 0,75 \\ 0 & 0,75 \leq (t - [t]) < 1 \end{cases}, \quad (2.1.5)$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} \frac{0,015}{0,25} t & (t - [t]) < 0,25 \\ -\frac{0,025}{0,25} t & 0,25 \leq (t - [t]) < 0,5 \\ -0,01 & 0,5 \leq (t - [t]) < 0,75 \\ \frac{0,01}{0,25} t & 0,75 \leq (t - [t]) < 1 \end{cases}, \quad (2.1.6)$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \begin{cases} 0 & (t - [t]) < 0,25 \\ \frac{0,025}{0,25} & 0,25 \leq (t - [t]) < 0,5 \\ -\frac{0,025}{0,25} & 0,5 \leq (t - [t]) < 0,75 \\ 0 & 0,75 \leq (t - [t]) < 1 \end{cases}, \quad (2.1.7)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \begin{cases} \frac{0,015}{0,25} & (t - [t]) < 0,25 \\ -\frac{0,025}{0,25} & 0,25 \leq (t - [t]) < 0,5 \\ 0 & 0,5 \leq (t - [t]) < 0,75 \\ \frac{0,01}{0,25} & 0,75 \leq (t - [t]) < 1 \end{cases}, \quad (2.1.8)$$

Ответные траектории напряжений показаны на рисунках 2.1.12, 2.1.13 и 2.1.14. Скалярные и векторные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ и угла сближения ϑ по траектории деформаций s приведены на рисунках 2.1.15-2.1.20 соответственно. Скалярные и векторные свойства показаны для 3-х циклов нагружения. Здесь также экспериментальные результаты [57] на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми.

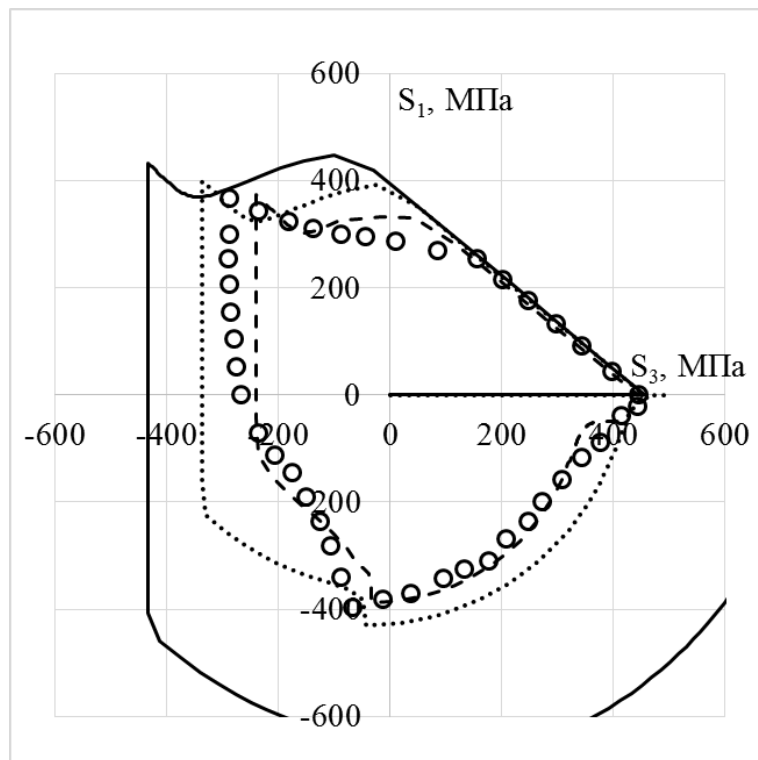


Рисунок 2.1.12 – Траектория напряжений. Треугольник (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

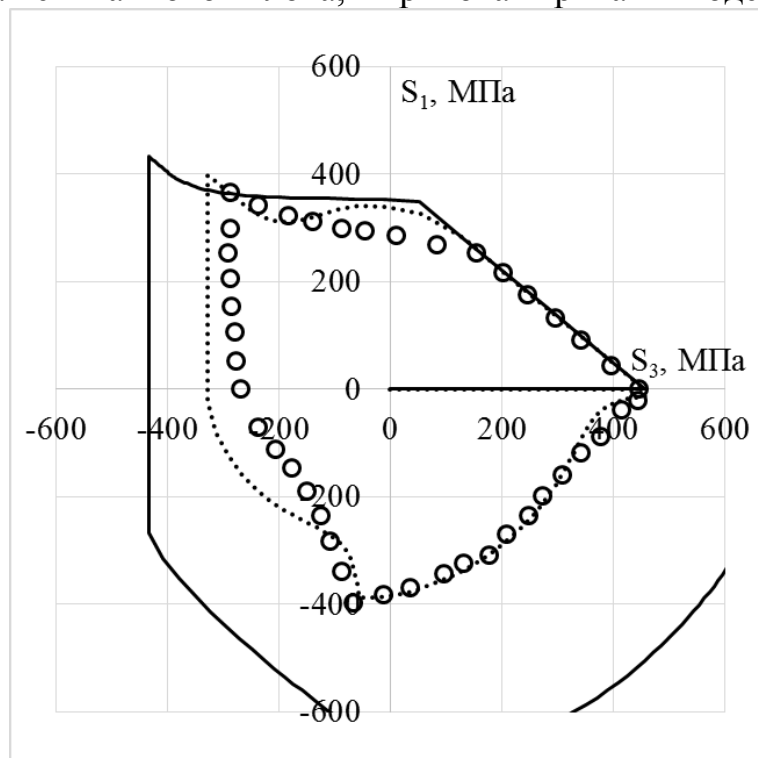


Рисунок 2.1.13 – Траектория напряжений. Треугольник (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

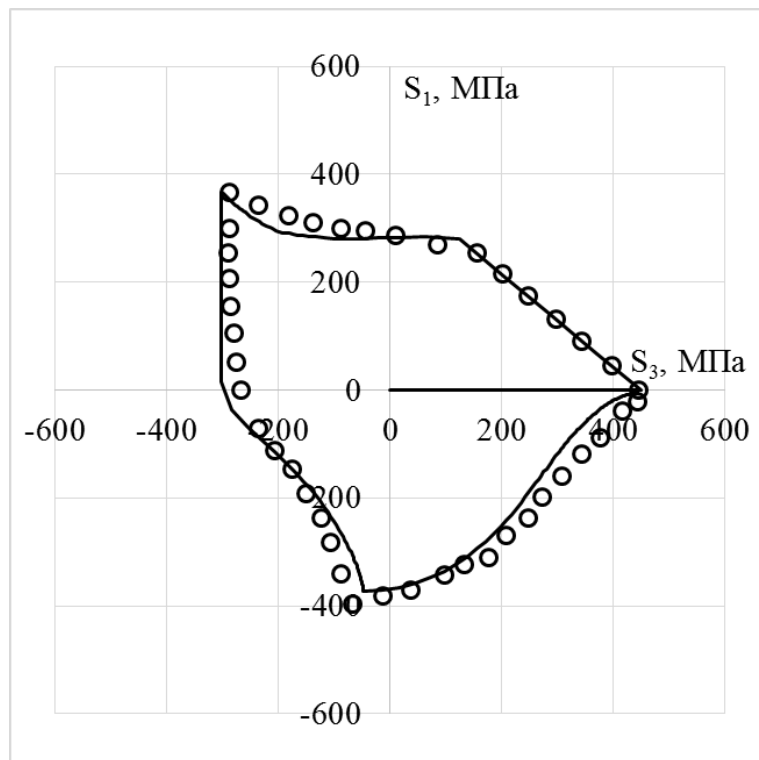


Рисунок 2.1.14 – Траектория напряжений. Треугольник (сплошная кривая – модель Бондаря)

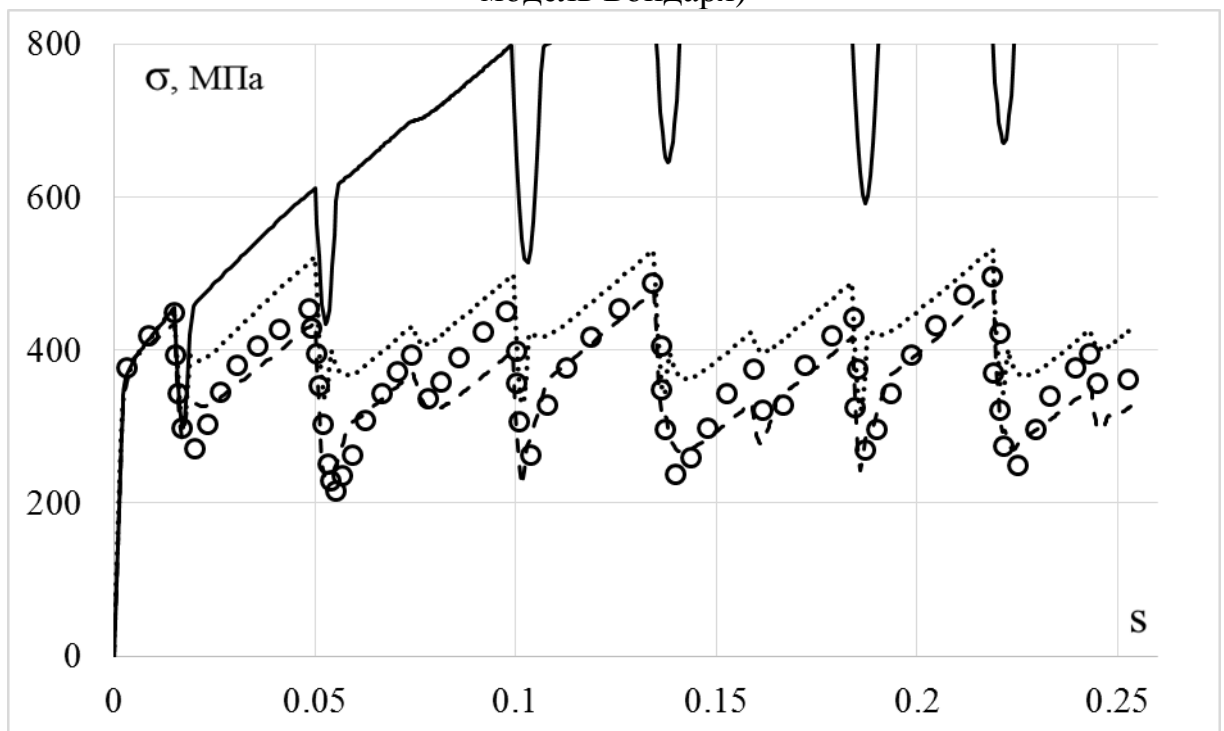


Рисунок 2.1.15 – Скалярные свойства. Треугольник (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

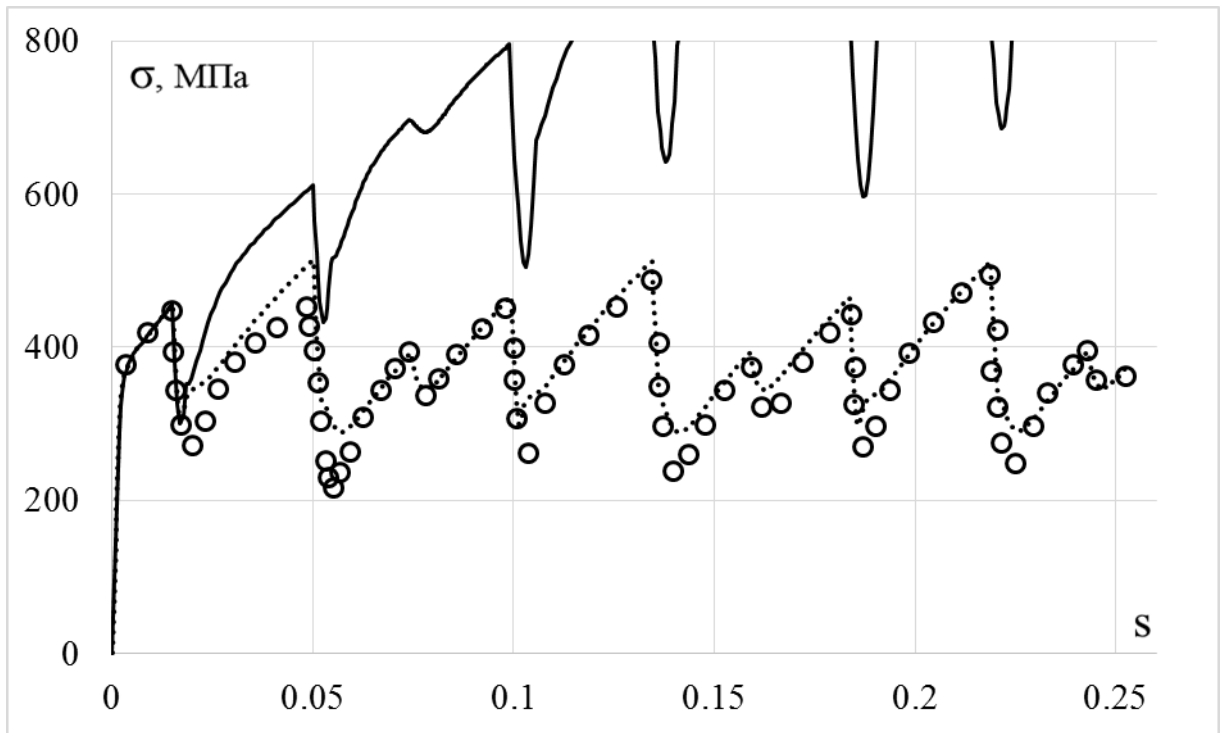


Рисунок 2.1.16 – Скалярные свойства. Треугольник Треугольник (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

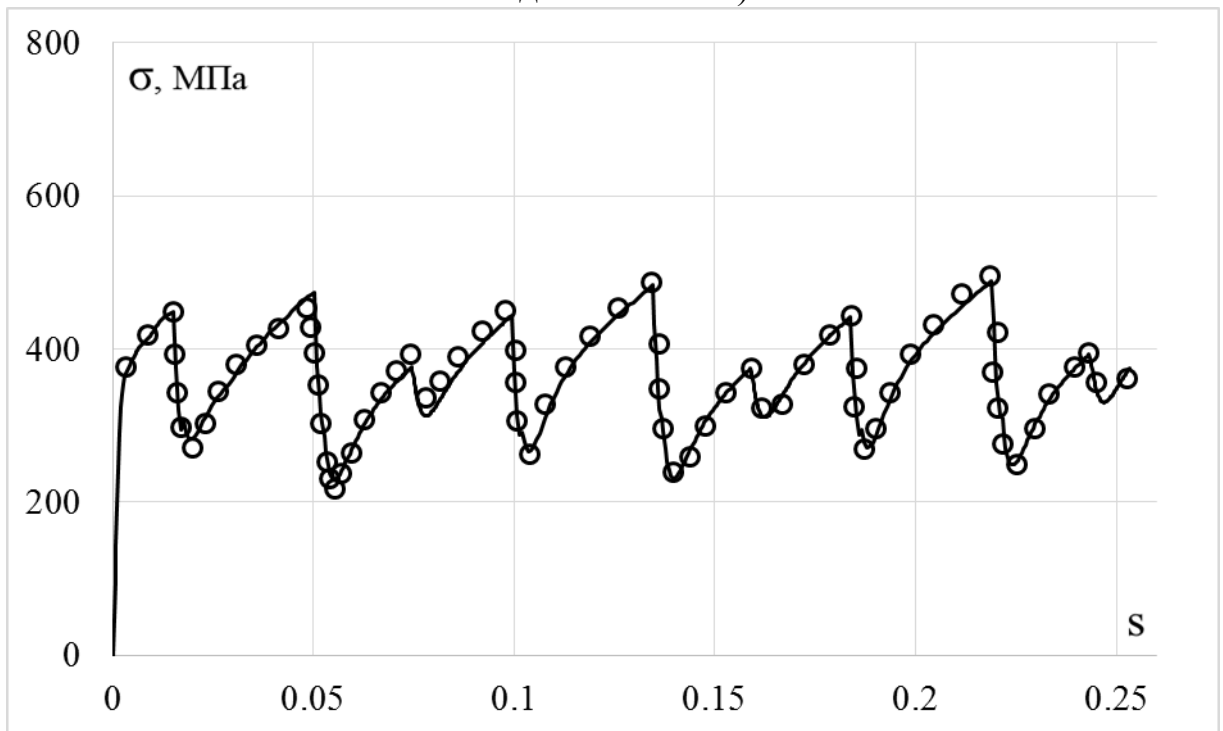


Рисунок 2.1.17 – Скалярные свойства. Треугольник (сплошная кривая – модель Бондаря)

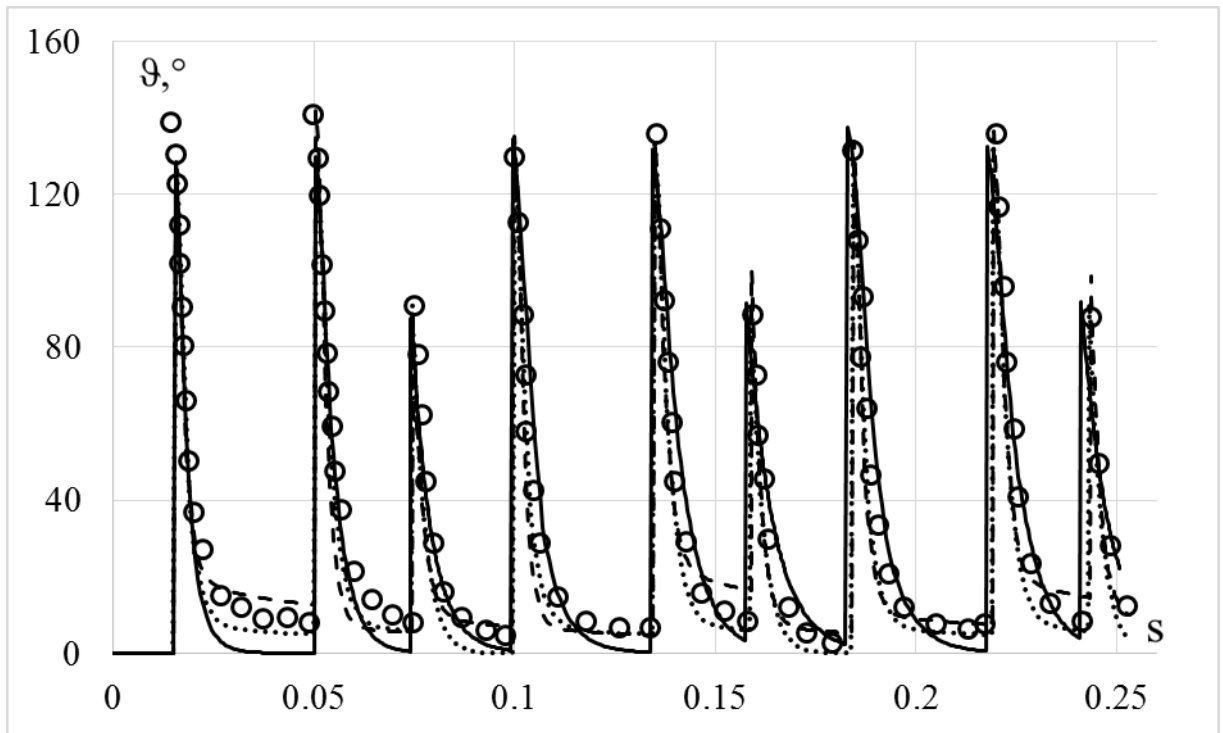


Рисунок 2.1.18 – Векторные свойства. Треугольник (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

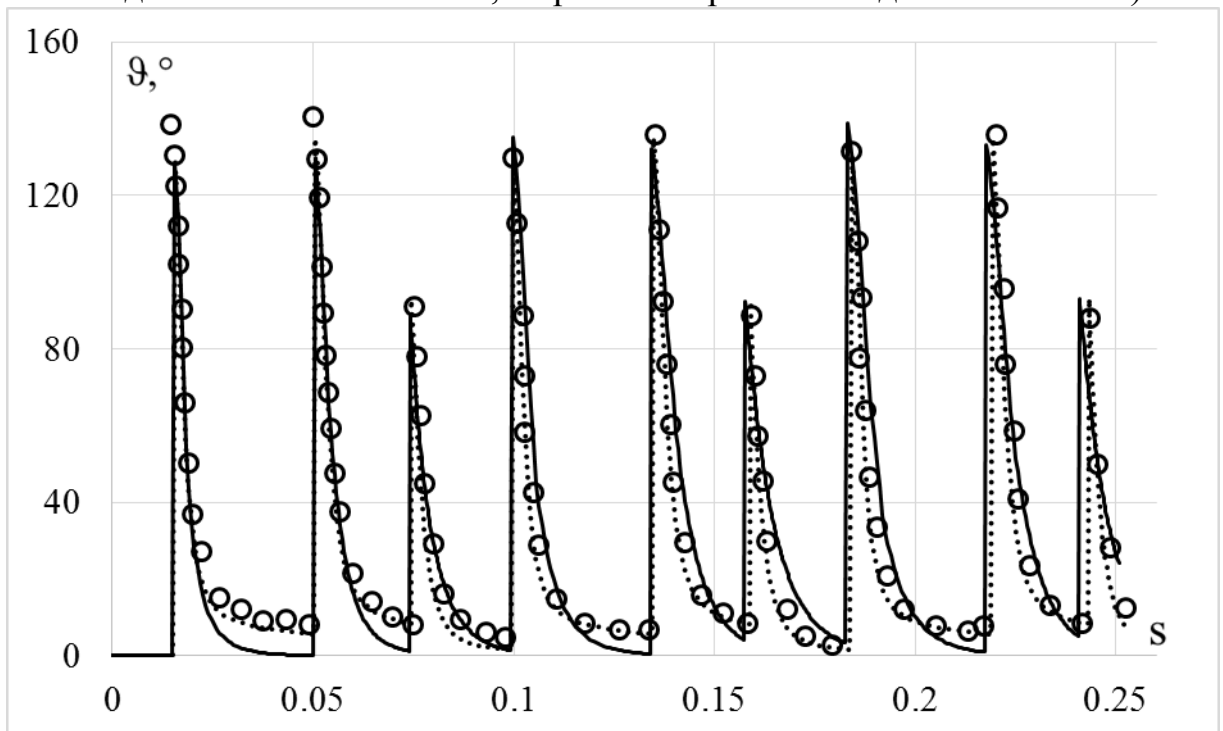


Рисунок 2.1.19 – Векторные свойства. Треугольник (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

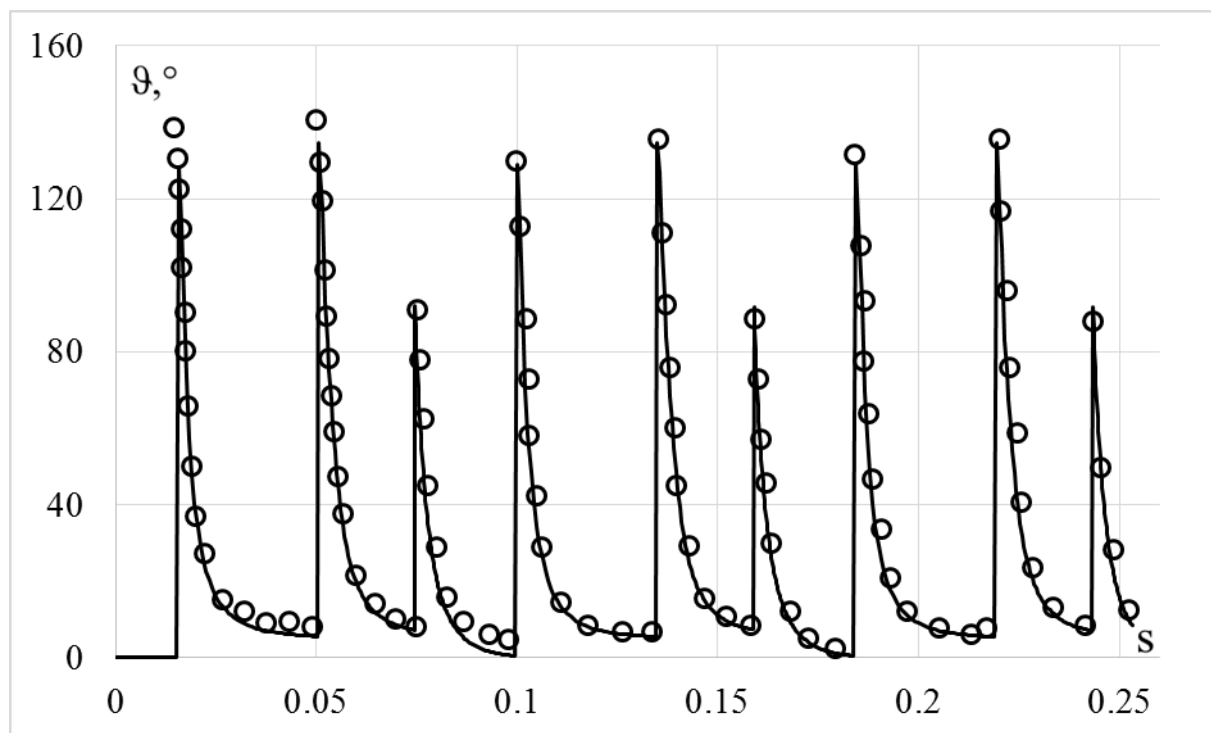


Рисунок 2.1.20 – Векторные свойства. Треугольник (сплошная кривая – модель Бондаря)

Сравнительный анализ результатов расчета по различным вариантам моделей и экспериментов по многозвенным ломанным траекториям деформаций показывает:

- По ответной траектории напряжений худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно-Ванга и Темиса-Худяковой; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, Армстронга-Фредерика-Кадашевича и Шабоша; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

- По скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно-Ванга и Темиса-Худяковой; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, Армстронга-Фредерика-Кадашевича и Шабоша; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

- По векторным свойствам худшие результаты получены на основе модели Оно-Ванга; удовлетворительные – на основе моделей изотропного упрочнения, Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, Темиса-Худяковой;

лучшее соответствие эксперименту достигается на основе моделей Армстронга-Фредерика-Кадашевича, Шабоша и Бондаря.

2.2 Криволинейные траектории деформаций постоянной кривизны в виде окружностей

Сравнительный анализ вариантов моделей пластичности по плоской траектории деформаций постоянной кривизны проводится на траектории деформаций (Рисунок 2.2.1), представляющей собой три окружности с радиусами кривизны 0,0025, 0,005 и 0,0075. Переход с одной окружности на другую осуществляется в начале координат. Эти окружности относятся к траекториям деформаций большой и средней кривизны. Материал, на котором проводились исследования – конструкционная сталь 9Х2 [60, 105].

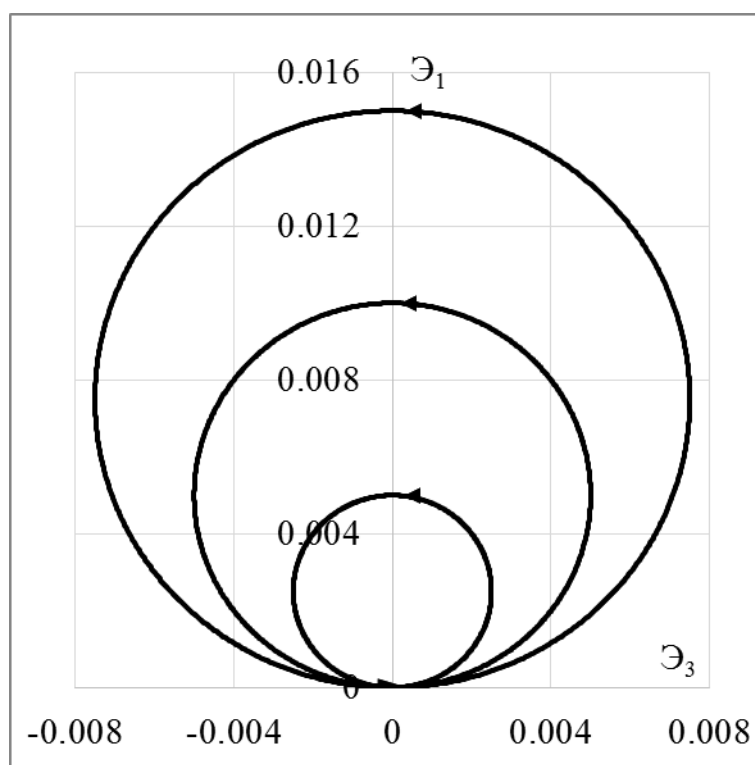


Рисунок 2.2.1 – Траектория деформаций. Окружности

Функции компонент вектора деформации и их скорости описываются по следующему закону:

$$\varepsilon_1 = 0,0025[t](1 - \cos(2\pi t)), \quad (2.2.1)$$

$$\dot{\epsilon}_3 = 0,0025[t]\sin(2\pi t), \quad (2.2.2)$$

$$\dot{\epsilon}_1 = 0,01\pi[t]\sin(2\pi t), \quad (2.2.3)$$

$$\dot{\epsilon}_3 = 0,005\pi[t]\cos(2\pi t) \quad (2.2.4)$$

Экспериментальные результаты [60, 105] на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми. Ответные траектории напряжений показаны на рисунках 2.2.2, 2.2.3 и 2.2.4. Скалярные и векторные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ и угла сближения ϑ по траектории деформаций s приведены на рисунках 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7 и 2.2.8, 2.2.9, 2.2.10 соответственно.

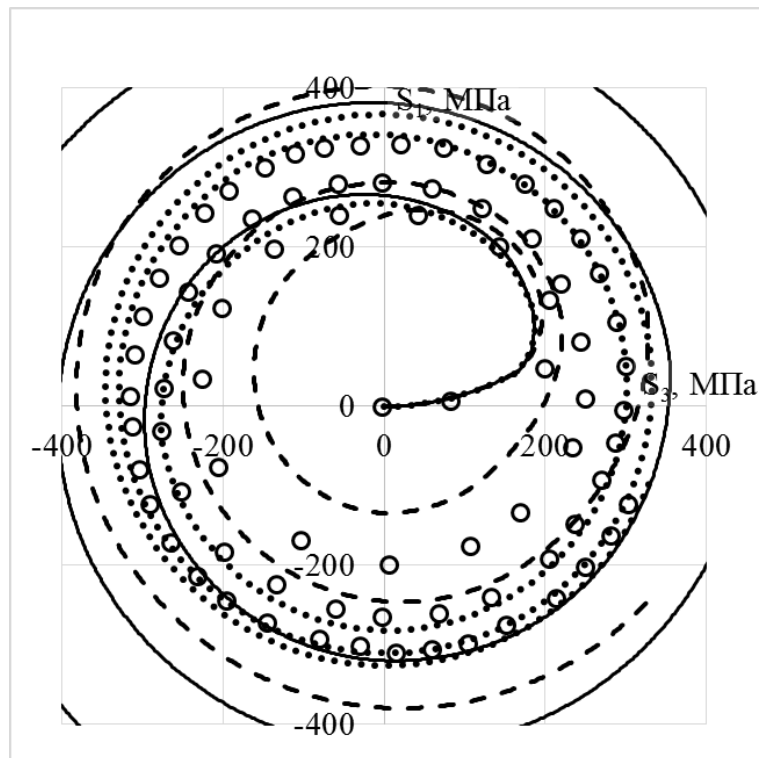


Рисунок 2.2.2 – Траектория напряжений. Окружности (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

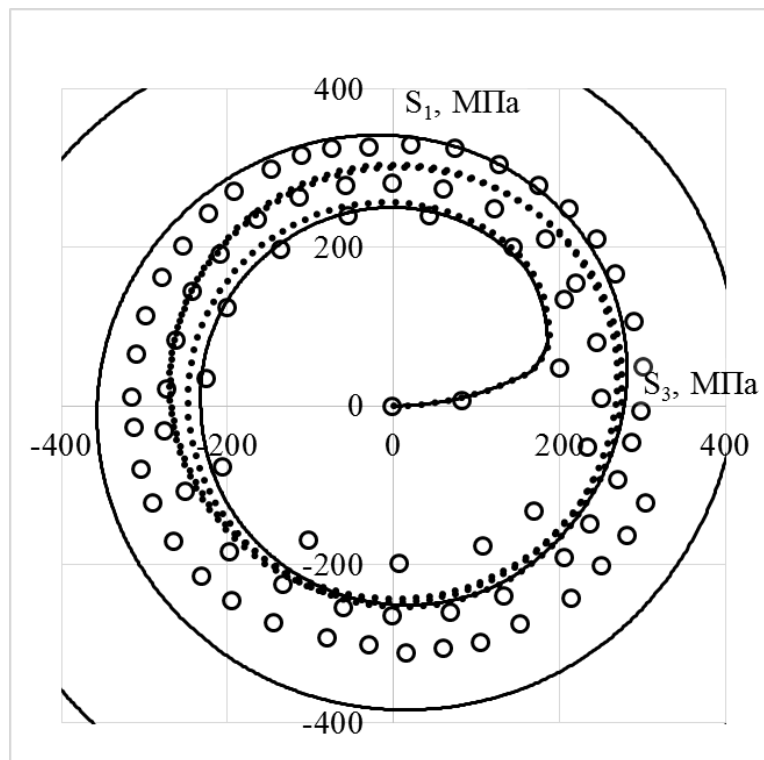


Рисунок 2.2.3 – Траектория напряжений. Окружности (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

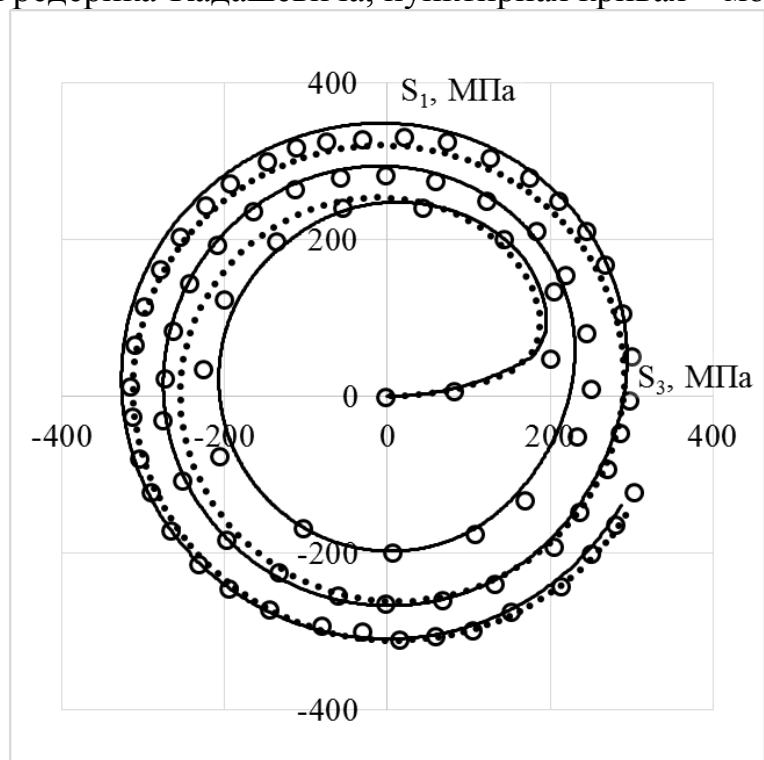


Рисунок 2.2.4 – Траектория напряжений. Окружности (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

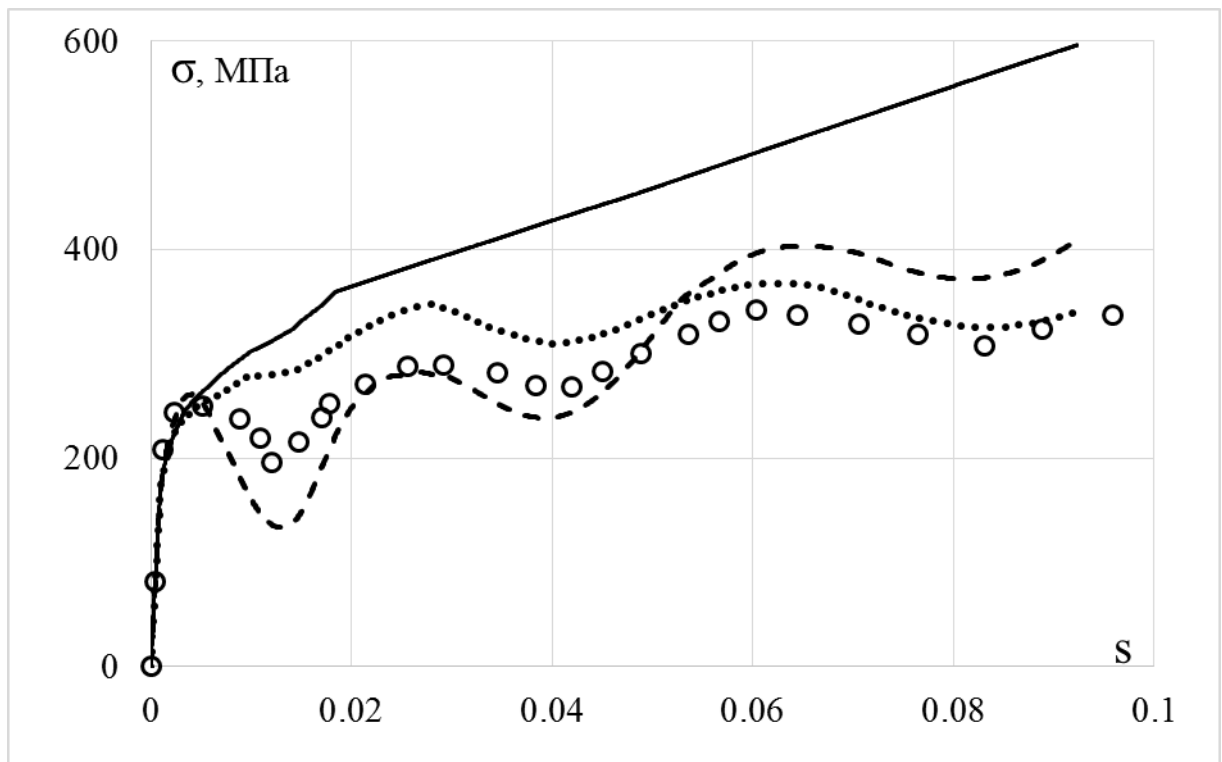


Рисунок 2.2.5 – Скалярные свойства. Окружности (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

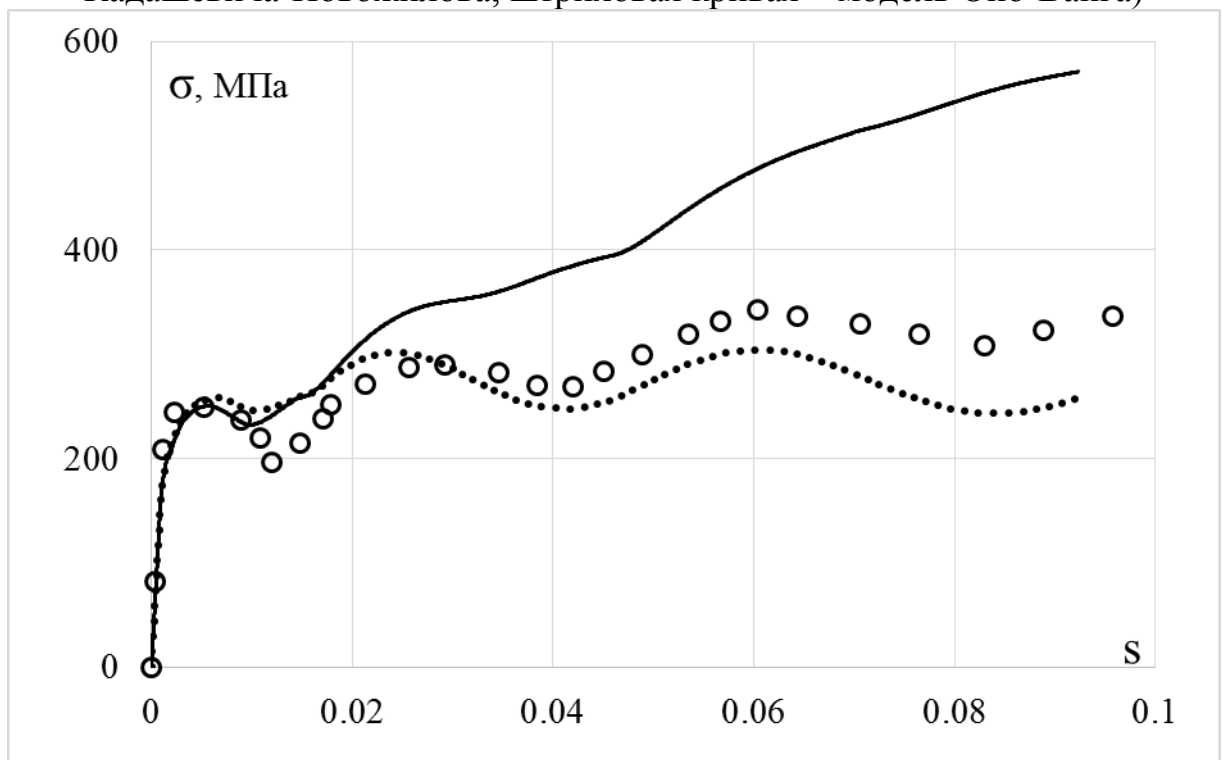


Рисунок 2.2.6 – Скалярные свойства. Окружности (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

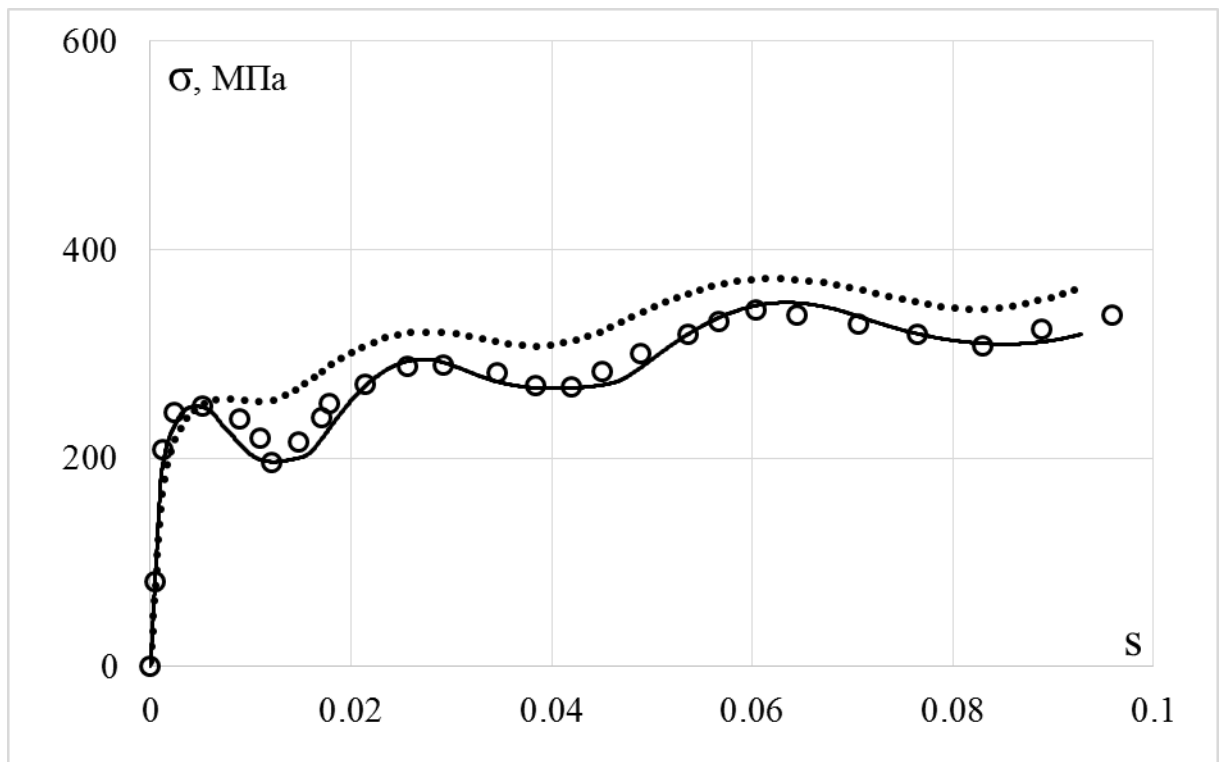


Рисунок 2.2.7 – Скалярные свойства. Окружности (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

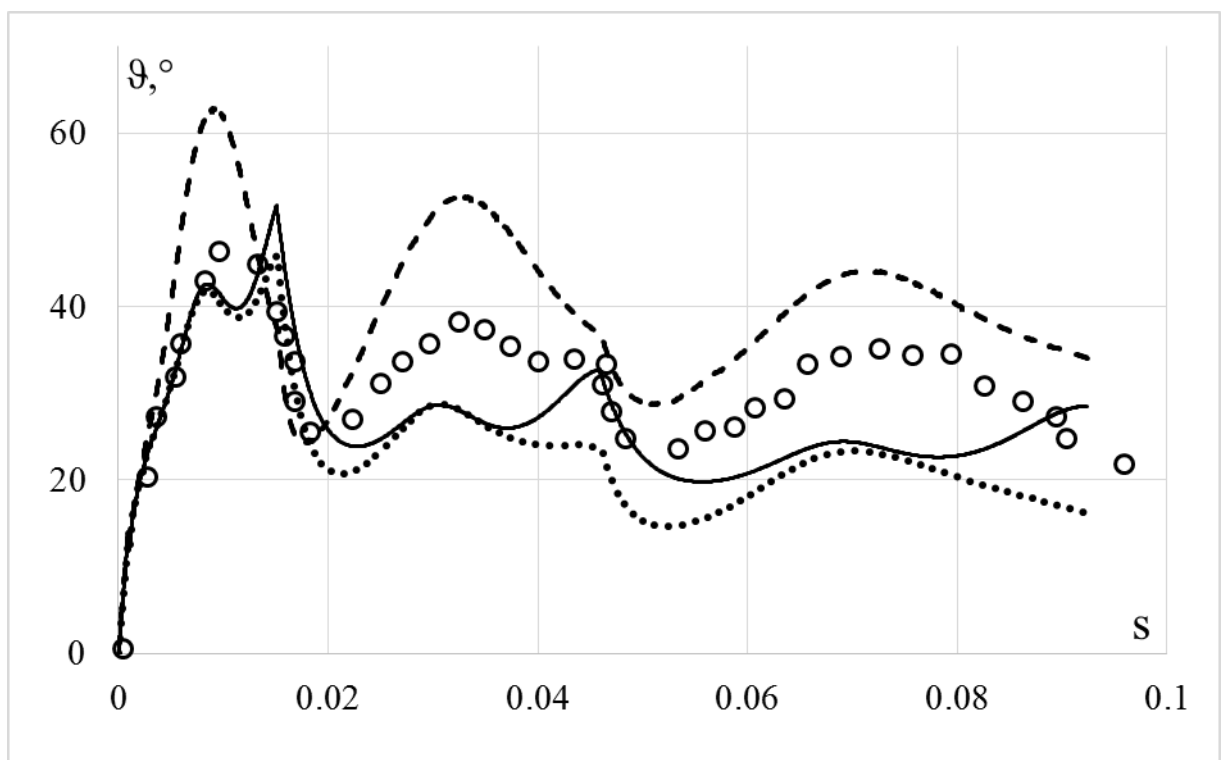


Рисунок 2.2.8 – Векторные свойства. Окружности (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

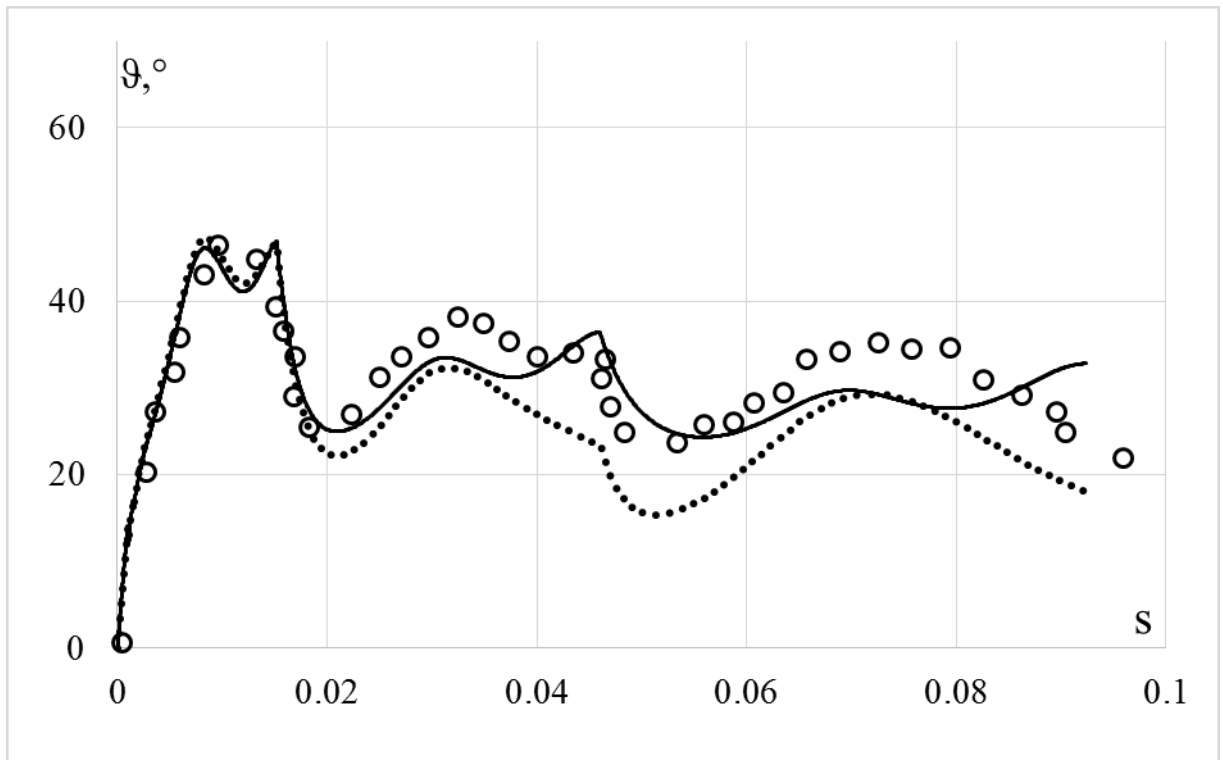


Рисунок 2.2.9 – Векторные свойства. Окружности (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

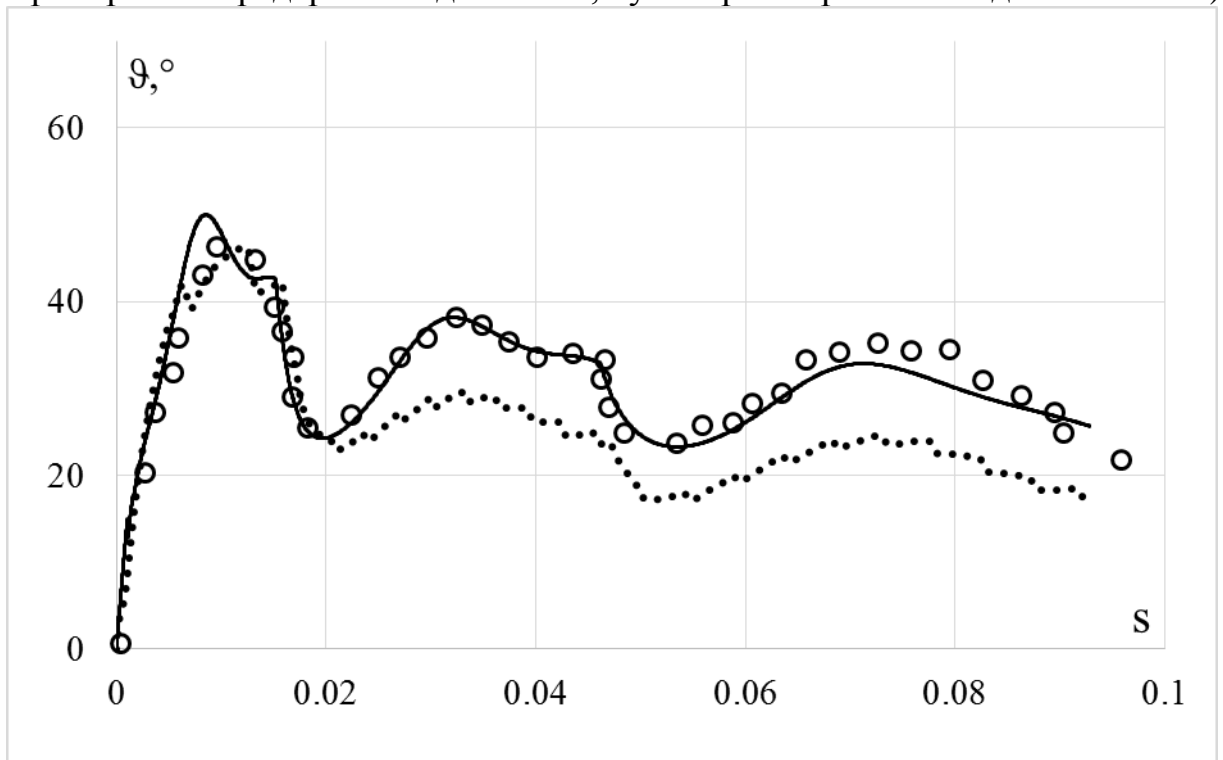


Рисунок 2.2.10 – Векторные свойства. Окружности (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

Сравнительный анализ моделей пластичности по траектории деформаций постоянной кривизны проводится на траектории (Рисунок 2.2.11) в виде

концентрических окружностей с общим центром в начале координат. Осуществляется пять витков траектории с радиусами кривизны равными 0,0025, 0,005, 0,0075, 0,01 и 0,0125. Переход с одной окружности на другую осуществляется по прямолинейной траектории, совпадающей с радиусом. Материал исследования – конструкционная сталь 40X16H9Г2С [60, 105].

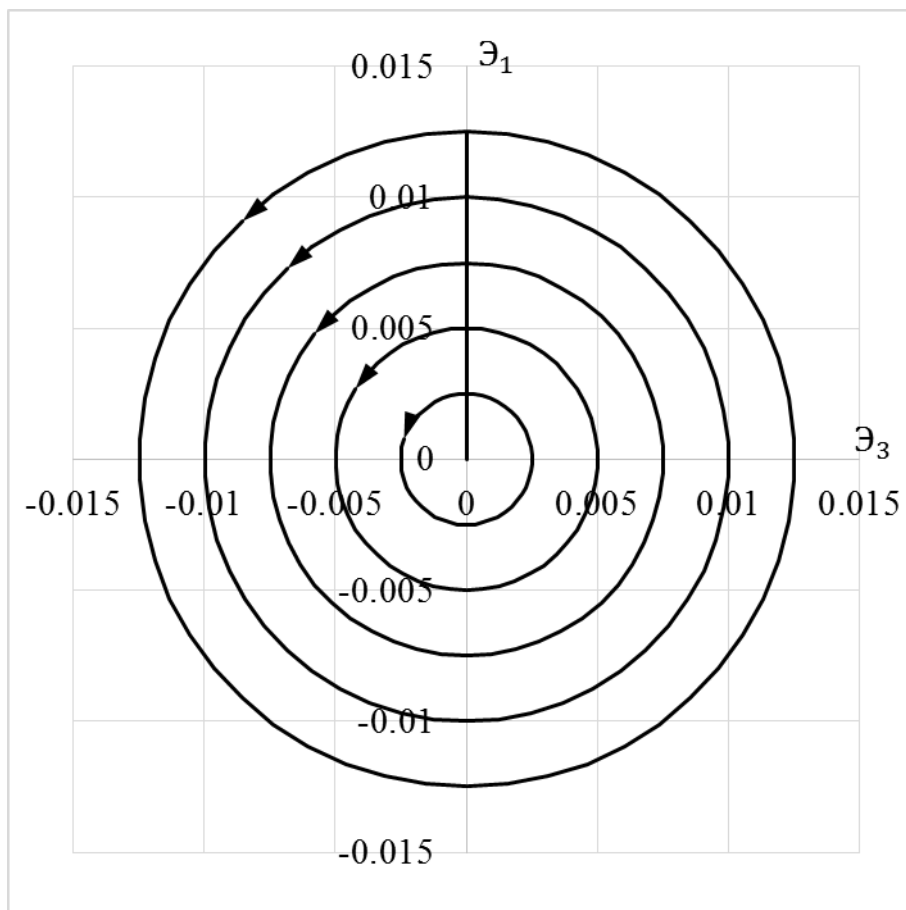


Рисунок 2.2.11 – Траектория деформаций. Окружности с общим центром в начале координат

Производные компонент вектора деформаций $\bar{\mathcal{E}}$ задаются по следующему закону:

$$\mathcal{E}_1 = \begin{cases} 0,0025(2t - [t]) & (t - [t]) < 0,5 \\ 0,0025[t] \cos(4\pi t) & (t - [t]) \geq 0,5' \end{cases} \quad (2.2.5)$$

$$\mathcal{E}_3 = \begin{cases} 0 & (t - [t]) < 0,5 \\ -0,0025[t] \sin(4\pi t) & (t - [t]) \geq 0,5' \end{cases} \quad (2.2.6)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_1 = \begin{cases} 0,005 & (t - [t]) < 0,5 \\ -0,01\pi[t] \sin(4\pi t) & (t - [t]) \geq 0,5' \end{cases} \quad (2.2.7)$$

$$\dot{\epsilon}_3 = \begin{cases} 0 & (t - [t]) < 0,5 \\ -0,01\pi[t]\cos(4\pi t) & (t - [t]) \geq 0,5' \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Экспериментальные результаты [60, 105] на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми. Ответные траектории напряжений приведены на рисунках 2.2.12, 2.2.13 и 2.2.14. Скалярные и векторные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ и угла сближения ϑ по траектории деформаций s приведены на рисунках 2.2.15, 2.2.16, 2.2.17 и 2.2.18, 2.2.19, 2.2.20 соответственно.

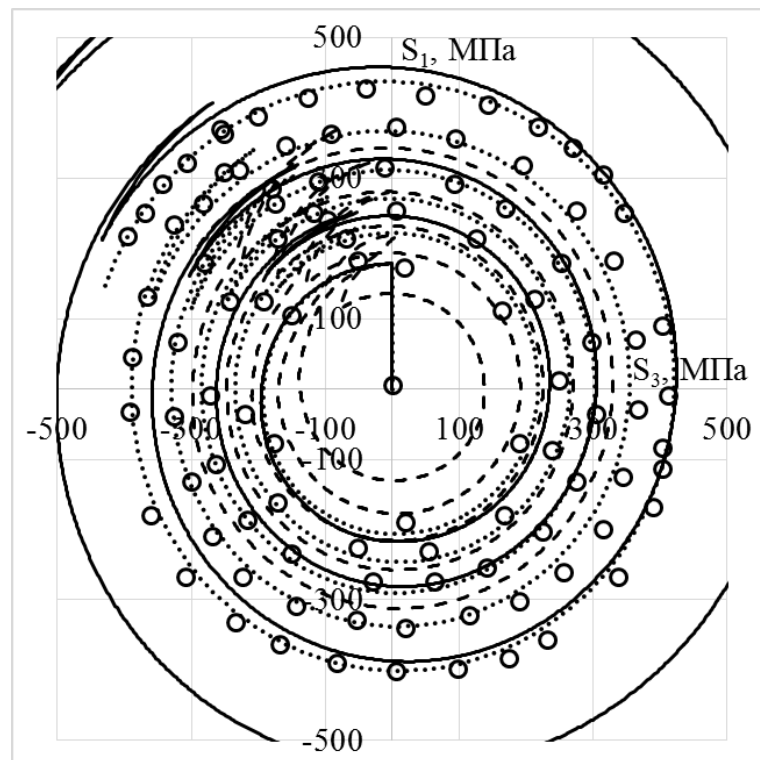


Рисунок 2.2.12 – Траектория напряжений. Окружности с общим центром в начале координат (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

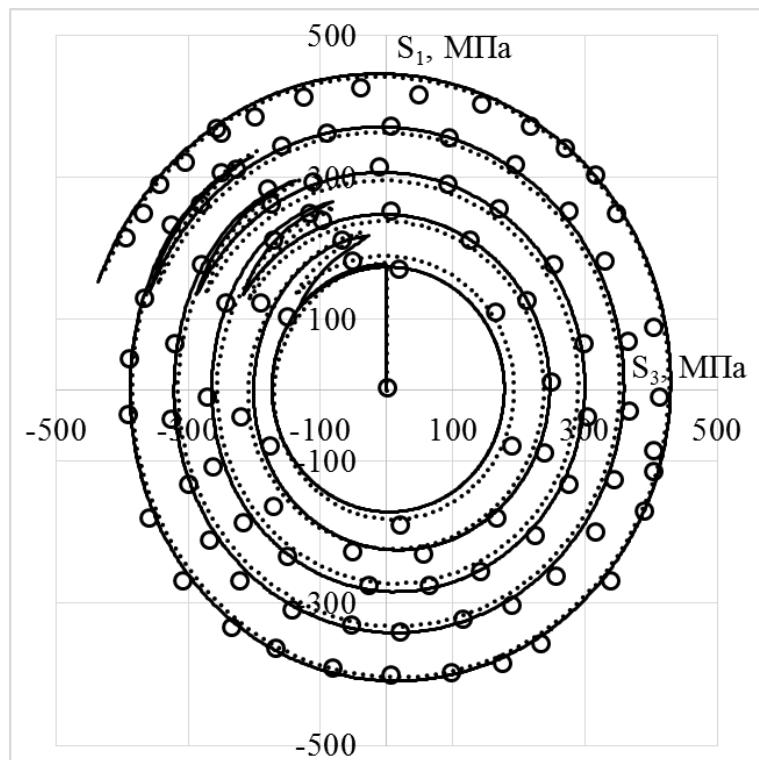


Рисунок 2.2.13 – Траектория напряжений. Окружности с общим центром в начале координат (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

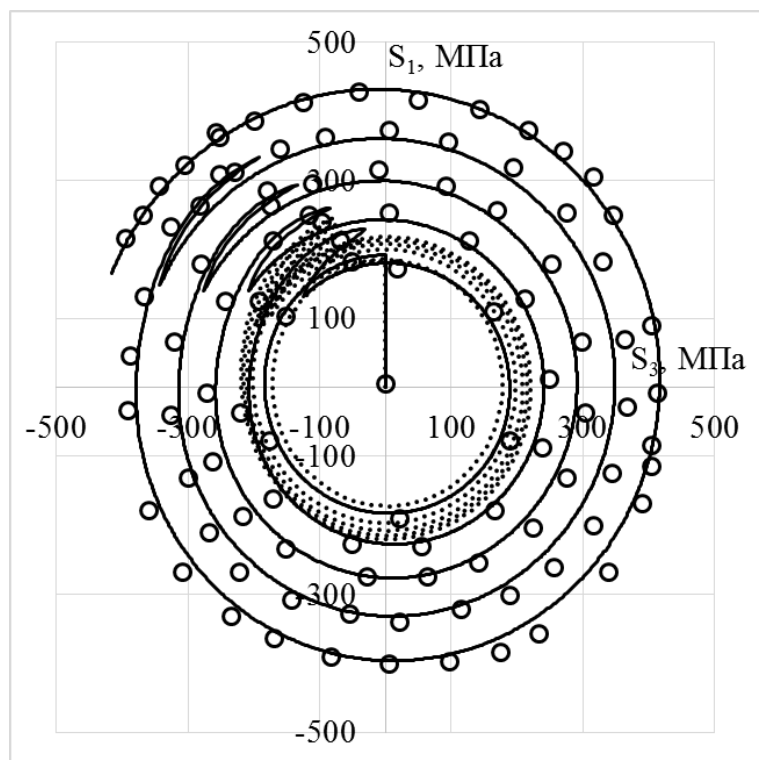


Рисунок 2.2.14 – Траектория напряжений. Окружности с общим центром в начале координат (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

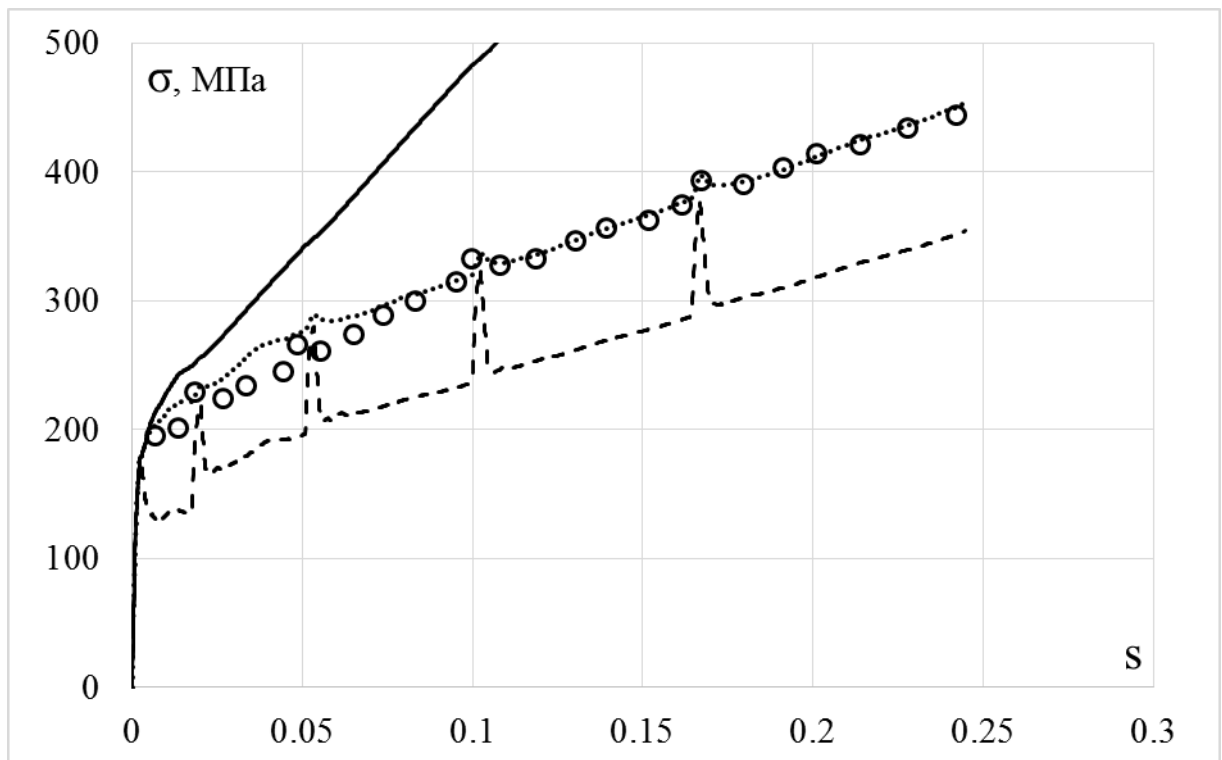


Рисунок 2.2.15 – Скалярные свойства. Окружности. Окружности с общим центром в начале координат (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

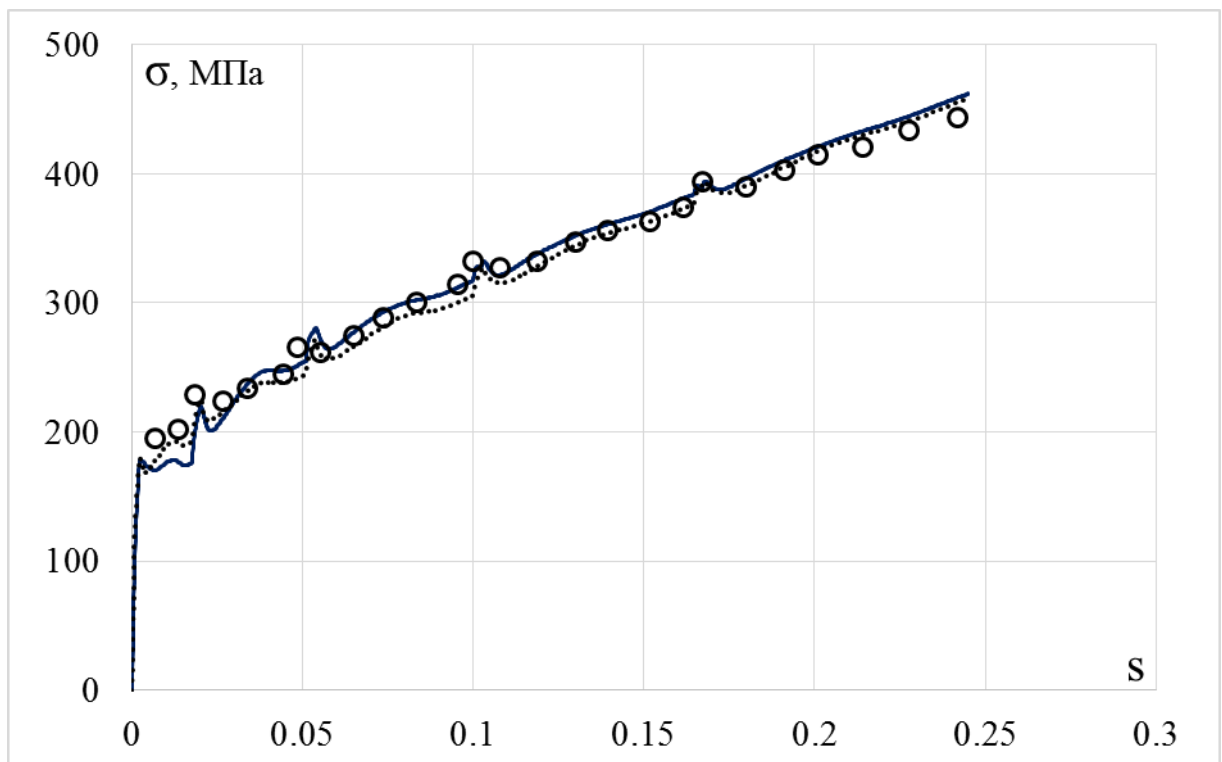


Рисунок 2.2.16 – Скалярные свойства. Окружности с общим центром в начале координат. (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

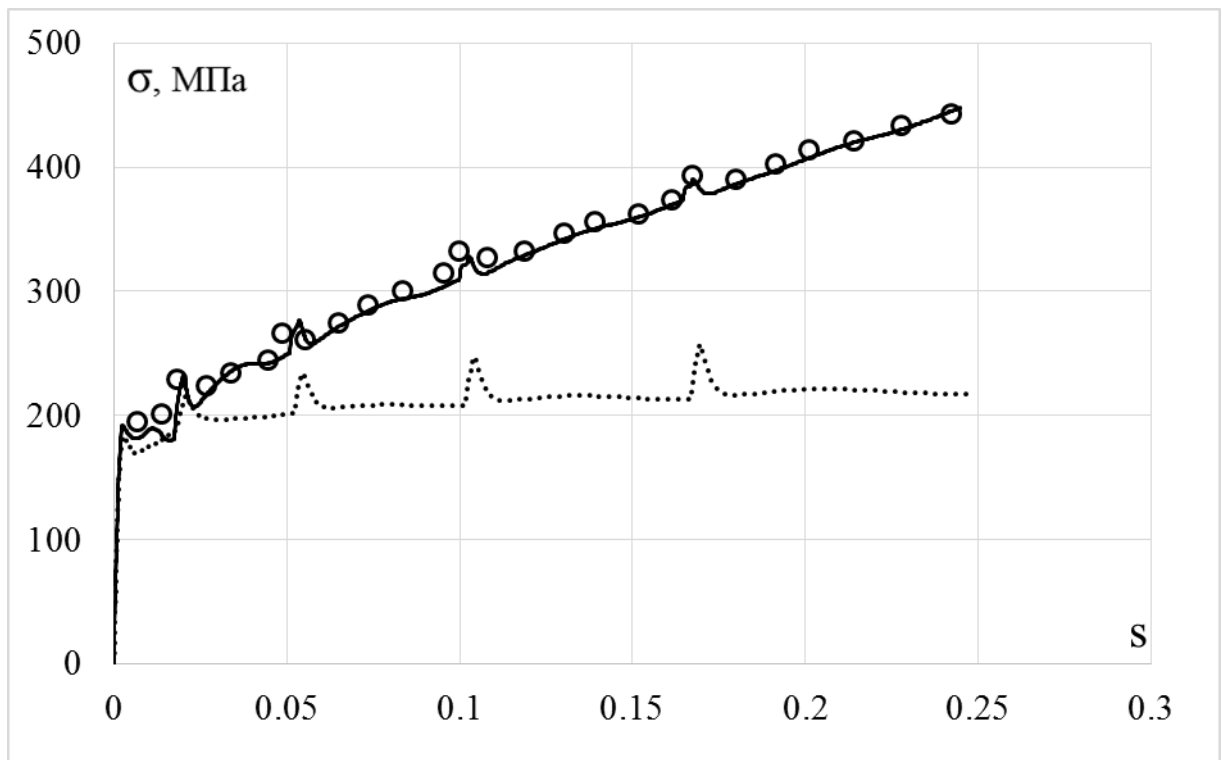


Рисунок 2.2.17 – Скалярные свойства. Окружности с общим центром в начале координат. (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

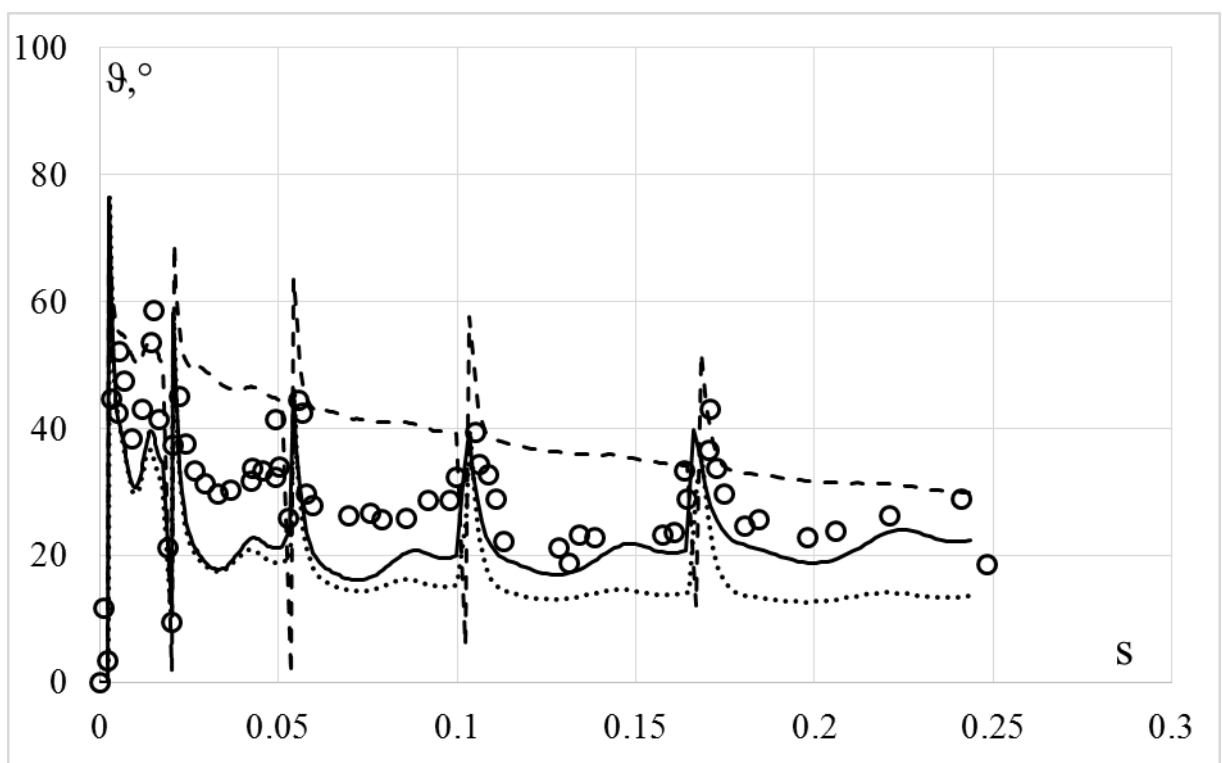


Рисунок 2.2.18 – Векторные свойства. Окружности с общим центром в начале координат (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

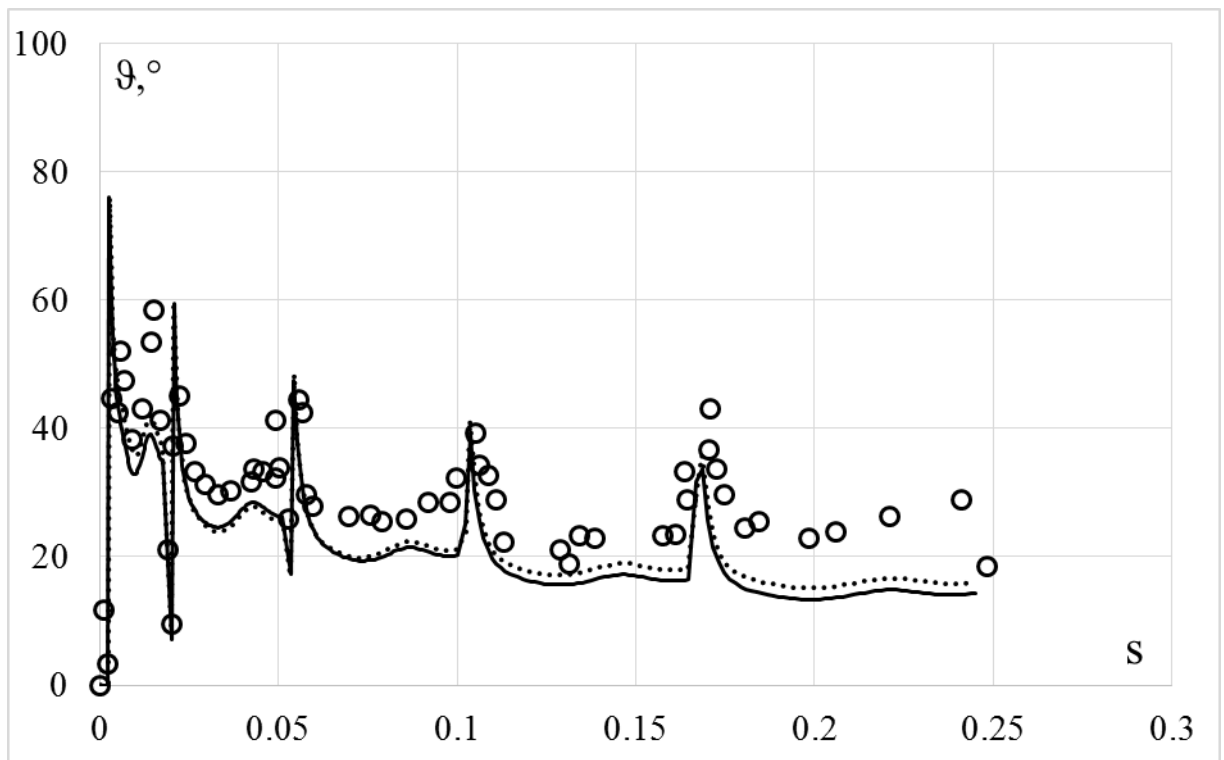


Рисунок 2.2.19 – Векторные свойства. Окружности с общим центром в начале координат. (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

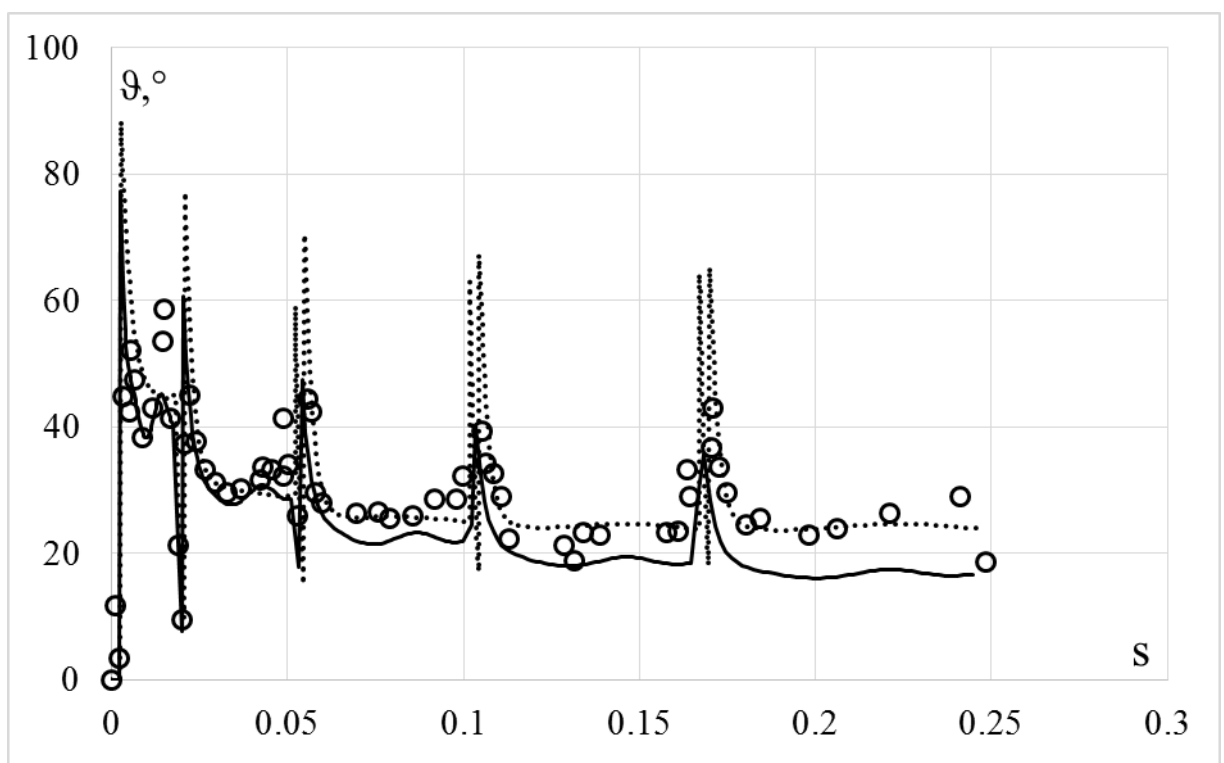


Рисунок 2.2.20 – Векторные свойства. Окружности с общим центром в начале координат. (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам моделей и эксперимента по криволинейным траекториям деформаций постоянной кривизны показывают:

- по ответным траекториям напряжений худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно-Ванга, Армстронга-Фредерика-Кадашевича; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, Шабоша, Темиса-Худяковой; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

- по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Армстронга-Фредерика-Кадашевича; удовлетворительные – на основе моделей Оно-Ванга, Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, Шабоша, Темиса-Худяковой; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

- по векторным свойствам удовлетворительные результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно-Ванга, Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, Армстронга-Фредерика-Кадашевича, Шабоша, Темиса-Худяковой; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

2.3 Криволинейные траектории деформаций переменной кривизны в виде астроида и спирали

Сравнение вариантов моделей по траектории деформаций переменной кривизны сначала проводится на траектории в виде астроида (Рисунок 2.3.1). Материал образцов, на котором проведены экспериментальные исследования – конструкционная сталь 9Х2 [60].

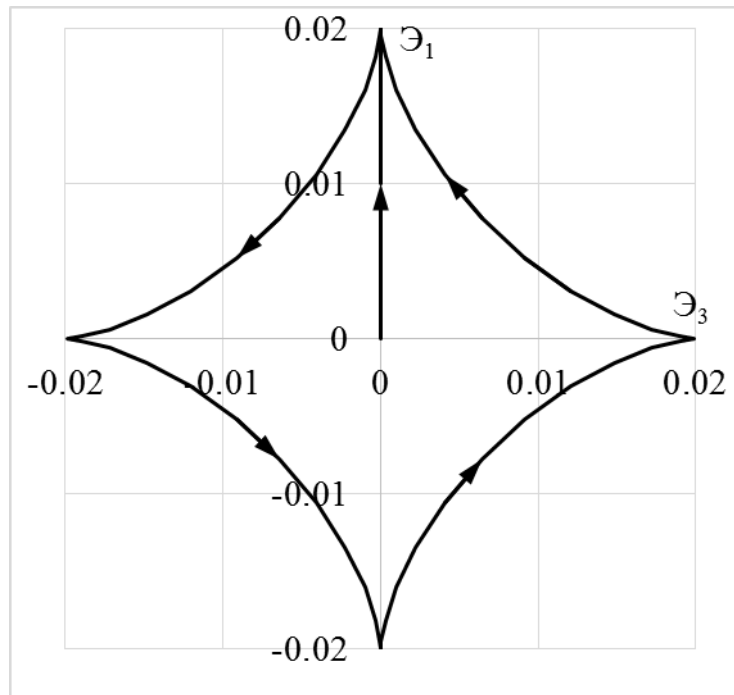


Рисунок 2.3.1 – Траектория деформаций. Астроида

Функции компонент скоростей деформации задаются по следующему закону:

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 0,02t & t < 1 \\ 0,02\cos^3(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$\epsilon_3 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ -0,02\sin^3(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (2.3.2)$$

$$\dot{\epsilon}_1 = \begin{cases} 0,02 & t < 1 \\ -0,12\pi\cos^2(2\pi t)\sin(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$\dot{\epsilon}_3 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ -0,12\pi\sin^2(2\pi t)\cos(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Экспериментальные результаты [60] на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми. Ответные траектории напряжений показаны на рисунках 2.3.2, 2.3.3 и 2.3.4. Скалярные и векторные свойства приведены на рисунках 2.3.5-2.3.10 соответственно.

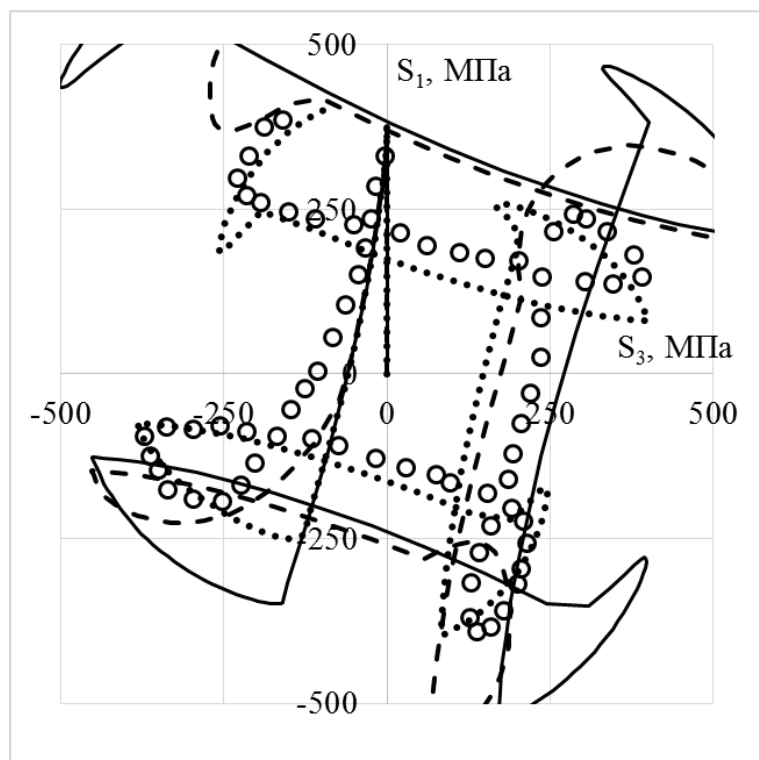


Рисунок 2.3.2 – Траектория напряжений. Астроида (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

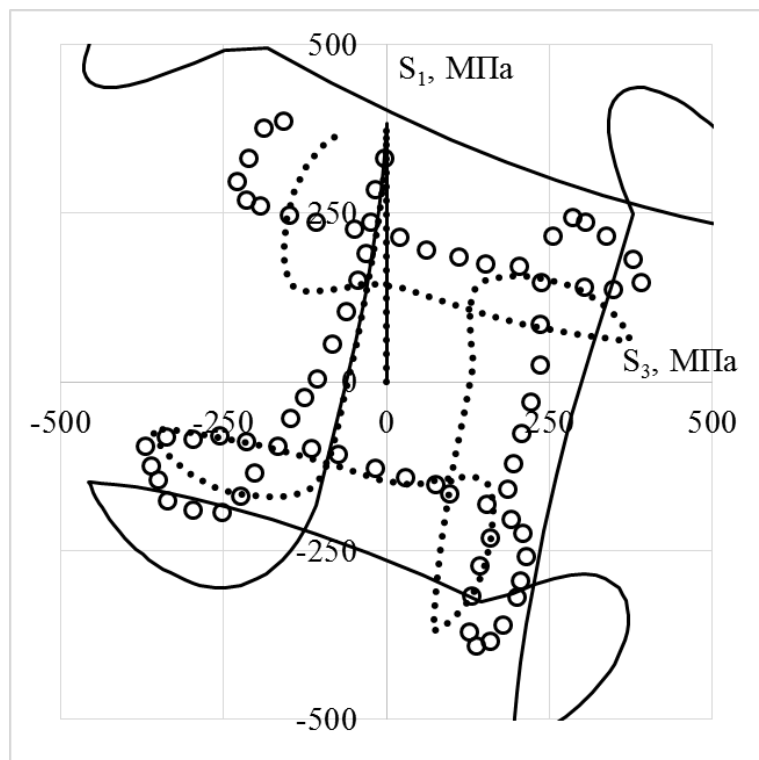


Рисунок 2.3.3 – Траектория напряжений. Астроида (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

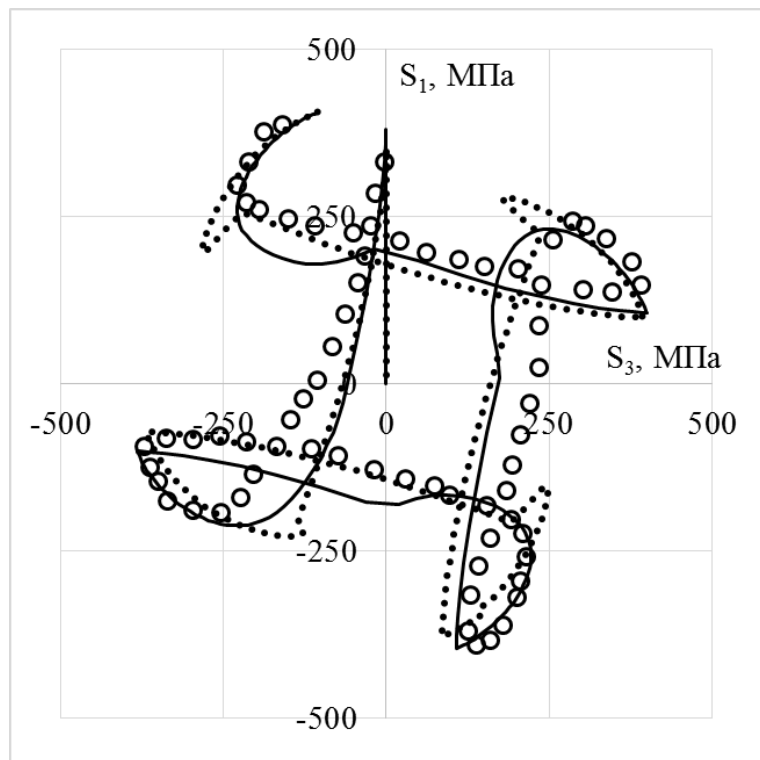


Рисунок 2.3.4 – Траектория напряжений. Астроида (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

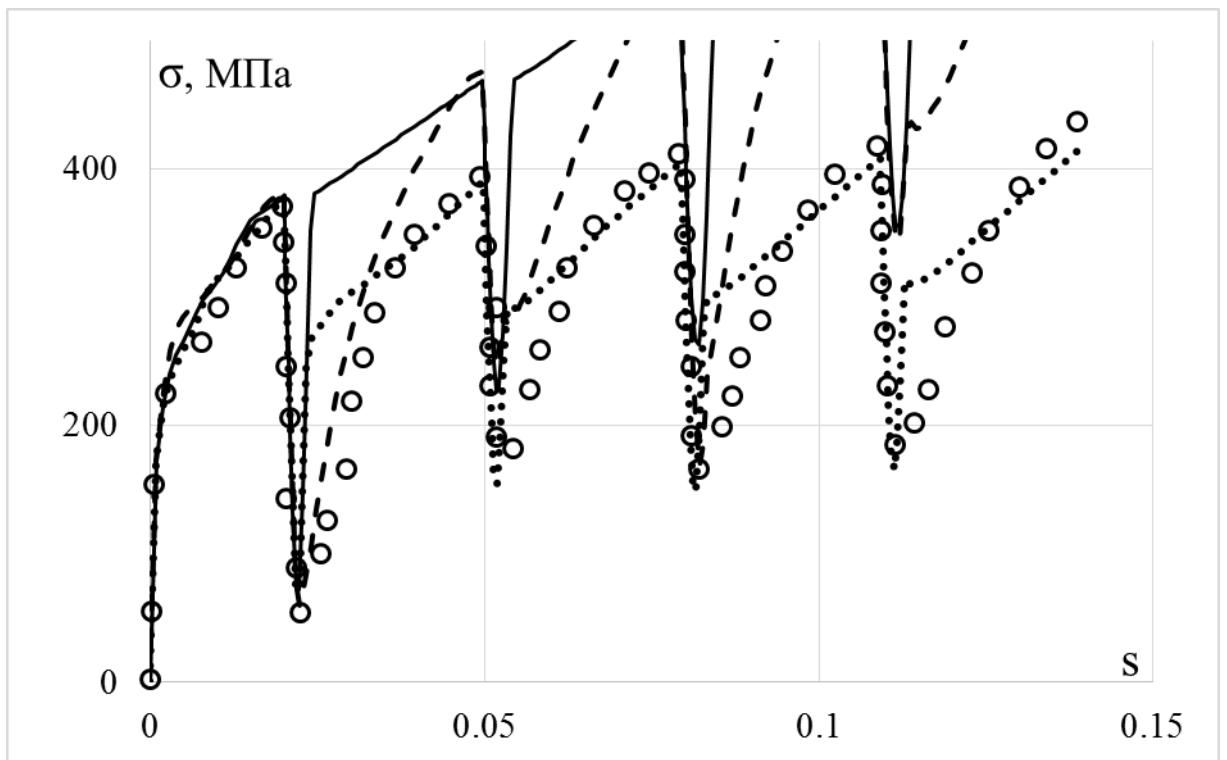


Рисунок 2.3.5 – Скалярные свойства. Астроида (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

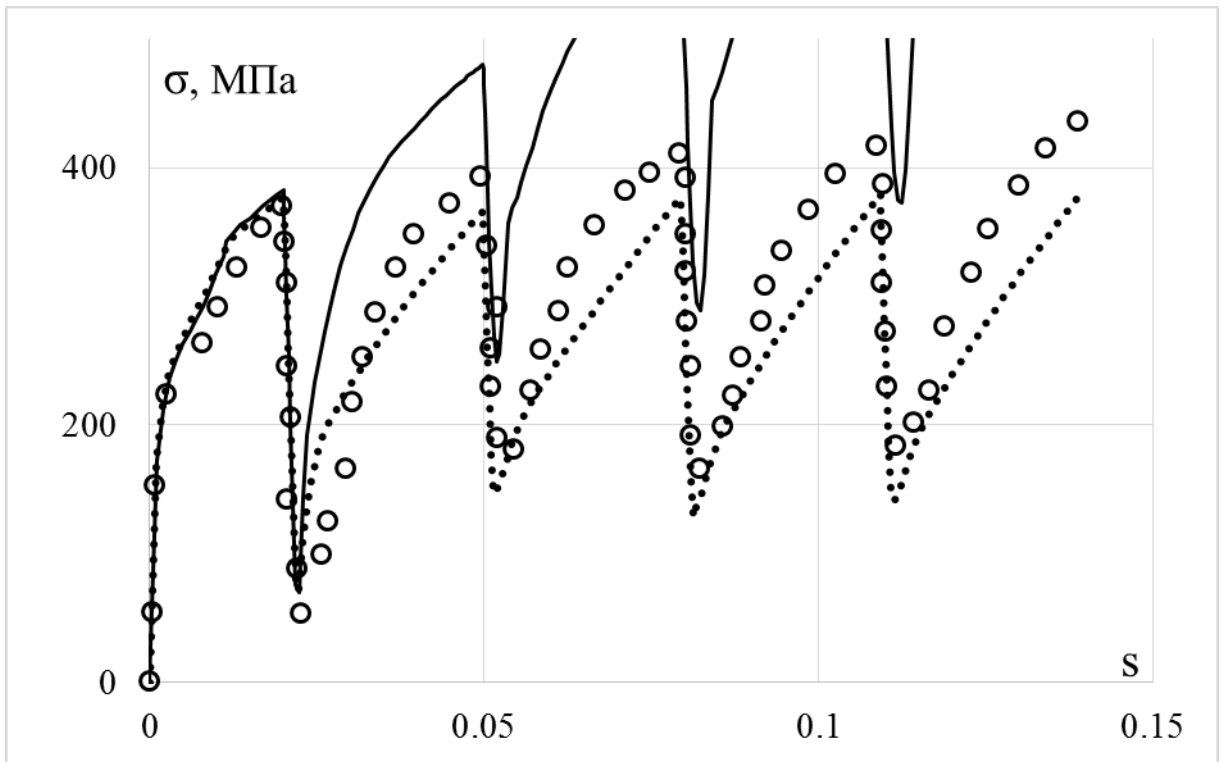


Рисунок 2.3.6 – Скалярные свойства. Астроида (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

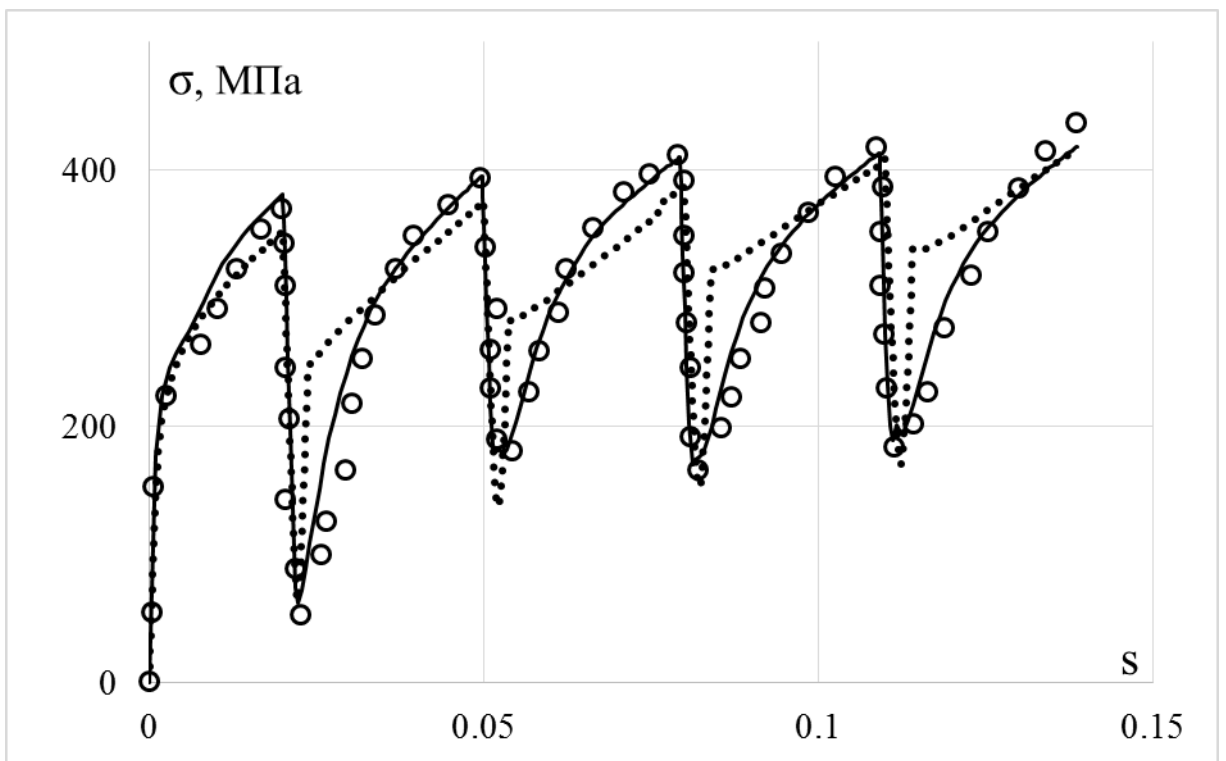


Рисунок 2.3.7 – Скалярные свойства. Астроида (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая (точки) – модель Темиса-Худяковой)

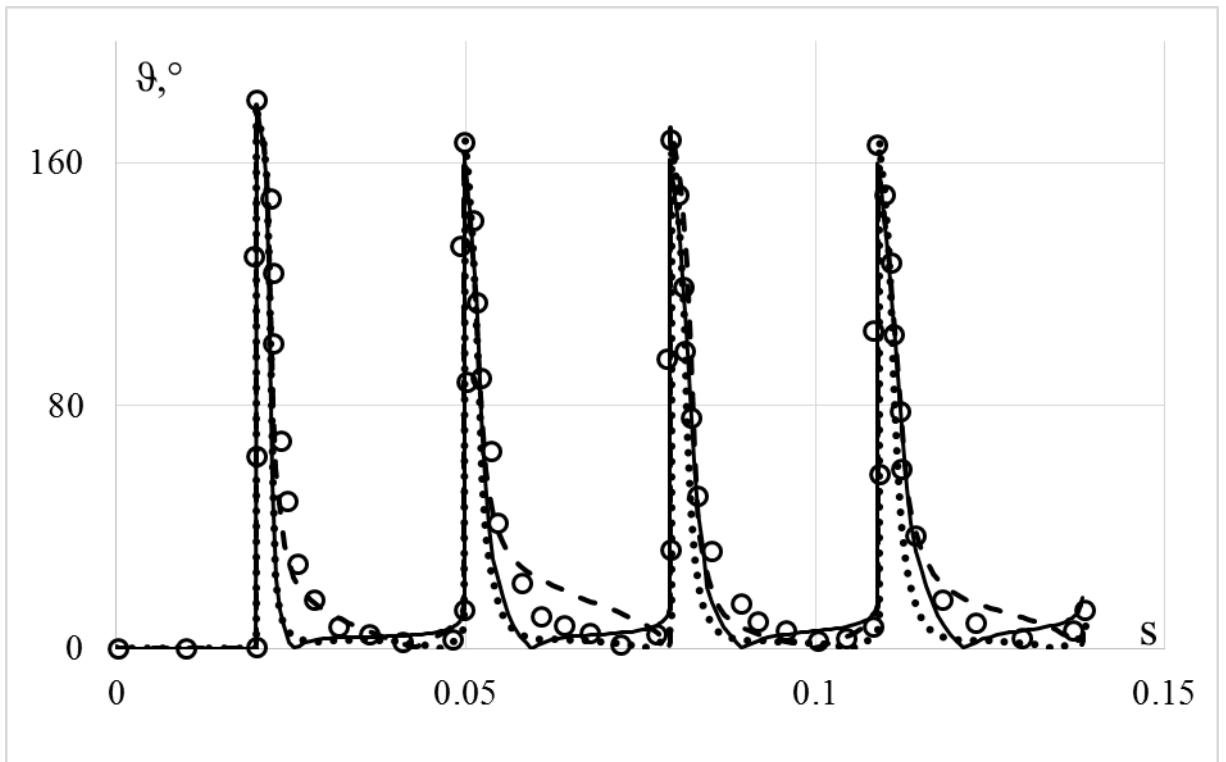


Рисунок 2.3.8 – Векторные свойства. Астроида (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

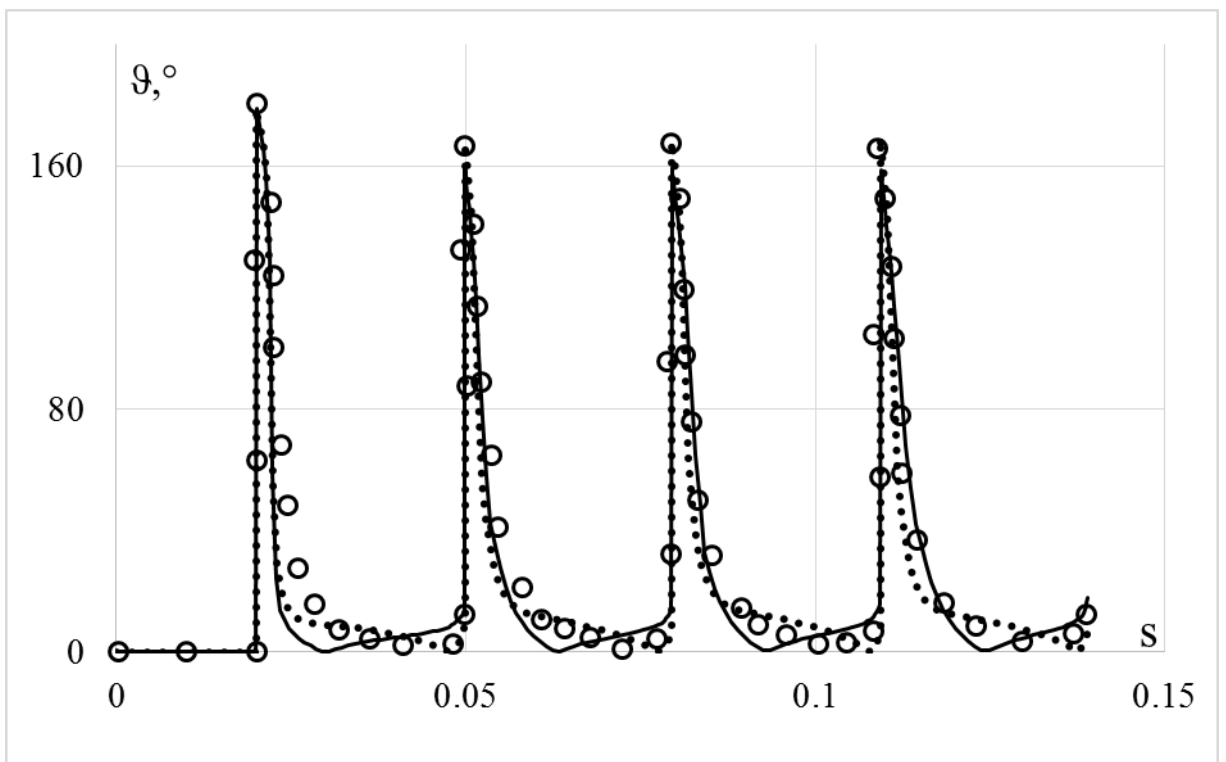


Рисунок 2.3.9 – Векторные свойства. Астроида (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

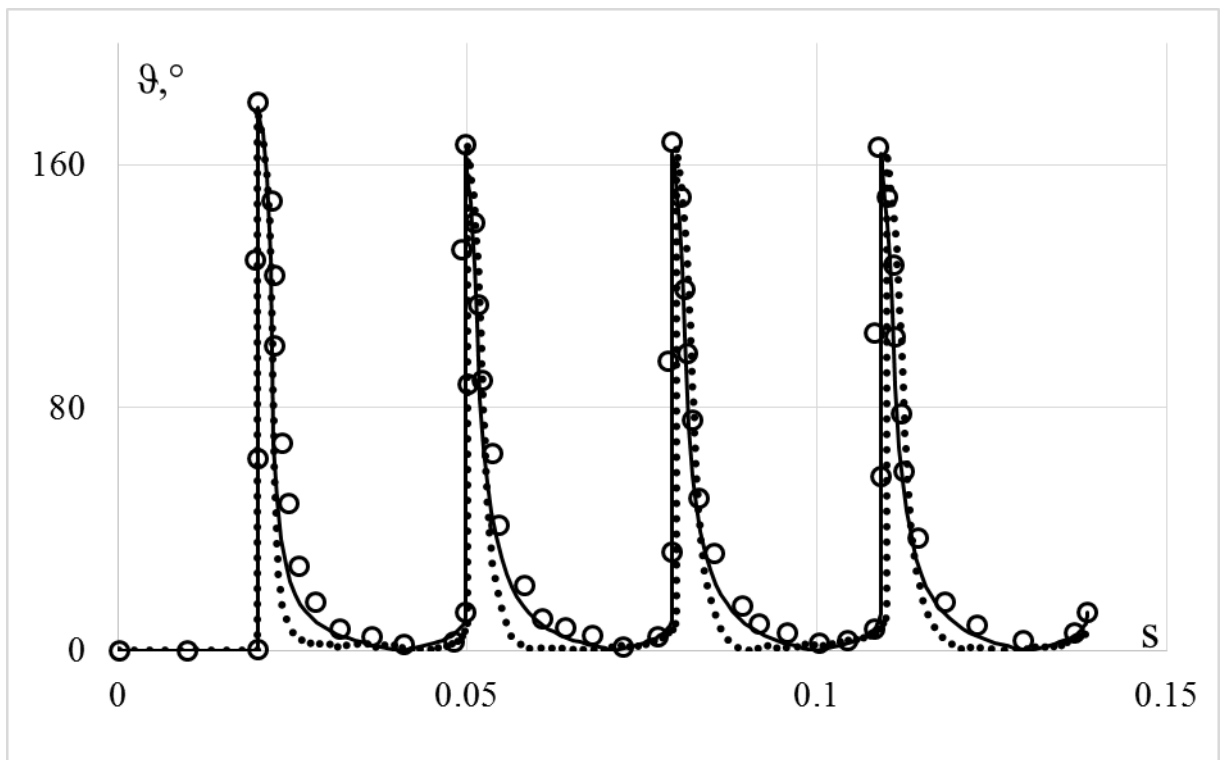


Рисунок 2.3.10 – Векторные свойства. Астроида (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

Следующая траектория переменной кривизны для сравнения вариантов моделей в виде спирали Архимеда с постоянным шагом между витками приведена на рисунке 2.3.11. Выход на спираль осуществляется по лучу \mathcal{E}_1 до $\mathcal{E}_1 = 0,01$. Рассматривается шесть полных витков спирали против часовой стрелки. На четырех первых витках происходит скручивание спирали в точку начала координат, а на пятом и шестом раскручивание спирали без изменения направления процесса деформирования. Материал экспериментальных исследований – сталь 45 [60, 105].

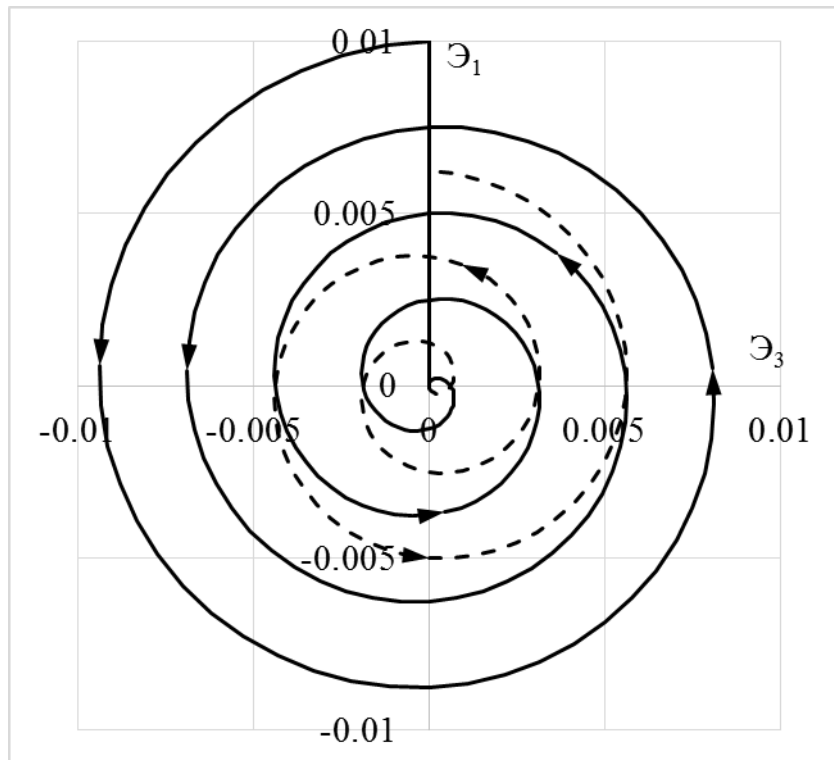


Рисунок 2.3.11 – Траектория деформаций. Спираль Архимеда

Функции компонент скоростей деформации задаются по следующему закону:

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0,01t & t < 1 \\ 0,0025 * (5 - t) * \cos(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ -0,0025 * (5 - t) * \sin(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (2.3.6)$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \begin{cases} 0,01 & t < 1 \\ -0,0025 * \cos(2\pi t) - (0,025\pi - 0,005t\pi) * \sin(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (2.3.7)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 0,0025 * \sin(2\pi t) - (0,025\pi - 0,005t\pi) * \cos(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Здесь эксперимент [60, 105] показан светлыми кружками, а расчетные результаты – сплошными, штриховыми и пунктирными кривыми. Компоненты вектора напряжений S_1, S_2, S_3 по длине траектории деформаций, т.е. как функции длины дуги траектории деформации s , показаны на рисунках 2.3.12-2.3.17. Скалярные свойства (изменение модуля вектора напряжений σ по траектории деформаций s) приведены на рисунках 2.3.18, 2.3.19 и 2.3.20. Векторные свойства

(изменение угла сближения ϑ по траектории деформаций s) показаны на рисунках 2.3.21, 2.3.22 и 2.3.23.

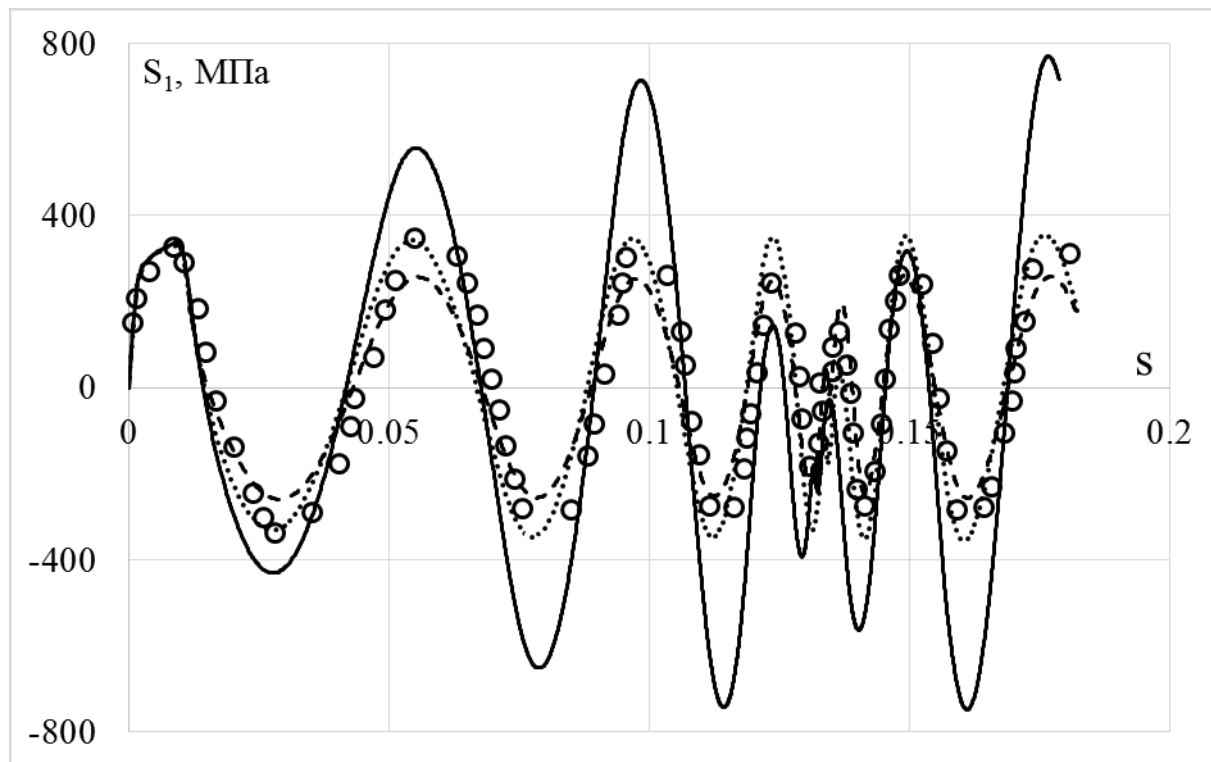


Рисунок 2.3.12 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений по длине траектории деформаций. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

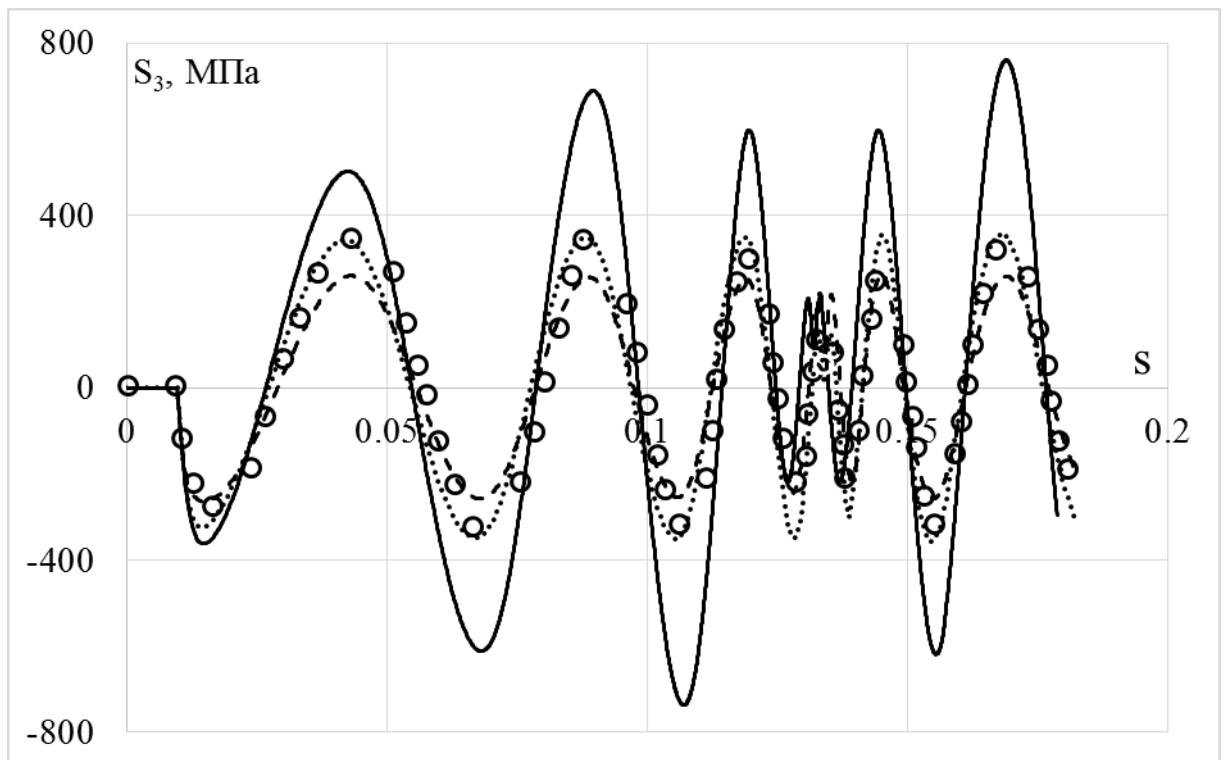


Рисунок 2.3.13 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений по длине траектории деформаций. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

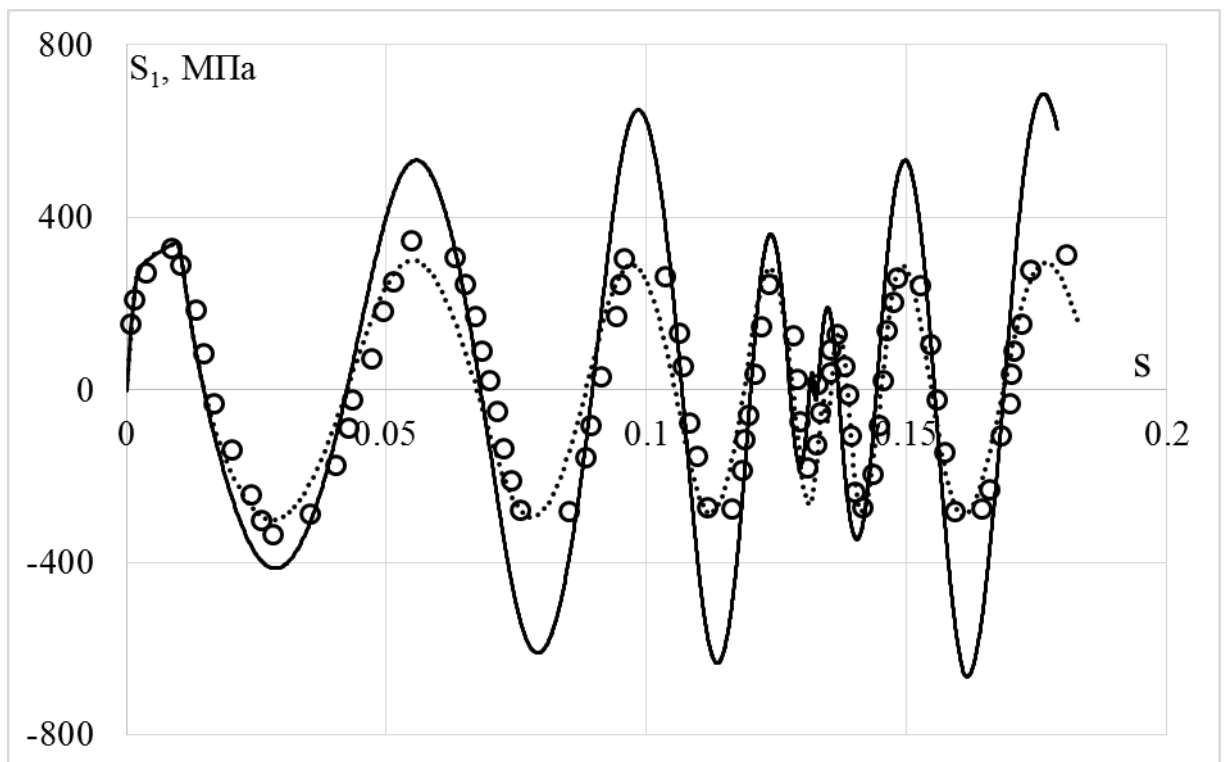


Рисунок 2.3.14 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений по длине траектории деформаций. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

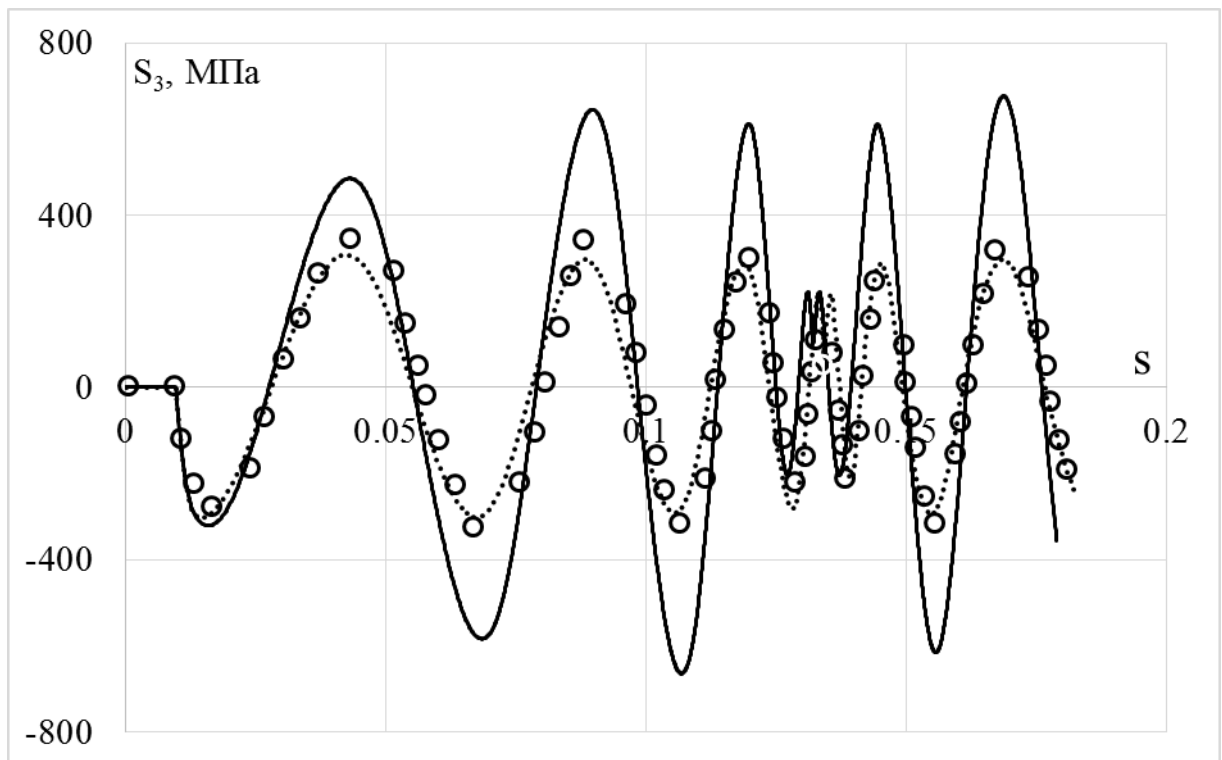


Рисунок 2.3.15 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений по длине траектории деформаций. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

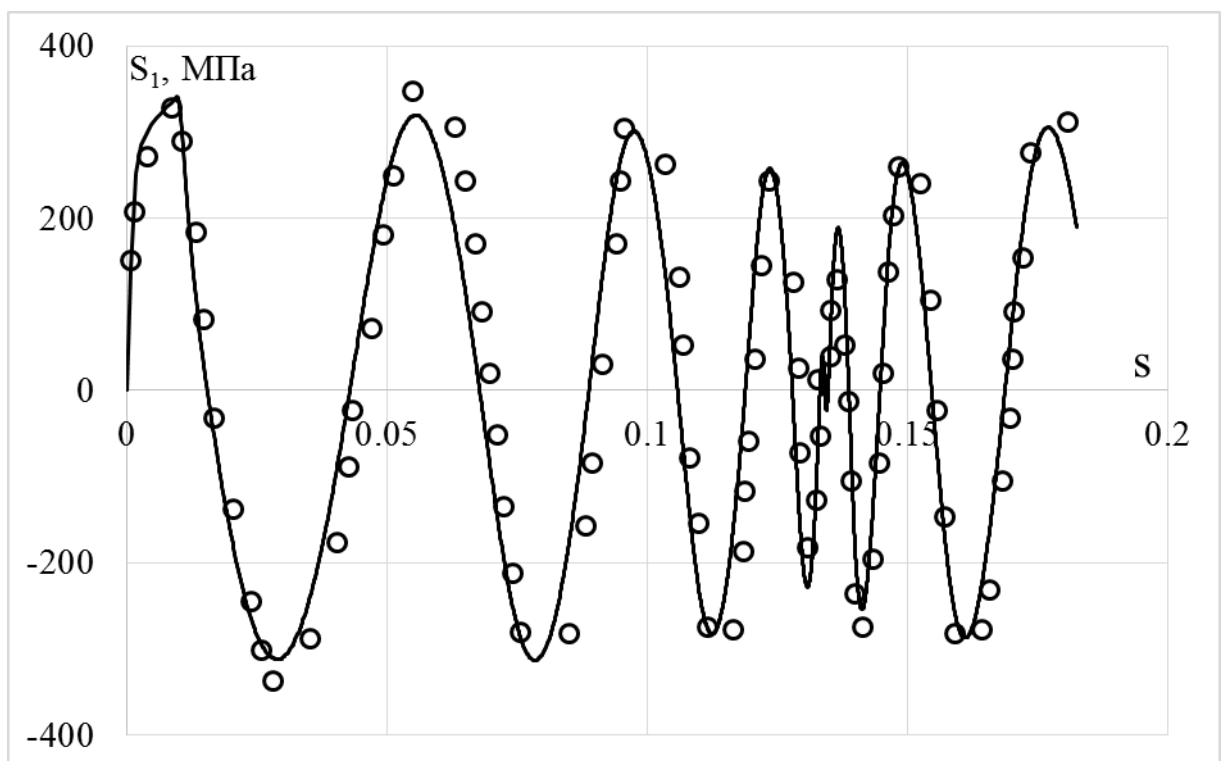


Рисунок 2.3.16 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений по длине траектории деформаций. (сплошная кривая – модель Бондаря)

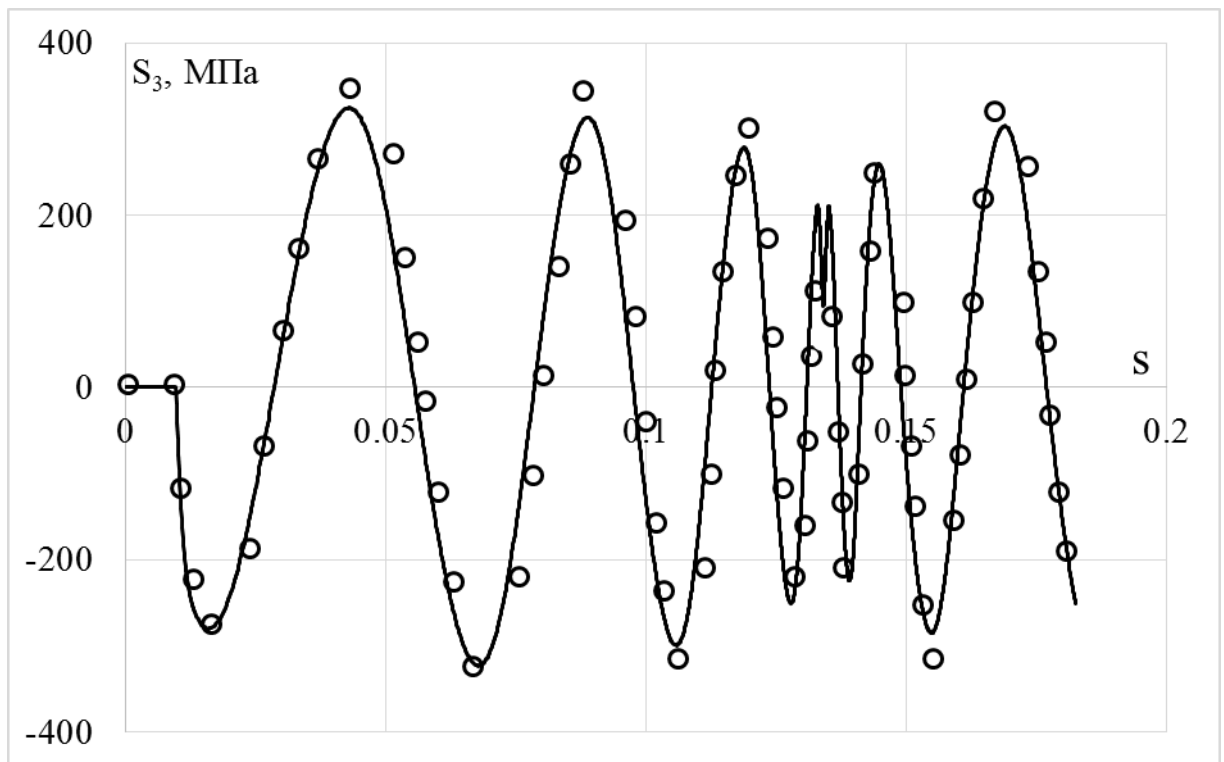


Рисунок 2.3.17 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений по длине траектории деформаций. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель Бондаря)

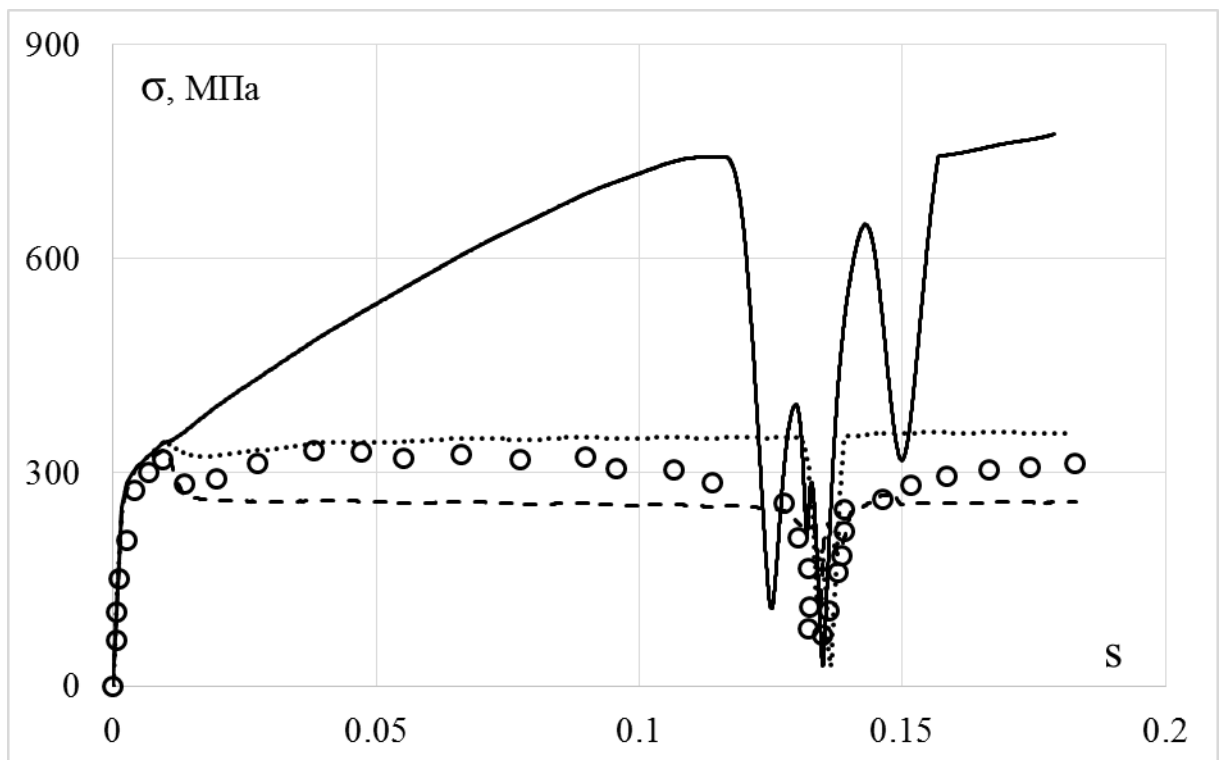


Рисунок 2.3.18 – Скалярные свойства. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

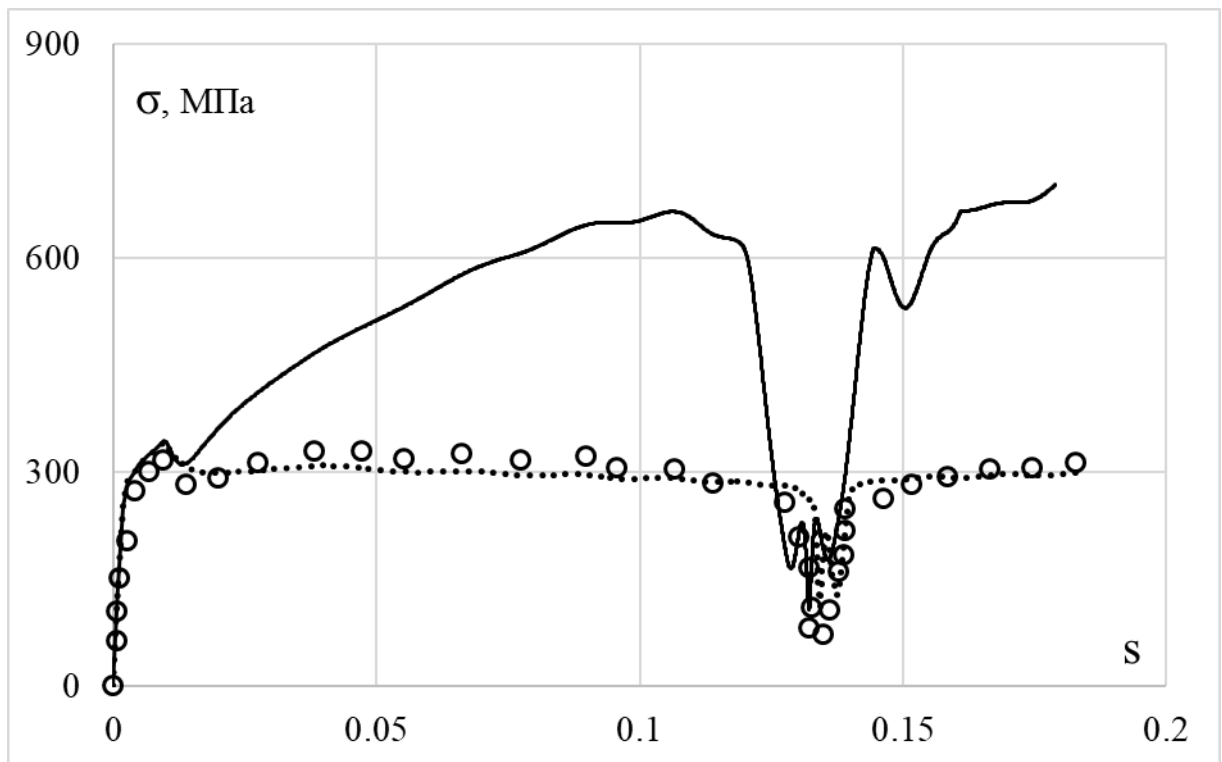


Рисунок 2.3.19 – Скалярные свойства. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

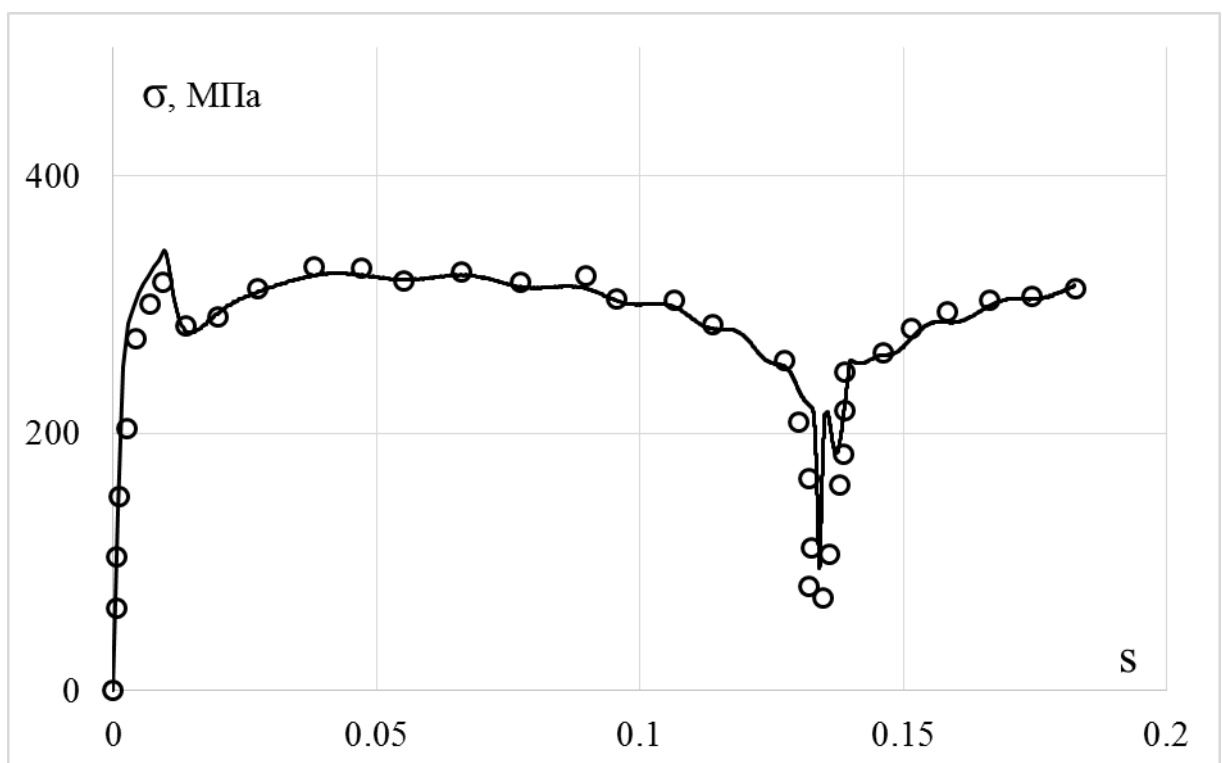


Рисунок 2.3.20 – Скалярные свойства. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель Бондаря)

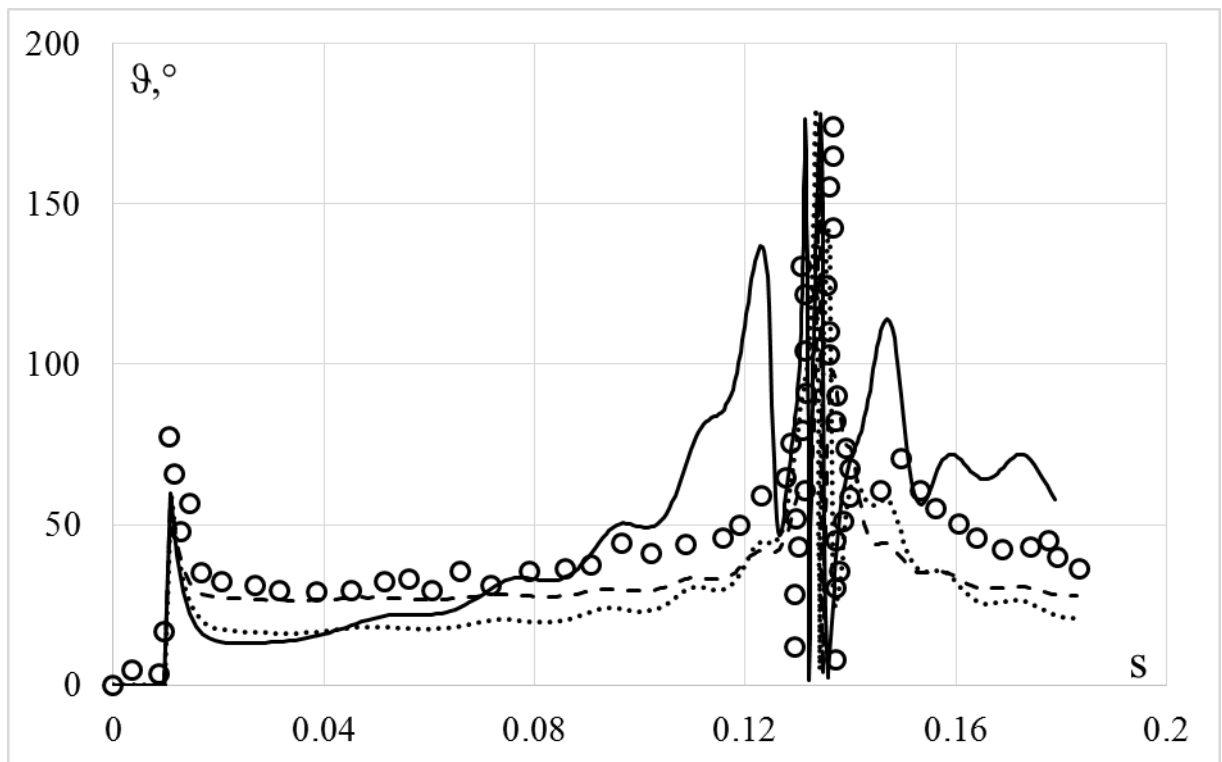


Рисунок 2.3.21 – Векторные свойства. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

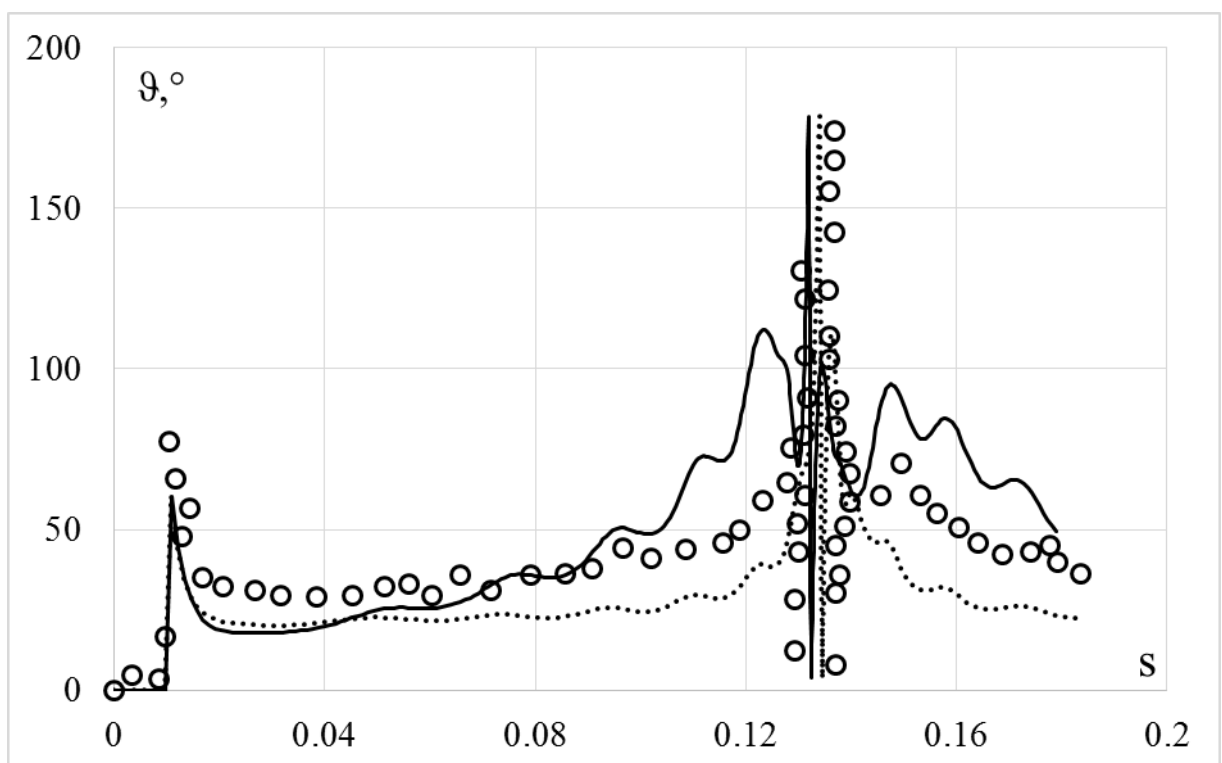


Рисунок 2.3.22 – Векторные свойства. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

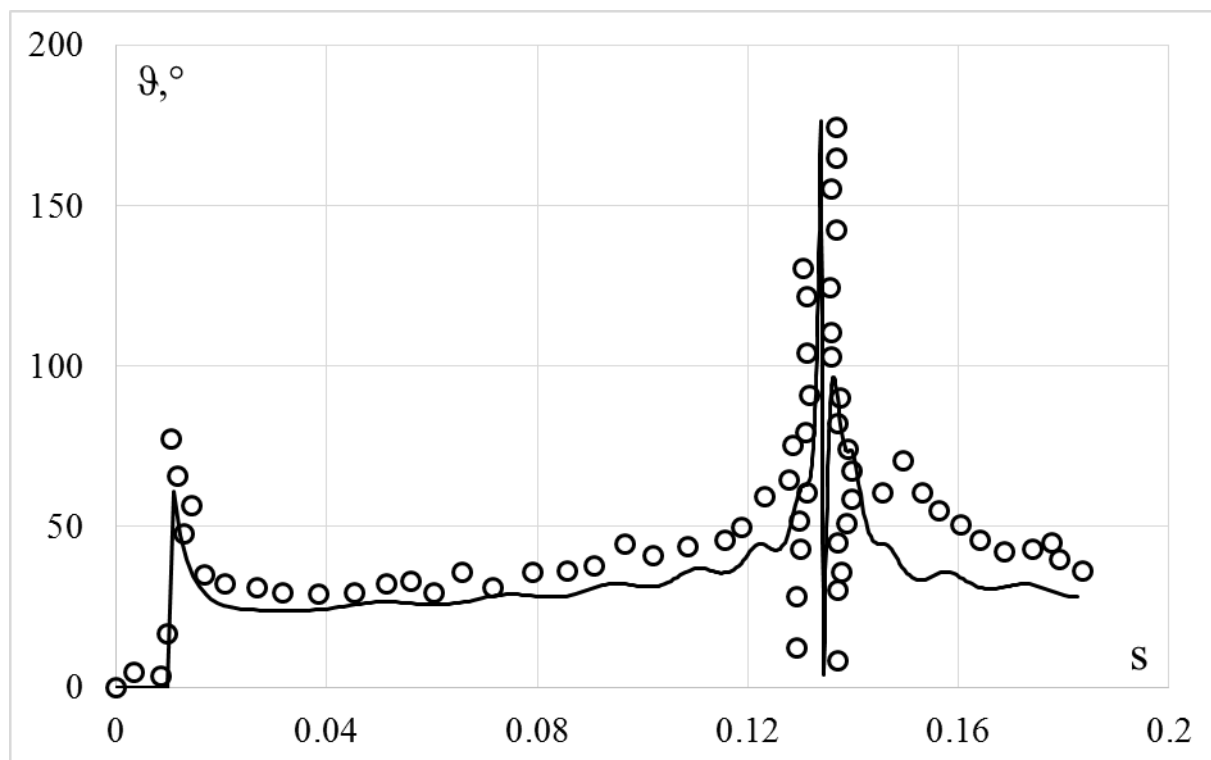


Рисунок 2.3.23 – Векторные свойства. Спираль Архимеда. (сплошная кривая – модель Бондаря)

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам моделей и эксперимента по криволинейным траекториям деформаций переменной кривизны показывают:

- по ответным траекториями напряжений худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно-Ванга, Армстронга-Фредерика-Кадашевича; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, Шабоша, Темиса-Худяковой; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

- по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно-Ванга, Армстронга-Фредерика-Кадашевича; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, Шабоша, Темиса-Худяковой; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

- по векторным свойствам удовлетворительные результаты получены на основе всех вариантов теорий при лучшем соответствии эксперименту модели Бондаря.

3 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ТРАЕКТОРИЯМ ДЕФОРМАЦИЙ

3.1 Винтовые траектории деформаций постоянной кривизны и кручения

Сравнение вариантов моделей пластичности по пространственным траекториям деформаций проводится на винтовой линии постоянной кривизны и кручения. В экспериментальных исследованиях [32, 33] реализуются траектории с кривизной от 100 до 333 и круткой от 10 до 666, относящиеся к траекториям от средней до большой кривизны и от малого до большого кручения. Сначала рассматривается винтовая траектория с кривизной и круткой равными 200 (Рисунок 3.1.1). Такую траекторию можно отнести к траектории большой кривизны и большого кручения (50-100 траектории среднего кручения и средней крутки). Экспериментальные исследования [25, 26] проведены на тонкостенных цилиндрических образцах из стали 45 под действием осевой силы, крутящего момента и внутреннего давления (P, M, q – опыты).

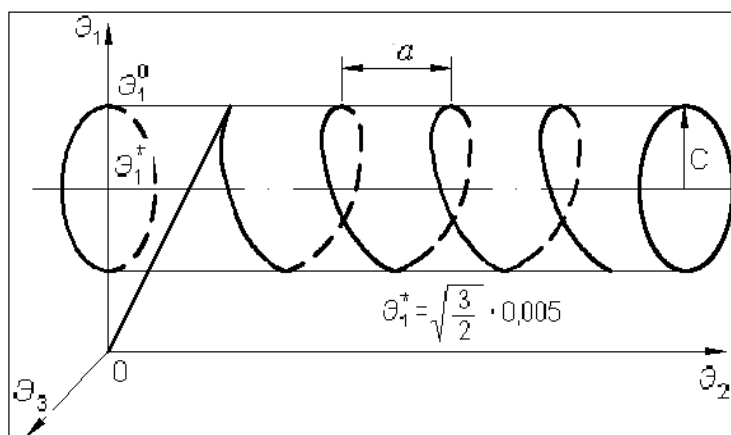


Рисунок 3.1.1 – Траектория деформаций ($\chi=200, \tau=200$)

Функции компонент вектора деформации и их скорости описываются по следующему закону:

$$\vartheta_1 = \begin{cases} 2\vartheta_1^* t & t < 1 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot [c \cdot (\cos(2\pi t) - 1) + c + \vartheta_1^*] & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

$$\Theta_2 = \begin{cases} \Theta_1^* t & t < 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} a (t - 1) + c + \Theta_1^*) & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

$$\Theta_3 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} * c * \sin(2\pi t) & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$$\dot{\Theta}_1 = \begin{cases} 2\Theta_1^* & t < 1 \\ -\sqrt{6}\pi c \cdot \sin(2\pi t) & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

$$\dot{\Theta}_2 = \begin{cases} \Theta_1^* & t < 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} a & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

$$\dot{\Theta}_3 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \sqrt{6}\pi c \cdot \cos(2\pi t) & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Здесь c – радиус винтовой линии, a – шаг винтовой линии, n – номер витка,

$\Theta_1^* = \sqrt{\frac{2}{3}} 0,005$. Для значений кривизны и крутки $\chi=200$, $\tau=200$ $c = 0,0025$ и $a = 0,0157$.

Экспериментальные результаты [25, 26] на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми. Изменение компонент вектора напряжений S_1, S_2, S_3 вдоль траектории деформаций, т.е. как функции длины дуги траектории деформации s , показаны на рисунках 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.6, 3.1.7, 3.1.8, 3.1.10, 3.1.11 и 3.1.12. Скалярные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ вдоль траектории деформаций приведены на рисунках 3.1.5, 3.1.9 и 3.1.13.

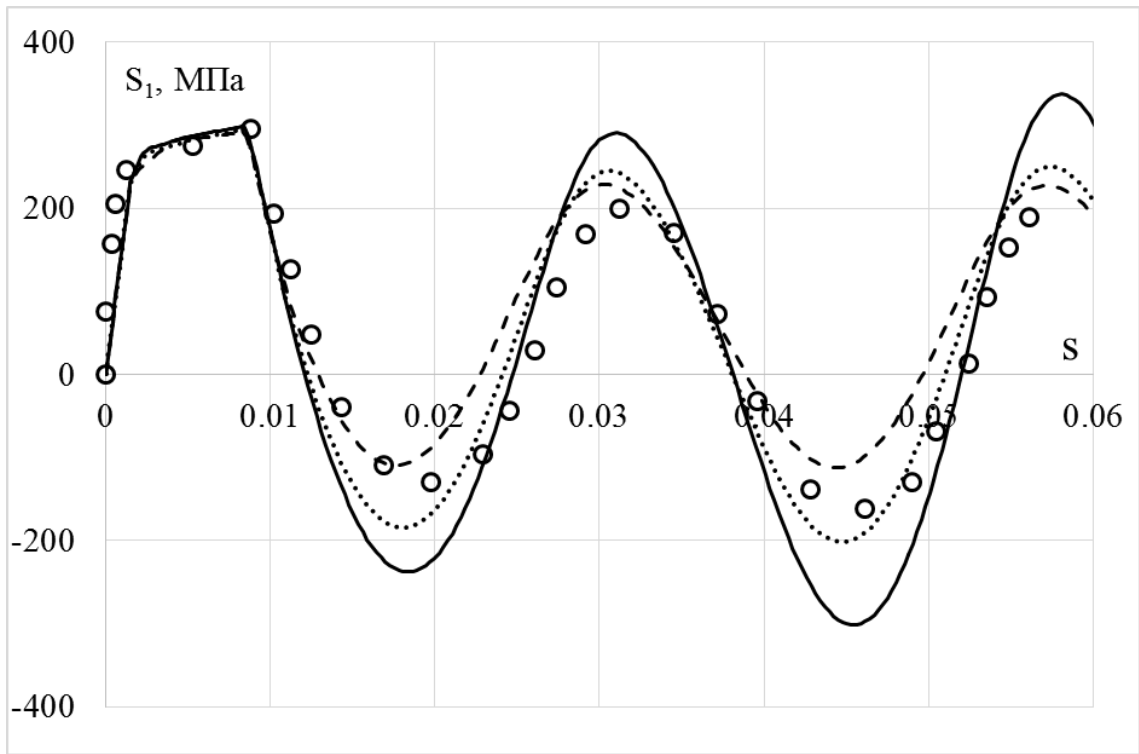


Рисунок 3.1.2 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

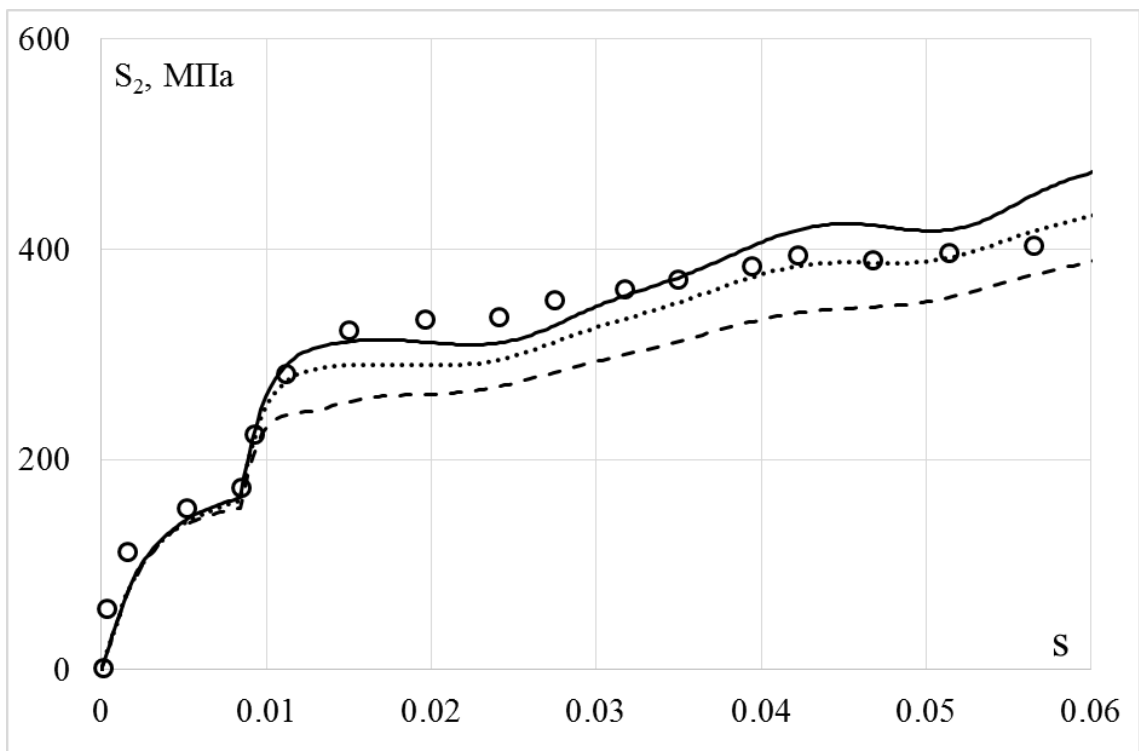


Рисунок 3.1.3 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

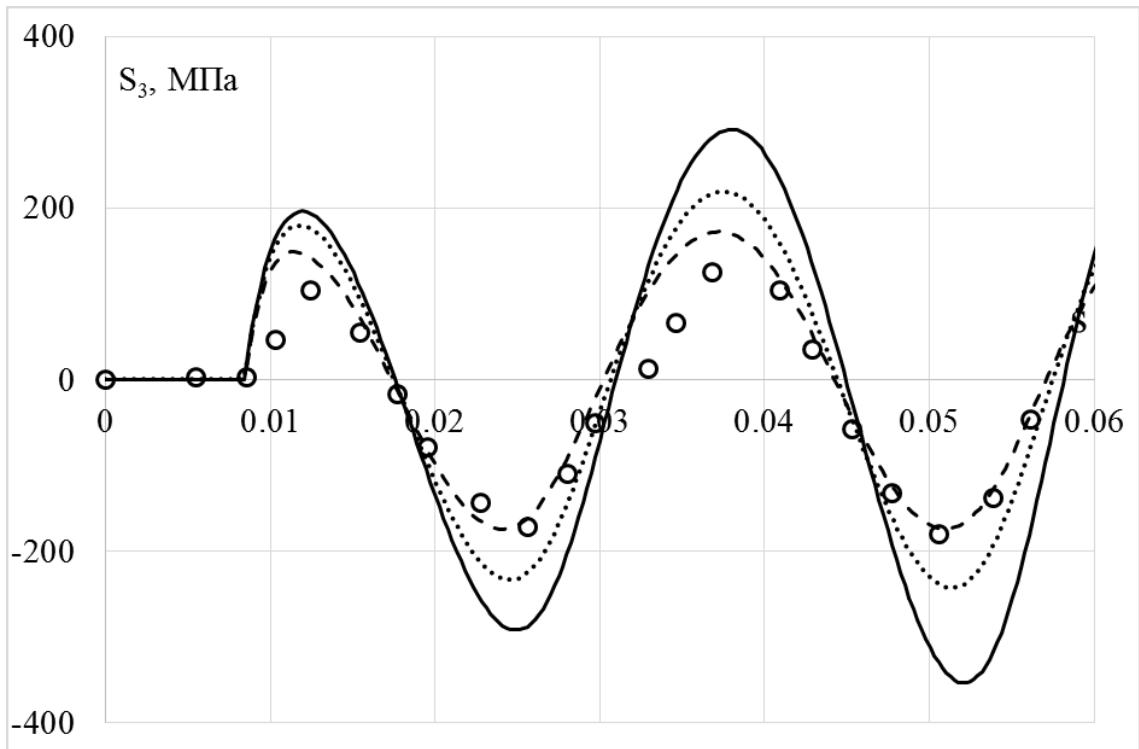


Рисунок 3.1.4 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

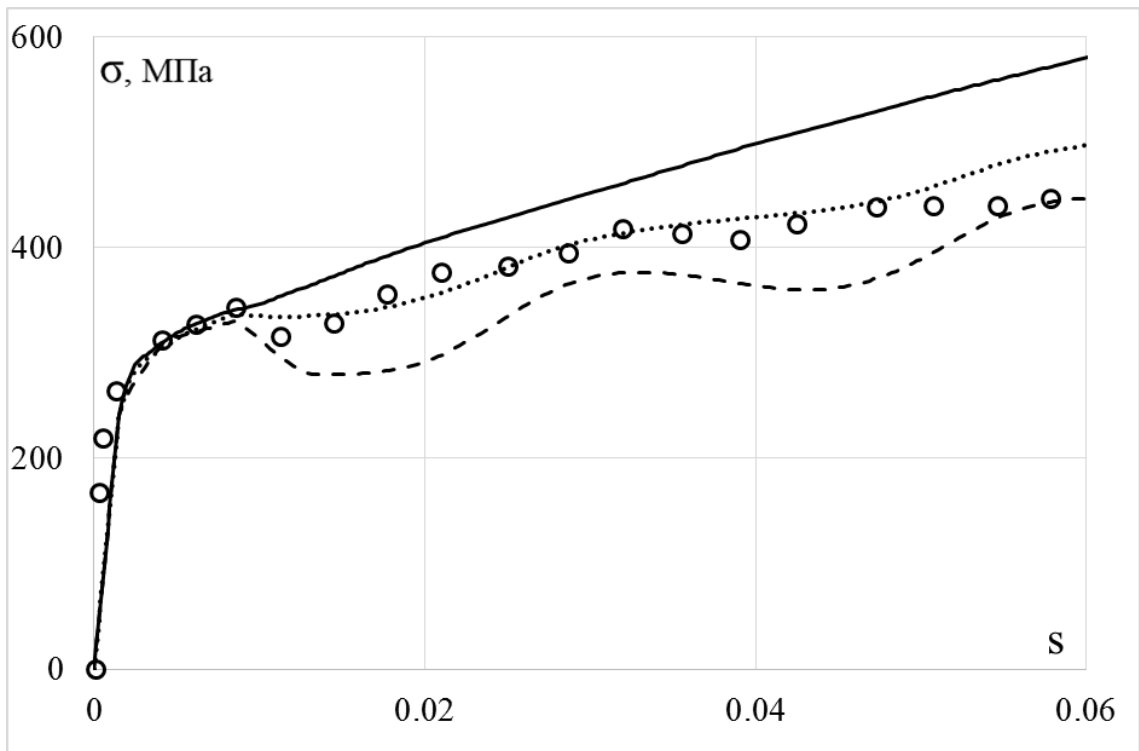


Рисунок 3.1.5 – Скалярные свойства. (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

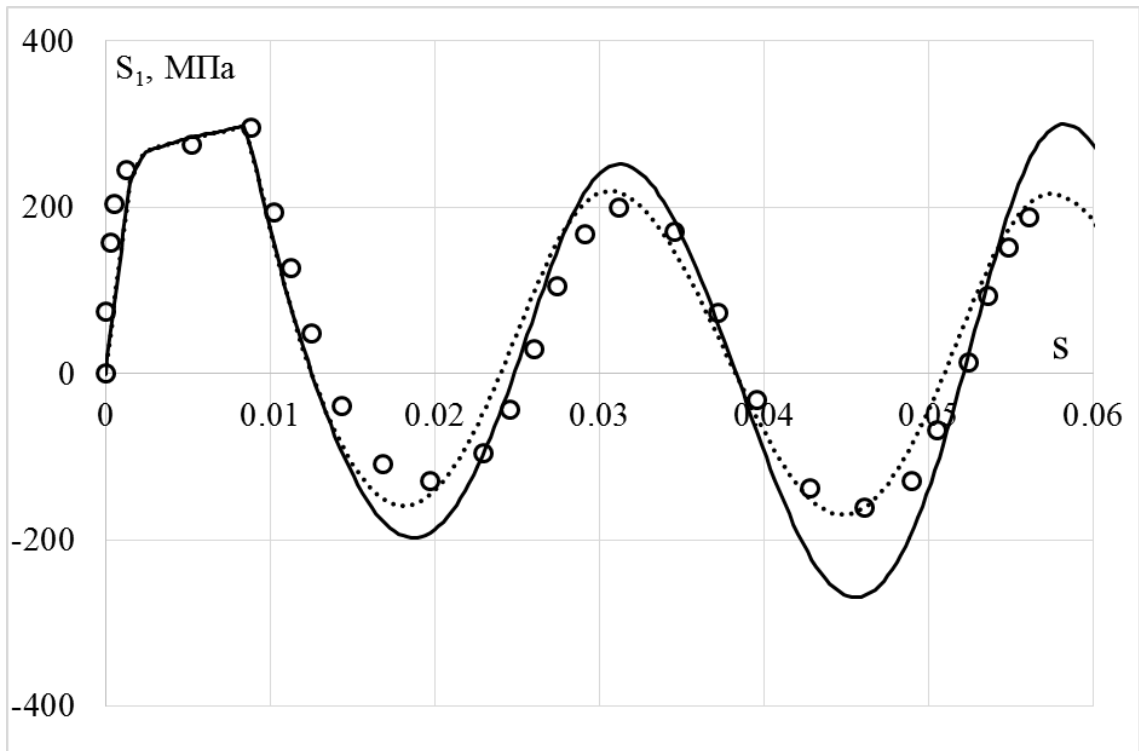


Рисунок 3.1.6 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

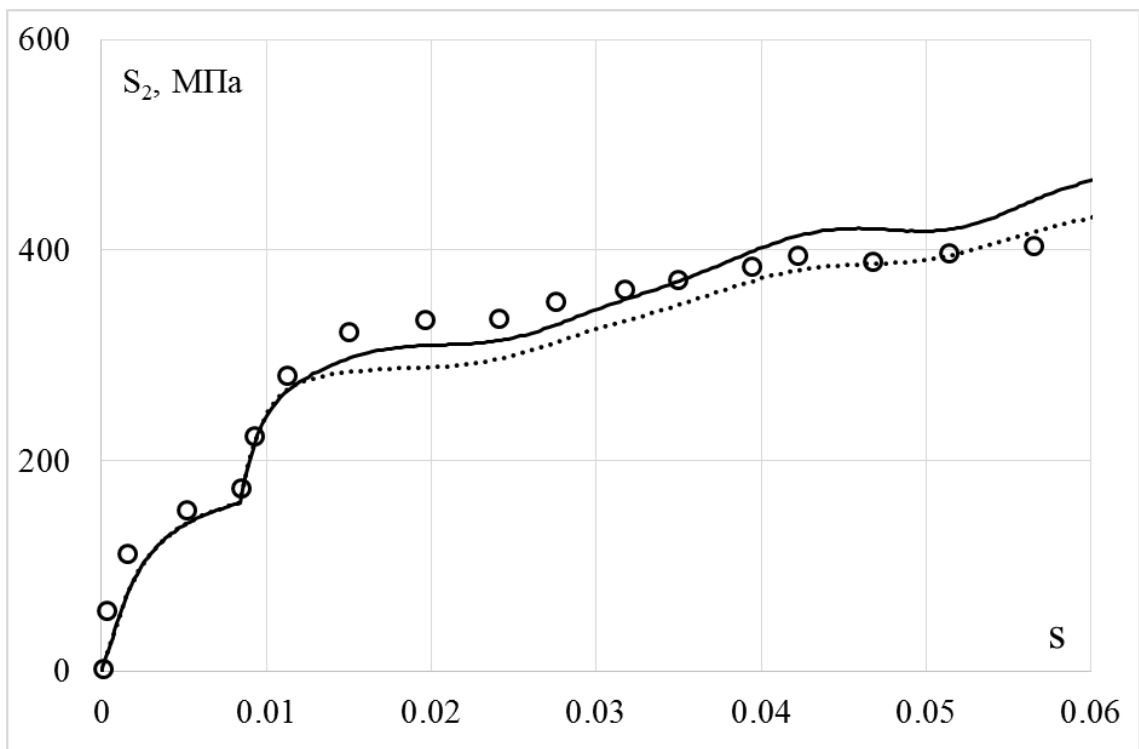


Рисунок 3.1.7 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

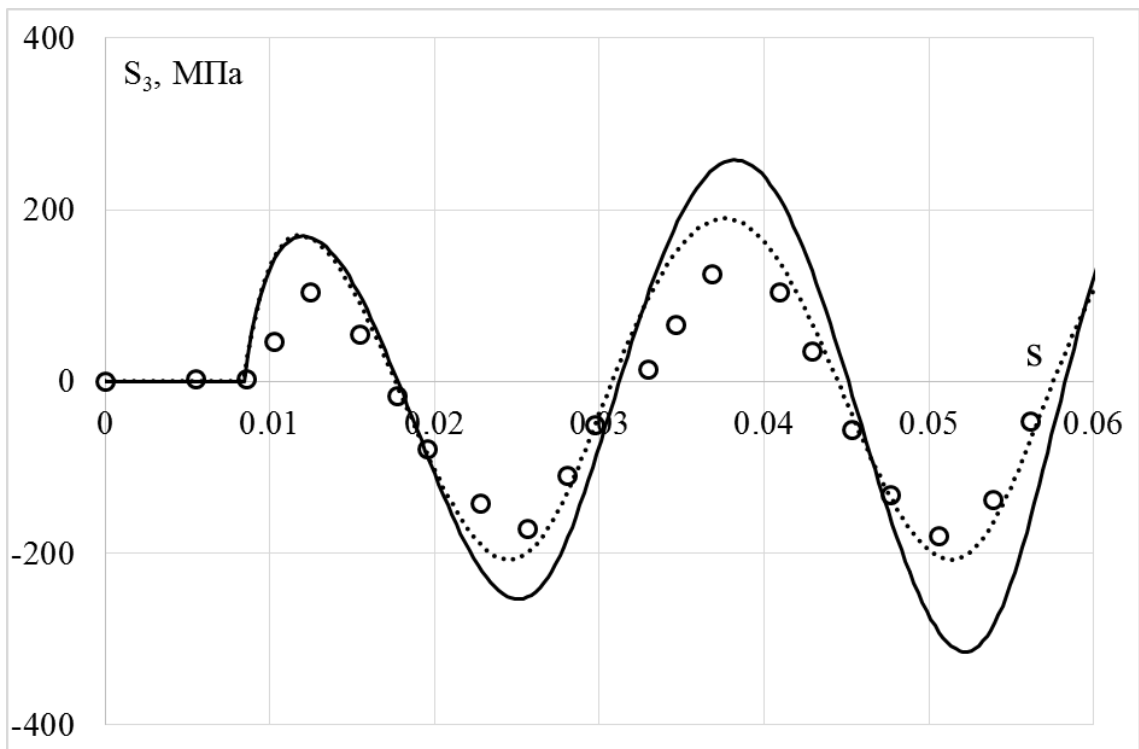


Рисунок 3.1.8 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

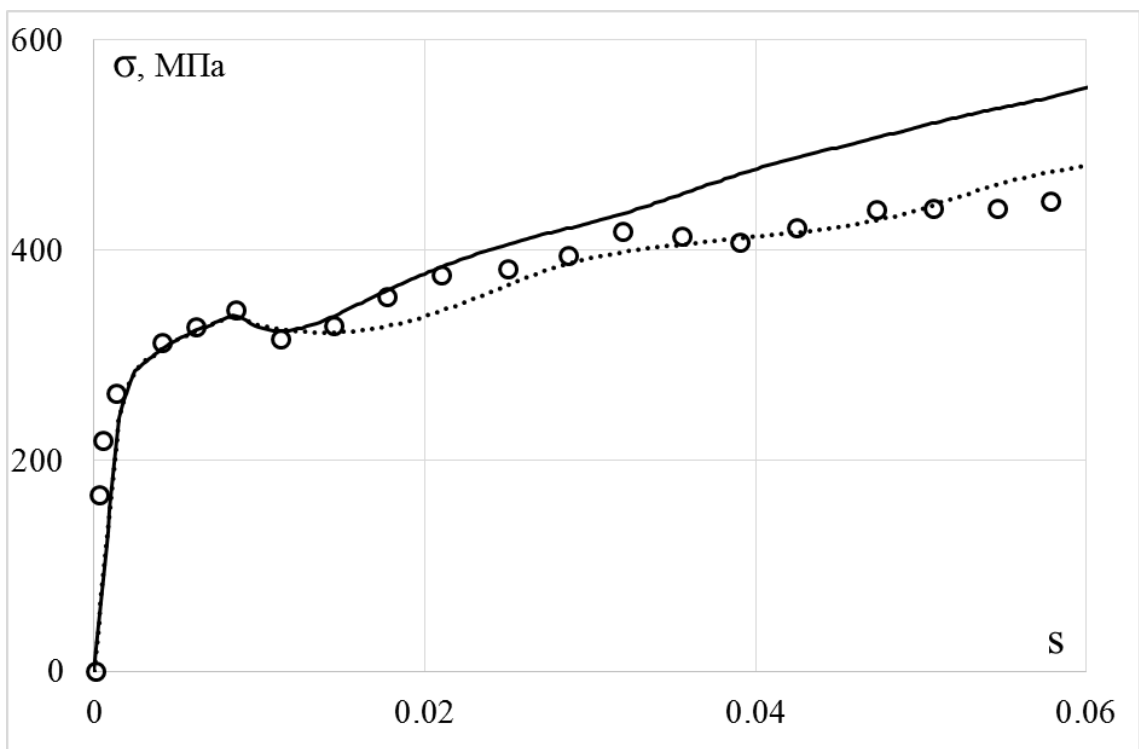


Рисунок 3.1.9 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса)

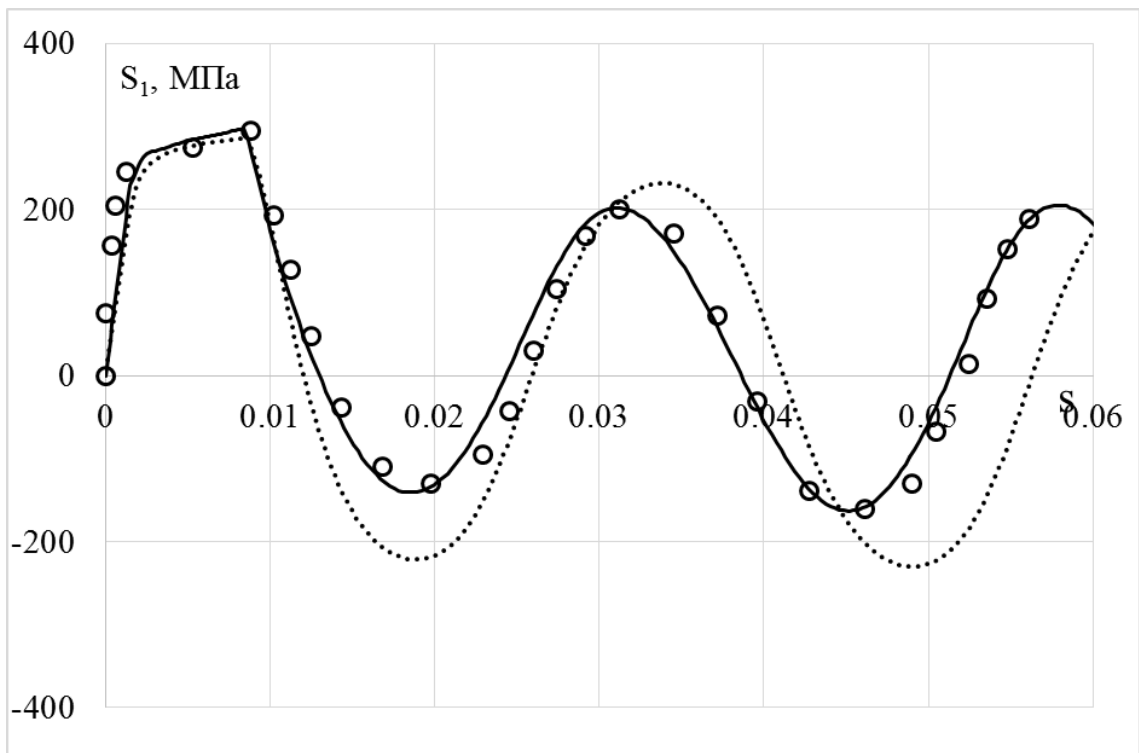


Рисунок 3.1.10 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

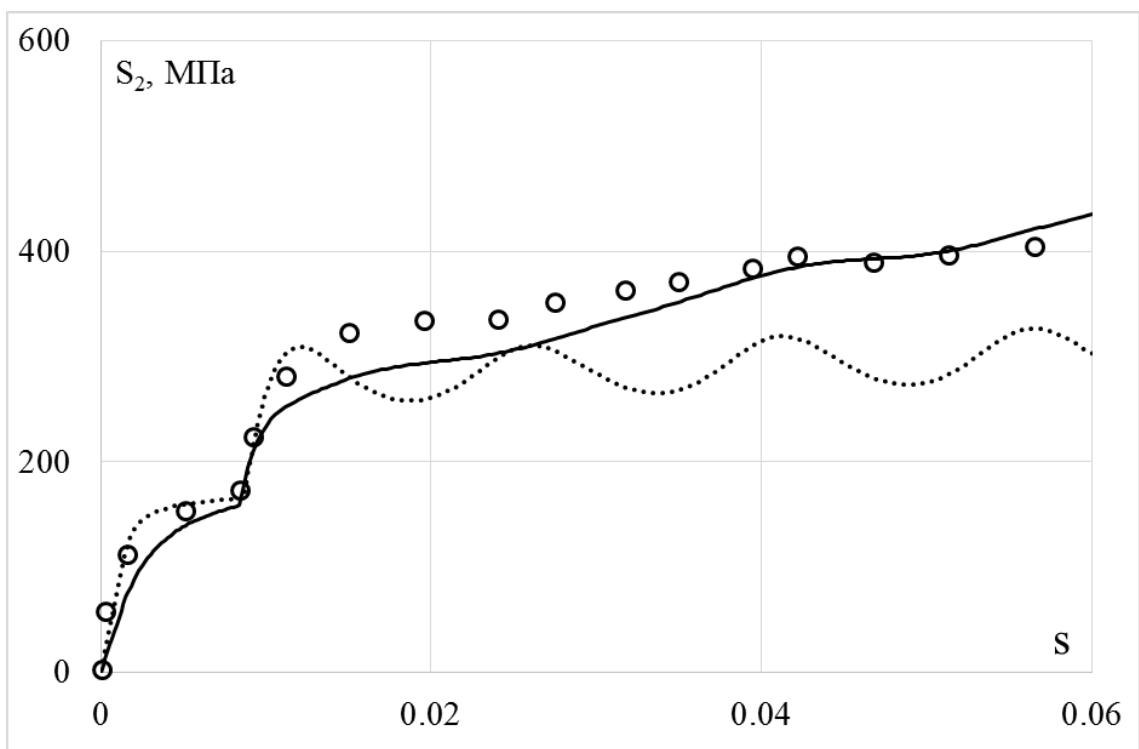


Рисунок 3.1.11 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

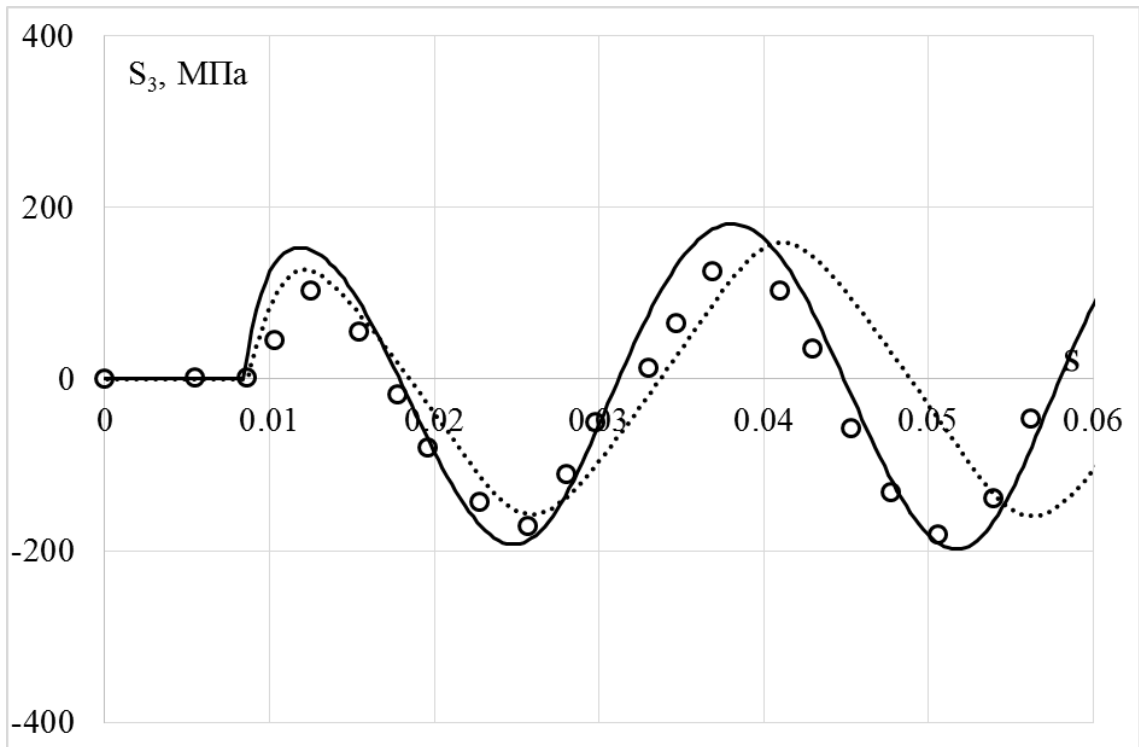


Рисунок 3.1.12 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

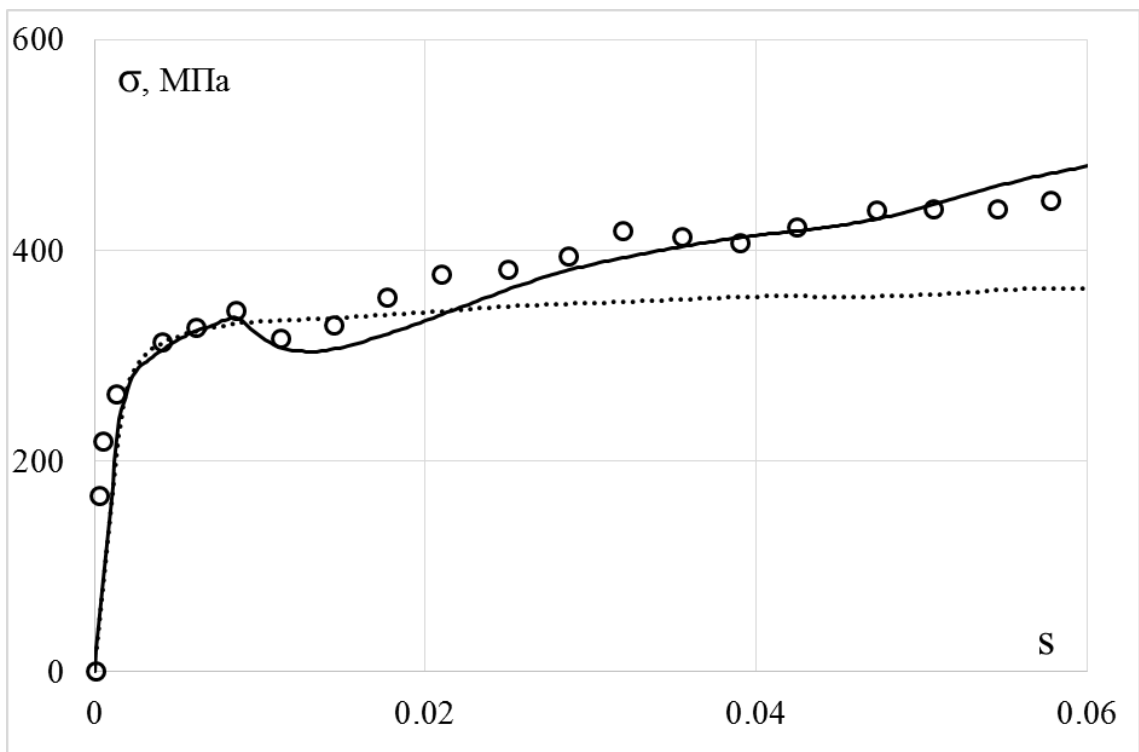


Рисунок 3.1.13 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

Также сравнение вариантов моделей пластичности по пространственным траекториям деформаций в виде винтовой линии постоянной кривизны и кручения проводится на винтовой линии с кривизной и кручением равными 200 и 400 соответственно (Рисунок 3.1.14). Экспериментальные исследования [25, 26] проводятся на тонкостенных цилиндрических образцах из стали 45 под действием осевой силы, крутящего момента и внутреннего давления (P, M, q – опыты).

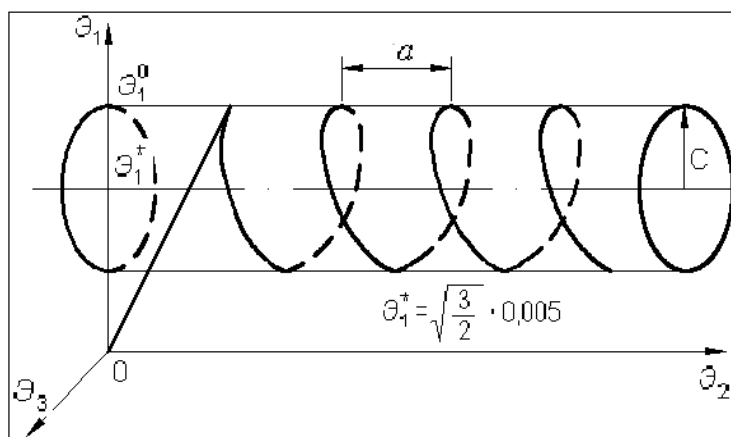


Рисунок 3.1.14 – Траектория деформаций ($\chi=200, \tau=400$)

Функции компонент вектора деформации и их скорости описываются уравнениями (3.1.1)-(3.1.6). Для значений кривизны и крутки $\chi=200, \tau=400$ $c = 0,001$ и $a = 0,0125$.

Экспериментальные результаты [25, 26] на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми. Изменение компонент вектора напряжений S_1, S_2, S_3 вдоль траектории деформаций, т.е. как функции длины дуги траектории деформации s , показаны на рисунках 3.1.15 3.1.16, 3.1.17, 3.1.19, 3.1.20, 3.1.21, 3.1.22, 3.1.23 и 3.1.24. Скалярные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ вдоль траектории деформаций приведены на рисунках 3.1.18, 3.1.22 и 3.1.25.

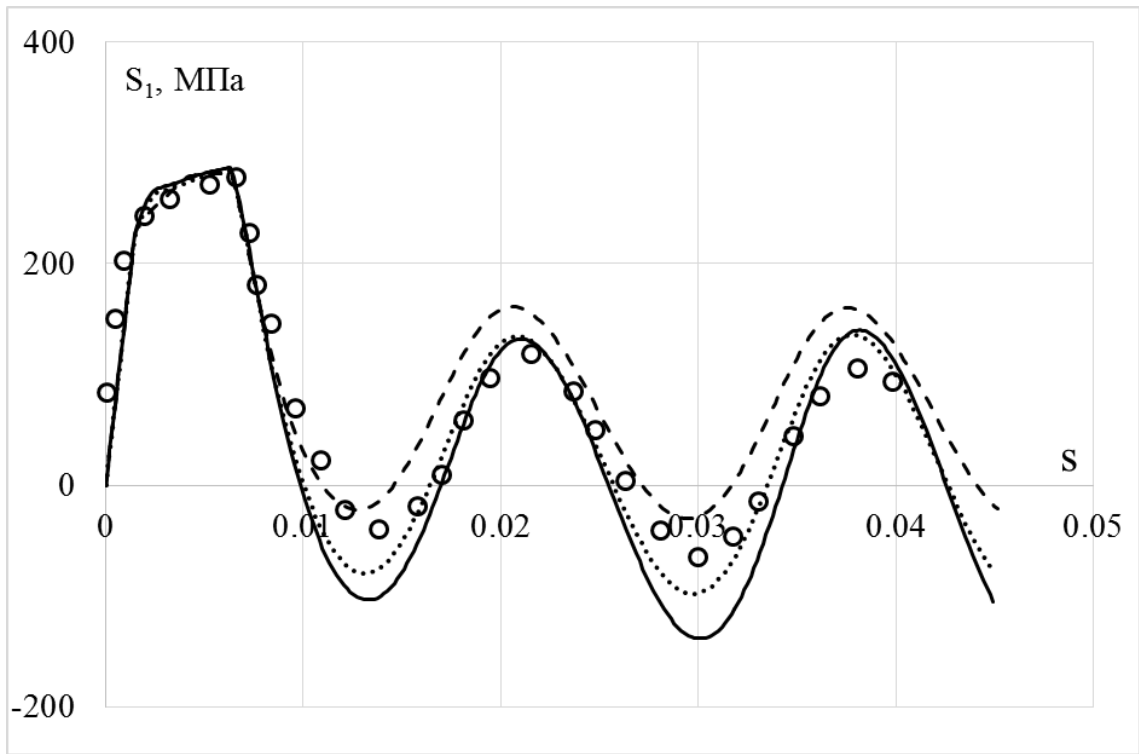


Рисунок 3.1.15 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

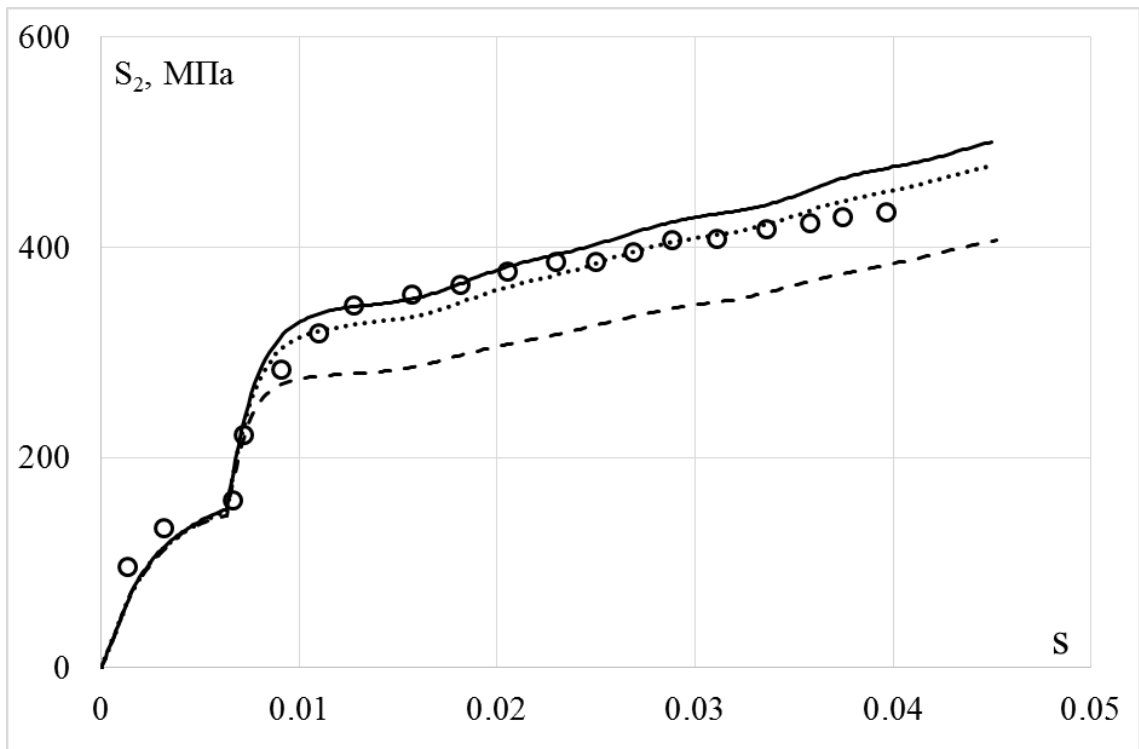


Рисунок 3.1.16 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

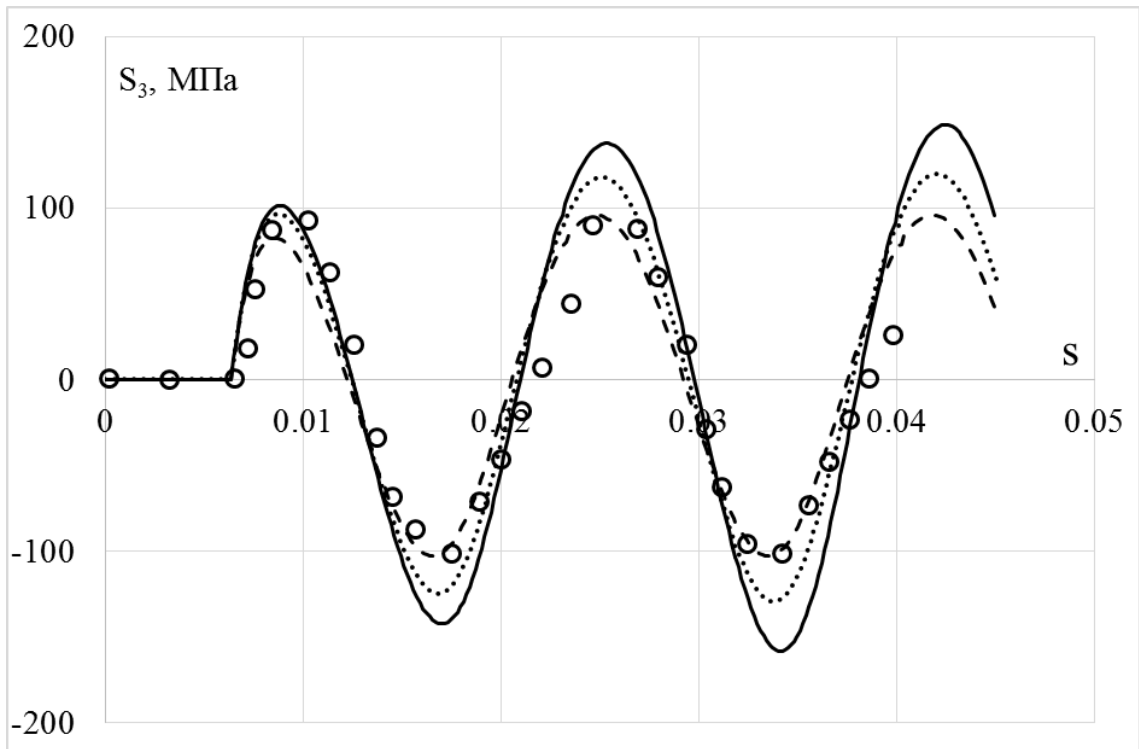


Рисунок 3.1.17 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

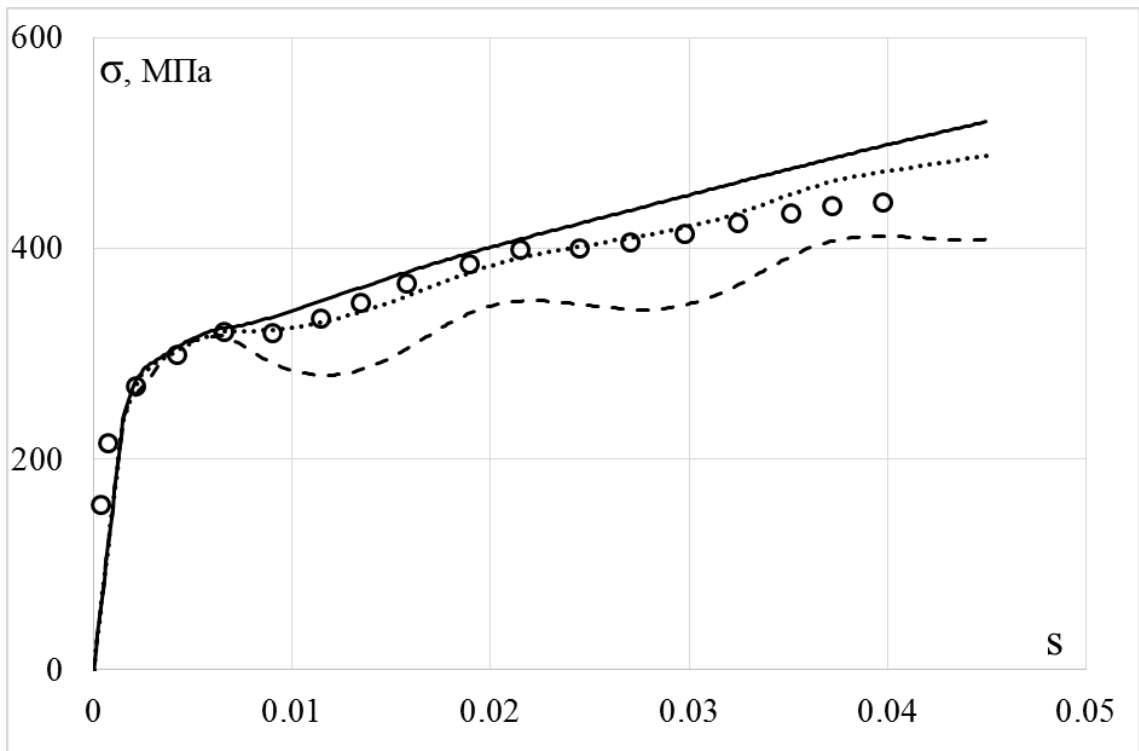


Рисунок 3.1.18 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

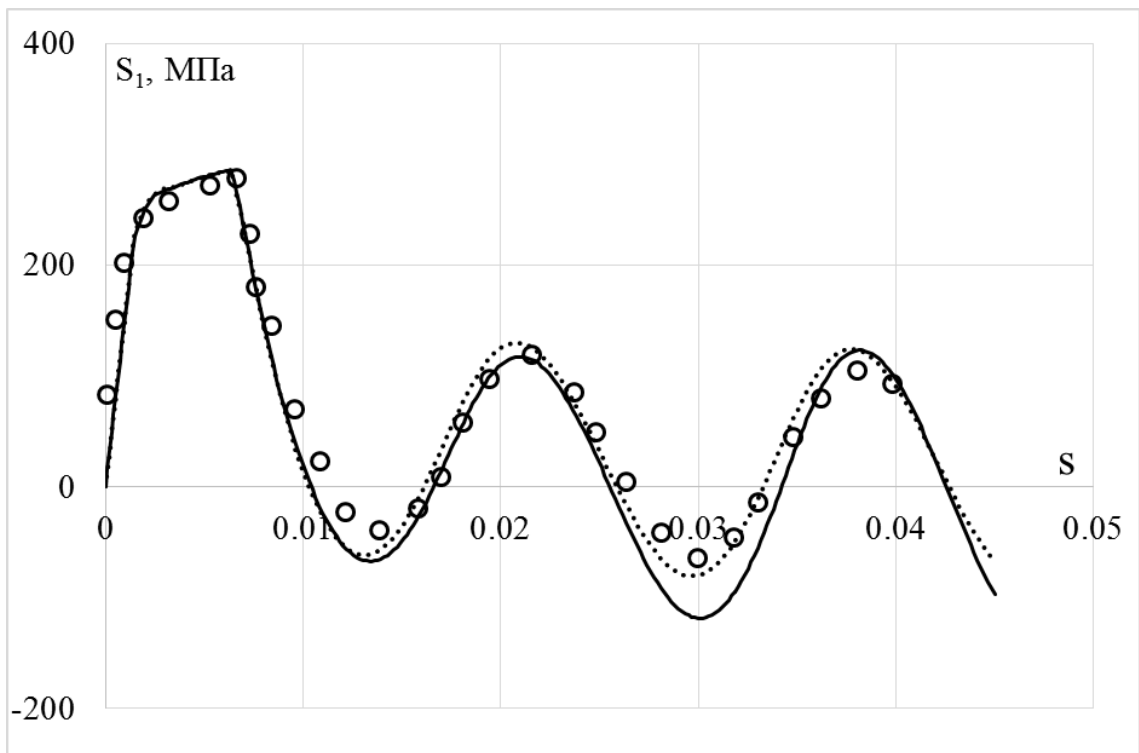


Рисунок 3.1.19 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

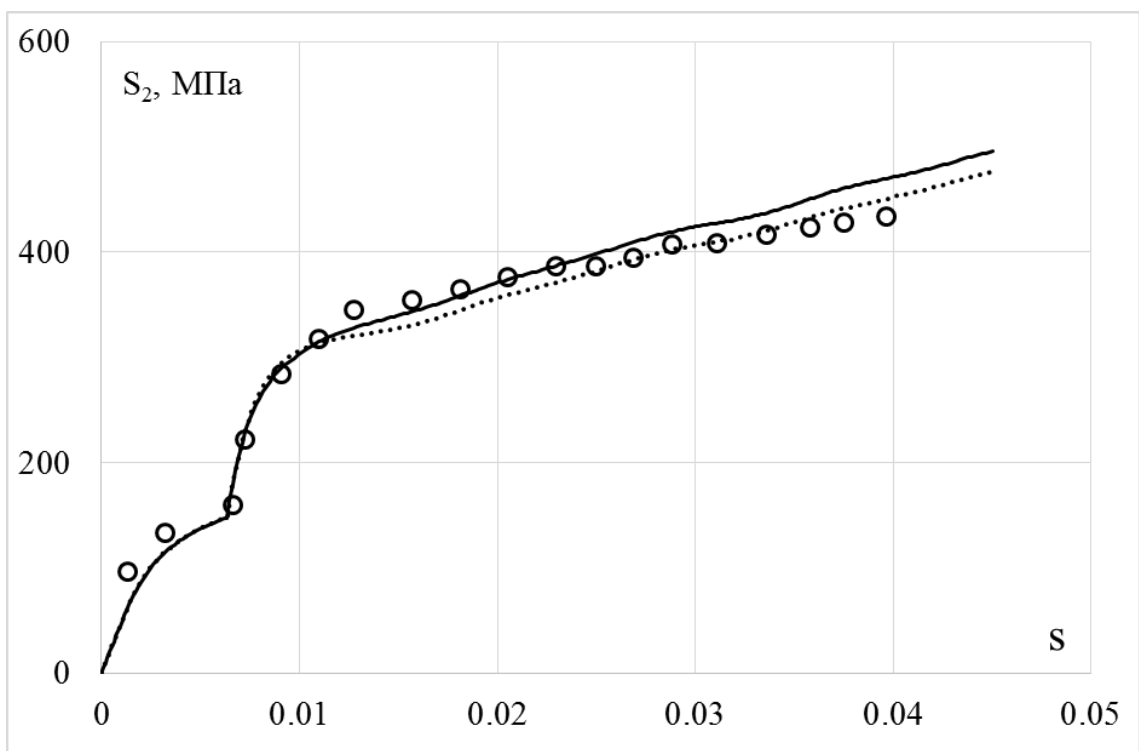


Рисунок 3.1.20 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

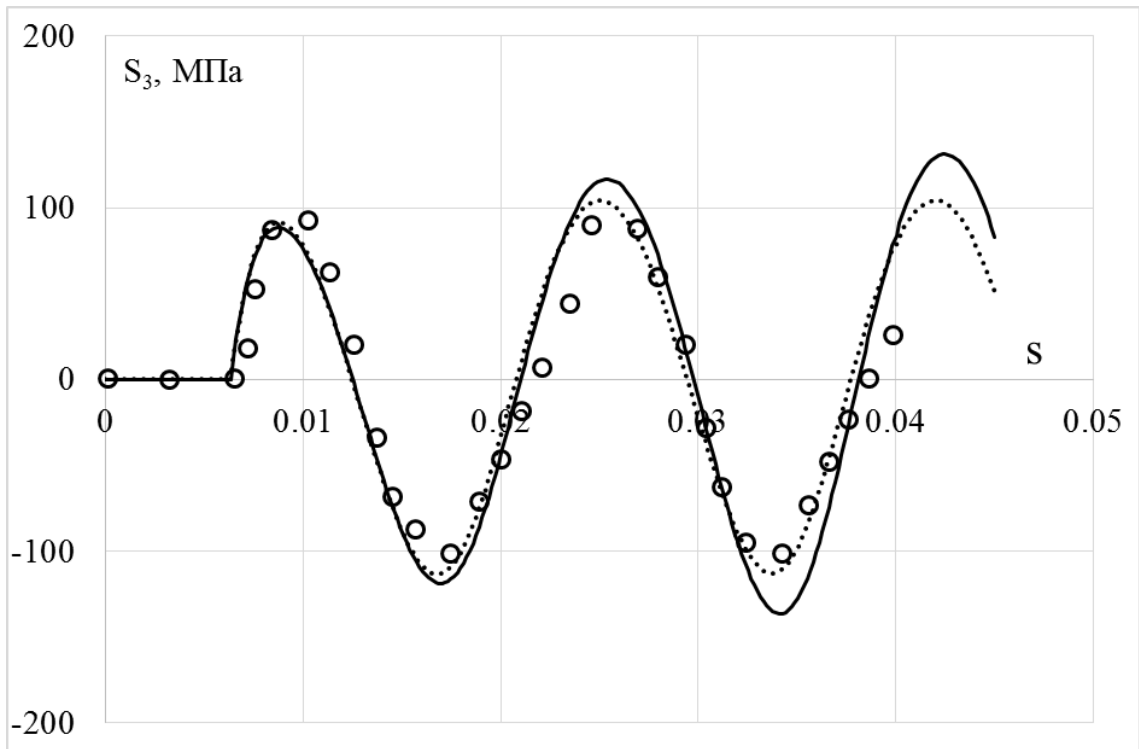


Рисунок 3.1.21 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

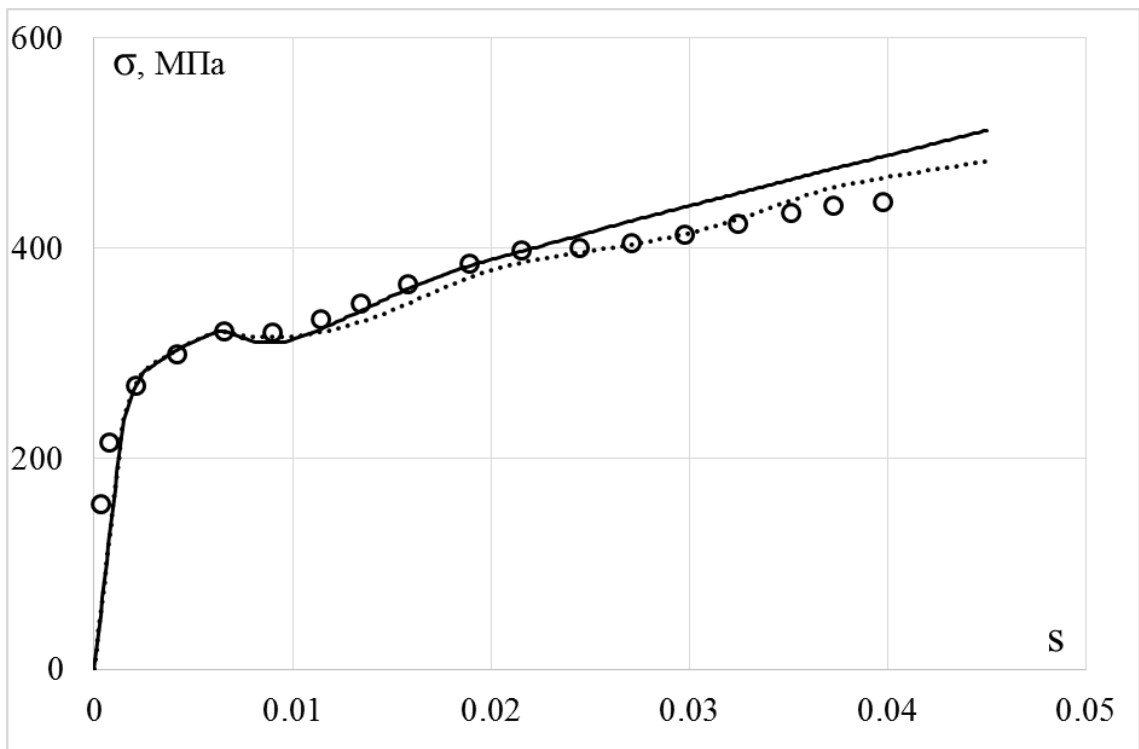


Рисунок 3.1.22 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

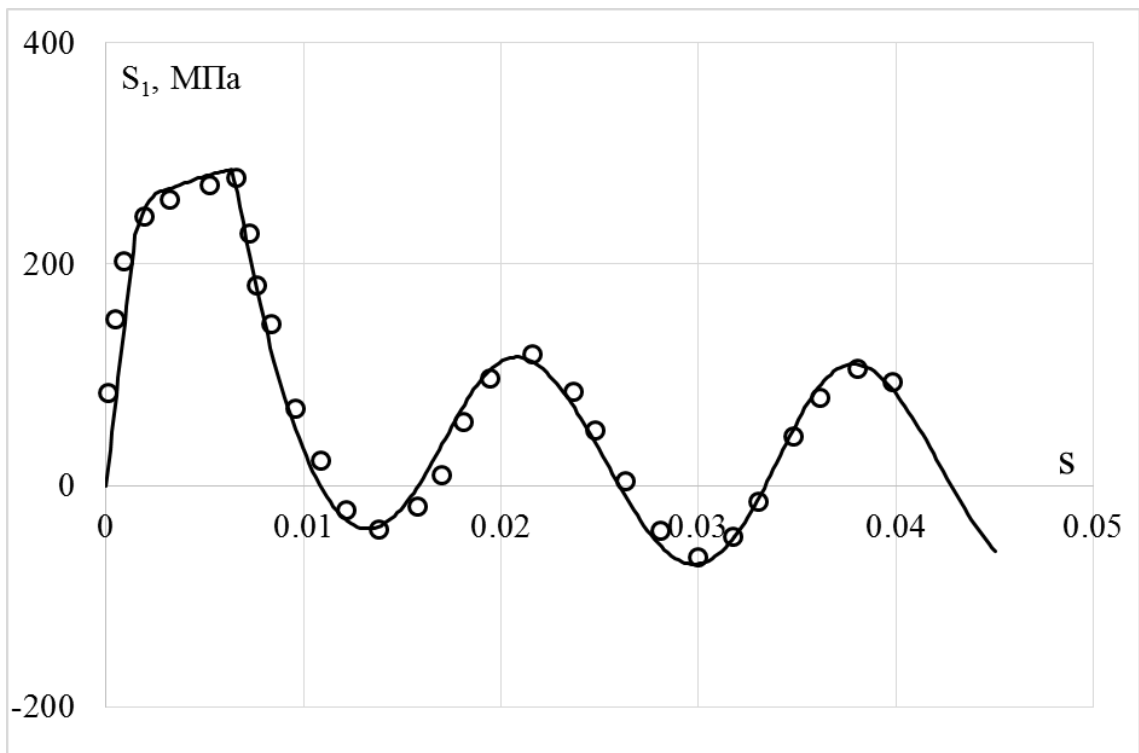


Рисунок 3.1.23 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря)

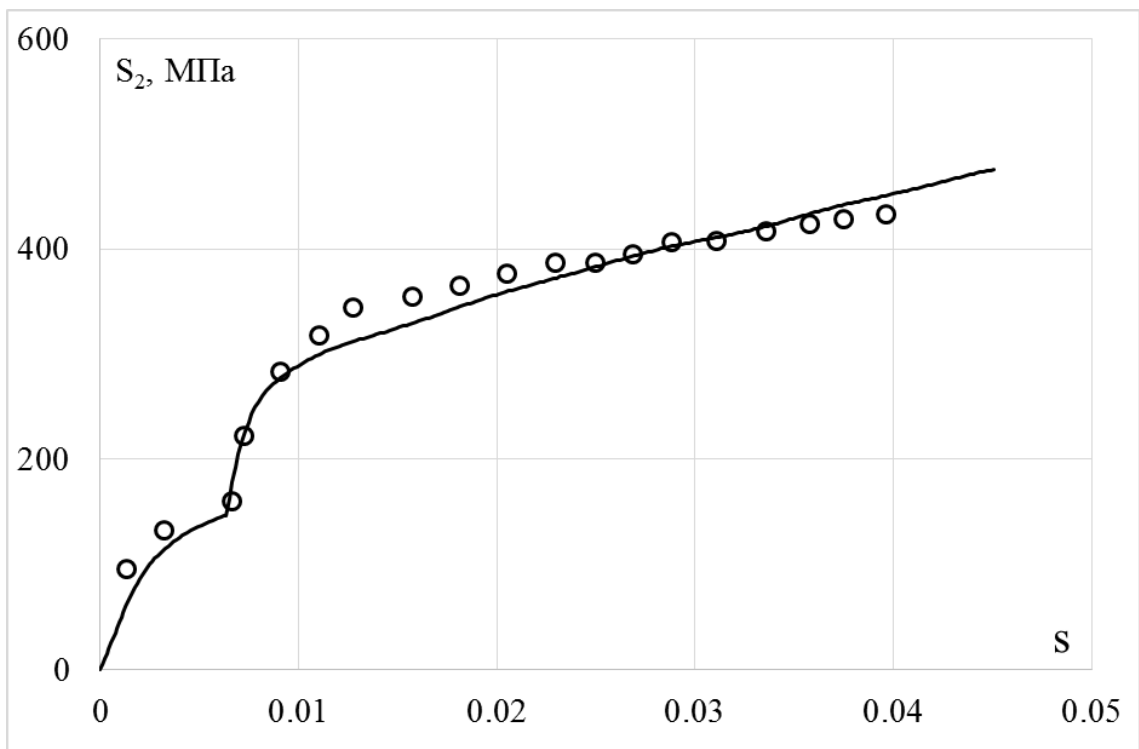


Рисунок 3.1.24 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря)

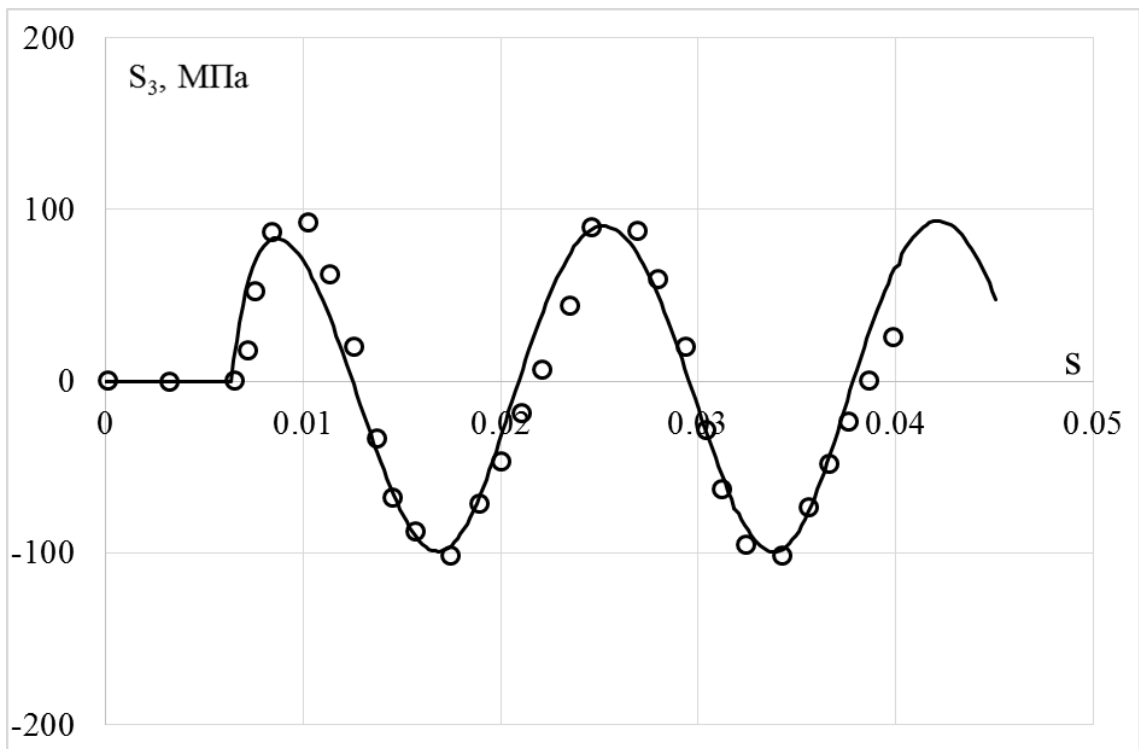


Рисунок 3.1.25 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря)

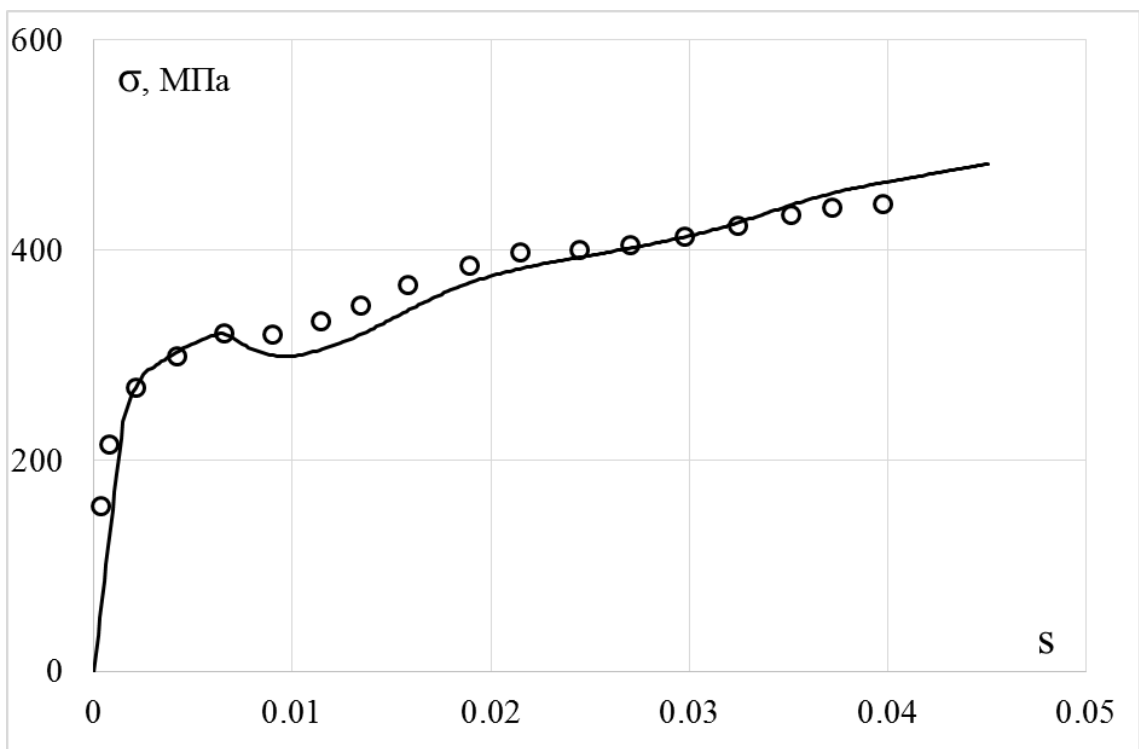


Рисунок 3.1.26 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель Бондаря)

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам моделей и эксперимента [25, 26] по пространственным траекториям деформаций в виде винтовой линии постоянной кривизны и кручения показывает:

- по компонентам вектора напряжений худшие результаты получены на основе модели изотропного упрочнения, моделей Оно-Ванга и Темиса-Худяковой; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова и Армстронга-Фредерика-Кадашевича; наилучшее соответствие эксперименту достигается на основе моделей Шабоша и Бондаря при лучшем соответствии эксперименту модели Бондаря.

- по скалярным свойствам худший результат получен на основе модели изотропного упрочнения, моделей Оно-Ванга и Темиса-Худяковой; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе моделей Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, Армстронга-Фредерика-Кадашевича, Шабоша и Бондаря.

3.2 Винтовые траектории деформаций переменной кривизны и кручения

Сравнительный анализ вариантов моделей пластичности проводится при сложном нагружении по пространственным траекториям нагружений в виде винтовой линии переменной кривизны и кручения. На рисунке 3.2.1 показано изменение кривизны и кручения вдоль траектории деформации. Здесь кривизна меняется от 150 до 370, а крутка – от 50 до 100. Таким образом, рассматриваемую траекторию можно отнести к траектории большой кривизны и среднего кручения. Экспериментальные исследования проводились на трубчатых образцах из стали 45 [25, 26].

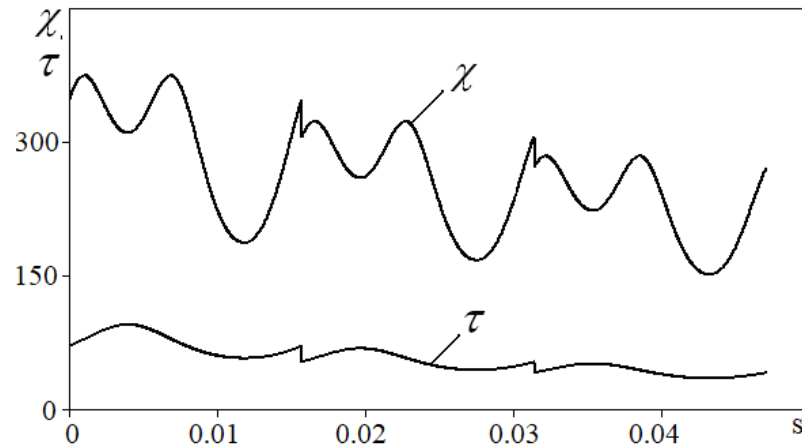


Рисунок 3.2.1 – Изменение кривизны χ и крутки τ вдоль траектории деформации.

Функции компонент вектора деформации и их скорости описываются по следующему закону:

$$\mathfrak{E}_1 = \begin{cases} \mathfrak{E}_1^* t & t < 1 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot [c_n \cdot (\cos(2\pi t) - 1) + c_n + \mathfrak{E}_1^*] & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$$\mathfrak{E}_2 = \begin{cases} \mathfrak{E}_1^* t & t < 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{c_n \cdot (\cos(2\pi t) - 1) + c_n + \mathfrak{E}_1^*}{2(a_n(t - n) + a_n(n - 1))} \right) & t \geq 1 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

$$\mathfrak{E}_3 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} * c_n * \sin(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$\dot{\Theta}_1 = \begin{cases} \Theta_1^* & t < 1 \\ -\sqrt{6}\pi c_n \cdot \sin(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$\dot{\Theta}_2 = \begin{cases} \Theta_1^* & t < 1 \\ -\sqrt{2}[\pi c_n \cdot \sin(2\pi t) + a_n] & t \geq 1' \end{cases} \quad (3.2.5)$$

$$\dot{\Theta}_3 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \sqrt{6}\pi c_n \cdot \cos(2\pi t) & t \geq 1' \end{cases} \quad (3.2.6)$$

где c_n – радиус винтовой линии, a_n – шаг винтовой линии, n – номер витка,

$\Theta_1^* = \sqrt{\frac{2}{3}} 0,005$. Здесь значение радиуса c_n изменяется от 0,003 до 0,004 в зависимости от номера витка, а шаг $a_n = 0,005$.

На всех рисунках экспериментальные результаты [25, 26] показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми. Изменение компонент вектора напряжений S_1, S_2, S_3 вдоль траектории деформаций показаны на рисунках 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8, 3.2.10, 3.2.11 и 3.2.12. Скалярные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ вдоль траектории деформаций приведены на рисунках 3.2.5, 3.2.9 и 3.2.13.

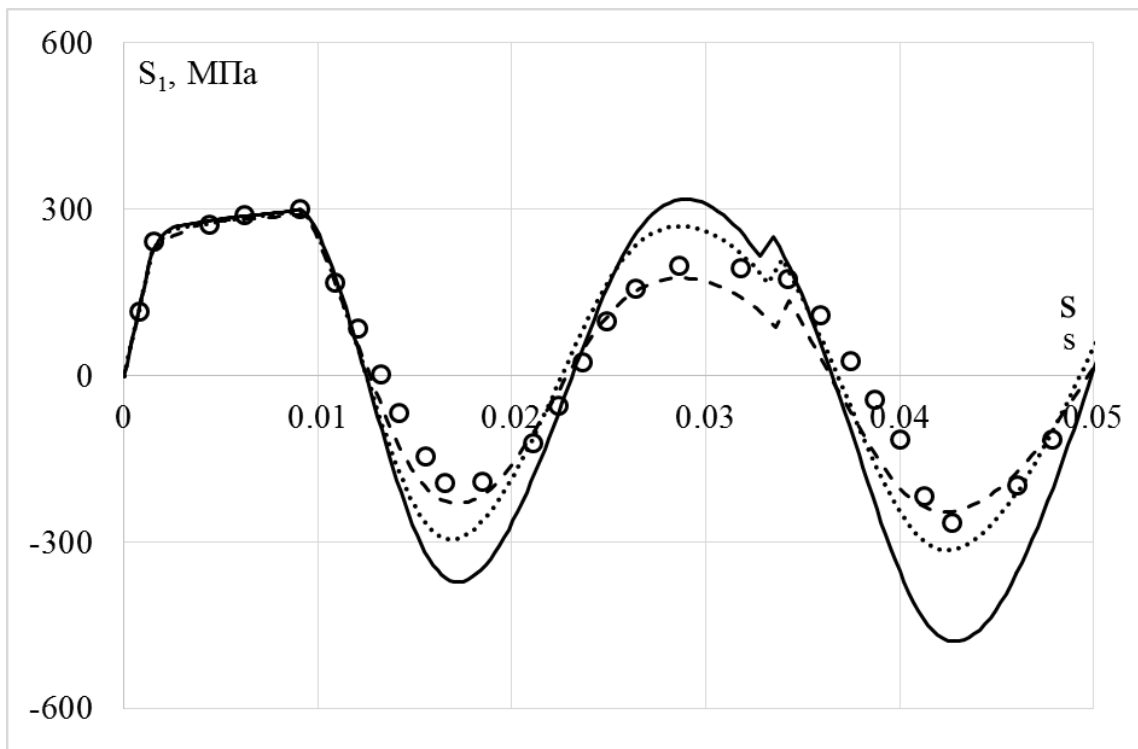


Рисунок 3.2.2 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

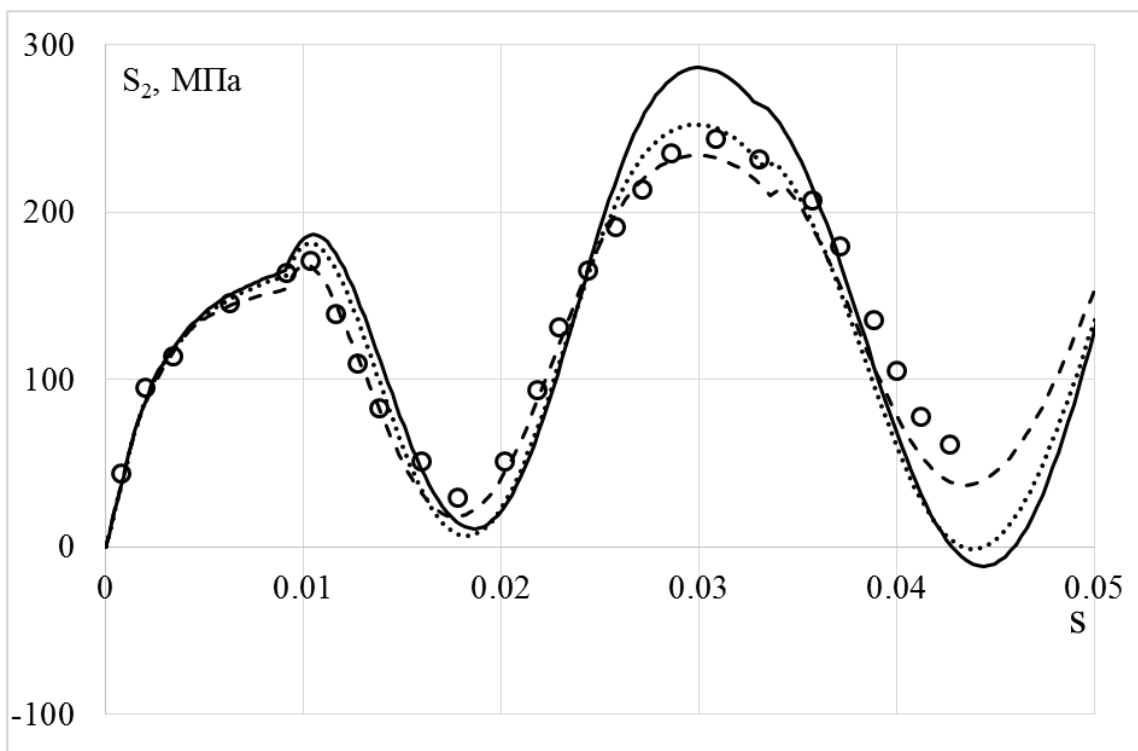


Рисунок 3.2.3 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

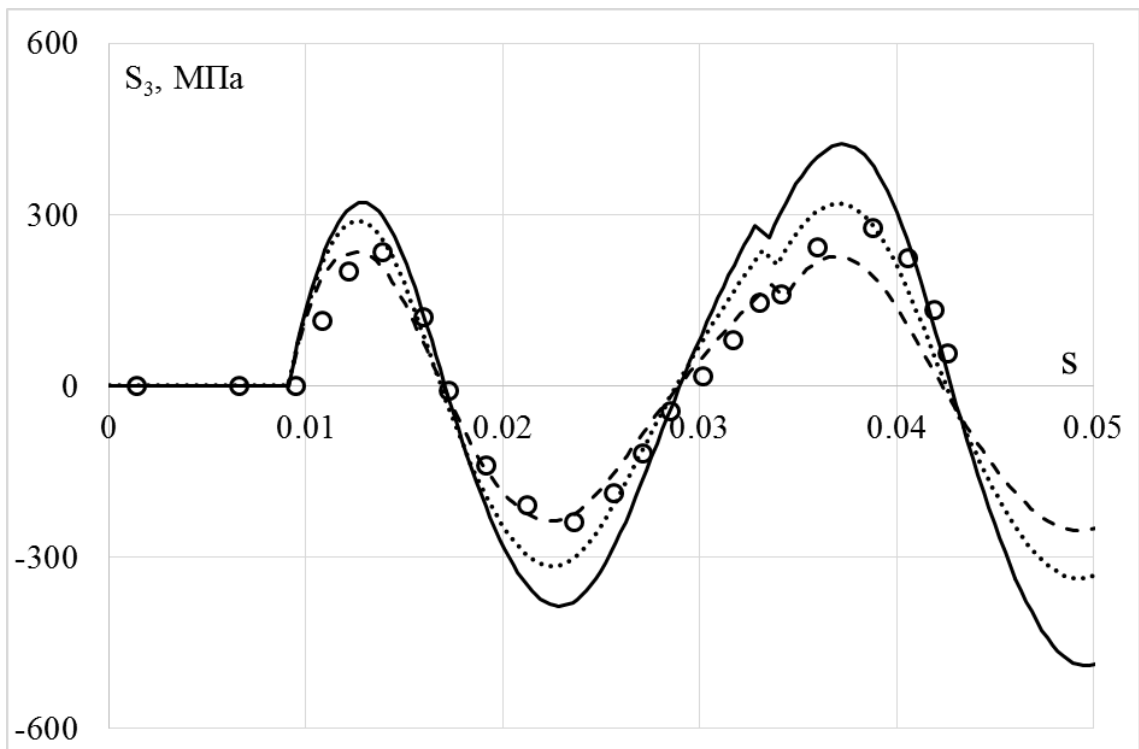


Рисунок 3.2.4 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

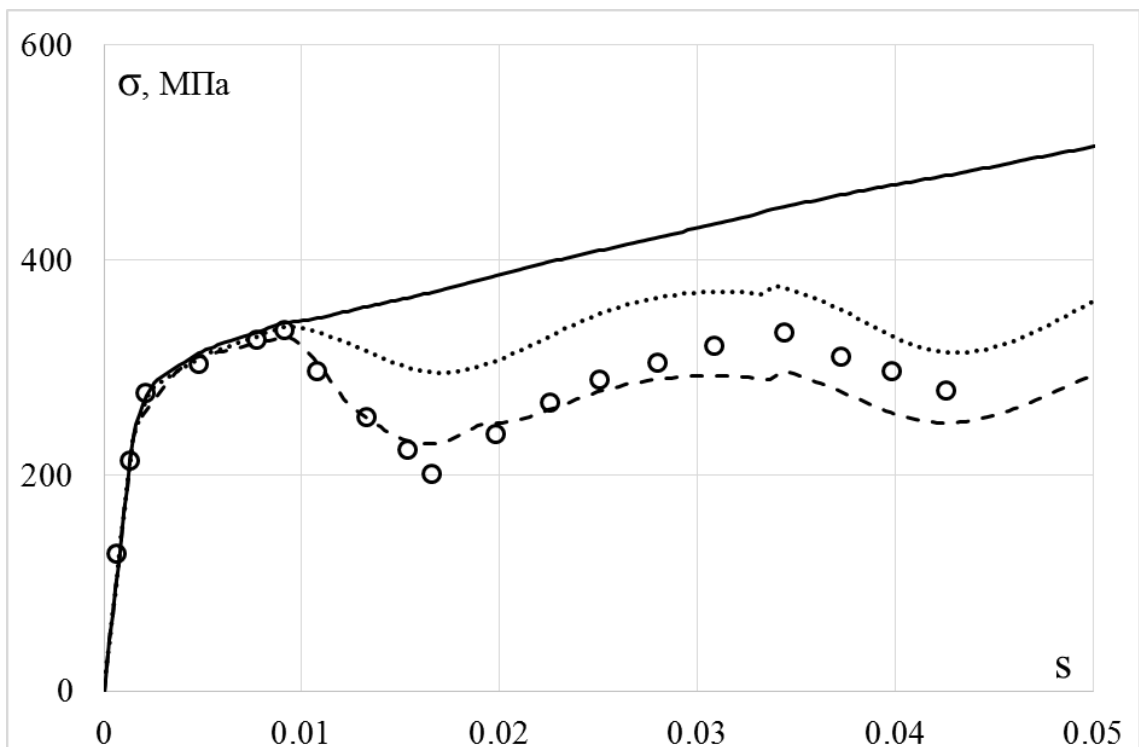


Рисунок 3.2.5 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

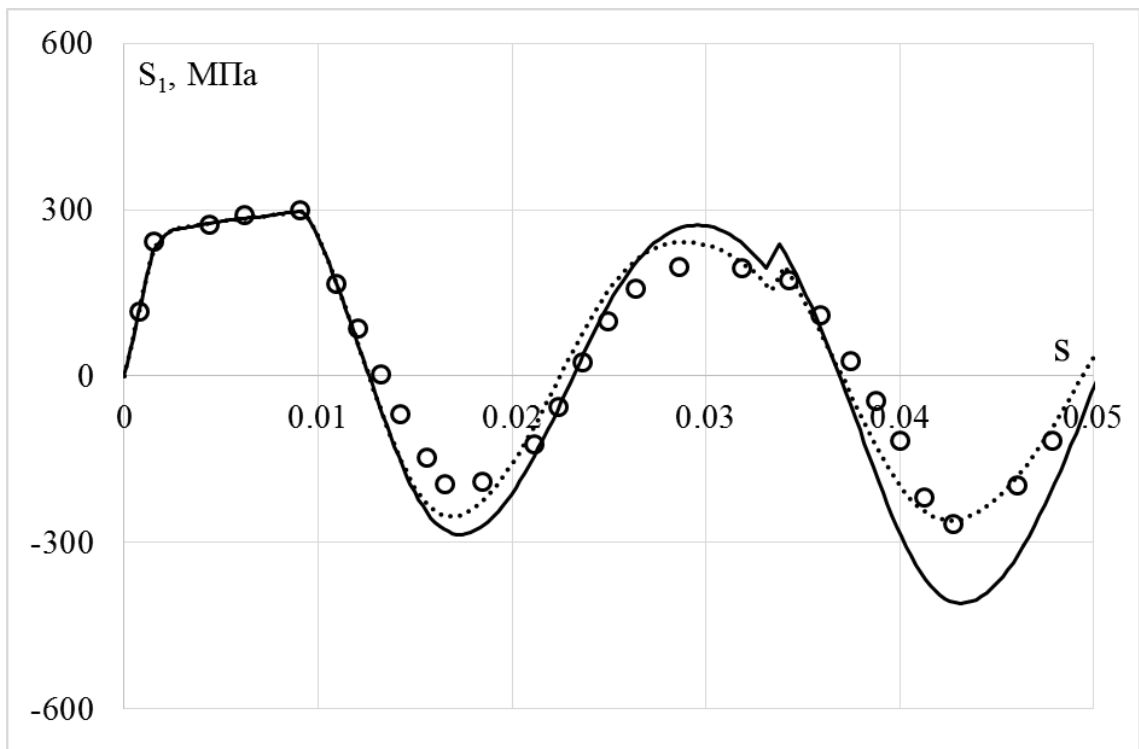


Рисунок 3.2.6 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

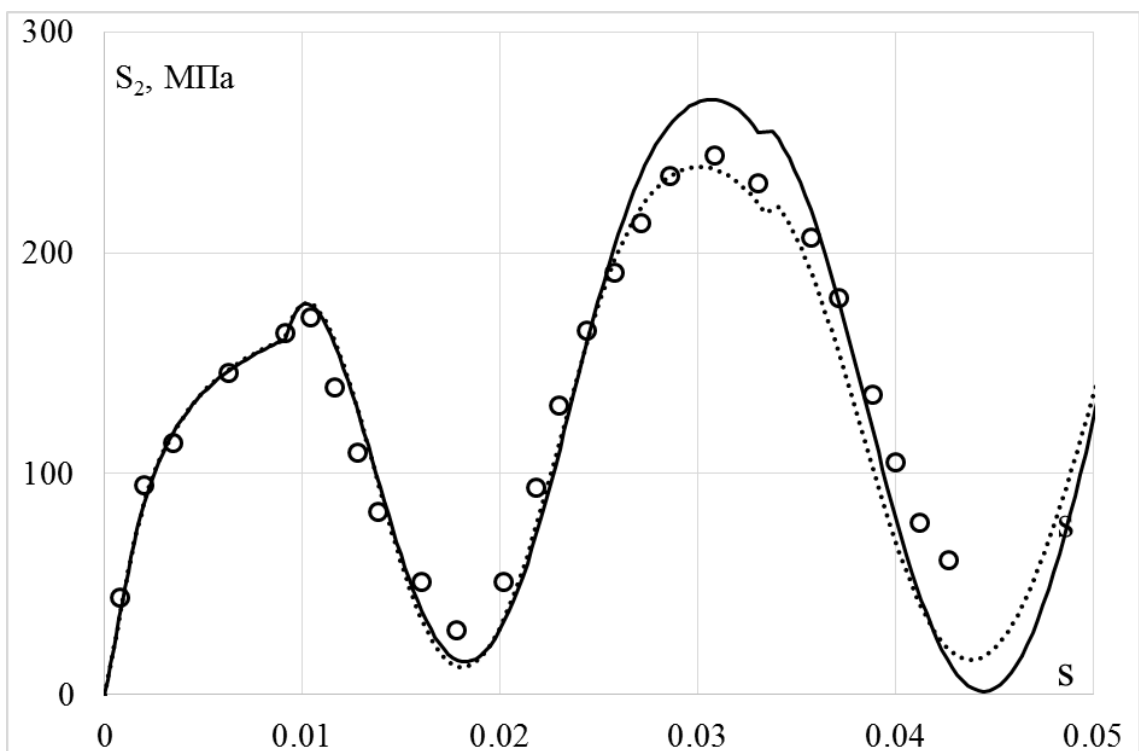


Рисунок 3.2.7 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

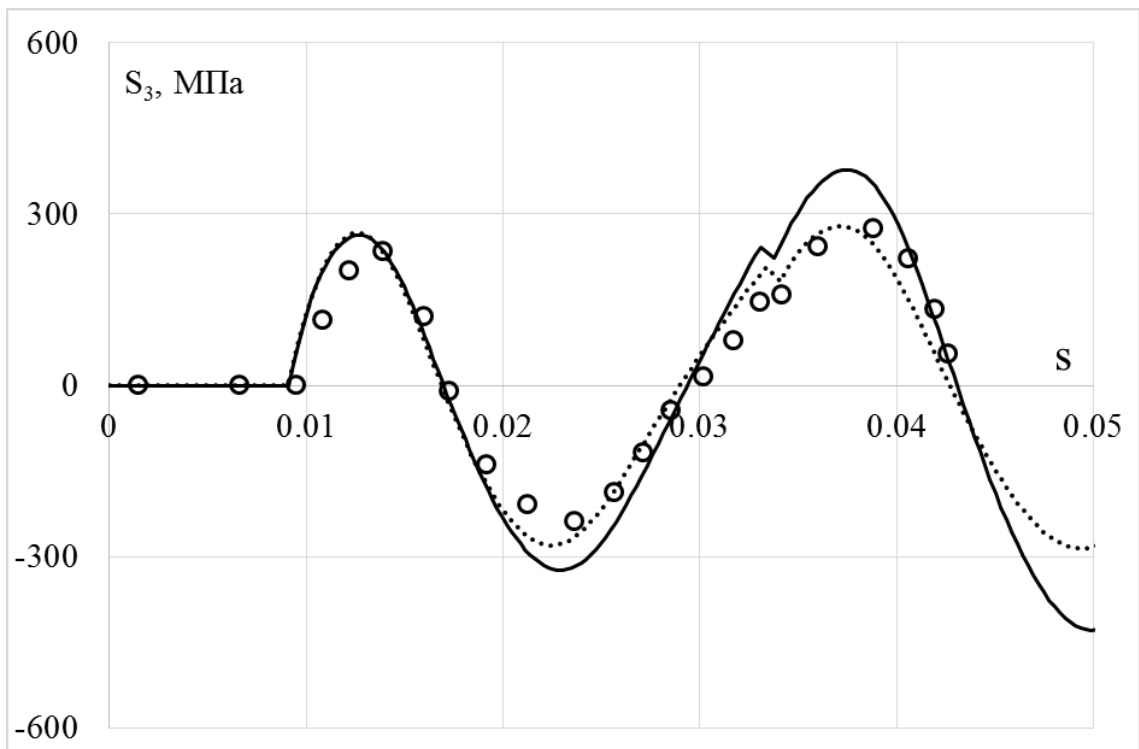


Рисунок 3.2.8 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

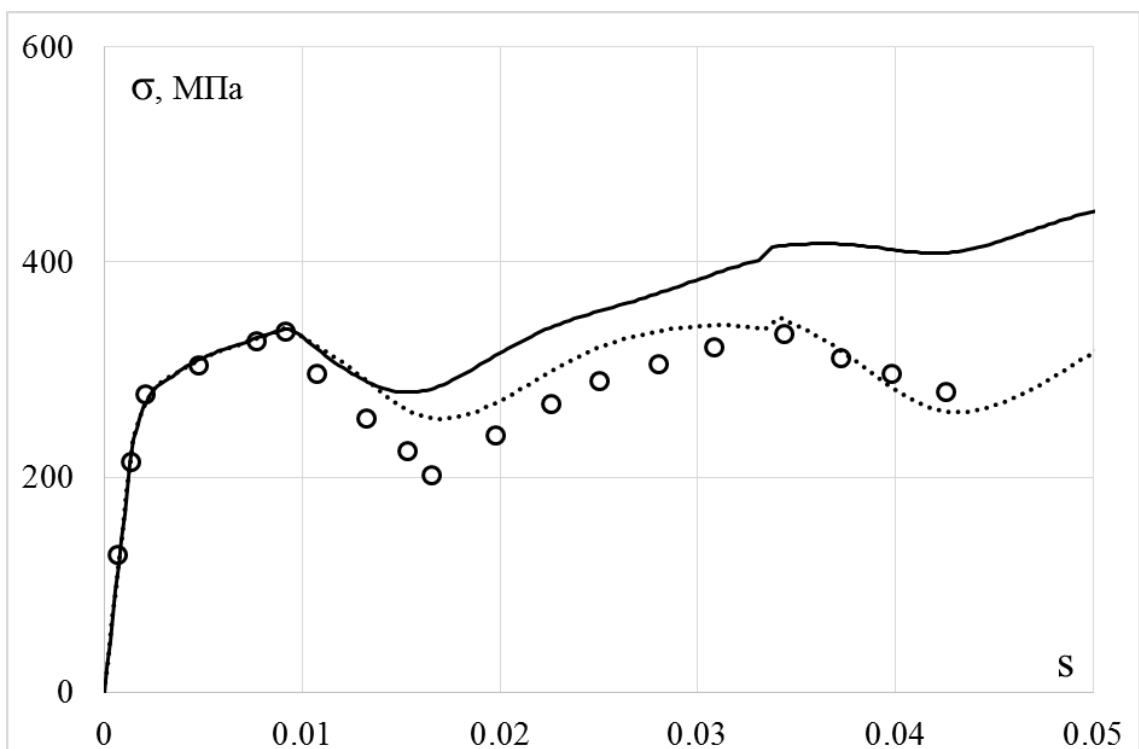


Рисунок 3.2.9 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

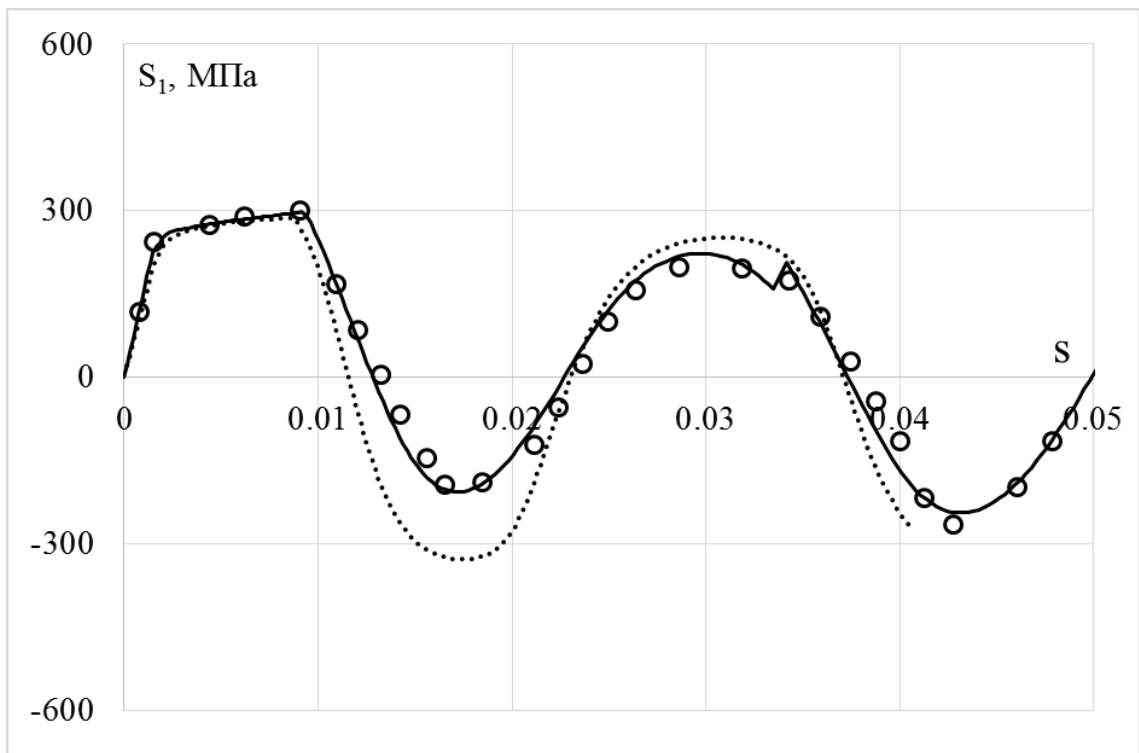


Рисунок 3.2.10 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

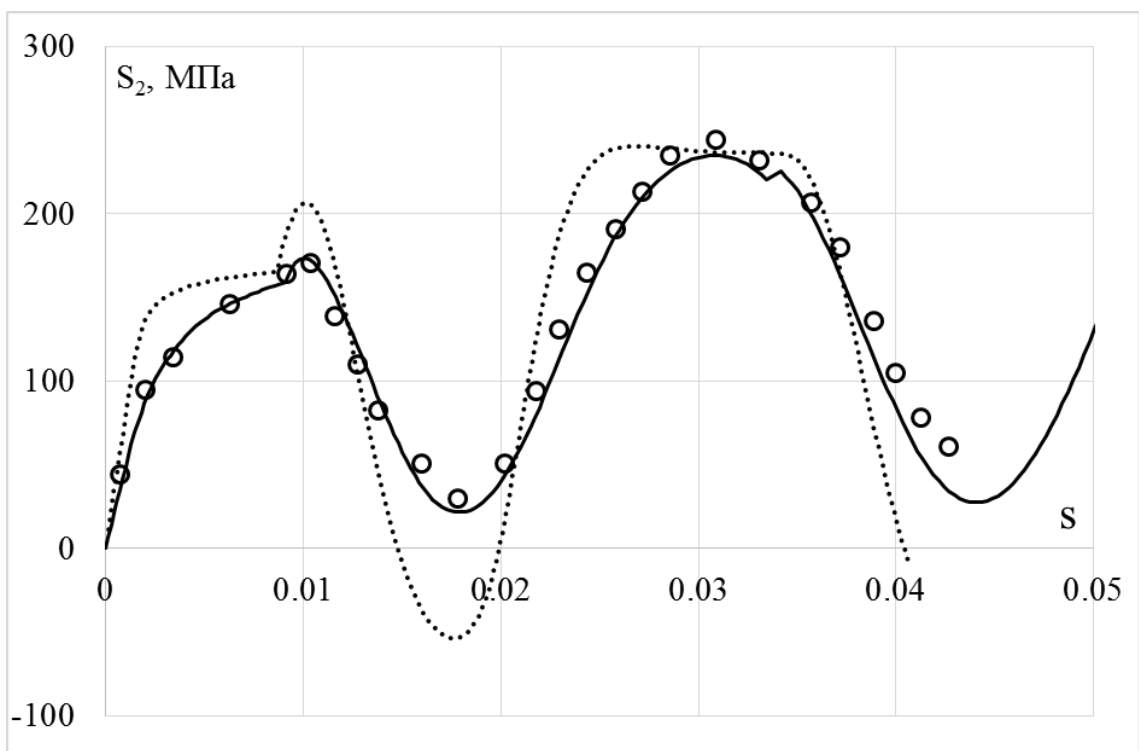


Рисунок 3.2.11 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

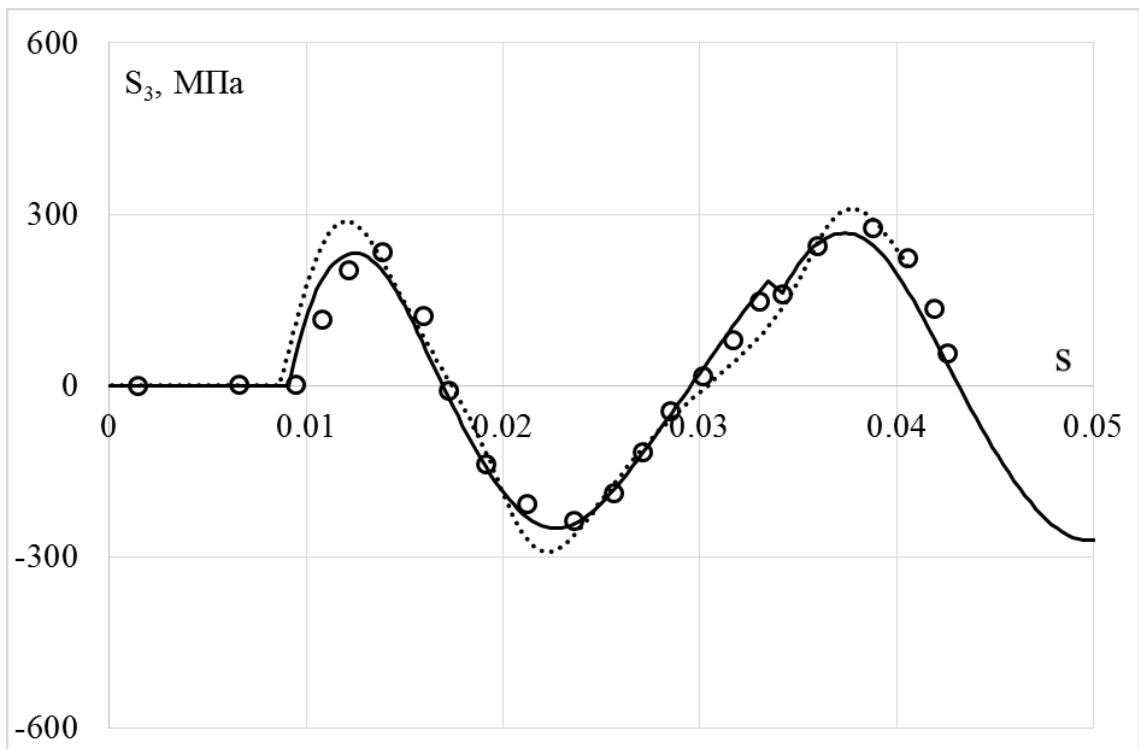


Рисунок 3.2.12 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

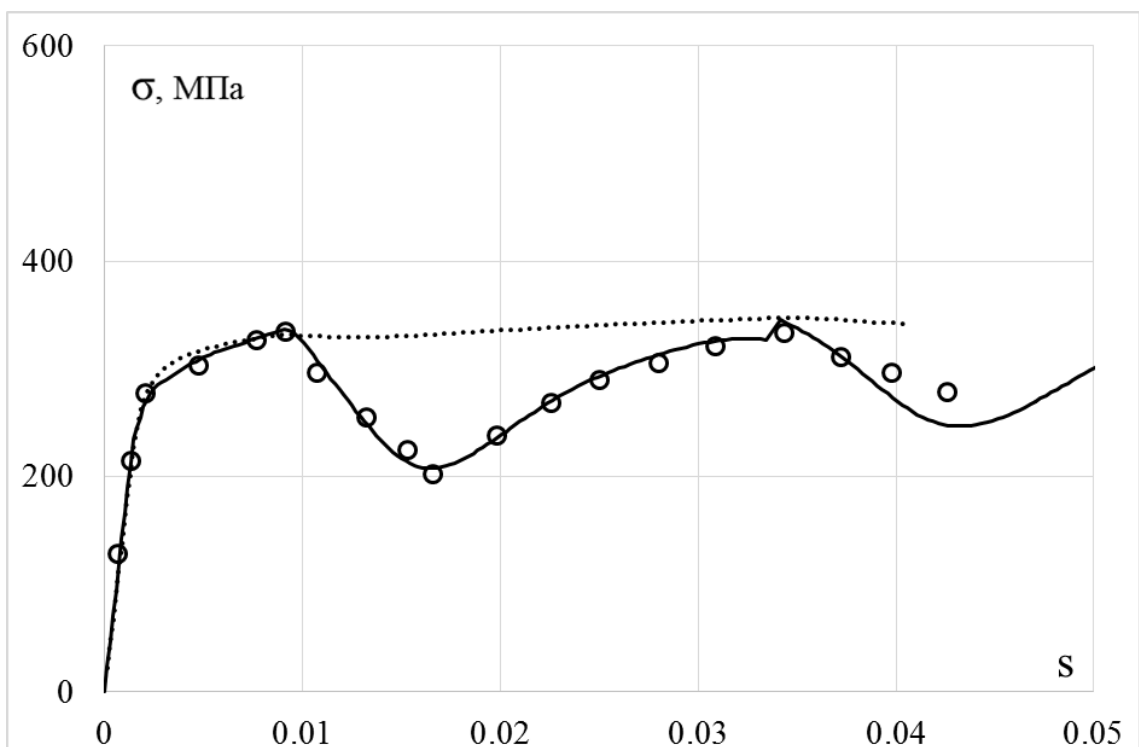


Рисунок 3.2.13 – Скалярные свойства. (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Темиса-Худяковой)

Далее сравнительный анализ вариантов моделей пластичности при сложном нагружении по пространственным траекториям нагружений в виде винтовой линии переменной кривизны и кручения проводится на винтовой линии с кривизной, меняющейся от 150 до 370 и кручением, меняющимся от 50 до 150. На рисунке 3.2.14 показано изменение кривизны и кручения вдоль траектории деформации. Рассматриваемую траекторию можно отнести к траектории большой кривизны и среднего кручения. Экспериментальные исследования проводились на трубчатых образцах из стали 45 [25, 26].

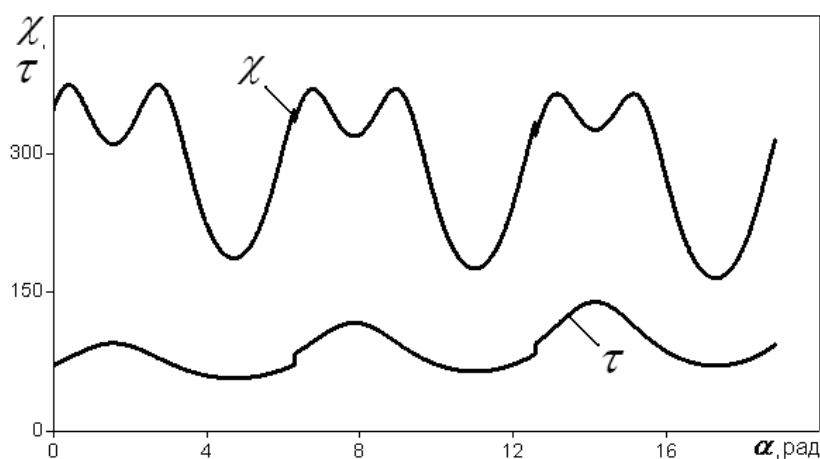


Рисунок 3.2.14 – Изменение кривизны χ и крутки τ вдоль траектории деформации.

Уравнения для компонент скоростей деформаций аналогичны (3.2.1)-(3.2.6). На данной траектории свое значение меняет шаг a_n от 0,005 до 0,007 в зависимости от номера витка, а радиус $c_n = 0,003$ по всей длине траектории.

На всех рисунках экспериментальные результаты [25, 26] показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными (точками) кривыми. Изменение компонент вектора напряжений S_1, S_2, S_3 вдоль траектории деформаций показаны на рисунках 3.2.15, 3.2.16, 3.2.17, 3.2.19, 3.2.20, 3.2.21, 3.2.23, 3.2.24 и 3.2.25. Скалярные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ вдоль траектории деформаций приведены на рисунках 3.2.18, 3.2.22 и 3.2.26.

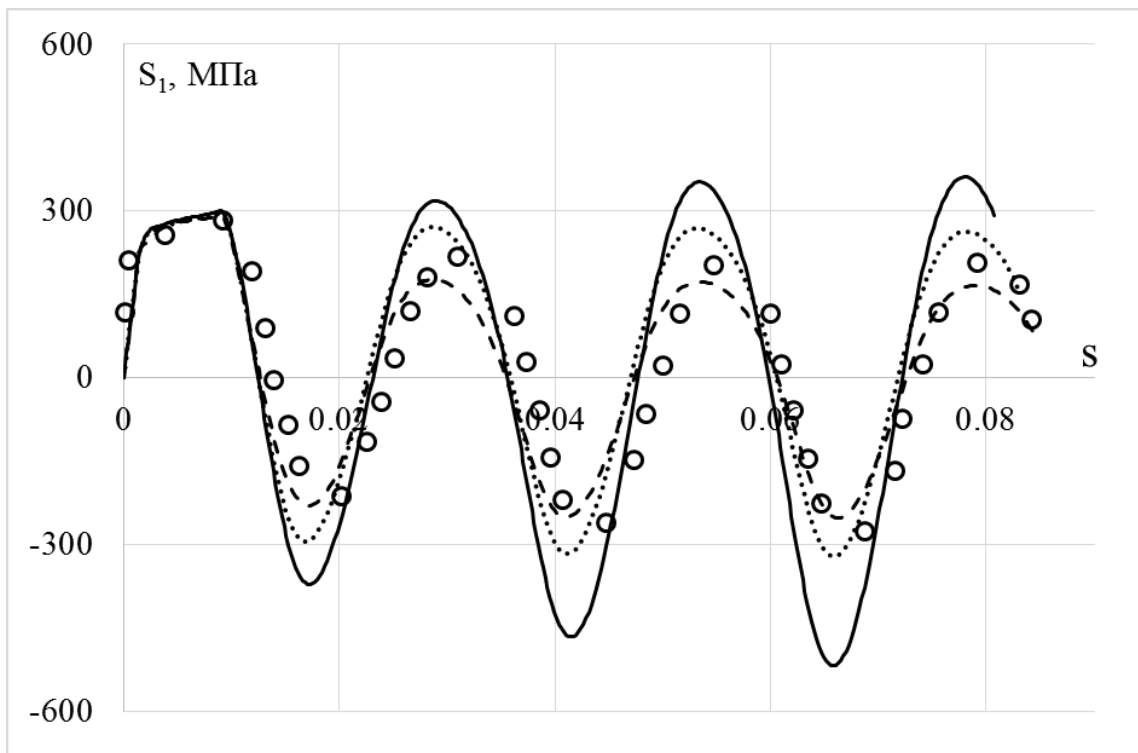


Рисунок 3.2.15 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

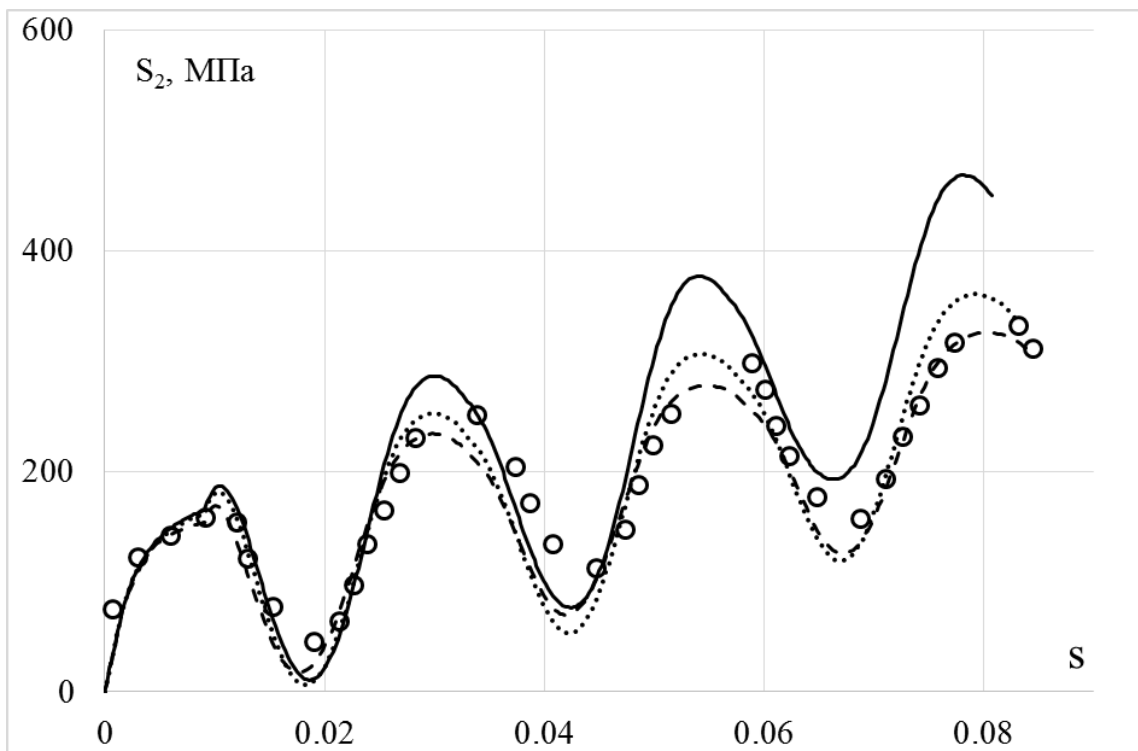


Рисунок 3.2.16 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

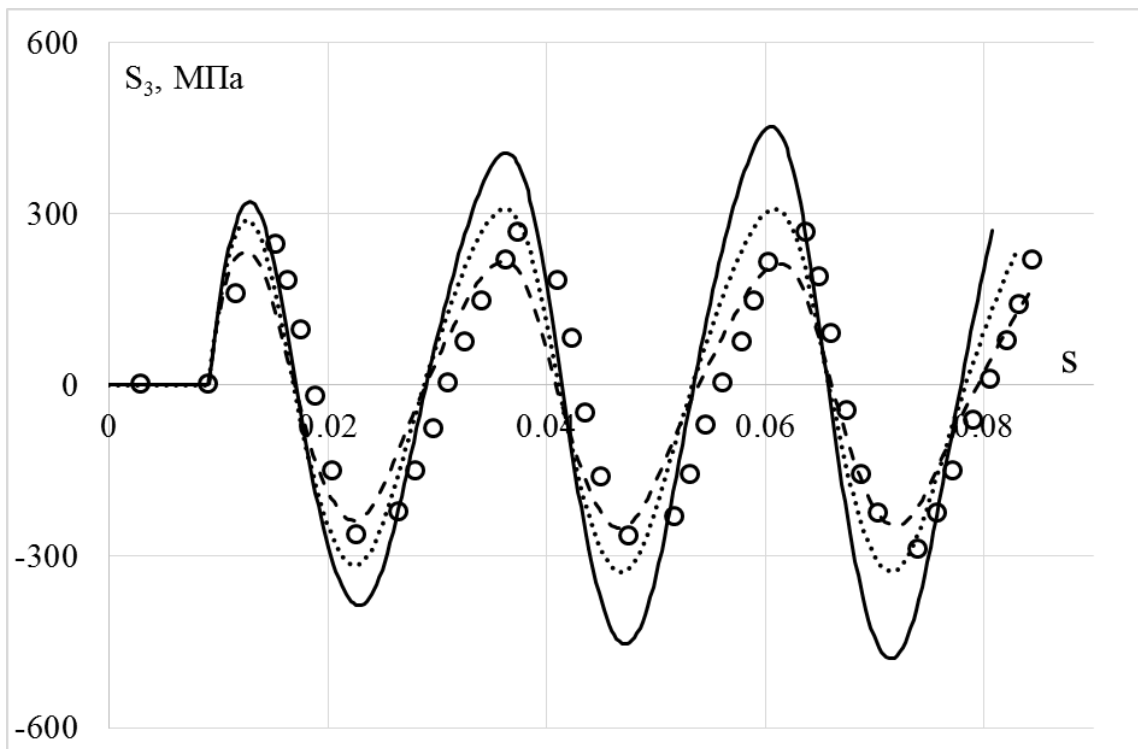


Рисунок 3.2.17 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

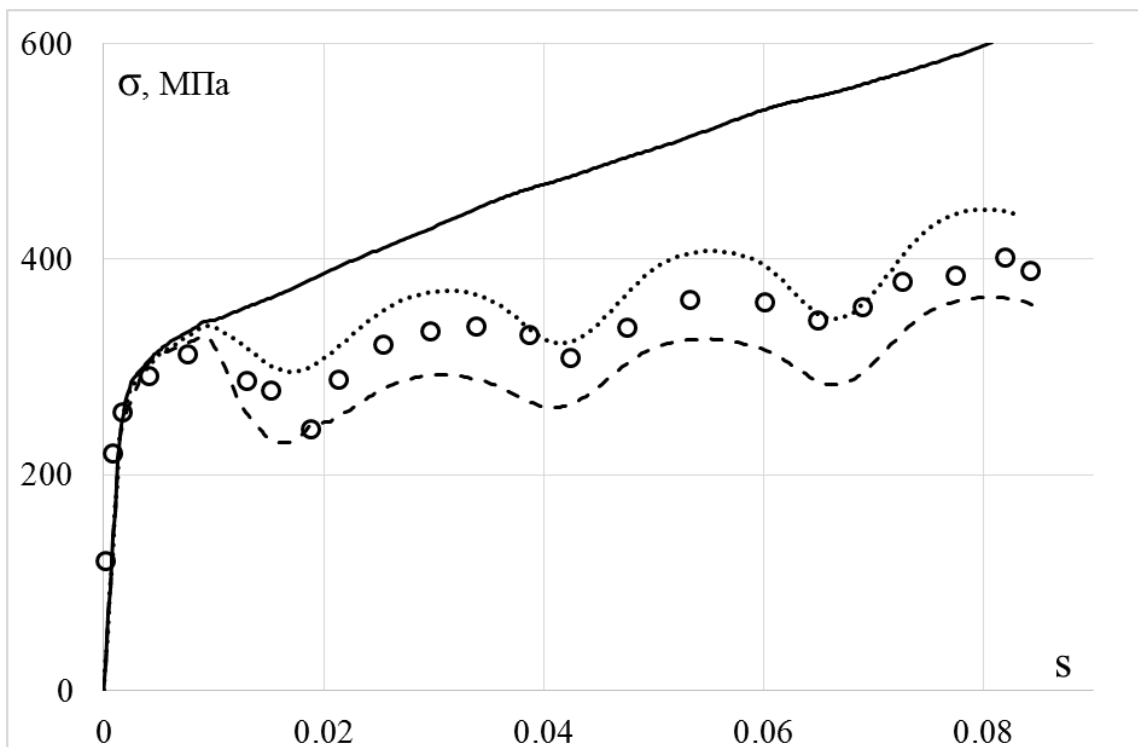


Рисунок 3.2.18 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель изотропного упрочнения, пунктирная кривая – модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, штриховая кривая – модель Оно-Ванга)

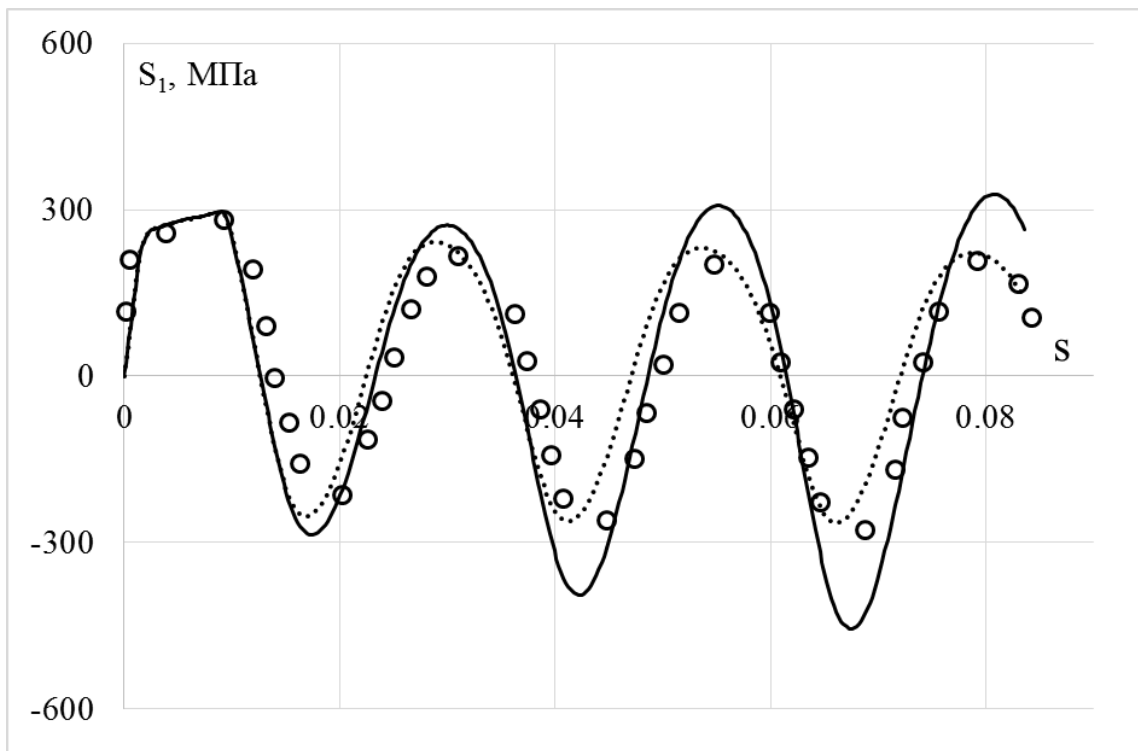


Рисунок 3.2.19 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

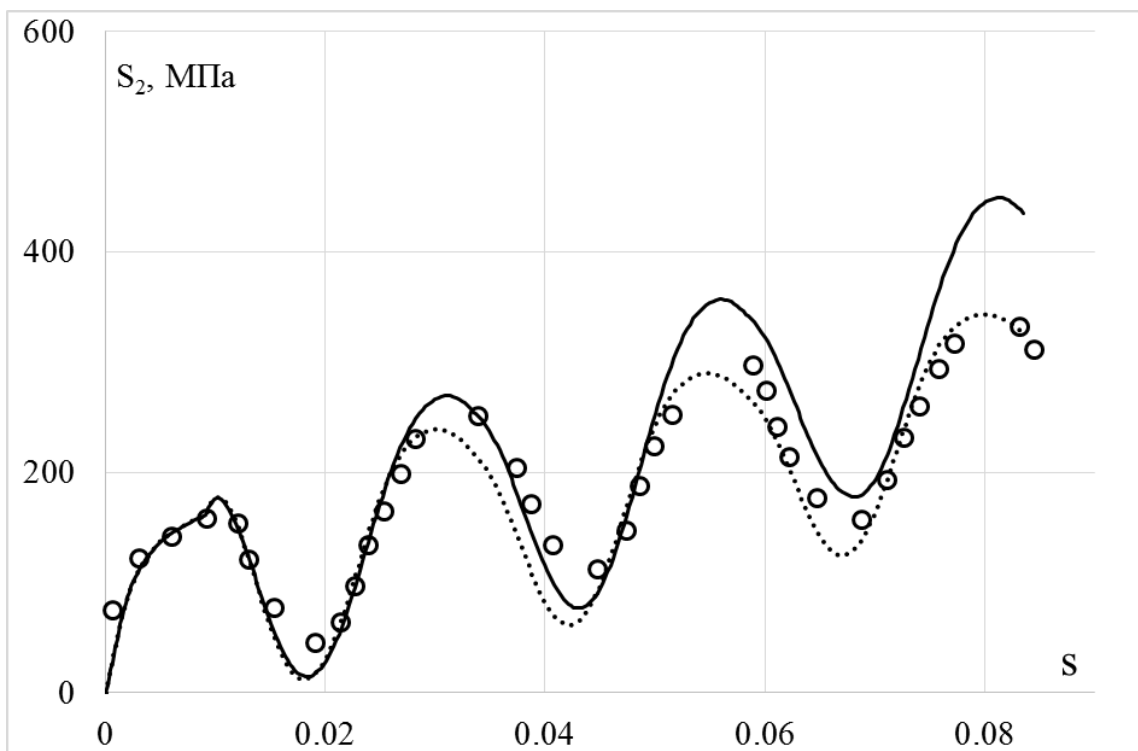


Рисунок 3.2.20 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

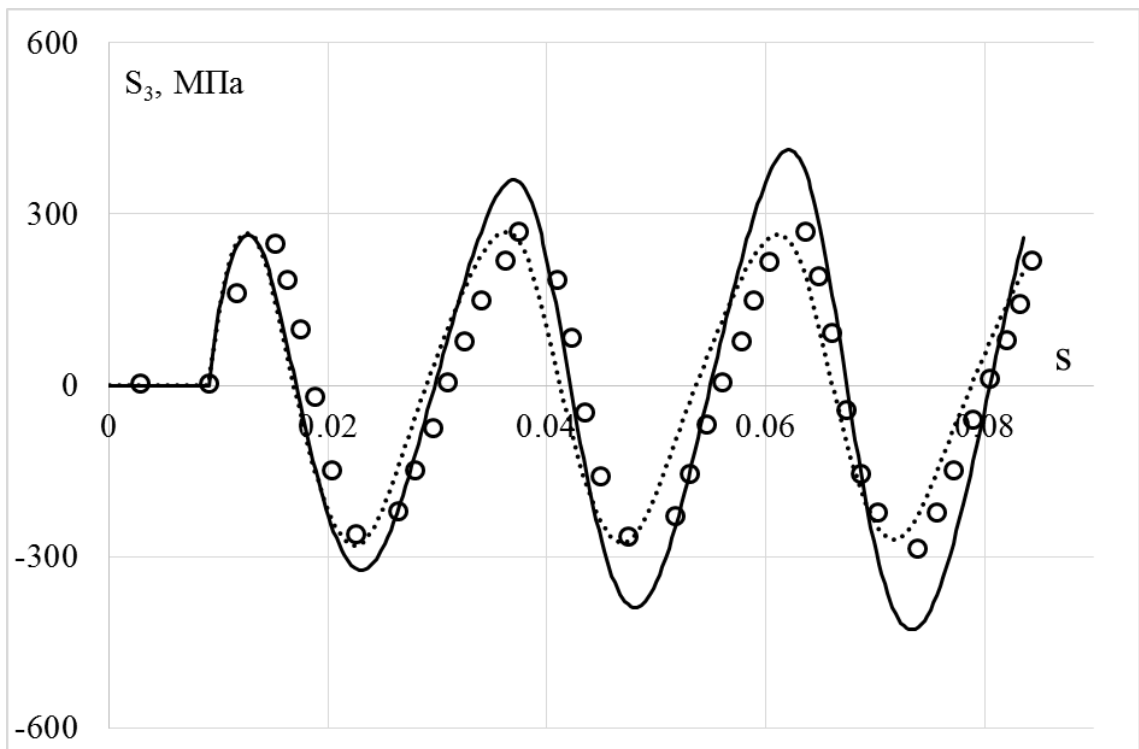


Рисунок 3.2.21 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

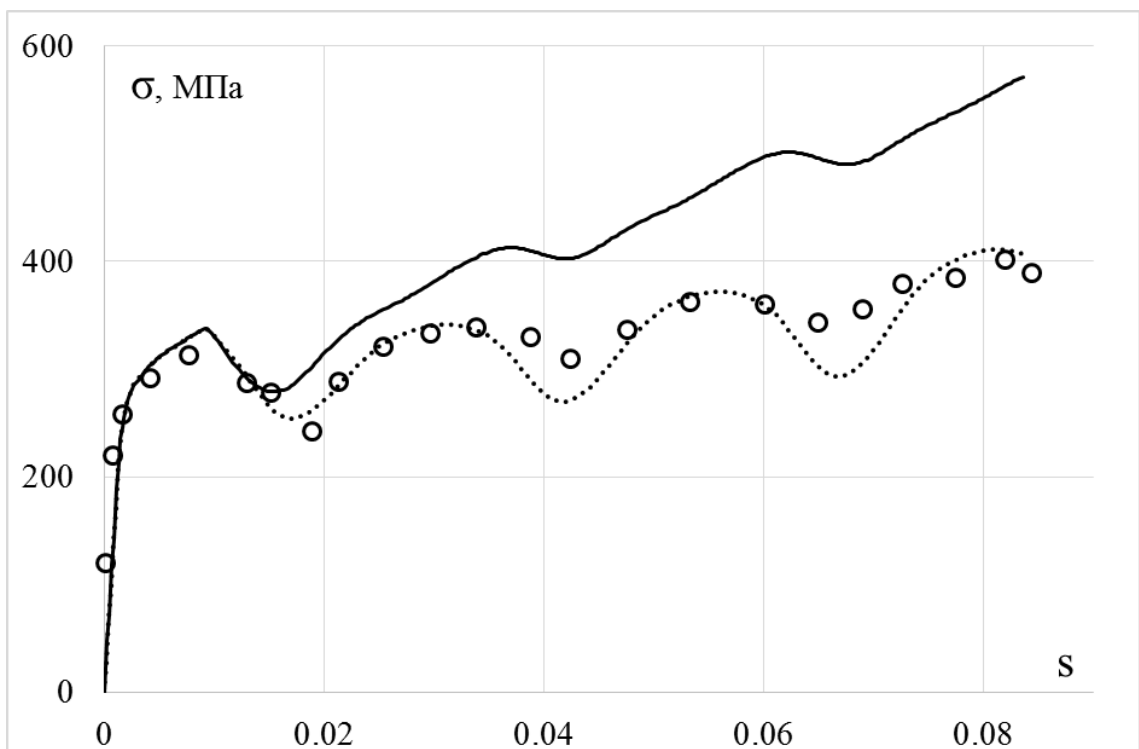


Рисунок 3.2.22 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоша)

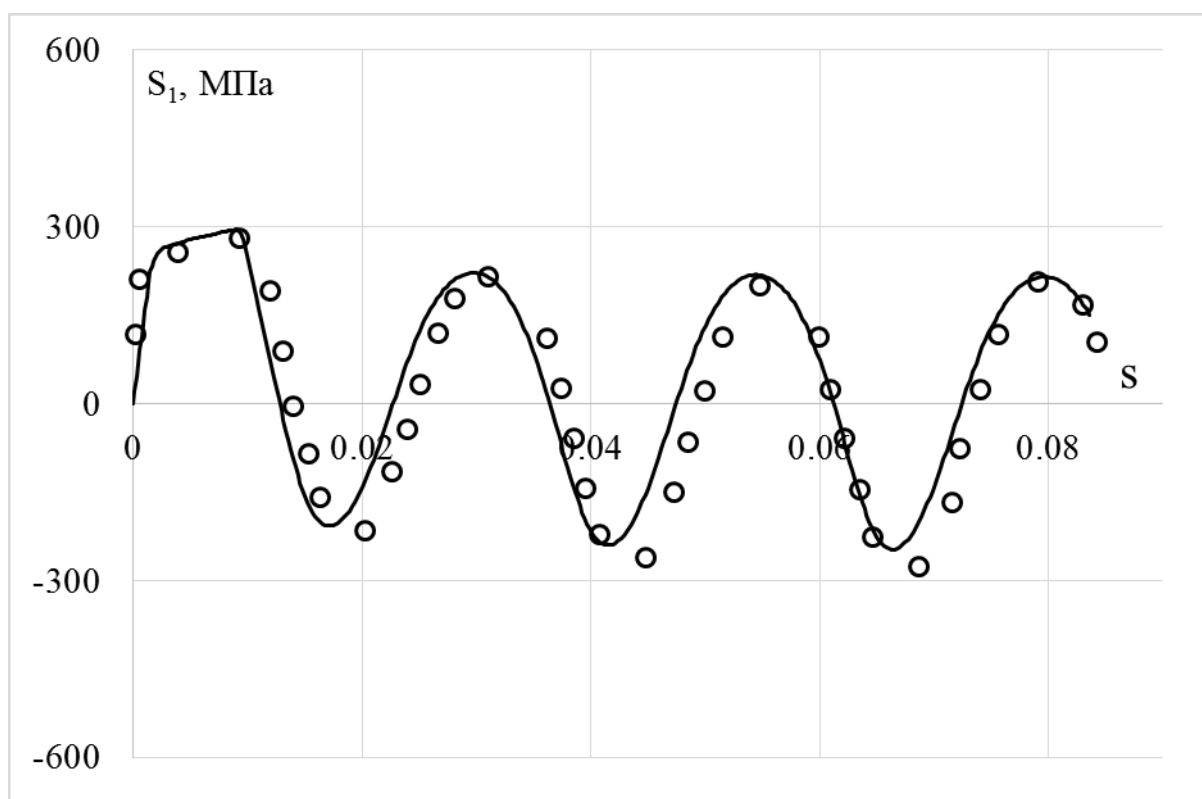


Рисунок 3.2.23 – Изменение компоненты S_1 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря)

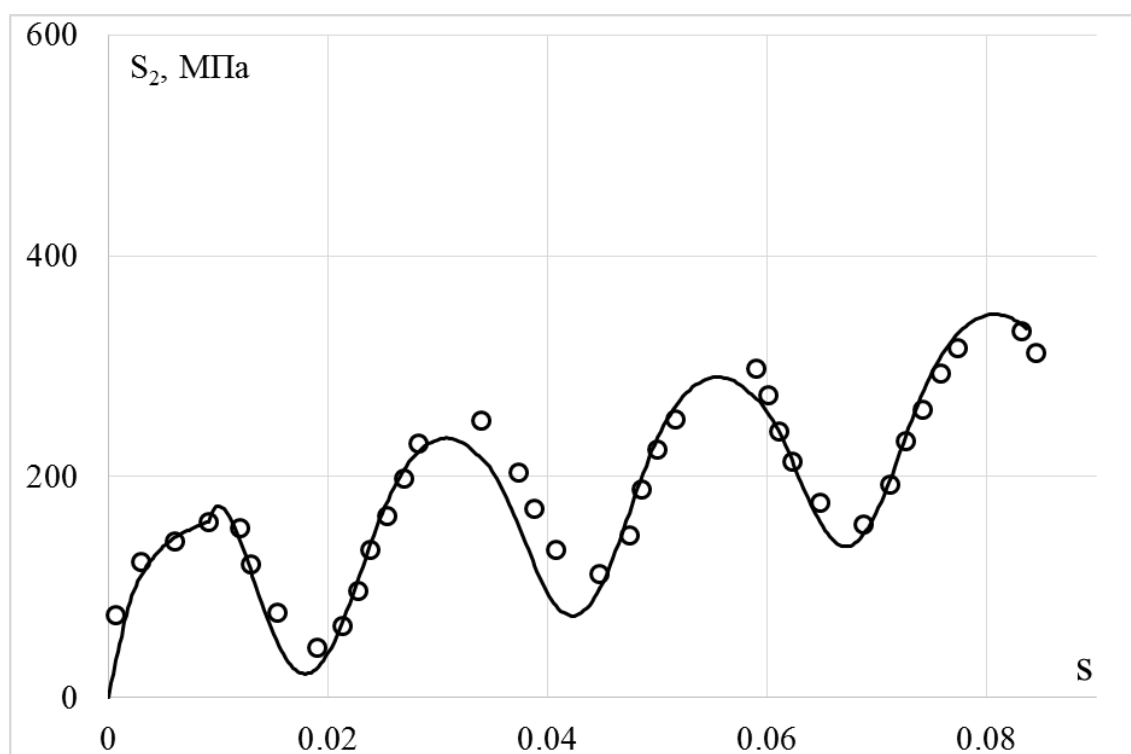


Рисунок 3.2.24 – Изменение компоненты S_2 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря)

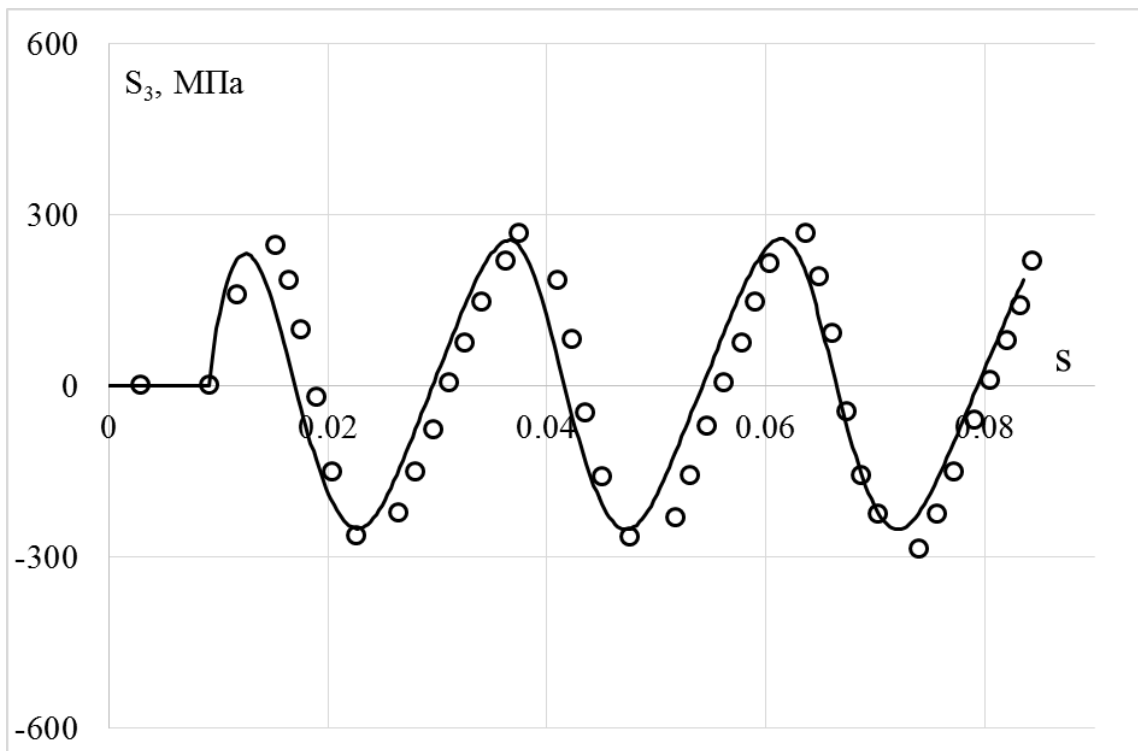


Рисунок 3.2.25 – Изменение компоненты S_3 вектора напряжений вдоль траектории деформаций (сплошная кривая – модель Бондаря)

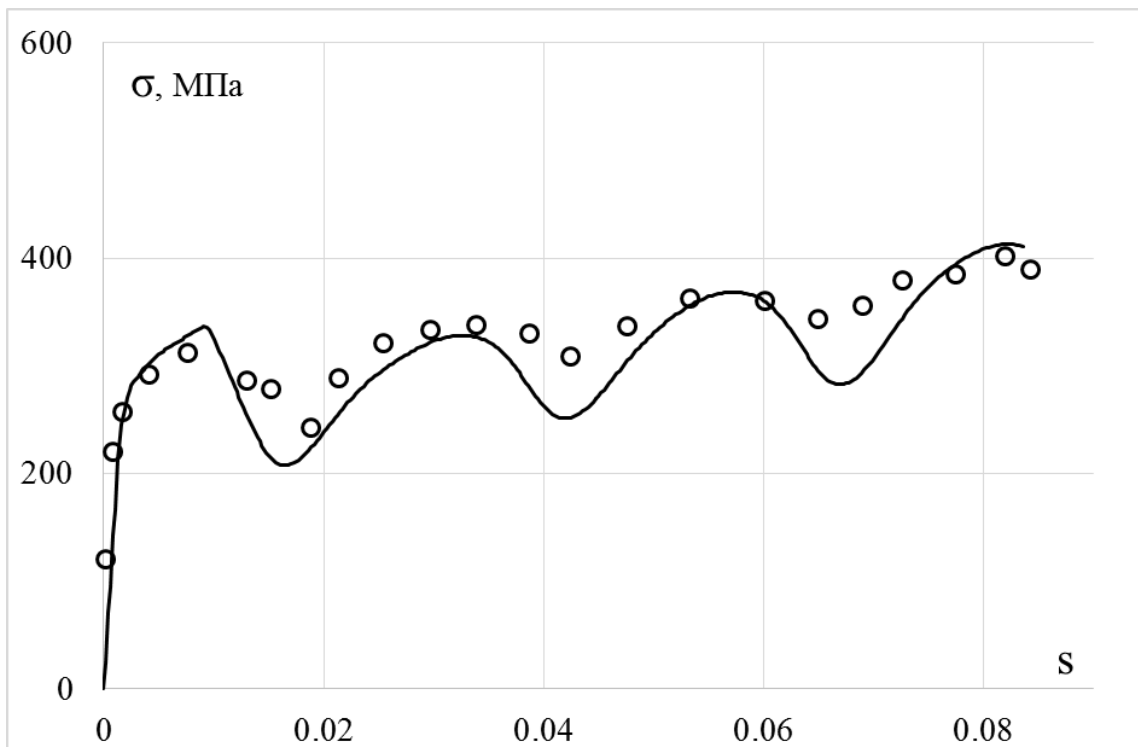


Рисунок 3.2.26 – Скалярные свойства (сплошная кривая – модель Бондаря)

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам моделей и эксперимента [25, 26] по пространственным траекториям деформаций в виде винтовой линии переменной кривизны и кручения показывает:

- по компонентам вектора напряжений худшие результаты получены на основе модели изотропного упрочнения, моделей Армстронга-Фредерика-Кадашевича, Темиса-Худяковой и Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова; удовлетворительный – на основе моделей Оно-Ванга и Шабоша; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

- по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе модели изотропного упрочнения, моделей Армстронга-Фредерика-Кадашевича, Темиса-Худяковой и Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова; удовлетворительный – на основе моделей Оно-Ванга и Шабоша; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

4 ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, АНАЛИЗИРУЕМЫЕ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

4.1 Основные положения и уравнения теорий пластичности

С учетом результатов сравнительного анализа вариантов теорий при непропорциональном нагружении по плоским и пространственным траекториям деформаций для анализа теорий при несимметричных циклических нагружениях были выбраны следующие модели: модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича [77, 78, 124]; модель Шабоша [137-144] с тремя и четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений; модель Бондаря [9, 13], модифицированная модель Бондаря [9, 13, 14, 19, 22] с учетом и без учета микронапряжений Оно-Ванга. Основные уравнения рассматриваемых моделей пластичности аналогичны представленным уравнениям в разделе 1.1 (1.1.1-1.1.5). В модели Армстронга-Фредерика-Кадашевича микронапряжения описываются с помощью эволюционного уравнения (1.1.12). В модели Шабоша [137-144] для описания анизотропного упрочнения используется принцип суммирования микронапряжений (1.1.10), каждое микронапряжение описывается уравнением Армстронга-Фредерика-Кадашевича (1.1.11), далее рассматривается два варианта модели при $M = 3$ и $M = 4$ при этом 2 независимых микронапряжения используются для описания формы петли упругопластического гистерезиса, а остальные для описания процесса посадки. Модель Бондаря используется в трех вариантах: модель с трехчленной структурой уравнения для микронапряжений (1.1.13); вариант модели, обобщенный на процессы вышагивания и посадки петли пластического гистерезиса; вариант модели со сложной структурой уравнений для микронапряжений, включающий в себя три типа уравнений для микронапряжений.

Для варианта модели Бондаря, обобщенного на процессы вышагивания и посадки петли пластического гистерезиса, параметр E_a принимается зависящим от накопленной пластической деформации [9, 13]:

$$E_a = \frac{E_{a0}}{1 + K_E(\varepsilon_{u^*}^p)^{n_E+1}}, \quad (4.1.1)$$

здесь E_{a0}, K_E, n_E – параметры материала, дополняющие материальные функции модели Бондаря и замыкающие модифицированную модель.

В варианте модели Бондаря со сложной структурной микронапряжений для описания микронапряжений используется принцип суммирования микронапряжений:

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_{ij}^{(m)}. \quad (4.1.2)$$

В качестве первого эволюционного уравнения принимается уравнение Ишлинского-Прагера:

$$\dot{a}_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (4.1.3)$$

$$g^{(1)} = E_a = E_{a0} / (1 + K_E(\varepsilon_{u^*}^p)^{n_E+1}), \quad (4.1.4)$$

Для второго эволюционного уравнения для микронапряжений используется уравнение Армстронга-Фредерика-Кадашевича:

$$\dot{a}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{3} g^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(2)} a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (4.1.5)$$

$$g^{(2)} = \beta \sigma, g_a^{(2)} = -\beta. \quad (4.1.6)$$

Последующие эволюционные уравнения для микронапряжений соответствуют простейшему аналогу уравнений Оно-Ванга:

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (m = 3, \dots, M). \quad (4.1.7)$$

Далее в работе рассматривается вариант модели при $M = 7$. Параметр $g^{(m)}$ определяется следующим образом:

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)}, \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \geq \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0, \end{cases} \quad (4.1.8)$$

$$a_u^{(m)} = \left(\frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 3, \dots, M. \quad (4.1.9)$$

Здесь $\beta^{(m)}, \sigma_a^{(m)}$ – материальные параметры.

Уравнения (4.1.3)-(4.1.6) эквивалентны уравнению с трехчленной структурой (1.1.13) и позволяют описать эффекты циклического нагружения, возникающие при несимметричных циклических нагружениях. С учетом уравнений (4.1.8) и (4.1.9) окончательное уравнение будет иметь вид:

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \varepsilon_{ij}^p + \left(\frac{2}{3} g_\varepsilon \varepsilon_{ij}^p + g_a a_{ij}^* \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (4.1.10)$$

$$g = \sum_{m=1}^M g^{(m)} = E_a + \beta \sigma_a + \sum_{m=3}^M g^{(m)}, \quad (4.1.11)$$

$$g_\varepsilon = \beta E_a, g_a = -\beta, a_{ij}^* = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)}.$$

4.2 Базовый эксперимент и метод идентификации

Упругие параметры E, ν для всех материалов определяются традиционными методами и приводятся в справочных материалах.

Базовым экспериментом для идентификации материальных функций для всех представленных моделей являются испытания по циклическому растяжению-сжатию при жестком несимметричном цикле со средним значением деформации не менее 0,03. По результатам испытания определяются циклическая диаграмма $\sigma_{ц} = f(\varepsilon_{ц}^p)$ петли пластического гистерезиса в координатах: напряжение σ , пластическая деформация ε^p и зависимость $\sigma_m = f(N)$, связывающая среднее значение напряжения в цикле с номером цикла нагружения.

Далее приводится метод определения параметров анизотропного упрочнения для каждой рассматриваемой модели.

Модель Шабоса

Для определения параметров микронапряжения для модели Шабоса, из циклической диаграммы пластического деформирования $\sigma_{ц} = f(\varepsilon_{ц}^p)$ необходимо определить зависимость $a_{ц} = f(\varepsilon_{ц}^p)$ (рисунок 4.2.1).

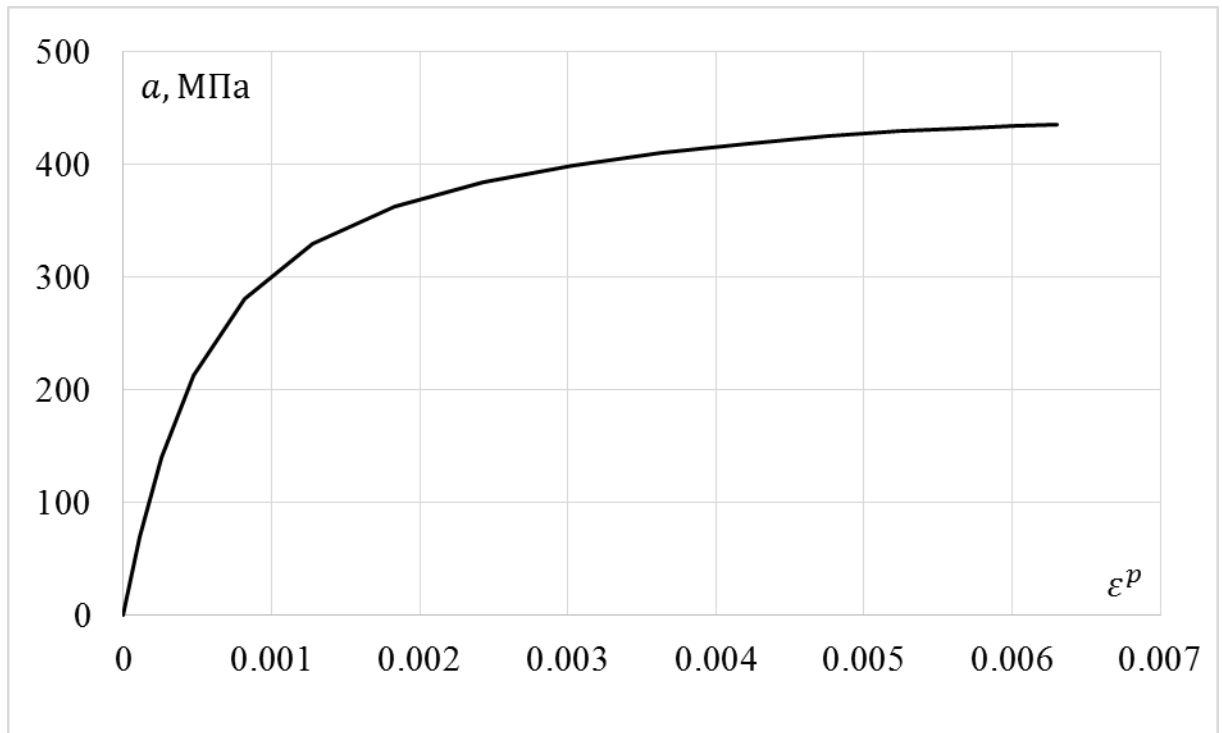


Рисунок 4.2.1 – Кривая, отвечающая за смещение поверхности нагружения

Для этого по заданному допуску на пластическую деформацию, равному 0,0002 определяется значение размера поверхности нагружения для циклической диаграммы деформирования $C_p^{(ц)}$. Тогда, пренебрегая изотропным упрочнением, можно определить значения микронапряжений:

$$a_{ц} = \sigma_{ц} - C_p^{(ц)}. \quad (4.2.1)$$

Зависимость каждого из независимых микронапряжений $a_{ц}^{(m)}$ от накопленной пластической деформации в стабильном полуцикле имеет вид:

$$a_{ц}^{(m)} = \frac{C^{(m)}}{\gamma^{(m)}} \left[1 - \left(\frac{2}{1 + e^{-\gamma^{(m)} \Delta \varepsilon^p}} \right) e^{-\gamma^{(m)} \varepsilon_{ц}^p} \right], \quad (4.2.2)$$

где $\Delta \varepsilon^p$ – размах пластической деформации при циклическом деформировании.

Параметры анизотропного упрочнения модели Шабоса для двух независимых микронапряжений, описывающих форму петли, определяются путем минимизации суммы квадратов разности между экспериментальными значениями микронапряжений $a_{ц}$ и вычисленными с помощью выражения (4.2.2) суммами двух независимых микронапряжений $a_{ц}^{(1)} + a_{ц}^{(2)}$.

Для определения параметров оставшихся микронапряжений вычисляется среднее значение напряжения в первом цикле σ_m^0 . Зависимость изменения среднего значения напряжения от номера цикла описывается с помощью следующего уравнения:

$$\sigma_m^N = \sum_{m=3}^M A_{N-1}^{(m)} e^{-2\gamma^{(m)} \Delta \varepsilon^p}, \quad (4.2.3)$$

$$A_{N-1}^{(m)} = \frac{C^{(m)}}{\gamma^{(m)}} \left(1 - e^{-\gamma^{(m)} \varepsilon_m^p} \right), \quad (4.2.4)$$

где ε_m^p – среднее значение пластической деформации.

Тогда параметры микронапряжений можно определить путем минимизации суммы квадратов разности между экспериментальными значениями среднего напряжения в цикле и вычисленными по формуле (4.2.3).

Модифицированная модель Бондаря

Для определения параметров анизотропного упрочнения из зависимости $a_{ц} = f(\varepsilon_{ц}^p)$ вычисляется производная $da/d\varepsilon^p$ и строится кривая в координатах: $da/d\varepsilon^p, a$ (рисунок 4.2.2).

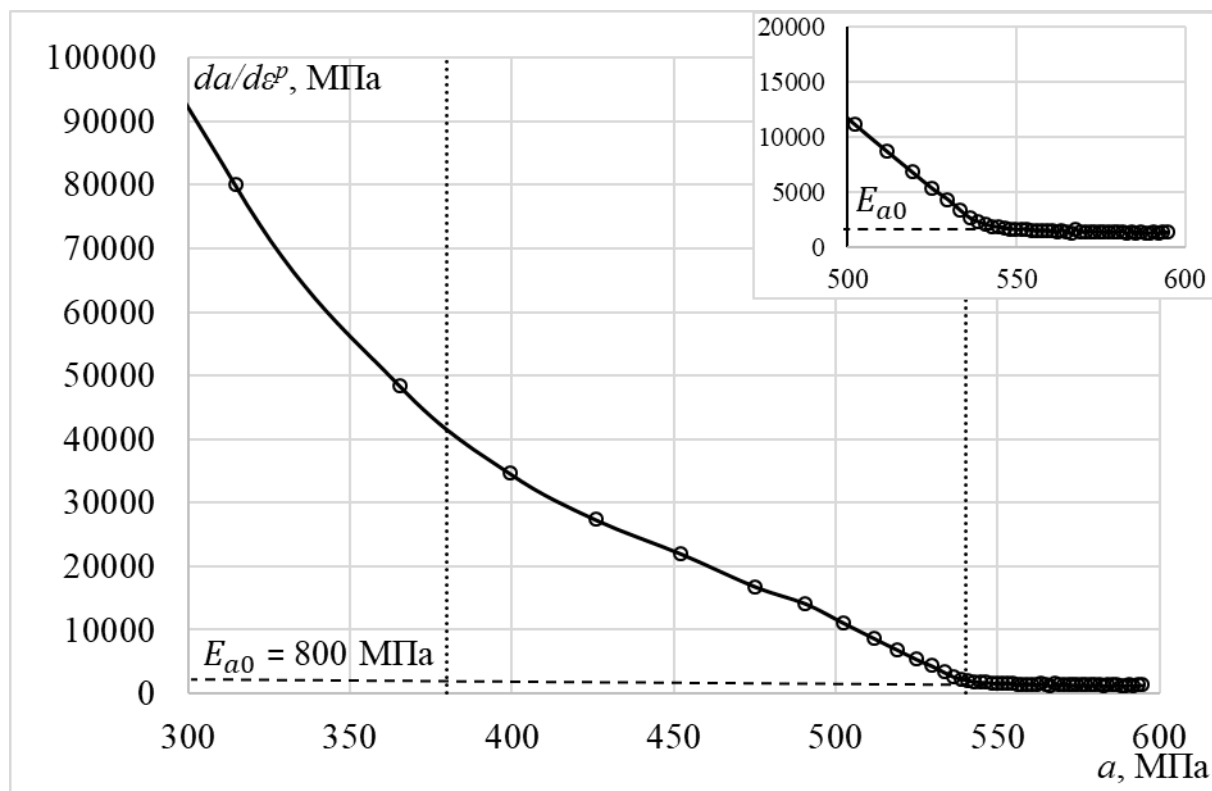


Рисунок 4.2.2 – Изменение микронапряжений

На кривой выделяется три участка, характеризующие различное поведение микронапряжений. На первом участке производная имеет практически постоянное значение и значение производной равно значению параметра E_{a0} . Здесь для микронапряжений первого типа используется уравнение Ишлинского-Прагера.

Затем кривая на рисунке 4.2.2 перестраивается в координатах: $\frac{d\hat{a}}{d\varepsilon^p} = \left(\frac{da}{d\varepsilon^p} - E_{a0}\right)$, $\hat{a} = (a - E_{a0}\varepsilon^p)$, т.е. исключается влияние микронапряжений первого типа (рисунок 4.2.3).

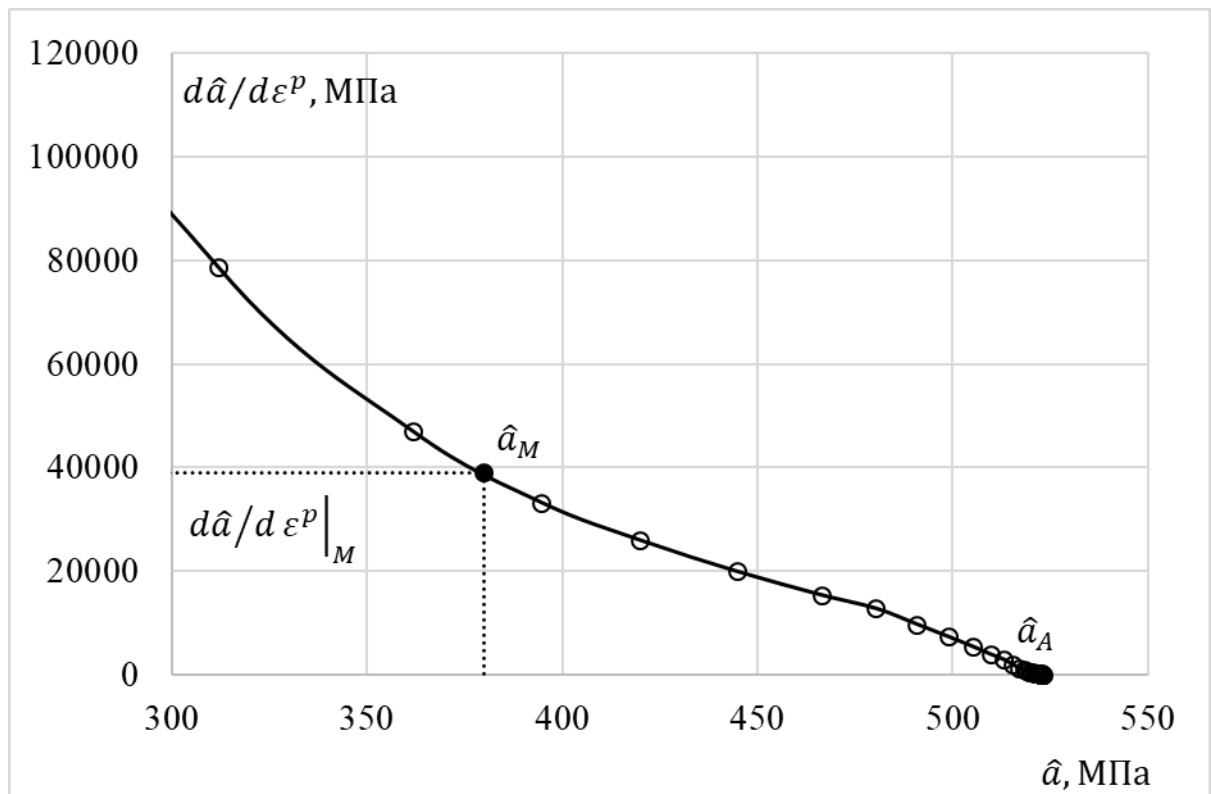


Рисунок 4.2.3 – Изменение микронапряжений второго и третьего типов

По полученной кривой определяются параметры $\sigma_a^{(2)}$ и $\beta^{(2)}$ по формулам:

$$\beta^{(2)} = \frac{\left. \frac{d\hat{a}}{d\varepsilon^p} \right|_M}{(\hat{a}_A - \hat{a}_M)}, \sigma_a^{(2)} = \frac{\hat{a}_A - \hat{a}_M}{2 \exp(-\beta^{(2)} \varepsilon_M^p)}. \quad (4.2.5)$$

Здесь ε_M^p – пластическая деформация окончания изменений микронапряжений третьего типа, соответствующих эволюционным уравнениям Оно-Ванга.

Далее кривая, отвечающая за смещение поверхности нагружения перестраивается в координатах (рисунок 4.2.4): $\tilde{a} = a - E_{a0} \varepsilon^p - 2\sigma_a^{(2)} [1 - \exp(-\beta^{(2)} \varepsilon^p)]$, $\varepsilon^p (\varepsilon^p \in [0, \varepsilon_M^p])$.

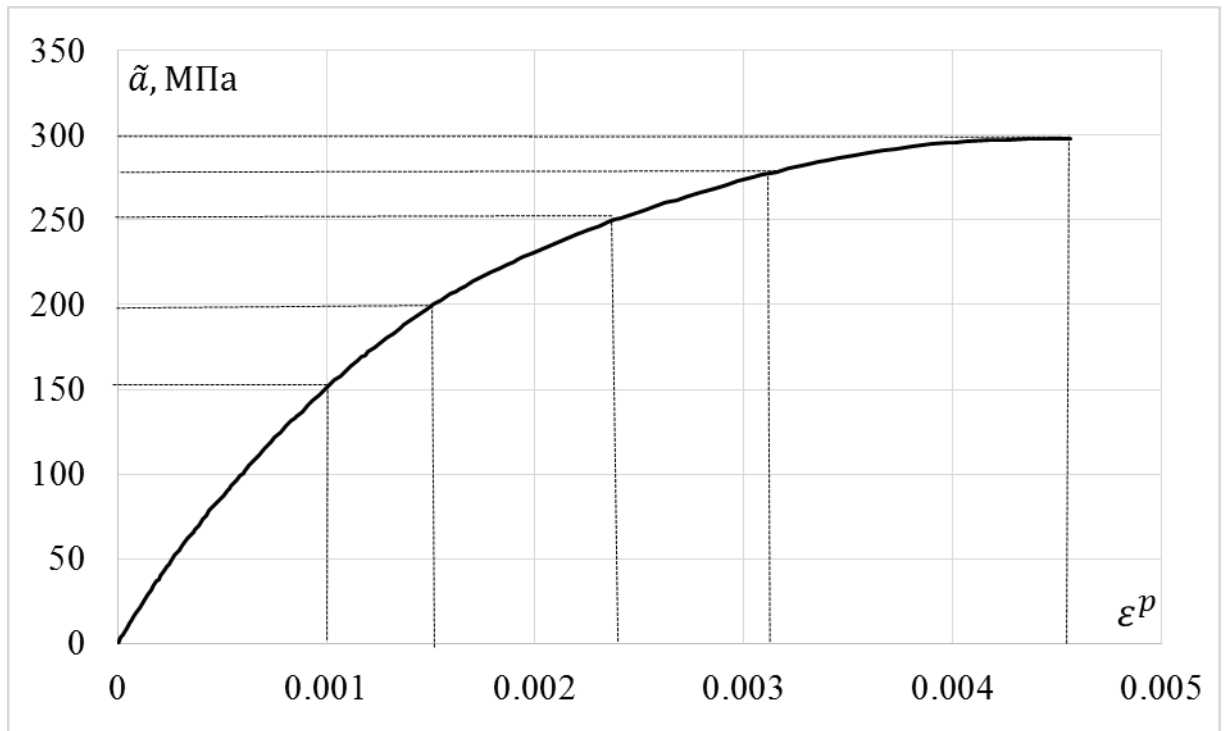


Рисунок 4.2.4 – Изменение микронапряжений третьего типа

Полученная кривая показывает изменение микронапряжений третьего типа. Длительность третьего участка достаточно мала $\varepsilon_M^p = 0,001 - 0,003$, т.е. микронапряжения Оно-Ванга возникают практически в пределах допуска на остаточную деформацию. Далее интервал $[0, \tilde{\alpha}_M]$ разбивается на $(M - 2)$ частей и параметры анизотропного упрочнения вычисляются по следующим формулам:

$$\beta^{(m)} = 2/\varepsilon_m^p \quad (m = 3, \dots, M); \quad (4.2.6)$$

$$\sigma_a^{(M)} = \frac{\tilde{\alpha}_M - \tilde{\alpha}_{M-1}}{\varepsilon_{(M)}^p - \varepsilon_{(M-1)}^p} \frac{1}{\beta^{(M)}} \quad (4.2.7)$$

$$\sigma_a^{(m)} = \frac{1}{\beta^{(m)}} \left[\frac{\tilde{\alpha}_m - \tilde{\alpha}_{m-1}}{\varepsilon_{(m)}^p - \varepsilon_{(m-1)}^p} - \frac{\tilde{\alpha}_{m+1} - \tilde{\alpha}_m}{\varepsilon_{(m+1)}^p - \varepsilon_{(m)}^p} \right], \quad (4.2.8)$$

$$m = 3, \dots, M - 1; \tilde{\alpha}_2 = 0; \varepsilon_2^p = 0.$$

Для определения модулей посадки K_E и n_E строится экспериментальная зависимость $\sigma_m = f(N)$, связывающая среднее значение напряжения в цикле с номером цикла нагружения. Полученная зависимость перестраивается в логарифмических координатах (рисунок 4.2.5):

$$y = \lg(E_{a0} \varepsilon_m^p / \sigma_m - 1), \quad (4.2.10)$$

$$x = \lg(\varepsilon_m + 4\varepsilon_a^p N), \quad (4.2.11)$$

где ε_m^p – средняя деформация цикла; ε_a^p – амплитуда пластической деформации на цикле. Эта зависимость является линейной, что позволяет по углу α наклона прямой и точки пересечения прямой с осью ординат y_0 определить модули посадки:

$$\lg K_E = y_0, n_E + 1 = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.2.12)$$

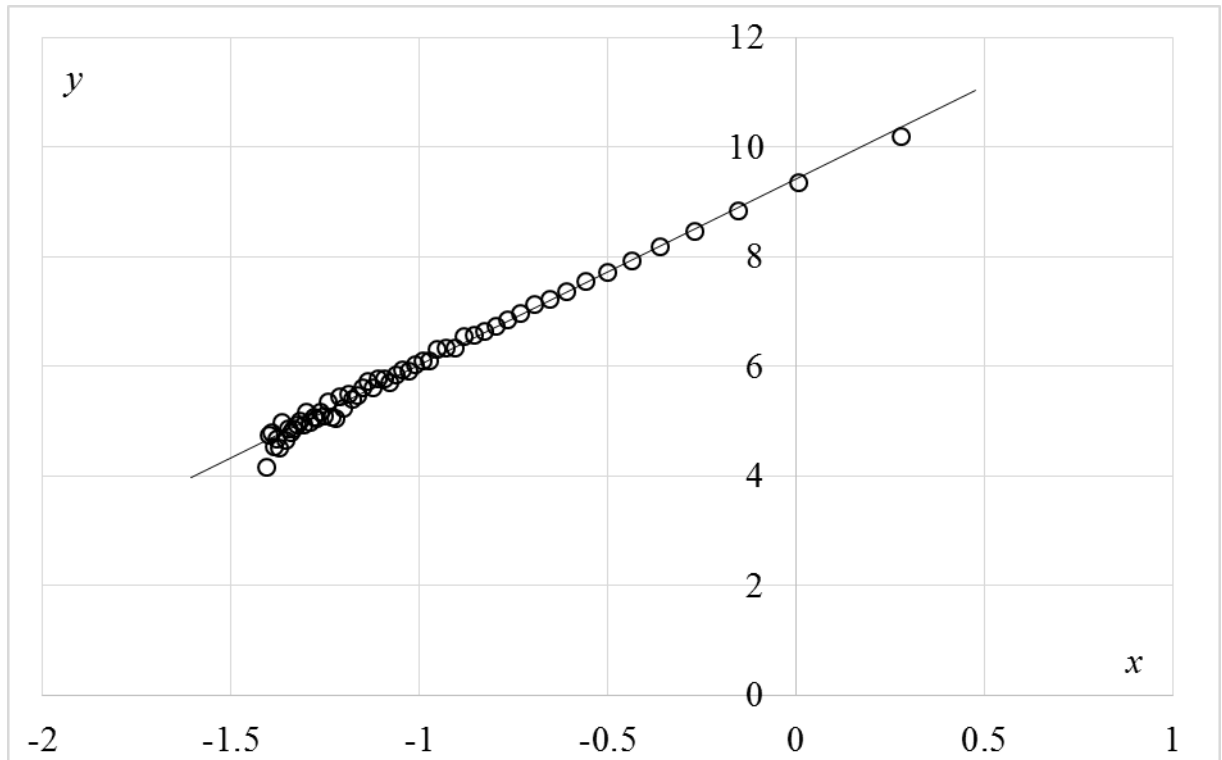


Рисунок 4.2.5 – Зависимость для определения модулей посадки

Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

Параметры модели Армстронга-Фредерика-Кадашевича определяются аналогично способу, описанному в разделе 1.2, с использованием в качестве исходных данных зависимости $a_{ц} = f(\varepsilon_{ц}^p)$.

Значения параметров анизотропного упрочнения для рассматриваемых моделей приведены в таблице 4.2.1

Таблица 4.2.1. Значения параметров анизотропного упрочнения

	Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича.	Модель Шабоса М=3	Модель Шабоса М=4	Модель Бондаря	Модель Бондаря со сложной структурой уравнения для микронапряжений
g_ε	0	0	0	$E_a\beta$	$E_a\beta$
$g^{(1)}$	0	0	$C^{(1)}$	$E_a + \beta\sigma_a$	$E_a + \beta\sigma_a$
$g_a^{(1)}$	0	0	$-\gamma^{(1)}$	$-\beta$	$-\beta$
$g^{(2)}$	C	$C^{(1)}$	$C^{(2)}$	0	0
$g_a^{(2)}$	$-\gamma$	$-\gamma^{(1)}$	$-\gamma^{(2)}$	0	0
$g^{(3)}$	0	$C^{(2)}$	$C^{(3)}$	0	0
$g_a^{(3)}$	0	$-\gamma^{(2)}$	$-\gamma^{(3)}$	0	0
$g^{(4)}$	0	$C^{(3)}$	$C^{(4)}$	0	0
$g_a^{(4)}$	0	$-\gamma^{(3)}$	$-\gamma^{(4)}$	0	0
$g^{(5...14)}$	0	0	0	0	в соответствии с (4.1.8)

Функция изотропного упрочнения определяется для всех моделей пластичности по зависимости, связывающей размах напряжений и значение накопленной пластической деформации ε_{u*}^p .

Для этого вычисляются значения микронапряжений для каждого цикла нагружения.

Сначала вычисляются по определенным ранее параметрам значения микронапряжений в процессе циклического деформирования с помощью следующих соотношений:

$$a_{\text{ц}} = \sum a_{\text{ц}}^{(m)}, \quad (4.2.13)$$

Модель Шабоса

$$a_{\text{ц}}^{(m)} = \frac{C^{(m)}}{\gamma^{(m)}} \left[1 - \left(\frac{2}{1 + e^{-\gamma^{(m)} \Delta \varepsilon^p}} \right) e^{-\gamma^{(m)} \varepsilon_{\text{ц}}^p} \right];$$

Модель Бондаря

$$a_{\text{ц}} = E_a \varepsilon_{\text{ц}}^p + \sigma_a [1 - \exp(-\beta \varepsilon_{\text{ц}}^p)]. \quad (4.2.14)$$

Модель Армстронга-Фредерика-

$$a_{\text{ц}} = \frac{C}{\gamma} (1 - \exp(-\gamma \varepsilon_{\text{ц}}^p)); \quad (4.2.15)$$

Кадашевича

Тогда функция размера поверхности нагружения определяется путем вычитания из циклической диаграммы $a_{ц} = f(\varepsilon_{ц}^p)$ определенных по выражениям (4.2.13)-(4.2.15) значений микронапряжений:

$$C_p = \sigma_{ц} - a_{ц}. \quad (4.2.16)$$

4.3 Материальные функции конструкционных сталей и сплавов

Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

Материальные функции конструкционной стали 12Х18Н9

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3, \quad C = 40500 \text{ МПа}, \gamma = -270$$

Таблица 4.3.1. Функция изотропного упрочнения стали 12Х18Н9

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0.0017	0.015	0.064	0.15	1.0	8.0	1000
$C_p, \text{ МПа}$	160	190	190	290	280	270	250	240

Модель Шабоса

Материальные функции конструкционной стали 12Х18Н9

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$C^{(1)} = 1602 \text{ МПа}, \gamma^{(1)} = 4,5, C^{(2)} = 45000 \text{ МПа},$$

$$\gamma^{(2)} = 300, C^{(3)} = 175000 \text{ МПа}, \gamma^{(3)} = 2500,$$

$$C^{(4)} = 601 \text{ МПа}, \gamma^{(4)} = 0,43$$

Таблица 4.3.2. Функция изотропного упрочнения стали 12Х18Н9

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0.0017	0.015	0.064	0.086	1.0	8.0	1000
$C_p, \text{ МПа}$	160	120	120	150	200	200	200	200

Модифицированная модель Бондаря

Материальные функции конструкционной стали 12Х18Н9

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$E_a = 1600 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 150 \text{ МПа}, \beta^{(2)} = 300,$$

$$\sigma_a^{(3)} = 35 \text{ МПа}, \beta^{(3)} = 2500, \sigma_a^{(4)} = 22,5 \text{ МПа}, \beta^{(4)} = 830,$$

$$\sigma_a^{(5)} = 12,5 \text{ МПа}, \beta^{(5)} = 500,$$

$$K_E = 4,5, n_E = -0,2$$

Таблица 4.3.3. Функция изотропного упрочнения стали 12Х18Н9

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0.0017	0.015	0.064	0.086	1.0	8.0	1000
C_p , МПа	160	120	120	170	200	200	200	200

Модель Шабоса

Материальные функции конструкционной стали 12Х18Н10Т

$$E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$C^{(1)} = 1200 \text{ МПа}, \gamma^{(1)} = 2, C^{(2)} = 45000 \text{ МПа},$$

$$\gamma^{(2)} = 300, C^{(3)} = 310000 \text{ МПа}, \gamma^{(3)} = 3100$$

$$C^{(4)} = 601 \text{ МПа}, \gamma^{(4)} = 0,43$$

Таблица 4.3.4. Функция изотропного упрочнения стали 12Х18Н10Т

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0.0013	0.0043	0.0064	0.051	0.015	0.49	3.49	37.4
C_p , МПа	200	124	83	63	80	102	139	172	220

Модифицированная модель Бондаря

Материальные функции конструкционной стали 12Х18Н10Т

$$E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,3,$$

$$E_a = 5000 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 60 \text{ МПа}, \beta^{(2)} = 300,$$

$$\sigma_a^{(3)} = 50 \text{ МПа}, \beta^{(3)} = 3000, \sigma_a^{(4)} = 50 \text{ МПа}, \beta^{(4)} = 1350,$$

$$\sigma_a^{(5)} = 55 \text{ МПа}, \beta^{(5)} = 500,$$

$$K_E = 5,5, n_E = -0,14$$

Таблица 4.3.5. Функция изотропного упрочнения стали 12Х18Н10Т

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0.001	0.0065	0.02	0.05	0.15	0.5	3.6	39
C_p , МПа	160	115	65	89	111	135	189	227	242

Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

Материальные функции конструкционной стали SS304

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,29, \quad C = 16790 \text{ МПа}, \gamma = -230$$

Таблица 4.3.6. Функция изотропного упрочнения стали SS304

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0,1
C_p , МПа	235	370

Модель Шабоса, ($M = 3$)

Материальные функции конструкционной стали SS304

$$E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,29,$$

$$C^{(1)} = 3500 \text{ МПа}, \gamma^{(1)} = 5, C^{(2)} = 16790 \text{ МПа},$$

$$\gamma^{(2)} = 230, C^{(3)} = 330000 \text{ МПа}, \gamma^{(3)} = 2500$$

$$C^{(4)} = 601 \text{ МПа}, \gamma^{(4)} = 0,43$$

Таблица 4.3.7. Функция изотропного упрочнения стали SS304

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0.0015	1.0	100
C_p , МПа	110	105	105	125

Модифицированная модель Бондаря

Материальные функции конструкционной стали SS304

$$E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,29,$$

$$E_a = 3600 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 73 \text{ МПа}, \beta^{(2)} = 230,$$

$$\sigma_a^{(3)} = 38 \text{ МПа}, \beta^{(3)} = 5000, \sigma_a^{(4)} = 47 \text{ МПа}, \beta^{(4)} = 1000,$$

$$\sigma_a^{(5)} = 47 \text{ МПа}, \beta^{(5)} = 400,$$

$$K_E = 0,45, n_E = -0,4$$

Таблица 4.3.8. Функция изотропного упрочнения стали SS304

$\varepsilon_{u^*}^p$	0	0.0015	1.0	100
C_p , МПа	110	105	105	125

4.4 Моделирование процессов одноосного нагружения

Для проведения расчетов кинетики напряженно-деформированного состояния при непропорциональных циклических процессах деформирования в расчетную программу, описанную в разделе 1.5, добавлены уравнения (4.1.4) и (4.1.5) и функции нагружения. Рассматриваются случаи одноосного циклического несимметричного и нестационарного нагружения в жестком (заданы значения деформации) и в мягком (заданы значения напряжений) режимах.

В случае одноосного нагружения следующие компоненты тензора напряжений равны нулю

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0.$$

В случае жесткого нагружения задана скорость осевой деформации $\dot{\varepsilon}_{11}$ как функции времени t

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \varphi_{11}(t).$$

Скорость накопленной пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{u^*}^p$ определяется следующим уравнением

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{3G}{(E_* + 3G_*)} \frac{(1 + \nu)s_{11}^* \dot{\varepsilon}_{11}}{\sigma_u^*}, \quad (4.4.1)$$

$$G_* = G \frac{3(1 + \nu)(s_{11}^*)^2}{(\sigma_u^*)^2}. \quad (4.4.2)$$

Параметр E_* для моделей пластичности определяется следующим образом:

модель изотропного упрочнения

$$E_* = \frac{dC_P}{d\varepsilon_{u^*}^p}. \quad (4.4.3)$$

модель Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова

$$E_* = g + \frac{dC_P}{d\varepsilon_{u^*}^p}. \quad (4.4.4)$$

модель Оно-Ванга

$$E_* = \sum_{m=1}^M g^{(m)} + \frac{dC_P}{d\varepsilon_{u^*}^p}. \quad (4.4.5)$$

модель Шабоса

$$E_* = \sum_{m=1}^M \left(C^{(m)} - \gamma^{(m)} a_u^{*(m)} \right) + \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u^*}^p}, \quad (4.4.6)$$

$$a_u^{*(m)} = \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}^{(m)}}{2 \sigma_u^*}. \quad (4.4.7)$$

модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича

$$E_* = C - \gamma a_u^* + \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u^*}^p}, \quad (4.4.8)$$

$$a_u^* = \frac{3 s_{ij}^* a_{ij}}{2 \sigma_u^*}. \quad (4.4.9)$$

модель Бондаря

$$E_* = g + g_\varepsilon \varepsilon_{u^*}^{p*} + g_a a_u^* + \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u^*}^p}, \quad (4.4.10)$$

$$\varepsilon_{u^*}^{p*} = \frac{3 s_{ij}^* \varepsilon_{ij}^p}{2 \sigma_u^*}. \quad (4.4.11)$$

Скорости осевого напряжения и поперечной деформации вычисляются с помощью следующих уравнений:

$$\dot{\sigma}_{11} = E(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{11}^p), \quad (4.4.12)$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} = -\nu(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{11}^p) + \dot{\varepsilon}_{22}^p, \quad (4.4.13)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33} = -\nu(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{11}^p) + \dot{\varepsilon}_{33}^p, \quad (4.4.14)$$

$$\dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{31} = 0. \quad (4.4.15)$$

В случае мягкого нагружения задана скорость осевого напряжения $\dot{\sigma}_{11}$ как функции времени t

$$\dot{\sigma}_{11} = \varphi_{11}(t).$$

Скорость накопленной пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{u^*}^p$ определяется следующим уравнением

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{1}{E_*} \frac{3 s_{11}^* \dot{\sigma}_{11}}{2 \sigma_u^*}, \quad (4.4.16)$$

Скорости искоемых компонент напряжений и деформаций вычисляются с помощью следующих уравнений:

$$\dot{\epsilon}_{11} = \frac{\dot{\sigma}_{11}}{E} + \dot{\epsilon}_{11}^p, \quad (4.4.17)$$

$$\dot{\epsilon}_{22} = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}^p, \quad (4.4.18)$$

$$\dot{\epsilon}_{33} = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{11} + \dot{\epsilon}_{33}^p, \quad (4.4.19)$$

$$\dot{\epsilon}_{12} = \dot{\epsilon}_{23} = \dot{\epsilon}_{31} = 0. \quad (4.4.20)$$

Материальные параметры, соответствующие рассматриваемым моделям пластичности, приведены в Таблице 4.4.1.

Материальные параметры, задаваемые для различных моделей пластичности приведены в Таблице 4.4.1.

Таблица 4.4.1. Материальные параметры, задаваемые для используемых моделей пластичности

№	Параметр	Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича.	Модель Шабоса М=3	Модель Шабоса М=4	Модель Бондаря	Модель Бондаря, обобщенная на процессы посадки	Модель Бондаря со сложной структурой уравнения для микронапряжений
1	2	3	4	5	6	7	8
1	E	E	E	E	E	E	E
2	ν	ν	ν	ν	ν	ν	ν
3	E_a	0	0	0	0	E_a	E_a
4	σ_a	0	0	$\frac{C^{(4)}}{\gamma^{(4)}}$	0	σ_a	σ_a
5	β	0	0	$\gamma^{(4)}$	0	β	β
6	$C^{(1)}$	C	$C^{(1)}$	$C^{(1)}$	$C^{(1)}$		0
7	$\gamma^{(1)}$	$-\gamma$	$\gamma^{(1)}$	$\gamma^{(1)}$	$\gamma^{(1)}$		0
8	$C^{(2)}$	0	$C^{(2)}$	$C^{(2)}$	$C^{(2)}$	0	0
9	$\gamma^{(2)}$	0	$\gamma^{(2)}$	$\gamma^{(2)}$	$\gamma^{(2)}$	0	0
10	$C^{(3)}$	0	$C^{(3)}$	$C^{(3)}$	$C^{(3)}$	0	0
11	$\gamma^{(3)}$	0	$\gamma^{(3)}$	$\gamma^{(3)}$	$\gamma^{(3)}$	0	0

№	Параметр	Модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича.	Модель Шабоша M=3	Модель Шабоша M=4	Модель Бондаря	Модель Бондаря, обобщенная на процессы посадки	Модель Бондаря со сложной структурой уравнения для микронапряжений
1	2	3	4	5	6	7	8
12	$\sigma_a^{(1...7)}$	0	0	0	0	0	$\sigma_a^{(1...7)}$
13	$\beta^{(1...7)}$	0	0	0	0	0	$\beta^{(1...7)}$
14	K_E	0	0	0	0	K_E	K_E
15	n_E	1	1	1	1	n_E	n_E

Для сравнения результатов расчетов с результатами эксперимента в программу добавлен дополнительный выходной файл, в котором фиксируются достигаемые в каждом полуцикле нагружения значения напряжений и деформаций.

5 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

5.1 Экспериментальные исследования посадки петли пластического гистерезиса при несимметричном жестком циклическом нагружении

Проведены испытания при несимметричном деформировании, включающие в себя этапы монотонного и циклического нагружения. Материал экспериментальных исследований – нержавеющая сталь 12Х18Н10Т.

Испытания проведены на универсальной испытательной машине Zwick Z100. Геометрия и размеры испытанных образцов соответствуют требованиям стандарта ASTM E606. Диаметр рабочей части образца 8 мм, длина 24 мм, радиусы перехода от рабочей к захватной части 32 мм (рисунок 5.1.1).

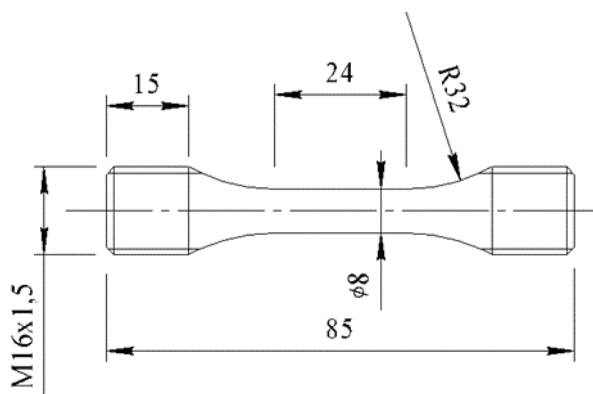


Рисунок 5.1.1. Образец для испытаний по ASTM E606

Деформация в процессе испытания измерялась и контролировалась по навесному экстензометру с измерительной базой 10 мм. G. Погрешность измерения осевой силы составляет 1% и осевого перемещения также 1%. Реализуется жесткое нагружение (нагружение при задаваемом значении изменения осевой деформации). Деформирование образца осуществляется при комнатной температуре со скоростью равной $0.5 \%c^{-1}$ при монотонном нагружении и частотой 0.2 Гц при циклическом нагружении.

Эксперимент включает в себя пять этапов монотонных и циклических нагружений. Эксперимент состоит из следующих этапов:

– 1 этап включает в себя циклическое нагружение при $\varepsilon_m^{(1)} = 0$, $\Delta\varepsilon^{(1)} = 0,0016$ и $N^{(1)} = 20$ циклов;

- 2 этап включает в себя монотонное растяжение до $\varepsilon^{(2)} = 0,05$;
- 3 этап включает в себя циклическое нагружение при $\varepsilon_m^{(3)} = 0,044$, $\Delta\varepsilon^{(1)} = 0,012$ и $N^{(3)} = 200$ циклов. Здесь происходит посадка петли пластического гистерезиса;
- 4 этап включает в себя монотонное растяжение $\varepsilon^{(4)} = 0,1$;
- 5 этап включает в себя циклическое нагружение при $\varepsilon_m^{(5)} = 0,094$, $\Delta\varepsilon^{(5)} = 0,012$ вплоть до разрушения образца. На протяжении всего 5-го этапа также происходит посадка петли пластического гистерезиса.

Здесь $\varepsilon_m^{(i)}$ – средняя деформация цикла; $\Delta\varepsilon^{(i)}$ – размах деформаций цикла; $\varepsilon^{(i)}$ – достигаемая деформация при монотонном нагружении; $N^{(i)}$ – число циклов; i – номер этапа.

На рисунке 5.1.2 приведена экспериментальная диаграмма деформирования образцов из нержавеющей стали 12Х18Н10Т. На циклических диаграммах первого, третьего и пятого этапов показаны петли пластического гистерезиса для первого и последнего циклов нагружения.

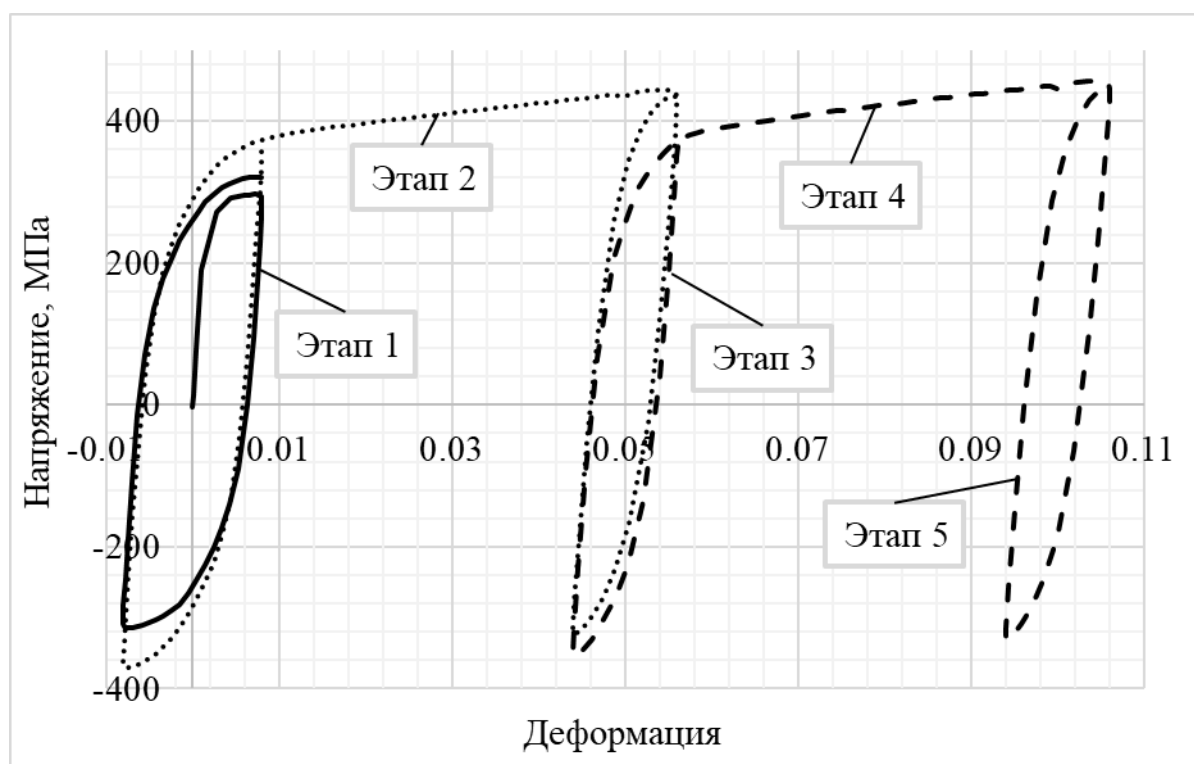


Рисунок 5.1.2 – Диаграмма деформирования стали 12Х18Н10Т

На рисунке 5.1.3 приведены зависимости размаха и среднего напряжений от номера цикла. Здесь кружки – размах, крестики – среднее напряжение.

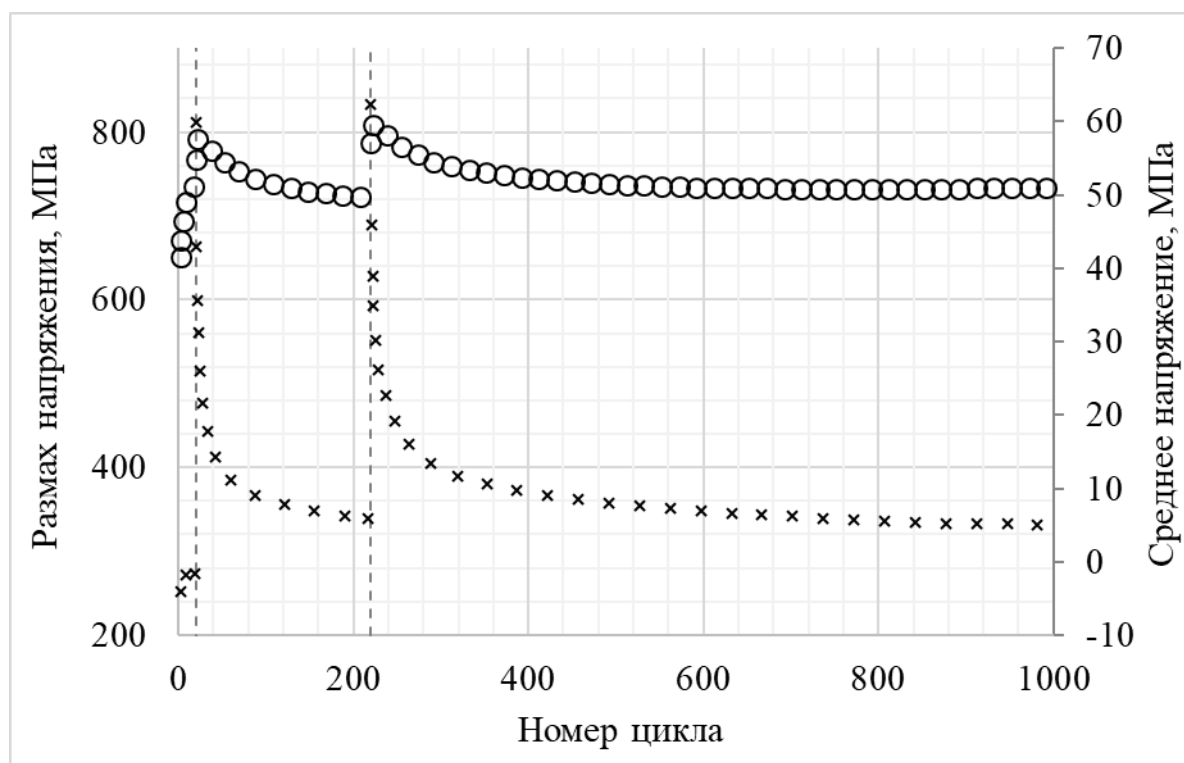


Рисунок 5.1.3 – Зависимость размаха и среднего напряжения стали 12Х18Н10Т

По результатам испытаний видно, что при жестком циклическом деформировании с постоянным размахом наблюдается эффект посадки петли пластического гистерезиса.

5.2 Теории пластичности при несимметричном жестком циклическом нагружении

Для сравнительного анализа моделей пластичности на основе разработанной программы проведен расчет экспериментов на жесткое циклическое нагружение стали 12Х18Н10Т.

На рисунке 5.2.1 показаны результаты посадки петли пластического гистерезиса на пятом этапе нагружения. Экспериментальные результаты показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошной и штриховой кривыми.

На рисунке 5.2.2 приведена циклическая диаграмма первого этапа нагружения, на рисунке 5.2.3 – 20-й цикл симметричного нагружения на первом этапе, монотонной растяжение до деформации 0,05 и первый цикл третьего этапа несимметричного нагружения. На рисунке 5.2.4 показан 200-й цикл третьего этапа

несимметричного нагружения, монотонное растяжение до деформации 0,1 и первый цикл пятого этапа нагружения. На всех рисунках экспериментальные результаты показаны светлыми кружками и треугольниками, расчетные – сплошными и штриховыми кривыми. На рисунках 5.2.2-5.2.4 расчетные результаты – расчет на основе модифицированной модели Бондаря с учетом микронапряжений Оно-Ванга.

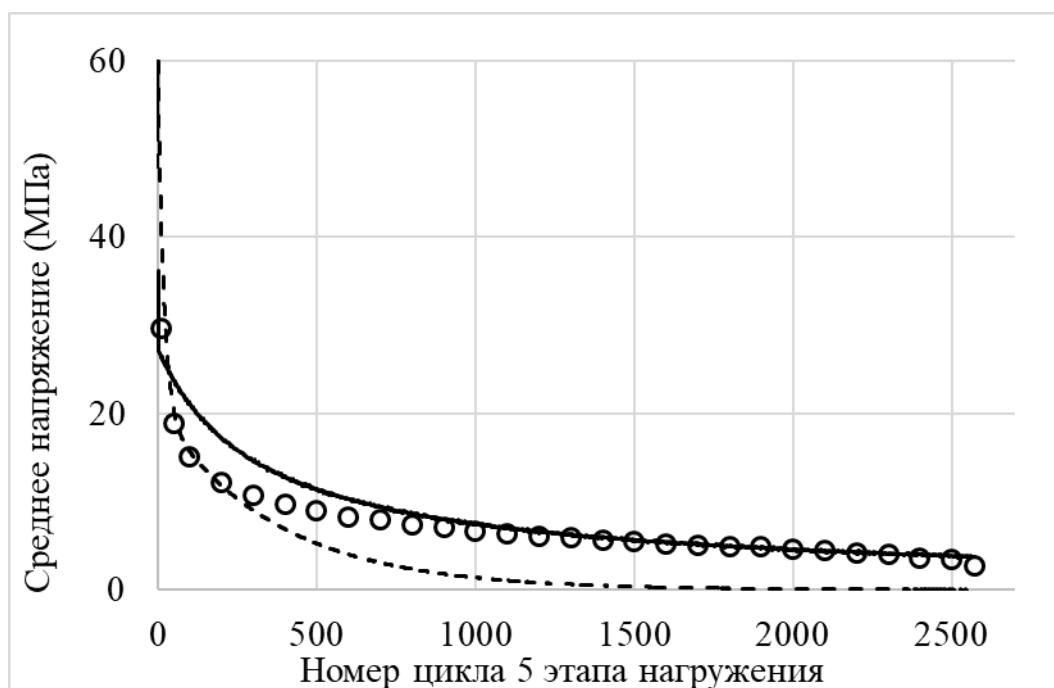


Рисунок 5.2.1 – Нержавеющая сталь 12Х18Н10Т. Посадка петли пластического гистерезиса на пятом этапе нагружения (сплошная кривая – модифицированная модель Бондаря с учетом и без учета микронапряжений Оно-Ванга, штриховая кривая (тире) – модель Шабоша с четырьмя уравнениями)

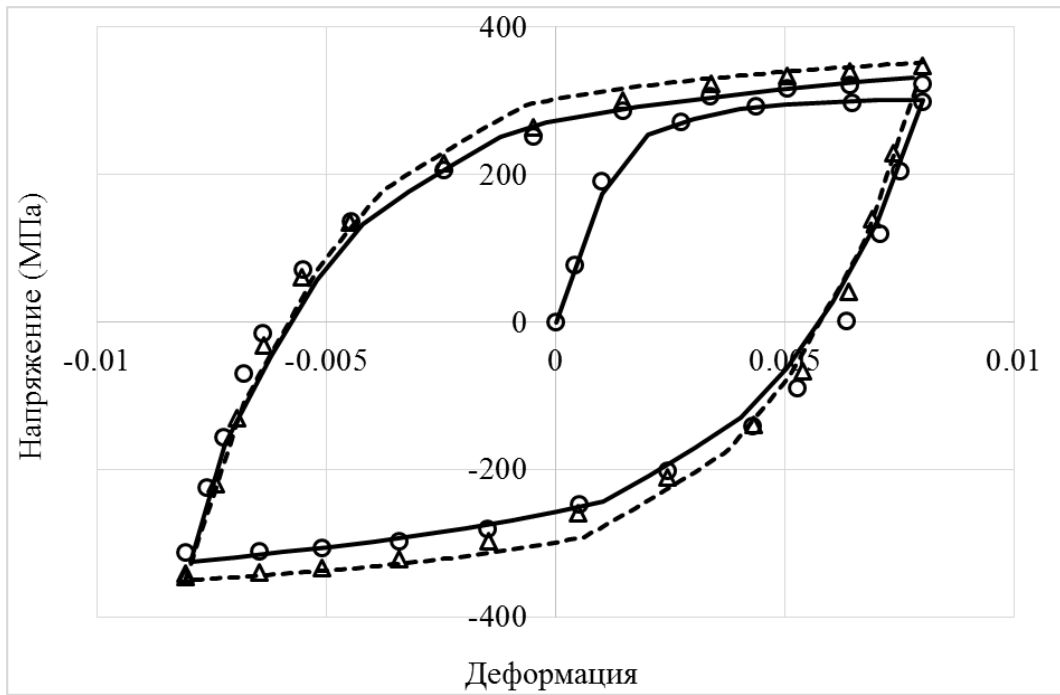


Рисунок 5.2.2 – Нержавеющая сталь 12X18H10T. Циклические диаграммы на первом этапе нагружения (кружки и треугольники – экспериментальные данные, сплошная и штриховая линии – модифицированная модель Бондаря с учетом микронапряжений Оно-Ванга для первого и четвертого циклов нагружения)

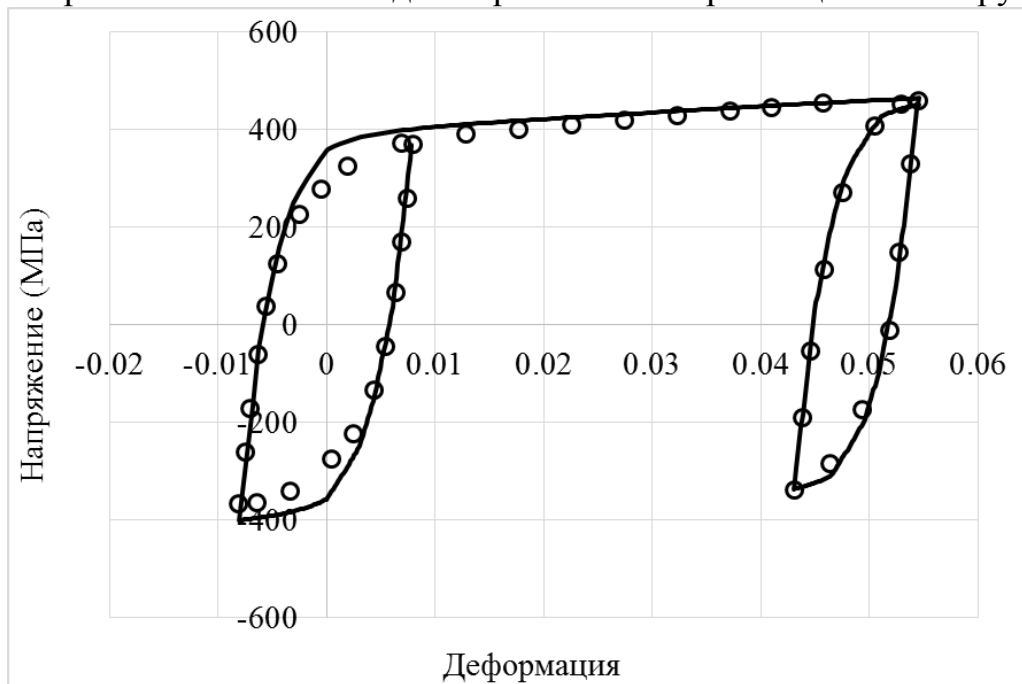


Рисунок 5.2.3 – Нержавеющая сталь 12X18H10T. Циклические диаграммы в конце первого и начале третьего этапов нагружения (сплошная кривая – модифицированная модель Бондаря с учетом микронапряжений Оно-Ванга)

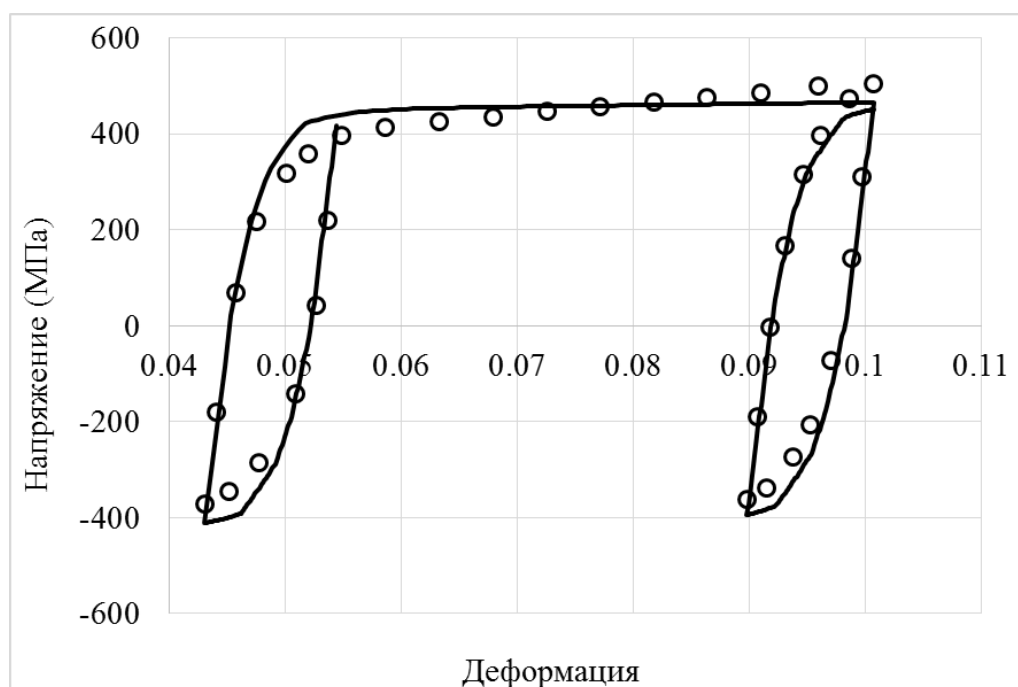


Рисунок 5.2.4 – нержавеющая сталь 12X18H10T. Циклические диаграммы в конце третьего и в начале пятого этапов нагружения (сплошная кривая – модифицированная модель Бондаря с учетом микронапряжений Оно-Ванга)

Далее сравнительный анализ вариантов теорий проводится на результатах экспериментальных исследований (эксперимент НИИ механики ННГУ с участием В.С. Бондаря) образцов из нержавеющей стали 12X18H9 при жестком несимметричном циклическом нагружении, состоящем из двух этапов. На первом этапе образец сжимался до деформации 0,01, затем растягивался до деформации 0,05. На втором этапе реализовывалось пропорциональное жесткое несимметричное циклическое нагружение с размахом деформации $\Delta\varepsilon = 0,01$ и средней деформацией $\varepsilon_m = 0,045$.

На рисунках 5.2.5 и 5.2.6 приведен процесс посадки петли пластического гистерезиса в процессе циклического нагружения на втором этапе эксперимента. На рисунке 5.2.7 показан весь процесс деформирования на втором этапе нагружения (первый и трехсотый циклы). Здесь экспериментальные результаты – светлые кружки, расчетные – сплошные, штриховые и пунктирные кривые. На рисунке 5.2.7 расчетная кривая построена по модифицированной модели Бондаря с учетом микронапряжений Оно-Ванга.

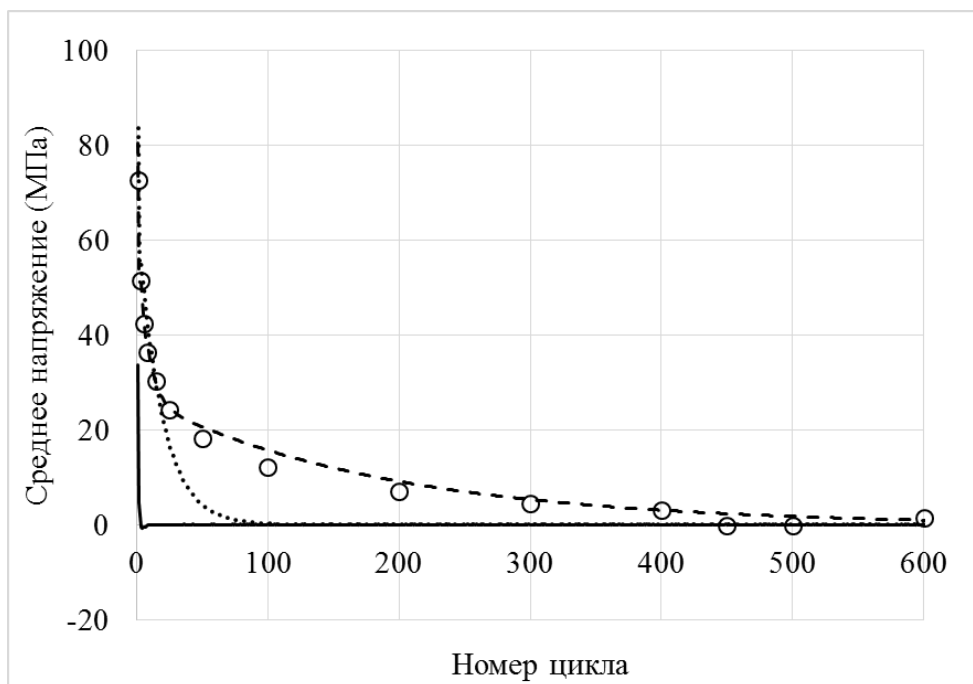


Рисунок 5.2.5 – Нержавеющая сталь 12X18Н9. Посадка петли пластического гистерезиса (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича, пунктирная кривая – модель Шабоса с тремя эволюционными уравнениями для микронапряжений, штриховая кривая – модель Шабоса с четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений)

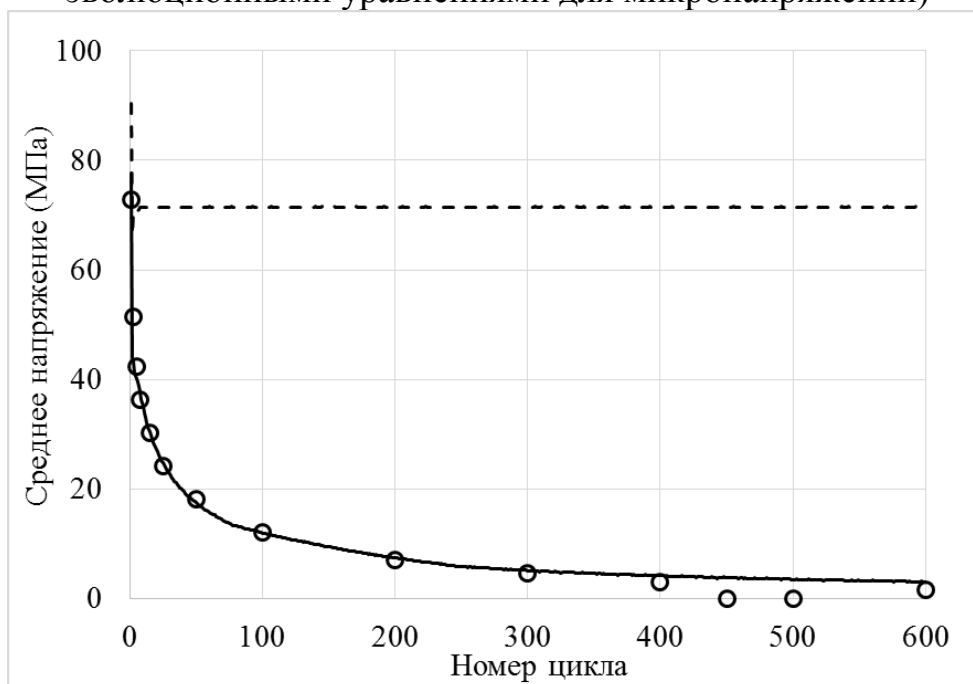


Рисунок 5.2.6 – Нержавеющая сталь 12X18Н9. Посадка петли пластического гистерезиса. (сплошная кривая – модифицированная модель Бондаря с учетом и без учета микронапряжений Оно-Ванга, штриховая кривая – модель Бондаря)

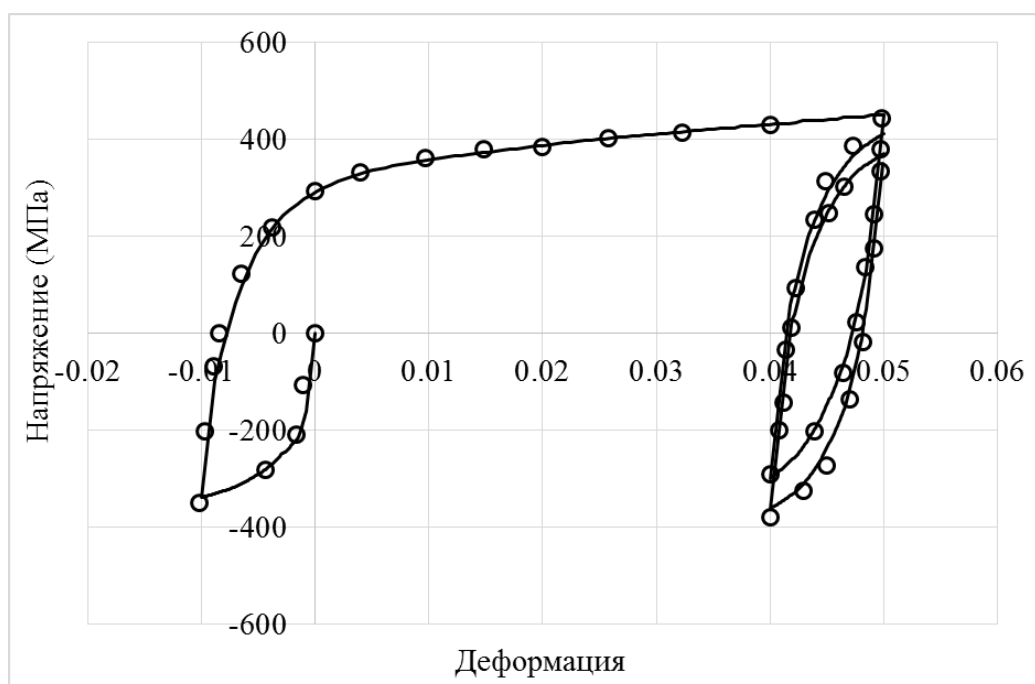


Рисунок 5.2.7 – Процесс деформирования стали 12X18H9 (сплошная кривая – модифицированная модель Бондаря с учетом микронапряжений Оно-Ванга)

На основе результатов сопоставления расчетных и экспериментальных результатов можно сделать следующие выводы:

- модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича осуществляет посадку петли сразу же на первом цикле нагружения, т.е. эта модель не способна описать процесс посадки петли пластического гистерезиса;

- модель Бондаря сохраняет несимметричность петли гистерезиса от первого до последнего цикла нагружения и не способна описать процесс посадки петли пластического гистерезиса;

- модель Шабоса с тремя эволюционными уравнениями для микронапряжений удовлетворительно описывает процесс посадки на первых циклах нагружения, а далее процесс посадки существенно отличается от экспериментального, т.е. эта модель неудовлетворительно описывает процесс посадки петли пластического гистерезиса;

- модель Шабоса с четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений удовлетворительно описывает процесс посадки петли пластического гистерезиса;

- модифицированная модель Бондаря с учетом и без учета микронапряжений Оно-Ванга наиболее достоверно описывает процесс посадки петли пластического гистерезиса.

Приведенные выше результаты исследований показывают достаточную адекватность модифицированной модели Бондаря для описания несимметричных жестких циклических процессов нагружения. Следует отметить, что для описания жестких процессов нагружения можно использовать модифицированную модель Бондаря и без учета микронапряжений Оно-Ванга.

5.3 Экспериментальные исследования вышагивания петли пластического гистерезиса при несимметричном мягком циклическом нагружении

Проведены испытания при мягком несимметричном циклическом нагружении. Материал экспериментальных исследований – нержавеющая сталь 12Х18Н10Т.

Эксперимент включает в себя пять этапов монотонных и циклических нагружений. На каждом этапе реализуется по 20 циклов нагружения. Эксперимент состоит из следующих этапов:

- 1 этап включает в себя циклическое нагружение при $\sigma_m^{(1)} = 0$ и $\Delta\sigma^{(1)} = 600$ МПа;
- 2 этап включает в себя циклическое нагружение при $\sigma_m^{(2)} = 25$ МПа и $\Delta\sigma^{(2)} = 650$ МПа;
- 3 этап включает в себя циклическое нагружение при $\sigma_m^{(3)} = 50$ МПа и $\Delta\sigma^{(3)} = 700$ МПа;
- 4 этап включает в себя циклическое нагружение при $\sigma_m^{(4)} = 25$ МПа и $\Delta\sigma^{(4)} = 650$ МПа;
- 5 этап включает в себя циклическое нагружение при $\sigma_m^{(5)} = 0$ и $\Delta\sigma^{(5)} = 600$ МПа.

Здесь $\sigma_m^{(i)}$ – среднее напряжение цикла; $\Delta\sigma^{(i)}$ – размах напряжений цикла; i – номер этапа нагружения.

На рисунке 5.3.1 приведена экспериментальная диаграмма деформирования образцов из нержавеющей стали 12Х18Н10Т для первых трех этапов нагружения. На всех этапах, кроме первого, происходит вышагивание петли пластического гистерезиса в сторону увеличения и уменьшения средней деформации цикла.

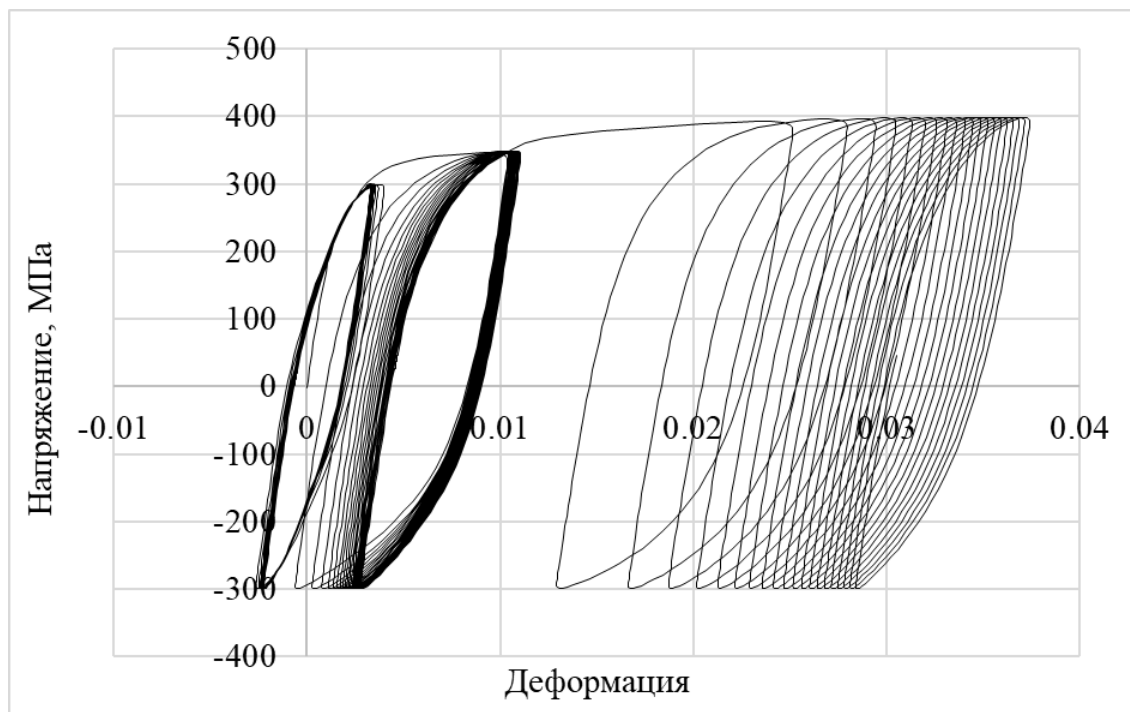


Рисунок 5.3.1. Диаграмма деформирования стали 12Х18Н10Т

На рисунке 5.3.2 приведены зависимости размаха и среднего значения деформаций от номера цикла. Светлыми кружками здесь обозначен размах, а крестиками – среднее значение деформации.

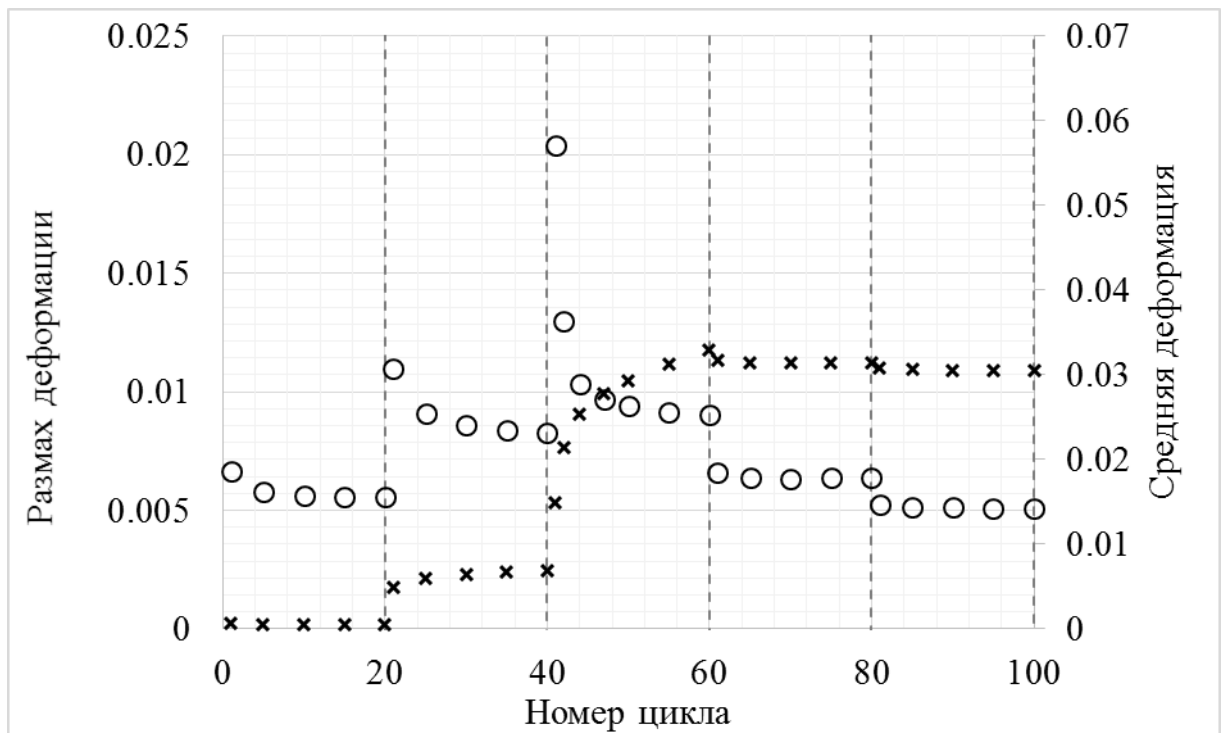


Рисунок 5.3.2 – Зависимость размаха и среднего значения деформации стали 12X18H10T

5.4 Теории пластичности при несимметричных мягких циклических нагружениях

Для сравнительного анализа моделей пластичности на основе разработанной программы проведен расчет эксперимента на мягкое несимметричное циклическое нагружение стали 12X18H10T.

Так же сравнительный анализ вариантов теорий проводится на результатах экспериментальных исследований [149, 150] образцов из нержавеющей стали SS304 при мягком несимметричном циклическом нагружении, состоящим из трех этапов нагружения. На каждом этапе реализуется по 50 циклов нагружения, на которых осуществляются пропорциональные мягкие несимметричные циклические нагружения с одинаковой амплитудой $\sigma_a = 250$ МПа и разными значениями среднего напряжения $\sigma_m^{(1)} = 78$ МПа, $\sigma_m^{(2)} = 117$ МПа и $\sigma_m^{(3)} = 78$ МПа.

На рисунках 5.4.1, 5.4.2 и 5.4.3 приведены результаты расчета и эксперимента изменения средней деформации цикла в процессе мягкого циклического нагружения.

На всех рисунках экспериментальные результаты – светлые кружки, расчетные результаты – сплошные, штриховые и пунктирные кривые.

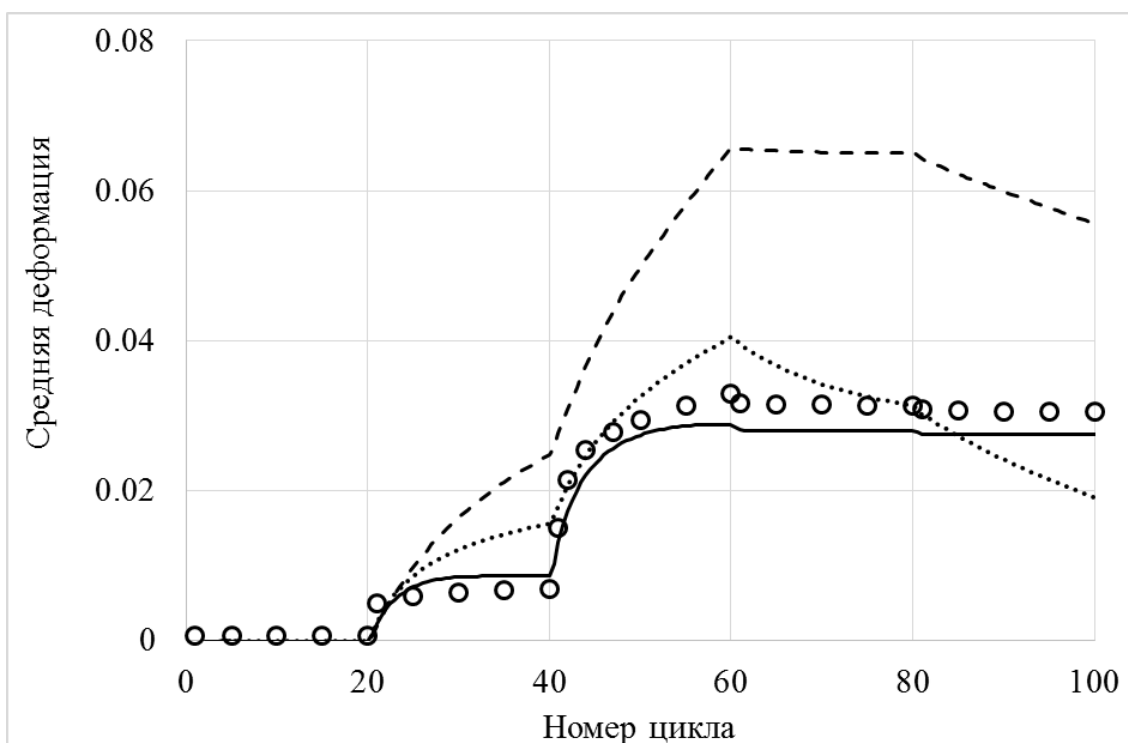


Рисунок 5.4.1 – Нержавеющая сталь 12X18H10T. Мягкое циклическое нагружение (сплошная кривая – модель Бондаря с учетом микронапряжений Оно-Ванга, пунктирная кривая (точки) – модель Бондаря без учета микронапряжений Оно-Ванга, штриховая кривая (тире) – модель Шабоша с четырьмя уравнениями для микронапряжений)

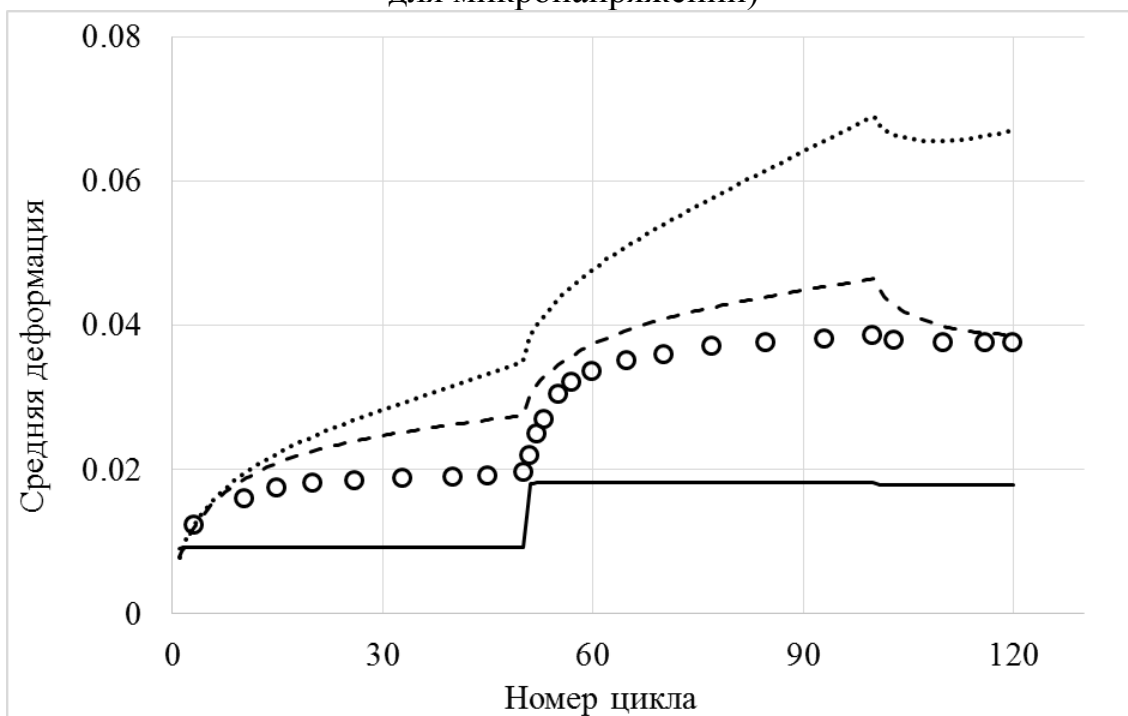


Рисунок 5.4.2 – Нержавеющая сталь SS304. Вышагивание петли пластического гистерезиса (сплошная кривая – модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича,

пунктирная кривая – модель Шабоса с тремя эволюционными уравнениями для микронапряжений, штриховая кривая – модель Шабоса с четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений)

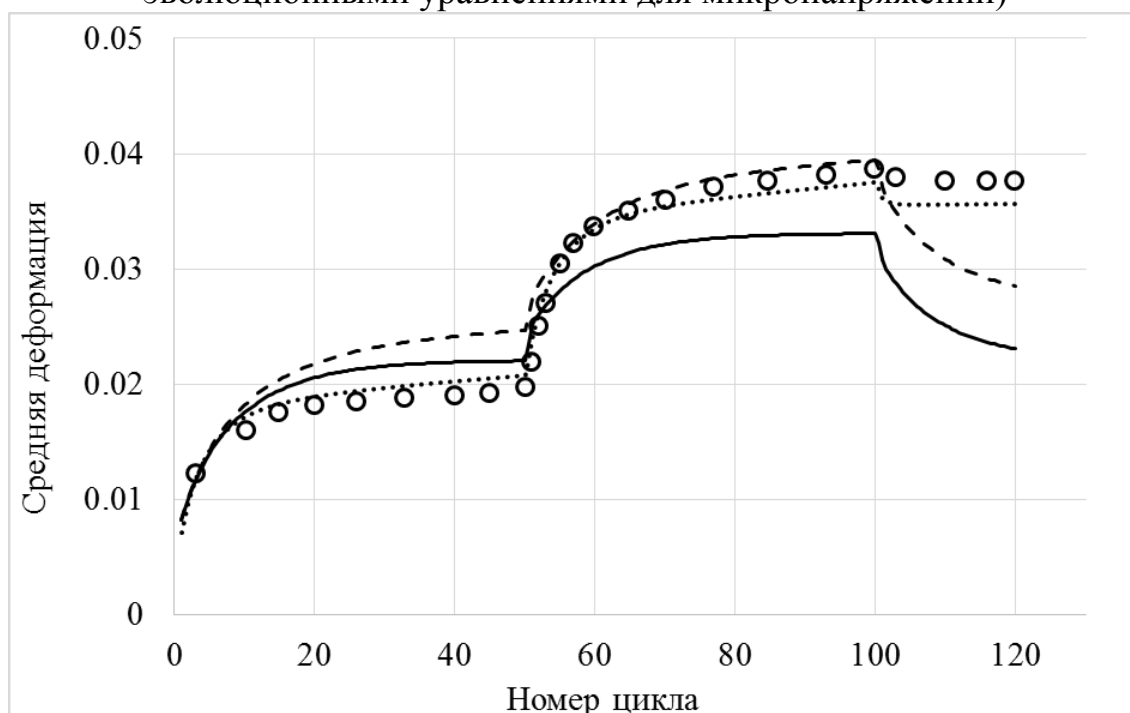


Рисунок 5.4.3 – Нержавеющая сталь SS304. Вышагивание петли пластического гистерезиса (сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модифицированная модель Бондаря с учетом микронапряжений Оно-Ванга, штриховая кривая – модифицированная модель Бондаря без учета микронапряжений Оно-Ванга)

На основе результатов сопоставления расчетных и экспериментальных данных можно сделать следующие выводы:

- модель Армстронга-Фредерика-Кадашевича не способна описать процесс вышагивания при мягком несимметричном нагружении;
- модель Бондаря удовлетворительно описывает процесс вышагивания на первом блоке, хуже на втором и плохо на третьем;
- модифицированная модель Бондаря без учета микронапряжений Оно-Ванга удовлетворительно описывает процесс вышагивания на втором блоке, хуже на первом и плохо на третьем;
- модели Шабоса с тремя и четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений количественно плохо описывают процессы вышагивания

на всех блоках при лучшем соответствии эксперименту модели с четырьмя уравнениями;

- модифицированная модель Бондаря, учитывающая микронапряжения Оно-Ванга, достаточно надежно описывает процессы вышагивания на всех трех блоках нагружения.

Таким образом модифицированная модель Бондаря, учитывающая микронапряжения Оно-Ванга, может адекватно описывать процессы несимметричного мягкого циклического нагружения, состоящего из блоков с возрастающей и убывающей асимметрией циклов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. По результатам проведенного анализа исследований в области моделирования процессов циклического упругопластического деформирования выбраны математические модели, основанные на теории пластического течения и применяемые в практических расчетах конструкций.

2. Описаны методы идентификации материальных параметров по диаграммам растяжения, растяжения после предварительного сжатия и циклическим диаграммам петель пластического гистерезиса для всех рассматриваемых вариантов теорий пластичности, получены материальные функции конструкционных сплавов 40X16H9Г2С, 9Х2, ст. 45, 12Х18Н9, 12Х18Н10Т, SS304.

3. Для проведения расчета кинетики напряженно-деформированного состояния по всем моделям пластичности была разработана программа на языке программирования Fortran-95. В основе программы лежит метод решения системы дифференциальных уравнений Рунге-Кутты 4 порядка для решения задачи Коши.

4. Проведено сравнение результатов расчета кинетики напряженно-деформированного состояния с помощью моделей: модели изотропного упрочнения, модели Ишлинского-Прагера-Кадашевича-Новожилова, модели Армстронга-Фредерика-Кадашевича, модели Оно-Ванга, модели Шабоса, модели Бондаря и модели Темиса-Худяковой с результатами экспериментов при непропорциональном нагружении по плоским траекториям деформаций в виде многозвенных ломаных, криволинейных траекториях постоянной и переменной кривизны и так же по пространственным траекториям деформаций в виде винтовых линий постоянной и переменной кривизны и кручения. Сравнение проведено по ответным траекториям напряжений, скалярным и векторным свойствам.

5. Удовлетворительное соответствие эксперименту при непропорциональном нагружении по всем рассмотренным плоским и пространственным траекториям деформаций достигается при расчетах на основе

моделей Шабоша и Бондаря – отличие результатов расчетов и экспериментов не превышает 30% при лучшем соответствии экспериментам модели Бондаря. Следует так же отметить, что для описания анизотропного упрочнения для модели Шабоша требуется шесть материальных параметров, а для модели Бондаря всего три.

6. Проведены эксперименты по пропорциональному одноосному несимметричному циклическому нагружению как в условиях жесткого, так и мягкого режимов нагружений. В этих экспериментах имеют место эффекты посадки и вышагивания петли пластического гистерезиса.

7. Проведены расчеты пропорционального одноосного несимметричного циклического нагружения с помощью модели Армстронга-Фредерика-Кадашевича, модели Шабоша с тремя и четырьмя эволюционными уравнениями для микронапряжений, модели Бондаря и модифицированной модели Бондаря с учетом и без учета микронапряжений Оно-Ванга. Результаты расчетов сравниваются с результатами экспериментов по зависимостям средних значений деформаций или напряжений цикла от номера цикла.

8. Показано, что модифицированная модель Бондаря наиболее адекватно по сравнению с другими моделями описывает кинетику напряженно-деформированного состояния в условиях несимметричных циклических процессов одноосного нагружения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абашев Д.Р. Развитие модели упругопластического деформирования, критериев усталости и методик идентификации материальных параметров конструкционных сплавов: Дисс.: канд. физ.-мат. н. – Королев, 2016. – 157 с.
2. Акимов А.В., Дабуль В.А., Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Экспериментальное исследование пластических свойств стали 45 на многозвенных пространственных траекториях деформаций // Устойчивость и пластичность в МДТТ. Мат. III симпоз. – Тверь: ТвеПИ, 1992. – С. 164–177.
3. Акимов А.В., Дабуль В.А., Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Некоторые результаты экспериментальных исследований трубчатых образцов из стали 45 по многозвенным пространственным траекториям // Устойчивость и пластичность при сложном нагружении. – Тверь: ТвеГТУ, 1994. – С. 60–86.
4. Акимов А.В., Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Экспериментальное исследование процессов упругопластического деформирования по плоским траекториям // Устойчивость и пластичность в МДТТ. Мат. III симпоз. – Тверь: ТвеПИ, 1992. – С. 174–179.
5. Биргер И.А. Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. Механ. и машиностр. 1961. – № 1. – С. 193–196.
6. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В., и др. Термопрочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.
7. Беляев М.С., Терентьев В.Ф., Горбовец М.А., Бакрадзе М.М., Антонова О.С. Малоцикловая усталость при заданной деформации жаропрочного никелевого сплава ВЖ175 // Труды ВИАМ. 2015. № 9. С. 3-12.
8. Бондарь В.С. Математическая модель неупругого поведения и накопления повреждений материала // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюзн. Межвуз. Сб. // Горьк. Ун-т. , 1987. – С. 24–28.
9. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 144 с.

10. Бондарь В.С. Некоторые новые результаты исследования пластичности материалов при сложном нагружении // Упругость и неупругость. – М.: Ленанд, 2006. – С. 94–109.
11. Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. 2010. Вып. 72. С. 18-27.
12. Бондарь В.С., Горохов В.Б., Санников В.М. Исследования малоциклового прочностии оболочек вращения при сложном теплосиловом нагружении // Прикладные проблемы прочностии пластичности. Механика деформируемых систем: Всесоюзн. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. , 1979. вып. 12. – С. 120–126.
13. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 176 с.
14. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. – № 2. – С. 125–152.
15. Бондарь В.С., Санников В.М. Малоцикловая усталость тоностенных конструкций при повышенных температурах // Конструк. прочность лопаток турбин ГТД Тезисы докладов IV научн.-технич. конф. / Куйбышев. 1976. – С. 75–76.
16. Бондарь В.С., Фролов А.Н. Математическое моделирование процессов неупругого поведения и накопления повреждений материала при сложном нагружении // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. – № 6. – С. 99–107.
17. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 21-35.
18. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термовязкопластичности // Вестник Пермского национального

исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 1. – С.39-56.

19. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Прикладной вариант теории упругопластических процессов // Изв. Тульского гос. университета. Естественные науки. 2011. Вып. 3. С. 46-56.

20. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Некоторые особенности процессов монотонных и циклических нагружений. Эксперимент и моделирование // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. - № 2- С. 25-34.

21. Бондарь В.С., Абашев Д.Р. Прикладная теория неупругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. - № 4- С. 147-162.

22. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю. Теории пластичности при циклических нагружениях // Материалы XXIX Международной конференции «Машиноведение и инновации. Конференция молодых ученых и студентов». М.: ИМАШ РАН. 2018 г. С. 133-136.

23. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю. Сравнительный анализ теорий пластичности при циклических нагружениях // Материалы XXX Всероссийской школы-конференции Математическое моделирование в естественных науках. Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета. 2021. С. 9-11.

24. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю. Теории пластичности при циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. – 2018 – № 1 С. 31–40.

25. Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В., и др. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций. – М., 1986. – С. 67.

26. Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В., Степанов Л.П., Широков Р.И. Упругопластическое поведение стали 45 на винтовых траекториях деформаций // Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1988. – С. 21–29.
27. Вавакин А.С., Викторов В.В., Сливовский М., Степанов Л.П. Экспериментальное исследование упругопластического поведения стали при простом и сложном циклическом деформировании. – М., 1986. – С. 175.
28. Васильев Д.М. О природе эффекта Баушингера // Сб. Некоторые проблемы прочности твердого тела. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.
29. Васин Р.А. О связи напряжений и деформаций для траекторий деформаций в виде двухзвенных ломаных // Прикл. механ. 1965. Т. 1. – С. 89–94.
30. Васин Р.А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. Вып. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – С. 59–126.
31. Васин Р.А. О двух гипотезах, используемых в теории упругопластических процессов для построения частных вариантов определяющих соотношений // Упругость и неупругость. Дополнительные материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20-21 января 2011 года) Под ред. проф. И.А. Кийко, проф. Г.Л. Бровк. – М.: Издательство Московского университета, 2012. – С. 56–66.
32. Васин Р.А. О «памяти» материала в теории упругопластических процессов // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 2. Часть 2. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – С. 57–70.
33. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. МДТТ. Т. 21. – М.; ВНИТИ, 1990. – С. 3-75.
34. Васин Р.А. Теория упругопластических процессов: подходы к построению и аттестации определяющих соотношений // Современные проблемы термовязкопластичности в прикладных задачах анализа конструкций и технологий высоких параметров. Труды VI школы-семинара. – М.: Ун-т машиностроения, 2013. – С. 34–40.

35. Васин Р.А. Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений в теории упругопластических процессов // Автореф. дисс. д.ф.-м.н. – М.: МГУ, 1987. – 36 с.
36. Васин Р.А. Об экспериментальном исследовании функционалов пластичности в теории упругопластических процессов // Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1988. – С. 40–57.
37. Васин Р.А., Широ́в Р.И. Исследование векторных свойств определяющих соотношений для металлов при плоском напряженном состоянии. , 1985. – С. 80.
38. Васин Р.А., Широ́в Р.И. Об исследованиях векторных и скалярных свойств металлов в экспериментах на сложное нагружение // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. –Киев: Наук. думка, 1986. – С. 57-61.
39. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 304 с.
40. Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. Прикладная теория вязкопластичности. Монография. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. университета, 2015. – 317 с.
41. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 424 с.
42. Гусенков А.П. Сопротивление деформированию в связи с условиями малоциклового нагружения / В кн.: Прочность при малом числе циклов нагружения. – М.: Наука, 1969. – С. 50-67.
43. Гусенков А.П., Котов П.И. Малоцикловая усталость при неизотермическом нагружении. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.
44. Давиденков Н.Н. Усталость металлов. – Киев, 1949.
45. Демьянушко И.В. Теория пластичности при неизотермическом нагружении // Мех. тверд. тела. 1968. – № 6. – С. 70–77.

46. Демьянушко И.В., Темис Ю.М. К построению теорий пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов с учетом воздействия физических полей // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1975. – № 5. – С. 111–119.
47. Дегтярев В.П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1967. – 133 с.
48. Жуков А.М. Поведение металлов при разгрузке и повторной нагрузке // Инженерный журнал. 1961. Т. 1.
49. Жуков А.М. Некоторые особенности поведения металлов при упругопластическом деформировании // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 30–57.
50. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 368 с.
51. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т.2. Пластичность. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 336 с.
52. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 352 с.
53. Зубчанинов В.Г. Экспериментальное исследование и обоснование теории упругопластических процессов // Устойчивость и пластичность в МДТТ. Мат. III симпоз. – Тверь: ТвеПИ, 1992. – С. 94–158.
54. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультяев В.И. Численное моделирование процессов сложного упругопластического деформирования стали по двухзвенным ломаным траекториям // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 76(1). 2014. С. 18-25.
55. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультяев В.И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 3. С. 203-215.

56. Зубчанинов В.Г., Иванов Д.Е. Локально простые процессы деформирования // Устойчивость и пластичность в МДТТ. Мат. II Всесоюз. симпоз. – Калинин: КГУ, 1987. – С. 24–31.
57. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Исследование процессов сложного деформирования материалов на плоских криволинейных траекториях // Проблемы пластичности в технологии. - Тез. докл. Международн. Научн.-техн. конф. – Орел: ОГТУ, 1995. – С. 15–16.
58. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Пластическое деформирование стали по замкнутым криволинейным траекториям // Проблемы прочности. 1996. – № 4. – С. 19–26.
59. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Экспериментальное исследование процессов пластического деформирования металлов при сложном нагружении // IX конференция по прочности и пластичности. Труды. – М., 1996. – С. 86–92.
60. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: Кн. 1. Процессы сложного деформирования. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.
61. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: Кн. 2. Процессы сложного нагружения. – Тверь: ТГТУ, 2004. – 184 с.
62. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности: Монография. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
63. Ильюшин А.А. Вопросы общей теории пластичности // ПММ. 1960. Т. 24. – С. 398–411.
64. Ильюшин А.А. О приращении пластической деформации и поверхности текучести // ПММ. 1960. Т. 24. – С. 663–666.
65. Ильюшин А.А. О постулате пластичности // ПММ. 1961. Т. 25. – С. 503–507.
66. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 3–29.
67. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

68. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1978. – 287 с.
69. Ильюшин А.А., Ленский В.С. О соотношениях и методах современной теории пластичности // Успехи механ. деформ. сред. – М.: Наука, 1975. – С. 240–255.
70. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Украин. матем. журнал. 1954. Т. 6. – № 3. – С. 314–325.
71. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Кн. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. – М.: Наука, 1986. – 359 с.
72. Кадашевич Ю.И. О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. 1967. – № 6. – С. 39–45.
73. Кадашевич Ю.И. Об одном классе теорий пластического течения // Пикл. пробл. прочн. и пластичн.: Всесоюзн. межву. сб. / Горьк. Ун-т. – Горький, 1979. – С. 69–72.
74. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. – С. 586–588.
75. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. 1958. Т. 22. – С. 78–89.
76. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Об учете микронапряжений в теории пластичности // Инж. ж. МГТ. 1968. – № 3. – С. 83–91.
77. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1981. – № 5. – С. 99–110.
78. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Микронапряжения в конструкционных материалах. –Л. Машиностроение, 1990. 224 с.
79. Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1994. – 225 с.
80. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

81. Кнетс И.В. Основные современные направления в математической теории пластичности. – Рига: Зинатне, 1971. – 147 с.
82. Коротких Ю.Г. О моделях вязкоупругих и вязкопластических сред и их реализация в статических и динамических задачах термопластичности // Прикл. пробл. прочн. и пластич.: Всесоюзн. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. , 1975. вып. 1. – С. 42–57.
83. Коротких Ю.Г., Угодчиков А.Г. Уравнения теории термовязкопластичности с комбинированным упрочнением. – М.: Наука, 1981. – 180 с.
84. Ленский В.С. Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр. 1962. – № 5. – С. 154–158.
85. Ленский В.С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость. , 1978. вып. 5. – С. 65–96.
86. Ленский В.С., Ленский Э.В. Трехчленное соотношение общей теории пластичности // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1985. – № 4. – С. 111–115.
87. Ленский В.С. Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. – № 11. – С. 15–24.
88. Ленский В.С. Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. ОТН. 1960. – № 5. – С. 93–100.
89. Ленский В.С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58–82.
90. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
91. Малый В.И. Об упрощениях функционалов теории упругопластических процессов // Прик. Мех. 1978. Т. 14. № 1. С. 48-53.
92. Марин Н.И. Прочность конструктивного элемента при повторной нагрузке // Тр. ЦАГИ. 1946. – № 596.

93. Марин Н.И. Зависимость прочности металлов при повторных нагрузках от частоты повторения // Тр. ЦАГИ. 1950.
94. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.
95. Мельников Б.Е., Бенин А.В., Гецов Л.Б. и др. Многомодельный анализ вязкоупругопластического деформирования на различных структурных уровнях с учетом накопления повреждений. Отчет о НИР/НИОКР. 2014. 28 с.
96. Мовчан А.А. О влиянии истории деформирования на скорость накопления повреждений при немонотонном упругопластическом нагружении // Журнал прикладной механики и технической физики. 1984. № 5. С. 125-131.
97. Молодцов И.Н. Прикладные вопросы теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2020, № 5, с. 33-38.
98. Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. Некоторые вопросы верификации теории упругопластических процессов при сложном нагружении // Проблемы машиностроения и автоматизации – М.: ИМАШ РАН. 2016. № 3. С. 98-105.
99. Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. О роли функционалов пластичности в геометрическом истолковании диссипации и описании векторных свойств материала в процессах сложного нагружения // Упругость и неупругость. 2016. С. 209-214.
100. Молодцов И.Н., Математическое моделирование упругопластических процессов с траекториями средней кривизны // Интеллектуальные системы. Теория и приложения – том 13. 2009. № 1-4.
101. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. – М.: МГУ, 1965. – 262 с.
102. Новожилов В.В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. – С. 393–400.

103. Новожилов В.В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений // ПММ. 1964. Т. 28. – С. 393–400.
104. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Ленинград: Машиностроение Ленинградское отделение, 1990. – 221 с.
105. Охлопков Н.Л. Закономерности процессов упругопластического деформирования металлов при сложном напряженном состоянии и нагружении // Автореферат диссерт. д.т.н. – Тверь: ТГТУ, 1997. – 35 с.
106. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 1: условия математической корректности и методы решения краевых задач // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 6. С. 61-68.
107. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110-135.
108. Ратнер С.И. Разрушение при повторных нагрузках. – М., 1959.
109. Ратнер С.И., Данилов Ю.С. Изменение пределов пропорциональности и текучести при повторном нагружении // Заводская лаборатория. 1950. Т. 4.
110. Ройтман И.М., Фридман Я.Б. Об испытаниях металлов при повторно-переменных нагружения в пластической области // Заводская лаборатория. 1947. Т. 13. – № 4.
111. Серенсен С.В., Махутов Н.А., Шнейдерович Р.М. К основам расчета на прочность при малоцикловом нагружении. – М.: Машиноведение, 1972. – № 5. С. 56-67.
112. Соси Д. Модели разрушения при многоосной усталости // Теоретические основы инженерных расчетов. 1988. Т. 3. – С. 9–21.
113. Темис Ю.М., Пучков И.В. Модель упругопластического деформирования и повреждаемости конструкционных материалов // Материалы V Всесоюзного

семинара «Малоцикловая усталость – критерий разрушения и структуры материалов». Тезисы Докладов и сообщений. Волгоград. 1987. 2 с.

114. Темис Ю.М., Пучков И.В. Характеристики упругопластического деформирования и повреждаемости конструкционных материалов при циклическом нагружении. / Межвуз. Сборник «Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения». – Изд-во Нижегородского университета, 1992. – С. 82-89.

115. Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении // Математическое моделирование и численные методы, 2017. № 3. № 3. С. 22-41.

116. Худякова А.Д. Моделирование процессов циклического упругопластического неизотермического деформирования конструкционных сплавов: дис...кандидата физ.-мат.наук. М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020.-184 с.

117. Шнейдерович Р.М. Несущая способность деталей при повторно-статическом нагружении // Вестник машиностроения. 1962. – № 1.

118. Шнейдерович Р.М. Усталость при упруго-пластическом деформировании // Тр. совещ. по механич. вопр. усталости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962.

119. Шнейдерович Р.М., Гусенков А.П. О свойствах кривых циклического деформирования в диапазоне мягкого и жесткого нагружения // Изв. АН СССР, ОТН, сер. механика и машиностроение. 1961. – № 2.

120. Шнейдерович Р.М., Гусенков А.П. Сопротивление деформированию при циклическом нагружении с малым числом циклов // Заводская лаборатория. 1961. – № 9.

121. Шнейдерович Р.М., Гусенков А.П., Т.С. П. Некоторые свойства кривых повторного деформирования при симметричном цикле // Изв. АН СССР, ОТН, сер. механика и машиностроение. 1960. – № 5.

122. Шульц К.Я. Некоторые сведения по рентгенографическому изучению эффекта Баушингера // Тр. Таллинского политехн. ин-та. 1960. Т. 172.

123. Abashev D.R., Bondar V.S. Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*.-2020. N. 15(2) – pp. 225-239.
124. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect // *CEGB Rep. No. RD / B /N 731*. 1966.
125. Backhaus G. Zur Fließgrenze bei allgemeiner Verfestigung // *Zeitschrift für Angew. Math, und mech.* 1986. – pp. 99–108.
126. Bari S., Hassan T. Anatomy of coupled constitutive models for ratcheting simulation // *Int. J. Plast.* 2000. N 16. – pp. 381–409.
127. Bari S., Hassan T. Kinematic hardening rules in uncoupled modeling for multiaxial ratcheting simulation // *Int. J. Plast.* 2001. T. 17. – pp. 885–905.
128. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation // *Int. J. Plast.* 2002. T. 18. – pp. 873–894.
129. Baushinger J. Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und des Elastizitätsmoduls verschiedener Metalle // *Civilingenieur*. 1881. – pp. 289–348.
130. . Baushinger J. Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit des Eisens und Stahls durch Strecken und Quetschen durch Erwärmen und Abkühlen und durch oftmals wiederholte Beanspruchungen // *Mitteilung XV aus dem mechanisch-Technischen Lab.* 1886. – pp. 1–116
131. Bairstow L. *Elastic Limits of Iron and Steel under Cyclic Variation of Stress.* // *Trans roy. soc.* – London, 1911.
132. Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S. *Non-Linear Mechanics of Materials.* Springer, 2010. – pp. 433.
133. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Y. A variant of the thermoplasticity theory for monotonic and cyclic processes of nonisothermal loads // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2020. № 2. pp. 28-36.
134. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Ju. Theories of plasticity under complex loading along flat trajectories of deformations // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 3, pp. 35-47.

135. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Ju. Theories of plasticity under complex loading along spatial trajectories of deformations // PNRPU Mechanics Bulletin, 2021, no. 4, pp. 41-48.
136. Bondar V.S., Dansin V.V., Long D. Vu., Nguyen D.D. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation and low-high-cycle fatigue of stainless steel 304 in uniaxial stress state // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2018. – Vol. 25(12) – pp. 1009-1017.
137. Chaboche J.-L. Le concept de contrainte effective applique a l'elasticite et a la viscoplasticite en precese d'un endommagement anisotrope // In J.-P. Boehler, editor, Colloque EUROMECH 115. – Grenoble: Editions du CNRS, 1979. – pp. 737–760.
138. Chaboche J.-L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // Int. J. Plast. 1989. – pp. 247–302.
139. Chaboche J.-L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects // Int. J. Plast. 1991. T. 7. – pp. 661–678.
140. Chaboche J.-L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, parts I & II // J. Appl. Mech. 1993. – pp. 813–831.
141. Chaboche J.-L. Modeling of ratchetting: evaluation of various approaches // Eur. J. Mech. A, Solids. 1994. – pp. 501–518.
142. Chaboche J.-L., Cailletaud G. Integration methods for complex plastic constitutive equations // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1996. – pp. 125–155.
143. Chaboche J.-L., Lemaitre J. Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press, 1990. – pp. 556.
144. Chaboche J.-L., Maire J.F. A new micromechanics based CDM model and its application to CMC's // Aerosp. Sci. Technol. 2002. – pp. 131–145.
145. Coffin L.F. Study of the Effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal // ASME trans. 1954. T. 76. – pp. 41–47.
146. Coffin L.F. The stability of metals under cyclic plastic strain // Poper. Amer. Soc. Mech. Engrs. 1959.
147. Coffin L.F., Read I.H. A study of the Strain cycling and Fatigue. Behavior of AS Cold-worked Metal // Int. Conf. Fatigue Met. 1956.

148. Coffin L.F., Tavernelli I.F. The cyclic straining and fatigue of Metals // Trans. Metall. Soc. AJME. 1959. 215 p.
149. Guozheng Kang, Qing Gao, Lixun Cai, Yafang Sun. Experimental study on uniaxial and nonproportionally multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures // Nuclear Engineering and Design. – 2002. – 216. – pp. 13–26.
150. Guozheng Kang, Qing Gao, Xianjie Yang. Uniaxial cyclic ratcheting and plastic flow properties of SS304 stainless steel at room and elevated temperatures // Mechanics of Materials. – 2002. – 34. – pp. 145–159.
151. Hassan T., Kyriakides S. Ratcheting of cyclically hardening and softening materials: I. Uniaxial behavior // International Journal of plasticity. 1994. V. 10. No 2. pp. 149-184.
152. Kang G., Gao Q., Cai L., Sun Y. Experimental study on uniaxial and nonproportionally multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room and high temperatures // Nucl. Eng. Des. 2002. T. 216. – pp. 13–26.
153. Kang G., Gao Q., Yang X. Uniaxial cyclic ratcheting and plastic flow properties of SS304 stainless steel at room and elevated temperatures // Mech. Mater. 2002. T. 34. – pp. 145–159.
154. Kang G., Gao Q., Yang X. Experimental study on the cyclic deformation and plastic flow of U71Mn rail steel // Int. J. Mech. Sci. 2002. T. 44. – pp. 1647–1663.
155. Kang G., Kan Q., Zhang J., Sun Y. Time-dependent ratchetting experiments of SS304 stainless steel // Int. J. Plast. 2006. T. 22. N 5. – pp. 858–894.
156. Kang G., Li Y., Zhang J., Sun Y., Gao Q. Uniaxial ratcheting and failure behaviors of two steels // Theor. Appl. Fract. Mech. 2005. T. 43. – pp. 199–209.
157. Kunc R., Prebil I., Rodic T., Korelc J. Low Cycle elastoplastic properties of normalized and tempered 42CrMo4 steel // Materials Science and Technology. 2002. V. 18. No. 11. pp. 1336-1368.
158. Lemaitre J. How to use damage mechanics // Nucl. Eng. Des. 1984. – pp. 233–245.
159. Lemaitre J. A continuum damage mechanics model for ductile fracture // J. Eng. Mater. Technol. 1985. – pp. 83–89.

160. Lemaitre J., Chaboche J.-L. Aspect phenomenologique de la rupture par endommagement // *J. Mec. Appl.* 1978. – pp. 317–365.
161. Masing G., Mauksch W. // *Wissenschaftliche Veroffentlichungen aus dem Siemens-Konzern.* 1926. V. 5. – 142 p.
162. Mroz Z., Shrivastava H.P., Dubey R.N. A Non-Linear Hardening Model and Its Application to Cyclic Loading // *Acta Mech.* 1976. T. 25. N 1. – pp. 51–61.
163. Ohashi Y. Effect of Complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metals // *Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ.* 1982. T. 34. N 1. – pp. 1–76.
164. Ohashi Y., Kamashima K. Plastic deformation of aluminum alloy under abruptly - changing loading or strain paths // *J. Mech. Phys. Solids.* 1977. T. 25. N 6. – pp. 409–421.
165. Ohashi Y., Kamashima K., Mori N. On proportional compined loading tests of an aluminum alloy and its analytical formulation // *Trans. ASME.* 1976. T. 98. N 3. – pp. 282–288.
166. Ohashi Y., Tanaka E., Ooka M. Plastic deformation begavior of type 316 stainless steel subject to out-of-phase strain cycles // *Trans. ASME.* 1985. T. 107. – P. 286–292.
167. Ohashi Y., Tanaka E., Ueno T. Plastic deformation behavior of mild steel along spiral strain trajectory // *Mech. of Mater.* 1983. T. 2. – pp. 111–122.
168. Ohashi Y., Tokuda M. Precise mesurement of plastic behavior of mild steel tubular specimen subjected to combined torsion and axial force // *J. Mech. Phys. Solids.* 1973. T. 21. N 4. – pp. 241–261.
169. Ohashi Y., Tokuda M., Tanaka E. Precise experimental results on plastic behavior of brass under complex loading // *Bull. l'Acad Pol. des Sci. Ser. des Sci. bechn.* 1976. T. 26. N 5. – pp. 261–272.
170. Ohashi Y., Tokuda M., Yamashita H. Effect of third invariant of stress deviator on plastic deformation of mild steel // *J. Mech. Phys. Solids.* 1975. T. 23. N 4-5. – pp. 295–323.

171. Ohashi Y., Tokuda M., Yamashita H. Plastic deformation of mild steel under combined load of axial force and torsion with strain trajectories of constant curvature // Bull. JSME. 1975. T. 18. N 120. – pp. 579–586.
172. Ohno N., Kachi Y., A constitutive model of cyclic plasticity for nonlinear hardening materials // J. Appl. Mech. 1986. V. 53. pp. 395-403.
173. Ohno N., Wang J.D. Kinematic hardening rules with critical state for the activation of dynamic recovery, part I: formulation and basic features for ratchetting behaviour // Int. J. Plast. 1993. – pp. 375–390.
174. Ohno N., Wang J.D. Kinematic hardening rules with critical state for the activation of dynamic recovery, part II: application to experiments of ratchetting behaviour // Int. J. Plast. 1993. – pp. 390–403.
175. Paul S.K., Sivaprasad S., Dhar S., Tarafder S. Key issues in cyclic plastic deformation: experimentation // Mechanics of Materials. 2011. V. 43. pp. 705-720.
176. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids // ASME J. Appl. Mech. 1956. V. 23. pp. 493-496.
177. Rahlfs P., Masing G. // Zeit. f. Met. 1950. V. 41. – 454 p.
178. Saks G., Shoji H. Zug-Druckversuche an Messingkristallen (Bauschinger effekt) // Zeitschrift für Phys. 1927. V. 45. – pp. 776–796.
179. Tanaka E., Murakami S., Ooka M. Effects of plastic strain amplitudes on non-proportional cyclic plasticity // Acta Mech. 1985. V. 57. pp. 167-182.
180. Ziegler H. A Modification of Prager's hardening rule // Quart. Appl. Math. 1959. T. 7. N 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ А (ОБЯЗАТЕЛЬНОЕ). КОД ПРОГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА КИНЕТИКИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

```

program Plastic

    dimension Y(53),dY(53),MP(33),phi(3),k(53),k_n(53),
1      S(3),E(3),dE(3)

    integer i,neps_p,l_c

    real*16 Y,dY,MP,geps,g,ga,s_st,deps_p,s_st_u,
1      G_mod,E_st,G_st,dCp,t,h,t_max,phi,k,k_n,S,E,dE,
2      eps_1,eps_2,sig_2

    real*16,allocatable:: Cp(:, :)

!
    MP - массив материальных параметров
!MP(1) - E модуль упругости
!MP(2) - Poisson коэффициент Пуассона
!MP(3) - параметр микронапряжений модели Бондаря Ea_0
!MP(4) - Sigma_a - параметр микронапряжений
!MP(5) - параметр микронапряжений beta
!MP(6) - параметр микронапряжений для модели Шабоса C_1
!MP(7) - параметр микронапряжений для модели Шабоса gamma_1
!MP(8) - параметр микронапряжений для модели Шабоса C_2
!MP(9) - параметр микронапряжений для модели Шабоса gamma_2
!MP(10) - параметр микронапряжений для модели Шабоса C_3
!MP(11) - параметр микронапряжений для модели Шабоса gamma_3
!MP(12) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a1
!MP(13) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_1
!MP(14) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a2
!MP(15) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_2
!MP(16) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a3
!MP(17) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_3
!MP(18) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a4
!MP(19) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_4
!MP(20) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a5
!MP(21) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_5
!MP(22) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a6
!MP(23) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_6
!MP(24) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a7
!MP(25) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_7
!MP(26) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a8
!MP(27) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_8
!MP(28) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a9
!MP(29) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_9
!MP(30) - параметр микронапряжений Оно-Ванга Sigma_a10
!MP(31) - параметр микронапряжений Оно-Ванга beta_10
!MP(32) - модуль посадки петли пластического гистерезиса K_E
!MP(33) - модуль посадки петли пластического гистерезиса n_E

!
    Y(i) - известные и определяемые параметры процесса нагружения
!Y(1) - накопленная пластическая деформация
!Y(2) - компонента напряжения sigma_11
!Y(3) - компонента напряжений sigma_22
!Y(4) - компонента напряжений sigma_12
!Y(5) - компонента деформации eps_11
!Y(6) - компонента деформации eps_22
!Y(7) - компонента деформации eps_12
!Y(8) - компонента пластической деформации epsp_11
!Y(9) - компонента пластической деформации epsp_22

```

!Y(10) - компонента пластической деформации eps_12
!Y(11)-Y(52) - компоненты микронапряжений всех типов
!Y(53) - траектория деформации s

!Чтение параметров из файлов

```

open (1,file='MatParam.txt')    ! файл, содержащий материалыные параметры
read (1, *)
read (1, *), MP

close (1)
!файл, содержащий функцию изотропного упрочнения
open (1,file='Cp.txt')
neps_p=0
i=2

read(1,*) !Переход к последней строке файла
! Подсчет количества строк
do
    !Увеличивается размер массива Cp пока в него не будут помещаться
    allocate (Cp(1,i))
    read (1, *, iostat = IOS) (Cp(1,:))          !все значения строки файла
    deallocate (Cp)
    !При отсутствии значений завершение увеличения размерности массива Cp
    if (IOS.lt.0) exit
    !Возвращение к последней строке файла
    backspace 1
    i=i+1 !Размер массива
end do
allocate (Cp(2,i))

rewind 1 ! Переход к началу файла
read (1, *) (Cp(1,:i-1))
read (1, *) (Cp(2,:i-1))

Cp(1,i)=1e10
Cp(2,i)=Cp(2,i-1)

close (1)

!Открытие файла результатов в заданных точках
open (2, file='results.csv')
!Открытие файла результатов в пиковых точках
open (3, file='res_peaks.csv')
!задание начальных условий
write (2, '(A)') 'time;eps_11;sigma_11;Э_1;Э_2;Э_3;S_1;S_2;S_3;
1 sigma;s;theta'
write (3, '(A)') 'time;eps_11;sigma_11'

t=0.
Y=0.
t_max=0.
eps_1=0.
eps_2=0.
sig_2=0.

write (2, '(79(f16.7,";"),f16.7)')t,Y(5),Y(2),0,0,0,0,0,0,0,Y(53),0
write (3, '(79(f16.7,";"),f16.7)')t,Y(5),Y(2)

!решение задачи Коши методом Рунге-Кутты
do while (t.le.t_max)

call load(t,l_c,phi,t_max,h)          !обращение к функции load

call dif(t,Y,MP,Cp,k)                 !k=k1

```

```

call dif(t+0.5*h,Y+h*0.5*k,MP,Cp,k_n)      !k_n=k2

dY=k+2.*k_n                                !dY=k1+2*k2

k=k_n                                       !k=k2
call dif(t+0.5*h,Y+0.5*h*k,MP,Cp,k_n)     !k_n=k3

dY=dY+2.*k_n                               !dY=k1+2*k2+4*k3

k=k_n                                       !k=k3
call dif(t+h,Y+h*k,MP,Cp,k_n)             !k_n=k4

dY=(dY+k_n)*h/6.                           !Вычисление dY

Y=Y+dY
t=t+h
!уравнения для вычисления компонент векторов напряжения и деформации
S(1)=(3./2.)*0.5*(2./3.*Y(2)-Y(3)/3.)
S(2)=2.*0.5/2.*Y(3)
S(3)=2.*0.5*Y(4)
E(1)=(3./2.)*0.5*(Y(5)-(Y(2)+Y(3))/MP(1)/3.*(1.-2.*MP(2)))
E(2)=2.*0.5*(Y(6)+Y(5)/2.-1./2.*(Y(2)+Y(3))/MP(1)*(1.-2.*MP(2)))
E(3)=2.*0.5*Y(7)
dE(1)=(3./2.)*0.5*(dY(5)-(dY(2)+dY(3))/MP(1)/3.*(1.-2.*MP(2)))
dE(2)=2.*0.5*(dY(6)+dY(5)/2.-1./2.*(dY(2)+dY(3))/MP(1)*
1(1.-2.*MP(2)))
dE(3)=2.*0.5*dY(7)

write (2,'(79(f16.7,";"),f16.7)'t,Y(5),Y(2),E,S,
1(S(1)**2.+S(2)**2.+S(3)**2.)*0.5,Y(53),
2180./3.14*acos((S(1)*dE(1)+S(2)*dE(2)+S(3)*dE(3))/
3((S(1)**2.+S(2)**2.+S(3)**2.)*0.5*
4(dE(1)**2.+dE(2)**2.+dE(3)**2.)*0.5)),Y(1)

if (l_c.ge.3) then
  if (((eps_2.gt.eps_1).and.(Y(5).lt.eps_2)).or.
1 ((eps_2.lt.eps_1).and.(Y(5).gt.eps_2))) then
    write (3,'(79(f16.7,";"),f16.7)'t,eps_2,sig_2
  end if
  eps_1=eps_2
  eps_2=Y(5)
  sig_2=Y(2)
end if

end do

close (2)
close (3)

contains

subroutine dif(t,Y,MP,Cp,dY) !Уравнение теории

1 dimension Y(53),dY(53),MP(33),g(14),ga(4),s_st(3),
  deps_p(3),phi(3),d_Kr(3),dE(3)

  real*16,allocatable:: Cp(:, :)

  integer i,neps_p,l_c,d_Kr

  real*16 Y,dY,MP,geps,g,ga,s_st,deps_p,s_st_u,a_u,eps_u,
1 G_mod,E_st,G_st,dCp,t,phi,Cp_c,E_a,dE

```

```

call load(t,l_c,phi,t_max,h)
dY=0
d_Kr=(/1,1,0/)
G_mod=MP(1)/2./(1.+MP(2))

s_st=Y(2:4)-d_Kr*(Y(2)+Y(3))/3.
do i=1,14
    s_st=s_st-Y(i*3+8:i*3+10)
end do
s_st_u=(3./2.*contr(s_st,s_st))*0.5

i=2
do while (Y(1).ge.Cp(1,i))
    i=i+1
end do

dCp=(Cp(2,i)-Cp(2,i-1))/(Cp(1,i)-Cp(1,i-1))      !производная Cp
Cp_c=Cp(2,i-1)+dCp*(Y(1)-Cp(1,i-1))           !текущее значение Cp

E_st=dCp

E_a=MP(3)/1.+MP(32)*Y(1)**(MP(33)+1.)      !определение E_a

!определение параметров микронапряжений
geps=E_a*MP(5)
g(1)=E_a+MP(5)*MP(4)
ga(1)=-MP(5)

if (s_st_u.eq.0.) then
    eps_u=0.
else
    eps_u=3./2.*contr(s_st,Y(8:10))/s_st_u
end if
a_u=(3./2.*contr(Y(11:13),Y(11:13)))*0.5
E_st=E_st+g(1)+geps*eps_u+ga(1)*a_u

g(2)=MP(6)
ga(2)=-MP(7)
a_u=(3./2.*contr(Y(14:16),Y(14:16)))*0.5
E_st=E_st+g(2)+ga(2)*a_u
g(3)=MP(8)
ga(3)=-MP(9)
a_u=(3./2.*contr(Y(17:19),Y(17:19)))*0.5
E_st=E_st+g(3)+ga(3)*a_u
g(4)=MP(10)
ga(4)=-MP(11)
a_u=(3./2.*contr(Y(20:22),Y(20:22)))*0.5
E_st=E_st+g(4)+ga(4)*a_u

do i=5,14
    a_u=(3./2.*contr(Y(i*3+8:i*3+10),Y(i*3+8:i*3+10)))*0.5
    if ((a_u.ge.MP(i*2+2)).and.
        (contr(Y(i*3+8:i*3+10),s_st).gt.0.)) then
        g(i)=0.
    else
        g(i)=MP(i*2+2)*MP(i*2+3)
    end if
    E_st=E_st+g(i)
end do
!выбор случая нагружения
select case (l_c)
case(1) !Плоские траектории деформаций
    dY(5)=phi(1)
    dY(7)=phi(2)

```

```

dY(3)=0.
case(2) !Пространственные траектории деформаций
dY(5)=phi(1)
dY(6)=phi(2)
dY(7)=phi(3)
case(3) !Одноосное жесткое нагружение
dY(5)=phi(1)
dY(3)=0.
dY(4)=0.
case(4) !Одноосное мягкое нагружение
dY(2)=phi(1)
dY(3)=0.
dY(4)=0.
end select

if (s_st_u.eq.0.) then
G_st=0.
dY(1)=0.
else

select case (1_c)
case(1) !Плоские траектории деформаций
!вычисление параметра G*
G_st=G_mod*3./2.*
1 ((1.+MP(2))*s_st(1)**2.+2.*s_st(3)**2.)/s_st_u**2.
!накопленная пластическая деформация
1 dY(1)=3.*G_mod/(E_st+3.*G_st)*((1.+MP(2))*
s_st(1)*dY(5)+2.*s_st(3)*dY(7))/s_st_u

case(2) !Пространственные траектории деформаций

G_st=G_mod*3./2./(1.-MP(2))/s_st_u**2.*
1 (s_st(1)**2.+s_st(2)**2.+2.*MP(2)*s_st(1)*s_st(2)+
2 *(1.-MP(2))*s_st(3)**2.)

1 dY(1)=3.*G_mod/(E_st+3.*G_st)/(1.-MP(2))/s_st_u*
1 ((s_st(1)+MP(2)*s_st(2))*dY(5)+
2 (s_st(2)+MP(2)*s_st(1))*dY(6)+
3 2.*(1-MP(2))*s_st(3)*dY(7))

case(3) !Одноосное жесткое нагружение

G_st=G_mod*3./2./s_st_u**2.*s_st(1)**2.*(1.+MP(2))

1 dY(1)=3.*G_mod/(E_st+3.*G_st)*(1.+MP(2))*
s_st(1)*dY(5)/s_st_u

case(4) !Одноосное мягкое нагружение

dY(1)=3./2./E_st*s_st(1)*dY(2)/s_st_u

end select

end if

if ((s_st_u.lt.Cp_c).or.(dY(1).le.0.)) then
dY(1)=0.
end if
!вычисление пластических деформаций
if (s_st_u.eq.0.) then
dY(8:10)=0.
else

```



```

        dY(8:10)=3./2.*s_st/s_st_u*dY(1)
end if

select case (1_c)
case(1) !Плоские траектории деформаций
    dY(2)=MP(1)*(dY(5)-dY(8))
    dY(4)=MP(1)/(1+MP(2))*(dY(7)-dY(10))
    dY(6)=-MP(2)*(dY(5)-dY(8))+dY(9)

case(2) !Пространственные траектории деформаций
1   dY(2)=MP(1)/(1.-MP(2)**2.)*
1   (dY(5)-dY(8)+MP(2)*(dY(6)-dY(9)))
    dY(3)=MP(1)/(1.-MP(2)**2.)*
    (dY(6)-dY(9)+MP(2)*(dY(5)-dY(8)))
    dY(4)=MP(1)/(1.+MP(2))*(dY(7)-dY(10))

case(3) !Одноосное жесткое нагружение
    dY(2)=MP(1)*(dY(5)-dY(8))
    dY(6)=-MP(2)*(dY(5)-dY(8))+dY(9)
    dY(7)=0.

case(4) !Одноосное мягкое нагружение
    dY(5)=dY(2)/MP(1)+dY(8)
    dY(6)=-MP(2)/MP(1)*dY(2)+dY(9)
    dY(7)=0.

end select
!Вычисление компонентов микронапряжений
1   dY(11:13)=2./3.*g(1)*dY(8:10)+
(2./3.*geps*Y(8:10)+ga(1)*Y(11:13))*dY(1)

do i=2,4
1   dY(i*3+8:i*3+10)=2./3.*g(i)*dY(8:10)+
ga(i)*Y(i*3+8:i*3+10)*dY(1)
end do

do i=5,14
    dY(i*3+8:i*3+10)=2./3.*g(i)*dY(8:10)
end do

1   dE(1)=(3./2. )**0.5*(dY(5)-
(dY(2)+dY(3))/3./MP(1)*(1.-2.*MP(2)))
1   dE(2)=2.**0.5*(dY(6)+dY(5)/2.-1./2.*(dY(2)+dY(3))/MP(1)*
(1.-2.*MP(2)))
dE(3)=2.**0.5*dY(7)

dY(53)=(dE(1)**2.+dE(2)**2.+dE(3)**2. )**0.5
return
end

!Функция свертки тензоров
FUNCTION contr(X,Y)
    DIMENSION X(3),Y(3)
    real*16 X,Y,contr
    contr=X(1)*Y(1)+X(2)*Y(2)+(-X(1)-X(2))*(-Y(1)-Y(2))+
1   2*(X(3)*Y(3))
    RETURN
END FUNCTION contr

end

subroutine load (t,l_c,phi,t_max,h)
dimension phi(3)
integer l_c,traj
real*16 phi,t,t_max,h,a,b

```

```

traj=1

select case(traj)                                !выбор траектории деформации
case(1) !Квадрат
    l_c=1
    if ((t-int(t)).lt.0.25) then
        phi(1)=0.01/0.25
        phi(2)=0.
    elseif ((t-int(t)).lt.0.5) then
        phi(1)=0.
        phi(2)=0.01/0.25
    elseif ((t-int(t)).lt.0.75) then
        phi(1)=-0.01/0.25
        phi(2)=0.
    else
        phi(1)=0.
        phi(2)=-0.01/0.25
    end if
    !компоненты вектора деформаций
    phi(1)=phi(1)*(2./3.)**0.5
    phi(2)=phi(2)/(2.)**0.5
    phi(3)=0.
    t_max=3.
    h=0.001

case(2) !Треугольник
    l_c=1
    if ((t-int(t)).lt.0.25) then
        phi(1)=0.
        phi(2)=0.015/0.25
    elseif ((t-int(t)).lt.0.5) then
        phi(1)=0.025/0.25
        phi(2)=-0.025/0.25
    elseif ((t-int(t)).lt.0.75) then
        phi(1)=-0.025/0.25
        phi(2)=0.
    else
        phi(1)=0.
        phi(2)=0.01/0.25
    end if

    phi(1)=phi(1)*(2./3.)**0.5
    phi(2)=phi(2)/(2.)**0.5
    phi(3)=0.
    t_max=3.
    h=0.001

case(3) !Окружности со смещенным центром
    l_c=1
    phi(1)=0.01*3.14*(int(t)+1)*sin(2.*3.14*t)
    phi(2)=0.005*3.14*(int(t)+1)*cos(2.*3.14*t)

    phi(1)=phi(1)*(2./3.)**0.5
    phi(2)=phi(2)/(2.)**0.5
    phi(3)=0.
    t_max=3.
    h=0.001

```

case(4) !Окружности с центром в начале координат

```
l_c=1

if ((t-int(t)).lt.0.5) then
  phi(1)=0.005
  phi(2)=0.
else
  phi(1)=-0.01*3.14*(int(t)+1)*sin(4.*3.14*t)
  phi(2)=-0.01*3.14*(int(t)+1)*cos(4.*3.14*t)
end if

phi(1)=phi(1)*(2./3.)**0.5
phi(2)=phi(2)/(2.)**0.5
phi(3)=0.
t_max=5.
h=0.001
```

case(5) !Астроида

```
l_c=1

if (t.lt.1.) then
  phi(1)=0.02
  phi(2)=0.
else
  phi(1)=-0.12*3.14*((cos(2.*3.14*t))**2.)*sin(2.*3.14*t)
  phi(2)=-0.12*3.14*((sin(2.*3.14*t))**2.)*cos(2.*3.14*t)
end if

phi(1)=phi(1)*(2./3.)**0.5
phi(2)=phi(2)/(2.)**0.5
phi(3)=0.
t_max=2.
h=0.001
```

case(6) !Спираль Архимеда

```
l_c=1

if (t.lt.1.) then
  phi(1)=0.01
  phi(2)=0.
else
  1 phi(1)=-0.0025*cos(2.*3.14*t)-(0.025*3.14-0.005*3.14*t)*
  2 sin(2.*3.14*t)
  phi(2)=0.0025*sin(2.*3.14*t)-(0.025*3.14-0.005*3.14*t)*
  cos(2.*3.14*t)
end if

phi(1)=phi(1)*(2./3.)**0.5
phi(2)=phi(2)/(2.)**0.5
phi(3)=0.
t_max=7.
h=0.001
```

case(7) !Винт с постоянными кривизной и кручением 1

```
l_c=2

if (t.lt.1.) then
  phi(1)=0.005*(3./2.)**0.5
  phi(2)=0
  phi(3)=0.005*(3./2.)**0.5
```

```

else
  phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.0025*sin(2.*3.14*t-1)
  phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.0025*cos(2*3.14*t)
  phi(3)=- (2.)**0.5*(3.14*0.0025*sin(2.*3.14*t-1.))+
  (3.)**0.5*0.0157+2.*3.14*0.0025*sin(2.*3.14*t-1))
end if

phi(1)=phi(1)
phi(2)=phi(2)*2./(3.)**0.5
phi(3)=(1./3.)**0.5*(phi(1)+2*phi(2))
t_max=3.
h=0.001

```

case(8) !Винт с постоянными кривизной и кручением 2

```

l_c=2

if (t.lt.1.) then
  phi(1)=0.005*(3./2.)**0.5
  phi(2)=0
  phi(3)=0.005*(3./2.)**0.5
else
  phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.001*sin(2.*3.14*t-1)
  phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.001*cos(2*3.14*t)
  phi(3)=- (2.)**0.5*(3.14*0.001*sin(2.*3.14*t-1.))+
  (3.)**0.5*0.0125+2.*3.14*0.001*sin(2.*3.14*t-1))
end if

phi(1)=phi(1)
phi(2)=phi(2)*2./(3.)**0.5
phi(3)=(1./3.)**0.5*(phi(1)+2*phi(2))
t_max=3.
h=0.001

```

case(7) ! Винт с постоянными кривизной и кручением 1

```

l_c=2

if (t.lt.1.) then
  phi(1)=0.005*(3./2.)**0.5
  phi(2)=0
  phi(3)=0.005*(3./2.)**0.5
else
  phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.0025*sin(2.*3.14*t)
  phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.0025*cos(2*3.14*t)
  phi(3)=((6.)**0.5)/2*0.0157
end if

phi(1)=phi(1)
phi(2)=phi(2)*2./(3.)**0.5
phi(3)=(1./3.)**0.5*(phi(1)+2*phi(2))
t_max=3.
h=0.001

```

case(8) ! Винт с постоянными кривизной и кручением 2

```

l_c=2

if (t.lt.1.) then
  phi(1)=0.005*(3./2.)**0.5
  phi(2)=0
  phi(3)=0.005*(3./2.)**0.5
else
  phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.001*sin(2.*3.14*t)
  phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.001*cos(2*3.14*t)

```

```

    phi(3)=((6.)**0.5)/2*0.0125
end if

phi(1)=phi(1)
phi(2)=phi(2)*2./(3.)**0.5
phi(3)=(1./3.)**0.5*(phi(1)+2*phi(2))
t_max=3.
h=0.001

```

case(9) ! Винт с переменной кривизной и кручением 1

```

l_c=2

if (t.lt.1.) then
    phi(1)=0.005*(3./2.)**0.5
    phi(2)=0
    phi(3)=0.005*(3./2.)**0.5
elseif (t.lt.2.) then
    phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.003*sin(2.*3.14*t)
    phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.003*cos(2.*3.14*t)
    phi(3)=- (2.)**0.5*(3.14*0.003*sin(2.*3.14*t)
+ 0.005
elseif (t.lt.3.) then
    phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.0035*sin(2.*3.14*t)
    phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.0035*cos(2.*3.14*t)
    phi(3)=- (2.)**0.5*(3.14*0.0035*sin(2.*3.14*t)
+ 0.005
else
    phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.004*sin(2.*3.14*t)
    phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.004*cos(2.*3.14*t)
    phi(3)=- (2.)**0.5*(3.14*0.004*sin(2.*3.14*t)
+ 0.005
end if

phi(1)=phi(1)
phi(2)=phi(2)*2./(3.)**0.5
phi(3)=(1./3.)**0.5*(phi(1)+2*phi(2))
t_max=3.
h=0.001

```

case(10) ! Винт с переменной кривизной и кручением 2

```

l_c=2

if (t.lt.1.) then
    phi(1)=0.005*(3./2.)**0.5
    phi(2)=0
    phi(3)=0.005*(3./2.)**0.5
elseif (t.lt.2.) then
    phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.003*sin(2.*3.14*t)
    phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.003*cos(2.*3.14*t)
    phi(3)=- (2.)**0.5*(3.14*0.003*sin(2.*3.14*t)
+ 0.005
elseif (t.lt.3.) then
    phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.0035*sin(2.*3.14*t)
    phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.0035*cos(2.*3.14*t)
    phi(3)=- (2.)**0.5*(3.14*0.0035*sin(2.*3.14*t)
+ 0.006
else
    phi(1)=- (6.)**0.5*3.14*0.004*sin(2.*3.14*t)
    phi(2)=(6.)**0.5*3.14*0.004*cos(2.*3.14*t)
    phi(3)=- (2.)**0.5*(3.14*0.004*sin(2.*3.14*t)
+ 0.007
end if

```

```
phi(1)=phi(1)
phi(2)=phi(2)*2./(3.）**0.5
phi(3)=(1./3.）**0.5*(phi(1)+2*phi(2))
t_max=3.
h=0.001

end select

return
end
```