

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Московский Политех)

На правах рукописи



ШИВРИН Матвей Витальевич

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ
ШПАНГОУТЫ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор Бондарь В.С.

Москва – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК И ФОРМУЛИРОВКА ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТЫ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ	13
1.1. Постановки задач о напряженно-деформированном состоянии тонких композитных оболочек	13
1.2. Методы решения задач о напряженно-деформированном состоянии замкнутых оболочек вращения при действии локальных нагрузок	20
1.3. Формулировка подхода к построению методики расчета локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических конструкций .	27
2. ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТЫ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ.....	31
2.1. Постановка задачи о напряженно-деформированном состоянии тонкостенной цилиндрической конструкции, составленной из колец и слоистых, а также трехслойных с легким наполнителем оболочек.....	32
2.1.1. Уравнения основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява теории слоистых ортотропных цилиндрических оболочек.....	32
2.1.2. Уравнения основанной на гипотезе ломаной линии теории трехслойных цилиндрических оболочек с легким несжимаемым по толщине наполнителем.....	36
2.1.3. Уравнения теории круговых колец с недеформируемым поперечным сечением применительно к рассматриваемому случаю тонкостенной цилиндрической конструкции со шпангоутами	39
2.2. Сведение поставленной двумерной задачи для цилиндрической конструкции из оболочек и колец к совокупности одномерных задач.....	42

2.2.1. Получаемая одномерная краевая задача в случае оболочки, подчиняющейся гипотезе единой нормали.....	43
2.2.2. Получаемая одномерная краевая задача в случае трехслойной оболочки, подчиняющейся гипотезе ломаной линии.....	45
2.3. Алгоритм численного решения поставленной задачи на основе метода численного интегрирования	47
2.3.1. Процедура метода перемещений для определения амплитудных значений компонент напряженно-деформированного состояния рассматриваемой конструкции при фиксированном номере гармоники	47
2.3.2. Процедура численного интегрирования сформулированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях в перемещениях.....	52
2.3.3. Программная реализация изложенного алгоритма.....	56
2.3.4. Представление приложенных к конструкции локальных нагрузок в виде рядов Фурье по окружной координате	59
2.4. Типы элементов программного комплекса « <i>Abaqus</i> », используемые при конечно-элементном моделировании исследуемых локально нагруженных конструкций, и процедура их применения при построении вариантов расчётных КЭ моделей.....	61
3. ПРИМЕНЕНИЕ ИЗЛОЖЕННОЙ МЕТОДИКИ К РАСЧЁТУ ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТЫ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ (ОДНОСЛОЙНЫХ) ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ	63
3.1. Результаты численного моделирования конструкций со шпангоутами прямоугольного поперечного сечения (в сопоставлении с экспериментом)....	63
3.1.1. Случай приложения двух радиальных сил к промежуточному шпангоуту	65
3.1.2. Случай приложения двух осевых сил к крайнему шпангоуту	70
3.1.3. Случай приложения к крайнему шпангоуту двух крутящих моментов.....	73
3.2. Исследование напряжённо-деформированного состояния стеклопластикового резервуара с подкрепляющими шпангоутами переменной толщины.....	79

3.2.1. Случай приложения двух осевых сил к промежуточному шпангоуту	79
3.2.2. Случай приложения двух осевых сил к крайнему шпангоуту	85
3.3 Результаты численного моделирования локально нагруженных через шпангоуты цилиндрических оболочек из перекрестно армированных композитов.....	88
4. ПРИМЕНЕНИЕ ИЗЛОЖЕННОЙ МЕТОДИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТЫ ТРЁХСЛОЙНЫХ С ПЕНОПЛАСТОВЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК	100
4.1. Результаты численного моделирования трёхслойного кольца при действии двух радиальных сил (в сопоставлении с экспериментом)	101
4.2. Результаты численного моделирования подкреплённой трёхслойной оболочки симметричной по толщине структуры при действии двух радиальных сил (в сопоставлении с экспериментом)	104
4.3. Результаты численного моделирования протяжённой эксцентрично подкреплённой торцевыми шпангоутами трёхслойной оболочки при действии двух радиальных сил.....	107
4.4. Результаты численного моделирования эксцентрично подкреплённой торцевыми шпангоутами трёхслойной оболочки с длиной порядка диаметра.....	112
4.4.1. Случай приложения к одному из шпангоутов двух радиальных сил	113
4.4.2. Случай приложения к одному из шпангоутов двух осевых сил	119
4.5. Исследование напряжённо-деформированного состояния трёхслойного стеклопластикового резервуара в случае приложения к одному из шпангоутов двух осевых сил.....	125
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	132
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	134
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	147

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования.

Всё большее применение в различных отраслях экономики находят конструкции типа усиленных шпангоутами композитных цилиндрических оболочек. Указанные оболочки могут иметь как практически однородную по толщине структуру (и представлять собой однослойные ортотропные оболочки), так и быть многослойными (набранными из ортотропных слоев). Распространенным в этом классе конструкций является также случай трехслойных оболочек, которые состоят из двух композитных (несущих) слоёв и расположенного между ними сравнительно толстого маложесткого и малоплотного слоя заполнителя. Передача локальных нагрузок на такие конструкции в процессе эксплуатации, как правило, осуществляется через шпангоуты, которые должны обладать достаточной жесткостью, чтобы не допустить распространения негативных эффектов, связанных с локальным характером нагрузок, непосредственно на оболочку. Разрушение подобных конструкций под действием отмеченного типа локальных нагрузок может происходить как вследствие высокого уровня напряжений в самих нагруженных шпангоутах, так и вследствие высокого уровня напряжений изгибного характера в оболочке в зонах стыков со шпангоутами.

Имеющиеся аналитические методы расчёта напряжённно-деформированного состояния локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических конструкций построены путем упрощения исходных соотношений соответствующих теорий оболочек на основе принятия полубезмоментной гипотезы В.З. Власова. Подобный приближенный подход дает по перемещениям, а также кольцевым деформациям результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом. В то же время при таком подходе остается открытым вопрос о распределении и уровне меридиональных деформаций и напряжений в узких зонах краевых эффектов, примыкающих к шпангоутам. Решение здесь требует привлечения полной системы уравнений теории оболочек, учитывающей в одинаковой мере изгибные факторы как в окружном, так и меридиональном

направлениях. В такой общей постановке решаемая задача становится затруднительной для аналитических методов и требует привлечения численных методов. Однако и с применением численных подходов трудности с получением решений указанного типа задач с локальными нагрузками сохраняются. И это несмотря на наличие таких мощных инструментов численного моделирования, как программные комплексы метода конечных элементов.

Основная проблема при конечно-элементном решении рассматриваемого типа задач с локальными особенностями состоит в обеспечении сходимости получаемых (путём последовательного измельчения сетки конечных элементов) числовых результатов к искомому точному решению задачи во всех точках конструкции, включая упомянутые зоны краевых эффектов. Учитывая значительную протяжённость обсуждаемого типа конструкций, подтверждение указанной сходимости на основе процедуры варьирования расчетной сеткой представляется проблематичным. Надёжность получаемых таким образом численных решений в зонах краевых эффектов будет оставаться под вопросом.

Всё это говорит о том, что применительно к задачам о деформации локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических конструкций вопросы подтверждения достоверности получаемых численных решений, а также вопросы проведения на их основе исследований по влиянию типов прикладываемых нагрузок, геометрических и физико-механических характеристик таких конструкций на параметры их напряжённо-деформированного состояния до сих пор сохраняют свою актуальность.

Степень разработанности темы исследования.

На основе анализа имеющейся литературы по обсуждаемой теме можно сделать следующие выводы о степени её разработанности.

Как показывает имеющаяся практика расчета композитных оболочек, в случае достаточно тонких оболочек подобного типа (как однослойных, так и слоистых) допустимо (несмотря на повышенную податливость композитов на поперечный сдвиг) строить соответствующие расчётные модели с использованием соотношений классической теории оболочек, основанной на

гипотезе единой нормали. Та же практика убеждает в допустимости использования при расчетах локально нагруженных через подкрепляющие шпангоуты тонких трехслойных (с легким наполнителем) композитных оболочек соотношений теории оболочек, построенной на гипотезе ломаной линии в сочетании с предположением о несжимаемости наполнителя по толщине.

Несмотря на огромное количество публикаций, посвященных аналитическим методам расчета локально нагруженных тонких упругих оболочек, обнаруживается лишь небольшое число работ, где удалось получить (с использованием полубезмоментной гипотезы В.З. Власова) приближенные аналитические решения задач о деформации конструкций в виде подкрепленных шпангоутами (и локально нагруженных через эти шпангоуты) композитных цилиндрических оболочек (в том числе и трехслойных с легким наполнителем). Однако эти приближенные решения не позволяют вычислить значения изгибных меридиональных деформаций (и напряжений) в узких зонах стыков оболочки с нагруженными шпангоутами (в зонах краевых эффектов).

Выход из такой ситуации можно искать на пути использования численных методов, основываясь на полных системах уравнений соответствующих теорий оболочек (построенных на гипотезе единой нормали или ломаной линии). В частности, можно обратиться к таким мощным инструментам численного моделирования, как современные программные комплексы метода конечных элементов.

Однако при этом следует иметь в виду, что при конечно-элементном решении рассматриваемого типа задач о локальном нагружении (как и при использовании любого другого численного метода) занимающийся расчетом исследователь должен обеспечить сходимость получаемых (путем последовательного измельчения используемой расчетной сетки) числовых результатов к предполагаемому точному решению задачи во всех точках исследуемой конструкции, включая зоны концентрации напряжений. В отсутствие четкого критерия сходимости результатов численного моделирования к упомянутому точному решению, достоверным применительно к

рассматриваемой задаче представляется тот результат ее численного решения, который может быть подтвержден решением этой же задачи на основе какого-либо другого численного метода.

В качестве альтернативного метода численного решения рассматриваемого типа задач с локальными нагрузками целесообразно использовать метод численного интегрирования в варианте ортогональной прогонки, который (как показала обширная практика его применения) позволяет получать на тестовых задачах о напряжённо-деформированном состоянии оболочек вращения результаты, совпадающие с соответствующими аналитическими решениями с точностью до многих значащих цифр.

Итак, **целью диссертационной работы** является разработка методики численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических оболочек, способной обеспечить получение надёжных числовых результатов по параметрам напряженно-деформированного состояния во всех точках конструкции, включая зоны краевых эффектов, и проведение с использованием этой методики исследований применительно к стеклопластиковым конструкциям, находящимся под действием приложенных к шпангоутам локальных нагрузок.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих **основных задач**:

1. Формулировка подхода к построению методики численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических оболочечных конструкций, которая включает: использование соотношений теории оболочек, основанной на гипотезе единой нормали (или ломаной линии в случае трехслойной оболочки с легким несжимаемым по толщине заполнителем), а также теории круговых колец с недеформируемым поперечным сечением; построение для решения поставленной задачи двух вычислительных моделей: одна из которых основана на методе численного интегрирования (ЧИ), другая - на методе конечных элементов (КЭ); подтверждение факта достоверности получаемого таким образом численного

решения на основе критерия согласованности результатов ЧИ и КЭ моделей (в том числе и по зонам краевых эффектов).

2. Проведение с использованием заявленной методики (с одновременным применением ЧИ и КЭ моделей) исследований напряженно-деформированного состояния локально нагруженных через шпангоуты стеклопластиковых (как однослойных, так и трехслойных с пенопластовым наполнителем) цилиндрических конструкций с выявлением эффектов, связанных с влиянием схем нагружения, физико-механических и геометрических параметров конструкции на характер деформирования.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем.

С применением метода численного интегрирования разработан и программно реализован алгоритм численного решения задачи о напряжённо-деформированном состоянии неосесимметрично нагруженной конструкции, составленной из произвольного количества соединенных круговыми кольцами слоистых ортотропных цилиндрических оболочек (работающих либо по схеме единой нормали, либо ломаной линии в случае трехслойных с легким наполнителем оболочек).

Разработана методика получения надежного численного решения задачи о напряжённо-деформированном состоянии локально нагруженной через шпангоуты композитной цилиндрической оболочечной конструкции, основанная на одновременном использовании двух вычислительных моделей (ЧИ и КЭ), в рамках которой подтверждение факта достоверности получаемого численного решения осуществляется на основе критерия согласованности ЧИ и КЭ расчётов (в том числе и по зонам краевых эффектов).

С применением этой методики впервые для задач о локальном нагружении через шпангоуты стеклопластиковых (как однослойных, так и трехслойных с пенопластовым наполнителем) цилиндрических конструкций выполнены исследования по влиянию схем нагружения, физико-механических и геометрических параметров конструкции на уровень напряжений и деформаций в зонах краевых эффектов в окрестностях стыков с нагруженными шпангоутами.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается:

- в разработке на основе метода численного интегрирования алгоритма и программы для расчёта напряжённо-деформированного состояния неосесимметрично нагруженной конструкции, составленной из произвольного количества соединенных круговыми кольцами слоистых ортотропных цилиндрических оболочек (работающих либо по схеме единой нормали, либо ломаной линии в случае трехслойных с легким наполнителем оболочек), а также в разработке методики использования такой ЧИ модели (в сочетании с КЭ моделью) в целях получения надежного численного решения задач о деформации локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических конструкций (указанные разработки могут быть использованы в расчетной практике организаций, связанных с проектированием подобного типа конструкций);
- во внедрении указанных разработок в расчетную практику Центра прикладных исследований АО «ЦНИИмаш» (см. Приложение).

Методология и методы исследования. В работе использованы:

- соотношения теории слоистых ортотропных оболочек, работающих по схеме единой нормали и прямой линии, а также теории трёхслойных с лёгким наполнителем оболочек, работающих по схеме ломаной линии;
- методы численного интегрирования (ЧИ) в варианте ортогональной прогонки и конечных элементов (КЭ) с использованием программного комплекса SIMULIA «*Abaqus*» (лицензия пользователя № LKO0576571), хорошо зарекомендовавших себя при решении широких классов задач строительной механики;
- метод перемещений при реализации алгоритма метода численного интегрирования применительно к конструкциям, содержащим трёхслойные секции;
- методика подтверждения достоверности получаемого численного решения путём согласования результатов, получаемых как на основе КЭ и ЧИ моделей, так и с использованием эксперимента.

Положения, выносимые на защиту:

1. Разработанный с применением метода численного интегрирования (ЧИ) и программно реализованный алгоритм численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических конструкций, составленных из секций в виде слоистых ортотропных оболочек, а также трёхслойных оболочек с лёгким наполнителем и слоистыми ортотропными несущими слоями;

2. Построенные на основе комплекса «*Abaqus*» расчётные КЭ модели для решения тех же задач о локальном нагружении конструкций;

3. Методика получения решения (с подтверждённой достоверностью) поставленной задачи с использованием построенных ЧИ и КЭ вычислительных моделей (факт достоверности получаемого таким образом численного решения устанавливается по достижению согласованности результатов ЧИ и КЭ моделей (в том числе и по зонам краевых эффектов));

4. Получаемые с применением этой методики результаты численного решения задач о деформации локально нагруженных через шпангоуты стеклопластиковых (как однослойных, так и трёхслойных с пенопластовым наполнителем) цилиндрических конструкций;

5. Выявленные эффекты и закономерности по влиянию схем нагружения, физико-механических и геометрических параметров конструкций на уровень напряжений и деформаций в зонах краевых эффектов.

Достоверность полученных в работе результатов обеспечивается корректным применением проверенных практикой теоретических положений, использованием численных методов, хорошо зарекомендовавших себя при решении широких классов задач строительной механики, и подтверждается согласованием результатов численного моделирования с имеющимися экспериментальными данными.

Апробация работы. Основные результаты проведённых исследований докладывались на:

– II Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике» (МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 22 – 23 ноября 2017 г.);

– VIII научно-технической конференции молодых учёных и специалистов ЦУП (ЦНИИмаш, г. Королёв, 3 – 6 апреля 2018 г.);

– Международном молодежном научном форуме «ЛОМОНОСОВ-2018» (МГУ им. Ломоносова, г. Москва, 9 – 13 апреля 2018 г.);

– X общероссийской молодёжной научно-технической конференции «Молодёжь. Техника. Космос» (БГТУ «Военмех», г. Санкт-Петербург, 18 – 20 апреля 2018 г.);

– XXX Всероссийской школе-конференции «Математическое моделирование в естественных науках» (ПНИПУ, г. Пермь, 6 – 9 октября 2021 г.).

В полном объёме диссертация докладывалась 17 февраля 2020 г. на научном семинаре им. А.Г. Горшкова «Проблемы механики деформируемого твёрдого тела и динамики машин» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт», 18 ноября 2020 г. на Межкафедральном семинаре по прикладной и теоретической механике и численным методам моделирования ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана».

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 12 [6, 92-94, 98-105] научных работах, в том числе в 6 [6, 92-94, 101, 104] статьях в журналах, входящих в Перечень российских рецензируемых научных изданий, и 1 [102] научной публикации в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus.

Личный вклад соискателя. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, получены лично соискателем в процессе научной деятельности. Заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованных источников и приложения. Работа изложена на 147 страницах, содержит 47 рисунков, 5 таблиц, приложение. Список использованных источников включает в себя 126 наименований.

1. ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК И ФОРМУЛИРОВКА ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТЫ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

1.1. Постановки задач о напряженно-деформированном состоянии тонких композитных оболочек

Как отмечалось выше, при расчете напряжённо-деформированного состояния тонкостенных композитных конструкций, как правило, основываются на том или ином варианте линейной теории тонких упругих оболочек, выбор которого определяется особенностями строения рассчитываемой конструкции по толщине. Начнем обсуждение с классического (и широко применяемого в расчетной практике) варианта, основанного на гипотезах Кирхгофа-Лява. Здесь следует отметить большой вклад, который внесли в построение классической теории оболочек труды таких отечественных и зарубежных ученых, как С.А. Амбарцумян, И.Н. Векуа, В.З. Власов, А.Л. Гольденвейзер, Н.А. Кильчевский, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, В.В. Новожилов, Ю.Н. Работнов, А.Н. Полилов, С.П. Тимошенко, Б.Е. Победря, В.И. Горбачев, А. Ляв, Э. Мейснер, Л. Доннелл, В. Флюгге, П. Нагди, А.Э. Грин, В. Церна, Э. Рейснер и др. Основные положения этой теории достаточно полно представлены в монографиях [4, 24, 31, 67, 95]. Из этих положений мы выделим здесь лишь некоторые аспекты, на которые и будем опираться при проведении сравнительного анализа возможностей различных теорий применительно к рассматриваемому типу задач. В соответствии с заявленной направленностью данной работы, обсуждение ограничим лишь случаем замкнутых оболочек вращения.

Будем при этом исходить из широко используемого подхода к получению соотношений теории оболочек из соотношений линейной теории упругости на основе (вариационного) принципа возможных перемещений [55, 96]. Согласно

этому принципу, в состоянии равновесия работа приложенных к точкам деформируемого тела сил на вариациях перемещений этих точек равна работе напряжений на соответствующих вариациях деформаций.

В классическом варианте теории оболочек рассматриваемая оболочка считается выполненной из изотропного материала. Оболочка как трехмерное упругое тело рассматривается в ортогональной криволинейной системе координат α_i ($i=1, 2, 3$), где α_1 и α_2 – координаты, отсчитываемые вдоль поверхности приведения оболочки в меридиональном и окружном направлениях, а $\alpha_3 = z$, где z – координата, отсчитываемая от принятой поверхности приведения в направлении внешней нормали к ней. Вводятся в рассмотрение векторы перемещений $\bar{u}^0 = \bar{u}^0(\alpha_1, \alpha_2)$ точек, принадлежащих поверхности приведения оболочки. Тогда перемещения $\bar{u} = \bar{u}(\alpha_1, \alpha_2, z)$ точек оболочки, отстоящих от поверхности приведения на расстоянии $|z| \leq \tilde{h}$ (где \tilde{h} – толщина оболочки), можно с достаточной степенью точности считать линейными функциями координаты z , принимая, что

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 + z\theta_1, \\ u_2 &= u_2^0 + z\theta_2, \\ u_3 &= u_3^0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Из записи (1.1) видно, что параметры θ_1 и θ_2 характеризуют повороты нормального к поверхности приведения волокна относительно координатных осей α_2 и α_1 . Для оболочки как тонкого и гибкого объекта характерно существенное преобладание величин указанных поворотов по сравнению с значениями поперечных сдвигов ε_{13} и ε_{23} . Если подставить принятые кинематические связи (1.1) в соответствующие геометрические соотношения, выражающие сдвиговые деформации ε_{13} и ε_{23} через перемещения u_1, u_2, u_3 , то получатся два уравнения, содержащие параметры $\varepsilon_{13}, \theta_1$ и $\varepsilon_{23}, \theta_2$, а также перемещения u_1, u_2 вместе с производными по α_1 и α_2 от перемещения u_3 . В случае достаточно тонкой оболочки величины ε_{13} и ε_{23} в этих равенствах

оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с поворотами θ_1 и θ_2 . Учитывая это, параметры θ_1 и θ_2 могут быть выражены на основании этих равенств через перемещения u_1 , u_2 и производные по α_1 и α_2 от перемещения u_3 , если принять

$$\varepsilon_{13} = 0, \varepsilon_{23} = 0. \quad (1.2)$$

Укажем, что третье уравнение в записи (1.1) означает принятие предположения о недеформируемости нормального к поверхности приведения элемента оболочки, а именно

$$\varepsilon_{33} = 0. \quad (1.3)$$

Равенства (1.2), (1.3) представляют собой математическое выражение кинематических гипотез Кирхгофа, на которых построена классическая теория оболочек. Эта теория включает еще гипотезу Лява, основанную на предположении, что напряжения σ_{33} в оболочке настолько малы по сравнению с σ_{11} , σ_{22} , что ими можно пренебречь, принимая

$$\sigma_{33} = 0. \quad (1.4)$$

Обращаем внимание на то, что, в соответствии с равенствами (1.2), (1.3), в случае классического варианта теории оболочек соответствующие слагаемые в записи вариационного уравнения принципа возможных перемещений исключаются. Остаётся представить в преобразованном таким образом вариационном уравнении деформации ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} , выраженными с помощью геометрических соотношений через параметры u_1^0 , u_2^0 , θ_1 , θ_2 . Затем, вычисляя соответствующие интегралы по толщине, свести работу напряжений к работе внутренних усилий и моментов на соответствующих вариациях деформаций и изменений кривизны поверхности приведения. Дифференциальные уравнения равновесия оболочки в терминах упомянутых усилий и моментов, а также силовые граничные условия получаются из преобразованного вариационного уравнения с учётом того, что независимыми во всех внутренних точках

поверхности приведения являются лишь вариации перемещений δu_i^0 ($i = 1, 2, 3$), а на торцах оболочки с заданными силовыми факторами – вариации δu_i^0 и $\delta \theta_1$.

Физические соотношения классического варианта теории оболочек, связывающие введенные в рассмотрение внутренние усилия и моменты с деформациями и изменениями кривизн поверхности приведения оболочки, получают, вычисляя соответствующие интегралы по толщине оболочки. Указанные интегралы содержат подынтегральные функции вида σ_{ij} и $\sigma_{ij}z$, в которых напряжения σ_{ij} представляются выраженными через упомянутые деформационные параметры с использованием трехмерных соотношений упругости, откорректированных с учётом равенства (1.4). При вычислении подобных интегралов (как и при получении указанных геометрических соотношений), считая оболочку достаточно тонкой, пренебрегают величинами порядка \tilde{h}/R_i ($i = 1, 2$) по сравнению с единицей. Коэффициентами в полученной таким образом линейной алгебраической связи между деформационными параметрами поверхности приведения оболочки и указанными внутренними силовыми факторами являются соответствующие жёсткости (среди которых жёсткости на растяжение, изгиб и кручение). Очевидно, что переход в рамках классической теории оболочек к случаю ортотропного материала сводится лишь к замене формул, служащих для вычисления соответствующих жесткостей.

Если тонкая оболочка имеет слоистую структуру с небольшими изменениями упругих характеристик по толщине, на неё также можно распространить рассмотренный классический подход [4]. Действительно, по той же причине, что и выше, можно принять за основу предположения (1.1) – (1.4). В результате, изменения коснутся лишь процедуры вычисления упомянутых жесткостных параметров. Эти параметры необходимо будет определять путём вычисления соответствующих интегралов по толщине с подынтегральными функциями, включающими зависимости упругих постоянных от координаты z .

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что принятие кинематических гипотез (1.2) не препятствует возможности определить на

заключительном этапе решения задачи сдвиговые напряжения σ_{13} , σ_{23} в слоях оболочки. Соответствующая процедура подробно описана в книге [4]. Она основана на интегрировании двух первых уравнений равновесия теории упругости по координате z .

Если материал оболочки оказывается податливым на поперечный сдвиг, то может появиться необходимость в использовании теории оболочек, построенной с учётом деформаций поперечного сдвига. Широко используемой в прикладных расчётах (в том числе применительно к расчётам композитных оболочек) является теория оболочек, основанная на гипотезе прямой линии Тимошенко. Общие положения этой теории изложены, например, в монографиях [52, 73].

В этой теории, как и в случае классического подхода, за основу принимаются кинематические связи (1.1). При этом связи (1.2) отбрасываются. В результате, в число независимых переменных задачи о деформации оболочки в рассматриваемой постановке наряду с перемещениями u_1^0 , u_2^0 , u_3^0 поверхности приведения включаются и параметры поворотов θ_1 , θ_2 . В выражении для работы напряжений на вариациях деформаций, в отличие от классического случая, сохраняются слагаемые, отражающие работу напряжений на вариациях деформаций поперечного сдвига. Получение уравнений равновесия рассматриваемой оболочки типа Тимошенко в терминах внутренних усилий и моментов осуществляется на основе сформулированного вариационного уравнения, проходя те же этапы, что и в классическом случае. Отличие лишь в том, что независимыми здесь являются вариации пяти указанных независимых кинематических факторов. Получение физических соотношений, связывающих деформационные параметры оболочки типа Тимошенко с соответствующими внутренними силовыми факторами (посредством упомянутых выше жесткостей) осуществляется в рамках процедуры, аналогичной классическому случаю. То же относится и к возможности рассматривать слоистые оболочки в рамках модели Тимошенко (что означает принятие гипотезы прямой линии для всего многослойного пакета в целом).

Описанная модель Тимошенко – это простейшая модель, позволяющая учесть деформации поперечного сдвига в оболочке (в том числе и слоистой структуры). К настоящему времени применительно к слоистым оболочкам построено множество теорий, с разной степенью точности учитывающих упомянутые поперечные сдвиги. Одни из этих теорий строятся на пути более высокоточного описания картины распределения перемещений по толщине многослойного пакета, другие – на принятии того или иного закона распределения касательных напряжений по толщине. Достаточно полную информацию по этим теориям дают публикации [4, 14, 32, 33, 34, 57, 77, 78, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 117, 119, 123]. Для целей настоящей работы важность таких теорий, учитывающих с повышенной степенью точности влияние поперечных сдвигов и других факторов, состоит в том, что с их помощью оказалось возможным получить оценки границ применимости более простых подходов (в том числе и классического подхода) к расчету как однослойных, так и слоистых оболочек. В частности, в монографии [4] представлены применительно к оболочке однослойной и трехслойной структуры (с $\tilde{h}/R = 1/10$) результаты расчетов, полученные с использованием классической расчетной модели и модели, учитывающей поперечные сдвиги. Проведенные в [4] применительно к однослойной оболочке исследования не выявили заметного различия результатов этих моделей даже в такой ситуации, когда отношение модуля Юнга к модулю поперечного сдвига равно 10. В случае слоистой оболочки (симметричной структуры), даже при условии десятикратного различия модулей Юнга слоев, оцененное различие результатов этих моделей не превышало 10 %.

В соответствии с очерченной во введении направленностью настоящей работы, кроме уже обсужденных типов слоистых оболочек необходимо также проанализировать и случай трехслойных оболочек с легким наполнителем. Наибольшее применение при расчете таких оболочек получила теория трехслойных оболочек, основанная на гипотезе ломаной линии [36] в сочетании с предположением о несжимаемости наполнителя по толщине. Достаточно полную информацию, касающуюся этой теории и ее приложений можно получить из

публикаций [25, 35, 38, 51, 52, 61, 62, 75, 76, 89, 114, 116, 118]. Принятие указанной гипотезы фактически означает, что каждый из несущих слоев обсуждаемого типа оболочки рассматривается (при выборе единой для всей оболочки поверхности приведения) как самостоятельная оболочка (однослойная или слоистая), для которой справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява и линейный закон типа (1.1) распределения перемещений по координате z . Заполнитель сопротивляется лишь поперечному сдвигу. При этом его сдвиговые деформации постоянны по толщине. Предполагаемая несжимаемость заполнителя означает, что нормальные перемещения u_3 постоянны по толщине всего трехслойного пакета и равны соответствующему перемещению u_3^0 поверхности приведения. В рамках принятых таким образом геометрических и физических соотношений вывод уравнений равновесия рассматриваемой трехслойной оболочки в терминах внутренних силовых факторов, а также уравнений, связывающих ее деформационные факторы с соответствующими внутренними силовыми факторами, осуществляется с использованием отмеченного вариационного уравнения, проходя те же этапы, что и в описанных выше случаях.

Остается отметить, что вопросы о границах применимости обсуждаемого варианта теории трехслойных оболочек рассматривались многими исследователями. В частности, для случая изотропных несущих слоев соответствующие оценки получены в работах [61, 62], для случая ортотропных несущих слоев – в работе [52], для случая несущих слоев из композиционных материалов – в работах [18, 56, 87, 89, 90]. Выполненные оценки показывают, что в интересующем нас случае трехслойных композитных конструкций, где в качестве заполнителя, как правило, применяются легкие типы пенопластов, использование при расчетах более простых (по сравнению с обсуждаемой) оболочечных моделей (в том числе основанной на гипотезе прямой линии для всего трехслойного пакета), может приводить к ошибочным результатам. Что касается вопроса о правомерности заложенного в обсуждаемую теорию предположения о несжимаемости заполнителя в случае, когда он оказывается легким, то здесь можно отметить следующее. Учет сжимаемости заполнителя

необходим в ситуациях, когда на трехслойные оболочки действуют приложенные к их внутренним или внешним поверхностям сосредоточенные поперечные силы, способные сжать наполнитель в поперечном направлении. Но в рассматриваемом классе композитных цилиндрических конструкций подобные случаи нагружения исключены. Все локальные нагрузки прикладываются к подобным конструкциям через подкрепляющие шпангоуты. И, таким образом, использование обсуждаемой теории трехслойных оболочек для такого класса конструкций представляется допустимым.

1.2. Методы решения задач о напряженно-деформированном состоянии замкнутых оболочек вращения при действии локальных нагрузок

Перейдем теперь к обсуждению методов решения задач о напряженно-деформированном состоянии локально нагруженных тонкостенных конструкций в рамках рассмотренных выше теорий оболочек. Как и ранее, будем ограничиваться случаем замкнутых оболочек вращения (к которым относятся заявленные в диссертации цилиндрические конструкции).

Как уже отмечалось, литература по проблеме расчёта локально нагруженных оболочек чрезвычайно обширна. Здесь представлены работы таких отечественных и зарубежных учёных, как В.З. Власов, Ю.Н. Работнов, В.М. Даревский, А.Л. Гольденвейзер, В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, В.И. Мяченков, Э.И. Григолюк, В.М. Толкачёв, И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, В.П. Ольшанский, П.П. Бийлард, Р.М. Купер, С. Лукасевич, K.W. Bieger, P. Cannata, L.S.D. Morley, F.K.G. Odkvist, K. Schiffner, L. Ting, S.W. Yuan и др. Среди развитых к настоящему времени аналитических подходов к расчету напряженно-деформированного состояния локально нагруженных оболочек можно выделить подходы, основанные на применении двойных и одинарных рядов Фурье, на сочетании одинарных рядов Фурье и одномерных преобразований Фурье, на применении двумерных преобразований Фурье, на применении преобразований Лапласа, а также на применении различных вариантов асимптотических методов [5, 7, 21, 24, 43, 44, 54, 59, 65, 66, 70, 71, 72, 84, 97 и др.].

Что касается проблемы расчета аналитическими методами заявленных в диссертации конструкций в виде подкрепленных шпангоутами (и локально нагруженных через эти шпангоуты) композитных цилиндрических оболочек, то здесь можно указать на работы А.Б. Миткевича, И.А. Егоренкова, В.Д. Протасова, С.Н. Сухина, З.М. Носовой, А.И. Отвечалина [60, 68, 69], где удалось получить приближенные аналитические решения ряда подобного типа задач.

Так, в работах [60, 68] для случая стеклопластиковой цилиндрической оболочки с локально нагруженными шпангоутами получено приближенное аналитическое решение, основанное на теории тонких упругих колец с недеформируемым поперечным сечением и теории тонких ортотропных цилиндрических оболочек, соотношения которой существенным образом упрощены на основе принятия полубезмоментной гипотезы В.З. Власова [24]. В работе [69] получено аналогичное приближенное аналитическое решение для случая стеклопластиковой трехслойной (с легким наполнителем) цилиндрической конструкции со шпангоутами. Решение основано на упомянутой теории колец и теории трехслойных (с легким несжимаемым по толщине наполнителем) оболочек, построенной на гипотезе ломаной линии [36], соотношения которой существенно упрощены с принятием полубезмоментной гипотезы В.З. Власова. Как уже отмечалось во введении, к серьезным недостаткам указанных приближенных аналитических решений относится то, что они не позволяют вычислить значения изгибных меридиональных деформаций (и напряжений) в узких зонах стыков оболочки с нагруженными шпангоутами (в зонах краевых эффектов). Этими деформациями можно пренебрегать (в соответствии с гипотезой Власова) при расчете параметров основного напряженного состояния обсуждаемых конструкций. Но без знания уровня этих деформаций затруднительно делать выводы, касающиеся прочности таких конструкций.

Из сказанного следует, что для получения полной картины напряженно-деформированного состояния обозначенных локально нагруженных композитных конструкций, включая и отмеченные зоны краевых эффектов, соответствующие расчеты необходимо строить, основываясь на полной системе соотношений

теории оболочек (однослойных или трехслойных) без привлечения дополнительных упрощающих гипотез. Но в такой общей постановке построение (точного) аналитического решения соответствующей задачи о напряжённом состоянии не представляется возможным, и, значит, искомое решение следует пытаться строить, опираясь на численные методы.

Переходя к обсуждению возможностей известных методов численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии как применительно к отдельным оболочкам вращения, так и конструкциям, составленным из таких оболочек и подкрепляющих колец (шпангоутов), остановимся сначала на подходах, учитывающих осевую симметрию рассчитываемых конструкций.

В случае осесимметричной оболочечной конструкции, находящейся под действием неосесимметричной системы нагрузок, решение соответствующей задачи можно искать с использованием процедуры разложения параметров напряженно-деформированного состояния в ряды Фурье по окружной координате α_2 . Подставляя подобные разложения в соотношения указанной задачи, можно для каждого номера гармоники n получить систему линейных обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений относительно амплитудных значений параметров напряженно-деформированного состояния. В результате при каждом фиксированном значении n можно прийти к формулировке в виде одномерной (по меридиональной координате α_1) краевой задаче, порядок которой зависит от принятого варианта теории оболочек. В случае классического варианта теории оболочек это восьмой порядок, в случае теории типа Тимошенко – десятый. Окончательное решение получают путем суммирования результатов решений для отдельных гармоник.

Центральным звеном в описанной схеме решения рассматриваемой задачи о напряжённо-деформированном состоянии является процедура решения указанной одномерной краевой задачи, которая может быть реализована как с использованием конечно-разностных схем [28, 85], так и схем численного интегрирования [1, 13, 27, 53]. Именно на основе подобных схем, начиная со второй половины шестидесятых годов прошлого века, стали (как в нашей стране,

так и за рубежом) создаваться алгоритмы и программы расчета применительно к различного типа оболочечным конструкциям. Первые из разработанных подобным образом на основе методов конечных разностей и численного интегрирования программ были ориентированы на случаи изотропных оболочек. В последующие годы были развиты также версии указанных программ применительно к различным случаям анизотропных оболочек, включая и случаи оболочек слоистой структуры.

Примерами конечно-разностных разработок по обсуждаемому направлению являются алгоритмы, представленные в работах [48, 107, 108], которые ориентированы на решение широких классов задач напряжённо-деформированном состоянии осесимметричных оболочечных конструкций. Если в [107, 108] конечно-разностная схема применена непосредственно к системе дифференциальных уравнений упомянутой одномерной краевой задачи, то, в отличие от этого, в [48] использован вариационно-разностный подход, при котором разрешающая система алгебраических уравнений относительно амплитудных значений перемещений в узловых точках меридиана оболочечной конструкции получается на основе соответствующего вариационного уравнения. При этом в качестве интерполяционных функций используются кубические сплайны [2].

Примерами разработок по обсуждаемому направлению с использованием схем численного интегрирования являются алгоритмы и программные реализации, представленные в работах [15, 17, 39, 40, 41, 42, 49, 63, 120], которые охватывают широкие спектры задач о деформации осесимметричных оболочечных конструкций. Следует отметить, что дифференциальные уравнения, подвергаемые в рамках этих алгоритмов численному интегрированию, в своих решениях содержат быстро растущие и быстро убывающие компоненты. По этой причине в случае значительной протяженности участка интегрирования, если не предпринимать ни каких дополнительных мер, следует ожидать заметную потерю точности в получаемом численном решении вплоть до полной потери этой точности. Известны ряд способов по предотвращению описанного негативного

эффекта в процессе численного интегрирования [1, 13, 27]. Наибольшее распространение в известных алгоритмах расчета напряжённо-деформированного состояния осесимметричных оболочечных конструкций [39, 40, 41, 42, 49, 63] получил при этом метод С.К. Годунова [27]. Этот метод еще называют методом ортогональной прогонки. При его использовании в выбранных промежуточных точках участка интегрирования осуществляется процедура ортонормирования получаемого в процессе численного интегрирования набора частных решений системы дифференциальных уравнений.

Используемая в работах [39, 40, 41, 42, 49, 63] схема численного интегрирования в форме ортогональной прогонки придавала соответствующему алгоритму свойство универсальности, позволяющее легко перенастраивать программу расчета в случае изменения системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение оболочки. Этому свойству были лишены конечно-разностные алгоритмы. Преимущество указанной схемы ортогональной прогонки состояло также еще и в том, что, как показала многочисленная расчетная практика, этот метод при использовании высокоточных схем численного интегрирования (типа Рунге-Кутты) позволял получать результаты, совпадающие с соответствующими аналитическими решениями с точностью до многих значащих цифр (т.е. практически получать точное решение поставленной задачи).

Начиная с семидесятых годов прошлого века, в связи с появлением более мощных ЭВМ, в практике расчета обсуждаемых оболочечных конструкций все шире стали использоваться сеточные методы, позволяющие решать соответствующие краевые задачи как в двумерной (в случае оболочечных теорий), так и трехмерной (в рамках теории упругости) постановках. Это методы конечных разностей [20, 26, 28, 83] и конечных элементов [9, 11, 12, 16, 29, 30, 47, 79, 80, 85, 124, 125, 126]. При этом в случае конечных разностей, алгоритмы основанные на классических разностных схемах с равномерными прямоугольными сетками, не получили широкого распространения. Они не позволяли осуществлять локальные сгущения сетки в наиболее напряженных зонах рассчитываемой конструкции. Подобные сгущения, однако, оказались легко

реализуемыми в рамках вариационно-разностного [8, 19, 58] и конечно-элементного подходов, которые во многом сходны и, в частности, в том, что основываются на вариационной (описанной в предыдущем разделе) формулировке задачи о напряженно-деформированном состоянии рассчитываемой конструкции с выбором перемещений в дискретных точках конструкции (узловых перемещений) в качестве независимых переменных строящейся расчетной модели. Высокая универсальность конечно-элементного подхода привела к тому, что именно на его основе стали разрабатываться мощные вычислительные комплексы, ориентированные на анализ поведения конструкций практически любой степени сложности. К настоящему времени такие комплексы внедрены в расчетную практику всех крупных организаций, занимающихся вопросами проектирования в области новейшей техники.

Что касается указанных выше программных комплексов, основанных на методе численного интегрирования с отличающимися их уникальными возможностями, то они, лишенные поддержки со стороны разработчиков, перестали совершенствоваться, что сделало затруднительным их использование в расчетной практике. В настоящее время ситуация такова, что многие из этих программ в связи с переходом к новым более совершенным поколениям ЭВМ требуют по сути новой программной реализации.

Теперь что касается возможностей рассмотренных вычислительных подходов получать надежные результаты по прогнозу упоминавшихся (и важных для оценки прочности рассматриваемых конструкций) значений изгибных меридиональных деформаций (и напряжений) в узких зонах стыков оболочки с локально нагруженными шпангоутами (в зонах краевых эффектов). Несмотря на имеющиеся мощные инструменты численного моделирования в виде программных комплексов метода конечных элементов, в литературе к настоящему времени не представлены результаты расчётов напряжённо-деформированного состояния (с подтверждённой достоверностью) по указанным зонам в обсуждаемых конструкциях. Дело в том, что применение таких комплексов для получения значений деформаций и напряжений в

рассматриваемых локально нагруженных конструкциях в узких зонах краевых эффектов сталкивается с существенными трудностями того же характера, что и при решении других аналогичного типа задач с концентрацией напряжений. На имеющиеся здесь проблемы вычислительного характера указано, например, в работах [10, 50]. Основная проблема при конечно-элементном решении рассматриваемого типа задач состоит в обеспечении сходимости получаемых (путем последовательного измельчения сетки конечных элементов) числовых результатов к предполагаемому точному решению задачи во всех точках, включая зоны концентрации напряжений. Следует заметить, что даже при выборе достаточно крупной сетки конечных элементов можно получить хорошее согласование результатов конечно-элементного моделирования с результатами упомянутых приближенных аналитических решений (отражающих основное состояние рассматриваемой деформируемой конструкции), поскольку на эти результаты не влияет ситуация, имеющая место в зонах краевых эффектов. Это указывает на подстерегающую расчетчика при конечно-элементном моделировании подобных конструкций опасность ошибочно принять сходящиеся по основному состоянию расчетные результаты в качестве результатов, близких к точному решению на всех участках конструкции (включая зоны краевых эффектов). Из сказанного ясно, что в практических расчетах рассматриваемых здесь протяженных локально нагруженных конструкций в условиях отсутствия четкого критерия, касающегося сходимости результатов конечно-элементного моделирования к предполагаемому точному решению во всех точках конструкции, трудно полагаться на надежность полученных расчетных результатов, если они протестированы (как это распространено в расчетной практике) лишь путем сравнения нескольких вариантов расчетов с выбором различных сеток.

Представляется, что в такой ситуации надежным применительно к рассматриваемой задаче о напряженно-деформированном состоянии следует считать тот результат ее численного решения, который может быть подтвержден решением этой же задачи на основе какого-либо другого численного метода. В

качестве примеров использования подобного критерия для подтверждения надежности получаемого численного решения можно привести работы [23, 46], где представлены результаты численного моделирования замкнутых цилиндрических оболочек под действием локально приложенных к их поверхностям поперечных нагрузок. В работе [46] результаты расчета на основе метода численного интегрирования подтверждаются путем сравнения с конечно-элементным решением, а в работе [23] – путем сравнения с результатами разработанного автором мультипликативного метода [22].

1.3. Формулировка подхода к построению методики расчета локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических конструкций

На основе представленного выше обсуждения можно сделать следующие выводы.

Применяемые в различных отраслях экономики усиленные шпангоутами композитные цилиндрические оболочки могут иметь как практически однородную по толщине структуру (и представлять собой однослойные ортотропные оболочки), так и быть многослойными (набранными из ортотропных слоев). Указанные оболочки могут быть также трехслойными, состоящими из двух композитных (несущих) слоев и расположенного между ними сравнительно толстого маложесткого и малоплотного слоя заполнителя. Передача локальных нагрузок на такие конструкции в процессе эксплуатации осуществляется через шпангоуты.

Разрушение подобных конструкций под действием приложенных к шпангоутам локальных нагрузок может происходить как вследствие высокого уровня напряжений в самих нагруженных шпангоутах, так и вследствие высокого уровня напряжений изгибаемого характера в оболочке в зоне стыка с нагруженным шпангоутом.

Имеющаяся практика расчета композитных оболочек (несмотря на повышенную податливость композитов на поперечный сдвиг) убеждает в допустимости использования при расчёте напряжённо-деформированного

состояния тонких композитных оболочек (как однослойных, так и слоистых) соотношений классической теории оболочек, основанной на гипотезе единой нормали. Та же практика убеждает в допустимости использования при расчетах локально нагруженных через подкрепляющие шпангоуты тонких трехслойных (с легким наполнителем) композитных оболочек соотношений теории оболочек, построенной на гипотезе ломаной линии в сочетании с предположением о несжимаемости наполнителя по толщине.

Несмотря на огромное количество публикаций, посвященных аналитическим методам расчета локально нагруженных тонких упругих оболочек, обнаруживается лишь небольшое число работ, где удалось получить (с использованием полубезмоментной гипотезы В.З. Власова) приближенные аналитические решения задач о напряжённо-деформированном состоянии конструкций в виде подкрепленных шпангоутами (и локально нагруженных через эти шпангоуты) композитных цилиндрических оболочек (в том числе и трехслойных с легким наполнителем). Однако эти приближенные решения не позволяют вычислить значения изгибных меридиональных деформаций (и напряжений) в узких зонах стыков оболочки с нагруженными шпангоутами (в зонах краевых эффектов). А без знания уровня этих деформаций затруднительно делать выводы, касающиеся прочности таких конструкций.

Получить точные аналитические решения обсуждаемых задач для локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических конструкций, которые позволяли бы рассчитывать упомянутые деформации и напряжения в указанных зонах краевых эффектов, основываясь на полных системах уравнений соответствующих теорий оболочек (построенных на гипотезе единой нормали или ломаной линии), не представляется возможным. Выход из такой ситуации можно искать на пути использования численных методов. В частности, можно обратиться к таким мощным инструментам численного моделирования, как современные программные комплексы метода конечных элементов.

Однако при этом следует иметь в виду, что при конечно-элементном решении рассматриваемого типа задач о локальном нагружении (как и при

использовании любого другого численного метода) занимающийся расчетом исследователь должен обеспечить сходимость получаемых (путем последовательного измельчения используемой расчетной сетки) числовых результатов к предполагаемому точному решению задачи во всех точках исследуемой конструкции, включая зоны концентрации напряжений. В отсутствие четкого критерия сходимости результатов численного моделирования к упомянутому точному решению, достоверным применительно к рассматриваемой задаче о напряжённо-деформированном состоянии представляется тот результат ее численного решения, который может быть подтвержден решением этой же задачи на основе какого-либо другого численного метода.

В качестве альтернативного метода численного решения рассматриваемого типа задач с локальными нагрузками целесообразно использовать метод численного интегрирования в варианте ортогональной прогонки, который (как показала обширная практика его применения) позволяет получать на тестовых задачах о деформации оболочек вращения результаты, совпадающие с соответствующими аналитическими решениями с точностью до многих значащих цифр.

Учитывая сказанное, предполагаемую методику расчета локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических конструкций будем строить в рамках следующего подхода:

- в качестве объекта моделирования принимаем неосесимметрично нагруженную тонкостенную цилиндрическую конструкцию, составленную из последовательно соединенных между собой цилиндрических оболочек и круговых колец (шпангоутов); при этом ограничений на количество оболочек и колец в расчетной схеме не накладываем;

- считаем, что входящие в расчетную схему цилиндрические оболочки относятся к двум типам: это оболочки, рассчитываемые на основе теории оболочек с гипотезой единой нормали, и оболочки (трехслойные с легким

несжимаемым по толщине заполнителем), рассчитываемые на основе теории трехслойных оболочек с гипотезой ломаной линии;

– шпангоуты рассматриваем или как короткие цилиндрические оболочки, или в рамках теории круговых колец с недеформируемым поперечным сечением;

– считаем, что упомянутые оболочки первого типа могут быть как однослойными ортотропными, так и набранными из ортотропных слоев; то же самое относится и к несущим слоям оболочек второго типа;

– используем процедуру разложения приложенных нагрузок и параметров напряженно-деформированного состояния в ряды Фурье по окружной координате;

– для решения полученной при каждом фиксированном номере гармоники Фурье-разложения совокупности краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (по меридиональной координате) используем метод численного интегрирования в варианте ортогональной прогонки;

– строим на этой основе вычислительную модель для расчета локально нагруженной через шпангоуты композитной цилиндрической конструкции и реализуем эту модель в виде компьютерной программы;

– строим с использованием какого-либо из известных программных комплексов (например, «*Abaqus*») конечно-элементную модель для расчета напряжённо-деформированного состояния той же конструкции;

– факт достоверности получаемого численного решения рассматриваемой задачи (в том числе и в зонах краевых эффектов) подтверждаем, добиваясь согласования результатов расчетов по указанным двум вычислительным моделям.

2. ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТЫ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Здесь будет дана постановка задачи о деформации рассматриваемого типа композитных цилиндрических конструкций под действием локальных нагрузок, приложенных к шпангоутам, и представлен основанный на методе численного интегрирования алгоритм ее численного решения, реализованный в виде программы на языке Фортран-90. Используемые при этом соотношения теорий цилиндрических оболочек и круговых колец принимаются в виде, представленном в книге [49], где соответствующие уравнения равновесия получены на основе (вариационного) принципа возможных перемещений по схеме, изложенной выше в разделе 1.1. Будет также дана краткая информация, касающаяся характеристик оболочечных и объемных элементов программного комплекса «*Abaqus*», используемого в настоящей работе при конечно-элементном моделировании рассматриваемого типа конструкций.

Криволинейные ортогональные координаты α_i ($i = 1, 2, 3$), принятые в разделе 1.1 для описания деформированного состояния оболочек как тел вращения, в рассматриваемом случае цилиндрических оболочек и круговых колец выбираются следующим образом. Принимаем $\alpha_1=x$, где x – координата, задающая положение точки вдоль оси вращения x , отсчитываемая в случае оболочки от её левого торца, а в случае кольца от его срединной окружности. В качестве α_2 принимаем угловую координату в окружном направлении. Принимаем также $\alpha_3=z$ в случае оболочки и $\alpha_3=r$ в случае кольца, где z и r – координаты, отсчитываемые в радиальном направлении соответственно от поверхности приведения оболочки и срединной окружности кольца.

2.1. Постановка задачи о напряженно-деформированном состоянии тонкостенной цилиндрической конструкции, составленной из колец и слоистых, а также трехслойных с легким наполнителем оболочек

2.1.1. Уравнения основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява теории слоистых ортотропных цилиндрических оболочек

Пусть u , v , w – перемещения точки поверхности приведения рассматриваемой цилиндрической оболочки в направлениях принятых координатных линий $\alpha_1=x$, α_2 , $\alpha_3=z$. Тогда для перемещений U , V , W точек, отличающихся от обозначенной точки ненулевой координатой z , в соответствии с гипотезой единой нормали можно записать

$$U=u+z\theta_1, V=v+z\theta_2, W=w, \quad (2.1)$$

где углы поворотов θ_1 и θ_2 (см. рисунок 2.1) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -w', \quad \theta_2 = -w^* + v/R, \\ (\dots)' &= \frac{\partial(\dots)}{\partial x}, \quad (\dots)^* = \frac{1}{R} \frac{\partial(\dots)}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее R – радиус поверхности приведения цилиндрической оболочки.

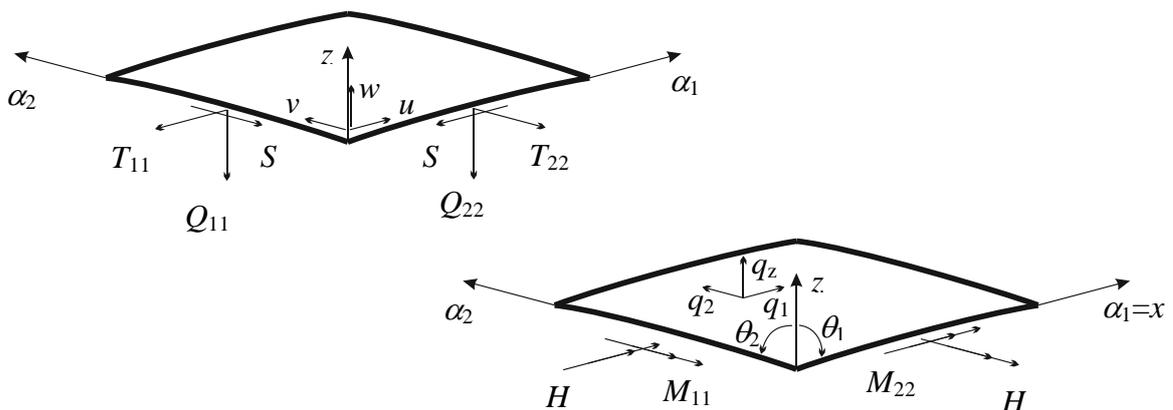


Рисунок 2.1 – Элемент оболочки в выбранной системе координат

Для относительных удлинений $\varepsilon_{11}(z)$, $\varepsilon_{22}(z)$ и сдвигов $\varepsilon_{12}(z)$ в точках оболочки с ненулевой координатой z в предположении пренебрежимой малости параметра z/R по сравнению с единицей можно получить

$$\varepsilon_{11}(z)=E_{11}+zK_{11}, \varepsilon_{22}(z)=E_{22}+zK_{22}, \varepsilon_{12}(z)=E_{12}+2zK_{12}. \quad (2.3)$$

Здесь E_{11} , E_{22} , E_{12} , K_{11} , K_{22} , K_{12} – соответственно удлинения, сдвиг, изменения кривизн и кручение поверхности приведения оболочки, которые представимы в виде

$$\begin{aligned} E_{11} &= u', & E_{22} &= v' + w/R, & E_{12} &= v' + u', \\ K_{11} &= \theta_1', & K_{22} &= \theta_2', & K_{12} &= \theta_1' + v' / R. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Деформациям (2.3) в точках оболочки соответствуют напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} . Считая материал оболочки линейно упругим и ортотропным, исходя из предположения о плосконапряжённом её состоянии, можно получить соотношения, связывающие указанные напряжения и деформации, а именно

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}) \quad (1 \Leftrightarrow 2), \\ \sigma_{12} &= G_{12}\varepsilon_{12}, \quad (E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где E_1 , E_2 – модули Юнга, G_{12} – модуль сдвига, ν_{21} , ν_{12} – коэффициенты Пуассона.

Осуществляя операцию приведения напряжений, имеющих место в оболочке, к соответствующим усилиям T_{11} , T_{22} , S и моментам M_{11} , M_{22} , H (см. рисунок 2.1) относительно выбранной поверхности приведения (с $z=0$) и используя при этом связи (2.5) и (2.3), в предположении пренебрежимой малости параметра z/R по сравнению с единицей можно получить соотношения

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}E_{11} + B_{12}E_{22} + A_{11}K_{11} + A_{12}K_{22} \quad (1 \Leftrightarrow 2), \\ S &= B_{33}E_{12} + 2A_{33}K_{12}, \\ M_{11} &= A_{11}E_{11} + A_{12}E_{22} + D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22} \quad (1 \Leftrightarrow 2), \\ H &= A_{33}E_{12} + 2D_{33}K_{12}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

связывающие указанные усилия и моменты с деформациями и изменениями кривизн поверхности приведения.

В соотношениях (2.6) коэффициенты (жёсткости) B_{ij} , A_{ij} , D_{ij} определяются выражениями

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \int_h \tilde{E}_1 dz, & B_{12} &= \int_h \tilde{E}_1 \nu_{21} dz \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\
A_{11} &= \int_h \tilde{E}_1 z dz, & A_{12} &= \int_h \tilde{E}_1 \nu_{21} z dz \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\
D_{11} &= \int_h \tilde{E}_1 z^2 dz, & D_{12} &= \int_h \tilde{E}_1 \nu_{21} z^2 dz \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\
B_{33} &= \int_h G_{12} dz, & A_{33} &= \int_h G_{12} z dz, & D_{33} &= \int_h G_{12} z^2 dz; \\
\tilde{E}_1 &= E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (1 \rightleftharpoons 2),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где соответствующие интегралы вычисляются по толщине h оболочки.

Если в качестве поверхности приведения взять срединную поверхность оболочки, то, вычисляя интегралы в формулах (2.7), можно получить

$$\begin{aligned}
A_{11} &= A_{12} = A_{21} = A_{22} = A_{33} = 0; \\
B_{11} &= \tilde{E}_1 h, & B_{12} &= \nu_{21} B_{11} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\
D_{11} &= B_{11} h^2 / 12, & D_{12} &= \nu_{21} D_{11} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\
B_{33} &= G_{12} h, & D_{33} &= B_{33} h^2 / 12.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

При выборе в качестве поверхности приведения внутренней поверхности оболочки вместо (2.8) можно получить

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \tilde{E}_1 h, & B_{12} &= \nu_{21} B_{11} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\
A_{11} &= B_{11} h / 2, & A_{12} &= \nu_{21} A_{11} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\
D_{11} &= B_{11} h^2 / 3, & D_{12} &= \nu_{21} D_{11} \quad (1 \rightleftharpoons 2); \\
B_{33} &= G_{12} h, & A_{33} &= B_{33} h / 2, & D_{33} &= B_{33} h^2 / 3.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Аналогичным образом, вычисляя интегралы (2.7), можно получить соответствующие формулы и для определения искомых жесткостей применительно к случаю слоистой оболочки (составленной из заданного числа ортотропных слоёв).

Пусть вдоль левого и правого торцевого контура оболочки приложены отнесённые к единице длины контура усилия и моменты, а именно: нормальное усилие T_{11}^* , сдвигающее усилие T_{12}^* , перерезывающее усилие Q_{11}^* и изгибающий момент M_{11}^* , положительные направления которых совпадают с положительными

направлениями соответствующих внутренних усилий и моментов, представленных на рисунке 2.1. На указанных торцевых контурах могут быть также заданы значения перемещений точек поверхности приведения u^* , v^* , w^* и поворота θ_1^* нормали к ней. Помимо контурных нагрузок на оболочку могут действовать также распределённые по поверхности нагрузки с интенсивностями q_1 , q_2 , q_z (см. рисунок 2.1).

Из вариационного уравнения принципа возможных перемещений с учётом принятых гипотез и допущений можно получить систему дифференциальных уравнений равновесия для рассматриваемой цилиндрической оболочки в виде

$$\begin{aligned} T_{11}' + S^\bullet + q_1 &= 0, \\ S' + T_{22}^\bullet + (M_{22}^\bullet + 2H') / R + q_2 &= 0, \\ Q_{11}' + Q_{22}^\bullet - T_{22} / R + q_z &= 0, \\ M_{11}' + H^\bullet - Q_{11} &= 0, \\ M_{22}^\bullet + H' - Q_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Решение задачи о напряжённом состоянии оболочки с использованием уравнений равновесия (2.10) предполагает задание соответствующих граничных условий на её торцах. Это могут быть кинематические граничные условия вида

$$u=u^*, v=v^*, w=w^*, \theta_1=\theta_1^* \quad (2.11)$$

и статические граничные условия вида

$$T_{11} = T_{11}^*, \quad S + 2H/R = T_{12}^*, \quad Q_{11} + H^\bullet = Q_{11}^*, \quad M_{11} = M_{11}^*. \quad (2.12)$$

Соотношения (2.2), (2.4), (2.6), (2.10) представляют собой полную систему из 19 дифференциальных и алгебраических уравнений относительно 19 неизвестных функций u , v , w , θ_1 , θ_2 , E_{11} , E_{22} , E_{12} , K_{11} , K_{22} , K_{12} , T_{11} , T_{22} , S , M_{11} , M_{22} , H , Q_{11} , Q_{22} . Эта система может быть однозначно решена при заданных на торцах оболочки граничных условиях типа (2.11), (2.12). После её решения деформации и напряжения в точках оболочки могут быть вычислены по формулам (2.3), (2.5).

2.1.2. Уравнения основанной на гипотезе ломаной линии теории трехслойных цилиндрических оболочек с легким несжимаемым по толщине наполнителем

Перейдем теперь к формулировке задачи о напряженно-деформированном состоянии применительно к случаю трехслойной цилиндрической оболочки с легким несжимаемым по толщине наполнителем. Как указывалось в разделе 1.1, принятие в таком случае гипотезы ломаной линии фактически означает, что каждый из несущих слоев оболочки рассматривается (при выборе единой для всей оболочки поверхности приведения) как самостоятельная оболочка (однослойная или слоистая), для которой справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява и линейный закон типа (2.1) распределения перемещений по координате z . Заполнитель сопротивляется лишь поперечному сдвигу. При этом его сдвиговые деформации постоянны по толщине. Предполагаемая несжимаемость наполнителя означает, что нормальные перемещения постоянны по толщине всего трехслойного пакета и равны соответствующему перемещению w поверхности приведения. Из сказанного следует, что соотношения теории трехслойных цилиндрических оболочек с легким несжимаемым наполнителем могут быть представлены в форме, аналогичной записям (2.1) – (2.7), (2.10) – (2.12).

Пусть 1 и 3 – номера нижнего и верхнего несущих слоев оболочки, а 2 – номер слоя наполнителя. Будем обозначать толщины указанных слоев как h_1, h_2, h_3 .

Пусть z_0 – значение координаты z внутренней поверхности трёхслойной оболочки. Введём в рассмотренные параметры z_i ($i = 1, 2, 3$), вычисляемые по схеме

$$z_i = z_{i-1} + h_i. \quad (2.13)$$

Тогда принадлежность точки с координатой z i -му слою ($i = 1, 2, 3$) можно сформулировать в виде

$$z_{i-1} \leq z \leq z_i. \quad (2.14)$$

По аналогии с соотношениями (2.2), учитывая (2.14), для перемещений j -го несущего слоя трёхслойной оболочки ($j = 1, 3$) можно записать

$$U^j = u^j + z\theta_1, \quad V^j = v^j + z\theta_2^j, \quad W^j = w, \quad (2.15)$$

где

$$\theta_1 = -w', \quad \theta_2^j = -w^* + v^j/R. \quad (2.16)$$

По аналогии с записями (2.3), (2.4), учитывая (2.14), соответствующие деформационные соотношения для j -го несущего слоя трёхслойной оболочки ($j = 1, 3$), можно сформулировать в виде

$$\varepsilon_{11}^j(z) = E_{11}^j + zK_{11}^j, \quad \varepsilon_{22}^j(z) = E_{22}^j + zK_{22}^j, \quad \varepsilon_{12}^j(z) = E_{12}^j + 2zK_{12}^j, \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} E_{11}^j &= (u^j)', & E_{22}^j &= (v^j)^* + w/R, & E_{12}^j &= (v^j)' + (u^j)^*, \\ K_{11}^j &= \theta_1', & K_{22}^j &= (\theta_2^j)^*, & K_{12}^j &= \theta_1^* + (v^j)'/R. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Соотношения, связывающие напряжения с деформациями для j -го несущего слоя трёхслойной оболочки ($j = 1, 3$), сохраняют вид (2.5). То же самое относится и к соотношениям (2.6), устанавливающим связи усилий и моментов в несущих слоях с соответствующими деформационными параметрами. Отмечая факторы, входящие в соотношения (2.6) индексом j ($j = 1, 3$), получим

$$\begin{aligned} T_{11}^j &= B_{11}^j E_{11}^j + B_{12}^j E_{22}^j + A_{11}^j K_{11}^j + A_{12}^j K_{22}^j \quad (1 \rightleftharpoons 2), \\ S^j &= B_{33}^j E_{12}^j + 2A_{33}^j K_{12}^j, \\ M_{11}^j &= A_{11}^j E_{11}^j + A_{12}^j E_{22}^j + D_{11}^j K_{11}^j + D_{12}^j K_{22}^j \quad (1 \rightleftharpoons 2), \\ H^j &= A_{33}^j E_{12}^j + 2D_{33}^j K_{12}^j. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Входящие в соотношения (2.19) жесткости j -го слоя вычисляются по схеме (2.7). Соответствующие интегралы в (2.7) берутся по толщине h_j j -го несущего слоя (по z в пределах от z_{j-1} до z_j). В частности, если упругие характеристики материала постоянны по толщине j -го слоя, то по формулам (2.7) для обсуждаемых жесткостей можно получить

$$\begin{aligned} B_{11}^j &= \tilde{E}_1^j h_j, & B_{12}^j &= \nu_{21}^j B_{11}^j \quad (1 \rightleftharpoons 2), \\ A_{11}^j &= \tilde{E}_1^j (z_j^2 - z_{j-1}^2)/2, & A_{12}^j &= \nu_{21}^j A_{11}^j \quad (1 \rightleftharpoons 2), \\ D_{11}^j &= \tilde{E}_1^j (z_j^3 - z_{j-1}^3)/3, & D_{12}^j &= \nu_{21}^j D_{11}^j \quad (1 \rightleftharpoons 2), \\ B_{33}^j &= G_{12}^j h_j, & A_{33}^j &= G_{12}^j (z_j^2 - z_{j-1}^2)/2, & D_{33}^j &= G_{12}^j (z_j^3 - z_{j-1}^3)/3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Несложно получить аналогичные формулы и для случая, когда несущий слой составлен из заданного числа ортотропных слоёв (случай несущего слоя слоистой структуры).

Используя принцип возможных перемещений применительно к рассматриваемому случаю трёхслойной цилиндрической оболочки, получаем соответствующие дифференциальные уравнения равновесия в терминах усилий и моментов в форме, аналогичной записи (2.10), а именно

$$\begin{aligned}
 (T_{11}^j)' + (S^j)^\bullet + q_1^1 \delta_j^1 + q_1^3 \delta_j^3 + \sigma_{13}^2 \delta_j^1 - \sigma_{13}^2 \delta_j^3 &= 0, \\
 (S^j)' + (T_{22}^j)^\bullet + [(M_{22}^j)^\bullet + 2(H^j)'] / R + q_2^1 \delta_j^1 + q_2^3 \delta_j^3 + \sigma_{23}^2 \delta_j^1 - \sigma_{23}^2 \delta_j^3 &= 0, \\
 Q_{11}' + Q_{22}^\bullet - (\sum_j T_{22}^j) / R + q_z &= 0, \quad (j=1, 3), \\
 M_{11}' + H^\bullet - Q_{11} &= 0, \\
 M_{22}^\bullet + H' - Q_{22} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь:

$$M_{11} = \sum_j M_{11}^j, \quad M_{22} = \sum_j M_{22}^j, \quad H = \sum_j H^j; \tag{2.22}$$

δ_j^i – символ Кронекера такой что

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j; \\ 0, & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

q_1^j, q_2^j ($j = 1, 3$) – интенсивности поверхностных сил, приложенных к несущим слоям;

$\sigma_{13}^2, \sigma_{23}^2$ – сдвиговые напряжения в слое заполнителя, для которых имеют место соотношения упругости вида

$$\sigma_{13}^2 = G_{13}^2 \varepsilon_{13}^2, \quad \sigma_{23}^2 = G_{23}^2 \varepsilon_{23}^2, \tag{2.23}$$

где G_{13}^2, G_{23}^2 – модули сдвига заполнителя,

$\varepsilon_{13}^2, \varepsilon_{23}^2$ – сдвиговые деформации в заполнителе, определяемые через перемещения несущих слоёв формулами

$$\varepsilon_{13}^2 = (u^3 - u^1) / h_2, \quad \varepsilon_{23}^2 = (v^3 - v^1) / h_2. \tag{2.24}$$

По аналогии с записями (2.11), (2.12) кинематические граничные условия на торцах трёхслойной оболочки формулируются в виде

$$u^j = u^{*j}, v^j = v^{*j}, w = w^*, \theta_1 = \theta_1^* \quad (2.25)$$

а статические – в виде

$$T_{11}^j = T_{11}^{*j}, \quad S^j + 2H^j/R = T_{12}^{*j}, \quad Q_{11} + H^{\bullet} = Q_{11}^*, \quad M_{11} = M_{11}^*. \quad (2.26)$$

При этом $j = 1, 3$.

Соотношения (2.16), (2.18), (2.19), (2.21) – (2.24) представляют собой полную систему из 41 дифференциальных и алгебраических уравнений относительно 41 неизвестных функций $u^j, v^j, w, \theta_1, \theta_2^j, E_{11}^j, E_{22}^j, E_{12}^j, K_{11}^j, K_{22}^j, K_{12}^j, T_{11}^j, T_{22}^j, S^j, M_{11}^j, M_{22}^j, H^j, Q_{11}, Q_{22}, M_{11}, M_{22}, H, \sigma_{13}^2, \sigma_{23}^2, \varepsilon_{13}^2, \varepsilon_{23}^2, (j = 1, 3)$.

Эта система может быть однозначно решена при заданных на торцах оболочки граничных условиях типа (2.25), (2.26). После её решения деформации и напряжения в точках несущих слоёв оболочки могут быть вычислены по формулам (2.17), (2.5), а сдвиговые деформации и напряжения в заполнителе – по формулам (2.24), (2.23).

2.1.3. Уравнения теории круговых колец с недеформируемым поперечным сечением применительно к рассматриваемому случаю тонкостенной цилиндрической конструкции со шпангоутами

Рассмотрим теперь круговое кольцо с прямоугольным поперечным сечением, размеры которого малы по сравнению с радиусом r_k срединной окружности кольца. Схема такого кольца показана на рисунке 2.2.

Предполагая, что в процессе деформации кольца под действием приложенных нагрузок каждое его поперечное сечение (при $\alpha_2 = const$) остаётся плоским и недеформируемым в своей плоскости, для перемещений U, V, W произвольной точки кольца можно записать

$$\begin{aligned} U &= u_k(\alpha_2) + \alpha_3 \varphi(\alpha_2), \\ V &= v_k(\alpha_2) + \alpha_1 \varphi_1(\alpha_2) + \alpha_3 \varphi_2(\alpha_2), \\ W &= w_k(\alpha_2) - \alpha_1 \varphi(\alpha_2), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где u_k, v_k, w_k – перемещения срединной окружности кольца,
 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ – углы поворота его поперечного сечения (см. рисунок 2.2).

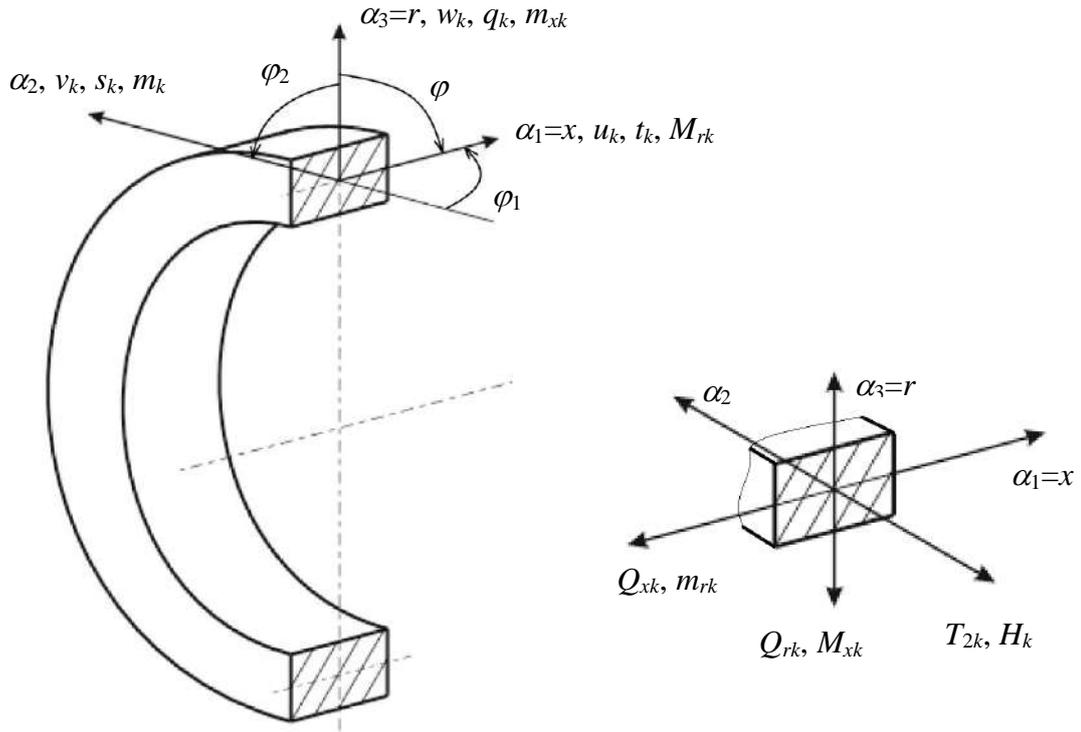


Рисунок 2.2 – Схема кругового кольца

При этом можно получить

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\dot{u}_k, & \varphi_2 &= -\dot{w}_k + v_k / r_k, \\ (\dots)^\bullet &= \frac{1}{r_k} \frac{\partial(\dots)}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{2k} + \alpha_1 \chi_x + \alpha_3 \chi_r, \\ \varepsilon_{2k} &= v_k^\bullet + w_k / r_k, & \chi_x &= \varphi_1^\bullet - \varphi / r_k, & \chi_r &= \varphi_2^\bullet. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь ε_{22} – окружная деформация в точке кольца с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;

ε_{2k} – деформация срединной окружности кольца в точке с координатой α_2 .

Используя закон Гука, связывающий окружные напряжения σ_{22} в кольце с окружными деформациями ε_{22} формулой

$$\sigma_{22} = E_{2k} \varepsilon_{22}, \quad (2.30)$$

где E_{2k} – модуль Юнга материала кольца в окружном направлении, и осуществляя операцию приведения напряжений в нем к соответствующим

усилию T_{2k} и моментам M_{xk} , M_{rk} , H_k (см. рисунок 2.2) относительно осей r , x и α_2 , связанных со срединной окружностью кольца, можно получить соотношения

$$\begin{aligned} T_{2k} &= E_{2k} F_k \varepsilon_{2k}, \quad M_{xk} = E_{2k} J_{xk} \chi_x, \\ M_{rk} &= E_{2k} J_{rk} \chi_r, \quad H_k = G_k J_k \chi. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Входящие в физические соотношения (2.31) площадь и соответствующие моменты инерции в случае прямоугольного поперечного сечения кольца определяются формулами

$$F_k = bh, \quad J_{xk} = hb^3/12, \quad J_{rk} = bh^3/12, \quad (2.32)$$

где b – ширина, h – высота указанного сечения.

В формуле для крутящего момента H_k параметр χ представляет собой кручение срединной линии кольца и определяется зависимостью

$$\chi = \varphi^\bullet + \varphi_1 / r_k. \quad (2.33)$$

Параметр G_k характеризует модуль сдвига материала кольца, а параметр J_k – момент инерции при кручении. В работах [49, 68] указаны некоторые способы приближенной оценки жёсткости $G_k J_k$ кольца на кручение.

Будем исходить из того, что на кольцо действует система распределённых по его поверхности внешних сил, которая сводится к эквивалентной системе приходящихся на единицу длины его срединной линии сил t_k , s_k , q_k и моментов m_k , m_{xk} , m_{rk} (см. рисунок 2.2). Дополнительный вклад в эти силы и моменты вносят входящие в формулировку статических граничных условий типа (2.12) реакции T_{11}^* , T_{12}^* , Q_{11}^* , M_{11}^* со стороны торцов состыкованных с кольцом оболочек. Обозначим как ξ^* и η^* значения координат x и r точек стыковки поверхности приведения оболочки с кольцом, где оси x и r имеют началом центр поперечного сечения кольца (см. рисунок 2.2). Соответствующие дифференциальные уравнения, описывающие равновесие кольца, в таком случае могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} Q_{xk}^\bullet + \tilde{t}_k &= 0, & T_{2k}^\bullet + Q_{rk} / r_k + \tilde{s}_k &= 0, \\ Q_{rk}^\bullet - T_{2k} / r_k + \tilde{q}_k &= 0, & H_k^\bullet + M_{xk} / r_k + \tilde{m}_k &= 0, \\ Q_{rk} &= M_{rk}^\bullet + \tilde{m}_{rk}, & Q_{xk} &= M_{xk}^\bullet - H_k / r_k + \tilde{m}_{xk}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{t}_k &= t_k + \sum \eta^* T_{11}^*, & \tilde{s}_k &= s_k + \sum \eta^* T_{12}^*, \\
 \tilde{q}_k &= q_k + \sum \eta^* Q_{11}^*, & \tilde{m}_k &= m_k + \sum \eta^* (T_{11}^* \eta^* - Q_{11}^* \xi^* + M_{11}^*), \\
 \tilde{m}_{xk} &= m_{xk} + \sum \eta^* T_{12}^* \xi^*, & \tilde{m}_{rk} &= m_{rk} + \sum \eta^* T_{12}^* \eta^*, \\
 \eta^* &= (1 + \eta^* / r_k) \delta^*.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

В формулах (2.35) следует принять $\delta^* = 1$, если оболочка стыкуется с кольцом своим левым торцом, и $\delta^* = -1$, если правым торцом. Суммирования в (2.35) охватывают факторы (отмеченные звёздочками), относящиеся к оболочкам, состыкованным с данным кольцом. Величины T_{11}^* , T_{12}^* , входящие в записи (2.35), в случае трёхслойной оболочки определяются, с учётом выражений (2.26), суммированиями вида

$$T_{11}^* = \sum_j T_{11}^{*j}, \quad T_{12}^* = \sum_j T_{12}^{*j}, \quad (j=1, 3). \tag{2.36}$$

Кинематические условия совместной работы кольца и состыкованных с ним оболочек записываются, с учётом связей (2.27), в виде

$$\begin{aligned}
 u^* &= u_k + \eta^* \varphi, & w^* &= w_k - \xi^* \varphi, \\
 v^* &= v_k + \xi^* \varphi_1 + \eta^* \varphi_2, & \theta_1^* &= \varphi.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Здесь u^* , v^* , w^* , θ_1^* – факторы, входящие в формулировку кинематических граничных условий (2.11) и (2.25). При этом в случае трёхслойной оболочки следует принять

$$u^* = u^{*1} = u^{*3}, \quad v^* = v^{*1} = v^{*3}. \tag{2.38}$$

2.2. Сведение поставленной двумерной задачи для цилиндрической конструкции из оболочек и колец к совокупности одномерных задач

Будем исходить из того, что действующая на рассматриваемую конструкцию система нагрузок имеет плоскость симметрии, проходящую через ось вращения. В таком случае, считая, что координата α_2 отсчитывается от этой плоскости, параметры напряженно-деформированного состояния конструкции и

компоненты приложенных нагрузок можно представить разложениями в ряды Фурье вида

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_{(n)}(\alpha_1) \cos n\alpha_2, \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{(n)}(\alpha_1) \sin n\alpha_2, \quad (2.39)$$

где

– для случая оболочки, подчиняющейся гипотезе единой нормали:

$$X = \{u, w, \theta_1, E_{11}, E_{22}, K_{11}, K_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}, u^*, w^*, \theta_1^*, T_{11}^*, Q_{11}^*, M_{11}^*, q_1, q_z\}, \quad (2.40)$$

$$Y = \{v, \theta_2, E_{12}, K_{12}, S, H, Q_{22}, v^*, T_{12}^*, q_2\};$$

– для случая трёхслойной оболочки, подчиняющейся гипотезе ломаной линии:

$$X = \{u^j, w, \theta_1, E_{11}^j, E_{22}^j, K_{11}^j, K_{22}^j, T_{11}^j, T_{22}^j, M_{11}^j, M_{22}^j, Q_{11}, M_{11}, M_{22}, \sigma_{13}^2, \varepsilon_{13}^2, u^{*j}, w^*, \theta_1^*, T_{11}^{*j}, Q_{11}^*, M_{11}^*, q_1^j, q_z\}, \quad (2.41)$$

$$Y = \{v^j, \theta_2^j, E_{12}^j, K_{12}^j, S^j, H^j, Q_{22}, \sigma_{23}^2, \varepsilon_{23}^2 v^{*j}, T_{12}^{*j}, q_2^j\}, \quad (j = 1, 3);$$

– для случая кольца:

$$X = \{u_k, w_k, \varphi, \varepsilon_{2k}, \chi_r, \chi_x, T_{2k}, M_{xk}, M_{rk}, t_k, q_k, m_k\},$$

$$Y = \{v_k, \varphi_1, \varphi_2, \chi, Q_{xk}, Q_{rk}, H_k, s_k, m_{xk}, m_{rk}\}. \quad (2.42)$$

Ниже приводятся получаемые при этом соотношения для амплитудных значений соответствующих параметров напряжённо-деформированного состояния рассматриваемой конструкции и осуществляется сведение этих соотношений к совокупности краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены методом численного интегрирования. Обращаем внимание на то, что всюду индекс «*n*» у упомянутых амплитудных значений для простоты опускается.

2.2.1. Получаемая одномерная краевая задача в случае оболочки, подчиняющейся гипотезе единой нормали

Учитываем тот факт, что изменения в форме записи в связи с переходом к амплитудным значениям рассматриваемых разложений в ряды Фурье затрагивают лишь те соотношения, которые содержат производные по координате α_2 . Так,

геометрические соотношения (2.2), (2.4) оболочки, подчиняющейся гипотезе единой нормали, при переходе к соответствующим амплитудным значениям параметров приобретут вид

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -w', \quad \theta_2 = \bar{n}w + v/R, \\ E_{11} &= u', \quad E_{22} = \bar{n}v + w/R, \quad E_{12} = v' - \bar{n}u, \\ K_{11} &= \theta_1', \quad K_{22} = \bar{n}\theta_2, \quad K_{12} = -\bar{n}\theta_1 + v'/R, \\ \bar{n} &= n/R. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Уравнения равновесия (2.10) и статические граничные условия (2.12) на торцах оболочки предстанут в виде

$$\begin{aligned} T_{11}' + \bar{n}S + q_1 &= 0, \\ (S + 2H/R)' - \bar{n}(T_{22} + M_{22}/R) + q_2 &= 0, \\ (Q_{11} + \bar{n}H)' - \bar{n}^2 M_{22} - T_{22}/R + q_z &= 0, \\ M_{11}' + 2\bar{n}H &= Q_{11} + \bar{n}H \end{aligned} \quad (2.44)$$

и

$$T_{11} = T_{11}^*, \quad S + 2H/R = T_{12}^*, \quad Q_{11} + \bar{n}H = Q_{11}^*, \quad M_{11} = M_{11}^*. \quad (2.45)$$

Введём новые неизвестные y_k ($k = 1, 2, \dots, 8$), определяемые выражениями

$$\begin{aligned} y_1 &= T_{11}, \quad y_2 = S + 2H/R, \quad y_3 = Q_{11} + \bar{n}H, \quad y_4 = M_{11}, \\ y_5 &= u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1. \end{aligned} \quad (2.46)$$

С помощью вводимого соотношениями (2.46) вектора \vec{y} совокупность соотношений (2.43) – (2.45), (2.6), (2.11), (2.12) для рассматриваемого типа оболочки можно свести к разрешающей системе 8 обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\vec{y}' = \vec{f} \quad (2.47)$$

с кинематическими условиями вида

$$y_5 = u^*, \quad y_6 = v^*, \quad y_7 = w^*, \quad y_8 = \theta_1^* \quad (2.48)$$

или статическими условиями вида

$$y_1 = T_{11}^*, \quad y_2 = T_{12}^*, \quad y_3 = Q_{11}^*, \quad y_4 = M_{11}^* \quad (2.49)$$

на каждом из торцов (левом и правом) оболочки. При этом для компонент вектора \vec{f} можно получить

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\bar{n}y_2 + 2\bar{n}H/R - q_1, & f_2 &= \bar{n}(T_{22} + M_{22}/R) - q_2, \\
f_3 &= \bar{n}^2M_{22} + T_{22}/R - q_z, & f_4 &= y_3 - 2\bar{n}H, \\
f_5 &= E_{11}, & f_6 &= E_{12} + \bar{n}y_5, & f_7 &= -y_8, & f_8 &= K_{11},
\end{aligned} \tag{2.50}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{11} &= (B_{11}D_{11} - A_{11}^2)^{-1}[(y_4 - A_{12}E_{22} - D_{12}K_{22})B_{11} - (y_1 - B_{12}E_{22} - A_{12}K_{22})A_{11}], \\
E_{11} &= (y_1 - B_{12}E_{22} - A_{11}K_{11} - A_{12}K_{22})/B_{11}, \\
E_{12} &= [B_{33} + 4(A_{33} + D_{33}/R)/R]^{-1}[y_2 - 2(A_{33} + 2D_{33}/R)(-\bar{n}y_8 + \bar{n}y_5/R)], \\
E_{22} &= \bar{n}y_6 + y_7/R, & K_{22} &= \bar{n}\theta_2, & \theta_2 &= \bar{n}y_7 + y_6/R, \\
K_{12} &= -\bar{n}y_8 + (E_{12} + \bar{n}y_5)/R, \\
T_{22} &= B_{22}E_{22} + B_{12}E_{11} + A_{22}K_{22} + A_{12}K_{11}, \\
M_{22} &= A_{22}E_{22} + A_{12}E_{11} + D_{22}K_{22} + D_{12}K_{11}, \\
H &= A_{33}E_{12} + 2D_{33}K_{12}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

2.2.2. Получаемая одномерная краевая задача в случае трехслойной оболочки, подчиняющейся гипотезе ломаной линии

Действуя, как и в предыдущем разделе, выпишем соответствующие соотношения для амплитудных значений рассматриваемых разложений в ряды Фурье применительно к случаю трехслойной оболочки.

Преобразованные геометрические соотношения (2.16), (2.18) в таком случае приобретут вид

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= -w', & \theta_2^j &= \bar{n}w + v^j/R, \\
E_{11}^j &= (u^j)', & E_{22}^j &= \bar{n}v^j + w/R, & E_{12}^j &= (v^j)' - \bar{n}u^j, \\
K_{11}^j &= \theta_1', & K_{22}^j &= \bar{n}\theta_2^j, & K_{12}^j &= -\bar{n}\theta_1 + (v^j)'/R, \quad (j=1, 3).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Уравнения равновесия (2.21) и статические граничные условия (2.26) на торцах оболочки предстанут в виде

$$\begin{aligned}
(T_{11}^j)' + \bar{n}S^j + q_1^1\delta_j^1 + q_1^3\delta_j^3 + \sigma_{13}^2\delta_j^1 - \sigma_{13}^2\delta_j^3 &= 0, \\
(S^j + 2H^j/R)' - \bar{n}(T_{22}^j + M_{22}^j/R) + q_2^1\delta_j^1 + q_2^3\delta_j^3 + \sigma_{23}^2\delta_j^1 - \sigma_{23}^2\delta_j^3 &= 0, \\
(Q_{11} + \bar{n}H)' - \bar{n}^2M_{22} - (\sum_j T_{22}^j)/R + q_z &= 0, \\
M_{11}' + 2\bar{n}H &= Q_{11} + \bar{n}H, \quad (j=1, 3)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

и

$$\begin{aligned} T_{11}^j &= T_{11}^{*j}, & S^j + 2H^j/R &= T_{12}^{*j}, & Q_{11} + \bar{n}H &= Q_{11}^*, \\ M_{11} &= M_{11}^*, & (j=1, 3). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Введём новые неизвестные y_k ($k = 1, 2, \dots, 12$), определяемые выражениями

$$\begin{aligned} y_i &= T_{11}^j, & y_{2+i} &= S^j + 2H^j/R, & y_5 &= Q_{11} + \bar{n}H, & y_6 &= M_{11}, \\ y_{6+i} &= u^j, & y_{8+i} &= v^j, & y_{11} &= w, & y_{12} &= \theta_1, \quad (j=2i-1; \quad i=1, 2). \end{aligned} \quad (2.55)$$

С помощью вводимого соотношениями (2.55) вектора \vec{y} совокупность соотношений (2.52) – (2.54), (2.19), (2.22) – (2.25) для рассматриваемого типа оболочки можно свести к разрешающей системе 12 обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$A\vec{y}' = \vec{f} \quad (2.56)$$

с кинематическими условиями вида

$$y_{6+i} = u^{*j}, \quad y_{8+i} = v^{*j}, \quad y_{11} = w^*, \quad y_{12} = \theta_1^*, \quad (j=2i-1; \quad i=1, 2) \quad (2.57)$$

или статическими условиями вида

$$y_i = T_{11}^{*j}, \quad y_{2+i} = T_{12}^{*j}, \quad y_5 = Q_{11}^*, \quad y_6 = M_{11}^*, \quad (j=2i-1; \quad i=1, 2) \quad (2.58)$$

на каждом из торцов (левом и правом) оболочки. При этом отличные от нуля элементы матрицы A в системе (2.56) задаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= A_{2+i,2+i} = A_{5,5} = A_{6,6} = 1, \\ A_{i,8+i} &= \bar{n}(B_{33}^j + 2A_{33}^j/R), \\ A_{2+i,12} &= -\bar{n}(A_{12}^j + D_{12}^j/R), \\ A_{2+i,6+i} &= -\bar{n}(B_{12}^j + A_{12}^j/R), \\ A_{5,8} &= -\bar{n}^2 \sum_j D_{12}^j - (\sum_j A_{12}^j)/R, \\ A_{5,6+i} &= -\bar{n}^2 A_{12}^j - B_{12}^j/R, \\ A_{6,8+i} &= 2\bar{n}(A_{33}^j + 2D_{33}^j/R), \\ A_{6+i,12} &= A_{11}^j, \quad A_{6+i,6+i} = B_{11}^j, \\ A_{8+i,8+i} &= B_{33}^j + 4A_{33}^j/R + 4D_{33}^j/R^2, \\ A_{12,12} &= \sum_j D_{11}^j; \quad A_{12,6+i} = \sum_j A_{11}^j; \quad (j=2i-1; \quad i=1, 2). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Компоненты вектора \vec{f} в системе (2.56) задаются выражениями

$$\begin{aligned}
f_i &= -\bar{n}\tilde{S}^j - q_1^1\delta_j^1 - q_1^3\delta_j^3 - \sigma_{13}^2\delta_j^1 + \sigma_{13}^2\delta_j^3, \\
f_{2+i} &= \bar{n}(\tilde{T}_{22}^j + \tilde{M}_{22}^j/R) - q_2^1\delta_j^1 - q_2^3\delta_j^3 - \sigma_{23}^2\delta_j^1 + \sigma_{23}^2\delta_j^3, \\
f_5 &= \bar{n}^2 \sum_j \tilde{M}_{22}^j + (\sum_j \tilde{T}_{22}^j) / R - q_z, \\
f_6 &= -2\bar{n} \sum_j \tilde{H}^j + y_5, \\
f_{6+i} &= y_i - \tilde{T}_{11}^j; \quad f_{8+i} = y_{2+i} - \tilde{S}^j - 2\tilde{H}^j/R, \\
f_{11} &= -y_{12}, \quad f_{12} = y_6 - \sum_j \tilde{M}^j,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{11}^j &= B_{11}^j \tilde{E}_{11}^j + B_{12}^j \tilde{E}_{22}^j + A_{11}^j \tilde{K}_{11}^j + A_{12}^j \tilde{K}_{22}^j \quad (1 \Leftrightarrow 2), \\
\tilde{S}^j &= B_{33}^j \tilde{E}_{12}^j + 2A_{33}^j \tilde{K}_{12}^j, \\
\tilde{M}_{11}^j &= A_{11}^j \tilde{E}_{11}^j + A_{12}^j \tilde{E}_{22}^j + D_{11}^j \tilde{K}_{11}^j + D_{12}^j \tilde{K}_{22}^j \quad (1 \Leftrightarrow 2), \\
\tilde{H}^j &= A_{33}^j \tilde{E}_{12}^j + 2D_{33}^j \tilde{K}_{12}^j, \\
\tilde{E}_{11}^j &= 0, \quad \tilde{E}_{22}^j = \bar{n}y_{8+i} + y_{11}/R, \\
\tilde{E}_{12}^j &= -\bar{n}y_{6+i}, \quad \tilde{K}_{11}^j = 0, \quad \tilde{K}_{22}^j = \bar{n}\theta_2^j, \\
\tilde{K}_{12}^j &= -\bar{n}y_{12}, \quad \theta_2^j = \bar{n}y_{11} + y_{8+i}/R, \\
\sigma_{13}^2 &= G_{13}^2(y_8 - y_7)/h_2, \quad \sigma_{23}^2 = G_{23}^2(y_{10} - y_9)/h_2, \\
&(j = 2i - 1; \quad i = 1, 2).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

2.3. Алгоритм численного решения поставленной задачи на основе метода численного интегрирования

2.3.1. Процедура метода перемещений для определения амплитудных значений компонент напряженно-деформированного состояния рассматриваемой конструкции при фиксированном номере гармоники

Выпишем теперь соответствующие соотношения для амплитудных значений разложений в ряды Фурье применительно к кольцу (шпангоуту), входящему в рассматриваемую конструкцию.

Преобразованные геометрические соотношения (2.28), (2.29), (2.33) в данном случае приобретает вид

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \bar{m}u_k, & \varphi_2 &= \bar{m}w_k + v_k/r_k, \\
\varepsilon_{2k} &= \bar{m}v_k + w_k/r_k, & \chi_x &= \bar{m}\varphi_1 - \varphi/r_k, \\
\chi_r &= \bar{m}\varphi_2, & \chi &= -\bar{m}\varphi + \varphi_1/r_k, \\
\bar{m} &= n/r_k.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Уравнения равновесия (2.34) предстанут в виде

$$\begin{aligned}
\bar{m}Q_{xk} + \tilde{t}_k &= 0, & -\bar{m}T_{2k} + Q_{rk}/r_k + \tilde{s}_k &= 0, \\
\bar{m}Q_{rk} - T_{2k}/r_k + \tilde{q}_k &= 0, & \bar{m}H_k + M_{xk}/r_k + \tilde{m}_k &= 0, \\
Q_{rk} &= -\bar{m}M_{rk} + \tilde{m}_{rk}, & Q_{xk} &= -\bar{m}M_{xk} - H_k/r_k + \tilde{m}_{xk}.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Полученные таким образом для каждого фиксированного номера гармоники алгебраические уравнения (2.62), (2.63), (2.31), (2.35) с учётом связей (2.37), а также связей (2.48), (2.49) для случая оболочки без слоя заполнителя и связей (2.57), (2.58) с учётом (2.36), (2.38) для случая трёхслойной оболочки с заполнителем можно рассматривать как соотношения, устанавливающие связи между значениями компонент вектора \vec{y} , относящимися к торцу оболочки, и обобщёнными перемещениями u_k, v_k, w_k, φ кольца, состыкованного с этим торцом.

Пусть рассматриваемая конструкция, составленная из последовательно соединённых круговых колец и цилиндрических оболочек, содержит n_0 оболочек и n_0+1 колец.

Оболочки последовательно пронумерованы от 1 до n_0 , а кольца – от 1 до n_0+1 . Пусть s – параметр, обозначающий номер оболочки, а i – номер кольца.

Будем обозначать как s_{1i}, s_{2i} номера оболочек, стыкуемых торцами 1 и 2 (левым и правым) с i -м кольцом, а как i_{1s}, i_{2s} – номера колец, состыкованных с первым и вторым торцом s -й оболочки.

Поскольку, согласно зависимостям (2.46), (2.55), первая половина компонент вектора \vec{y} составлена из обобщённых усилий, а вторая половина компонент – из обобщённых перемещений оболочки, столбец $[y]$ компонент вектора \vec{y} можно представить в виде двух подстолбцов $[T]$ и $[U]$, первый из которых содержит обобщённые усилия, а второй – обобщённые перемещения оболочки, так что

$$[y] = \begin{bmatrix} [T] \\ [U] \end{bmatrix}.$$

Введя в рассмотрение столбец $[U_k]$ с элементами u_k, v_k, w_k, φ , характеризующий обобщённые перемещения кольца, и столбец $[f_k]$ с элементами $t_k + \bar{m}m_{xk}, s_k + m_{rk}/r_k, q_k + \bar{m}m_{rk}, m_k$ представим соотношения (2.63) с учётом связей (2.31), (2.35) – (2.38), (2.62) для i -го кольца в матричном виде, а именно

$$\{C\}^i [U_k]^i + \{C^1\}^j [T]^{1j} + \{C^2\}^l [T]^{2l} = -[f_k]^i, \quad (2.64)$$

$$(j = s_{1i}, l = s_{2i}).$$

Здесь индексы 1 и 2 означают принадлежность к первому и второму торцу соответствующей оболочки. При $i=1$ следует положить $\{C^2\}=0$, а при $i=n_0+1$ принять $\{C^1\}=0$.

Ненулевые компоненты матрицы $\{C\}$ для каждого из колец определяются формулами

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\bar{m}^4 E_k J_{xk} - \bar{m}^2 G_k J_k / r_k^2, & C_{14} &= C_{41} = \bar{m}^2 (E_k J_{xk} + G_k J_k) / r_k, \\ C_{22} &= -\bar{m}^2 (E_k F_k + E_k J_{rk} / r_k^2), & C_{23} &= C_{32} = -\bar{m} (E_k F_k + \bar{m}^2 E_k J_{rk}) / r_k, \\ C_{33} &= -\bar{m}^4 E_k J_{rk} - E_k F_k / r_k^2, & C_{44} &= -\bar{m}^2 G_k J_k - E_k J_{xk} / r_k^2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Вводя обозначения $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \delta_1=1, \delta_2=-1$ для параметров ξ^*, η^*, δ^* , относящихся соответственно к левому и правому торцу каждой из оболочек, а также обозначение r_k^i для радиуса r_k i -го кольца, ненулевые компоненты матриц $\{C^\alpha\}^s$ ($\alpha = 1, 2$) для s -й оболочки можно представить в виде

$$\begin{aligned} C_{1,p}^\alpha &= d_\alpha, & C_{1,N+1+p}^\alpha &= \bar{m} d_\alpha \xi_\alpha, & C_{2,N+1+p}^\alpha &= d_\alpha (1 + \eta_\alpha / r_k^i), \\ C_{3,N+1+p}^\alpha &= \bar{m} d_\alpha \eta_\alpha, & C_{3,2N+3}^\alpha &= d_\alpha, & C_{4,p}^\alpha &= d_\alpha \eta_\alpha, \\ C_{4,2N+3}^\alpha &= -d_\alpha \xi_\alpha, & C_{4,2N+4}^\alpha &= d_\alpha, \\ d_\alpha &= \delta_\alpha (1 + \eta_\alpha / r_k^i), & \bar{m} &= n / r_k^i, & i &= i_{\alpha s}, \\ & & & & & (\alpha = 1, 2; p = 1, N + 1). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Здесь и далее следует принять $N=1$, если s -я оболочка является трёхслойной с заполнителем, и принять $N=0$ в случае отсутствия заполнителя.

Кинематические соотношения (2.37) с учётом (2.62), (2.48) или ((2.57) с учётом (2.38)) позволяют установить связь между обобщёнными перемещениями

$[U]^{1s}$, $[U]^{2s}$ торцов с номерами 1, 2 s -й оболочки и обобщёнными перемещениями $[U_k]$ соответствующих колец в виде

$$[U]^{as} = \{A^\alpha\}^s [U_k]^i, \quad (i=i_{as}, \alpha = 1, 2). \quad (2.67)$$

Отличные от нуля элементы матриц $\{A^\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2$) s -й оболочки при этом записываются в виде

$$\begin{aligned} A_{p,1}^\alpha &= 1, \quad A_{p,4}^\alpha = \eta_\alpha, \quad A_{N+1+p,1}^\alpha = \bar{m}\xi_\alpha, \\ A_{N+1+p,2}^\alpha &= 1 + \eta_\alpha / r_k^i, \quad A_{N+1+p,3}^\alpha = \bar{m}\eta_\alpha, \\ A_{2N+3,3}^\alpha &= 1, \quad A_{2N+3,4}^\alpha = -\xi_\alpha, \quad A_{2N+4,4}^\alpha = 1, \\ \bar{m} &= n / r_k^i, \quad i = i_{as}, \quad (\alpha = 1, 2; p = 1, N + 1). \end{aligned} \quad (2.68)$$

В силу линейности системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.47) или (2.56), описывающей поведение s -й оболочки, имеет место линейная связь между обобщёнными перемещениями и обобщёнными усилиями на её торцах с номерами 1 и 2, которая представима в матричном виде

$$\begin{bmatrix} [T]^1 \\ \dots \\ [T]^2 \end{bmatrix}^s = \begin{bmatrix} \{K^{11}\} & \vdots & \{K^{12}\} \\ \dots & \cdot & \dots \\ \{K^{21}\} & \vdots & \{K^{22}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U]^1 \\ \dots \\ [U]^2 \end{bmatrix}^s + \begin{bmatrix} [Q]^1 \\ \dots \\ [Q]^2 \end{bmatrix}^s. \quad (2.69)$$

Здесь соответствующие столбцы составлены из подстолбцов $[T]^\alpha$, $[U]^\alpha$, $[Q]^\alpha$ ($\alpha = 1, 2$), а матрица $\{K\}$ составлена из подматриц $\{K^{\alpha\beta}\}$ ($\alpha = 1, 2; \beta = 1, 2$).

Переходя к вопросам построения матрицы $\{K\}$ и подстолбцов $[Q]^1$, $[Q]^2$ для каждой из оболочек конструкции, будем исходить из того, что вычислительная процедура (о которой будет сказано ниже), позволяющая решать краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2.47) или (2.56) с заданными граничными условиями в перемещениях, уже реализована.

Полагая в выражении (2.69) $[U]^1 = [U]^2 = 0$, получаем $[Q]^1 = [T]^1$, $[Q]^2 = [T]^2$. Это означает, что, решив с помощью указанной процедуры упомянутую краевую задачу при нулевых граничных условиях в перемещениях и определив обобщённые усилия на торцах оболочки, мы тем самым определяем соответствующие подстолбцы столбца $[Q]$. Обращаем внимание на то, что

столбец $[Q]$ будет при этом ненулевым только при наличии ненулевых поверхностных нагрузок, приложенных к оболочке.

Если теперь в выражении (2.69) принять $[Q]^1=[Q]^2=0$, а в столбце $[U]$ обнулить все элементы кроме i -го, который в свою очередь принять равным единице, то i -й столбец матрицы $\{K\}$ окажется равным столбцу $[T]$. Это означает, что столбцы матрицы $\{K\}$ каждой оболочки могут быть сформированы из обобщённых усилий $[T]^1, [T]^2$ на её торцах, полученных в результате решения последовательности краевых задач для соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений типа (2.47) или (2.56) (с обнуленными параметрами поверхностных нагрузок) при определённом образом задаваемых граничных условиях в перемещениях, а именно, когда одна из компонент столбца краевых перемещений $[U]$ равна единице, а остальные компоненты равны нулю.

Итак, считаем, что матричные зависимости (2.69) с использованием описанной вычислительной процедуры установлены. Это даёт основание, последовательно используя связи (2.64), (2.69), (2.67), сформировать систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных обобщённых перемещений $[U_k]^i$ ($i = 1, 2, \dots, n_0+1$) колец вида

$$\begin{aligned} & \{C\}^i + \{C^1\}^j \{K^{11}\}^j \{A^1\}^j + \{C^2\}^l \{K^{22}\}^l \{A^2\}^l [U_k]^i + \\ & + \{C^1\}^j \{K^{12}\}^j \{A^2\}^j [U_k]^\alpha + \{C^2\}^l \{K^{21}\}^l \{A^1\}^l [U_k]^\beta = \\ & = -[f_k]^i - \{C^1\}^j [Q^1]^j - \{C^2\}^l [Q^2]^l, \\ & (\alpha = i_{2j}, \beta = i_{1l}), \quad (j = s_{1i}, l = s_{2i}), \quad (i = 1, 2, \dots, n_0 + 1). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Эта система при заданных условиях закрепления одного из колец, исключаяющих возможность перемещения конструкции как жёсткого целого, может быть однозначно разрешена.

Определив путём решения этой системы указанные перемещения $[U_k]^i$ ($i = 1, 2, \dots, n_0+1$), находим с использованием связей (2.67) обобщённые перемещения $[U]^1, [U]^2$ торцов каждой из оболочек. Затем, решая для каждой из оболочек краевую задачу для системы дифференциальных уравнений типа (2.47) или (2.56) при найденных граничных условиях в перемещениях (с использованием упомянутой выше вычислительной процедуры), окончательно определяем

амплитудные значения компонент напряжённо-деформированного состояния конструкции, относящиеся к текущему номеру гармоники n .

2.3.2. Процедура численного интегрирования сформулированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях в перемещениях

Метод сведения решения линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений к решению соответствующих задач Коши с использованием численного интегрирования в сочетании с промежуточной ортогонализацией по С.К. Годунову [27] подробно описан в книге [49]. Здесь мы ограничимся кратким описанием этого метода, ориентируясь на интересующий нас случай граничных условий в перемещениях.

Итак, пусть имеется решаемая на интервале $0 \leq x \leq L$ система из n линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка, которую запишем в матричном виде

$$[y]' = \{A\}[y] + [b]. \quad (2.71)$$

Здесь столбец $[y]=[y(x)]$, как и ранее, считается составленным из двух подстолбцов $[T]$ и $[U]$, представляющих собой наборы из m обобщённых усилий и m обобщённых перемещений, где $m=n/2$. Столбец $[b]$ представляет собой неоднородную часть рассматриваемой системы, связанную с наличием приложенных к оболочке поверхностных нагрузок. Задача состоит в том, чтобы найти решение $[y(x)]$ системы (2.71), удовлетворяющее заданным условиям в перемещениях на торцах 1 и 2 оболочки (при $x=0$ и $x=L$), а именно

$$y_{i+m}(0) = U_i^1, \quad y_{i+m}(L) = U_i^2, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.72)$$

Пусть $[y^{(j)}(x)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$) – частные решения однородной части (при $[b]=0$) системы (2.71), удовлетворяющие при $x=0$ условиям

$$y_i^{(j)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (2.73)$$

$(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m),$

вследствие чего столбцы $[y^{(j)}(0)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$) начальных условий, а значит, и соответствующие им решения $[y^{(j)}(x)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$) являются линейно независимыми.

Пусть, кроме того, $[y^{(0)}(x)]$ – частное решение неоднородной системы (2.71), удовлетворяющее при $x=0$ условиям

$$y_i^{(0)}(0) = 0, \quad y_{i+m}^{(0)}(0) = U_i^1, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.74)$$

Тогда любое решение $[y(x)]$ системы (2.71), удовлетворяющее условию

$$y_{i+m}(0) = U_i^1, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.75)$$

можно записать в виде

$$[y(x)] = [y^{(0)}(x)] + \sum_{j=1}^m \beta_j [y^{(j)}(x)], \quad (2.76)$$

где β_j ($j = 1, 2, \dots, m$) – произвольные постоянные.

Чтобы теперь найти решение системы (2.71), удовлетворяющее ещё и заданным условиям в перемещениях при $x=L$, согласно записи (2.72), необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$U_i^2 = y_{i+m}^{(0)}(L) + \sum_{j=1}^m \beta_j y_{i+m}^{(j)}(L), \quad (2.77)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

относительно неизвестных постоянных β_j ($j = 1, 2, \dots, m$), а затем подставить полученные значения в запись (2.76).

В теоретическом плане можно считать, что искомое решение поставленной задачи построено. Однако в вычислительном отношении здесь возникают серьёзные проблемы. Это связано с тем, что в рассматриваемом классе задач среди компонент $y_i^{(j)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m$) обсуждаемых частных решений однородной системы имеются как экспоненциально возрастающие, так и экспоненциально убывающие функции параметра x . Поэтому при реализации описанного способа решения задачи на ЭВМ могут иметь место аварийные ситуации типа «переполнения» или «исчезновения» порядка при достаточно больших значениях x . Отсюда следует, что вычислительный процесс в рамках данного подхода необходимо организовать так, чтобы отмеченные явления

чрезмерного роста и убывания соответствующих частных решений в записи (2.76) были устранены. Эффективным в этом отношении является предложенный С.К. Годуновым подход с применением ортогонализации указанных частных решений в промежуточных точках интервала $0 \leq x \leq L$.

Итак, пусть интервал $0 \leq x \leq L$ разбит на M сравнительно небольших отрезков $[x_{s-1}, x_s]$ ($s = 1, 2, \dots, M$). При этом $x_0=0$, $x_M=L$. На первом отрезке (при $s=1$) решение в виде (2.77) строим по изложенной выше схеме. К полученным в точке x_1 значениям частных решений однородной системы (столбцам $[y^{(j)}(x_1)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$)) применяем известную из линейной алгебры процедуру ортогонализации (с нормированием). В результате получаем ортонормированный (а значит, линейно независимый) набор столбцов $[z^{(j)}(x_1)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$), компоненты которых представлены числами с модулями, не превышающими единицу. На основе полученного в точке x_1 столбца $[y^{(0)}(x_1)]$, соответствующего частному решению неоднородной системы, строим столбец $[z^{(0)}(x_1)]$, ортогональный набору столбцов $[z^{(j)}(x_1)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$). В результате осуществлённой операции с применением процедуры ортогонализации имеем набор столбцов $[z^{(0)}(x_1)]$, $[z^{(j)}(x_1)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$), полученных из исходных столбцов $[y^{(0)}(x_1)]$, $[y^{(j)}(x_1)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$) путём линейного преобразования, а также матрицу треугольной структуры с элементами $\omega_{ji}^{(1)}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = i, i+1, \dots, m$) и столбец с компонентами $\omega_{0i}^{(1)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), осуществляющие подобное линейное преобразование.

С учётом проведённого в точке x_1 линейного преобразования искомое решение $[y(x)]$ рассматриваемой краевой задачи на следующем (при $s=2$) отрезке $[x_1, x_2]$ строим по схеме, аналогичной (2.76), с использованием частных решений $[z^{(0)}(x)]$ и $[z^{(j)}(x)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$) неоднородной системы (2.71) и соответствующей ей однородной системы, которые удовлетворяют начальным условиям, задаваемым столбцами $[z^{(0)}(x_1)]$ и $[z^{(j)}(x_1)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$). А именно, при $x_1 \leq x \leq x_2$ записываем решение в виде

$$[y(x)] = [z^{(0)}(x)] + \sum_{j=1}^m \beta_j^{(1)} [z^{(j)}(x)]. \quad (2.78)$$

То, что запись (2.78) представляет собой решение системы (2.71), объясняется тем, что входящие в её правую часть столбцы представляют собой линейные комбинации решений $[y^{(j)}(x)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$), сложенными с решением $[y^{(0)}(x)]$. А добиться того, чтобы решение (2.78) при этом являлось продолжением решения (2.76) на отрезке $[x_1, x_2]$ можно, если постоянные $\beta_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) в записи (2.78) подобрать таким образом, чтобы решения $[y(x_1)]$ в точке x_1 , определяемые по схемам (2.76) и (2.78) совпадали. Анализируя выполненные в рамках процедуры ортогонализации линейные преобразования можно заметить, что для этого необходимо, чтобы между постоянными $\beta_j^{(1)}$ и β_j ($j = 1, 2, \dots, m$) имела место связь

$$\sum_{j=i}^m \omega_{ji}^{(1)} \beta_j = \beta_i^{(1)} - \omega_{0i}^{(1)}, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.79)$$

Аналогичные операции повторяем, переходя от отрезка с $s=2$ к отрезку с $s=3$ и т.д. В результате подобного процесса «ортогональной прогонки» в каждой точке x_s ($s = 1, 2, \dots, M$) определяются ортогонализированные наборы столбцов частных решений $[z^{(0)}(x_s)]$, $[z^{(j)}(x_s)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$) и наборы коэффициентов $\omega_{ji}^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = i, i+1, \dots, m$), $\omega_{0i}^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), с помощью которых решение системы (2.71) в точке x_s записывается в виде

$$[y(x_s)] = [z^{(0)}(x_s)] + \sum_{j=1}^m \beta_j^{(s)} [z^{(j)}(x_s)], \quad (s = 1, 2, \dots, M). \quad (2.80)$$

При этом связь коэффициентов $\beta_j^{(s)}$ и $\beta_j^{(s-1)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), относящихся к последующему и предыдущему отрезкам, осуществляется по схеме

$$\sum_{j=i}^m \omega_{ji}^{(s)} \beta_j^{(s-1)} = \beta_i^{(s)} - \omega_{0i}^{(s)}, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (s = 1, 2, \dots, M). \quad (2.81)$$

Дойдя в указанном процессе прогонки до конечной точки $x_M=L$, формируем, аналогично записи (2.77), систему алгебраических уравнений вида

$$U_i^2 = z_{i+m}^{(0)}(x_M) + \sum_{j=1}^m \beta_j^{(M)} [z_{i+m}^{(j)}(x_M)], \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.82)$$

относительно неизвестных коэффициентов $\beta_j^{(M)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Определив эти коэффициенты из указанной системы, осуществляем далее процесс обратной

прогонки (с последовательным изменением значений s от M до 1). При этом по найденным значениям $\beta_j^{(s)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) с использованием схемы (2.80) определяем искомое решение $[y(x_s)]$ в точке x_s , а с использованием системы алгебраических уравнений (2.81) – значения коэффициентов $\beta_j^{(s-1)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) для следующего (в порядке убывания номера) отрезка. Окончательно, по схеме (2.76) определяем искомое решение $[y(x_0)]$ в точке $x_0=0$. Таким образом, искомое решение $[y(x)]$ сформулированной краевой задачи оказывается найденным во всех введённых в рассмотрение точках x_s ($s = 0, 1, 2, \dots, M$) интервала интегрирования $0 \leq x \leq L$ системы (2.71).

Остаётся указать, что в изложенной процедуре ортогональной прогонки определение соответствующих частных решений системы (2.71), удовлетворяющих заданным начальным условиям в точках x_s ($s = 0, 1, 2, \dots, M-1$), может быть эффективно выполнено с использованием какого-либо из известных высокоточных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной.

2.3.3. Программная реализация изложенного алгоритма

Программная реализация описанного выше алгоритма выполнена на языке Фортран-90. Написание программы проводилось таким образом, чтобы обеспечивалась возможность ее перенастройки на любую из рассматриваемого типа задач. В этих целях наряду с числовым вводом данных использовался процедурный способ настройки программы на конкретную решаемую задачу, который предполагает введение пользователем соответствующих изменений в ряд блоков и подпрограмм, предназначенных для задания исходных данных.

Среди подпрограмм, вводящих исходные данные решаемой задачи, имеются:

- подпрограмма, задающая массив номеров гармоник разложений в ряды Фурье;

- подпрограмма, задающая для оболочки с номером s номера колец i_{1s} и i_{2s} , с которыми состыкованы её торцы 1 и 2;
- подпрограмма, задающая для i -того кольца его радиус, модули упругости, площадь поперечного сечения и соответствующие моменты инерции; если кольцо, соединяющее оболочки, является «фиктивным» (случай, когда торцы двух оболочек в расчетной схеме непосредственно стыкуются друг с другом), задается только радиус такого кольца;
- подпрограмма, задающая для оболочки с номером s значения параметров $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$;
- подпрограмма, задающая для p -той оболочки количество N слоёв заполнителя (в случае трёхслойной с заполнителем оболочки следует задать $N=1$, в противном случае – $N=0$);
- подпрограмма, задающая для p -той оболочки её длину, радиус поверхности приведения, общее количество слоёв и параметры упругости каждого слоя;
- подпрограмма, задающая для p -той оболочки значения толщины t каждого слоя и координаты z внутренней поверхности оболочки в зависимости от координаты x ;
- подпрограмма, задающая для p -той оболочки коэффициенты разложений в ряды Фурье поверхностных нагрузок в зависимости от номера гармоники n и координаты x ;
- подпрограмма, задающая для i -того кольца коэффициенты разложений в ряды Фурье приложенных к нему нагрузок в зависимости от номера гармоники n ;
- подпрограмма, задающая номера закрепляемых колец и типы закреплений.

В виде целочисленных массивов вводятся данные: по количеству оболочек в конструкции; количеству точек ортогонализации, взятых вдоль каждой оболочки; количеству точек в окружном направлении, в которых осуществляется вычисление параметров напряженно-деформированного состояния оболочек конструкции.

В качестве подпрограмм общего назначения оформлены следующие процедуры:

- процедура метода Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений n -ого порядка;
- процедура умножения матрицы на матрицу;
- процедура метода Кутта-Мерсона [49, 53] численного интегрирования системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно соответствующих производных;
- процедура (см. [49]), осуществляющая для s -той точки p -той оболочки ортогонализацию частных решений интегрируемой системы дифференциальных уравнений по схеме, описанной в подразделе 2.3.2.

Процесс численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений применительно к p -той оболочке строится с использованием следующих подпрограмм:

- двух подпрограмм, вычисляющих соответствующие жесткостные характеристики p -той оболочки (для случая $N=1$ и случая $N=0$) в зависимости от координаты x ;
- подпрограммы, вычисляющей (по запросу процедуры метода Кутта-Мерсона) значения производных функций y (при заданных значениях координаты x и функций y) с использованием сформированной для p -той оболочки системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Центральной подпрограммой вычислительной модели является подпрограмма, реализующая для p -той оболочки описанную в подразделе 2.3.2 процедуру ортогональной прогонки в сочетании с численным интегрированием соответствующей системы дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях в перемещениях.

В разработанном программном модуле для каждого номера гармоники n с использованием описанной в подразделе 2.3.1 схемы метода перемещений (которая в свою очередь опирается на использование указанной процедуры ортогональной прогонки) строится разрешающая система линейных

алгебраических уравнений относительно обобщенных перемещений колец. Определив эти перемещения, программа формирует по ним граничные условия в перемещениях для каждой оболочки и осуществляет (с использованием процедуры ортогональной прогонки) решение соответствующих краевых задач с вычислением амплитудных значений компонент напряженно-деформированного состояния оболочек. Окончательные результаты по определению напряженно-деформированного состояния исследуемой конструкции получаются в программе путём суммирования результатов для отдельных гармоник.

2.3.4. Представление приложенных к конструкции локальных нагрузок в виде рядов Фурье по окружной координате

При проведении в последующих главах настоящей работы исследований с применением разработанной программы будут рассматриваться локальные поверхностные нагрузки, распределение которых в окружном направлении α_2 описывается функцией с периодом π , представимой на отрезке $-\pi/2 \leq \alpha_2 \leq \pi/2$ в виде

$$f(\alpha_2) = \begin{cases} q & \text{при } -\alpha_0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_0 ; \\ 0 & \text{при } \alpha_0 < |\alpha_2| \leq \pi/2 , \end{cases} \quad (2.83)$$

где α_0 – малая величина, а параметр q (представляющий собой интенсивность нагрузки на заданном участке конструкции) не зависит от α_2 , но может зависеть от x .

Разложение указанной функции $f(\alpha_2)$ в соответствующий ряд Фурье имеет вид

$$f(\alpha_2) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \alpha_2), \quad (2.84)$$

где

$$a_0 = 2 \cdot q \cdot \alpha_0 / \pi, \quad a_n = 2 \cdot q \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \alpha_0) / (\pi n). \quad (2.85)$$

На рисунке 2.3 представлен график рассматриваемой функции $f(\alpha_2)$ (случай $q=1$ и $\alpha_0=0,05$ в сопоставлении с графиками, соответствующими различным частичным суммам ряда (2.84), в которых параметр n изменяется в диапазоне

$0 \leq n \leq N$. Приведённые результаты для аппроксимирующей заданную функцию отрезков ряда Фурье соответствуют значениям $N = 10, 20, 30, 50, 200, 400$. Видно, что при больших значениях N (порядка 200, 400) соответствующий отрезок ряда Фурье способен достаточно точно описать заданную функцию. Видно также, что уже при $N=50$ соответствующий отрезок ряда Фурье достаточно хорошо аппроксимирует заданную функцию.

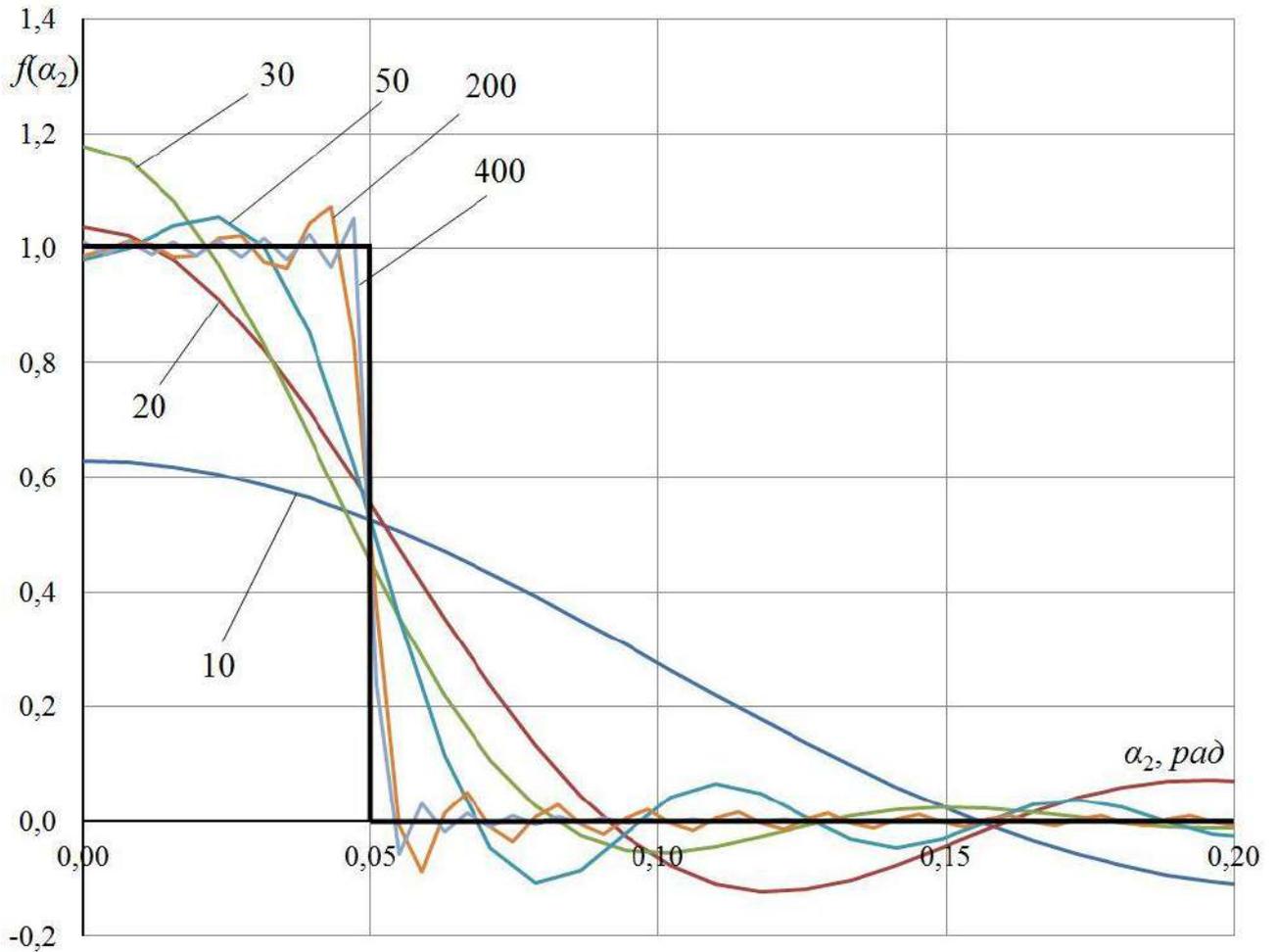


Рисунок 2.3 – Аппроксимация рассматриваемой локальной нагрузки различными отрезками ряда Фурье

2.4. Типы элементов программного комплекса «Abaqus», используемые при конечно-элементном моделировании исследуемых локально нагруженных конструкций, и процедура их применения при построении вариантов расчётных КЭ моделей

Поскольку заявленная методика расчета напряжённо-деформированного состояния локально нагруженных композитных цилиндрических конструкций включает пункт по согласованию результатов представленного выше алгоритма численного интегрирования с соответствующими результатами конечно-элементного моделирования, для осуществления такой операции необходимо выбрать какой-либо из известных конечно-элементных комплексов. Для указанных целей в настоящей работе использовался программный комплекс «Abaqus». При этом построение вычислительных моделей для рассматриваемого типа конструкций проводилось с применением элементов типа S4 и C3D20, краткая характеристика которых (в соответствии с [106]) выглядит следующим образом.

Элемент S4 представляет собой четырёхугольный (четырёхузловой) изопараметрический (линейного типа) оболочечный элемент с шестью степенями свободы в узле (три перемещения и три поворота), построенный в рамках теории оболочек, учитывающей поперечные сдвиги по схеме прямой линии (элемент типа Тимошенко). Поэтому при создании с помощью такого элемента вычислительных моделей в случае ортотропных оболочек требуется дополнительно задавать модули поперечного сдвига G_{13} , G_{23} материала оболочки. В то же время, если оболочка оказывается достаточно тонкой (так, что поперечные сдвиги становятся пренебрежимо малыми), в этом элементе специальным образом осуществляется переход к модели единой нормали Кирхгофа.

Элемент C3D20 представляет собой объёмный двадцати узловой шестигранный (изопараметрический с квадратичной функцией формы) элемент, позволяющий строить вычислительные модели применительно к упругим ортотропным телам.

Построение КЭ моделей (с применением описанных элементов) в последующих главах диссертационной работы в рамках предлагаемой расчётной методики осуществляется согласно следующей процедуре. Принимается во внимание, что создаваемая на основе указанных выше оболочечных (типа Тимошенко) и объёмных элементов расчётная КЭ модель может быть настроена путём задания завышенных (на 2-3 порядка) значений соответствующих модулей упругости на ситуацию, близкую к выполнению гипотез, заложенных в разработанную ЧИ модель. На подобную ситуацию и осуществляется первоначальная настройка КЭ модели, выступающей в качестве аналога соответствующей ЧИ модели. Остаётся путём измельчения расчётной сетки добиться близкого согласования расчётных результатов на основе построенных ЧИ и КЭ моделей (в том числе и по зонам краевых эффектов). Тем самым, численное (с подтверждённой достоверностью) решение рассматриваемой задачи (в рамках принятых в ЧИ модели гипотез) можно считать полученным. Далее путём перенастройки образованной КЭ модели на варианты с реальными значениями завышенных ранее модулей, оцениваются влияния таких факторов как поперечные сдвиги и сжимаемость заполнителя по толщине на напряженно-деформированное состояние композитной конструкции рассматриваемого класса.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ИЗЛОЖЕННОЙ МЕТОДИКИ К РАСЧЁТУ ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТЫ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ (ОДНОСЛОЙНЫХ) ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

В данной главе представлены полученные с использованием изложенной методики результаты решения задач о напряжённо-деформированном состоянии локально нагруженных стеклопластиковых цилиндрических конструкций применительно к случаям шпангоутов прямоугольного поперечного сечения и переменной толщины [6, 93, 98, 100, 101, 104]. В качестве локальных нагрузок рассматриваются осевые и радиальные силы, а также крутящие моменты.

3.1. Результаты численного моделирования конструкций со шпангоутами прямоугольного поперечного сечения (в сопоставлении с экспериментом)

Рассматриваем стеклопластиковую цилиндрическую конструкцию (рисунок 3.1), составленную из последовательно соединённых друг с другом шпангоутов I, II, III прямоугольного поперечного сечения (с размерами b , h) и цилиндрических оболочек 1, 2 (радиусом R_0 , длинами L_1 , L_2 и толщинами h_1 , h_2 , соответственно).

Исследование напряжённо-деформированного состояния подобной конструкции (в сопоставлении с экспериментом) осуществляется применительно к трём случаям нагружения, среди которых:

- случай приложения двух радиальных сил к промежуточному шпангоуту;
- случай приложения двух осевых сил к крайнему шпангоуту;
- случай приложения двух крутящих моментов к крайнему шпангоуту.

Обращаем внимание на то, что при расчёте рассматриваемой конструкции шпангоуты I, II, III могут быть (ввиду их прямоугольного поперечного сечения) смоделированы согласно схеме цилиндрической оболочки, имеющей заданную длину b и толщину h . В этом случае расчётная схема представляет собой пять последовательно соединённых оболочек I, 1, II, 2, III. Вычислительную ЧИ

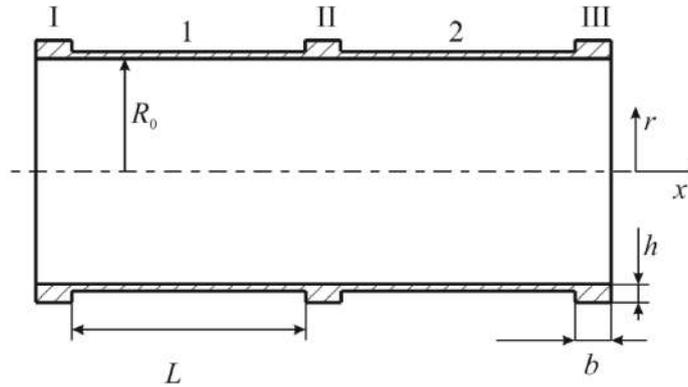


Рисунок 3.1 – Стеклопластиковая конструкция, составленная из последовательно соединённых друг с другом шпангоутов (круговых колец) и цилиндрических оболочек

модель, основанную на такой расчётной схеме, обозначаем как ЧИ-1.

Вычислительную ЧИ модель, основанную на расчётной схеме конструкции в виде двух оболочек 1, 2 и трёх колец I, II, III будем обозначать как ЧИ-2. В модели ЧИ-2 жёсткость $G_k J_k$ шпангоута на кручение будем оценивать, как и в работе [68], по схеме

$$G_k J_k = \frac{2G_{12}G_{13}}{G_{12} + G_{13}} \cdot \frac{h \cdot b^3}{12}.$$

Здесь G_{13} – соответствующий модуль поперечного сдвига материала конструкции.

Оболочечную версию КЭ модели данной конструкции строим на основе элемента S4. В качестве поверхности приведения при этом принимаем внутреннюю поверхность конструкции. Образованная КЭ модель представляет собой ортотропную цилиндрическую оболочку радиуса R_0 переменной вдоль оси x толщины в соответствии с толщинами секций I, 1, II, 2, III.

В варианте КЭ-1 такой модели для модулей поперечного сдвига материала конструкции принимаем существенно завышенные их значения, а именно $G_{13}=G_{23}=100 \cdot G_{12}$. Тем самым, затрудняем деформации поперечного сдвига в конструкции, заставляя работать расчётную модель по схеме единой нормали.

Модель КЭ-2 соответствует реальным значениям характеристик материала конструкции: G_{13} , G_{23} , G_{12} .

Строим также КЭ модель конструкции с использованием объёмных элементов C3D20 для шпангоутов I, II, III и оболочечных элементов S4 для оболочек 1, 2.

Отметим, что разбиение шпангоутов на оболочечные элементы в КЭ модели осуществлялось с выбором сетки, характерный размер ячейки которой составлял порядка 2 мм. Аналогичные по размерам ячейки имела и сетка оболочечных элементов несущих слоёв. В зонах краевых эффектов осуществлялось уменьшение осевых размеров оболочечных элементов до 0,2 мм.

Расчёты на основе ЧИ модели осуществлялись с выбором интервала между точками ортогонализации порядка 5 мм. При этом на каждом таком интервале интегрирование по схеме Кутта-Мерсона осуществлялось с выбором четырёх шагов.

3.1.1. Случай приложения двух радиальных сил к промежуточному шпангоуту

В работе [60] экспериментально исследован случай приложения двух радиальных нагрузок величины P (см. рисунок 3.2) к среднему шпангоуту рассматриваемого типа стеклопластиковой конструкции. Геометрические параметры конструкции описываются следующими величинами: внутренний радиус конструкции $R_0=296$ мм; длины и толщины оболочек 1 и 2 одинаковы, при этом $L_1=L_2=1300$ мм, $h_1=h_2=5$ мм; размеры поперечных сечений шпангоутов одинаковы, при этом $b=50$ мм, $h=35$ мм. Параметры упругости определены в виде: $E_1=1,85 \cdot 10^4$ МПа, $E_2=2,7 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{21}=0,07$, $G_{12}=0,35 \cdot 10^4$ МПа. В случае оболочечной КЭ-2 модели было принято $G_{13}=G_{23}=G_{12}=0,35 \cdot 10^4$ МПа.

Равномерное распределение каждой из нагрузок по участку приложения на шпангоуте (в продольном и окружном направлениях) обеспечивалось в

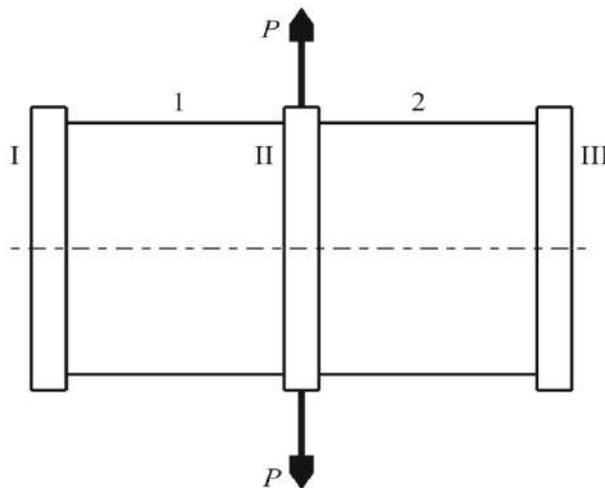


Рисунок 3.2 – Схема приложения к конструкции двух радиальных сил

эксперименте путём использования резиновых прокладок. Прикладываемая нагрузка имела величину $P=8000\text{ Н}$, размер участка приложения нагрузки в окружном направлении (см. формулу (2.83)) оценивался величиной $\alpha_0=0,167$.

В таблице 3.1 представлены результаты эксперимента и расчётов (с применением численного интегрирования и метода конечных элементов) в виде перемещения w кольца II и деформации ε_2^+ на его верхней поверхности при $\alpha_2=0$ и $\alpha_2=90^\circ$. Как видно, результаты расчётов по всем используемым вычислительным моделям практически совпадают. Отклонение от эксперимента при этом оценивается величиной порядка 10 %.

На рисунках 3.3 и 3.4 представлены полученные численным моделированием графики распределения вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- и ε_2^+ , ε_2^- на внешней и внутренней поверхности оболочки 2 при $\alpha_2=0$. Цифрами 1 и 2 отмечены результаты (соответственно для внешней и внутренней поверхностей оболочки), относящиеся к ЧИ модели, цифрами 3 и 4 – к КЭ-1 модели, а цифрами 3' и 4' – к КЭ-2 модели. Из рисунков 3.3 и 3.4 видно, что результаты расчётов на основе ЧИ модели практически совпадают с тем, что даёт КЭ-1 модель и не более чем на 10 % отличаются от того, что даёт КЭ-2 модель. Это говорит о том, что в данном случае влияние поперечных сдвигов достаточно мало.

Таблица 3.1. Сравнение результатов численного моделирования и эксперимента для нагруженного кольца II

α_2	Параметр	Эксперимент	ЧИ	КЭ
0°	w , [мм]	2,15	2,29	2,20
	ε_2^+	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$1,82 \cdot 10^{-3}$	$1,84 \cdot 10^{-3}$
90°	w , [мм]	-1,82	-2,05	-1,96
	ε_2^+	$-0,99 \cdot 10^{-3}$	$-1,00 \cdot 10^{-3}$	$-1,01 \cdot 10^{-3}$

Заметим, что приведённые иллюстративные материалы по численному интегрированию содержат лишь результаты, относящиеся к ЧИ-1 модели. В данном случае при использовании ЧИ-1 и ЧИ-2 модели результаты оказались практически одинаковыми. Это обусловлено тем, что в рассмотренной схеме нагружения все шпангоуты работают преимущественно на изгиб, и эффект кручения шпангоутов не играет существенной роли.

Полученное таким образом хорошее согласование расчётных (ЧИ и КЭ) результатов для рассматриваемой локально нагруженной конструкции на основе двух разных вычислительных методов свидетельствует о достоверности этих результатов.

Отметим, что в [60] было представлено решение рассматриваемой задачи на основе полубезмоментного подхода. Целью расчёта в [60] было определение значений деформаций ε_2 на поверхности нагруженного шпангоута. При этом предполагалось, что эти деформации являются определяющими при оценке прочности данной конструкции, а деформации ε_1 в стыкуемых с нагруженным шпангоутом оболочках не играют в этом отношении существенной роли. Представленные на рисунке 3.3 результаты численного моделирования, касающиеся деформаций ε_1^+ , ε_1^- в зоне стыка оболочки 2 со шпангоутом II, говорят о том, что эти деформации соизмеримы по величине с указанными

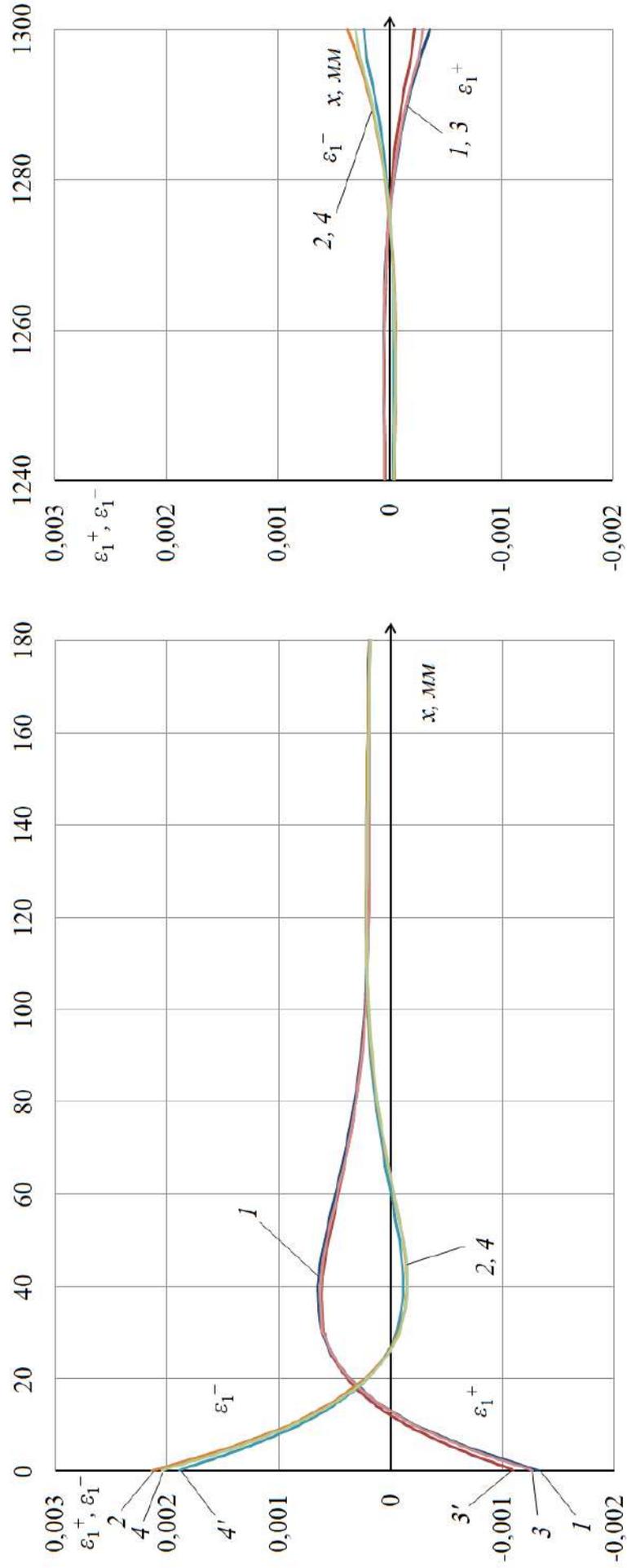


Рисунок 3.3 – Распределение вдоль оси x деформаций ϵ_1^+ , ϵ_1^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки 2 ($\alpha_2=0$) при действии двух радиальных сил

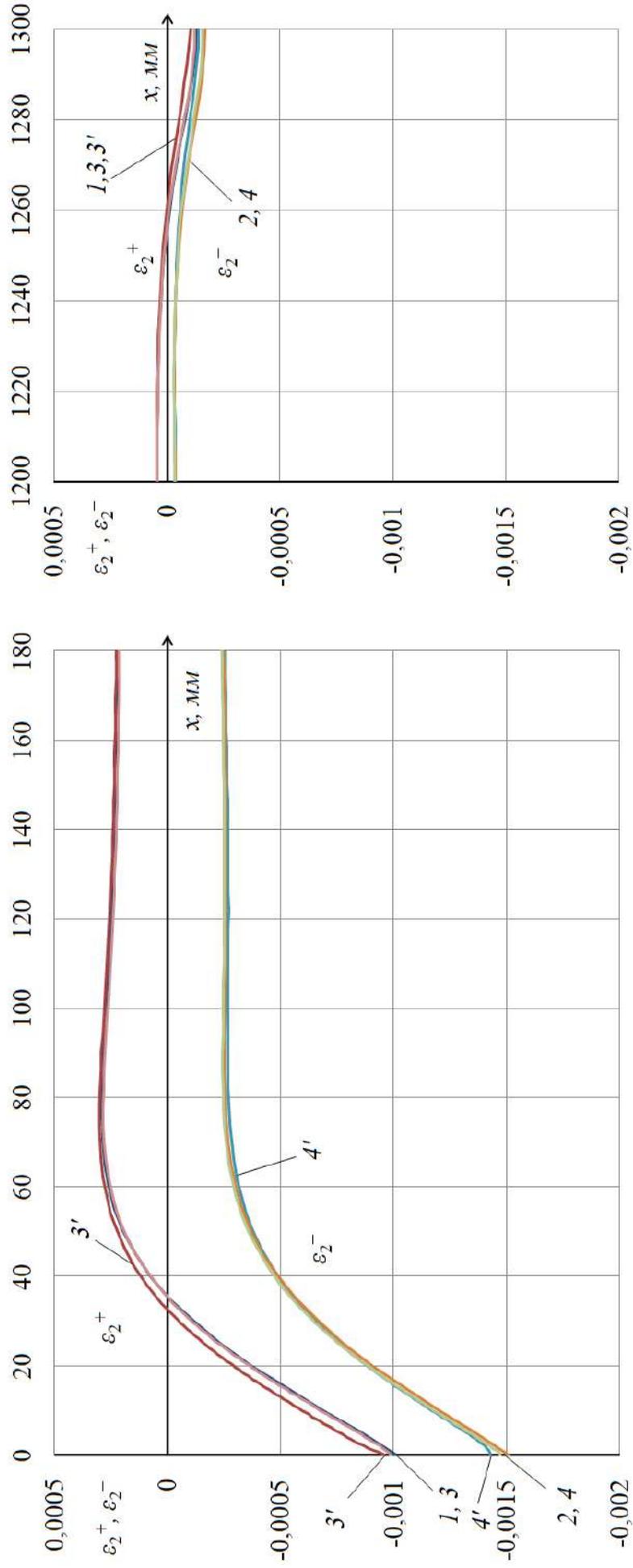


Рисунок 3.4 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_2^+ , ε_2^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки 2 ($\alpha_2=0$) при действии двух радиальных сил

деформациями ε_2 на поверхности шпангоута II. Тем самым обнаруживается, что причиной разрушения данной конструкции при приложении к промежуточному шпангоуту двух радиальных сил может быть не только высокий уровень кольцевых деформаций ε_2 в нагруженном шпангоуте, но и не менее высокий уровень деформаций ε_1 (изгибного характера) в состыкованных с ним оболочках.

3.1.2. Случай приложения двух осевых сил к крайнему шпангоуту

В работе [68] был проведён эксперимент с приложением двух осевых сжимающих нагрузок величины $P=5710\text{ Н}$ (см. рисунок 3.5) к шпангоуту I стеклопластиковой цилиндрической конструкции, схематично представленной на рисунке 3.1. Шпангоут III при этом опирался на стальную плиту через резиновую прокладку. С помощью резиновых прокладок обеспечивалась и равномерность распределения каждой из нагрузок P по участку приложения на шпангоуте. Размер в окружном направлении указанного участка оценивался величиной $\alpha_0=0,05$. Геометрические параметры конструкции заданы в виде: внутренний радиус конструкции $R_0=150\text{ мм}$; длины и толщины оболочек 1 и 2 одинаковы, при этом $L_1=L_2=220\text{ мм}$, $h_1=h_2=3,47\text{ мм}$; размеры поперечных сечений шпангоутов одинаковы, а именно $b=20\text{ мм}$, $h=9,4\text{ мм}$. Параметры упругости определены в виде: $E_1=1,8\cdot 10^4\text{ МПа}$, $E_2=2,6\cdot 10^4\text{ МПа}$, $\nu_{21}=0,07$, $G_{12}=0,45\cdot 10^4\text{ МПа}$, $G_{13}=0,345\cdot 10^4\text{ МПа}$, $G_{23}=0,32\cdot 10^4\text{ МПа}$.

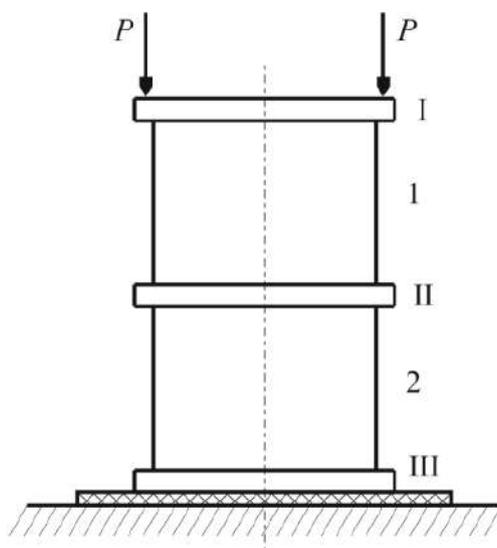


Рисунок 3.5 – Схема приложения к конструкции двух осевых сил

В данном случае силы P , равнодействующие которых, будучи приложенными с существенным эксцентриситетом по отношению к поверхности приведения оболочки 1, способны вызвать значительный крутящий эффект в нагруженном шпангоуте. Расчётная модель применительно к подобному случаю должна обладать возможностью более точного учёта деформаций поперечного сдвига в нагруженном шпангоуте. Соответствующую КЭ модель конструкции будем строить на основе упоминавшегося объёмного элемента C3D20 применительно к нагруженному шпангоуту I и оболочечного элемента S4 применительно к оболочкам 1, 2 и шпангоутам II, III.

Используя возможности комплекса «*Abaqus*», накладываем кинематические связи на узлы объёмной конечно-элементной сетки шпангоута I, относящиеся к его правому торцу, и стыкуемые с этим торцом узлы конечно-элементной сетки оболочки 1 так, чтобы эти связи соответствовали работе указанного стыка шпангоута и оболочки по схеме прямой линии. Очевидно, что с помощью построенной КЭ модели можно реализовать вариант, соответствующий ситуации практического отсутствия поперечных сдвигов в нагруженном шпангоуте. Для этого достаточно существенно увеличить задаваемые значения модулей сдвига G_{13} , G_{23} у этого шпангоута (например, задать $G_{13}=G_{23}=100 \cdot G_{12}$). Такой вариант КЭ модели рассматриваемой конструкции будем обозначать как КЭ-3, а вариант с заданием реальных значений G_{13} , G_{23} – как КЭ-4.

На рисунке 3.6 представлены расчётные и экспериментальные результаты по распределению вдоль оси x меридиональных деформаций ε_1^+ и ε_1^- на внешней и внутренней поверхности оболочки 1 при $\alpha_2=0$. Здесь цифрами 1 и 2 отмечены результаты (соответственно для внешней и внутренней поверхностей оболочки), относящиеся к ЧИ-1 модели, цифрами 3 и 4 – к КЭ-3 модели, цифрами 3' и 4' – к КЭ-4 модели. Кружки соответствуют экспериментальным результатам для деформаций срединной поверхности оболочки.

Как видно, результаты расчётов с использованием ЧИ-1 и КЭ-3 моделей хорошо согласуются между собой в зоне краевого эффекта ($x=0$) и с

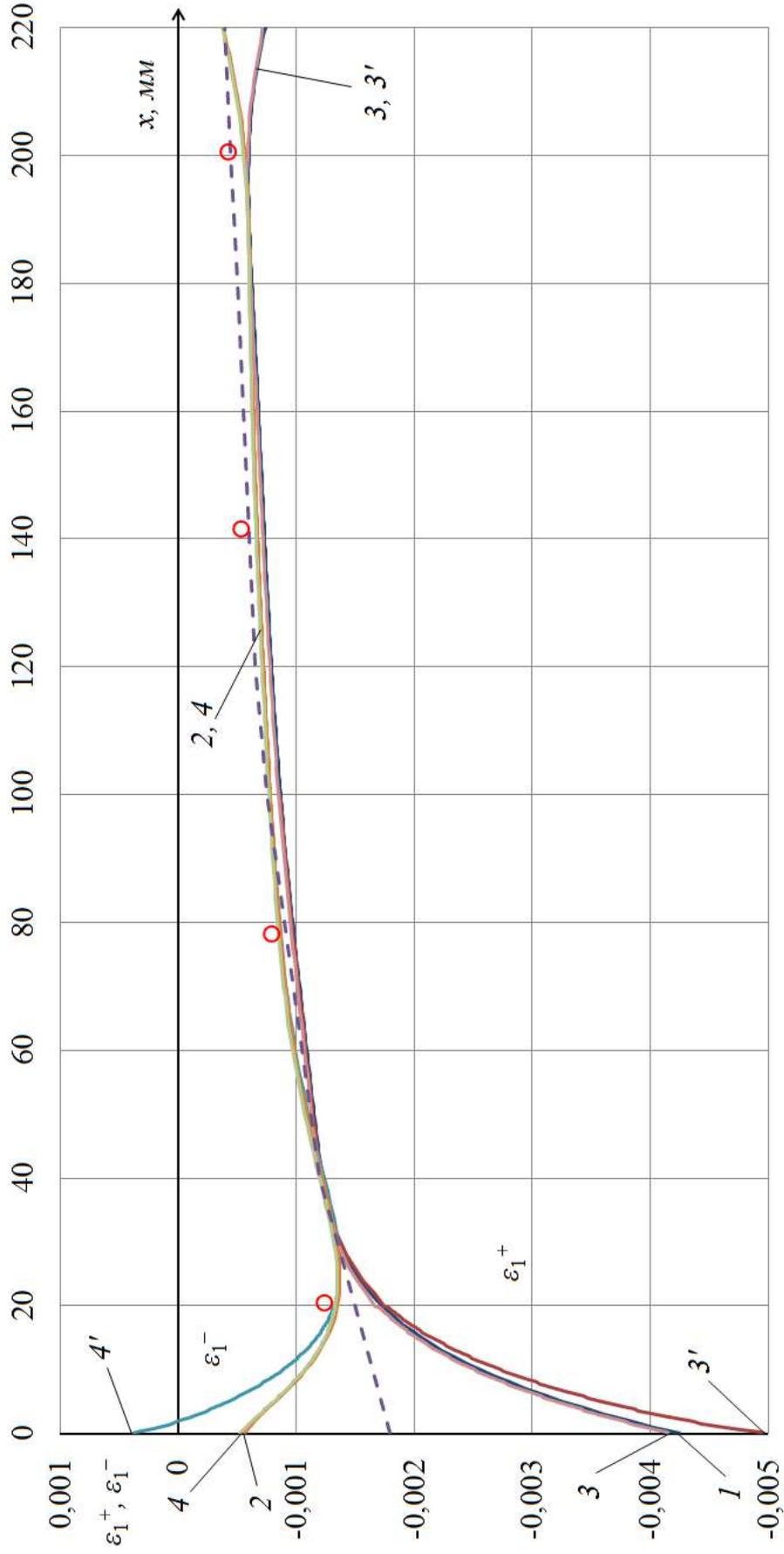


Рисунок 3.6 – Распределение вдоль оси x деформаций ϵ_1^+ , ϵ_1^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки 1 ($\alpha_2=0$) при действии двух осевых сил

экспериментом в безмоментной зоне. Отмечаемое в данном случае хорошее согласование результатов расчётов с использованием различных вычислительных подходов (в одинаковой мере пренебрегающих поперечными сдвигами) свидетельствует о достоверности полученных численным моделированием значений деформаций в зоне стыка оболочки с нагруженным шпангоутом.

Представленные на рисунке 3.6 результаты расчётов, соответствующие модели КЭ-4, позволяют оценить влияние поперечных сдвигов в нагруженном шпангоуте на напряжённо-деформированное состояние стыкуемой с ним оболочки. Как видно, учёт в расчётной модели поперечных сдвигов приводит в данном случае к увеличению на 20 % меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) в оболочке 1 на стыке с нагруженным шпангоутом.

Укажем также, что в данном случае расчёты на основе ЧИ-2 модели привели практически к тем же результатам, что и на основе ЧИ-1 модели.

Отметим, что в работе [68] рассматриваемая задача решалась на основе полубезмоментного подхода. В результате расчётов в [68] были определены значения меридиональных деформаций срединной поверхности оболочки, стыкуемой с нагруженным шпангоутом (пунктирная линия на рисунке 3.6). При этом исходили из того, что именно деформации ε_1 определяют прочность данной конструкции. Максимальное значение этих деформаций оценено в [68] в виде $\varepsilon_1=0,0018$. Сравнивая это значение с тем, что даёт численное решение данной задачи по излагаемой методике (см. рисунок 3.6), приходим к выводу, что приближённый расчёт [68] по полубезмоментной схеме даёт более чем вдвое заниженную оценку уровня обсуждаемых деформаций ε_1 (и соответствующих напряжений σ_1).

3.1.3. Случай приложения к крайнему шпангоуту двух крутящих моментов

В работе [68] был также проведён эксперимент с совместным приложением двух крутящих моментов величины M и двух радиальных нагрузок величины P

(см. рисунок 3.7) к шпангоуту I рассматриваемого типа конструкции. Указанные величины были заданы в виде $M=78,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и $P=148,2 \text{ Н}$. Толщины оболочек 1 и 2 были одинаковы и имели значения $h_1=h_2=4,2 \text{ мм}$. Размеры поперечных сечений шпангоутов I, II, III по ширине b соответственно имели значения $19,5 \text{ мм}$; $20,5 \text{ мм}$; 19 мм , а по высоте h – значения $9,6 \text{ мм}$; $14,9 \text{ мм}$; $9,6 \text{ мм}$. Все остальные параметры

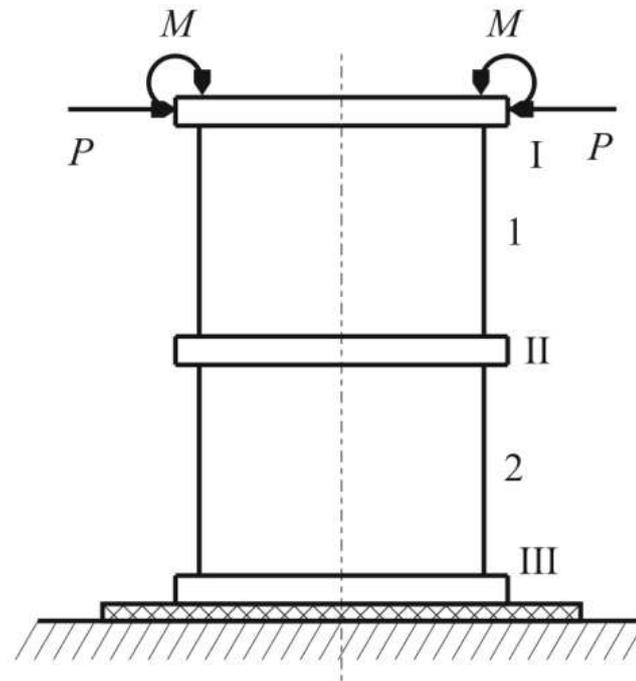


Рисунок 3.7 – Схема приложения двух крутящих моментов величины M и двух радиальных нагрузок величины P

конструкции, включая и величину α_0 , имели те же значения, что и в предыдущем случае. Заметим, что при рассмотрении шпангоута I по схеме оболочки и схеме объёмного тела, соответствующие расчётные ЧИ-1, КЭ-3, КЭ-4 модели строились, исходя из предположения, что на оболочку I в зоне приложения момента M и силы P действует линейно изменяющаяся вдоль оси x поверхностная нагрузка q_z , статически эквивалентная совместному действию момента M и силы P . Такой расчётный вариант приложения нагрузки коррелируется с тем, что в эксперименте обсуждаемый момент M реализовывался с помощью рычага, один конец которого охватывал (через резиновые прокладки) по внешней и внутренней поверхностям шпангоута I зону размером $2\alpha_0$.

На рисунке 3.8 представлены расчётные и экспериментальные результаты по распределению вдоль оси x меридиональных деформаций ε_1^+ и ε_1^- на внешней и внутренней поверхности оболочки 1 при $\alpha_2=0$. Цифрами 1 и 2 отмечены результаты (соответственно для внешней и внутренней поверхности оболочки), относящиеся к ЧИ-1 модели, цифрами 3 и 4 – к КЭ-3 модели, цифрами 3' и 4' – к КЭ-4 модели. Как и ранее, отмечаем высокий уровень пиковых значений деформаций ε_1^+ и ε_1^- . Отмечаем также практическое совпадение в данном случае результатов ЧИ-1 и КЭ-3 моделирований, а также их хорошее согласование с имеющимися экспериментальными данными (звёздочки и кружки на рисунке 3.8). Это свидетельствует о достоверности полученных на основе предложенной методики численных решений рассматриваемой задачи.

Влияние деформаций поперечного сдвига на сопротивляемость шпангоута I (не учитываемых в моделях ЧИ-1 и КЭ-3) в данном расчётном случае можно оценить путём сравнения с КЭ-4 расчётом. Как видно, учёт указанных деформаций в данном случае приводит к корректировке результатов по деформациям ε_1 (и соответствующим напряжениям σ_1) оболочке 1 на стыке с локально нагруженным шпангоутом примерно на 27 % в сторону увеличения их значений.

Укажем, что при проведении расчётных исследований с использованием построенных применительно к данному расчётному случаю вычислительных моделей было также установлено следующее.

Если момент M в ЧИ-1 модели приложить (в качестве граничного условия) к торцу оболочки I, то пиковые значения деформаций ε_1^+ и ε_1^- получат значения (0,0141; -0,0148), что существенно отличается от результатов, представленных на рисунке 3.8: (0,0112; -0,0108). Это говорит о существенном влиянии в рассматриваемом случае способа моделирования прикладываемой к шпангоуту локальной моментной нагрузки на результаты расчёта напряжённо-деформированного состояния.

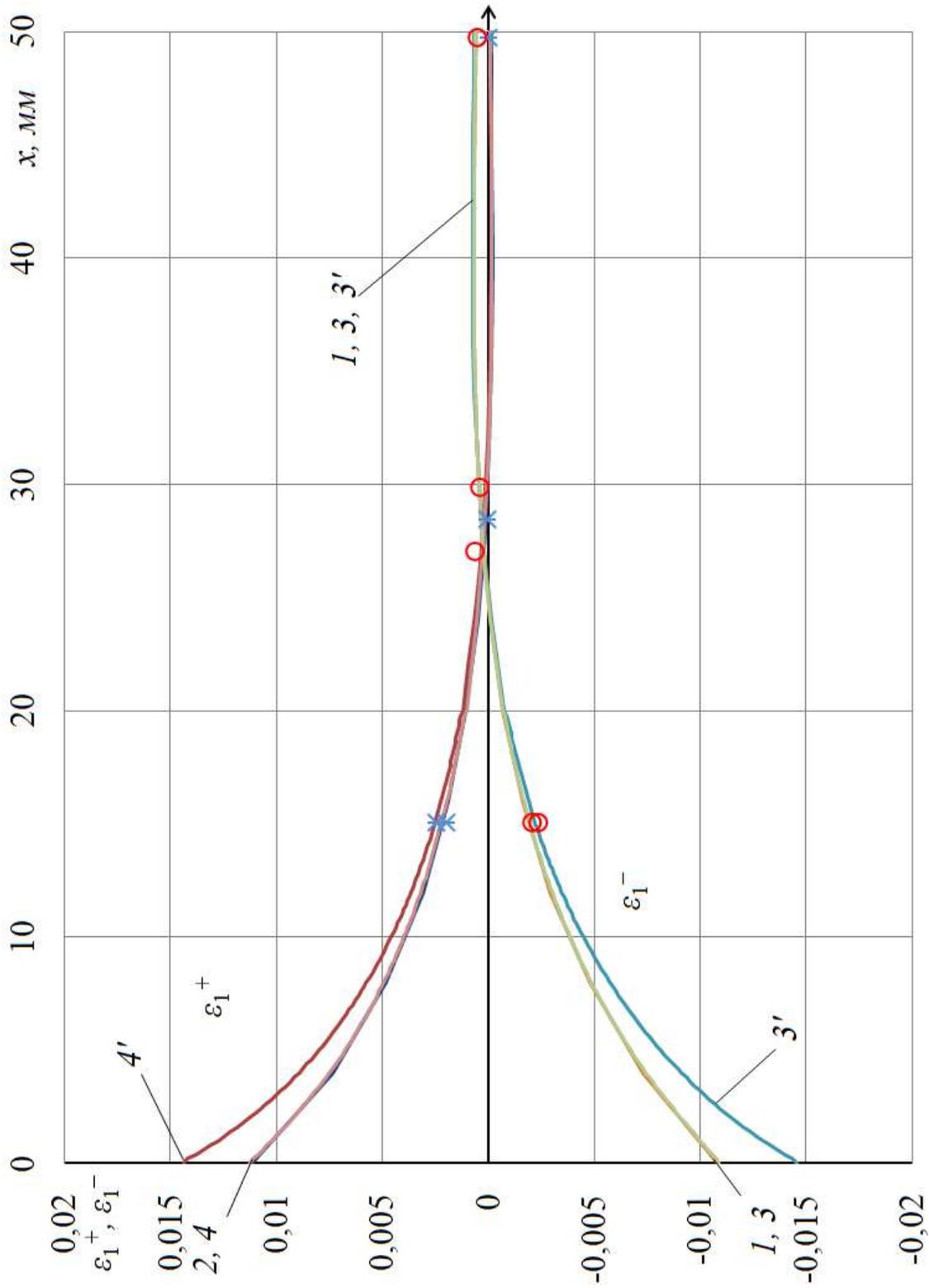


Рисунок 3.8 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки 1 ($\alpha_2=0$) при действии двух крутящих моментов

Если решение рассматриваемой задачи о напряжённо-деформированном состоянии осуществить с использованием ЧИ-2 модели (когда шпангоут I рассматривается по описанной выше схеме кольца), то упомянутые пиковые значения деформаций в оболочке 1 приобретут вид $\varepsilon_1^+ = 0,0157$ и $\varepsilon_1^- = -0,0168$ (что существенно отличается от ЧИ-1 результатов). Если увеличить в 1,9 раза используемую в ЧИ-2 модели жёсткость $G_k J_k$ шпангоута I на кручение, то результатом будет: $\varepsilon_1^+ = 0,0123$ и $\varepsilon_1^- = -0,0130$. Это говорит о существенном влиянии в данном случае крутильной жесткости нагруженного шпангоута на результаты расчёта деформаций оболочки в зоне стыка с этим шпангоутом. А если учесть, что величина указанной жёсткости может быть оценена по имеющимся в литературе формулам лишь крайне приближённо, то более предпочтительной при решении рассматриваемого класса задач представляется расчётная модель, которая рассматривает шпангоут по схеме оболочки и тем самым не использует при постановке задачи подобный жесткостной параметр в качестве исходного. Таковыми в этом плане являются построенные КЭ модели и модель ЧИ-1.

Отмечаем также тот факт, что рассматриваемая задача с локально приложенными к шпангоуту I моментами была решена аналитически в работе [68]. При этом за основу в [68] был принят полубезмоментный подход в сочетании с определением деформаций ε_1 в зоне стыка оболочки 1 с нагруженным шпангоутом по схеме краевого эффекта с учётом вклада только гармоники с $n=0$. Максимальное значение деформаций ε_1 на внешней и внутренней поверхностях оболочки 1 оценено в [68] в виде $\varepsilon_1=0,0032$. Сравнивая это значение с тем, что даёт численное решение данной задачи по излагаемой методике (см. рисунок 3.8), приходим к выводу, что приближённый расчёт [68] даёт более чем трёхкратно заниженную оценку значения обсуждаемых деформаций ε_1 (и соответствующих напряжений σ_1).

В качестве выводов по результатам представленной выше серии исследований отметим следующее:

– на основе метода численного интегрирования (ЧИ) и метода конечных элементов (КЭ: комплекс «*Abaqus*», оболочечные элементы S4 и объёмные элементы C3D20) построены вычислительные модели, ориентированные на решение задач о деформации локально нагруженных ортотропных цилиндрических оболочек со шпангоутами прямоугольного поперечного сечения. В указанном наборе моделей шпангоуты рассматривались:

- а) по схеме кольца с недеформированным поперечным сечением;
- б) по схеме цилиндрической оболочки, как с учётом, так и без учёта поперечных сдвигов;
- в) в рамках объёмной модели с выполнением гипотезы прямой линии для её торца, стыкуемого с оболочкой;

– с использованием построенных моделей осуществлено решение задач о напряжённо-деформированном состоянии стеклопластиковой конструкции, состоящей из двух цилиндрических оболочек и трёх круговых колец (шпангоутов) прямоугольного поперечного сечения, при различных вариантах приложения локальных нагрузок к одному из шпангоутов (случаи приложения двух радиальных сил, двух осевых сил, двух моментов);

– достоверность полученных численных решений в зонах краевых эффектов подтверждена фактом хорошего согласования результатов ЧИ и КЭ моделирования. Дано сравнение с имеющимся экспериментом;

– проведёнными расчётами показано, что меридиональные деформации в окрестности стыка оболочки с локально нагруженным шпангоутом являются определяющими при оценке прочности рассмотренных конструкций;

– показано, что в случае, когда эффект кручения вносит существенный вклад в сопротивляемость подвергнутого локальным нагрузкам шпангоута, более предпочтительной при решении рассматриваемого класса задач представляется расчётная модель, которая рассматривает шпангоут не по схеме кольца, а по схеме цилиндрической оболочки;

– выполнена оценка влияния поперечного сдвига в нагруженном шпангоуте на напряжённо-деформированное состояние оболочки в окрестности её стыка с

этим шпангоутом. Установлено, что в случаях, когда существенным фактором при деформировании локально нагруженного шпангоута является его кручение, учёт поперечных сдвигов в таком шпангоуте может приводить к повышению пиковых значений меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) оболочки на стыке со шпангоутом на величину порядка 27 %;

– установлено, что имеющиеся решения рассмотренных задач на основе полубезмоментного подхода дают двух-трёхкратно заниженную оценку по уровню меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) оболочки в зоне стыка с нагруженным шпангоутом.

3.2. Исследование напряжённо-деформированного состояния стеклопластикового резервуара с подкрепляющими шпангоутами переменной толщины

Характерной чертой многих из проектируемых композитных цилиндрических конструкций является наличие подкрепляющих шпангоутов переменной толщины. В результате осуществляется плавный технологический переход толщины конструкции от максимального значения на шпангоуте к минимальному значению, характерному для подкрепляемой оболочки. К таким конструкциям относятся, в частности, стеклопластиковые резервуары различного назначения. Ниже представлены результаты численного решения задачи о напряжённо-деформированном состоянии подобного типа резервуара при приложении двух осевых сил к одному из шпангоутов [93].

3.2.1. Случай приложения двух осевых сил к промежуточному шпангоуту

В качестве объекта моделирования рассматриваем закрепленную по левому краю стеклопластиковую цилиндрическую оболочку (рисунок 3.9), подкрепленную двумя шпангоутами переменной толщины. Принимаем, что материал оболочки имеет следующие физико-механические характеристики:

$E_1=1,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $E_2=2,3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $G_{12}=0,42 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $G_{23}=G_{13}=0,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$,
 $\nu_{21}=0,13$.

На рисунке 3.9 представлены параметры, определяющие геометрию моделируемой оболочки. При этом в качестве номинальных приняты следующие значения этих параметров: $R=750 \text{ мм}$, $L_1=L_3=1000 \text{ мм}$, $L_2=L_4=360 \text{ мм}$, $h=10 \text{ мм}$, $t=50 \text{ мм}$, $b=180 \text{ мм}$. Для удобства последующего анализа оболочка условно разбита на семь участков, последовательно занумерованных от 1 до 7.

На рисунке 3.10 представлена схема нагружения рассматриваемой конструкции двумя осевыми силами $P=2 \cdot 10^5 \text{ Н}$, приложенными к утолщенной части (с длиной b и толщиной t) левого шпангоута (участок 3 оболочки).

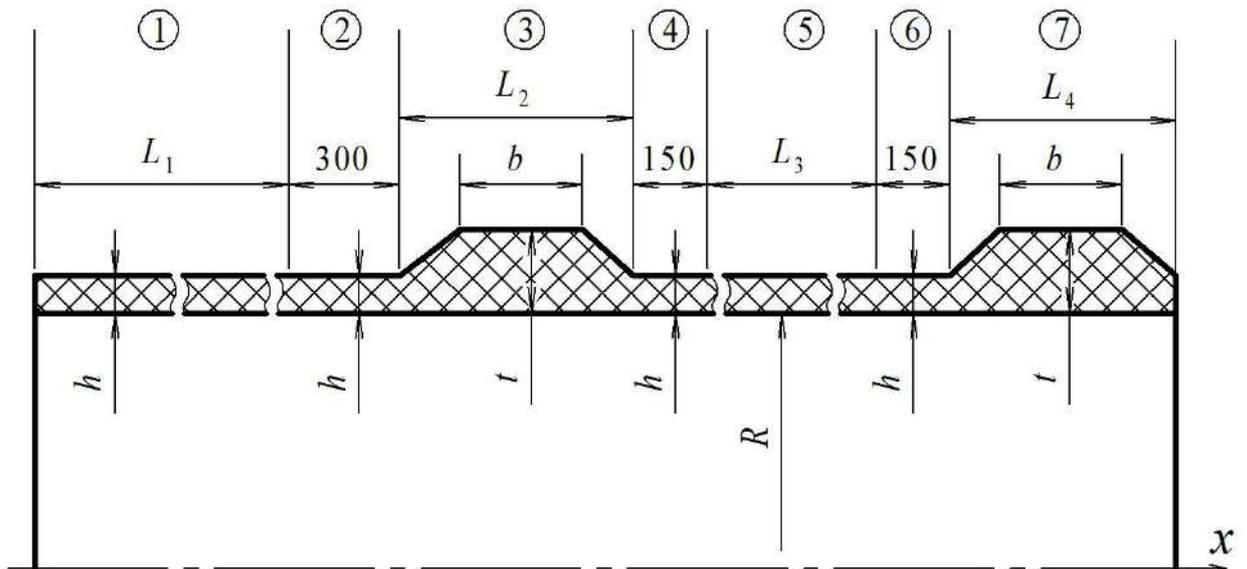


Рисунок 3.9 – Геометрические характеристики исследуемого объекта

Поскольку при построении соответствующей вычислительной модели в качестве поверхности приведения выбрана внутренняя (радиусом R) поверхность оболочки, в схему нагружения включены дополнительно два локальных момента $M=P \cdot t$, значения которых оценены, исходя из размера плеча t силы P . Угловой размер α_0 зоны в окружном направлении (см. запись (2.83)), вдоль которой распределены

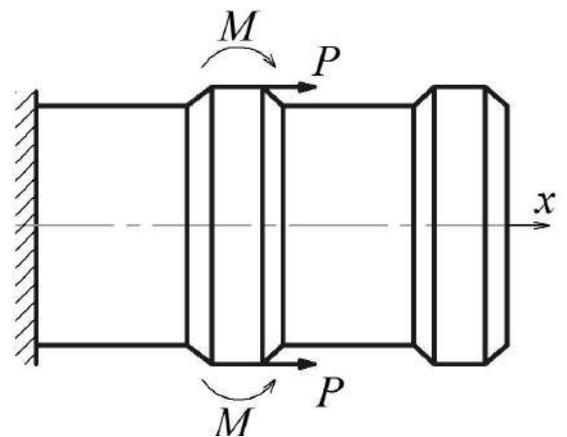


Рисунок 3.10 – Расчётная схема оболочки с нагруженным промежуточным шпангоутом

силовые факторы P и M , принимаем в виде $\alpha_0=0,1$. В расчетной ЧИ (а именно ЧИ-1) модели обсуждаемая пара локальных нагрузок P и M сведена к статически эквивалентной системе действующих на оболочку поверхностных нагрузок с интенсивностями q_x и q_z (в осевом и нормальном направлениях), которые распределены по зоне приложения факторов P и M , имеющей упомянутые размеры α_0 и b в окружном и осевом направлениях. Вычисление значений параметров q_x и q_z в указанных зонах проводится с использованием выражений вида

$$q_x = \frac{P}{2 \cdot \alpha_0 \cdot R \cdot b}, \quad (3.1)$$

$$q_z = -\frac{M(x-x_0)}{2 \cdot \alpha_0 \cdot R \cdot J}, \quad J = b^3/12. \quad (3.2)$$

Здесь x_0 – значение координаты x середины зоны (размером b), вдоль которой распределена нагрузка q_z .

Разложение локально действующих силовых факторов q_x и q_z в ряды Фурье по координате α_2 осуществляется по схеме (2.83), где вместо фактора q следует сначала подставить параметр q_x , вычисляемый по формуле (3.1), а затем – параметр q_z , вычисляемый по схеме (3.2).

При построении соответствующей оболочечной КЭ (а именно КЭ-2) модели (на основе элемента S4), учитывающей поперечные сдвиги, использовалась встроенная в комплекс «*Abaqus*» возможность, которая позволяет эквивалентным образом перенести действие локальной силы P на упомянутую выше зону (размером α_0 и b) поверхности приведения оболочки посредством введения в расчетную схему «фиктивного» жесткого включения, сцепленного с этой зоной. Такой прием в данном случае не должен приводить к заметному различию с описанной ЧИ моделью, поскольку подобное локальное ужесточение представляется несущественным на фоне имеющей место значительной жесткости нагружаемого шпангоута. Сетка конечных элементов поверхности приведения рассчитываемой оболочки строилась таким образом, чтобы в зонах

предполагаемых краевых эффектов размер сеточной ячейки был порядка 1 мм. В остальных зонах подобный размер доводился до 10 мм.

На рисунках 3.11, 3.12 представлены полученные расчетами результаты по распределению вдоль оси x меридиональных ε_1^+ , ε_1^- и окружных ε_2^+ , ε_2^- деформаций на внешней и внутренней поверхности рассматриваемой оболочки при $\alpha_2=0$ (в осевом сечении, проходящем через вектор силы P). Цифрами 1 и 2 отмечены результаты (соответственно для внешней и внутренней поверхности оболочки), относящиеся к ЧИ-1 модели, а цифрами 3 и 4 – к КЭ-2 модели.

Как видно, результаты КЭ-2 и ЧИ-1 моделирований практически совпадают (в том числе и в зонах краевых эффектов), что свидетельствует о достоверности полученных расчетных результатов и практическом невлинии учёта поперечных сдвигов на эти результаты (некоторое различие КЭ-2 и ЧИ-1 результатов на участке 3, соответствующем нагруженному шпангоуту, связано с использованием упомянутой схемы «фиктивного» жесткого включения). Преобладающими в данном расчетном случае являются меридиональные деформации. Наибольшего значения эти деформации достигают (вследствие краевого эффекта) на стыке участка 2 оболочки с нагруженным шпангоутом 3. Причем, это имеет место на внешней поверхности оболочки, где $\varepsilon_1^+=0,0042$. Аналогичная деформация на внутренней поверхности при этом почти на порядок меньше. Укажем, что в отмеченной точке максимума меридиональной деформации окружная деформация имеет на порядок меньшее значение $\varepsilon_2^+=0,0003$. Таким образом, в рассматриваемом расчетном случае в указанной (опасной на разрыв) точке оболочки реализуется напряженное состояние, близкое к одноосному, с растягивающим меридиональным напряжением, оцениваемым величиной $\sigma_1=0,0042 \cdot E_1$.

Из рисунков 3.11, 3.12 видно также, что на большей части исследуемой оболочки имеет место безмоментное напряженное состояние, являющееся основным для рассматриваемого расчетного случая протяженной оболочки, находящейся под действием осевых нагрузок. При этом в работе по

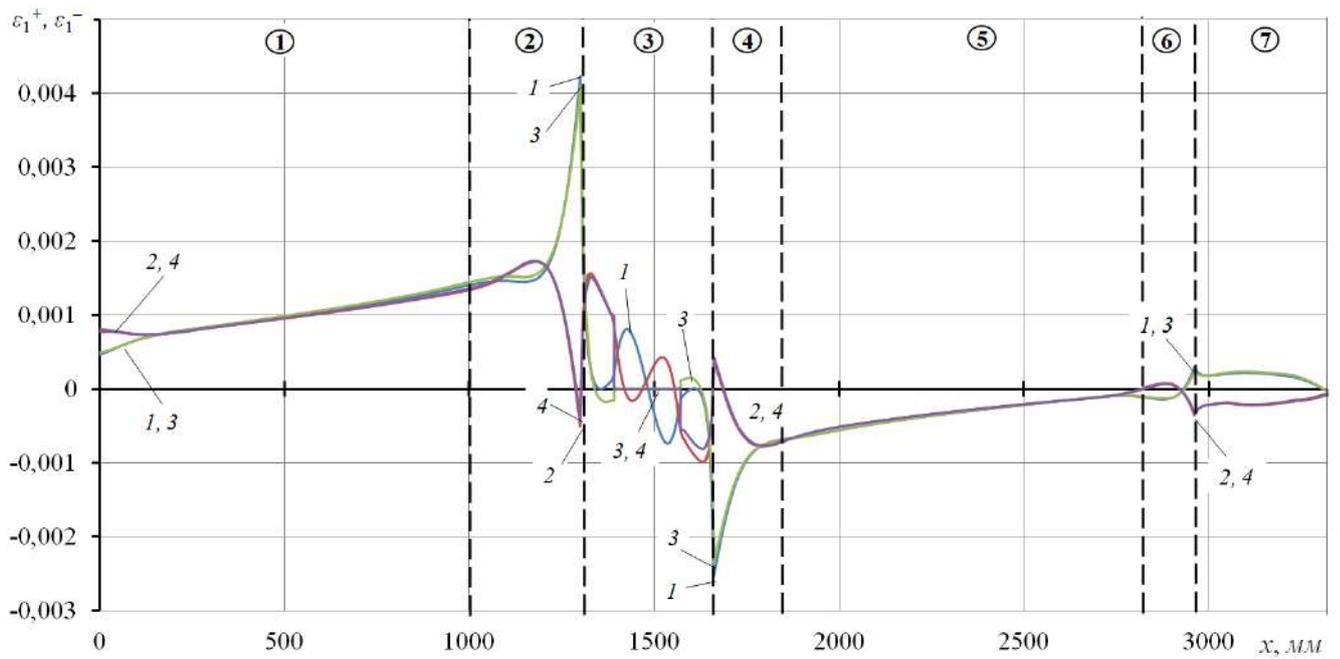


Рисунок 3.11 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- на внешней и внутренней поверхности рассматриваемой оболочки при $\alpha_2=0$. Случай приложения сил P к шпангоуту 3

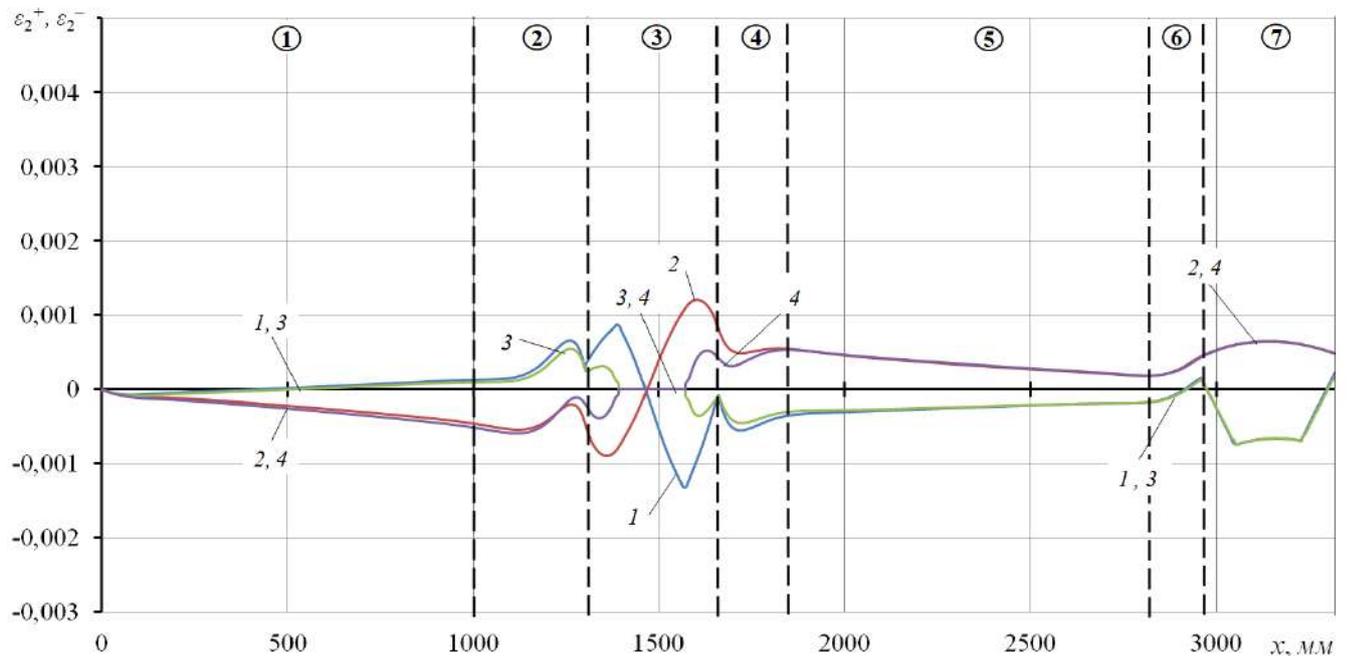


Рисунок 3.12 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_2^+ , ε_2^- на внешней и внутренней поверхности рассматриваемой оболочки при $\alpha_2=0$. Случай приложения сил P к шпангоуту 3

сопротивлению приложенным к шпангоуту 3 осевым силам участвует не только протяженный участок 1 слева от этого шпангоута, но и протяженный участок 5 оболочки справа от него. Обращает на себя внимание то, что уровень изгибных меридиональных деформаций участка оболочки, стыкуемого со шпангоутом 3 справа, несколько меньше того, что имеет место для участка слева от этого шпангоута. При этом указанное уменьшение коррелирует (примерно пропорционально) с аналогичным уменьшением (при переходе через шпангоут 3 слева направо) уровня меридиональных деформаций, относящихся к безмоментной зоне оболочки. Эти наблюдения позволяют заключить, что основополагающей в рассматриваемого типа расчетном случае является безмоментная работа всех участков оболочки, включая зоны утолщений (шпангоуты). В этом плане роль шпангоута, к которому приложены осевые локальные нагрузки, состоит в том, чтобы, обладая высокими жесткостными характеристиками, он имел возможность сглаживать эффекты приложенного к нему локального осевого воздействия. В результате, усилия, передаваемые посредством шпангоута на состыкованные с ним участки оболочки, оказываются более плавно распределенными по контуру. Тем самым, создаются условия, благоприятствующие снижению уровня деформаций в протяженных безмоментных зонах оболочки. Достигнув в соответствии с приложенными нагрузками определенного безмоментного напряженно-деформированного состояния, оболочка, будучи состыкованной с жестким объектом, каким является шпангоут, будет претерпевать локальный изгиб (в узкой зоне краевого эффекта). При этом изгибный эффект должен быть тем большим, чем выше уровень меридиональных деформаций безмоментного (основного) состояния оболочки вблизи стыка со шпангоутом.

Из сказанного следует, что наиболее эффективным способом снижения уровня указанных выше деформаций ε_1^+ в рассматриваемом расчетном случае является увеличение жесткости нагружаемого шпангоута. При этом характер изменения толщины вдоль участка 3 не должен оказывать существенного влияния на этот уровень. В таблице 3.2 представлены результаты расчетных исследований,

подтверждающие эти выводы. Видно, что увеличение размера b от 180 мм до 340 мм приводит к снижению обсуждаемого уровня деформаций на 27 %. В случае увеличения размера t от 50 мм до 75 мм подобный эффект составляет 18 %. По параметрам ν_{21} , E_2 , α_0 существенного эффекта не отмечено.

Таблица 3.2. Значения деформаций ε_1^+ , ε_1^- , ε_2^+ , ε_2^- на стыке участков 2 и 3 оболочки в исходном варианте расчёта и при отклонении величины одного из параметров b , t , ν_{21} , E_2 , α_0 , от принятого номинального значения. Случай приложения сил P к шпангоуту 3

Деформации	Исходный вариант	b		t	
		240 мм	340 мм	25 мм	75 мм
ε_1^+	$4,22 \cdot 10^{-03}$	$3,91 \cdot 10^{-03}$	$3,08 \cdot 10^{-03}$	$4,75 \cdot 10^{-03}$	$3,44 \cdot 10^{-03}$
ε_1^-	$-5,12 \cdot 10^{-04}$	$-1,74 \cdot 10^{-04}$	$7,79 \cdot 10^{-04}$	$2,65 \cdot 10^{-04}$	$-3,53 \cdot 10^{-04}$
ε_2^+	$3,03 \cdot 10^{-04}$	$3,36 \cdot 10^{-05}$	$-4,32 \cdot 10^{-04}$	$6,96 \cdot 10^{-04}$	$7,97 \cdot 10^{-05}$
ε_2^-	$-4,43 \cdot 10^{-04}$	$-5,48 \cdot 10^{-04}$	$-8,04 \cdot 10^{-04}$	$-7,59 \cdot 10^{-04}$	$-3,17 \cdot 10^{-04}$
Деформации	Исходный вариант	ν_{21}		E_2	α_0
		0,07	0,18	28000 МПа	0,05 рад
ε_1^+	$4,22 \cdot 10^{-03}$	$4,20 \cdot 10^{-03}$	$4,24 \cdot 10^{-03}$	$4,14 \cdot 10^{-03}$	$4,45 \cdot 10^{-03}$
ε_1^-	$-5,12 \cdot 10^{-04}$	$-4,61 \cdot 10^{-04}$	$-5,52 \cdot 10^{-04}$	$-4,77 \cdot 10^{-04}$	$-4,69 \cdot 10^{-04}$
ε_2^+	$3,03 \cdot 10^{-04}$	$3,53 \cdot 10^{-04}$	$2,61 \cdot 10^{-04}$	$2,93 \cdot 10^{-04}$	$2,68 \cdot 10^{-04}$
ε_2^-	$-4,43 \cdot 10^{-04}$	$-3,91 \cdot 10^{-04}$	$-4,87 \cdot 10^{-04}$	$-4,05 \cdot 10^{-04}$	$-5,83 \cdot 10^{-04}$

3.2.2. Случай приложения двух осевых сил к крайнему шпангоуту

Рассматриваем описанную выше схему резервуара (рисунок 3.9). В отличие от предыдущего случая принимаем, что две осевые силы P приложены к крайнему шпангоуту, как показано на рисунке 3.13. На рисунках 3.14, 3.15 представлены результаты численного моделирования, относящиеся к рассматриваемому расчётному случаю.

Если в предыдущем случае наряду со шпангоутом 3 в работу по сопротивлению приложенным к нему осевым силам включались участки

оболочки, состыкованные с ним с двух сторон, то в данном случае имеется лишь один такой участок слева от шпангоута 7. Отсюда и более высокое значение

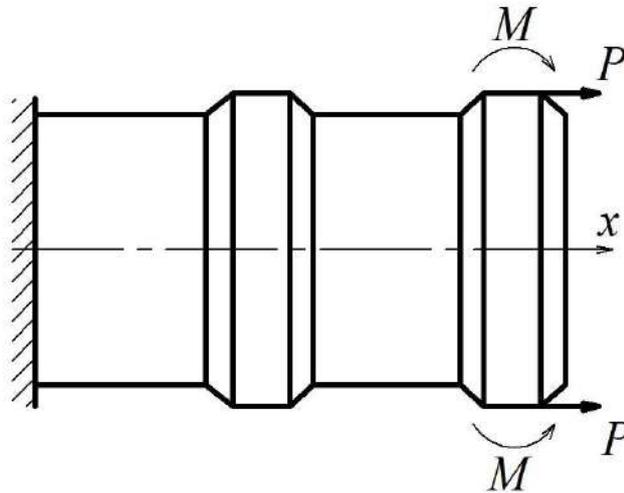


Рисунок 3.13 – Расчётная схема моделируемой оболочки с нагруженным крайним шпангоутом

деформаций $\varepsilon_1^+ = 0,0053$ на стыке оболочки с этим шпангоутом. Напряжение σ_1 увеличивается при этом на 25 %.

По результатам проведённых в разделе 3.2 исследований можно сделать следующие выводы:

- на основе построенных в рамках предложенной методики расчётных ЧИ и КЭ моделей осуществлено численное решение задачи о напряжённо-деформированном состоянии стеклопластиковой цилиндрической оболочки, подкреплённой шпангоутами переменной толщины, в случае приложения двух локальных осевых нагрузок к одному из них;

- надёжность полученных численных решений подтверждена хорошим согласованием результатов расчетов на основе указанных двух вычислительных моделей;

- установлено, что в рассмотренном расчетном случае определяющее влияние на напряжения в опасной на разрыв зоне стыка оболочки с нагруженным шпангоутом оказывает жесткость этого шпангоута. При этом конкретный характер изменения толщины нагруженного шпангоута в меридиональном направлении (более плавный или более резкий) существенной роли не играет;

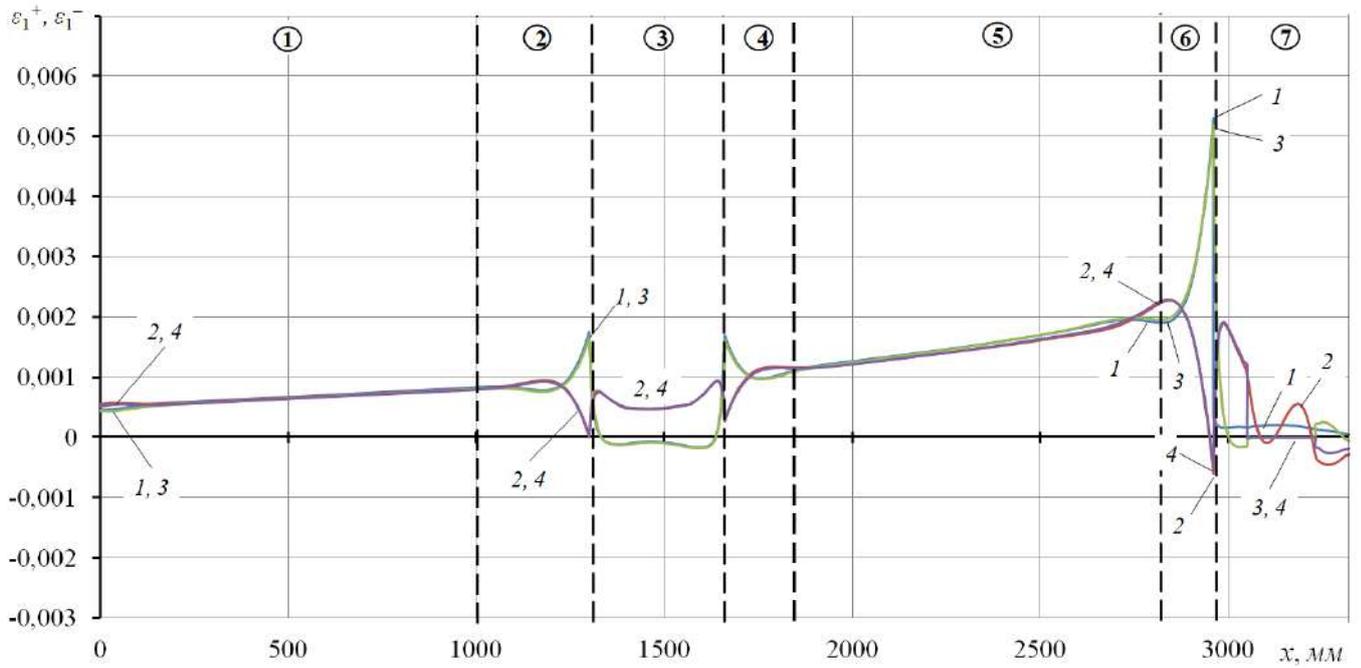


Рисунок 3.14 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- на внешней и внутренней поверхности рассматриваемой оболочки при $\alpha_2=0$. Случай приложения сил P к шпангоуту 7

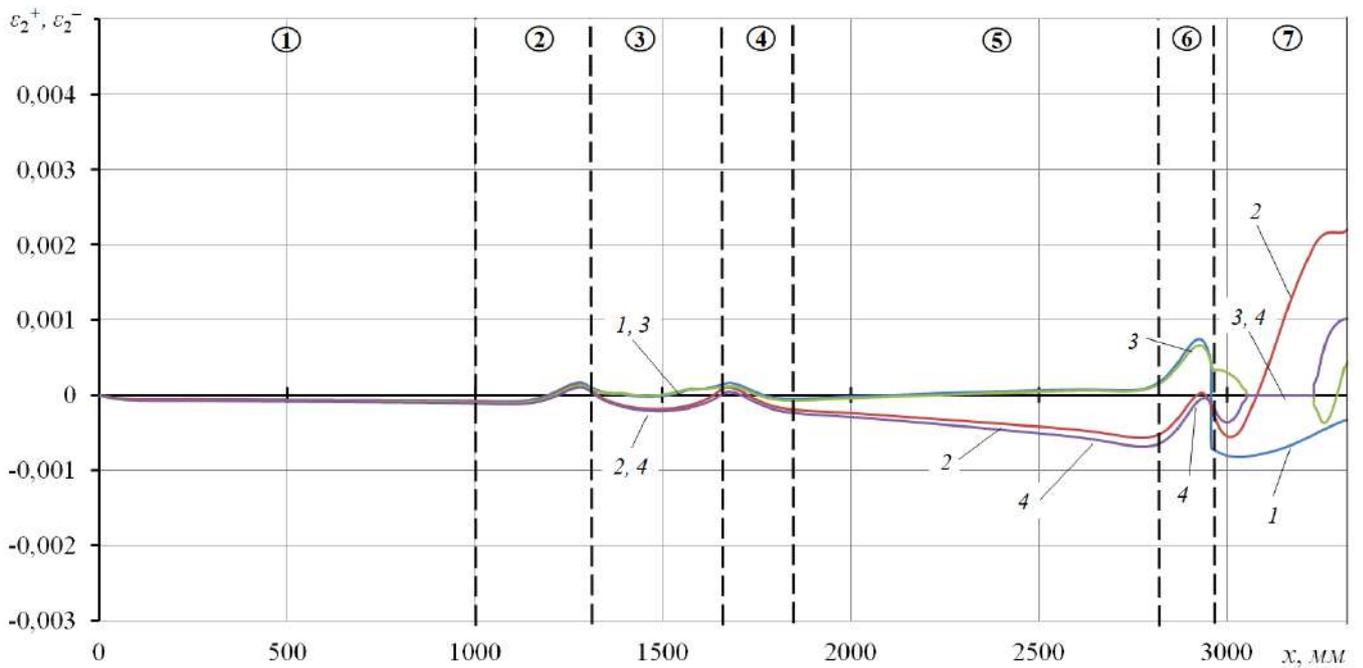


Рисунок 3.15 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_2^+ , ε_2^- на внешней и внутренней поверхности рассматриваемой оболочки при $\alpha_2=0$. Случай приложения сил P к шпангоуту 7

– указано на два способа, которыми можно снизить уровень указанных опасных напряжений на 27 % и 18 % за счёт изменения профиля нагруженного шпангоута;

– показано, что при переходе к ситуации, когда вместо промежуточного шпангоута нагружению теми же осевыми силами подвергается крайний шпангоут, уровень напряжений в рассчитываемой конструкции увеличивается на 25 %.

3.3 Результаты численного моделирования локально нагруженных через шпангоуты цилиндрических оболочек из перекрестно армированных композитов

Рассмотрим случай локального нагружения композитных оболочек, производимых путём намотки на цилиндрическую оправку (с перекрёстным уложением слоёв) ленты из однонаправленных стекло- или угле-волокон, пропитанной полимерным связующим. Считаем, что шпангоуты в указанном технологическом процессе формируются в виде локальных кольцевых утолщений, осуществляемых путём окружной намотки ленты, например, из стеклоткани на ряде участков образованной перекрёстной намоткой оболочки. Схема принимаемой к рассмотрению композитной оболочки радиусом R с изменяющейся вдоль оси x толщиной представлена на рисунке 3.16. Обращаем внимание на то, что упомянутые утолщённые участки такой оболочки (шпангоуты I, II, III) оказываются двухслойными.

Криволинейные ортогональные координаты α_i ($i = 1, 2, 3$), принимаемые для описания деформированного состояния рассматриваемого типа оболочек, выбираем как в разделе 3.1.

Перекрёстное армирование с углами укладки $\pm\varphi$ характеризуется тем, что на каждый ортотропный достаточно малой толщины композитный слой, образованный намоткой исходной композитной ленты под углом $(+\varphi)$ к меридиональному направлению α_1 , накладывается такой же ответный слой, соответствующий намотке той же ленты под углом $(-\varphi)$. При достаточно большом

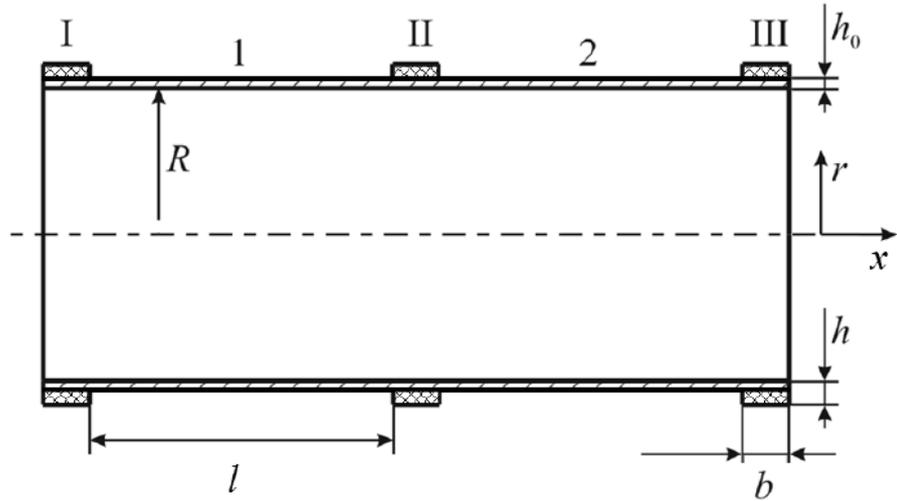


Рисунок 3.16. Схема композитной перекрёстно армированной цилиндрической оболочки со шпангоутами

количестве указанных слоёв образуется композитный пакет, обладающий ортотропией свойств в осях ($\alpha_1=x$, α_2 , $\alpha_3=z$), отвечающих меридиональному, окружному и радиальному направлениям. Параметры упругости (E_1 , E_2 , G_{12} , G_{13} , G_{23} , ν_{21} , ν_{12}) подобного конструктивно-ортотропного пакета (в осях α_1 , α_2) могут быть определены, исходя из заданных упругих характеристик указанной ленты.

Пусть E_1' , E_2' - модули Юнга обсуждаемой композитной ленты в направлениях по длине и ширине, ν_{21}' , ν_{12}' - коэффициенты Пуассона (такие, что $E_1'\nu_{21}'=E_2'\nu_{12}'$), G_{12}' - модуль сдвига в плоскости ленты, G_{13}' , G_{23}' - модули поперечных сдвигов материала ленты в направлениях по длине и ширине. Тогда искомые характеристики упругости описанного конструктивно-ортотропного пакета находятся по схеме ([21], [89]):

$$E_1 = A_{11}(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \quad \nu_{12} = A_{12}/A_{22}, \quad \nu_{21} = A_{12}/A_{11}, \quad G_{12} = A_{33},$$

$$E_2 = A_{22}(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \quad E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12} = A_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21}),$$

где

$$A_{11} = \tilde{E}_1 \cos^4 \varphi + \tilde{E}_2 \sin^4 \varphi + 0,5(\tilde{E}_1 \nu'_{21} + 2G'_{12}) \sin^2 2\varphi,$$

$$A_{22} = \tilde{E}_1 \sin^4 \varphi + \tilde{E}_2 \cos^4 \varphi + 0,5(\tilde{E}_1 \nu'_{21} + 2G'_{12}) \sin^2 2\varphi,$$

$$A_{12} = A_{21} = \tilde{E}_1 \nu'_{21} + 0,25(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 - 2(\tilde{E}_1 \nu'_{21} + 2G'_{12})) \sin^2 2\varphi,$$

$$A_{33} = G'_{12} \cos^2 2\varphi + 0,25(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 - 2\tilde{E}_1 \nu'_{21}) \sin^2 2\varphi,$$

$$\tilde{E}_1 = E'_1/(1 - \nu'_{12}\nu'_{21}), \quad \tilde{E}_2 = E'_2/(1 - \nu'_{12}\nu'_{21}).$$

При этом для модулей поперечного сдвига такого пакета имеют место формулы:

$$G_{13} = G'_{13} \cos^2 \varphi + G'_{23} \sin^2 \varphi,$$

$$G_{23} = G'_{13} \sin^2 \varphi + G'_{23} \cos^2 \varphi.$$

Далее решение строится на основе представленных в главе 2 соотношений.

В таблице 3.3 представлены варианты принятых к исследованию значений параметров упругости (E_1' , E_2' , ν_{21}' , ν_{12}' , G_{12}') ленты из однонаправленных волокон и соответствующих им значений параметров упругости (E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{21} , ν_{12}) композита, получаемого по схеме перекрёстной намотки такой ленты. Как видно, принятые варианты намотки соответствуют ситуации квази-изотропного композитного материала.

Таблица 3.3 – Значения параметров упругости исходной композитной ленты и композитного пакета, получаемого по схеме перекрёстной ($\pm\varphi$) укладки слоев

Вариант №	E_1'	E_2'	G_{12}'	ν_{12}'	ν_{21}'	φ
	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}	ν_{21}	–
	<i>ГПа</i>	<i>ГПа</i>	<i>ГПа</i>			<i>град</i>
1	70	9	5	0,303	0,039	45
	16,21	16,21	18,61	0,621	0,621	–
2	100	9	5	0,3	0,027	45
	17,04	17,04	26,11	0,704	0,704	–
3	136	11,3	5,2	0,3	0,025	45
	18,34	18,34	35,39	0,764	0,764	–

Последовательно рассмотрим результаты численного моделирования на основе предложенной методики цилиндрических конструкций на основе перекрёстно армированных композитов, по своим геометрическим параметрам аналогичных подразделам 3.1.1 – 3.1.3. Тип и уровень нагрузок также соответствуют указанным разделам.

Далее приведены результаты численного моделирования конструкции из перекрёстно армированного композитного материала, находящейся под

действием двух радиальных сил приложенных к промежуточному шпангоуту (аналогично разделу 3.1.1).

На рисунках 3.17, 3.18 представлены полученные численным моделированием (для варианта 3 параметров упругости перекрёстно армированного композита) результаты по распределению вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- , ε_2^+ , ε_2^- и напряжений σ_1^+ , σ_1^- , σ_2^+ , σ_2^- на внешней и внутренней поверхности оболочки 1 в окрестности стыка с нагруженным шпангоутом при $\alpha_2=0$ (в осевом сечении, проходящем через вектор силы P). Цифрами 1 и 2 здесь отмечены результаты (соответственно для внешней и внутренней поверхности оболочки), полученные на основе ЧИ-1 модели, цифрами 3 и 4 – на основе КЭ-1 модели, а цифрами 3' и 4' – на основе КЭ-2 модели (при $G_{13}=G_{23}=G_{12}$). Из этих рисунков видно, что результаты расчётов на основе ЧИ модели практически совпадают с тем, что даёт КЭ-1 модель. Это свидетельствует о достоверности получаемых численным моделированием результатов. В то же время по отклонениям результатов расчётов на основе модели КЭ-2 от того, что даёт модель КЭ-1, можно оценить влияние поперечных сдвигов на уровень деформаций и напряжений в рассматриваемом случае локального нагружения конструкции применительно к каждому из принятых трёх вариантов композитного материала. Анализ указанных уровней деформаций и напряжений начнём с результатов расчётов на основе ЧИ-1 и КЭ-1 моделей. Согласно графикам, помеченным на обсуждаемых рисунках, максимальные по модулю деформации ε_1^- , ε_2^- в оболочке 2 на стыке с нагруженным шпангоутом для исследуемых вариантов 1, 2, 3 имеют значения 1:(0,0023; -0,0017), 3:(0,0021; -0,0016), 7:(0,0018; -0,0015). Аналогичные значения для напряжений σ_1^- , σ_2^- [МПа] имеют вид 1:(33; -33), 3:(32; -35), 7:(30; -33). Согласно представленным на обсуждаемых рисунках картин перемещений, максимальные значения таких перемещений по вариантам 1, 2, 3 имеют вид 1:(2,73 мм), 3:(2,58 мм), 7:(2,40 мм). Из перечисленного набора расчётных данных по исследуемым вариантам конструкции видно, что наиболее благоприятными в смысле снижения уровня деформаций, напряжений и перемещений являются

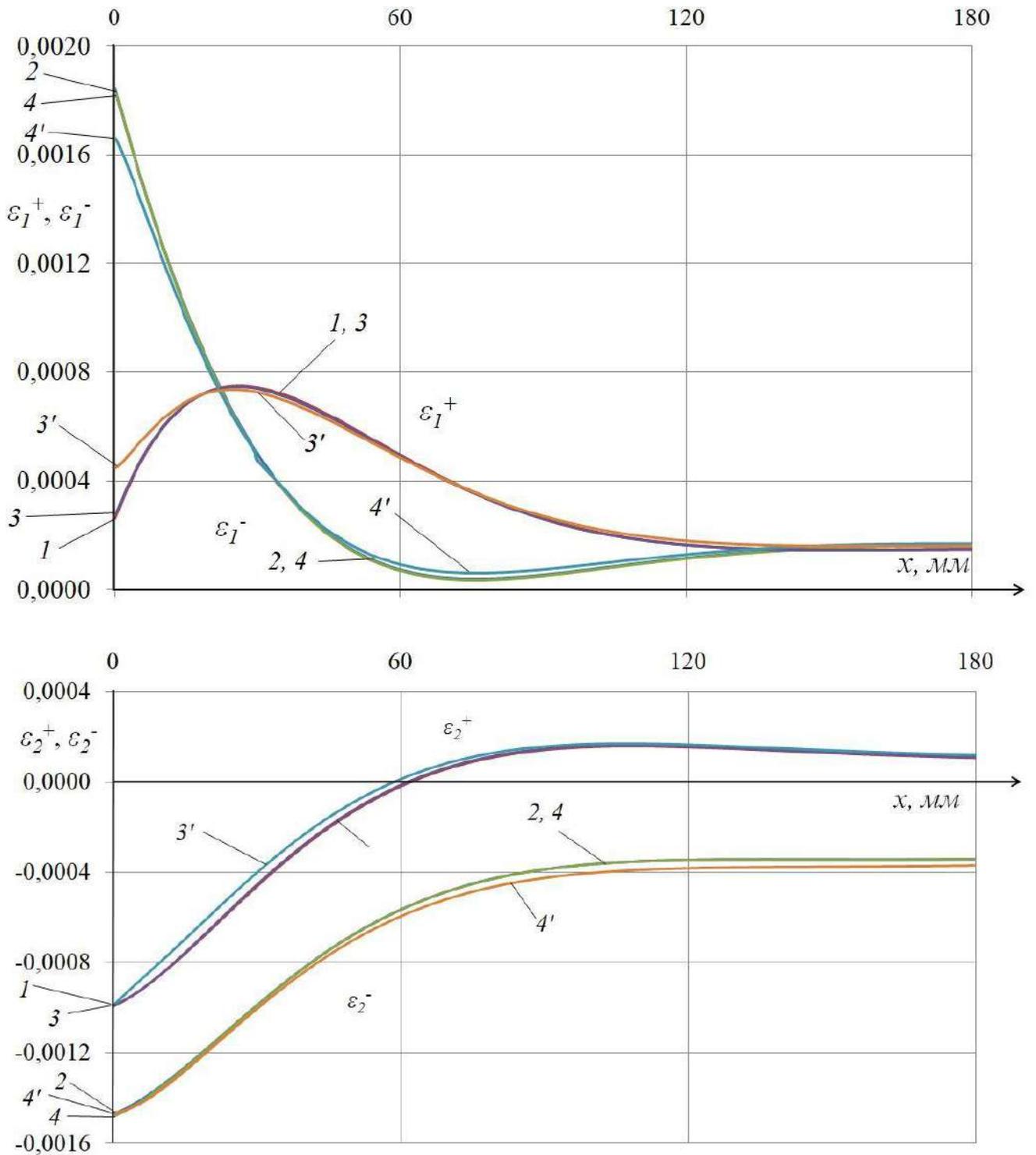


Рисунок 3.17 — Распределение вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- , ε_2^+ , ε_2^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки 2 в окрестности стыка с нагруженным двумя радиальными силами шпангоутом для варианта № 3 значений параметров упругости перекрёстно армированного композитного пакета оболочки

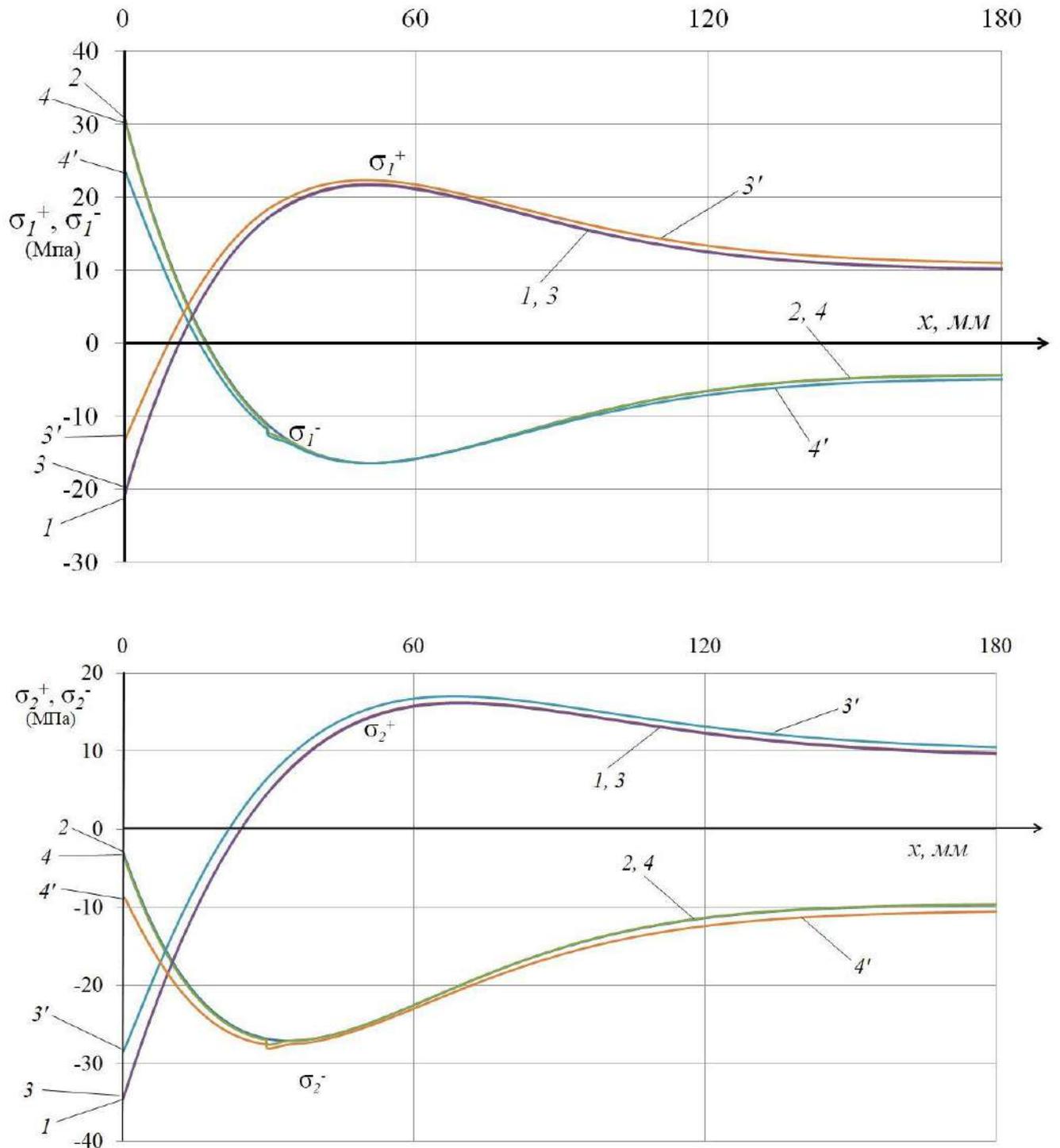


Рисунок 3.18 — Распределение вдоль оси x деформаций σ_{1^+} , σ_{1^-} , σ_{2^+} , σ_{2^-} на внешней и внутренней поверхностях оболочки 2 в окрестности стыка с нагруженным двумя радиальными силами шпангоутом для варианта № 3 значений параметров упругости перекрёстно армированного композитного пакета оболочки

вариант 3 композитного материала в обсуждаемом случае нагружения рассматриваемой конструкции. Отмечаем, что характерной особенностью материала в этих вариантах является существенно завышенное значение его модуля сдвига G_{12} по сравнению с модулями E_1, E_2 .

Обращаясь к вопросу о влиянии учёта поперечных сдвигов на результаты по напряжённно-деформированному состоянию рассматриваемой конструкции, на основе сравнения графиков, относящихся на обсуждаемых рисунках к моделям КЭ-1 и КЭ-2, приходим к заключению, что такой учёт приводит к снижению отмеченных выше уровней деформаций на 8-10%. Что касается напряжений, то их уровень при учёте поперечных сдвигов снижается в случае варианта 3 на 18%.

Рассмотрим результаты численного моделирования конструкции из перекрёстно армированного композитного материала, находящейся под действием двух осевых сил приложенных к одному из торцевых шпангоутов (аналогично разделу 3.1.2).

На рисунках 3.19, 3.20 представлены полученные численным моделированием (для варианта 3 параметров упругости перекрёстно армированного композита) результаты по распределению вдоль оси x деформаций $\varepsilon_1^+, \varepsilon_1^-, \varepsilon_2^+, \varepsilon_2^-$ и напряжений $\sigma_1^+, \sigma_1^-, \sigma_2^+, \sigma_2^-$ на внешней и внутренней поверхности оболочки 1 в окрестности стыка с нагруженным шпангоутом при $\alpha_2=0$ (в осевом сечении, проходящем через вектор силы P). Цифрами 1 и 2 здесь отмечены результаты (соответственно для внешней и внутренней поверхности оболочки), полученные на основе ЧИ-1 модели, цифрами 3 и 4 – на основе КЭ-3 модели, а цифрами 3' и 4' – на основе КЭ-4 модели (при $G_{13}=G_{23}=G_{12}'$). Из этих рисунков видно, что результаты расчётов на основе ЧИ модели практически совпадают с тем, что даёт КЭ-3 модель. Это свидетельствует о достоверности получаемых численным моделированием результатов. В то же время по отклонениям результатов расчётов на основе модели КЭ-4 от того, что даёт модель КЭ-3, можно оценить влияние поперечных сдвигов на уровень деформаций и напряжений в рассматриваемом случае локального нагружения конструкции применительно к каждому из принятых трёх вариантов композитного материала.

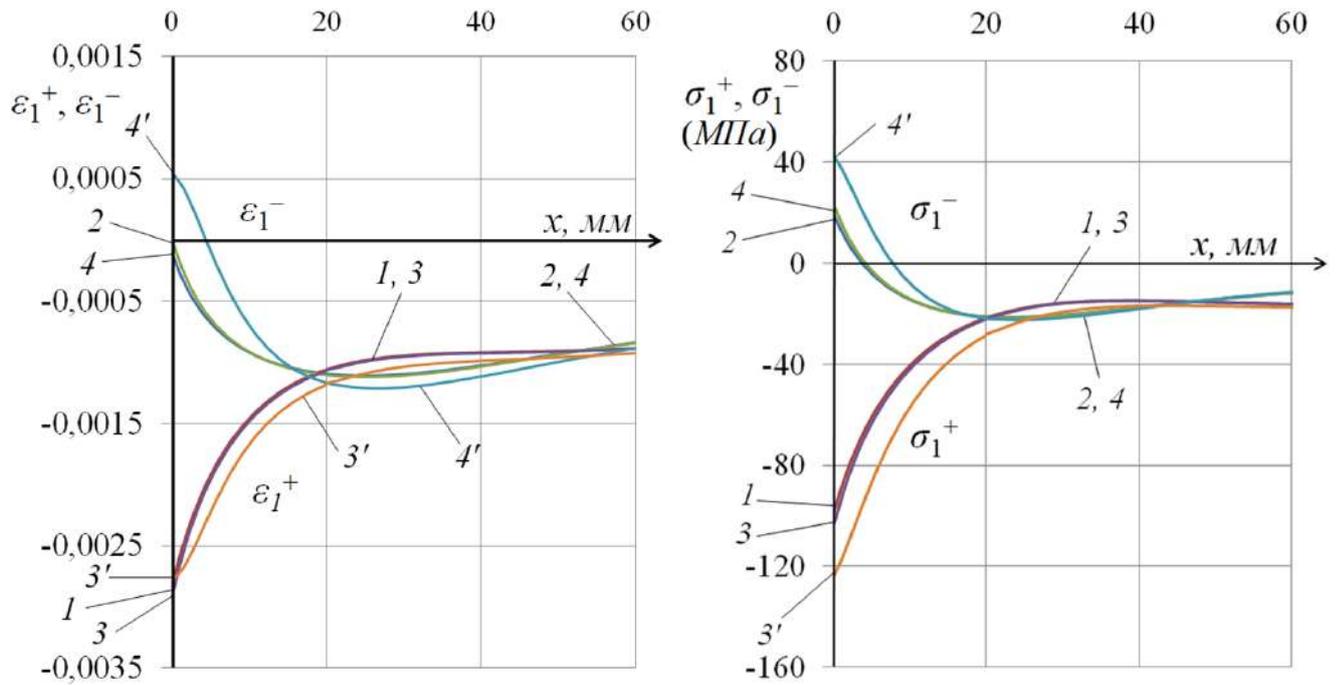


Рисунок 3.19 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- и напряжений σ_1^+ , σ_1^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки 1 в окрестности стыка с нагруженным двумя осевыми силами шпангоутом для варианта № 3 значений параметров упругости перекрёстно армированного композитного пакета оболочки

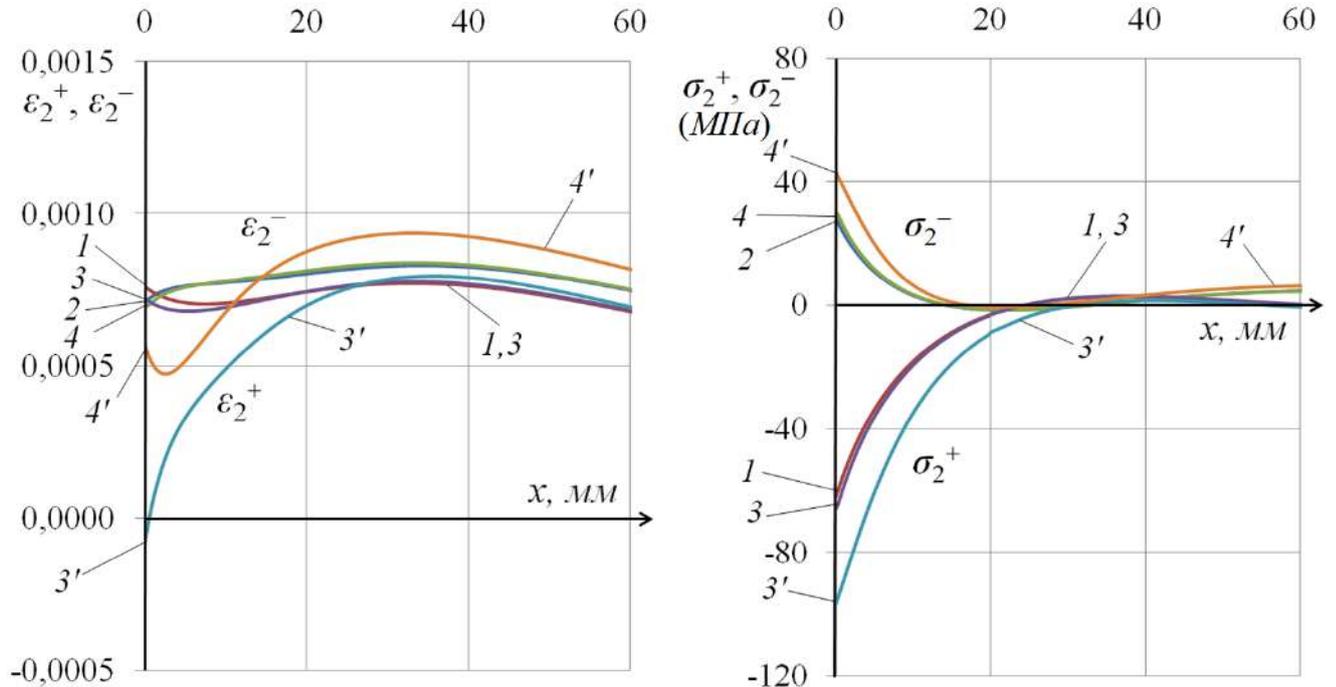


Рисунок 3.20 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_2^+ , ε_2^- и напряжений σ_2^+ , σ_2^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки 1 в окрестности стыка с нагруженным двумя осевыми силами шпангоутом для варианта № 3 значений параметров упругости перекрёстно армированного композитного пакета оболочки

Анализ указанных уровней деформаций и напряжений начнём с результатов расчётов на основе ЧИ-1 и КЭ-3 моделей. Согласно полученным расчётным результатам, максимальные по модулю деформации ε_1^+ , ε_2^+ в оболочке 1 (на стыке с нагруженным шпангоутом) для исследуемых вариантов 1, 2, 3 имеют значения 1: (-0,0040; 0,00081), 2: (-0,0032; 0,00078), 3: (-0,0027; 0,00076). Аналогичные значения для напряжений σ_1^+ , σ_2^+ [МПа] имеют вид 1: (-90; -42), 2: (-97; -55), 3: (-95; -65). Из перечисленного набора расчётных данных по исследуемым вариантам конструкции видно, что наиболее благоприятным в смысле сопротивляемости конструкции в обсуждаемом случае нагружения является вариант 3. Отмечаем, что характерной особенностью композитного материала в этих вариантах является завышенное значение его модуля сдвига G_{12} по сравнению с модулями E_1 , E_2 .

Обратимся к сравнительному анализу обсуждаемых расчётных результатов с представленными в подразделе 3.1.2 аналогичными результатами применительно к случаю подкреплённой шпангоутами стеклопластиковой (на тканевой основе) оболочки. Максимальное значение меридиональных деформаций для указанной оболочки составило величину порядка 0,0042, что сопоставимо с соответствующим значением для перекрёстно армированной оболочки первого варианта исполнения. При этом для второго и третьего варианта исследуемой оболочки из перекрёстно армированного композита максимальное значение меридиональных деформаций на стыке с нагруженным шпангоутом оказываются ниже величины 0,0042 соответственно на 24 и 36 %.

Обращаясь к вопросу о влиянии учёта поперечных сдвигов на результаты по напряжённно-деформированному состоянию исследуемой композитной конструкции, на основе сравнения результатов КЭ-3 и КЭ-4 моделирований приходим к заключению, что такой учёт в рассматриваемом случае нагружения не приводит к существенному изменению отмеченных выше уровней деформаций. Что касается напряжений, то их уровень при учёте поперечных сдвигов повышается примерно на 20% в каждом из исследуемых вариантов.

Далее представлены результаты численного моделирования конструкции из перекрёстно армированного композитного материала, находящейся под действием двух крутящих моментов приложенных к одному из торцевых шпангоутов (аналогично разделу 3.1.3) [101].

На рисунках 3.21 – 3.22 представлены полученные численным моделированием (для варианта 3 параметров упругости перекрёстно армированного композита) результаты по распределению вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- , ε_2^+ , ε_2^- и напряжений σ_1^+ , σ_1^- , σ_2^+ , σ_2^- на внешней и внутренней поверхности оболочки 1 в окрестности стыка с нагруженным шпангоутом при $\alpha_2=0$. Цифрами 1 и 2 здесь отмечены результаты (соответственно для внешней и внутренней поверхности оболочки), полученные на основе ЧИ-1 модели, цифрами 3 и 4 – на основе КЭ-3 модели, а цифрами 3' и 4' – на основе КЭ-4 модели. Из этих рисунков видно, что результаты расчётов на основе ЧИ модели практически совпадают с тем, что даёт КЭ-3 модель. Это свидетельствует о достоверности получаемых численным моделированием результатов. В то же время по хорошо наблюдаемым отклонениям результатов расчётов на основе модели КЭ-2 от того, что даёт модель КЭ-3, можно оценить влияние поперечных сдвигов на уровень деформаций и напряжений в рассматриваемом случае локального нагружения конструкции. Из полученных для принятых расчётных вариантов результатов следует, что такой учёт приводит к повышению пиковых значений меридиональных деформаций на 30-40%. Что касается напряжений, то их уровень при учёте поперечных сдвигов повышается в исследуемых вариантах примерно на 20-30%.

Отмечаем, что полученные на основе ЧИ-1 и КЭ-3 моделей максимальные по модулю деформации ε_1^- в оболочке 1 на стыке с нагруженным шпангоутом для исследуемых вариантов 1, 2, 3 имеют значения 1:(-0,0071), 2:(-0,0060), 3:(-0,0052). Аналогичные значения для напряжений σ_1^+ , σ_2^+ [МПа] имеют вид 1:(210; 156), 2:(225; 191), 3:(249; 210). Из перечисленного набора расчётных данных по исследуемым вариантам конструкции видно, что наиболее благоприятными в

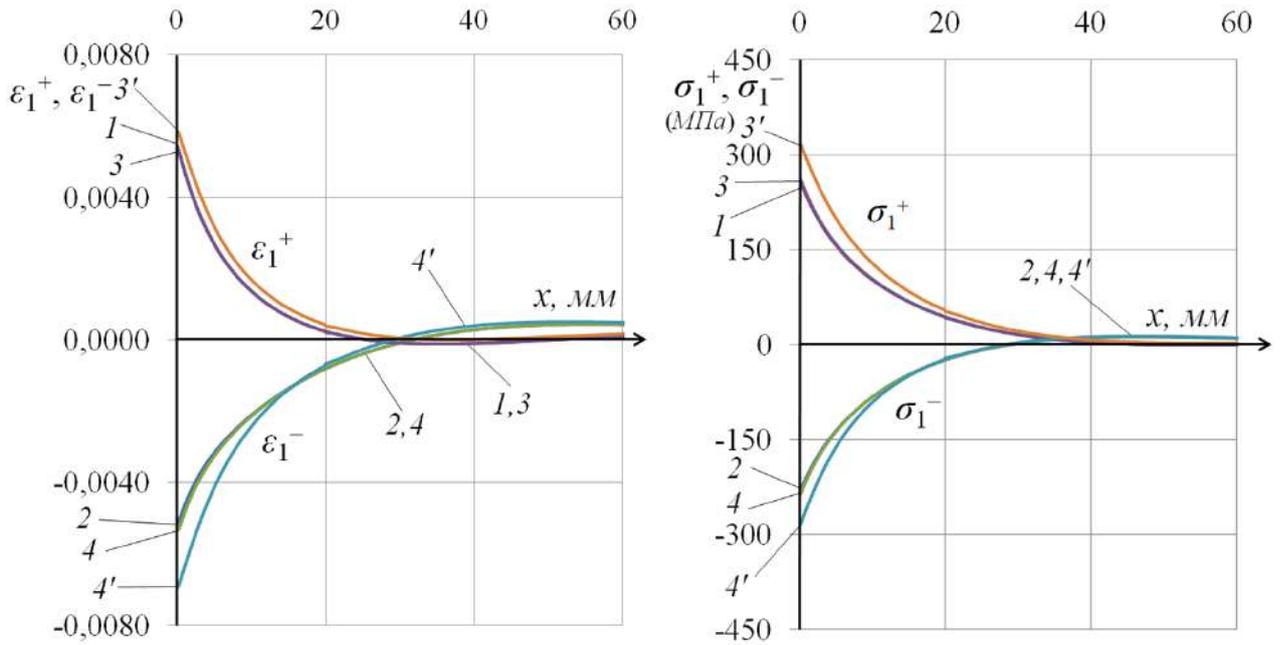


Рисунок 3.21 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- и напряжений σ_1^+ , σ_1^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки 1 в окрестности стыка с нагруженным двумя крутящими моментами шпангоутом для варианта № 3 параметров упругости перекрёстно армированного композитного пакета оболочки

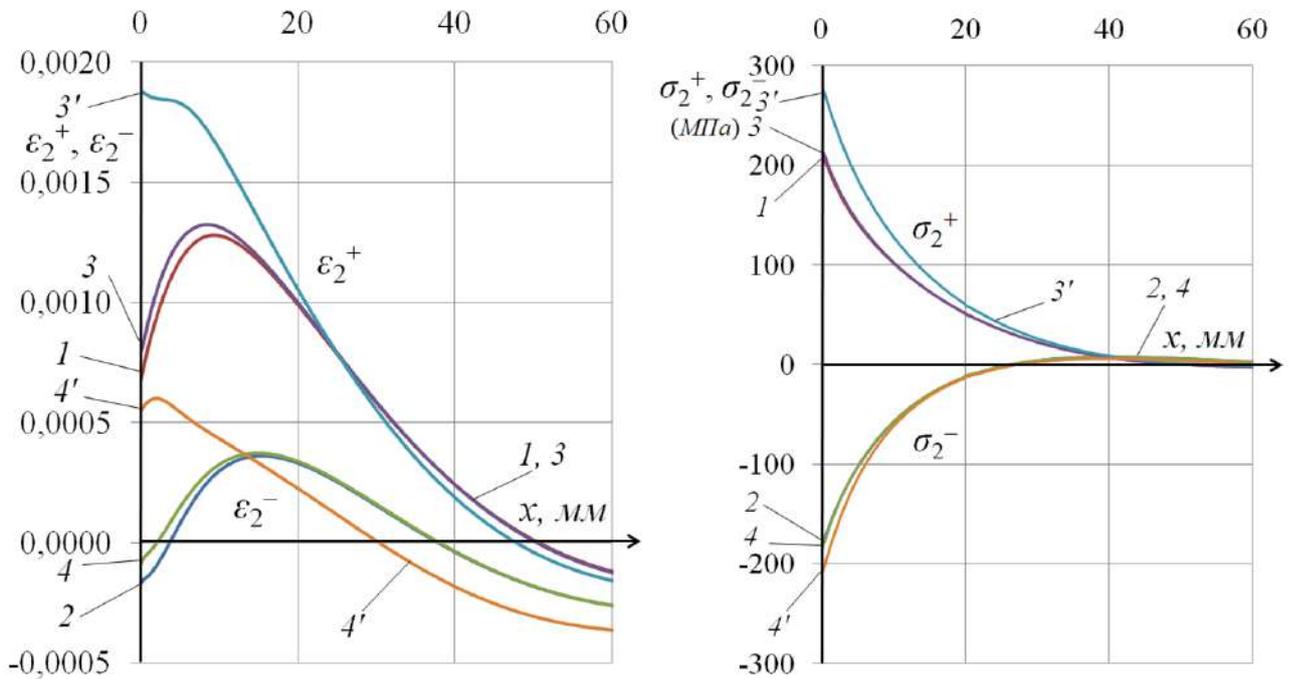


Рисунок 3.22 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_2^+ , ε_2^- и напряжений σ_2^+ , σ_2^- на внешней и внутренней поверхностях оболочки 1 в окрестности стыка с нагруженным двумя крутящими моментами шпангоутом для варианта № 3 параметров упругости перекрёстно армированного композитного пакета оболочки

смысле сопротивляемости конструкции в обсуждаемом случае нагружения является вариант 3. Отмечаем, что характерной особенностью материала в этом варианте является существенно завышенное значение его модуля сдвига G_{12} по сравнению с модулями E_1 , E_2 .

Обратимся к сравнительному анализу полученных расчётных результатов с представленными в разделе 3.2.3 аналогичными результатами, относящимися к случаю стеклопластиковой (на тканевой основе) оболочки. Максимальное значение меридиональных деформаций для указанной стеклопластиковой оболочки составило величину порядка 0,011, что существенно выше соответствующих значений, полученных для рассмотренных трёх вариантов перекрёстно армированной композитной оболочки.

По результатам проведённых в разделе 3.3 исследований можно сделать следующие выводы:

– осуществлено решение задач о напряжённо-деформированном состоянии конструкции из перекрёстно армированного композитного материала, состоящей из двух цилиндрических оболочек и трёх круговых колец (шпангоутов) прямоугольного поперечного сечения, при различных вариантах приложения локальных нагрузок к одному из шпангоутов (случаи приложения двух радиальных сил, двух осевых сил, двух моментов);

– достоверность полученных численных решений в зонах краевых эффектов подтверждена фактом хорошего согласования результатов ЧИ и КЭ моделирования;

– установлено, что наиболее благоприятным в смысле сопротивляемости конструкции приложенным локальным нагрузкам в рассмотренных случаях является вариант перекрёстного армирования, приводящий к существенно завышенным значениям модуля сдвига G_{12} по сравнению с модулями E_1 , E_2 у композитного материала оболочки.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ИЗЛОЖЕННОЙ МЕТОДИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТЫ ТРЁХСЛОЙНЫХ С ПЕНОПЛАСТОВЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В настоящей главе представлены результаты численного моделирования напряженно-деформированного состояния подкреплённых шпангоутами трёхслойных с легким наполнителем стеклопластиковых цилиндрических оболочек при действии локальных нагрузок [92, 94, 99, 102, 103, 105]. Рассматриваются случаи приложения к шпангоутам радиальных и осевых сил.

Материал шпангоутов и несущих слоёв считается ортотропным. Предполагается, что шпангоуты имеют прямоугольное поперечное сечение. В расчётной ЧИ-модели шпангоуты рассматриваются по схеме ортотропной цилиндрической оболочки (как в модели ЧИ-1).

При построении расчётной КЭ-модели шпангоуты и наполнитель представляются ансамблями объёмных элементов, а несущие слои – ансамблями оболочечных элементов. При этом на узлы, принадлежащие торцу шпангоута и стыкуемых с ним оболочечных элементов, накладываются кинематические связи, соответствующие принятию гипотезы прямой линии (как в моделях КЭ-3, КЭ-4). Исследования проводятся с использованием четырёх вариантов КЭ моделей (КЭ-5, КЭ-6, КЭ-7, КЭ-8). Модель КЭ-5 строится таким образом, чтобы она обладала возможностью соответствовать предположениям, на которых основана ЧИ-модель. Условие несжимаемости наполнителя по толщине при этом обеспечивается заданием завышенного (на три порядка) значения модуля Юнга наполнителя в поперечном направлении. Соответствие работы шпангоутов схеме единой нормали обеспечивается заданием завышенных (на два порядка) значений соответствующих модулей поперечного сдвига. В модели КЭ-6 (в отличие от КЭ-5) задаётся реальное значения модуля Юнга наполнителя в поперечном направлении. В модели КЭ-7 (в отличие от КЭ-5) задаются реальные значения модулей поперечного сдвига шпангоутов. В модели КЭ-8 задаются реальные

значения как модулей поперечного сдвига шпангоутов, так и модуля Юнга заполнителя в поперечном направлении.

4.1. Результаты численного моделирования трёхслойного кольца при действии двух радиальных сил (в сопоставлении с экспериментом)

Рассматриваем трёхслойную цилиндрическую оболочку (трёхслойное кольцо радиусом R_0 и длиной L) с несущими (стеклопластиковыми слоями) толщиной t_1 , t_3 и слоем пенопластового заполнителя толщиной t_2 (рисунок 4.1).

Геометрические параметры кольца описываются следующими величинами: $R_0=1102,5$ мм; $L=200$ мм; $t_1=7,6$ мм; $t_2=52,3$ мм; $t_3=4,1$ мм. Модули Юнга внутреннего и наружного несущих слоев кольца в окружном направлении имеют значения $E_2=2,2 \cdot 10^4$ МПа и $E_2=2,0 \cdot 10^4$ МПа, соответственно; модуль поперечного сдвига заполнителя задан в виде: $G_{13}=G_{23}=30$ МПа.

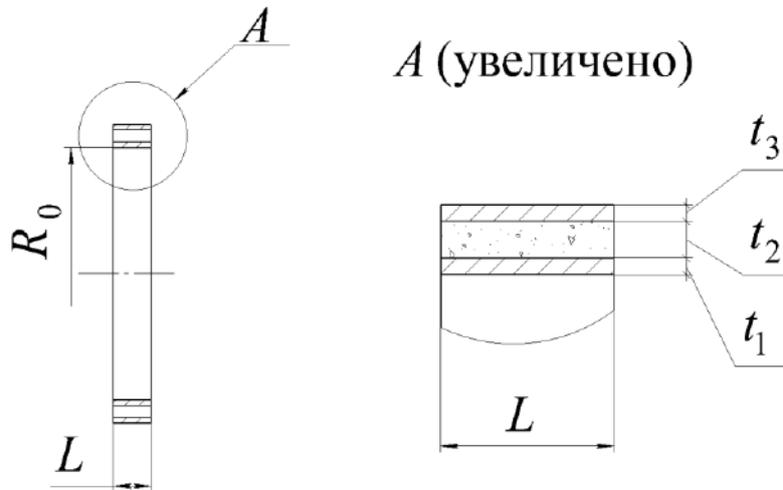


Рисунок 4.1 – Схема трёхслойной с лёгким заполнителем стеклопластиковой цилиндрической оболочки (кольца)

Проводимое исследование имеет целью сравнение результатов численного моделирования с экспериментом (выполненным авторами работы [69]) применительно к случаю нагружения трёхслойного кольца двумя радиальными силами P (рисунок 4.2). В указанном эксперименте заполнитель представлял собой пенопласт, армированный набором радиальных шпилек. Таким образом, была обеспечена его практическая несжимаемость в радиальном направлении.

Равномерное распределение каждой из нагрузок P по участку приложения на внешней поверхности кольца (в продольном и окружном направлениях) обеспечивалось в ходе эксперимента путём использования резиновых прокладок. Нагрузка P имела значение $P=4100 \text{ Н}$. Размер участка приложения нагрузки в окружном направлении (см. формулы (2.83)) оценивался величиной $\alpha_0=0,045$.

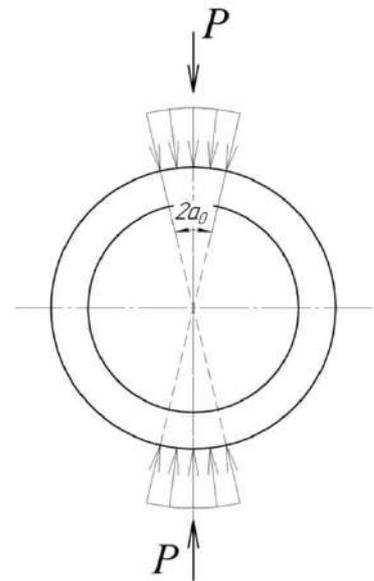


Рисунок 4.2 – Схема

приложения радиальных нагрузок оболочка работает по схеме кольца, определяющую роль среди её упругих постоянных играют модули упругости в окружном направлении, что позволяет при численном моделировании достаточно произвольно задавать значения модулей, связанных с меридиональным направлением. С учётом этого в данном случае было принято $E_1=E_2$. Кроме того, применительно к несущим слоям было принято $G_{12}=0,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ (а в КЭ-модели ещё и $G_{13}=G_{23}=G_{12}$). Коэффициентам Пуассона присвоены значения, близкие к нулевым, а применительно к заполнителю (в случае КЭ-модели) было принято $E_3=2,0 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ (ситуация жёсткого в поперечном направлении заполнителя) и $E_1=E_2=G_{12}=30 \text{ МПа}$.

На рисунке 4.3 представлены расчётные и экспериментальные данные по распределению в окружном направлении (на участке $0 \leq \alpha_2 \leq 90^\circ$) деформаций ε_2^- , ε_2^+ на внутренней и внешней поверхностях кольца. Здесь координата $\alpha_2=0$ соответствует сечению кольца, проходящего через вектор силы P . Цифрами 1 и 2 отмечены кривые, относящиеся к ЧИ-1 модели, а цифрами 3 и 4 – к КЭ-5 модели. Звёздочками и кружками указаны экспериментальные результаты.

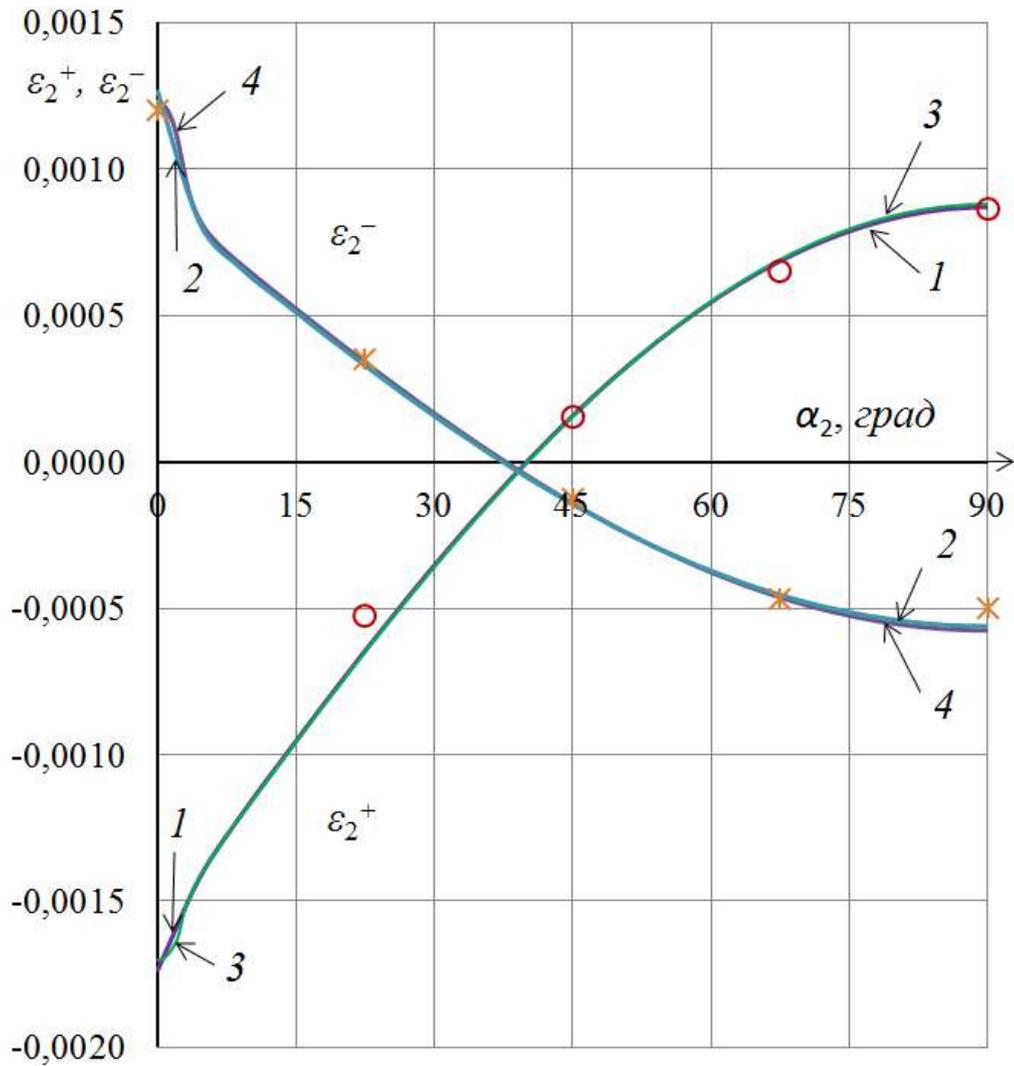


Рисунок 4.3 – Распределение в окружном направлении α_2 деформаций ε_2^+ , ε_2^- на внешней и внутренней поверхностях трёхслойного кольца при действии двух радиальных сил

Видно, что полученные с помощью используемых вычислительных (ЧИ и КЭ) моделей результаты по окружным деформациям ε_2^- , ε_2^+ практически совпадают, хорошо согласуясь с экспериментальными данными. Укажем также, что в ходе проведения эксперимента были определены значения радиального перемещения w кольца при $\alpha_2=0$ и $\alpha_2=90^\circ$ в виде $w= -16$ мм и $w=13,6$ мм, соответственно. Аналогичная пара значений w для кольца в случае ЧИ-модели имела вид $(-16,1$ мм и $13,4$ мм), а в случае КЭ-модели – вид $(-16,3$ мм и $13,7$ мм).

Как видно, и для перемещений имеет место хорошее согласование расчётных и экспериментальных результатов.

Проведённый таким образом сравнительный анализ позволяет сделать вывод о достоверности полученного численного решения задачи для рассматриваемого случая локально нагруженного трёхслойного кольца.

4.2. Результаты численного моделирования подкреплённой трёхслойной оболочки симметричной по толщине структуры при действии двух радиальных сил (в сопоставлении с экспериментом)

Рассматриваем стеклопластиковую конструкцию (рисунок 4.4), представляющую собой трёхслойную цилиндрическую оболочку 1 (радиусом R_0 и длиной L) с несущими слоями толщиной t_1 , t_3 и слоем заполнителя толщиной t_2 , подкреплённую по торцам шпангоутами I, II прямоугольного поперечного сечения с размерами b и h .

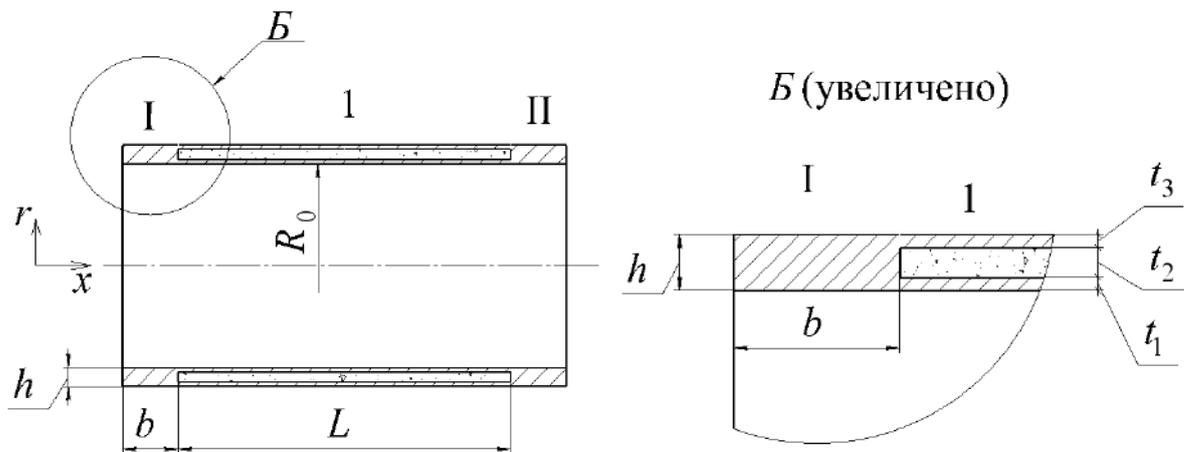


Рисунок 4.4 – Схема трёхслойной с лёгким заполнителем стеклопластиковой цилиндрической оболочки с двумя торцевыми шпангоутами

Рассматриваем экспериментально исследованный в работе [69] случай приложения двух радиальных нагрузок величины P (см. рисунок 4.2) к шпангоуту (оболочке) I. Геометрические параметры конструкции, согласно [69], были заданы в виде: $R_0=185$ мм; длина оболочки 1 $L=700$ мм; толщины её слоёв $t_1=1$ мм; $t_2=6,5$ мм; $t_3=1$ мм; размеры поперечных сечений шпангоутов I и II $b=50$ мм;

$h=8,5$ мм; параметры упругости стеклопластика $E_1=1,8 \cdot 10^4$ МПа; $E_2=2,6 \cdot 10^4$ МПа; $\nu_{21}=0,07$; $G_{12}=0,5 \cdot 10^4$ МПа. Сдвиговые характеристики пенопластового заполнителя $G_{13}=G_{23}=10$ МПа. При построении соответствующей КЭ-модели (а именно КЭ-8) были добавлены недостающие значения параметров упругости стеклопластика $E_3=E_2$, $G_{13}=G_{23}=G_{12}$, а пенопласт был представлен как изотропный материал с $E=20$ МПа и $\nu=0$.

Равномерность распределения каждой из нагрузок P по участку приложения на внешней поверхности оболочки I (в продольном и окружном направлениях) в ходе эксперимента достигалась путём использования резиновых прокладок. Нагрузка P имела величину 1200 Н; размер участка приложения нагрузки в окружном направлении оценивался величиной $\alpha_0=0,11$. Условие свободного правого торца конструкции (которое имело место в эксперименте) при КЭ-расчете моделировалось введением в расчётную схему фиктивного упругого основания (с пренебрежимо малыми значениями модулей упругости), связанного с указанным торцом.

На рисунке 4.5 представлены расчётные и экспериментальные данные по распределению вдоль оси x деформаций ε_2^- , ε_2^+ на внутренней и внешней поверхностях участка I–I рассматриваемой конструкции при $\alpha_2=0$. Цифрами 1 и 2 отмечены кривые, относящиеся к ЧИ-1 модели, а цифрами 3 и 4 – к КЭ-5 модели. Звездочками и кружками указаны экспериментальные результаты.

Как видно, по окружным деформациям ε_2^- , ε_2^+ с использованием построенных ЧИ и КЭ моделей получены близкие результаты, которые в то же время хорошо согласуются с экспериментом. Отметим также, что в эксперименте значение радиального перемещения нагруженного шпангоута I при $\alpha_2=0$ было определено как $w = -3,75$ мм. Аналогичное значение w этого шпангоута в ЧИ-модели и КЭ-модели получено в виде $w = -3,84$ мм, $w = -3,89$ мм, соответственно.

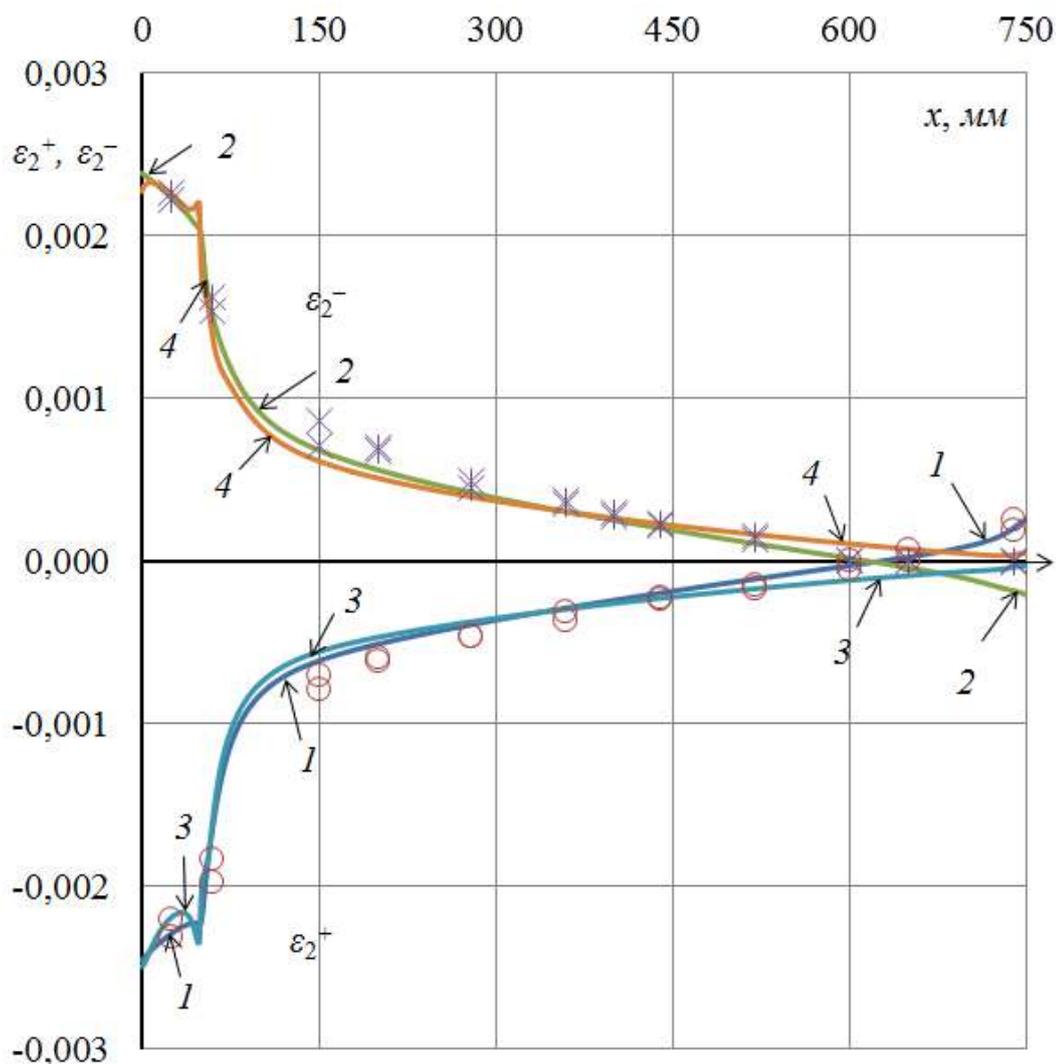


Рисунок 4.5 – Распределению вдоль оси x деформаций ε_2^- , ε_2^+ на внутренней и внешней поверхностях участка I–1 исследуемой конструкции при $\alpha_2=0$

Таким образом, в рассмотренном случае локально нагруженной подкрепленной шпангоутами трехслойной с пенопластовым наполнителем стеклопластиковой цилиндрической оболочки получено хорошее согласование результатов ЧИ и КЭ моделей как между собой, так и с экспериментом. Это относится как к окружным деформациям ε_2 , так и к радиальным перемещениям w . В то же время численным моделированием было установлено, что в данном случае меридиональные деформации ε_1 на порядок меньше окружных. Это говорит о том, что напряжённое состояние рассмотренной конструкции и её прочность полностью определяются уровнем окружных деформаций.

Подобная ситуация обусловлена тем, что нагруженный шпангоут I имеет такую же толщину, как и состыкованная с ним оболочка 1 (см. рисунок 4.4). Другими словами, указанный стык осуществляется без эксцентриситета. Далее перейдём к исследованию случая эксцентрично подкреплённой трёхслойной оболочки.

4.3. Результаты численного моделирования протяжённой эксцентрично подкреплённой торцевыми шпангоутами трёхслойной оболочки при действии двух радиальных сил

Рассматриваем ситуацию, отличающуюся от предыдущей увеличенной толщиной шпангоутов ($h=25,5$ мм) и увеличенным значением приложенных к шпангоуту I радиальных нагрузок $P=10000$ Н (рисунок 4.6). Расчётные исследования применительно к данному случаю были проведены с целью оценить возможности использования расчётных моделей для прогноза значений меридиональных деформаций ε_1 оболочки 1 в зоне стыка с локально нагруженным шпангоутом.

При разбиении шпангоутов на объёмные элементы характерный размер ячейки сетки КЭ модели составлял порядка 3 мм. Для большей части заполнителя размер сеточной ячейки в осевом и кольцевом направлениях выбирался порядка 5 мм. В окрестностях стыков со шпангоутами размер такой ячейки в осевом направлении уменьшался до 2 мм. Аналогичные по размерам ячейки имела и сетка оболочечных элементов на большей части каждого из несущих слоёв. В зонах краевых эффектов размер оболочечных элементов уменьшался до 0,1 мм. Для оболочечных элементов, относящихся к внутреннему и наружному несущим слоям, в качестве поверхности приведения выбиралась соответственно верхняя и нижняя поверхность слоя.

Расчёты на основе ЧИ модели осуществлялись с выбором интервала между точками ортогонализации порядка 5 мм для трёхслойного участка исследуемой конструкции.

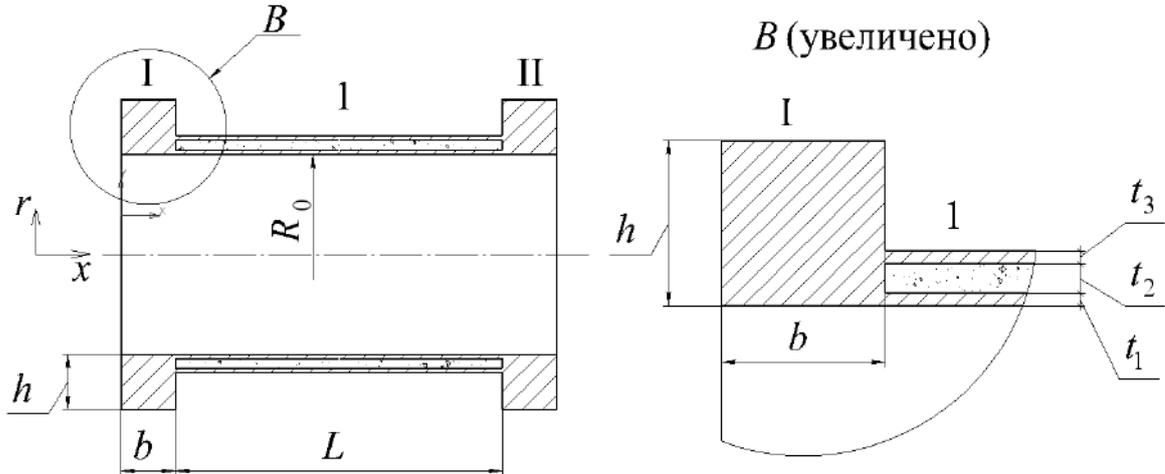


Рисунок 4.6 – Схема эксцентрично подкреплённой трёхслойной с лёгким наполнителем стеклопластиковой цилиндрической оболочки

На рисунках 4.7, 4.8 представлены полученные расчётом результаты по распределению вдоль оси x меридиональных ε_1^- , ε_1^+ и окружных ε_2^- , ε_2^+ деформаций на внутренней и внешней поверхностях оболочки 1 (см. рисунок 4.6) при $\alpha_2=0$. Цифрами 1 и 2 отмечены кривые, относящиеся к ЧИ модели, а цифрами 3 и 4 – к КЭ-8 модели. Зависимости параметров ε_1^- , ε_1^+ от x представлены лишь на участке $0 \leq x \leq 100$ мм. За пределами этого участка указанные параметры имеют практически нулевые значения.

Как видно, в рассматриваемом случае результаты ЧИ и КЭ-8 моделей по окружным деформациям (ε_2^- , ε_2^+) практически совпадают, а по меридиональным (ε_1^- , ε_1^+) являются близкими. Максимальное по модулю значение $\varepsilon_1^- = -0,0038$ меридиональной деформации имеет место на внутренней поверхности оболочки 1 на стыке с локально нагруженным шпангоутом (при $x=0$). Одновременно здесь достигается и максимальное значение $\varepsilon_2^+ = 0,0035$ окружной деформации.

Таким образом, при наращивании в рассматриваемой конструкции толщины шпангоутов наблюдается эффект, когда (в отличие от исходного варианта конструкции) определяющее влияние на прочность конструкции начинают оказывать увеличивающиеся меридиональные деформации ε_1 оболочки 1 в зоне стыка с локально нагруженным шпангоутом.

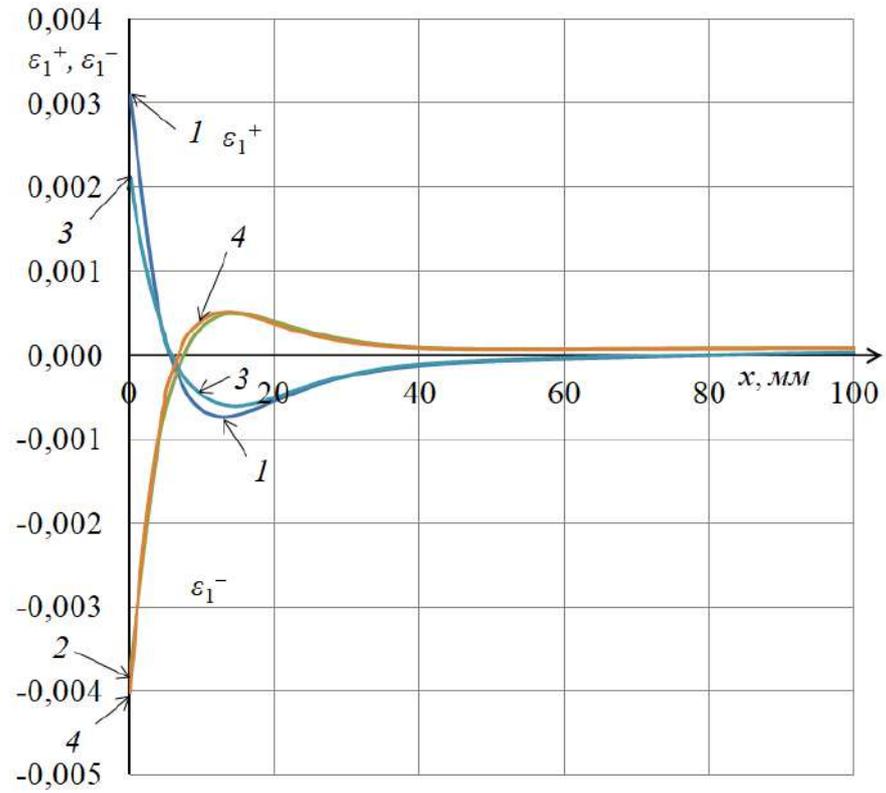


Рисунок 4.7 – Распределению вдоль оси x деформаций ε_1^- , ε_1^+ на внутренней и внешней поверхностях оболочки 1 при $\alpha_2=0$

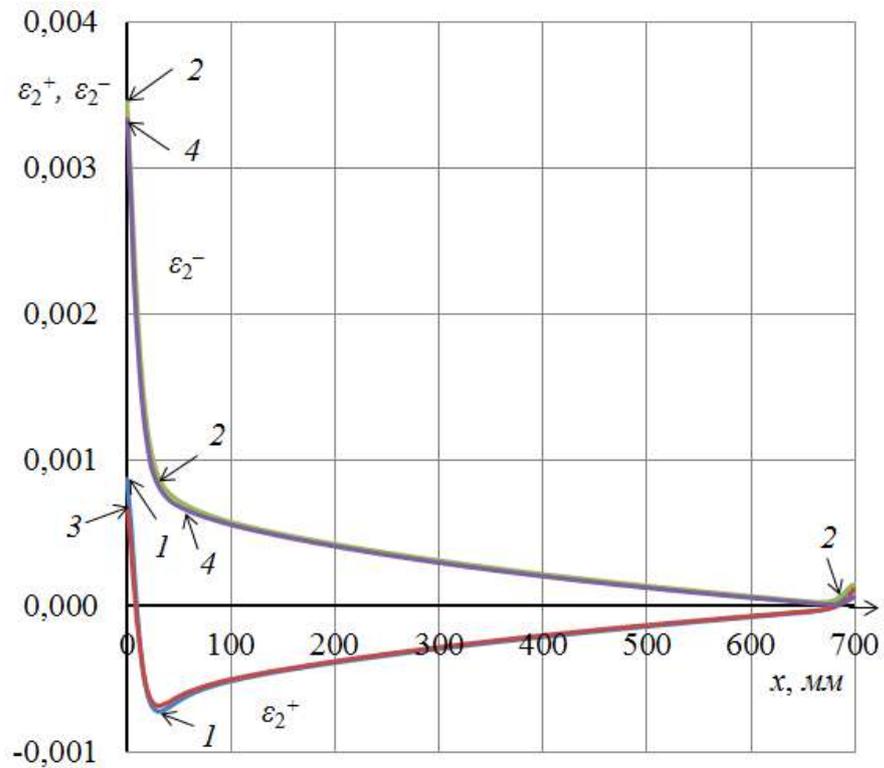


Рисунок 4.8 – Распределению вдоль оси x деформаций ε_2^- , ε_2^+ на внутренней и внешней поверхностях оболочки 1 при $\alpha_2=0$

Обратим также внимание на эффект резкого спада значений меридиональных деформаций ε_1 оболочки 1 по мере удаления от края $x=0$, состыкованного с нагруженным шпангоутом (см. рисунок 4.7): на участке $0 \leq x \leq 4$ мм (на расстоянии, равном четырём толщинам несущего слоя оболочки 1) имеет место почти четырёхкратное падение значений ε_1 . Как видно из рисунка 4.8, для деформаций ε_2 подобный спад происходит гораздо медленнее (на расстоянии порядка 20 мм). Это означает, что оболочка 1 при рассматриваемом типе нагружения оказывает сопротивление приложенным силам в основном за счёт окружных деформаций. Поэтому понятно, что в подобных случаях хорошие результаты по прогибам и окружным деформациям можно получать на основе полубезмоментного подхода, пренебрегающего изгибами в меридиональном направлении. Но парадокс состоит в том, что не учитываемый в рамках такого подхода меридиональный фактор может оказаться (как в рассмотренном случае) определяющим при оценке прочности конструкции. Значит, для получения полной картины исследуемого напряжённо-деформированного состояния этому фактору следует уделять особое внимание в соответствующей расчётной модели. Это хорошо иллюстрируют расчёты на основе КЭ-модели.

Укажем, как эта проблема проявляется применительно к данному и предыдущему расчётным случаям. Так, в рамках КЭ моделирования в первом расчётном случае достаточно было использовать сетку конечных элементов с крупными ячейками, поскольку цель расчёта ограничивалась определением прогибов и окружных деформаций. Для следующего расчётного случая приходилось упомянутую сетку делать гораздо мельче, чтобы при КЭ-моделировании можно было получать адекватные результаты ещё и по меридиональным деформациям рассматриваемой трёхслойной оболочки в узких зонах краевых эффектов. Отметим, что при использовании ЧИ-модели подобных проблем не возникало. Выбранный постоянный шаг интегрирования вдоль оси x заведомо обеспечивал необходимую точность получаемых числовых результатов по всем параметрам напряжённо-деформированного состояния независимо от принятого к рассмотрению расчётного случая.

Дополнительно к проведённым исследованиям были выполнены расчёты модифицированного варианта конструкции с утолщениями несущих слоёв оболочки 1 в зоне стыка с нагруженным шпангоутом. Указанная модификация была реализована в виде линейного изменения толщины несущих слоёв от 2 мм на стыке со шпангоутом до номинального значения 1 мм на расстоянии 20 мм от этого стыка. По результатам расчётов (см. рисунок 4.9) уровень меридиональных деформаций в оболочке 1 на стыке со шпангоутом при этом снизился до величины $\varepsilon_1 = -0,00255$, что на 33 % ниже, чем в случае несущих слоёв без указанных локальных утолщений. Указанный вывод касается и соответствующих напряжений σ_1 .

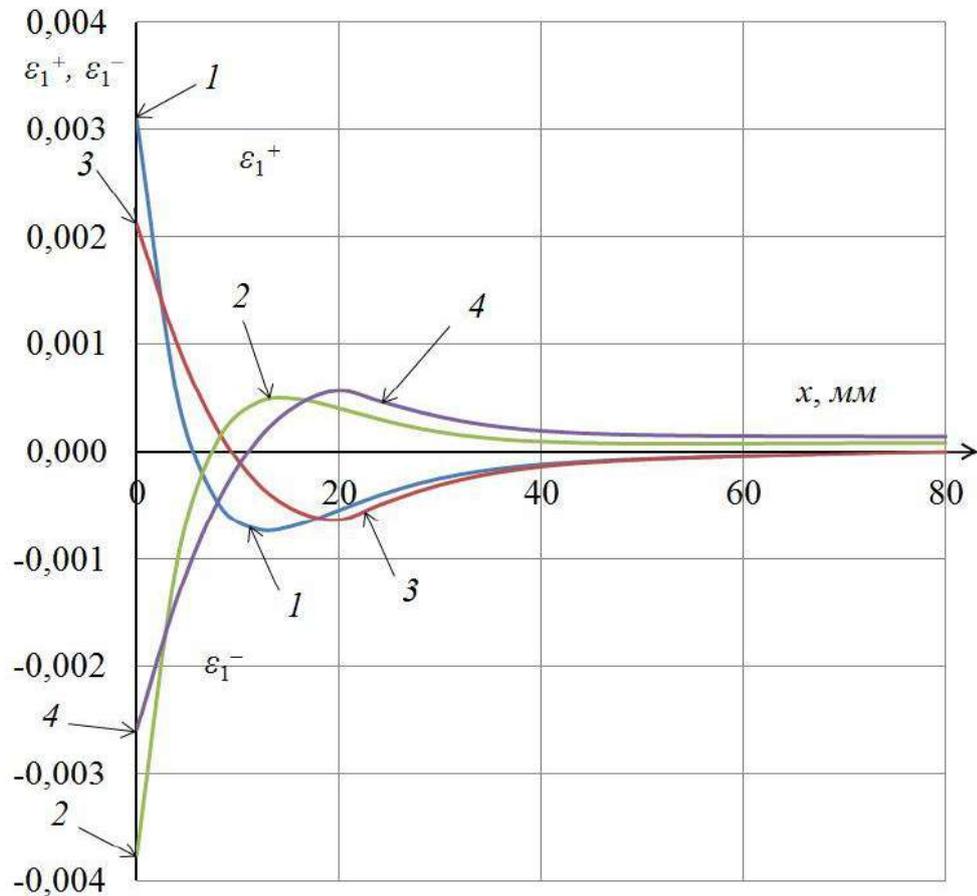


Рисунок 4.9 – Распределение меридиональных деформаций ε_1^- , ε_1^+ в оболочке 1 в варианте без утолщений (кривые 1, 2) и в варианте с утолщениями (кривые 3, 4) несущих слоёв

Обращаем внимание на то, что представленные в данном и предыдущем разделе исследования относятся к случаю достаточно протяжённой (длиной порядка двух диаметров) трёхслойной оболочки, когда локальное воздействие на один из её торцов практически не ощущается на другом свободном торце (см. рисунки 4.5, 4.8). Далее перейдём к рассмотрению случая, когда длина оболочки такова, что влияние ненагруженного торца трёхслойной оболочки становится существенным.

4.4. Результаты численного моделирования эксцентрично подкреплённой торцевыми шпангоутами трёхслойной оболочки с длиной порядка диаметра

Итак, рассматриваем трёхслойную конструкцию с теми же геометрическими и физико-механическими характеристиками, что и в разделе 4.3. Исключение составляет лишь радиус R_0 , значение которого в предстоящем исследовании принимаем в виде $R_0=370$ мм. Моделирование осуществляем сначала применительно к случаю нагружения одного из торцевых шпангоутов радиальными силами, а затем осевыми силами (см. рисунок 4.10).

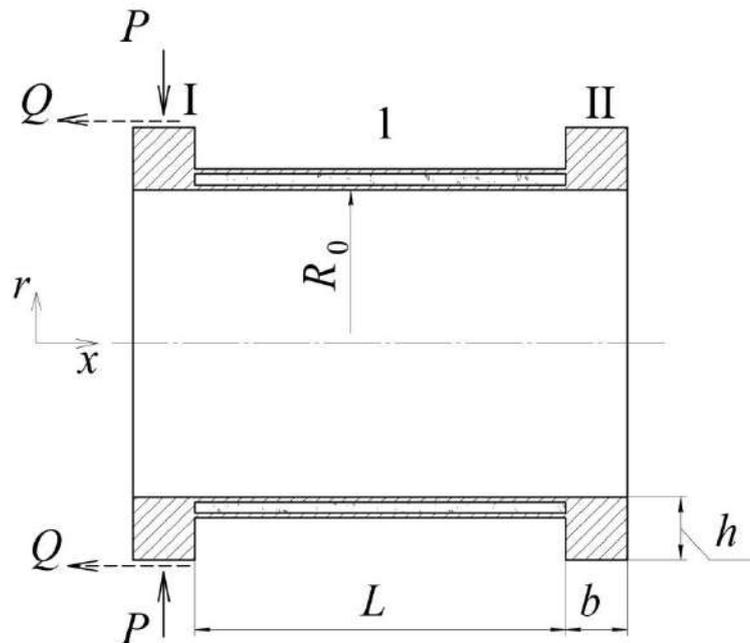


Рисунок 4.10 – Схема нагружения исследуемой трёхслойной оболочки

4.4.1. Случай приложения к одному из шпангоутов двух радиальных сил

Пусть исследуемая трёхслойная конструкция нагружена, как показано на рисунке 4.10, двумя радиальными силами величиной $P=10000 \text{ Н}$. Считаем, что угловой размер в окружном направлении площадки приложения нагрузки P характеризуется величиной $\alpha_0=0,11$, а размер указанной площадки в осевом направлении соответствует ширине шпангоута b . Рассматриваем три случая задания граничных условий на правом торце конструкции. Это случай свободного торца, случай жёстко закреплённого торца и случай торца с запрещёнными по оси x перемещениями.

Результаты расчетов в виде деформаций ε_1^+ , ε_2^+ , ε_1^- , ε_2^- , на внешней и внутренней поверхностях оболочки 1 в осевом её сечении, проходящем через вектор силы P (при $\alpha_2=0$), представлены на рисунках 4.11 – 4.16. Они соответствуют случаю несжимаемого по толщине заполнителя (с принятием $E_3=2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ для заполнителя в случае КЭ-модели). (При этом для шпангоутов в КЭ-модели также было принято $G_{13}=G_{23}=G_{12}$). Цифрами 1 и 2 на графиках отмечены кривые, полученные с использованием ЧИ модели, а цифрами 3 и 4 – с использованием КЭ-7 модели.

Отмечаем, что во всех рассмотренных вариантах граничных условий результаты расчетов с применением КЭ и ЧИ моделей практически совпадают. (Это говорит о том, что в рассматриваемом случае нагружения шпангоута радиальными силами поперечные сдвиги в шпангоуте (учитываемые в данном варианте КЭ модели) не играют существенной роли). Некоторое расхождение КЭ и ЧИ результатов (по деформациям ε_1^- , ε_1^+) наблюдается лишь в случае свободного правого торца конструкции (см. рисунок 4.11) и имеет место в окрестности правого края оболочки (в окрестности точки $x=700 \text{ мм}$). Этот эффект связан с тем, что в КЭ модели вместо условия свободного правого края принимается условие нахождения этого края на фиктивном упругом основании (с малыми значениями модулей упругости). Наличие в расчетной КЭ модели дополнительного подкрепляющего объекта в виде указанного упругого основания

и приводит к несколько уменьшенным значениям деформаций ε_1^+ , ε_1^- на правом краю оболочки 1.

Рассматривая графики на рисунках 4.11, 4.13, 4.15, обращаем внимание на изгибный и быстроизменяющийся характер меридиональных деформаций в краевых зонах оболочки 1. Подобного типа краевой эффект (см. [81, 91]), обусловленный изгибом каждого из несущих слоёв оболочки и составляющий по протяжённости несколько толщин несущего слоя (здесь это порядка 4 мм), является характерным для трёхслойной (подчиняющейся гипотезе ломаной линии) оболочки с лёгким наполнителем. Что касается окружных деформаций ε_2^+ , ε_2^- , то, как видно из рисунков 4.12, 4.14, 4.16, протяжённость характерной для них зоны краевого эффекта оценивается величиной порядка 40 мм. Эти деформации обусловлены изгибом в окружном направлении всего трёхслойного пакета, составляющего оболочку. При таком характере изгиба несущие слои оболочки находятся преимущественно в состоянии растяжения-сжатия. Как видно, подобный изгиб осуществляется по всей длине оболочки. Тем самым обеспечивается высокий уровень сопротивляемости оболочки приложенным радиальным нагрузкам, стремящимся изогнуть нагруженный шпангоут и оболочку в окружном направлении.

В случае свободного правого торца конструкции (см. рисунки 4.11, 4.12) меридиональные деформации ε_1^+ , ε_1^- пренебрежимо малы практически по всей длине оболочки, и главную роль в отмеченной сопротивляемости играют описанные окружные деформации. Однако, в краевой зоне оболочки, примыкающей к нагруженному (левому) шпангоуту пиковые значения меридиональных и окружных деформаций оказываются сопоставимыми. При этом в зоне, примыкающей к правому шпангоуту, значения меридиональных четырёхкратно превышают соответствующие значения окружных деформаций. В то же время, указанные значения меридиональных деформаций на левом торце оболочки почти двукратно превышают значения таких же деформаций на правом её торце.

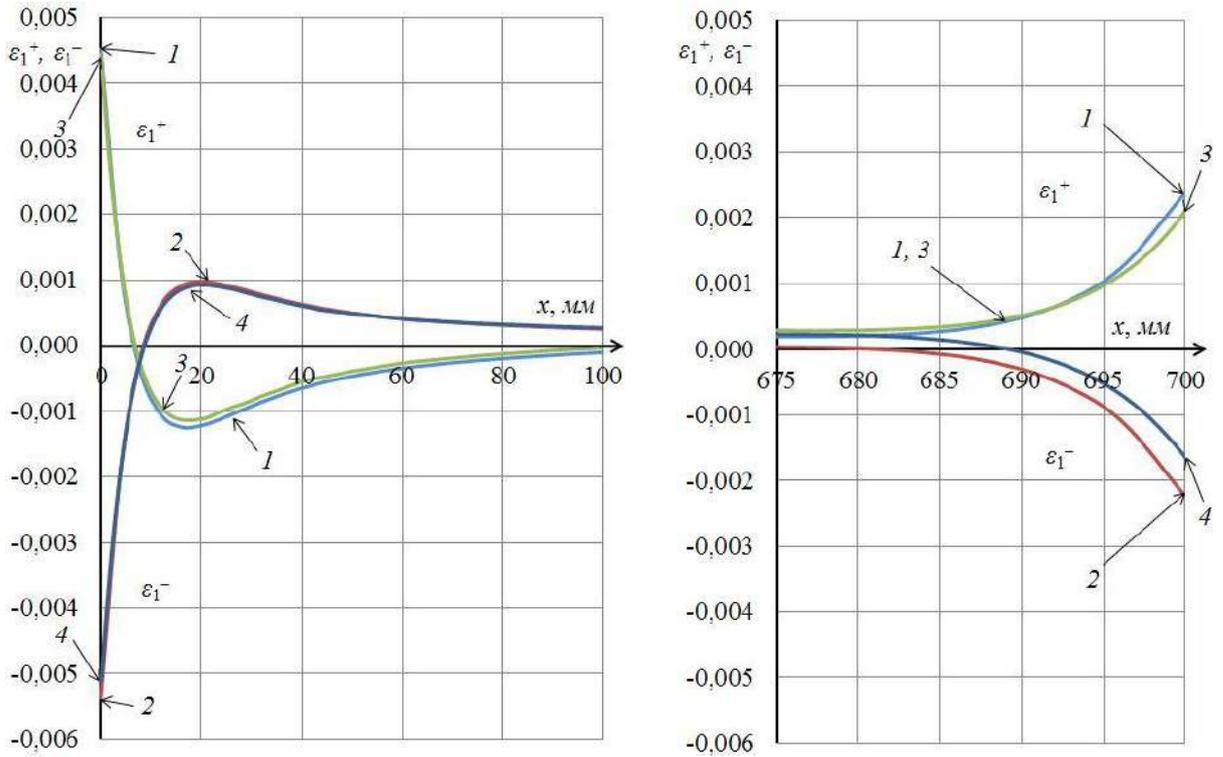


Рисунок 4.11 – Распределения вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- при $\alpha_2=0$.
Случай нагружения силами P в условиях несжимаемого заполнителя и свободного правого торца конструкции

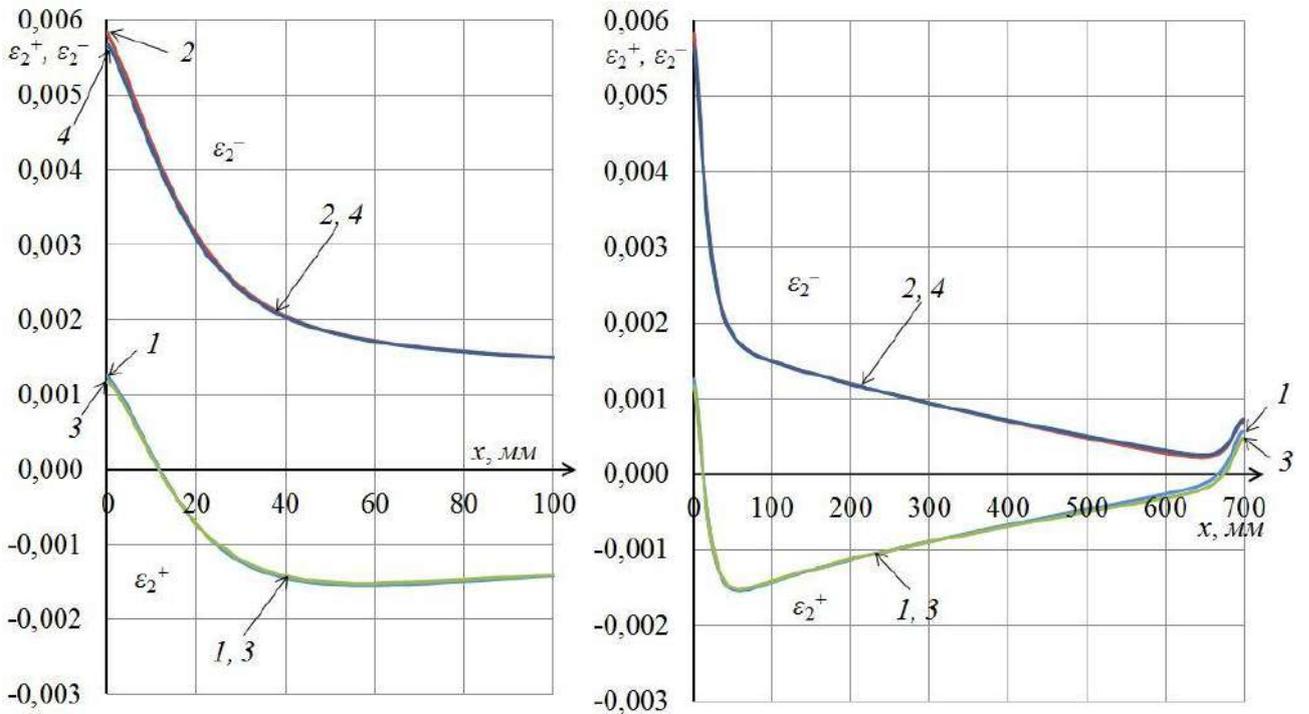


Рисунок 4.12 – Распределения вдоль оси x деформаций ε_2^+ , ε_2^- при $\alpha_2=0$.
Случай нагружения силами P в условиях несжимаемого заполнителя и свободного правого торца конструкции

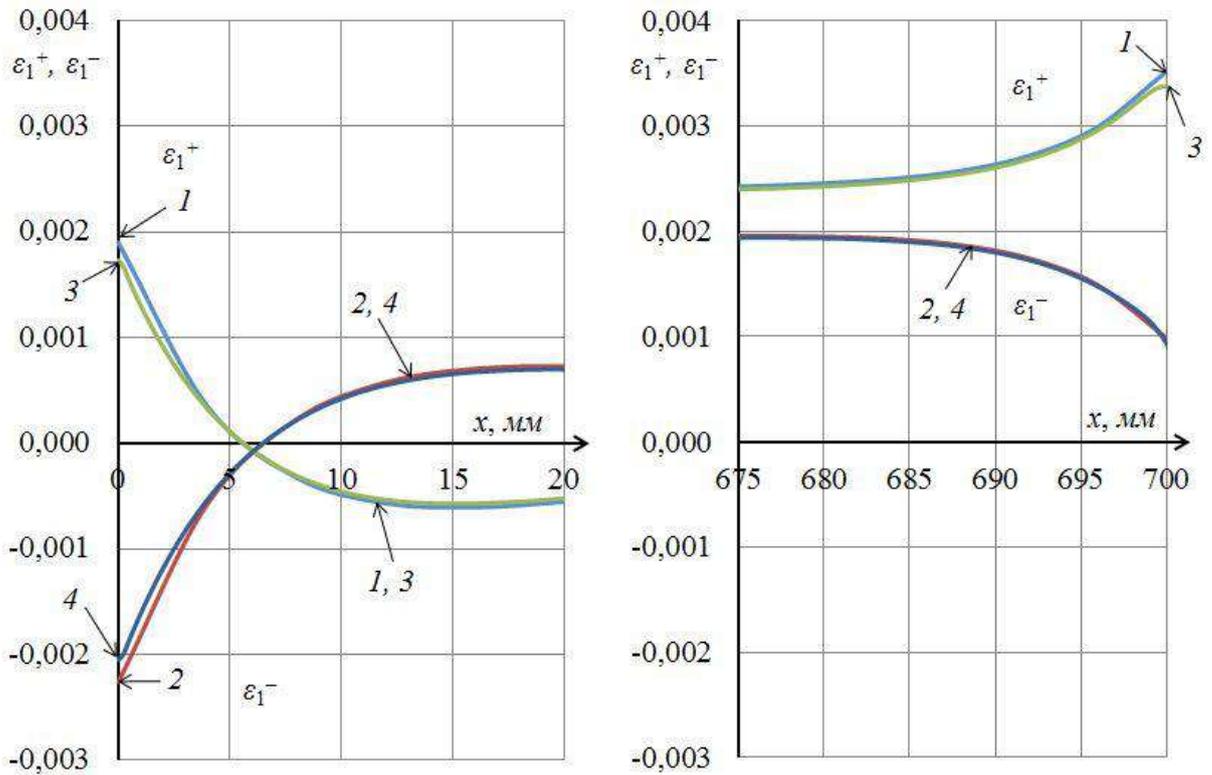


Рисунок 4.13 – Распределения вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- при $\alpha_2=0$.
Случай нагружения силами P в условиях несжимаемого заполнителя и жёстко закреплённого правого торца конструкции

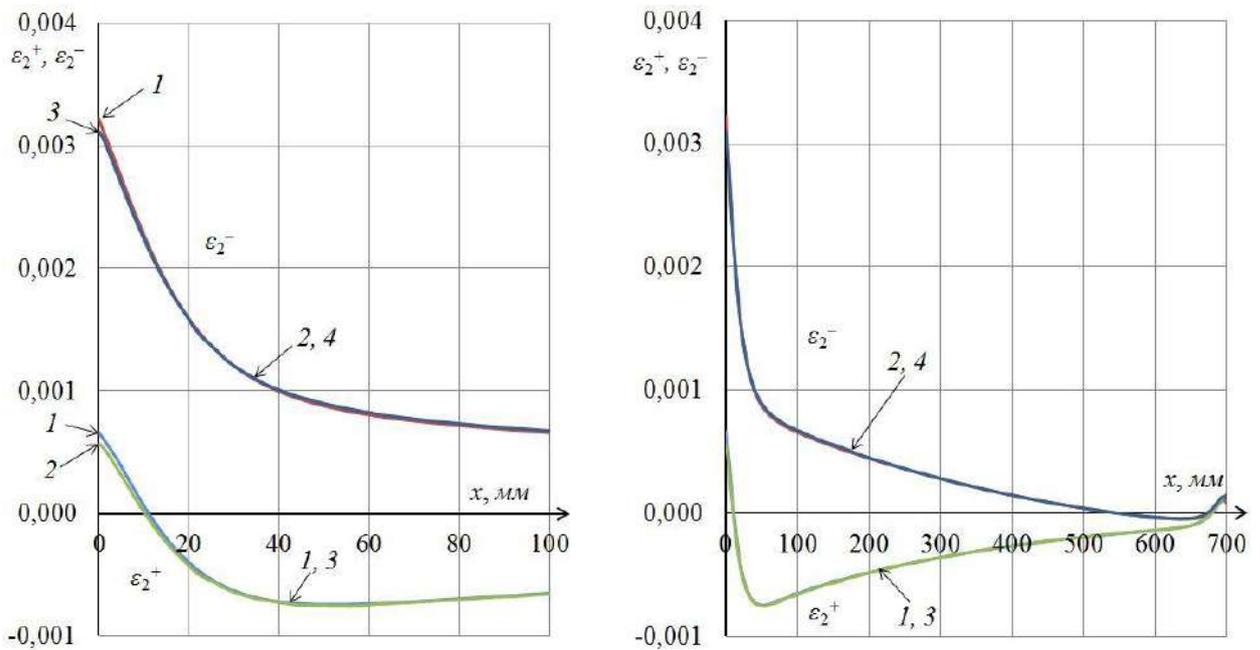


Рисунок 4.14 – Распределения вдоль оси x деформаций ε_2^+ , ε_2^- при $\alpha_2=0$.
Случай нагружения силами P в условиях несжимаемого заполнителя и жёстко закреплённого правого торца конструкции

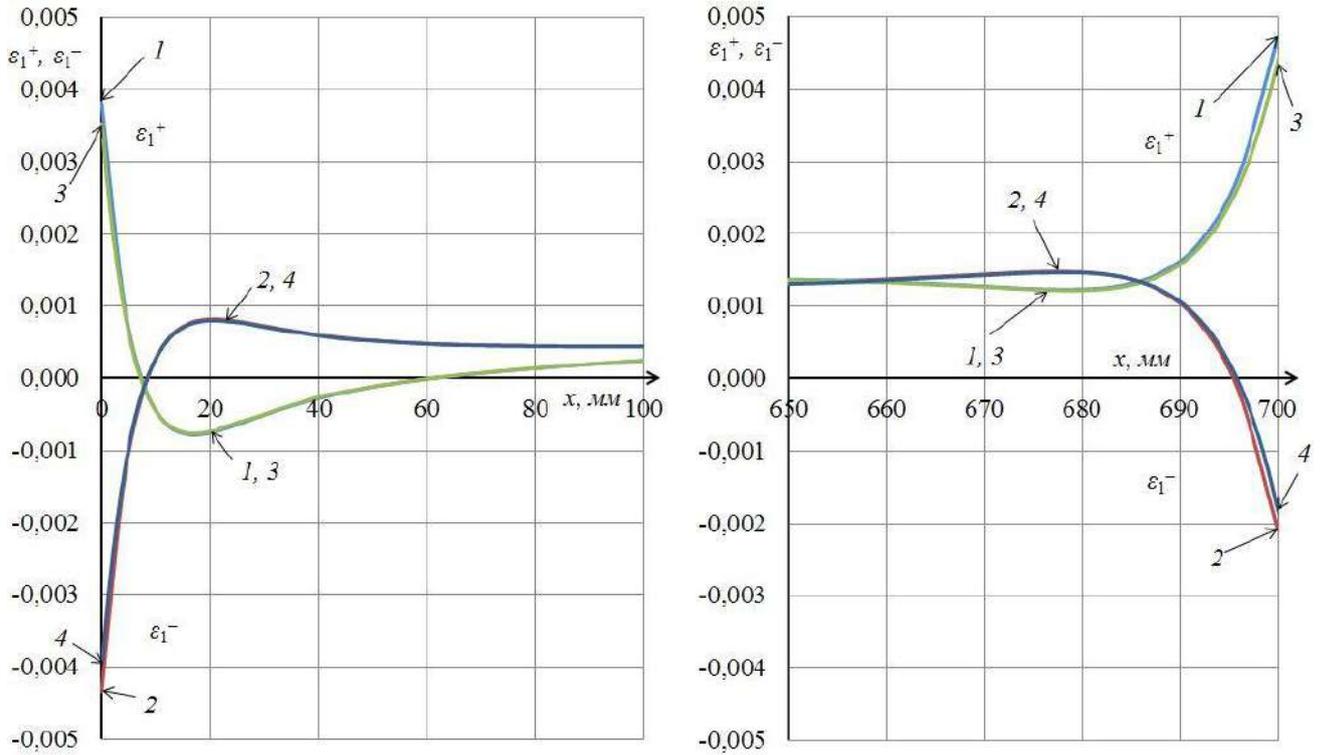


Рисунок 4.15 – Распределения вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- при $\alpha_2=0$.
Случай нагружения силами P в условиях несжимаемого заполнителя и закреплённого от осевых перемещений правого торца конструкции

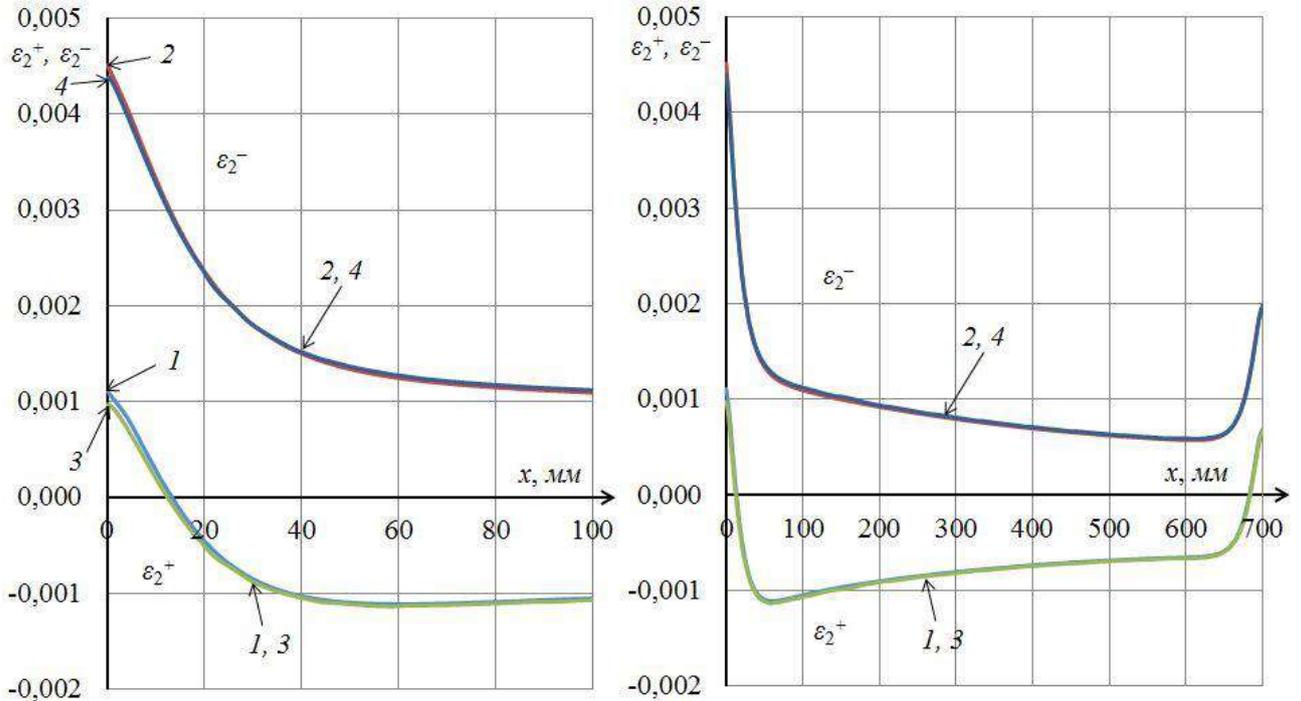


Рисунок 4.16 – Распределения вдоль оси x деформаций ε_2^+ , ε_2^- при $\alpha_2=0$.
Случай нагружения силами P в условиях несжимаемого заполнителя и закреплённого от осевых перемещений правого торца конструкции

При переходе к случаю жёстко закреплённого правого торца конструкции (см. рисунки 4.13, 4.14) картина деформирования оболочки существенным образом изменяется. В работу по сопротивлению приложенным нагрузкам эффективно включаются (преимущественно по безмоментной схеме) меридиональные деформации. В результате уровень деформаций в оболочке существенно снижается по сравнению со случаем свободного правого края. Вместе с тем, обращает на себя внимание эффект, выражающийся в том, что в рассматриваемом случае жёстко закреплённого правого шпангоута уровень меридиональных деформаций на правом торце оболочки почти вдвое превышает уровень таких же деформаций на левом торце (на стыке с нагруженным шпангоутом). Это качественно отличается от того, что имело место в первом из обсуждаемых случаев.

Случай, когда на правом торце конструкции запрещены лишь перемещения вдоль оси x (см. рисунки 4.15, 4.16), является промежуточным между двумя уже рассмотренными. Здесь влияние меридиональных деформаций, отмеченное при рассмотрении второго случая граничных условий, заметно снижается. В результате уровень деформаций для данного случая оказывается несколько ниже, чем в первом случае, и выше, чем во втором.

Чтобы оценить погрешность, связанную с принятием предположения о несжимаемости заполнителя по толщине, для уже рассмотренных трёх случаев граничных условий были выполнены КЭ расчёты (модель КЭ-6) с принятием модуля Юнга заполнителя в виде $E_3=20 \text{ МПа}$ (вместо $E_3=2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$). Для удобства сравнительного анализа соответствующие результаты КЭ моделирования оформлены в виде таблицы 4.1. В колонках этой таблицы приведены полученные расчётами с упомянутыми значениями $E_3=2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ и $E_3=20 \text{ МПа}$ результаты расчётов по деформациям ε_1^+ , ε_1^- на краях трёхслойной оболочки (при $x=0$ и $x=700 \text{ мм}$). Судя по полученным максимальным (для каждого из вариантов граничных условий) значениям деформаций, можно сделать вывод, что упомянутая погрешность не превышает величины порядка 15 %.

Были проведены также КЭ расчёты для оценки влияния на деформированное состояние рассматриваемой конструкции таких параметров, как модуль сдвига заполнителя, модуль сдвига G_{12} стеклопластика и угловой размер α_0 площадки приложения нагрузки. Полученные при этом результаты по деформациям ε_1^+ , ε_1^- , ε_2^+ , ε_2^- на левом краю оболочки (при $x=0$), соответствующие третьему из рассмотренных вариантов граничных условий, оформлены в виде таблицы 4.2. Здесь для сравнения в левом числовом столбце приведены данные, соответствующие результатам расчётов, представленным в виде графиков на рисунках 4.15, 4.16. Видно, что увеличение модуля сдвига заполнителя от исходного значения 10 МПа до принимаемого значения 20 МПа приводит к уменьшению максимального значения деформаций в оболочке на 15 %. Уменьшение модуля сдвига G_{12} стеклопластика до значения $G_{12}=3500$ МПа незначительно (в пределах 5 %) сказывается на результате по максимуму деформаций в оболочке. К незначительному изменению в уровне деформаций в оболочке ведёт и двукратное уменьшение размера площадки приложения нагрузки (от значения $\alpha_0=0,11$ до значения $\alpha_0=0,055$).

Последний вывод в одинаковой мере относится как к случаю сжимаемого (при $E_3=20$ МПа), так и несжимаемого (при $E_3=2 \cdot 10^4$ МПа) заполнителя. Это хорошо наблюдается при сравнении соответствующих результатов расчётов, представленных в последних двух столбцах таблиц 4.1 и 4.2.

4.4.2. Случай приложения к одному из шпангоутов двух осевых сил

Переходим теперь к обсуждению результатов численного моделирования применительно к случаю приложения к шпангоуту I двух локальных осевых нагрузок Q (см. рисунок 4.10). Исходим из того, что $Q=10000$ Н. Считаем, что остальные параметры имеют те же значения, что и при расчётах в предыдущем разделе. Считаем, что на правом торце конструкции запрещены перемещения вдоль оси x .

Полученные результаты численного моделирования в виде графиков

Таблица 4.1. Результаты КЭ расчётов по деформациям ε_1^+ , ε_1^- на краях оболочки при значениях модуля Юнга заполнителя $E_3=2 \cdot 10^4$ МПа и $E_3=20$ МПа

Деформации и оболочки при $x=0$ и $x=700$ мм	Варьируемые параметры					
	Правый торец конструкции свободен		Правый торец конструкции жёстко закреплён		Запрещены осевые перемещения на правом торце	
	Заполни тель: $E_3=2 \cdot 10^4$ МПа	Заполни тель: $E_3=20$ МПа	Заполни тель: $E_3=2 \cdot 10^4$ МПа	Заполни тель: $E_3=20$ МПа	Заполни тель: $E_3=2 \cdot 10^4$ МПа	Заполни тель: $E_3=20$ МПа
ε_1^+ (при $x=0$)	$4,44 \cdot 10^{-03}$	$3,87 \cdot 10^{-03}$	$1,73 \cdot 10^{-03}$	$1,43 \cdot 10^{-03}$	$3,51 \cdot 10^{-03}$	$3,10 \cdot 10^{-03}$
ε_1^- (при $x=0$)	$-5,11 \cdot 10^{-03}$	$-5,87 \cdot 10^{-03}$	$-2,05 \cdot 10^{-03}$	$-2,44 \cdot 10^{-03}$	$-3,93 \cdot 10^{-03}$	$-4,51 \cdot 10^{-03}$
ε_1^+ (при $x=700$)	$2,23 \cdot 10^{-03}$	$2,18 \cdot 10^{-03}$	$3,36 \cdot 10^{-03}$	$3,46 \cdot 10^{-03}$	$4,52 \cdot 10^{-03}$	$4,40 \cdot 10^{-03}$
ε_1^- (при $x=700$)	$-1,73 \cdot 10^{-03}$	$-1,82 \cdot 10^{-03}$	$8,40 \cdot 10^{-04}$	$9,14 \cdot 10^{-04}$	$-2,07 \cdot 10^{-03}$	$-2,30 \cdot 10^{-03}$

Таблица 4.2. Зависимость деформаций ε_1^+ , ε_1^- , ε_2^+ , ε_2^- на левом краю оболочки (при $x=0$) от значений модулей сдвига заполнителя и стеклопластика, а также углового размера α_0 площадки приложения нагрузки

Деформации ($x=0$)	Исходный вариант (несжимаемый заполнитель)	Варьируемые параметры			
		(заполнитель несжимаемый) $G_{13}=G_{23}=20$ МПа	(стеклопластик) $G_{12}=3500$ МПа	$\alpha_0 = 0,055$ рад	
				Заполнитель несжимаемый	(заполнитель) $E_3=20$ МПа
ε_1^+	$3,51 \cdot 10^{-03}$	$2,91 \cdot 10^{-03}$	$3,31 \cdot 10^{-03}$	$3,55 \cdot 10^{-03}$	$3,11 \cdot 10^{-03}$
ε_1^-	$-3,93 \cdot 10^{-03}$	$-3,32 \cdot 10^{-03}$	$-3,72 \cdot 10^{-03}$	$-4,04 \cdot 10^{-03}$	$-4,64 \cdot 10^{-03}$
ε_2^+	$0,97 \cdot 10^{-03}$	$0,91 \cdot 10^{-03}$	$1,0 \cdot 10^{-03}$	$1,02 \cdot 10^{-03}$	$1,03 \cdot 10^{-03}$
ε_2^-	$4,35 \cdot 10^{-03}$	$4,27 \cdot 10^{-03}$	$4,44 \cdot 10^{-03}$	$4,67 \cdot 10^{-03}$	$4,68 \cdot 10^{-03}$

распределения деформаций ε_1^+ , ε_2^+ , ε_1^- , ε_2^- по оболочке вдоль оси x при $\alpha_2=0$ представлены на рисунке 4.17. Цифрами 1 и 2 на графиках отмечены кривые, относящиеся к ЧИ модели; цифрами 3 и 4 – к КЭ-5 модели с несжимаемым заполнителем (при $E_3=2 \cdot 10^4$ МПа) и шпангоутами, работающими по схеме единой нормали (при $G_{23}=G_{13}=100 \cdot G_{12}$); цифрами 3' и 4' – к КЭ-6 модели со сжимаемым заполнителем (при $E_3=20$ МПа) и шпангоутами, работающими по схеме единой нормали (при $G_{23}=G_{13}=100 \cdot G_{12}$); цифрами 3'' и 4'' – к КЭ-7 модели с несжимаемым заполнителем (при $E_3=2 \cdot 10^4$ МПа) и шпангоутами с $G_{13}=G_{23}=G_{12}$.

Сразу отмечаем, что в данном расчётном случае окружные деформации оболочки в виду их малости не играют существенной роли. Отмечаем, также что при $x > 150$ мм состояние оболочки становится практически безмоментным.

Как видно, протяжённость зоны резкого изменения деформаций ε_1^+ , ε_1^- здесь оценивается величиной порядка 20 мм, что в пять раз превышает аналогичный показатель, зафиксированный в случае с радиальными силами.

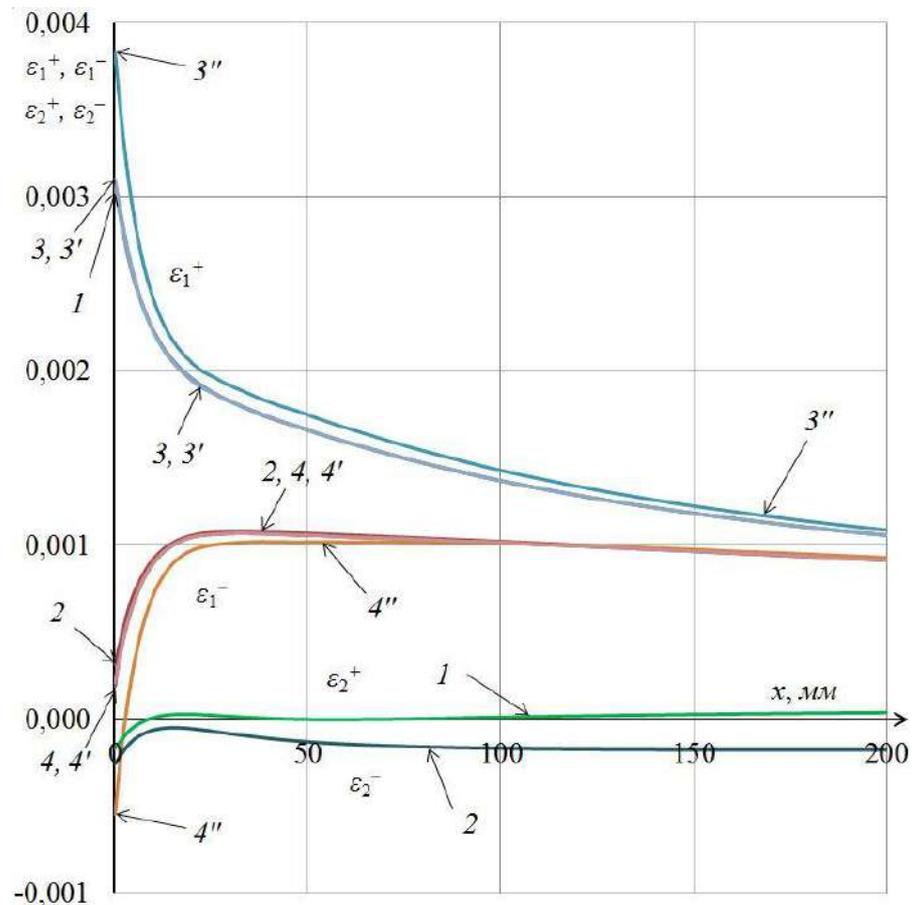


Рисунок 4.17 – Распределения вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- , ε_2^+ , ε_2^- при $\alpha_2=0$. Случай нагружения силами Q

Это связано с тем, что в данном случае реализуется тип краевого эффекта, когда несущие слои оболочки изгибаются (в меридиональном направлении) не по отдельности, а в составе трёхслойного пакета как единого целого. В таком случае для каждого из несущих слоёв преобладающим оказывается состояние растяжения-сжатия, а не изгиба. Заполнитель в таком случае должен в меньшей степени подвергаться деформации в поперечном направлении, а его работа должна лучше описываться гипотезой о несжимаемости по толщине. Сказанное подтверждается фактом практического совпадения результатов расчётов на основе моделей ЧИ и КЭ-5, учитывающих несжимаемость заполнителя и модели КЭ-6, построенной с учётом его сжимаемости (см. графики на рисунке 4.17, помеченные цифрами 1, 3, 3' и цифрами 2, 4, 4').

Обращаем внимание на то, что в данном случае значительный вклад в сопротивление приложенным нагрузкам вносит работа шпангоута I на кручение. В ЧИ модели шпангоут рассматривается как тонкая оболочка, подчиняющаяся гипотезе единой нормали. В рамках такой модели шпангоут наделяется определённой жёсткостью на кручение. Однако подобная жёсткость имеет оценочный характер, поскольку напрямую не связана с такими важными в проблеме кручения факторами, как сдвиги в скручиваемом объекте. Придание в КЭ модели больших значений модулям поперечного сдвига G_{13} , G_{23} материала шпангоута ($G_{23}=G_{13}=100 \cdot G_{12}$) ведёт к существенному уменьшению соответствующих сдвиговых деформаций в шпангоуте и, как следствие, приближает шпангоут к схеме оболочки, подчиняющейся гипотезе единой нормали. Отсюда понятно отмеченное выше совпадение результатов ЧИ модели и КЭ-5 модели (при $G_{23}=G_{13}=100 \cdot G_{12}$) в рассматриваемом случае нагружения исследуемой конструкции. Но если в КЭ модели применительно к шпангоуту использовать типичное для стеклопластика значение модуля сдвига в виде 5000 МПа , то, судя по графикам с номерами 3'' и 4'' на рисунке 4.17, можно заключить, что реальный шпангоут из стеклопластика оказывается более податливым на кручение, чем его оболочечная модель. Это ведёт к увеличению уровня меридиональных деформаций в оболочке примерно на 22 % по сравнению

с тем, что даёт расчётная модель конструкции со шпангоутами, работающими по схеме единой нормали.

Основные результаты и выводы, полученные в разделах 4.3 и 4.4, можно сформулировать следующим образом.

На основе объёмных и оболочечных элементов комплекса «*Abaqus*» построена КЭ модель, ориентированная на численное решение задач о напряжённо-деформированном состоянии локально нагруженных через шпангоуты ортотропных трёхслойных с лёгким наполнителем цилиндрических оболочек. Настройка такой модели трёхслойной конструкции на решение рассматриваемой задачи в рамках предположения о несжимаемости наполнителя по толщине и принятия гипотезы единой нормали для шпангоутов может осуществляться путём задания завышенных (не менее чем на два порядка) значений соответствующих упругих постоянных. Проведёнными расчётами продемонстрирована эффективность заявленной расчётной методики, нацеленной на подтверждение достоверности получаемых численных решений путём сравнения расчётных КЭ и ЧИ результатов.

Представлены полученные на основе КЭ и ЧИ моделей результаты расчётов трёхслойной подкреплённой двумя торцевыми шпангоутами оболочки для двух случаев нагружения одного из них, а именно: для случая приложения к шпангоуту двух радиальных сил и случая приложения к шпангоуту двух осевых сил.

При анализе результатов расчётов для случая действия радиальных сил установлено, что:

- учёт поперечных сдвигов в шпангоутах практически не влияет на результаты по уровню деформаций (и напряжений) в рассчитываемой оболочке;
- уровень меридиональных деформаций в несущих слоях оболочки на стыках с торцевыми шпангоутами сопоставим с уровнем окружных деформаций;
- если ненагруженный шпангоут находится в свободном состоянии, то основной вклад в сопротивляемость конструкции приложенным радиальным нагрузкам вносят окружные деформации; в такой ситуации уровень меридиональных деформаций в несущих слоях оболочки на стыке с нагруженным

шпангоутом почти двукратно превышает уровень таких же деформаций на стыке с ненагруженным шпангоутом;

– если торец ненагруженного шпангоута жестко закреплён, то в работу по сопротивлению приложенным нагрузкам эффективно включаются (преимущественно по безмоментной схеме) меридиональные деформации; в такой ситуации уровень меридиональных деформаций на стыке с ненагруженным шпангоутом почти двукратно превышает уровень таких же деформаций на стыке с нагруженным шпангоутом;

– меридиональные деформации несущих слоёв в краевых зонах оболочки обусловлены изгибом каждого из несущих слоёв и имеют быстроизменяющийся по мере удаления от края характер; протяжённость наблюдаемого краевого эффекта при этом составляет величину порядка четырёх толщин несущего слоя; снизить уровень этих деформаций можно конструктивными мерами, например, путём образования локальных утолщений несущих слоёв в краевых зонах;

– учёт сжимаемости заполнителя по толщине приводит к увеличению (в пределах 15 %) рассчитываемого без такого учёта уровня меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) на стыках со шпангоутами;

– двукратное увеличение модуля сдвига заполнителя приводит к уменьшению (примерно на 15 %) максимального значения меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) в оболочке.

Анализом результатов расчётов для случая нагружения шпангоута осевыми силами установлено, что:

– протяжённость краевой зоны, в которой наблюдается резкое изменение меридиональных деформаций несущих слоёв оболочки, почти в пять раз превышает аналогичный показатель, зафиксированный в случае действия радиальных сил;

– в зоне отмеченного краевого эффекта реализуется такой тип изгиба трёхслойного пакета (в меридиональном направлении), при котором для каждого из несущих слоёв преобладающим является состояние растяжения-сжатия, а не изгиба;

- учёт сжимаемости заполнителя по толщине при данном типе нагружения не приводит к сколько-нибудь заметному уточнению расчётных результатов;
- учёт поперечных сдвигов в нагруженном осевыми силами шпангоуте приводит к существенному увеличению (примерно на 22 %) получаемых расчётом меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) в оболочке на стыке с этим шпангоутом.

4.5. Исследование напряжённо-деформированного состояния трёхслойного стеклопластикового резервуара в случае приложения к одному из шпангоутов двух осевых сил

В разделе 3.2 был рассмотрен стеклопластиковый (однослойный) резервуар в случае приложения к одному из его шпангоутов двух локальных осевых нагрузок, и была дана оценка влияния увеличения жёсткости нагруженного шпангоута (за счёт увеличения размера его профиля) на уровень напряжений, возникающих в конструкции резервуара. Предпринимаемое здесь исследование имеет целью дать аналогичную оценку применительно к случаю трёхслойного резервуара, находящегося под действием двух осевых сил. При этом исходим из того, что увеличение жёсткости шпангоутов в конструкции рассматриваемого резервуара предполагается достигнуть за счёт увеличения модуля Юнга материала шпангоутов в окружном направлении.

Расчётная схема исследуемого резервуара, закреплённого по левому краю, представлена на рисунке 4.18. Для удобства последующего анализа рассматриваемая конструкция условно разбита на семь участков, последовательно занумерованных от 1 до 7. Длины L (мм) участков 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 исследуемой конструкции оцениваются величинами 200, 2000, 100, 1000, 250, 300, 100, соответственно. Радиус $R=1000$ мм. Толщины слоёв участков с номерами 2, 4, 6 заданы в виде $h_1=4$ мм, $h_2=56$ мм, $h_3=10$ мм. Толщины участков с номерами 1, 3, 5, 7 одинаковы и имеют величину $h=120$ мм. Несущие слои трёхслойных участков 2, 4, 6 и шпангоуты 1, 3, 5, 7 выполнены из стеклопластика с характеристиками: $E_1=1,8 \cdot 10^4$ МПа, $E_2=2,3 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12}=0,42 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{21}=0,13$. Расположенный

между несущими слоями изотропный пенопластовый наполнитель имеет характеристики: $E=22 \text{ МПа}$; $\nu=0,2$; $G=9,2 \text{ МПа}$. К поверхности шпангоута 5 приложены две одинаковые локальные осевые нагрузки величиной $P=10^6 \text{ Н}$. Угловой размер зон (в окружном направлении), вдоль которых (равномерно) распределены нагрузки P , имеет величину $2\alpha_0=0,1$. Считаем, что векторы сил P расположены в осевом сечении рассматриваемой конструкции, включающем точки с координатами $\alpha_2=0$ и $\alpha_2=\pi$. Так, что указанные зоны распределения нагрузок P могут быть описаны неравенствами $(-\alpha_0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_0)$ и $(\pi - \alpha_0 \leq \alpha_2 \leq \pi + \alpha_0)$.

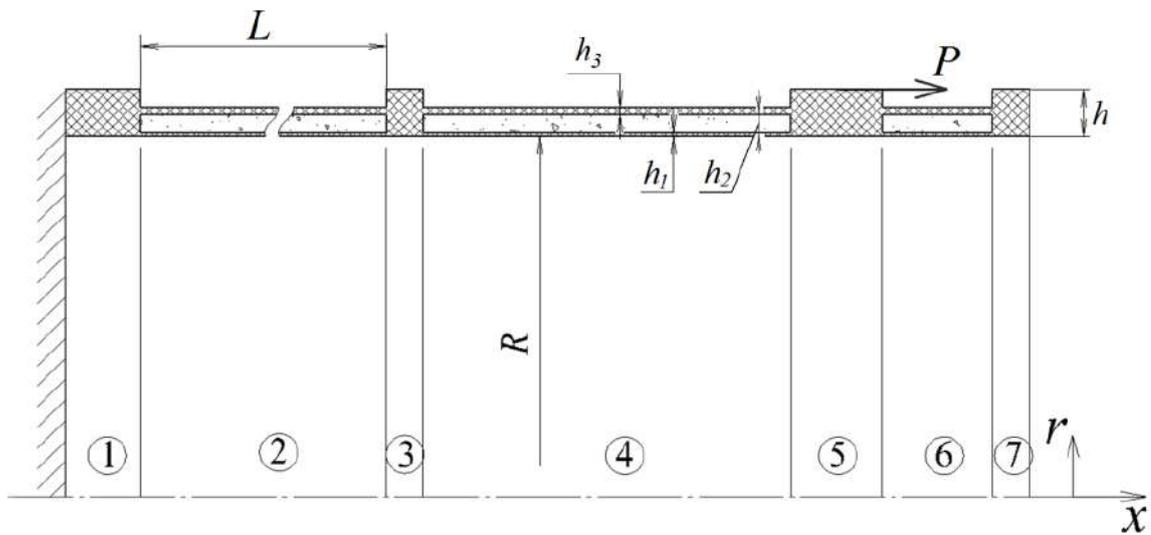


Рисунок 4.18 – Геометрические характеристики трёхслойного стеклопластикового резервуара

Принимаем во внимание, что для функции $f(\alpha_2)$, которая равна постоянной величине q внутри этих зон и равна нулю вне их, разложение в ряд Фурье записывается в виде (2.84) – (2.85).

Обращаем также внимание на то, что, поскольку при построении описанной ЧИ модели в качестве поверхности приведения выбрана внутренняя поверхность (радиусом R) рассматриваемой конструкции, в схему нагружения шпангоута 5 наряду с силами P следует дополнительно включить два локальных момента величиной $M=Ph=1,2 \cdot 10^8 \text{ Н}\cdot\text{мм}$. При включении каждой из пар локальных нагрузок P и M в расчётную ЧИ модель будем сводить их к статически эквивалентной системе действующих на оболочку 5 поверхностных нагрузок с интенсивностями q_x и q_z (в осевом и нормальном направлениях), которые

распределены по зонам приложения нагрузок P , имеющих размеры $2\alpha_0$ и L (в окружном и осевом направлениях). Вычисление значений параметров q_x и q_z в указанных зонах проводится с использованием выражений

$$q_x = P / (2\alpha_0 RL), \quad q_z = -M(x - 0,5L) / (2\alpha_0 RJ), \quad J = L^3 / 12.$$

Разложение локально действующих силовых факторов q_x и q_z в ряды Фурье по координате α_2 осуществляется по схеме (2.84) – (2.85), где в одном случае следует принять $q=q_x$, а в другом случае принять $q=q_z$.

Отличительными особенностями описанной трёхслойной конструкции являются её существенная протяжённость, наличие четырёх шпангоутов и существенное различие в толщинах её несущих слоёв. В этой связи укажем, что представленные выше экспериментальные и расчётные результаты касались лишь трёхслойных оболочек, несущие слои которых имеют одинаковую толщину и которые подкреплены двумя одинаковыми торцевыми шпангоутами.

Разбиение шпангоутов на объёмные элементы в КЭ модели осуществлялось с выбором сетки, характерный размер ячейки которой составлял порядка 10 мм. Заполнитель заменялся однослойным ансамблем объёмных элементов. При этом для большей части заполнителя размер сеточной ячейки в осевом и кольцевом направлениях выбирался порядка 15 мм. В окрестностях стыков со шпангоутами размер такой ячейки в осевом направлении уменьшался до 3 мм. Аналогичные по размерам ячейки имела и сетка оболочечных элементов на большей части каждого из несущих слоёв. Исключение составляли лишь зоны краевых эффектов, где осуществлялось уменьшение осевых размеров оболочечных элементов до 1 мм. Отметим также, что для ансамблей оболочечных элементов, относящихся к внутреннему и наружному несущим слоям, в качестве поверхности приведения выбиралась соответственно верхняя и нижняя поверхность слоя.

Расчёты на основе ЧИ модели осуществлялись с выбором интервала между точками ортогонализации порядка 5 мм для трёхслойных участков исследуемого объекта и порядка 20 мм для остальных его участков. При этом на каждом таком интервале интегрирование по схеме Кутта-Мерсона осуществлялось с выбором четырёх шагов. По вопросу сходимости получаемого на основе ЧИ модели

решения (в рядах Фурье) поставленной задачи отметим, что выполненные расчёты с удержанием 60 и 120 гармоник в соответствующих Фурье-разложениях привели к практически совпадающим результатам.

Полученные с применением построенных ЧИ и КЭ-5 моделей результаты расчётов в виде графиков распределения (вдоль оси x) деформаций ε_1^+ , ε_2^+ и ε_1^- , ε_2^- на внешней и внутренней поверхности рассматриваемой конструкции (в осевом её сечении, проходящем через вектор силы P (при $\alpha_2=0$)), представлены на рисунках 4.19, 4.20. Цифрами 1 и 2 здесь обозначены кривые, относящиеся к ЧИ модели, а цифрами 3 и 4 - к КЭ-5 модели. Отмечаем хорошее согласование представленных здесь результатов ЧИ и КЭ-5 моделирований, что свидетельствует о достоверности получаемого численного решения рассматриваемой задачи. Отмечаем также, что наиболее напряжённым является участок оболочки 4 в окрестности стыка с нагруженным шпангоутом 5. Наибольшего значения (порядка 0,011) здесь достигают (при $\alpha_2=0$) меридиональные деформации ε_1^+ на внешней поверхности оболочки 4 в точке стыка со шпангоутом 5. При этом в той же точке окружная деформация ε_2^+ имеет в 10 раз меньшее значение (-0,00093). Максимальное (растягивающее) напряжение здесь оценивается величиной $\sigma_1=198,4$ МПа.

Для того чтобы оценить возможности по снижению указанного уровня напряжений, в рассмотрение был также введён (второй) вариант обсуждаемой конструкции, в котором физико-механические характеристики материала шпангоутов 1, 3, 7 заданы в виде: $E_1=1,4 \cdot 10^4$ МПа, $E_2=3,7 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12}=0,58 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{21}=0,18$. Предварительные результаты расчётов с применением ЧИ и КЭ-5 моделей показали, что при таком варианте напряжение σ_1 в опасной на разрыв точке конструкции снижается на 17 % по сравнению с первоначальным вариантом и достигает величины 163,9 МПа.

Графики распределения деформаций ε_1^+ , ε_2^+ , ε_1^- , ε_2^- по оболочке вдоль оси x при $\alpha_2=0$ для первого и второго варианта конструкции представлены соответственно на рисунках 4.21 и 4.22. Цифрами 1 и 2 на графиках отмечены

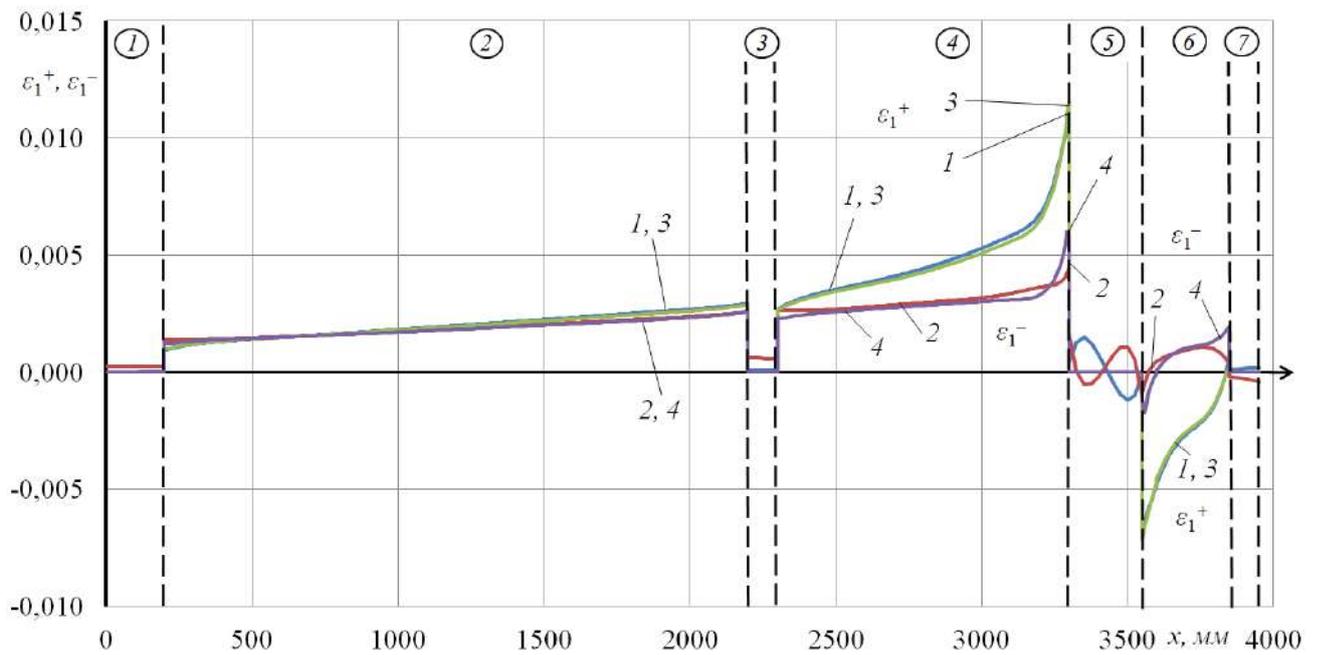


Рисунок 4.19 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- на внешней и внутренней поверхности рассматриваемой конструкции при $\alpha_2=0$

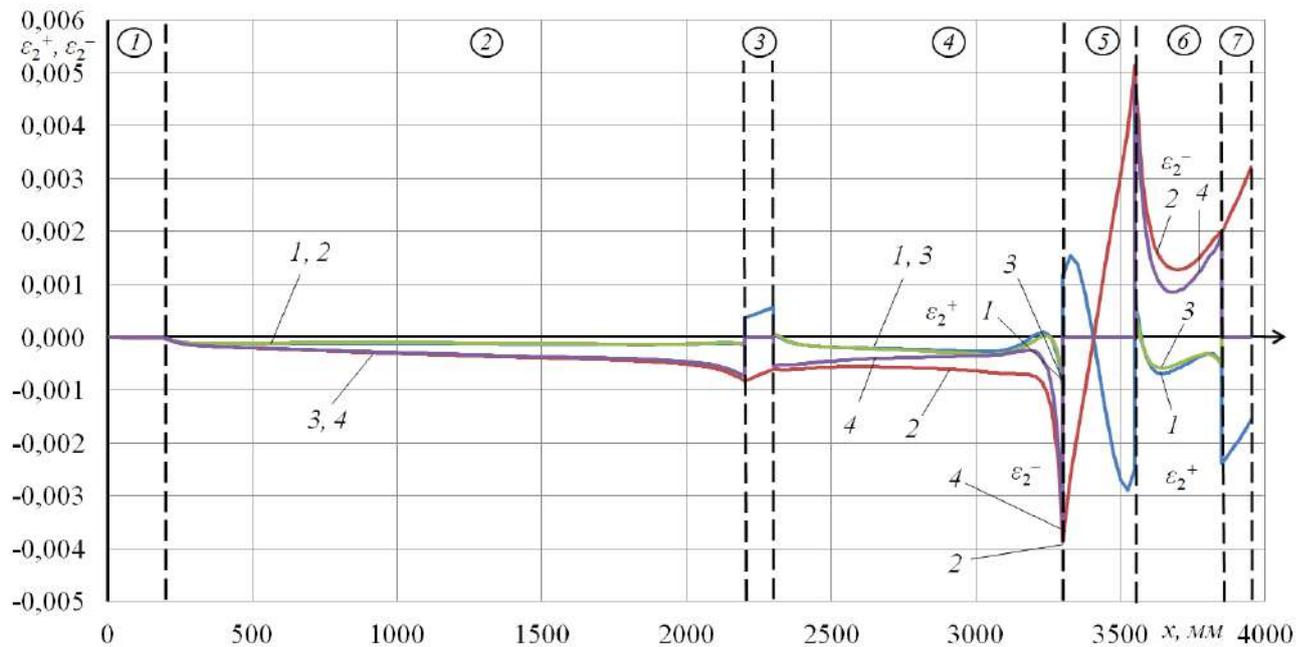


Рисунок 4.20 – Распределение вдоль оси x деформаций ε_2^+ , ε_2^- на внешней и внутренней поверхности рассматриваемой конструкции при $\alpha_2=0$

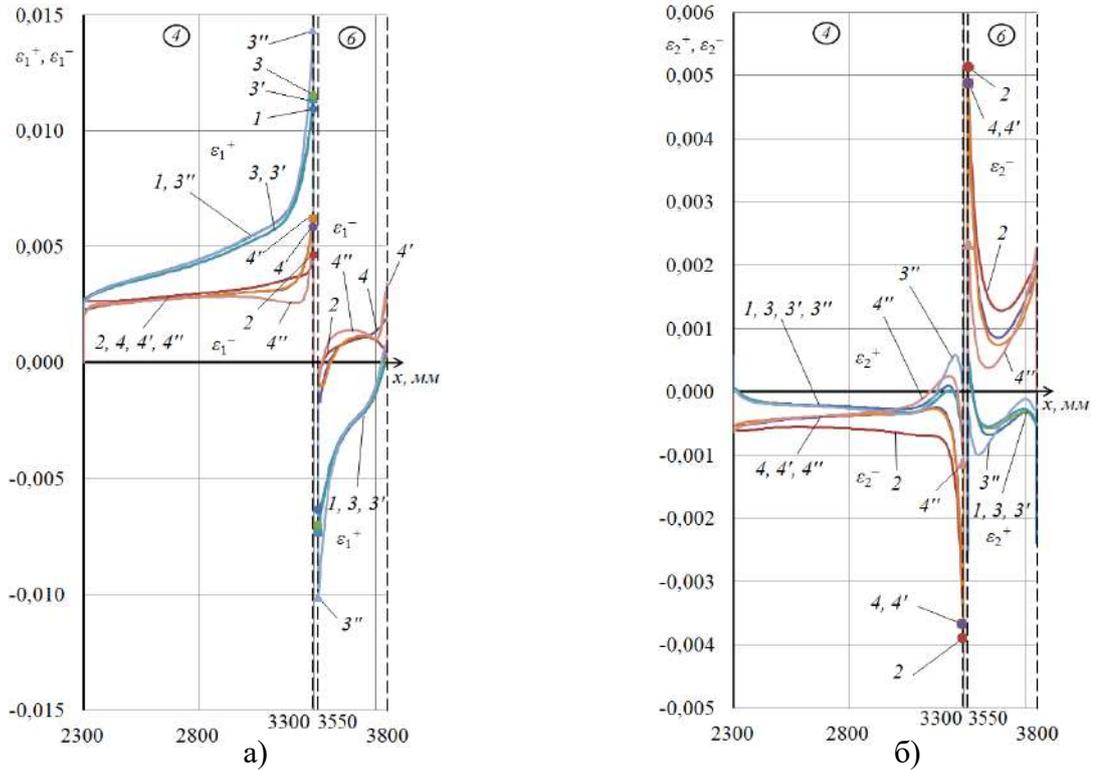


Рисунок 4.21 – Распределение (по участкам 4, 6) вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- (а) и ε_2^+ , ε_2^- (б) на внешней и внутренней поверхности рассматриваемого резервуара при $\alpha_2=0$ (первый вариант конструкции)

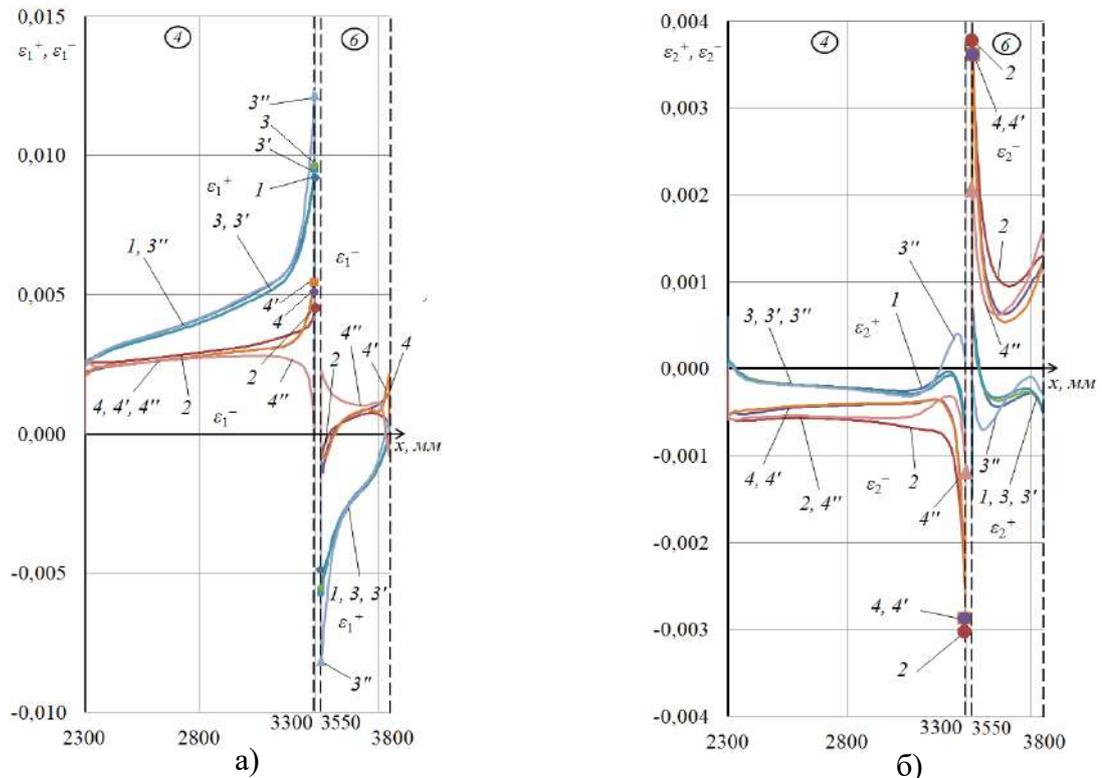


Рисунок 4.22 – Распределение (по участкам 4, 6) вдоль оси x деформаций ε_1^+ , ε_1^- (а) и ε_2^+ , ε_2^- (б) на внешней и внутренней поверхности рассматриваемого резервуара при $\alpha_2=0$ (второй вариант конструкции)

кривые, относящиеся к ЧИ модели, цифрами 3 и 4 - к КЭ-5 модели, цифрами 3' и 4' – к КЭ-6 модели, цифрами 3'' и 4'' – к КЭ-8 модели (с принятием $G_{13}=G_{23}=G_{12}$ для материала шпангоутов).

Сравнение графиков, относящихся к моделям КЭ-5 и КЭ-6, показывает, что учёт (в модели КЭ-6) сжимаемости заполнителя по толщине практически не влияет на получаемые расчётные результаты. Сравнение графиков, относящихся к модели КЭ-8 (учитывающей поперечные сдвиги в шпангоутах) и модели КЭ-5, позволяет сделать вывод, что учёт обозначенных поперечных сдвигов приводит к увеличению пиковых значений меридиональных деформаций и напряжений в рассматриваемых конструктивных вариантах резервуара примерно на 30 %. В случае первого конструктивного варианта указанные пиковые значения приобретают вид: $\varepsilon_1=0,0144$, $\sigma_1=259,2$ МПа, а в случае второго варианта – вид: $\varepsilon_1=0,0122$, $\sigma_1=219,6$ МПа. Сравнивая эти результаты, приходим к окончательному выводу, что в рассматриваемом случае локального нагружения путём увеличения в 1,6 раза модуля Юнга материала шпангоутов в окружном направлении можно снизить примерно на 15 % уровень напряжений в конструкции исследуемого трёхслойного резервуара.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработана методика численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических конструкций, составленных из секций в виде слоистых ортотропных оболочек, а также трёхслойных оболочек с лёгким наполнителем и слоистыми ортотропными несущими слоями. В рамках реализации этой методики построены две вычислительные модели (ЧИ и КЭ), одна из которых основана на методе численного интегрирования дифференциальных уравнений теории оболочек, подчиняющихся либо гипотезе единой нормали, либо гипотезе ломаной линии, а другая основана на методе конечных элементов. Суть методики заключается в получении решения рассматриваемой задачи на основе каждой из двух отмеченных вычислительных моделей, после чего делается вывод о достоверности полученных по этим моделям результатов при условии их полной согласованности (в том числе по зонам краевых эффектов).

2. С использованием данной методики впервые при решении задач о напряжённо-деформированном состоянии локально нагруженных через шпангоуты стеклопластиковых (как однослойных, так и трёхслойных с пенопластовым наполнителем) цилиндрических конструкций получены (с подтверждённой достоверностью) результаты по пиковым значениям меридиональных деформаций и напряжений в оболочках в зонах их стыков с нагруженными шпангоутами. При этом впервые (с подтверждённой достоверностью) установлено, что в расчётных случаях, связанных с приложением к шпангоутам радиальных сил, осевых сил, а также крутящих моментов, в этих зонах имеет место опасно высокий (по сравнению с другими зонами конструкции) уровень деформаций и напряжений. Показано, что известные решения подобных задач на основе полубезмоментного подхода дают двух-трёхкратно заниженную оценку по этим параметрам.

3. На основе параметрических исследований с применением построенных ЧИ и КЭ моделей впервые (с подтверждённой достоверностью) установлены закономерности по влиянию схем нагружения, физико-механических и геометрических параметров указанных конструкций на уровень деформаций и напряжений в зонах краевых эффектов. В частности, установлено, что:

– в случае, когда существенным фактором при деформировании локально нагруженного шпангоута является его кручение, учёт поперечных сдвигов в таком шпангоуте может приводить к повышению пиковых значений меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) оболочки на стыке со шпангоутом на величину порядка 27 %. Указано на два способа, которыми можно снизить уровень опасных напряжений на 27 % и 18 % за счёт изменения профиля нагруженного шпангоута;

– в случае приложения к шпангоуту локальных радиальных нагрузок учёт сжимаемости заполнителя по толщине приводит к увеличению (в пределах 15 %) рассчитываемого без такого учёта уровня меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) в трёхслойной оболочке на стыке с таким шпангоутом. При этом двукратное увеличение модуля сдвига заполнителя приводит к уменьшению (примерно на 15 %) максимального значения меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) в трёхслойной оболочке;

– в случае приложения к шпангоуту локальных осевых нагрузок учёт сжимаемости заполнителя по толщине не приводит к сколько-нибудь заметному уточнению расчётных результатов, а учёт поперечных сдвигов в нагруженном осевыми силами шпангоуте приводит к увеличению (примерно на 22 %) получаемых расчётом меридиональных деформаций (и соответствующих напряжений) в трёхслойной оболочке на стыке с этим шпангоутом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абрамов А.А. Вариант метода прогонки / А.А. Абрамов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – Т. 1. – № 2. – С. 349-351.
2. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш // М.: Мир, 1972. – 319 с.
3. Алфутов Н.А., Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов // М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян // М.: Наука, 1974. – 448 с.
5. Аноприенко Р.В. Инженерный анализ напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек при локальных циклических нагрузках / Р.В. Аноприенко, Л.Д. Луганцев // Современные наукоемкие технологии. – 2006. – № 6. – С. 42-43.
6. Апетьян В.Э. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния подкрепленных шпангоутами стеклопластиковых цилиндрических оболочек при локальных нагрузках / В.Э. Апетьян, Л.Г. Сухомлинов, М.В. Шиврин // Космонавтика и ракетостроение. – 2017. – 3(96). – С. 81-89.
7. Артюхин Ю.П. Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки из стеклопластика при действии локальной нагрузки / Ю.П. Артюхин, Ю.П. Жигалко, Г.М. Сальников // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казанский ун-т. – 1972. – Вып. 8. – С. 256-271.
8. Баженов В.Г. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Н.Новгород: Изд. Нижегород. ун-та. – 1992. – 159 с.
9. Бакулин В.Н. Метод конечных элементов для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек / В.Н. Бакулин // М.: ЦНИИ Информации. – 1985. – 140 с.

10. Бакулин В.Н. Оценка локальных параметров сетки в конечно-элементных задачах / В.Н. Бакулин, В.В. Инфлянскас // Вычислительная механика сплошных сред. – 2013. – Т. 6. – № 1. – С. 70-77.

11. Бакулин В.Н. Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов / В.Н. Бакулин, А.А. Рассоха // М.: Машиностроение – 1987. – 312 с.

12. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон // М.: Стройиздат – 1982. – 448 с.

13. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н.С. Бахвалов // М: Наука – 1973. – 631 с.

14. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков // М.: Машиностроение. – 1980. – 375 с.

15. Бондарь В.С. Расчётное моделирование испытаний щеточных уплотнений / В.С. Бондарь, Е.В. Родин // Вестник ПНИПУ. – 2022. – № 1. – С. 14-22.

16. Бондарь В.С. Разрушение высоковольтных трансформаторов при взрыве и взаимодействии ударных волн со стенками / В.С. Бондарь, Э.Е. Сон, Ю.М. Темис, Х.Х. Азметов // Теплофизика высоких температур. – 2020. – Т. 58. – № 5. – С. 770-781.

17. Бондарь В.С. Численное моделирование нелинейных процессов накопления повреждений при циклическом нагружении / В.С. Бондарь, В.В. Дашин, П.В. Семенов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2013. – Т. 6. – № 3. – С. 286-291.

18. Будрейка О.В. О границах применимости различных гипотез к анализу осесимметричного НДС трехслойных оболочек из КМ / О.В. Будрейка, З.М. Носова, С.Н. Сухинин // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. – Горький: ГГУ. – 1988. – С 92-99.

19. Вазов В. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных / В. Вазов, Дж. Форсайт // М.: ИЛ. – 1963. – 487 с.

20. Варвак П.М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций / П.М. Варвак, Л.П. Варвак // М.: Стройиздат. – 1977. – 154 с.
21. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев // М.: Машиностроение. – 1988. – 269 с.
22. Виноградов Ю.И. Мультипликативный метод решения краевых задач теории оболочек / Ю.И. Виноградов // Прикладная математика и механика. – 2013. – Т. 77. – Вып. 4. – С. 620-628.
23. Виноградов Ю.И. Расчет на прочность ортотропных локально нагруженных оболочек / Ю.И. Виноградов // Наука и Образование. – МГТУ им. Н.Э. Баумана. – Электрон. журн. – 2015. № 03. – С. 68-84.
24. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В.З. Власов // М.: Изд.-во АН СССР. – 1962. – 528 с.
25. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир // М.: Наука. – 1967. – 984 с.
26. Габбасов Р.Ф. Численное построение разрывных решений задач строительной механики / А.Р. Габбасов, Р.Ф. Габбасов, В.В. Филатов // М.: АСВ. – 2008. – 281 с.
27. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – 1961. – Т. XVI. – Вып. 3. – С. 171-174.
28. Годунов С.К. Разностные схемы. Введение в теорию / С.К. Годунов, В.С. Рябенский // М.: Наука. – 1977. – 439 с.
29. Голованов А.И. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / А.И. Голованов, М.С. Корнишин // Казань: Физ.-техн. ин-т. – 1990. – 269 с.
30. Голованов А.И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А.И. Голованов, О.Н. Тюленева, А.Ф. Шигабутдинов // М.: Физматлит. – 2006. – 392 с.
31. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер // М.: Наука. – 1976. – 512 с.

32. Горбачев В.И. Инженерная теория деформирования неоднородных пластин из композитных материалов / В.И. Горбачев // Механика композиционных материалов и конструкций – 2016. – Т. 22. № 4. – С. 585-601.
33. Горбачев В.И. Эффективные определяющие соотношения неупругих композитов / В.И. Горбачев // Вестник Московского университета – 2013. – № 6. – С. 37-42.
34. Горбачев В.И. О постановке задач в общей теории пластин Кирхгофа-Лява / В.И. Горбачев, Л.А. Кабанова // Вестник Московского университета – 2018. – № 3. – С. 43-50.
35. Горбачев В.И. О статических задачах упругих композитов / В.И. Горбачев, Б.Е. Победря // Вестник Московского университета – 1977. – № 5. – С. 101-111.
36. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем / Э.И. Григолюк // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 1. – С.77-84.
37. Григолюк Э.И. Анализ уравнений трехслойных оболочек несимметричной структуры с жестким наполнителем / Э.И. Григолюк, В.М. Корнев // Прикл. механика. – 1968. – Т.4. Вып. 3. – С. 1-5.
38. Григолюк Э.И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков // М.: Машиностроение. – 1973. – 172 с.
39. Григоренко Я.М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // М.: Наука. – 1992. – 332 с.
40. Григоренко Я.М. Численное решение краевых задач статики ортотропных слоистых оболочек вращения на ЭВМ типа М-220 / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Т. Василенко, Г.П. Голуб // Киев: Наукова думка – 1971. – 151 с.
41. Григоренко Я.М. О решении на ЭЦВМ задач статики оболочек вращения при произвольном нагружении / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Т. Василенко, Л.И. Петрова // В кн.: Применение ЭЦВМ в строительной механике. – Киев: Наукова думка. – 1968. – С. 46-51.

42. Григорьев И.В. Деформирование, устойчивость и колебания оболочечных конструкций / И.В. Григорьев, В.И. Прокопьев, Ю.В. Твердый // М.: АСВ. – 2007. – 208 с.

43. Давиденко Ю.С. Программное обеспечение численного анализа напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочечных конструкций при локальных нагрузках / Ю.С. Давиденко // Успехи современного естествознания. – 2004. – № 4. – С. 141-142.

44. Даревский В.М. Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках / В.М. Даревский // В кн. Прочность и динамика авиационных двигателей. – Вып.1. – М.: Машиностроение. – 1964. – С. 23-83.

45. Елпатьевский А.Н. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов / А.Н. Елпатьевский, В.В. Васильев // М.: Машиностроение. – 1972. – 168 с.

46. Емельянов И.Г. Напряженное состояние оболочечных конструкций при локальных нагрузках / И.Г. Емельянов, А.В. Кузнецов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – № 1. – С.53-59.

47. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган // М.: Мир. – 1986. – 318 с.

48. Каледин В.О. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов / В.О. Каледин, С.М. Аульченко, А.Б. Миткевич, Е.В. Решетникова и др. // М.: Физматлит. 2014. 196 с.

49. Кармишин А.В. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А.В. Кармишин, В.А. Лясковец, В.И. Мяченков, А.Н. Фролов // М.: Машиностроение. – 1975. – 376 с.

50. Кобелев В.Н. Расчет трехслойных конструкций: Справочник / В.Н. Кобелев, Л.М. Коварский, С.И. Тимофеев // М.: Машиностроение. – 1984. – 304 с.

51. Кобелев В.Н. Расчет прочности и устойчивости трехслойных конструкций / В.Н. Кобелев, С.Н. Сухинин и др. // Махачкала: ДГТУ – 2004. – 156 с.

52. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / В.И. Королев // М.: Машиностроение.– 1965. – 272 с.
53. Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин / Дж.Н. Ланс // М.: ИЛ. – 1962. – 208 с.
54. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / С. Лукасевич // М.: Мир. – 1982. – 544 с.
55. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье // М.: Наука. – 1970. – 940 с.
56. Маркин А.А. Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем / А.А. Маркин, В.В. Глаголев, А.А. Фурсаев // Вестник ПНИПУ. – 2016. – № 2. – С. 34-44.
57. Маркин А.А. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений / А.А. Маркин, Соколова М.Ю., Христинич Д.В. // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 1. – С. 38-45.
58. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук // М.: Наука. – 1989. – 608 с.
59. Матвеев А.М. Вопросы прочности, устойчивости и надёжности конструкций / А.М. Матвеев, Б.В. Нерубайло // М.: Изд-во МАИ. – 2013. – 160 с.
60. Миткевич А.Б. Деформация шпангоута, связанного со стеклопластиковой оболочкой, под действием локальных нагрузок / А.Б. Миткевич, И.А. Егоренков, В.Д. Протасов // Механика полимеров. – 1972. – №5. – С. 854-860.
61. Муштари Х.М. К общей теории пологих оболочек с наполнителем / Х.М. Муштари // Изв. АН СССР: Отделение механики и машиностроения. – 1961. – № 2. – С. 27.
62. Муштари Х.М. О применении различных теорий трехслойных пластин и оболочек / Х.М. Муштари // Изв. АН СССР: Отделение механики и машиностроения. – 1960. – № 6. – С. 165.

63. Мяченков В.И. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник / В.И. Мяченков, И.В. Григорьев // М.: Машиностроение. – 1981. – 216 с.
64. Немировский Ю.В. Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю.В. Немировский, Б.С. Резников // Новосибирск: Наука. – 1986. – 165 с.
65. Нерубайло Б.В. Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек / Б.В. Нерубайло // М.: Машиностроение. – 1983. – 248 с.
66. Нерубайло Б.В. Прочность анизотропных цилиндрических оболочек при силовых и температурных воздействиях / Нерубайло Б.В. // М.: Изд-во МАИ. – 2018. – 160 с.
67. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов // Л.: Судпромгиз. – 1962. – 431 с.
68. Носова З.М. Экспериментально-теоретический анализ напряженно-деформированного состояния подкрепленных стеклопластиковых оболочек при действии локальных нагрузок / З.М. Носова, А.И. Отвечалин // Механика полимеров. – 1975. – №3. – С. 447-457.
69. Носова З.М. Экспериментально-теоретический анализ деформированного состояния трехслойной конструкции со шпангоутами / З.М. Носова, А.И. Отвечалин, С.Н. Сухинин // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1976. – № 7. – С. 189-190.
70. Образцов И.Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, И.В. Андрианов // М.: Машиностроение. – 1991. – 416 с.
71. Образцов И.Ф. Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований) / И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, В.П. Ольшанский // М.: ВИНТИ. – 1988. – 192 с.
72. Ольшанский В.П. Аналитические методы расчета локально нагруженных тонких оболочек / В.И. Лавинский, Д.И. Мазоренко, В.П.

Ольшанский, Л.И. Тищенко и др. // Харьков: ХНТУСГ им. Петра Василенко. – НТУ «ХПИ». – 2009. – 366 с.

73. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б.Л. Пелех // Киев: Наукова думка. – 1973. – 248 с.

74. Пикуль В.В. Теория и расчет слоистых конструкций / В.В. Пикуль // М.: Наука. – 1985. – 182 с.

75. Полилов А.Н. Экспериментальная механика композитов / А.Н. Полилов // М.: МГТУ. – 2015. – 376 с.

76. Полилов А.Н. Биомеханика прочности волокнистых композитов / А.Н. Полилов, Н.А. Татусь // М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2018. – 328 с.

77. Полилов А.Н. Критерии прочности полимерных волокнистых композитов, описывающие некоторые экспериментально наблюдаемые эффекты / А.Н. Полилов, Н.А. Татусь // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2008. – № 3. – С. 103-109.

78. Полилов А.Н. Конструирование и прочностной расчёт композитных многополостных сосудов давления / А.Н. Полилов, Н.А. Татусь, О.Ю. Склемина // Сборник трудов XXXII Международной инновационной конференции (МИКМУС – 2020). – 2021. – С. 676-682.

79. Попов Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами / Б.Г. Попов // М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1993. – 294 с.

80. Постнов В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В.А. Постнов, И.Я. Хархурим // Л.: Судостроение. – 1974. – 344 с.

81. Раман Э.В. Анализ краевых эффектов в трехслойных цилиндрических оболочках / Э.В. Раман // В сб.: Труды МВТУ. – № 475. – Расчет тонкостенных оболочечных конструкций. – М., 1987. – С. 4-12.

82. Рассказов А.О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга // Киев: Вища школа. – 1986. – 191 с.

83. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон // М.: Мир. – 1972. – 418с.

84. Соломонов Ю.С. Методы расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов / Ю.С. Соломонов, В.П. Георгиевский, А.Я. Недбай, В.А. Андрюшин // М.: Физматлит. – 2009. – 264 с.
85. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс // М.: Мир. – 1977. – 349 с.
86. Сухинин С.Н. Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек при действии локальных нагрузок / С.Н. Сухинин // Механика полимеров. – 1975. №2. – С. 300-305.
87. Сухинин С.Н. Модели сопротивления и особенности поведения при потере устойчивости трехслойных оболочек из КМ / С.Н. Сухинин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – № 5. – С.57-62.
88. Сухинин С.Н. Напряженно-деформированное состояние типа погранслоя в трехслойных оболочках из композитных материалов / С.Н. Сухинин // Механика композитных материалов. – 1981. – №1. – С. 87-92.
89. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек / С.Н. Сухинин // М.: Физматлит. – 2010. – 248 с.
90. Сухинин С.Н. Устойчивость трехслойных оболочек из КМ при совместном действии осевого сжатия и бокового давления / С.Н. Сухинин, В.И. Микишева // Механика композитных материалов. – 1981. – № 6. – С. 1035-1041.
91. Сухинин С.Н. Некоторые неклассические осесимметричные задачи трехслойных композитных оболочек / С.Н. Сухинин, З.М. Носова // Вопросы оборонной техники. Сер. 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – М.: ФГУП «НТЦ «Информтехника». – 2008. – Вып. 3(150). – С. 4-10.
92. Сухомлинов Л.Г. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния подкреплённых шпангоутами трёхслойных с лёгким наполнителем стеклопластиковых цилиндрических оболочек при локальных нагрузках / Л.Г. Сухомлинов, М.В. Шиврин // Космонавтика и ракетостроение. – 2017. – 4(97). – С. 132-142.

93. Сухомлинов Л.Г. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния стеклопластиковой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами переменной толщины, к одному из которых приложены локальные осевые нагрузки / Л.Г. Сухомлинов, М.В. Шиврин // Космонавтика и ракетостроение. – 2018. – 1(100). – С. 127-134.

94. Сухомлинов Л.Г. Применение вычислительной модели из объёмных и оболочечных элементов при расчёте локально нагруженных через шпангоуты трехслойных стеклопластиковых цилиндрических оболочек / Л.Г. Сухомлинов, М.В. Шиврин // Космонавтика и ракетостроение. – 2018. – 3(102). – С. 92-102.

95. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер // М.: Физматгиз. – 1963. – 635 с.

96. Тимошенко С.П. Теория упругости 2-е изд. / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер // М.: Наука. – 1979. – 560 с.

97. Шагивалеев К.Ф. Расчет замкнутой цилиндрической оболочки на локальные и сосредоточенные нагрузки / К.Ф. Шагивалеев // Саратовский гос. техн. ун-т. – Саратов: СГТУ. – 2011. – 316 с.

98. Шиврин М.В. Численный анализ напряжённно-деформированного состояния локально нагруженных через шпангоуты композитных цилиндрических оболочек / М.В. Шиврин // Сборник трудов II Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике». – Москва. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2017. – С. 296-299.

99. Шиврин, М.В. Численное моделирование трёхслойных стеклопластиковых с пенопластовым наполнителем цилиндрических оболочек при локальном нагружении через шпангоут / М.В. Шиврин // Труды X Общероссийской молодёжной науч.-техн. конф. «Молодёжь. Техника. Космос» – Т.1 – Балт. гос. техн. ун-т. Библиотека журнала «Военмех. Вестник БГТУ». – № 49. – СПб. – 2018. – С. 171-176.

100. Шиврин, М.В. Метод расчёта напряжённно-деформированного состояния тонкостенных композитных цилиндрических конструкций изделий ракетной техники под действием локальных нагрузок, приложенных к

шпангоутам / М.В. Шиврин // Сборник статей VIII научно-технической конференции молодых учёных и специалистов ЦУП – ЦНИИмаш – 2018. – 451 с. – С 411-416.

101. Шиврин М.В. Численное моделирование локально нагруженных через шпангоуты цилиндрических оболочек из перекрестно армированных композитов [Текст] / М.В. Шиврин, В.С. Бондарь // Машиностроение и инженерное образование. – 2021. – № 3-4 (67). – С. 28-36.

102. Шиврин М.В. Численное моделирование локально нагруженных через шпангоуты трёхслойных композитных цилиндрических оболочек / М.В. Шиврин, Л.Г. Сухомлинов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 163-174.

103. Шиврин М.В. Численное моделирование локально нагруженных через подкрепляющие шпангоуты трёхслойных с пенопластовым наполнителем стеклопластиковых цилиндрических оболочек / М.В. Шиврин // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018» – М.: МАКС Пресс. – 2018. – ISBN 978-5-317-05800-5.

104. Шиврин М.В. Численное моделирование подкреплённых шпангоутами стеклопластиковых цилиндрических оболочек при действии локальных нагрузок / М.В. Шиврин, В.С. Бондарь // Машиностроение и инженерное образование. – 2022. – № 1-2 (68). – С. 24-32.

105. Шиврин М.В. Численное моделирование локально нагруженных через шпангоуты трёхслойных стеклопластиковых с пенопластовым наполнителем цилиндрических оболочек / М.В. Шиврин, Л.Г. Сухомлинов, В.С. Бондарь // Материалы XXX Всероссийской школы-конференции «Математическое моделирование в естественных науках» – Пермь: ПНИПУ – 2021. – С. 15-17.

106. Abaqus/CAE User`s Manual - Abaqus 6.12 Documentation.

107. Almroth B.O. Computer analysis of various shells of revolution / B.O. Almroth, D. Bushnell // AIAA Journal. – 1968. – Vol. 6. № 10. – P. 1848-1855.

108. Bushnell D. Analysis of ring-stiffened shells of revolution under combined thermal and mechanical loading / D. Bushnell // *AIAA Journal*. – 1971. – Vol. 9. № 3. – P. 401-410.
109. Carera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carera // *Appl. Mech. Rev.* 2003. – 56. P. 287-308.
110. Carera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells / E. Carera // *J. Arch. Comput. Meth. Eng.* – 2002. – 9(2). – P. 87-140.
111. Carera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking / E. Carera // *J. Arch. Comput. Meth. Eng.* – 2003. – 10(3). – P. 215-296.
112. Carera E. Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed theories for layered shells / S. Brischetto, E. Carera // *Compos. Struct.* – 2008. – 85(1). – P. 83-90.
113. Carera E. A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates / S. Briscotto, E. Carera // *Appl. Mech. Rev.* – 2009. – 62(20). – P. 1-17.
114. Frostig Y. Bending of curved sandwich panels with a transversely flexible core closed-form high-order theory / Y. Frostig // *J. Sandwich Struct. Mater.* – 1999. – 1(1). – P. 4-10.
115. Mashat D.S. Use of axiomatic/asymptotic approach to evaluate various refined theories for sandwich shells / E. Carera, S.A. Khateeb, D.S. Mashat, A.M. Zenkour // *Compos. Struct.* – 2014. – 109. – P. 139-149.
116. Meyer-Piening H.R. Application of the elasticity solution to linear sandwich beams, plates and shells analysis / H.R. Meyer-Piening // *J. Sandwich Struct. Mater.* – 2004. – 6(4). – P. 295-312.
117. Noor A.K. Assessment of computational models for multilayered composite shells / W.S. Burton, A.K. Noor // *Appl. Mech. Rev.* – 1990. – Vol. 43. – № 4. – P. 67-97.
118. Noor A.K. Computational model for sandwich panels and shells / C.W. Bert, W.S. Burton, A.K. Noor // *Appl. Mech. Rev.* – 1996. – 49(3). – P. 155-199.

119. Noor A.K. Assessment of computational models for multilayered composite cylinders / W.S. Burton, A.K. Noor, J.M. Peters // *Int. J. Solids and Struct.* – 1991. – Vol. 27. – № 10. – P. 1269-1286.
120. Kalnins A. Analysis of shells of revolution subjected to symmetrical and nonsymmetrical loads / A. Kalnins // *Trans. ASME.* – 1964. – Vol. 31. – Ser. E. № 3. – P. 467-476.
121. Kapania P.K. Review on the analysis of laminated shells / P.K. Kapania // *J. Pres. Ves. Techn.* – 1989. – Vol. 111. – P. 88-96.
122. Qatu M.S. Review of recent literature on static analyses of composite shells / E. Asadi, M.S. Qatu, W. Wang // *Open J. Compos. Mater.* – 2012. – 2. – P. 61-86.
123. Reddy J.N. Theories and computational models for composite laminates / J.N. Reddy, D.H. Robbins // *Appl. Mech. Rev.* – 1994. – 47(7). – P. 147-165.
124. Sheng H.Y. A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells / H.Y. Sheng, J.Q. Ye // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 2003. – Vol. 192. – № 22-24. – P. 2441-2459.
125. Wang X. Three-dimensional solution of smart laminated anisotropic circular cylindrical shells with imperfect bonding / X. Wang, Z. Zhong // *Int. J. Solids and Struct.* – 2003. – Vol. 40. – № 22. – P. 5901-5921.
126. Yaqoob Yasin M. An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells / M. Yaqoob Yasin, S. Kapuria // *Compos. Struct.* – 2013. – 98. – P. 202-214.

ПРИЛОЖЕНИЕ

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель генерального директора
по прикладным исследованиям,
испытаниям и экспериментальной
базе – начальник Центра прикладных
исследований АО «ЦНИИмаш»



В.А. Титов

2022 г.

Акт

**внедрения в рабочий процесс отдела статической прочности
Центра прикладных исследований АО «ЦНИИмаш» результатов
диссертации Шиврина Матвея Витальевича на тему
«Численное моделирование локально нагруженных через шпангоуты
композитных цилиндрических оболочек»**

Настоящий акт составлен о том, что результаты диссертационной работы Шиврина М.В. внедрены в расчётную практику отдела Статической прочности Центра прикладных исследований АО «ЦНИИмаш» и используются при проведении прочностных расчётов тонкостенных композитных цилиндрических конструкций.

Заместитель начальника
Центра прикладных исследований –
начальник Комплекса прочности

И.С. Комаров

Начальник отдела статической прочности

С.А. Владимиров