

ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»

На правах рукописи



Нгуен Ши Тоан

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПОВЕДЕНИЯ  
УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 1.1.8. – Механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель – доктор физико-математических наук,  
доцент Христич Дмитрий Викторович

Тула 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
<b>1 ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ .....</b>	<b>13</b>
1.1 Описание напряжённо-деформированного состояния .....	13
1.2 Линейные определяющие соотношения. Изотропные и анизотропные материалы .....	16
1.3 Ортотропный материал. Линейные упругие свойства. Инварианты тензоров деформаций и напряжений относительно преобразований из группы симметрии .....	17
1.4 Использование потенциалов для построения определяющих соотношений .....	20
<b>2 НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ОРТОТРОПНОГО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА .....</b>	<b>35</b>
2.1 Построение нелинейных определяющих соотношений на основе потенциала деформаций .....	35
2.2 Определяющие соотношения второго порядка .....	39
2.3 Определяющие соотношения третьего порядка .....	47
<b>3 ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ .....</b>	<b>59</b>
3.1 Задача о деформировании нелинейно-упругой ортотропной пластины .....	59
3.2 Идентификация параметров моделей ортотропного материала .....	77
3.2.1 Определение параметров линейной модели .....	77
3.2.2 Определение параметров модели второго порядка .....	84
3.2.3 Определение параметров модели третьего порядка .....	90
3.3 Анализ моделей ортотропного материала .....	100
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>108</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>109</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования и степень её разработанности.** В машиностроении, строительстве и других отраслях широко применяются композиционные материалы. Активно проводятся исследования по созданию новых материалов, обладающих заданными физико-механическими свойствами. Многие современные композиционные материалы проявляют нелинейность упругих свойств уже при малых деформациях. К нелинейным упругим свойствам относятся как криволинейный вид диаграммы деформирования, так и разносопротивляемость растяжению и сжатию. Такие материалы являются также анизотропными в отношении упругих свойств и, в основном, относятся к классу ортотропных. Классическая линейная модель анизотропного тела в форме закона Гука не всегда адекватно описывает зависимости между напряжениями и деформациями, полученные в экспериментах. В связи с этим в настоящее время сохраняется необходимость построения новых математических моделей, адекватно описывающих нелинейно упругое поведение анизотропных материалов.

Эксперименты с изотропными и анизотропными телами показывают, что реакции многих материалов на растяжение и сжатие значительно различаются. Для описания и математического моделирования такого поведения во второй половине XX века была предложена разномодульная теория упругости. Основания этой теории для изотропного материала были заложены в работах С.А. Амбарцумяна и А.А. Хачатряна [2–5], Л.А. Толоконникова [43, 44], Л.А. Толоконникова и Н.М. Матченко [28], Н.М. Матченко и Г.В. Бригадирова [10], Е.В. Ломакина [20–22], Е.В. Ломакина и Ю.Н. Работнова [23], Г.С. Шапиро [54]. Наиболее простые определяющие соотношения разномодульной теории упругости для изотропного тела, предложенные С.А. Амбарцумяном и А.А. Хачатряном, являются кусочно-линейными зависимостями между главными напряжениями и главными деформациями. Для изотропных материалов разномодульные теории упругости во многих работах строятся путём обобщения

двухконстантного упругого потенциала, из которого следует закон Гука, на среды с разносопротивляемостью растяжению и сжатию. При этом в определяющих соотношениях увеличивается число независимых параметров. Различные варианты определяющих уравнений для разносопротивляющихся изотропных материалов предложены в работах А.А. Буренина и В.М. Ярушиной [11], А.А. Золочевского [14], В.П. Мясникова и А.А. Олейникова [31], И.Ю. Цвелодуба [51].

Многие конструкционные материалы наряду с разносопротивляемостью растяжению и сжатию обладают анизотропией упругих свойств. Распространённым частным случаем анизотропных разносопротивляющихся материалов являются ортотропные материалы, примером которых служат, в первую очередь, композиционные материалы. В работах V.J. Papazoglou и N.G. Tsouvalis [73], В.Р. Patel, К. Khan и Y. Nath [74], для ортотропных материалов предложены определяющие соотношения, в которых по аналогии с моделью изотропного разносопротивляющегося материала вводятся кусочно-линейные зависимости между напряжениями и деформациями в каждом из трёх главных направлений анизотропии. Модели разносопротивляющегося ортотропного материала с применением к композиционным материалам построены в работах С.W. Bert [59], С.W. Bert, J.N. Reddy с соавторами [58, 62, 78].

Одним из недостатков билинейных моделей, для которых диаграммы зависимостей напряжений от деформаций (при растяжении-сжатии) состоят из двух прямолинейных участков, является скачок угла наклона диаграммы в начале координат, что означает скачок модуля упругости. Как отмечает R.M. Jones [67], связь между напряжениями и деформациями в действительности сложнее, чем на диаграмме, состоящей из двух линейных участков. Между линейными участками, соответствующими растяжению и сжатию, может существовать нелинейная переходная зона, которую трудно определить экспериментально из-за малости деформаций и напряжений.

Более сложные модели упругих ортотропных материалов, учитывающие разносопротивляемость растяжению и сжатию и нелинейную связь напряжений

и деформаций, предложены в работах Н.М. Матченко и А.А. Трещёва [29, 30], А.А. Трещёва [45–49], Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова с соавторами [60, 70, 71], R.M. Jones [65–67], R.M. Jones и H.S. Morgan [63], R.M. Jones и D.A.R. Nelson [64, 68].

В статьях Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова с соавторами [60, 70] отмечается, что большинство слоистых композитов, используемых в современных конструкциях, проявляют нелинейность даже в упругих условиях. Так, в эксперименте на плоский сдвиг диаграмма напряжения-деформации является явно нелинейной, начиная непосредственно от малых значений нагрузки. При этом упругие свойства композитных материалов обладают анизотропией.

В статье Н.Т. Hahn и S.W. Tsai [61] для построения соотношений между напряжениями и деформациями используется плотность дополнительной упругой энергии. Определяющие соотношения являются линейными при одноосных нагрузках в продольном и поперечном направлениях, но нелинейными при сдвиге. В случае составных пластин при плоском напряжении вводится одна дополнительная константа четвёртого порядка, описывающая зависимость сдвиговой деформации от третьей степени касательных напряжений.

Краевые задачи нелинейной теории упругости для анизотропных тел решены в работах В.Б. Пенькова с соавторами [37–39, 75–77]. Построению нелинейных моделей ортотропного материала посвящены также работы J. Leliec и J. Majak [69], C. Lüders [72], E.P. Saliklis, T.J. Urbanik и B. Tokyay [79], D.W. Schmueser [80], F. Tabaddor [83–85], A. Tabiei и J. Wu [86], W.-j. Yao, C.-h. Zhang и X.-f. Jiang [88].

Отметим статью В. Yang, Z. Yu, Q. Zhang, Y. Shang и Y. Yan [87], в которой разработана нелинейная модель ортотропного материала, описывающая двухосное растяжение тканей с покрытием из поливинилхлорида (ПВХ). На основе функции энергии получены нелинейные зависимости общего вида между напряжениями и деформациями, а также предложены нелинейные определяющие уравнения второго и третьего порядка для плоского

напряжённого состояния. Коэффициенты нелинейных моделей определены для трёх типов тканей с ПВХ-покрытием по результатам экспериментов на одноосное и двухосное растяжение. Отмечается более точное описание экспериментальных данных с использованием нелинейных моделей по сравнению с линейной.

В работах [6, 12, 45–47, 49, 58, 61, 63, 65, 70, 71, 79, 83, 87] числовые значения параметров предложенных нелинейных моделей ортотропного материала определены по данным экспериментов. Построению моделей деформирования различных материалов и определению параметров моделей по данным экспериментов посвящены работы Ю.В. Астапова [7, 8, 55, 56] и др.

Задача об определении параметров модели на основе экспериментальных данных относится к классу обратных задач, среди которых различают коэффициентные и непрерывные [13, 57]. Параметры модели определяются из сопоставления экспериментальной и расчётной характеристик процесса. Как правило, такими характеристиками в механических экспериментах являются зависимости внешних сил от перемещений или напряжений от деформаций. Если регистрируемые в эксперименте величины можно явно связать аналитической зависимостью, параметры модели можно определить по методу наименьших квадратов.

В связи с тем, что многие известные модели ортотропных тел не полностью учитывают нелинейность зависимостей между напряжениями и деформациями, актуальной является разработка моделей нелинейно упругих ортотропных тел.

**Целью работы** является построение соотношений, определяющих нелинейное упругое поведение ортотропных материалов, и экспериментальная идентификация материальных параметров.

**Основными задачами работы** являются:

- 1) конкретизация вида нелинейных определяющих соотношений для ортотропного материала;

2) разработка программы механических экспериментов с макрообразцами, достаточных для идентификации построенных моделей;

3) определение значений констант моделей по результатам экспериментов, известным из литературы.

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

1) в рамках предельной формы обобщения частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы получены нелинейные определяющие соотношения второго и третьего порядков для ортотропного упругого материала;

2) показано, что в отличие от линейной модели ортотропного материала, содержащей 9 материальных констант в определяющих соотношениях, модель второго порядка имеет 18, а третьего порядка – 27 параметров.

3) проведена идентификация параметров построенных моделей первого, второго и третьего порядков по данным экспериментов по одноосному растяжению, сжатию и сдвигу плоских образцов;

4) предложенные модели в отличие от известных моделей описывают нелинейное поведение ортотропных материалов как при чистом сдвиге, так и при одноосном растяжении и сжатии.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Предложенные в работе варианты соотношений, определяющих связь между напряжениями и деформациями, могут быть использованы для моделирования упругого поведения ортотропных тел при различных внешних механических воздействиях.

Разработанная программа экспериментов по идентификации параметров нелинейных моделей может применяться в лабораториях, выполняющих механические испытания новых материалов. Построенные нелинейные модели упругого поведения ортотропных тел могут использоваться при проведении прочностных расчётов изделий из анизотропных материалов.

**Методология и методы исследования.** Сформулированные задачи решаются на основе методов нелинейной теории упругости, включающих

подходы к построению определяющих соотношений для анизотропных тел, известные из работ Ю.Н. Работнова [41], Л.И. Седова [42], К.Ф. Черныха [52], В. Новацкого [35], А.А. Маркина и М.Ю. Соколовой [26]. Анализ предложенных моделей выполняется методами линейной алгебры и математического анализа. Задача определения параметров модели по имеющимся результатам экспериментов решается на основе известных методов оптимизации и статистических методов обработки данных.

**Положения, выносимые на защиту:**

1) формы определяющих соотношений второго и третьего порядков для упругого ортотропного материала в рамках предельной формы обобщения частного постулата А.А. Ильюшина;

2) программа экспериментов, предназначенных для идентификации параметров предложенных определяющих соотношений.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается соответствием расчётов напряжённо-деформированного состояния образцов с известными результатами экспериментов и качественным совпадением результатов решения задач теории упругости в частных случаях с известными результатами других авторов.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы доложены на научном семинаре по механике деформируемого твёрдого тела им. Л.А. Толоконникова (научный руководитель – профессор А.А. Маркин, г. Тула, 2022 г.), на Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (г. Воронеж, 2019, 2021 гг.).

**Личный вклад автора.** Представленные в диссертации результаты исследований получены лично автором под руководством научного руководителя. В публикациях, выполненных в соавторстве, соискателю принадлежат результаты построения конкретных определяющих соотношений, исследования взаимосвязей между параметрами построенных моделей,

идентификации значений констант моделей по данным экспериментов. Лично автором получены следующие результаты:

- проведён теоретический анализ существующих нелинейных определяющих соотношений для ортотропного материала;

- на основе задания упругого потенциала деформаций для ортотропного материала построены нелинейные определяющие соотношения в форме зависимостей инвариантов тензора деформаций от инвариантов тензора напряжений и в форме зависимостей между компонентами тензоров;

- предложены программы экспериментов с плоскими образцами, по результатам которых можно определить значения всех параметров нелинейных моделей;

- по известным данным экспериментов с композиционными материалами определены значения параметров моделей первого, второго и третьего порядков;

- выполнено сравнение разработанных моделей между собой и с нелинейными моделями других авторов.

В первой главе диссертации приведены основные положения кинематики деформаций твёрдого тела. Для описания деформаций в предположении об их малости введён в рассмотрение линеаризованный тензор деформаций Коши–Грина. Выписаны выражения для его инвариантов, и указан механический смысл инвариантов при описании деформированного состояния. Для описания внутренних напряжений использован тензор истинных напряжений Коши. Приведены выражения инвариантов тензора истинных напряжений и их механический смысл. Выписаны простейшие тензорно-линейные определяющие соотношения между напряжениями и деформациями в форме закона Гука. Даны определения изотропного и анизотропного материалов, связанные с наличием у материала симметрии свойств. Дано определение ортотропного тела. Выписаны матрица упругих податливостей ортотропного материала в главных осях ортотропии и выражения компонент этой матрицы через технические константы ортотропного материала. Для ортотропного материала приведены выражения линейных и квадратичных инвариантов тензора деформаций и тензора

напряжений, записанные в главных осях анизотропии. В качестве возможного подхода к построению определяющих соотношений рассмотрено использование упругих потенциалов. Проведён анализ потенциалов деформаций и следующих из них определяющих соотношений в виде зависимостей деформаций от напряжений, предложенных в работах Н.М. Матченко и А.А. Трещёва, Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова, R.M. Jones, H.S. Morgan, D.A.R. Nelson. Построены графики зависимостей между напряжениями и деформациями, соответствующие каждому из трёх типов определяющих соотношений. Выявлены недостатки представленных моделей.

Во второй главе диссертации выписана связь между термодинамическим потенциалом Гиббса, зависящим от тензора истинных напряжений и температуры, и линеаризованным тензором деформаций. Дифференциал потенциала деформаций для ортотропного материала выражен через инварианты тензоров деформаций и напряжений, записанные в главных осях анизотропии. Показано, что линейные и квадратичные инварианты тензора деформаций для ортотропного материала можно найти как производные потенциала деформаций по соответствующим инвариантам тензора напряжений. Записано представление потенциала деформаций, удовлетворяющее предельной форме обобщения частного постулата изотропии А.А. Ильюшина. На основе заданного упругого потенциала для ортотропного материала получены определяющие соотношения, выражающие зависимости инвариантов тензора деформаций от инвариантов напряжений. При этом каждый линейный инвариант деформаций может зависеть от всех линейных инвариантов напряжений, а каждый из квадратичных инвариантов тензора деформаций – только от одного соответствующего квадратичного инварианта тензора напряжений. Если считать материальные функции в определяющих соотношениях константами, то получится линейная связь между инвариантами тензоров деформаций и напряжений, которая является записью закона Гука для ортотропного материала. Определяющие соотношения первого порядка для ортотропного материала содержат девять независимых констант. Построены определяющие соотношения второго и

третьего порядков для ортотропного материала. Соотношения второго порядка содержат восемнадцать независимых параметров, соотношения третьего порядка – двадцать семь. Предложенные линейные и нелинейные определяющие уравнения модели записаны через компоненты тензоров деформаций и напряжений. Найдены линейные связи между параметрами, входящими в формы записи определяющих соотношений через инварианты и через компоненты тензоров. Указаны программы экспериментов, по результатам которых можно определить значения всех параметров нелинейных моделей. Эксперименты могут быть проведены с плоскими образцами в форме пластин. Для идентификации параметров моделей второго и третьего порядков требуются одинаковые наборы экспериментов: пять экспериментов на растяжение и сжатие вдоль главных направлений анизотропии в трёх взаимно-перпендикулярных плоскостях, образованных главными векторами анизотропии, и три эксперимента на сдвиг в каждой из этих плоскостей.

В третьей главе выполнена постановка задачи об определении напряжённо-деформированного состояния в пластине из ортотропного материала при действии растягивающих, сжимающих и сдвиговых нагрузок. Одна ось ортотропии перпендикулярна плоскости, а две другие лежат в плоскости пластины. Их ориентация относительно сторон пластины определяется одним параметром – углом между базисным вектором и стороной пластины. Пластина находится в плоском напряжённом состоянии. Для каждого из трёх вариантов определяющих соотношений найдены компоненты тензора деформаций пластины. Выражения для компонент деформаций зависят от приложенных внешних нагрузок, от угла ориентации главных осей анизотропии относительно сторон пластины и от упругих параметров материала. Полученные решения задачи об определении напряжённо-деформированного состояния пластины использованы для нахождения значений параметров моделей. Предложен способ определения значений констант по экспериментам, в которых измерены только продольные деформации при растяжении и сжатии под разными углами к направлениям главных осей анизотропии. Константы моделей

найденны для двух композиционных материалов, для которых в литературе приведены данные экспериментов на растяжение, сжатие и сдвиг. Значимость построенных определяющих уравнений моделей первого, второго и третьего порядков исследована методами дисперсионного анализа. Выполнено сравнение разработанных моделей между собой и с экспериментальными данными, а также с моделью Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова. Кривые напряжения-деформации показывают, что нелинейные определяющие соотношения, учитывающие зависимости деформаций от напряжений второго и третьего порядков, позволяют описать результаты экспериментов с анизотропным материалом более адекватно, чем линейные соотношения обобщённого закона Гука. Нелинейные определяющие соотношения учитывают разносопротивляемость анизотропного материала растяжению и сжатию, наблюдаемую в эксперименте. Установлено, что модель второго порядка с константами для материала AVCO Mod 3a неадекватно описывает данные эксперимента на растяжение. Построенные модели учитывают нелинейность в упругом поведении анизотропного материала не только при сдвиге, но и при одноосном растяжении и сжатии по главным направлениям анизотропии.

# 1 ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ДЕФОРМАЦИЙ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

## 1.1 Описание напряжённо-деформированного состояния

Рассматривается движение материального пространства относительно неподвижного отсчётного пространства. Положение точки  $M$  сплошной среды в материальном пространстве определяется радиус-вектором  $\vec{x}$  с координатами  $(x^1; x^2; x^3)$  в некотором неподвижном декартовом базисе. При этом материальное пространство в начальный момент времени может занимать различные положения по отношению к выбранному неподвижному отсчётному пространству. Положение точки  $M$  сплошной среды в отсчётном пространстве в начальный момент времени  $t_0$  определяется радиус-вектором  $\vec{x}_0$  с координатами  $(x_0^1; x_0^2; x_0^3)$  в неподвижном декартовом базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , причём  $x_0^i = x_0^i(x^1, x^2, x^3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а в момент времени  $t > t_0$  – радиус-вектором

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t).$$

Закон движения устанавливает взаимно однозначную связь между начальным и текущим положениями материальных точек в отсчётной системе:

$$x^i = x^i(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Если в начальный момент времени  $t_0$  совместить отсчётную и материальную системы координат  $\vec{x}_0 = \vec{x}$ , то закон движения принимает вид

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}, t). \quad (1.1)$$

Движение сплошной среды считается известным, если определён закон изменения пространственного радиус-вектора как функция материального радиус-вектора и времени (1.1) для каждой точки пространства.

Вектор перемещений точки  $M$  сплошной среды имеет вид

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x}(\vec{x}, t) - \vec{x}. \quad (1.2)$$

В работе рассматриваются малые деформации сплошной среды, поэтому для описания деформированного состояния используется линейризованный тензор деформаций Коши–Грина [15, 24, 26, 42]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \overset{\circ}{\nabla} \right), \quad (1.3)$$

где  $\overset{\circ}{\nabla} = \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  – оператор Гамильтона (набла-оператор) в отсчётной системе координат,  $\vec{e}^i$  – контравариантный базис отсчётной системы координат, связанный с базисом  $\vec{e}_i$  соотношением  $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ ,  $\vec{u}$  – вектор перемещений точек деформируемого тела (1.2).

Первый инвариант этого тензора

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{E} = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (1.4)$$

характеризует относительное изменение объёма, а девиатор этого тензора

$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}$  описывает процесс формоизменения. Второй инвариант

девиатора  $-\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  с точностью до коэффициента совпадает с интенсивностью деформаций  $\varepsilon_i$  [16]:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{3}{2} \varepsilon_i^2, \quad (1.5)$$

а третий инвариант

$$I_3(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \det(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (1.6)$$

характеризует вид деформированного состояния [26]:  $\cos 3\alpha = \frac{I_3(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})}{3\sqrt{6}e^3}$ , где  $\alpha$  –

угол вида деформированного состояния,  $e = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ .

Напряжённое состояние в точке  $M$  с радиус-вектором  $\vec{x}$  характеризуется тензором истинных напряжений Коши  $\mathbf{S}$ . Тензор  $\mathbf{S}$  позволяет определить вектор

напряжений  $\vec{P}^{(n)}$  на площадке, ориентация которой задана единичной нормалью  $\vec{n}$ , из соотношения

$$\vec{P}^{(n)} = \vec{n} \cdot \mathbf{S}.$$

Так как внутренние моментные взаимодействия не рассматриваются, тензор  $\mathbf{S}$  является симметричным.

В начальном материальном декартовом базисе диадное представление тензора Коши имеет вид

$$\mathbf{S} = S_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j. \quad (1.7)$$

Первый инвариант тензора Коши

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = -3p \quad (1.8)$$

характеризует гидростатическое давление  $p$  на стенки элемента, выделенного в окрестности точки с радиус-вектором  $\vec{x}$  в деформированном состоянии. Девиатор тензора истинных напряжений  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + p\mathbf{E}$  описывает отклонение напряжённого состояния от гидростатического давления, в том числе сдвиговые напряжения. Второй инвариант девиатора напряжений  $-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{S}}$  с точностью до коэффициента совпадает с интенсивностью напряжений  $\sigma_i$  [15]:

$$\tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{S}} = \frac{2}{3}\sigma_i^2, \quad (1.9)$$

а третий инвариант

$$I_3(\tilde{\mathbf{S}}) = \det(\tilde{\mathbf{S}}) \quad (1.10)$$

характеризует вид напряжённого состояния.

При рассмотрении малых деформаций в качестве энергетически сопряжённых тензоров можно использовать тензор истинных напряжений (1.7) и тензор малых деформаций (1.3). Удельная (отнесённая к единице массы среды) мощность напряжений для выбранной пара тензоров определяется выражением

$$[26] N^{(i)} = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}.$$

## 1.2 Линейные определяющие соотношения.

### Изотропные и анизотропные материалы

В упругих линейных материалах в случае изотермических процессов тензор напряжений Коши  $\mathbf{S}$  и линеаризованный тензор деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  связаны тензорно-линейным соотношением, которое называется обобщённым законом Гука [18, 19, 36, 52]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{N}$  – постоянный тензор упругости четвёртого ранга. Тензор  $\mathbf{N}$  является невырожденным, поэтому можно разрешить соотношения (1.11) относительно тензора деформаций и записать обобщённый закон Гука в эквивалентной форме:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S}, \quad (1.12)$$

где  $\mathbf{C}$  – постоянный тензор четвёртого ранга, который называется тензором упругих податливостей.

В силу симметрии тензоров  $\mathbf{S}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  тензоры четвёртого ранга  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{C}$  являются симметричными по парам индексов, так что в декартовом прямоугольном базисе  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$  компоненты этих тензоров удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} N_{ijkl} &= N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}, \\ C_{ijkl} &= C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В соответствии со связями (1.13) каждый тензор  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{C}$  имеет в общем случае 21 независимую компоненту. Независимые компоненты тензора  $\mathbf{C}$  удобно представить в виде матрицы (ввиду симметрии тензора  $\mathbf{C}$  указываются элементы матрицы в правом верхнем углу)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Если физико-механические свойства образца, вырезанного из материала, не зависят от его ориентации, то материал называется изотропным. В противном случае материал называется анизотропным, то есть свойства анизотропного материала различны в различных направлениях. Если линейно-упругий анизотропный материал обладает симметрией свойств, то для него можно указать группу ортогональных преобразований  $g_A$ , для всех элементов  $Q_A$  которой выполняется условие

$$Q_A^{-1} \cdot S \cdot Q_A = N \cdot (Q_A^{-1} \cdot \varepsilon \cdot Q_A) \quad \forall Q_A \in g_A. \quad (1.15)$$

Группа преобразований  $g_A$  называется группой симметрии данного материала. Если для некоторого материала группа  $g_A$  совпадает с полной ортогональной группой  $g$ , то такой материал называется изотропным. Условием изотропии материала является условие (1.15), записанное для любого ортогонального преобразования  $Q_A$  из полной ортогональной группы  $g$ . Свойства изотропного материала одинаковы во всех направлениях, проходящих через некоторую точку.

Если структура анизотропного тела обладает некоторой симметрией, то симметрия проявляется и в его упругих свойствах. Симметрия упругих свойств означает, что в каждой точке тела существуют симметричные направления, эквивалентные в отношении упругих свойств. Для анизотропного материала, обладающего симметрией упругих свойств, число независимых компонент тензоров  $N$  и  $S$  уменьшается. Матрицы тензоров упругости  $N$  и податливостей  $S$  имеют одинаковое строение для одного и того же типа материала [18].

### **1.3 Ортотропный материал. Линейные упругие свойства.**

#### **Инварианты тензоров деформаций и напряжений относительно преобразований из группы симметрии**

Тело, обладающее тремя взаимно ортогональными плоскостями упругой симметрии в каждой точке, называется ортотропным [19]. Направления,

перпендикулярные плоскостям упругой симметрии, называют главными направлениями анизотропии ортотропного тела или главными осями ортотропии. В работах [26, 52, 53] рассмотрены порождающие элементы групп симметрии для всех кристаллографических систем и соответствующих типов анизотропных материалов. Для ортотропного материала порождающими элементами группы симметрии являются ортогональные тензоры поворота  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_1^\pi = \vec{a}_1\vec{a}_1 - \vec{a}_2\vec{a}_2 - \vec{a}_3\vec{a}_3$ ,  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}_2^\pi = -\vec{a}_1\vec{a}_1 + \vec{a}_2\vec{a}_2 - \vec{a}_3\vec{a}_3$  вокруг главных осей анизотропии  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ . Базисные векторы  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  направляются вдоль осей симметрии материала. В ортотропном материале эти оси совпадают с прямыми, по которым пересекаются его плоскости симметрии.

Ортотропный материал в главных осях анизотропии имеет 9 независимых упругих параметров [18, 19]. Симметричная матрица тензора упругих податливостей (1.14) для ортотропного материала имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

При записи определяющих соотношений упругости для ортотропного материала часто используются технические константы  $E_i$ ,  $\nu_{ij}$ ,  $G_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . С использованием этих констант определяющие соотношения в главных осях ортотропии принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} S_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} S_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} S_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} S_{11} + \frac{1}{E_2} S_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} S_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} S_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} S_{22} + \frac{1}{E_3} S_{33}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}} S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} S_{23}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2G_{13}} S_{13}.$$

Компоненты матрицы (1.16) выражаются через технические константы ортотропного материала:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= \frac{1}{E_1}, & C_{2222} &= \frac{1}{E_2}, & C_{3333} &= \frac{1}{E_3}, \\ C_{1122} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & C_{1133} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & C_{2233} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \\ C_{1212} &= \frac{1}{2G_{12}}, & C_{2323} &= \frac{1}{2G_{23}}, & C_{3131} &= \frac{1}{2G_{13}}. \end{aligned}$$

Из условий симметрии матрицы упругих податливостей для ортотропного материала (1.16) следуют связи между техническими константами:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}, \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}, \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}.$$

Наряду с инвариантами тензоров деформаций (1.4)–(1.6) и напряжений (1.8)–(1.10), которые остаются неизменными при любых ортогональных преобразованиях координат, в теории анизотропной упругости рассматриваются линейные и квадратичные инварианты тензоров, сохраняющие свои значения при любом ортогональном преобразовании  $\mathbf{Q}_A$  из группы симметрии  $g_A$  данного материала. В монографии [26] на основе анализа ортогональных преобразований, допускаемых типом симметрии свойств анизотропного материала, найдены линейные и квадратичные инварианты тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  для каждого типа анизотропии.

Рассматриваемые в работе ортотропные материалы имеют три линейных инварианта тензора деформаций

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \quad (1.17)$$

и три квадратичных инварианта

$$s_{(1)}^2 = 2\varepsilon_{12}^2, \quad s_{(2)}^2 = 2\varepsilon_{23}^2, \quad s_{(3)}^2 = 2\varepsilon_{31}^2. \quad (1.18)$$

Инварианты тензора напряжений определяются аналогично:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{11} + S_{22} + S_{33}), \quad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2S_{33} - S_{11} - S_{22}), \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{11} - S_{22}), \quad (1.19)$$

$$t_{(1)}^2 = 2S_{12}^2, \quad t_{(2)}^2 = 2S_{23}^2, \quad t_{(3)}^2 = 2S_{31}^2. \quad (1.20)$$

Компоненты тензоров деформаций и напряжений, используемые в выражениях инвариантов (1.17)–(1.20), отнесены к базису главных осей анизотропии материала. Линейные и квадратичные инварианты (1.17)–(1.20) сохраняют свои значения при любых ортогональных преобразованиях из группы симметрии ортотропного материала, порождаемой поворотами  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_1^\pi = \vec{a}_1\vec{a}_1 - \vec{a}_2\vec{a}_2 - \vec{a}_3\vec{a}_3$ ,  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}_2^\pi = -\vec{a}_1\vec{a}_1 + \vec{a}_2\vec{a}_2 - \vec{a}_3\vec{a}_3$ .

В базисе главных осей анизотропии тензор деформаций записывается в форме диадного разложения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = & \varepsilon_{11}\vec{a}_1\vec{a}_1 + \varepsilon_{22}\vec{a}_2\vec{a}_2 + \varepsilon_{33}\vec{a}_3\vec{a}_3 + \\ & + \varepsilon_{12}(\vec{a}_1\vec{a}_2 + \vec{a}_2\vec{a}_1) + \varepsilon_{23}(\vec{a}_2\vec{a}_3 + \vec{a}_3\vec{a}_2) + \varepsilon_{31}(\vec{a}_3\vec{a}_1 + \vec{a}_1\vec{a}_3). \end{aligned}$$

Используя инварианты (1.17), (1.18), этот тензор можно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0\mathbf{I}^0 + \varepsilon_1\mathbf{I}^1 + \varepsilon_2\mathbf{I}^2 + s_{(1)}\mathbf{I}^3 + s_{(2)}\mathbf{I}^4 + s_{(3)}\mathbf{I}^5,$$

где  $\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}_1\vec{a}_1 + \vec{a}_2\vec{a}_2 + \vec{a}_3\vec{a}_3)$ ,  $\mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{a}_3\vec{a}_3 - \vec{a}_1\vec{a}_1 - \vec{a}_2\vec{a}_2)$ ,

$$\mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_2\vec{a}_2 - \vec{a}_1\vec{a}_1), \quad \mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_1\vec{a}_2 + \vec{a}_2\vec{a}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_2\vec{a}_3 + \vec{a}_3\vec{a}_2),$$

$$\mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_3\vec{a}_1 + \vec{a}_1\vec{a}_3) - \text{тензоры обобщённого канонического тензорного базиса}$$

А.А. Ильюшина [25]. Тензор напряжений  $\mathbf{S}$  выражается через его линейные и квадратичные инварианты аналогично. Приведённые инварианты (1.17)–(1.20) будут использованы для записи нелинейных определяющих соотношений.

## 1.4 Использование потенциалов

### для построения определяющих соотношений

Одним из возможных подходов к построению определяющих соотношений для анизотропного упругого тела является задание потенциала

напряжений или потенциала деформаций. В случае малых деформаций в изотермических процессах существует потенциал напряжений  $\Phi$ , который называется свободной энергией единицы объёма. Напряжения представляются в виде производных от функции  $\Phi$  по компонентам тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$ :

$$S_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (1.21)$$

Для линейно упругого материала при постоянной температуре свободная энергия имеет вид [35]  $\Phi = \frac{1}{2} N_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$ . Правая часть представляет собой работу деформаций в изотермических процессах. Используя определение (1.21), получим определяющие соотношения (1.11):

$$S_{ij} = N_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Задание потенциала Гиббса позволяет получить определяющие соотношения в виде зависимостей деформаций от напряжений и температуры. В случае изотермического процесса потенциал Гиббса для линейно упругого материала записывается в виде  $G = -\frac{1}{2} C_{ijkl} S_{ij} S_{kl}$ . Выражение  $W = \frac{1}{2} C_{ijkl} S_{ij} S_{kl}$  называется дополнительной работой [35]. Деформации могут быть найдены как производные от функции  $W$  по компонентам тензора напряжений  $S_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial S_{ij}} = C_{ijkl} S_{kl}.$$

Эти выражения являются записью определяющих соотношений (1.12) через компоненты тензоров.

Для построения определяющих соотношений, описывающих нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями, более предпочтительным представляется задавать потенциал деформаций. Такой подход позволяет получить соотношения в виде зависимостей деформаций от напряжений, что существенно упрощает разработку, выполнение и обработку результатов экспериментов по идентификации параметров модели.

В работах Н.М. Матченко и А.А. Трещёва [29, 30, 45–47] для записи потенциала деформаций и построения соотношений, определяющих зависимость деформаций от напряжений, вводится нормированное пространство напряжений. В произвольной декартовой ортогональной системе координат вводится в рассмотрение вектор полного напряжения в девятимерном пространстве компонент тензора напряжений. Модуль этого вектора равен

$$|\vec{S}| = S = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad (1.22)$$

а его направляющие косинусы

$$\alpha_{ij} = \frac{S_{ij}}{S}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.23)$$

Напряжённое состояние в точке пространства полностью описывается модулем вектора напряжений (1.22) и его направляющими косинусами (1.23). При этом направляющие косинусы подчиняются условию нормировки

$$\alpha_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^2 = 1.$$

В развитие подхода, предложенного для построения определяющих соотношений для изотропных разносопротивляющихся материалов, потенциал деформаций тела, обладающего структурной анизотропией, записывается в виде функции характеристик введённого нормированного пространства напряжений:

$$W = W(\alpha_{ij}, S). \quad (1.24)$$

При рассмотрении анизотропных материалов, допускающих квазилинейную аппроксимацию диаграмм деформирования (экспериментальных зависимостей напряжений от деформаций), потенциал (1.24) представляется в виде

$$W = a(\alpha_{ij})S^2. \quad (1.25)$$

Функция  $a(\alpha_{ij})$  должна быть инвариантна относительно любого ортогонального преобразования  $Q_A$ , входящего в группу симметрии  $g_A$  рассматриваемого анизотропного материала.

Для анизотропного тела, упругие свойства которого описываются обобщённым законом Гука, упругий потенциал (1.25) в нормированном пространстве имеет вид

$$W = 0,5A_{ijkl}\alpha_{ij}\alpha_{kl}S^2.$$

В выражении этого потенциала функция  $a(\alpha_{ij}) = 0,5A_{ijkl}\alpha_{ij}\alpha_{kl}$ .

При известном виде функции  $a(\alpha_{ij})$  потенциал (1.25) будет определён. Тогда, используя формулы Кастильяно, можно найти соотношения, определяющие связь напряжений и деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial S_{ij}} = \frac{\partial [a(\alpha_{ij})]}{\partial S_{ij}} S^2 + a(\alpha_{ij}) \frac{\partial (S^2)}{\partial S_{ij}}.$$

В работах [29, 30, 45–47] для общего случая структурной анизотропии функция  $a(\alpha_{ij})$  представляется в виде степенного полинома от нормированных напряжений. Для более точного учёта эффектов второго порядка, связанных с деформационной анизотропией материала, предлагается удерживать четыре члена полинома. Однако использование соотношений второго уровня точности приводит к увеличению количества констант, которые должны быть определены из системы экспериментов, включающей опыты по сложному напряженному состоянию.

Для решения практических задач в работах [29, 30, 45–47] сформулированы более простые определяющие соотношения с константами, не требующими проведения сложных опытов. При этом разложение полинома  $a(\alpha_{ij})$  ограничивается второй степенью. Для ортотропного тела связь между деформациями и напряжениями записывается в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})S_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]S_{22} + \\ &+ [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]S_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]S_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})S_{22} + \\ &+ [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]S_{33}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]S_{11} + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]S_{22} + \\ &\quad + (A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})S_{33}, \\ \varepsilon_{12} &= (A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12})S_{12}, \quad \varepsilon_{13} = (A_{1313} + B_{1313}\sqrt{2}\alpha_{13})S_{13}, \\ \varepsilon_{23} &= (A_{2323} + B_{2323}\sqrt{2}\alpha_{23})S_{23}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$  – константы модели.

В модели (1.26) для ортотропного тела число независимых параметров, подлежащих определению из опытов, равно 18. Для определения констант модели ортотропного материала требуется выполнить эксперименты на одноосное растяжение и сжатие по направлениям главных осей анизотропии и под углом  $45^\circ$  к ним в плоскостях упругой симметрии.

На рисунках 1.1, 1.2 показаны аппроксимирующие кривые, построенные по определяющим соотношениям (1.26). Константы определяющих соотношений взяты из книги А.А. Трещёва [47].

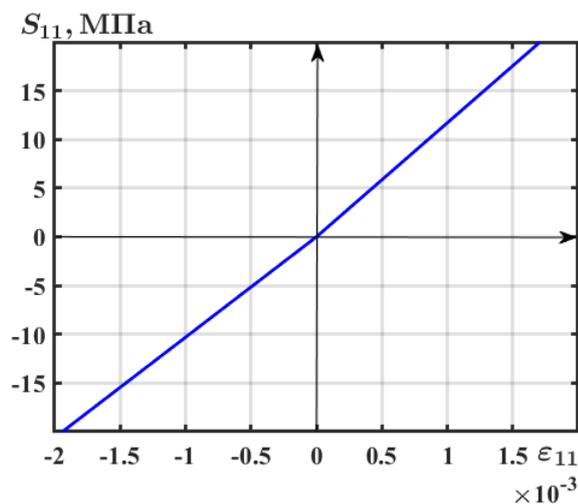


Рисунок 1.1 – Зависимости напряжений от продольных деформаций при растяжении и сжатии по оси  $x$

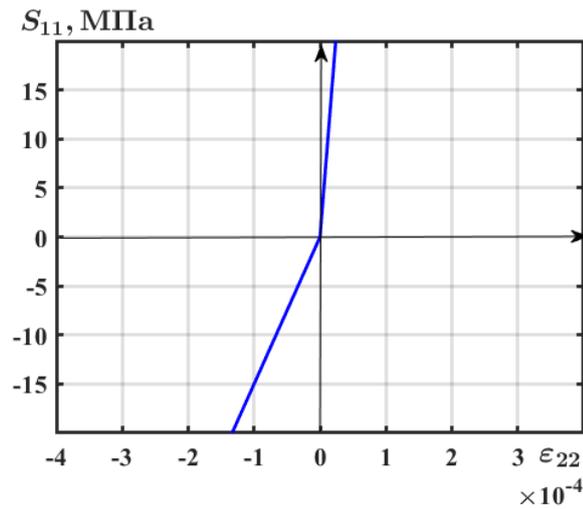


Рисунок 1.2 – Зависимости напряжений от поперечных деформаций при растяжении и сжатии по оси  $x$

Графики на рисунках 1.1, 1.2, построенные по соотношениям (1.26), состоят из двух лучей, выходящих из начала координат. Такая аппроксимация экспериментальных данных удобна для использования в инженерных расчётах, однако, не отражает нелинейный характер зависимости деформаций от напряжений.

Отметим, что в статье А.А. Трещёва и В.С. Лисицкого [49] предложен потенциал деформаций для описания деформирования нелинейно упругого ортотропного материала с учётом зависимости механических свойств материала от вида напряжённого состояния. Этот потенциал является однородным полиномом третьей степени по компонентам тензора напряжений и содержит 29 коэффициентов, подлежащих экспериментальному определению. Коэффициенты полинома являются функциями от нормированных напряжений  $\alpha_{ij}$ . Использование такого потенциала позволяет получить определяющие соотношения в виде зависимостей деформаций от напряжений второй степени. Полученные зависимости деформаций от напряжений с достаточной точностью аппроксимируют экспериментальные диаграммы деформирования углерод-углеродного композита AVCO Mod 3a [65].

В статье Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова [70] предложена модель упругого анизотропного материала, в которой учитывается влияние вида напряжённого состояния на реакцию тела. Для описания зависимости тензора деформаций от вида напряжённого состояния используется скалярный параметр напряжённого состояния  $\xi = \frac{\sigma}{\sigma_0}$ , где  $\sigma = \frac{1}{3}S_{ii}$  – гидростатическая составляющая тензора напряжений,  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$  – интенсивность девиатора напряжений  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - \sigma\mathbf{E}$ . Скалярный параметр  $\xi$  имеет ясный механический смысл. Он характеризует в среднем отношение нормальных напряжений к напряжениям сдвига в деформируемом твёрдом теле. С использованием этого параметра для описания начального упругого поведения анизотропного материала, свойства которого зависят от вида напряжённого состояния, для формулировки определяющих соотношений вводится потенциал деформаций в следующем виде:

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{ijkl}(\xi) S_{ij} S_{kl}. \quad (1.27)$$

В общем случае значения параметра  $\xi$  охватывают всю числовую ось от  $-\infty$  при равномерном трехосном сжатии до  $+\infty$ , что соответствует равномерному трехосному растяжению. В условиях плоского напряжённого состояния значения параметра заключены в пределах  $-\frac{3}{2} \leq \xi \leq \frac{3}{2}$ . Определяющие соотношения, полученные на основе потенциала (1.27), представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= a_{1111}(\xi) S_{11} + a_{1122}(\xi) S_{22} + \left[ \left( \frac{1}{3\xi} + \frac{3}{2}\xi \right) \sigma - \frac{3}{2}\xi S_{11} \right] \Phi_1 \sigma_0^{-2}, \\ \varepsilon_{22} &= a_{1122}(\xi) S_{11} + a_{2222}(\xi) S_{22} + \left[ \left( \frac{1}{3\xi} + \frac{3}{2}\xi \right) \sigma - \frac{3}{2}\xi S_{22} \right] \Phi_1 \sigma_0^{-2}, \\ \varepsilon_{12} &= \left[ a_{1212}(\xi) - \frac{3}{2}\xi \Phi_1 \sigma_0^{-2} \right] S_{12}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где  $\Phi_1 = \frac{1}{2} \left[ a'_{1111}(\xi) S_{11}^2 + a'_{2222}(\xi) S_{22}^2 + 2a'_{1122}(\xi) S_{11} S_{22} + a'_{1212}(\xi) S_{12}^2 \right]$ , штрихом обозначена производная по параметру  $\xi$ .

На практике экспериментальные кривые, полученные при различных условиях нагружения, аппроксимируются линейными функциями. Это может быть прямая линия с начальным модулем или усредненная. Для некоторых композиционных материалов линейные зависимости, аппроксимирующие экспериментальные диаграммы, могут существенно различаться в зависимости от вида нагружения: например, модуль сжатия может быть существенно ниже модуля растяжения. Предложенные определяющие соотношения (1.28) могут описать этот эффект. Соотношения (1.28) представляют собой линейную зависимость между компонентами тензоров напряжений и деформаций в случае пропорционального нагружения, когда параметр  $\xi$  постоянный.

Предложена модель материала, описывающая нелинейные сдвиговые деформации армированного композитного материала под действием касательных напряжений. В такой модели в определяющие соотношения введён параметр  $q = D_{ij} \varepsilon_{ij}$ , представляющий степень касательных напряжений или деформаций. Коэффициенты  $D_{ij}$  имеют следующее представление в системе координат, совпадающей с осями анизотропии в случаях однонаправленной или поперечной арматуры:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор  $D_{ij}$  рассматривается как дополнительный структурный параметр, характеризующий анизотропные свойства материала. В системе координат, совпадающей с ориентацией материала арматуры, вводится параметр  $q = \varepsilon_{12}$ , который рассматривается как скалярный инвариант и используется для

формулировки определяющих соотношений. Потенциал для характеристики нелинейной сдвиговой упругой деформации твердых тел записывается в форме

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl}(q) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}.$$

На основе этого потенциала определяющие соотношения представляются в виде

$$S_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial E_{mnkl}(q)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{kl} + E_{ijkl}(q) \varepsilon_{kl}. \quad (1.29)$$

Для описания нелинейности при сдвиге достаточно сохранить зависимость только модуля сдвига  $G$  от параметра  $q$ . В случае, когда система координат совпадает с главными осями анизотропии, первое слагаемое в правой части (1.29) приводится к виду

$$\frac{\partial E_{mnkl}(q)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{kl} = \frac{dG(q)}{dq} \frac{dq}{d\varepsilon_{12}} \varepsilon_{12} \varepsilon_{12} = G' \varepsilon_{12}^2,$$

где  $G' = \frac{dG}{dq}$ . Тогда определяющее уравнение (1.29) для касательного напряжения принимает вид

$$S_{12} = \left( \frac{1}{2} G' \varepsilon_{12} + G \right) \varepsilon_{12}.$$

Если считать, что функция  $G(q)$  выражается произвольным полиномом по степеням  $q$ , то последнее соотношение после преобразований принимает вид

$$S_{12} = \left( \sum_n B_n q^n \right) \varepsilon_{12}.$$

Определяющие соотношения (1.29) в случае плоского напряжённого состояния в декартовых координатах записаны в виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{S_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{12} S_{22}}{E_1}, \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12} S_{22}}{E_1} + \frac{S_{22}}{E_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{S_{12}}{\tilde{G}(q)}, \quad (1.30)$$

причём функция  $\tilde{G}(q)$  характеризует нелинейность зависимости касательных напряжений от сдвиговых деформаций.

Построенные определяющие соотношения (1.30) могут описывать любые нелинейные данные испытаний на сдвиг в плоскости в случае направления нагрузки по главным осям анизотропии материала. В общем случае произвольных направлений нагрузок такие эксперименты предлагается рассматривать как проверочные.

Отметим, что соотношения (1.30) предполагают линейную зависимость между деформациями и напряжениями при растяжении и сжатии по направлениям главных осей анизотропии материала.

Развитием предложенных подходов для практических приложений является формулировка определяющих соотношений на основе комбинированного подхода. Трудности использования соотношений (1.28) связаны с разрешением первых двух уравнений относительно компонент тензора напряжений. Поэтому уравнения (1.28) используются в качестве основы, а в соотношениях (1.30) при определении параметра степени сдвиговой нагрузки  $q$  компонента тензора деформаций  $\varepsilon_{12}$  заменяется на компоненту тензора напряжений  $S_{12}$ . Получающаяся в результате модель учитывает вид напряжённого состояния и нелинейность зависимости сдвиговых деформаций от касательных напряжений.

На рисунках 1.3, 1.4 приведены экспериментальные данные [81] по растяжению и сжатию в направлении волокон одного слоя композиционного материала из стеклоткани и полиэфирной матрицы и результаты расчётов по модели [70]. На рисунке 1.5 приведены данные эксперимента на сдвиг и результаты расчётов по модели Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова. На рисунках 1.3–1.5, взятых из статьи [70], треугольниками показаны экспериментальные данные, штриховыми линиями – результаты расчётов.

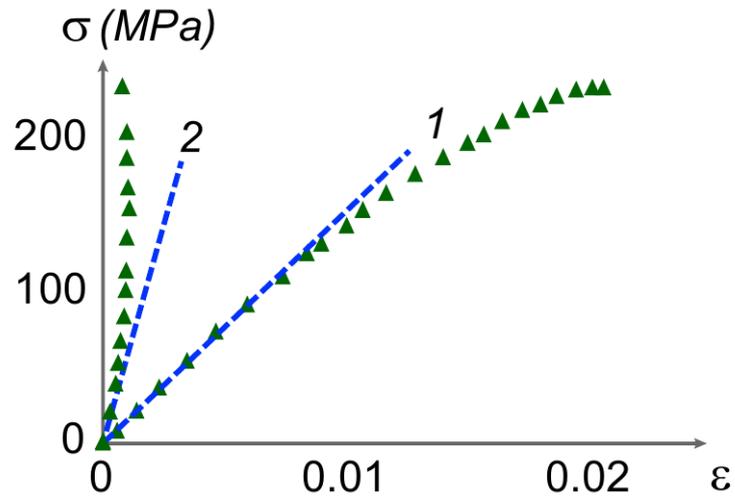


Рисунок 1.3 – Зависимости напряжений от деформаций для одного слоя композиционного материала при растяжении: 1 – деформации в направлении растяжения, 2 – деформации в поперечном направлении

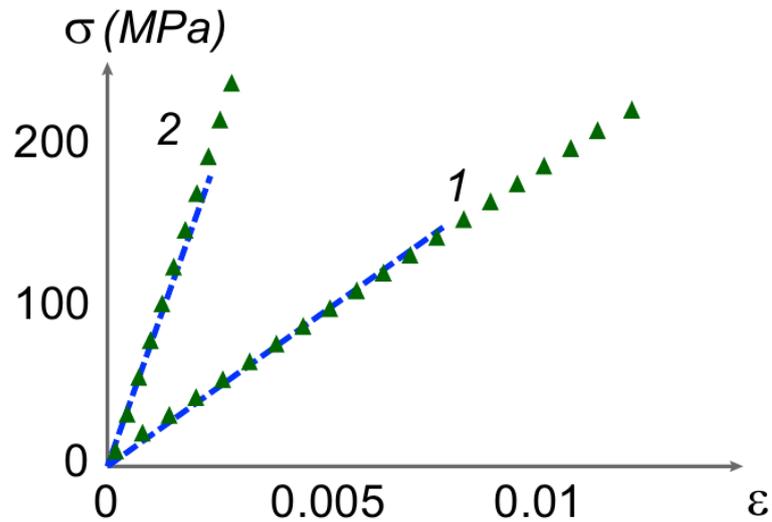


Рисунок 1.4 – Зависимости напряжений от деформаций для одного слоя композиционного материала при сжатии: 1 – деформации в направлении сжатия, 2 – деформации в поперечном направлении

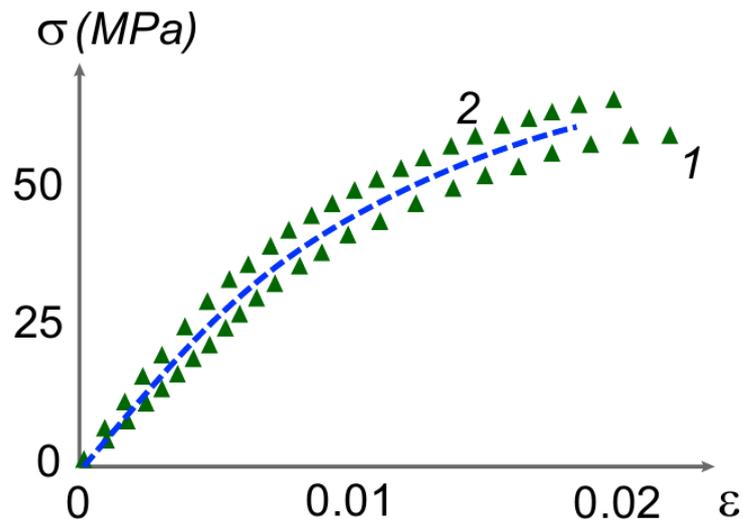


Рисунок 1.5 – Зависимости напряжений от деформаций для одного слоя композиционного материала при сдвиге (растяжении-сжатии под углом  $45^\circ$  к направлению главных осей анизотропии): 1 – деформации в направлении растяжения, 2 – деформации в направлении сжатия

В статье R.M. Jones [65] рассмотрена нелинейная модель ортотропного материала, построенная в работах [63, 64] и названная многомодульной. Модель применена для описания механического поведения углерод-углеродного композитного материала AVCO Mod 3a, который имеет тканый слой из ортогональных волокон в плоскости  $xu$  и пронизан волокнами в направлении  $z$ . Отмечается, что этот материал был единственным углерод-углеродным композитом, для которого существовало достаточно экспериментальных данных для валидации модели материала. Деформации, предсказанные по модели материала, сравнивались с результатами экспериментов на одноосную нагрузку, приложенную под углом к направлению волокна в плоскостях  $xu$  или  $xz$ , а также с результатами экспериментов на сдвиг.

Предложенная модель представляет собой выражение секущих модулей материала как функции плотности энергии деформации в виде

$$E_i = A_i \left[ 1 - B_i \left( \frac{U}{U_{0i}} \right)^{C_i} \right], \quad (1.31)$$

где  $U = \frac{1}{2}(S_{11}\varepsilon_{11} + S_{22}\varepsilon_{22} + S_{33}\varepsilon_{33} + S_{12}\varepsilon_{12} + S_{23}\varepsilon_{23} + S_{13}\varepsilon_{13})$  – плотность энергии деформации, константы  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  – начальное значение модуля упругости  $E_i$ , начальная кривизна диаграммы напряжение-деформация и скорость изменения кривизны графика напряжение-деформация соответственно. Нижний индекс  $i$  в уравнении (1.31) используется, чтобы различать, какой модуль рассматривается, а величина  $U_{0i}$  введена для обезразмеривания заключённого в скобки выражения в уравнении (1.31). При определении значений механических характеристик принимается  $U_{0i} = 6,895 \text{ МПа}$ . Коэффициенты поперечной деформации в модели считаются постоянными.

Параметры  $E_x$ ,  $E_z$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{xz}$ ,  $E_{xy}^{45}$ ,  $E_{xz}^{45}$ , описывающие механические свойства материала AVCO Mod 3a, определяются при растяжении и при сжатии. Механические свойства материала в направлениях осей  $x$  и  $y$  считаются одинаковыми вследствие схемы укладки волокон и слоёв композитного материала. Упругие свойства под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии описывают чистое растяжение или чистое сжатие, но не двухосное растяжение-сжатие, которое может заменить сдвиг.

На рисунках 1.6, 1.7 приведены экспериментальные данные по растяжению и сжатию композита AVCO Mod 3a в направлениях осей  $x$  и  $z$  и расчёты зависимостей напряжений от деформаций, выполненные по соотношениям (1.31).

Сравнение расчётов с экспериментальными данными показывает, что нелинейная модель Джонса–Нельсона–Моргана для ортотропного многомодульного материала адекватно описывает механическое поведение углерод-углеродного композита AVCO Mod 3a в испытаниях по одноосному

нагрузению, хотя модель должна быть протестирована на более сложных экспериментах, чем представленные.

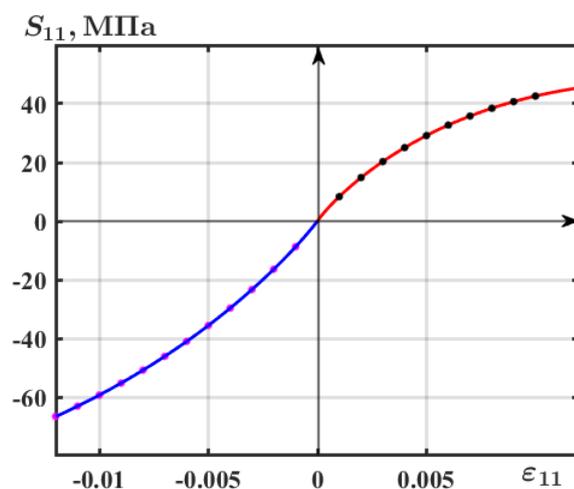


Рисунок 1.6 – Зависимости напряжений от деформаций для композита AVCO Mod 3a при растяжении и сжатии по оси  $x$

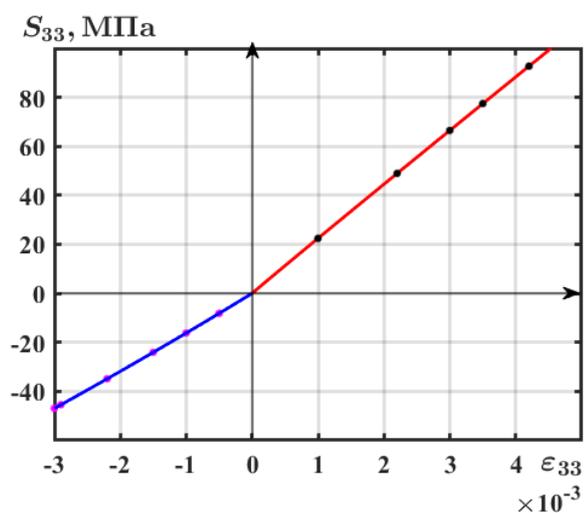


Рисунок 1.7 – Зависимости напряжений от деформаций для композита AVCO Mod 3a при растяжении и сжатии по оси  $z$

Существенным недостатком большинства описанных выше, а также известных из литературы [61, 69, 72, 79, 80, 83–86, 88] моделей изотропных и

анизотропных материалов является линейность или квазилинейность предлагаемых определяющих соотношений.

При построении линейных и квазилинейных определяющих соотношений для разносопротивляющихся материалов графики зависимостей напряжений от деформаций при растяжении и при сжатии представляют собой два луча, выходящих из начала координат. При этом происходит излом угла наклона диаграммы в начале координат. Такой излом означает скачок модуля упругости при переходе от сжатия к растяжению и наоборот. Нарушение непрерывности модулей упругости также является значительным недостатком моделей.

Соотношения, предложенные в статье [70], предназначены для описания нелинейных экспериментальных данных испытаний на сдвиг, но постулируют линейную связь между деформациями и напряжениями при растяжении и сжатии по направлениям главных осей анизотропии материала. Экспериментальные данные [65, 70, 81] свидетельствуют о явно нелинейном характере упругого поведения ортотропных материалов как при сдвиге, так и при растяжении или сжатии. В связи с этим требуется построить модель нелинейно упругого ортотропного материала, разработать систему экспериментов для определения параметров модели и найти значения параметров по известным экспериментальным данным.

## 2 НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ОРТОТРОПНОГО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

### 2.1 Построение нелинейных определяющих соотношений на основе потенциала деформаций

В ряде экспериментов [6, 65, 81] получены нелинейные зависимости напряжений от деформаций при растяжении, сжатии и сдвиге упругих образцов ортотропного материала. Для моделирования нелинейно упругого поведения ортотропных тел предлагается построить зависимости тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  от тензора истинных напряжений  $\mathbf{S}$ , задавая потенциал деформаций.

В работах [50, 82] были получены варианты определяющих соотношений для нелинейно упругого анизотропного материала на основе конкретизации потенциала Гиббса для обратимых процессов деформирования таких материалов при механических и тепловых воздействиях. Применение потенциала Гиббса позволяет получить нелинейные определяющие соотношения в виде, разрешённом относительно деформаций. Это значительно облегчает обработку экспериментов на растяжение, сжатие и сдвиг образцов.

Потенциал Гиббса считается функцией тензора напряжений и температуры и записывается в виде

$$G = U - ST - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

где  $U$  – внутренняя энергия,  $S$  – энтропия,  $T$  – температура,  $\rho_0$  – плотность среды.

Дифференциал потенциала  $G$  равен

$$dG = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial G}{\partial T} dT. \quad (2.2)$$

С учётом выражения (2.1) основное термомеханическое соотношение [15, 42] в форме Гиббса принимает вид

$$dG = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{S} - SdT. \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.2) и (2.3) следует, что

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\rho_0 \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}}, \quad S = -\frac{\partial G}{\partial T}.$$

Для конкретизации выражений меры деформаций и энтропии через меру напряжений и температуру должен быть определён вид функции  $G = G(\mathbf{S}, T)$ , задающей потенциал Гиббса. Рассматривая далее изотермические процессы деформирования, будем использовать удельный (отнесённый к единице объёма) потенциал деформаций  $W = -\frac{1}{\rho_0} G(\mathbf{S})$ .

Выразим потенциал деформаций  $W$  для ортотропного материала через инварианты деформаций и напряжений. Из формул (1.17)–(1.20) найдём выражения компонент тензоров деформаций и напряжений в главных осях анизотропии ортотропного материала через его линейные и квадратичные инварианты:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \vartheta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta_2, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \vartheta_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta_2, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta_0 + \frac{2}{\sqrt{6}} \vartheta_1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$|\varepsilon_{12}| = \frac{s^{(1)}}{\sqrt{2}}, \quad |\varepsilon_{23}| = \frac{s^{(2)}}{\sqrt{2}}, \quad |\varepsilon_{31}| = \frac{s^{(3)}}{\sqrt{2}}; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2, \\ S_{22} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2, \quad S_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 + \frac{2}{\sqrt{6}} \sigma_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$|S_{12}| = \frac{t^{(1)}}{\sqrt{2}}, \quad |S_{23}| = \frac{t^{(2)}}{\sqrt{2}}, \quad |S_{31}| = \frac{t^{(3)}}{\sqrt{2}}. \quad (2.7)$$

Найдём свёртку тензора деформаций и дифференциала тензора истинных напряжений в ортонормированном базисе главных осей анизотропии:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{S} &= \varepsilon_{ij} dS_{ij} = \varepsilon_{11} dS_{11} + \varepsilon_{22} dS_{22} + \varepsilon_{33} dS_{33} + 2\varepsilon_{12} dS_{12} + 2\varepsilon_{23} dS_{23} + 2\varepsilon_{31} dS_{31} = \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \vartheta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta_2 \right) d \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2 \right) + \\
&+ \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \vartheta_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta_2 \right) d \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2 \right) + \\
&+ \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta_0 + \frac{2}{\sqrt{6}} \vartheta_1 \right) d \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0 + \frac{2}{\sqrt{6}} \sigma_1 \right) + s_{(1)} dt_{(1)} + s_{(2)} dt_{(2)} + s_{(3)} dt_{(3)} = \\
&= \frac{1}{3} \vartheta_0 d\sigma_0 - \frac{1}{\sqrt{18}} \vartheta_1 d\sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \vartheta_2 d\sigma_0 - \frac{1}{\sqrt{18}} \vartheta_0 d\sigma_1 + \frac{1}{6} \vartheta_1 d\sigma_1 - \frac{1}{\sqrt{12}} \vartheta_2 d\sigma_1 + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{6}} \vartheta_0 d\sigma_2 - \frac{1}{\sqrt{12}} \vartheta_1 d\sigma_2 + \frac{1}{2} \vartheta_2 d\sigma_2 + \frac{1}{3} \vartheta_0 d\sigma_0 - \frac{1}{\sqrt{18}} \vartheta_1 d\sigma_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \vartheta_2 d\sigma_0 - \\
&- \frac{1}{\sqrt{18}} \vartheta_0 d\sigma_1 + \frac{1}{6} \vartheta_1 d\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{12}} \vartheta_2 d\sigma_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \vartheta_0 d\sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{12}} \vartheta_1 d\sigma_2 + \frac{1}{2} \vartheta_2 d\sigma_2 + \\
&+ \frac{1}{3} \vartheta_0 d\sigma_0 + \frac{2}{\sqrt{18}} \vartheta_1 d\sigma_0 + \frac{2}{\sqrt{18}} \vartheta_0 d\sigma_1 + \frac{2}{3} \vartheta_1 d\sigma_1 + s_{(1)} dt_{(1)} + s_{(2)} dt_{(2)} + s_{(3)} dt_{(3)} = \\
&= \vartheta_0 d\sigma_0 + \vartheta_1 d\sigma_1 + \vartheta_2 d\sigma_2 + s_{(1)} dt_{(1)} + s_{(2)} dt_{(2)} + s_{(3)} dt_{(3)},
\end{aligned}$$

то есть

$$dW = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{S} = \vartheta_0 d\sigma_0 + \vartheta_1 d\sigma_1 + \vartheta_2 d\sigma_2 + s_{(1)} dt_{(1)} + s_{(2)} dt_{(2)} + s_{(3)} dt_{(3)}. \quad (2.8)$$

Будем рассматривать потенциал деформаций как функцию линейных и квадратичных инвариантов тензора напряжений  $W = W(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)})$ ,

тогда его дифференциал принимает вид

$$dW = \sum_{\alpha=0}^2 \frac{\partial W}{\partial \sigma_\alpha} d\sigma_\alpha + \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial W}{\partial t_{(\gamma)}} dt_{(\gamma)}. \quad (2.9)$$

Из выражений (2.8), (2.9) следует, что линейные и квадратичные инварианты тензора деформаций для ортотропного материала (1.17), (1.18) могут быть найдены как производные потенциала деформаций по соответствующим инвариантам тензора напряжений:

$$\vartheta_\alpha = \frac{\partial W}{\partial \sigma_\alpha}, \quad s_{(\gamma)} = \frac{\partial W}{\partial t_{(\gamma)}}. \quad (2.10)$$

В работах [27, 50, 82] в качестве основной гипотезы при записи нелинейных определяющих соотношений для анизотропных материалов было предложено считать сформулированное в [27, 50] обобщение частного постулата А.А. Ильюшина на случай анизотропных материалов. В соответствии с этим обобщением потенциал деформаций не может зависеть от третьего инварианта напряжений. В рамках предельной формы обобщения постулата А.А. Ильюшина [27, 50] на вид функции  $W = W(\sigma_\alpha, t_{(\gamma)})$  накладываются ещё большие ограничения: полагается, что процессы в различных собственных подпространствах тензора линейной упругости анизотропного материала не влияют друг на друга. Одно из представлений для упругого потенциала, удовлетворяющих сформулированным гипотезам, имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^2 c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sum_{\gamma=1}^3 D^\gamma(t_{(\gamma)}^2) t_{(\gamma)}^2. \quad (2.11)$$

Материальные функции  $c^{\alpha\beta}$  зависят только от линейных инвариантов тензора напряжений, а функции  $D^\gamma$  зависят от соответствующих квадратичных инвариантов  $t_{(\gamma)}^2$  напряжений. Такие предположения относительно аргументов функций  $c^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta)$  и  $D^\gamma = D^\gamma(t_{(\gamma)}^2)$  соответствуют предельной форме обобщения частного постулата изотропии.

Используя формулы (2.10), получим определяющие соотношения в виде

$$\varepsilon_\alpha = \sum_{\beta=0}^2 \left( c^{\alpha\beta} \sigma_\beta + \frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_\alpha} \sigma_\alpha \sigma_\beta \right), \quad s_{(\gamma)} = 2 \left( D^\gamma + \frac{\partial D^\gamma}{\partial t_{(\gamma)}^2} t_{(\gamma)}^2 \right) t_{(\gamma)}. \quad (2.12)$$

Конкретизация определяющих соотношений (2.12) заключается в задании функций  $c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta)$  и  $D^\gamma(t_{(\gamma)}^2)$ . Если положить эти функции постоянными  $c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = c^{\alpha\beta}$ ,  $D^\gamma(t_{(\gamma)}^2) = D^\gamma$ , то получится линейная связь между инвариантами напряжений и деформаций, являющаяся представлением закона Гука для ортотропного материала:

$$\varepsilon_0 = c^{00} \sigma_0 + c^{01} \sigma_1 + c^{02} \sigma_2, \quad \varepsilon_1 = c^{10} \sigma_0 + c^{11} \sigma_1 + c^{12} \sigma_2, \quad \varepsilon_2 = c^{20} \sigma_0 + c^{21} \sigma_1 + c^{22} \sigma_2,$$

$$s_{(1)} = 2D^1 t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2D^2 t_{(2)}, \quad s_{(3)} = 2D^3 t_{(3)}.$$

Для функции  $W$  смешанные производные второго порядка по её аргументам не должны зависеть от порядка дифференцирования, то есть должны выполняться условия

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \sigma_0}, \quad \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \sigma_2} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \sigma_0}, \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \sigma_2} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \sigma_1}. \quad (2.13)$$

Из этих условий следует, что  $c^{01} = c^{10}$ ,  $c^{02} = c^{20}$ ,  $c^{12} = c^{21}$ .

Тогда линейные соотношения принимают вид

$$\varepsilon_0 = c^{00} \sigma_0 + c^{01} \sigma_1 + c^{02} \sigma_2, \quad \varepsilon_1 = c^{10} \sigma_0 + c^{11} \sigma_1 + c^{12} \sigma_2, \quad \varepsilon_2 = c^{20} \sigma_0 + c^{21} \sigma_1 + c^{22} \sigma_2, \\ s_{(1)} = 2D^1 t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2D^2 t_{(2)}, \quad s_{(3)} = 2D^3 t_{(3)}. \quad (2.14)$$

Соотношения (2.14), записанные для ортотропного материала, содержат, как и закон Гука, девять независимых констант.

## 2.2 Определяющие соотношения второго порядка

Для построения нелинейных определяющих соотношений второго порядка для ортотропного материала зададим функции  $c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = \bar{c}_0^{\alpha\beta} + \bar{c}_1^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$  и  $D^\gamma(t_{(\gamma)}^2) = D_0^\gamma + D_1^\gamma t_{(\gamma)}$ , где  $\bar{c}_0^{\alpha\beta}$ ,  $\bar{c}_1^{\alpha\beta}$ ,  $D_0^\gamma$ ,  $D_1^\gamma$  – постоянные в выбранном базисе трёхмерного пространства упругие параметры материала. Запишем потенциал деформаций (2.11) в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^2 \left( \bar{c}_0^{\alpha\beta} + \bar{c}_1^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \right) \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sum_{\gamma=1}^3 \left( D_0^\gamma + D_1^\gamma t_{(\gamma)} \right) t_{(\gamma)}^2 = \\ = \frac{1}{2} \left[ \left( \bar{c}_0^{00} + 2\bar{c}_1^{00} \sigma_0 \right) \sigma_0^2 + \left( \bar{c}_0^{01} + \bar{c}_1^{01}(\sigma_0 + \sigma_1) \right) \sigma_0 \sigma_1 + \left( \bar{c}_0^{02} + \bar{c}_1^{02}(\sigma_0 + \sigma_2) \right) \sigma_0 \sigma_2 + \right. \\ \left. + \left( \bar{c}_0^{10} + \bar{c}_1^{10}(\sigma_1 + \sigma_0) \right) \sigma_1 \sigma_0 + \left( \bar{c}_0^{11} + 2\bar{c}_1^{11} \sigma_1 \right) \sigma_1^2 + \left( \bar{c}_0^{12} + \bar{c}_1^{12}(\sigma_1 + \sigma_2) \right) \sigma_1 \sigma_2 + \right. \\ \left. + \left( \bar{c}_0^{20} + \bar{c}_1^{20}(\sigma_2 + \sigma_0) \right) \sigma_2 \sigma_0 + \left( \bar{c}_0^{21} + \bar{c}_1^{21}(\sigma_2 + \sigma_1) \right) \sigma_2 \sigma_1 + \left( \bar{c}_0^{22} + 2\bar{c}_1^{22} \sigma_2 \right) \sigma_2^2 \right] + \\ + \left( D_0^1 + D_1^1 t_{(1)} \right) t_{(1)}^2 + \left( D_0^2 + D_1^2 t_{(2)} \right) t_{(2)}^2 + \left( D_0^3 + D_1^3 t_{(3)} \right) t_{(3)}^2. \quad (2.15)$$

В соответствии с формулами (2.12) получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \bar{c}_0^{00} \sigma_0 + \frac{1}{2} (\bar{c}_0^{01} + \bar{c}_0^{10}) \sigma_1 + \frac{1}{2} (\bar{c}_0^{02} + \bar{c}_0^{20}) \sigma_2 + 3\bar{c}_1^{00} \sigma_0^2 + \\
&+ (\bar{c}_1^{01} + \bar{c}_1^{10}) \sigma_0 \sigma_1 + (\bar{c}_1^{02} + \bar{c}_1^{20}) \sigma_0 \sigma_2 + \frac{1}{2} (\bar{c}_1^{01} + \bar{c}_1^{10}) \sigma_1^2 + \frac{1}{2} (\bar{c}_1^{02} + \bar{c}_1^{20}) \sigma_2^2, \\
\varepsilon_1 &= \frac{1}{2} (\bar{c}_0^{01} + \bar{c}_0^{10}) \sigma_0 + \bar{c}_0^{11} \sigma_1 + \frac{1}{2} (\bar{c}_0^{12} + \bar{c}_0^{21}) \sigma_2 + \frac{1}{2} (\bar{c}_1^{01} + \bar{c}_1^{10}) \sigma_0^2 + \\
&+ (\bar{c}_1^{01} + \bar{c}_1^{10}) \sigma_0 \sigma_1 + 3\bar{c}_1^{11} \sigma_1^2 + (\bar{c}_1^{12} + \bar{c}_1^{21}) \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{2} (\bar{c}_1^{12} + \bar{c}_1^{21}) \sigma_2^2, \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{2} (\bar{c}_0^{02} + \bar{c}_0^{20}) \sigma_0 + \frac{1}{2} (\bar{c}_0^{12} + \bar{c}_0^{21}) \sigma_1 + \bar{c}_0^{22} \sigma_2 + \frac{1}{2} (\bar{c}_1^{02} + \bar{c}_1^{20}) \sigma_0^2 + \\
&+ (\bar{c}_1^{02} + \bar{c}_1^{20}) \sigma_0 \sigma_2 + \frac{1}{2} (\bar{c}_1^{12} + \bar{c}_1^{21}) \sigma_1^2 + (\bar{c}_1^{12} + \bar{c}_1^{21}) \sigma_1 \sigma_2 + 3\bar{c}_1^{22} \sigma_2^2, \\
s_{(1)} &= 2 \left( D_0^1 + \frac{3}{2} D_1^1 t_{(1)} \right) t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2 \left( D_0^2 + \frac{3}{2} D_1^2 t_{(2)} \right) t_{(2)}, \quad s_{(3)} = 2 \left( D_0^3 + \frac{3}{2} D_1^3 t_{(3)} \right) t_{(3)}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Отметим, что условия (2.13) для потенциала (2.15) и определяющих соотношений (2.16) выполняются тождественно. В связи с тем, что в выражения (2.16) входят повторяющиеся линейные комбинации констант, введём новые обозначения для параметров модели:

$$\bar{c}_0^{ij} + \bar{c}_0^{ji} = 2c_0^{ij}, \quad \bar{c}_1^{ij} + \bar{c}_1^{ji} = 2c_1^{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

С учётом этих обозначений определяющие соотношения (2.16) примут вид [34]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= (c_0^{00} + 3c_1^{00} \sigma_0) \sigma_0 + (c_0^{01} + 2c_1^{01} \sigma_0 + c_1^{01} \sigma_1) \sigma_1 + (c_0^{02} + 2c_1^{02} \sigma_0 + c_1^{02} \sigma_2) \sigma_2, \\
\varepsilon_1 &= (c_0^{01} + 2c_1^{01} \sigma_1 + c_1^{01} \sigma_0) \sigma_0 + (c_0^{11} + 3c_1^{11} \sigma_1) \sigma_1 + (c_0^{12} + 2c_1^{12} \sigma_1 + c_1^{12} \sigma_2) \sigma_2, \\
\varepsilon_2 &= (c_0^{02} + 2c_1^{02} \sigma_2 + c_1^{02} \sigma_0) \sigma_0 + (c_0^{12} + 2c_1^{12} \sigma_2 + c_1^{12} \sigma_1) \sigma_1 + (c_0^{22} + 3c_1^{22} \sigma_2) \sigma_2, \\
s_{(1)} &= 2 \left( D_0^1 + \frac{3}{2} D_1^1 t_{(1)} \right) t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2 \left( D_0^2 + \frac{3}{2} D_1^2 t_{(2)} \right) t_{(2)}, \quad s_{(3)} = 2 \left( D_0^3 + \frac{3}{2} D_1^3 t_{(3)} \right) t_{(3)}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Определяющие соотношения (2.17) являются моделью упругости второго порядка для ортотропного материала и содержат 9 констант второго порядка  $c_0^{00}$ ,

$c_0^{01}, c_0^{02}, c_0^{11}, c_0^{12}, c_0^{22}, D_0^1, D_0^2, D_0^3$  и 9 констант третьего порядка  $c_1^{00}, c_1^{01}, c_1^{02}, c_1^{11}, c_1^{12}, c_1^{22}, D_1^1, D_1^2, D_1^3$ . При малых деформациях эти соотношения совпадают с линейными соотношениями (2.14).

Из выражений (2.17) с учётом (2.4)–(2.7) получим связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\
&+ B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + B_{1112}S_{11}S_{22} + B_{1113}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33}, \\
\varepsilon_{22} &= A_{2211}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\
&+ B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + B_{2212}S_{11}S_{22} + B_{2213}S_{11}S_{33} + B_{2223}S_{22}S_{33}, \\
\varepsilon_{33} &= A_{3311}S_{11} + A_{3322}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\
&+ B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{3312}S_{11}S_{22} + B_{3313}S_{11}S_{33} + B_{3323}S_{22}S_{33}, \\
\varepsilon_{12} &= 2 \left( D_0^1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 |S_{12}| \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^2 |S_{23}| \right) S_{23}, \\
\varepsilon_{31} &= 2 \left( D_0^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^3 |S_{31}| \right) S_{31}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

В последних трёх выражениях для компонент тензора деформаций компоненты тензора напряжений, стоящие в скобках, взяты по абсолютной величине на основании соотношений (2.7).

Если рассматривать упругий потенциал  $W$  как функцию компонент тензора напряжений  $W = W(S_{ij})$ , то условия дифференцируемости её как функции нескольких переменных принимают вид

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}}. \tag{2.19}$$

Найдём частные производные компонент тензора деформаций (2.18) по компонентам тензора напряжений:

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = A_{1122} + 2B_{1122}S_{22} + B_{1112}S_{11} + B_{1123}S_{33},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}} = A_{2211} + 2B_{2211}S_{11} + B_{2212}S_{22} + B_{2213}S_{33},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = A_{1133} + 2B_{1133}S_{33} + B_{1113}S_{11} + B_{1123}S_{22},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}} = A_{3311} + 2B_{3311}S_{11} + B_{3312}S_{22} + B_{3313}S_{33},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} = A_{2233} + 2B_{2233}S_{33} + B_{2213}S_{11} + B_{2223}S_{22},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}} = A_{3322} + 2B_{3322}S_{22} + B_{3312}S_{11} + B_{3323}S_{33}.$$

Подставляя полученные выражения в условия (2.19), придём к соотношениям между параметрами модели:

$$\begin{aligned} A_{1122} &= A_{2211}, \quad A_{1133} = A_{3311}, \quad A_{2233} = A_{3322}, \\ B_{2212} &= 2B_{1122}, \quad B_{1112} = 2B_{2211}, \quad B_{1123} = B_{2213}, \\ B_{3313} &= 2B_{1133}, \quad B_{1113} = 2B_{3311}, \quad B_{1123} = B_{3312}, \\ B_{3323} &= 2B_{2233}, \quad B_{2223} = 2B_{3322}, \quad B_{2213} = B_{3312}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

С учётом равенств (2.20) определяющие соотношения (2.18) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\ &+ B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22} + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\ &+ B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22} + B_{1123}S_{11}S_{33} + 2B_{3322}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\ &+ B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22} + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + 2B_{2233}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{12} &= 2 \left( D_0^1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 |S_{12}| \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^2 |S_{23}| \right) S_{23}, \\ \varepsilon_{31} &= 2 \left( D_0^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^3 |S_{31}| \right) S_{31}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Если в определяющих соотношениях (2.21) положить параметры  $B_{ijkl}$ ,  $D_1^i$  равными нулю, то получатся линейные соотношения, совпадающие с законом Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33}, & \varepsilon_{22} &= A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33}, \\ \varepsilon_{12} &= 2D_0^1S_{12}, & \varepsilon_{23} &= 2D_0^2S_{23}, & \varepsilon_{31} &= 2D_0^3S_{31}.\end{aligned}\quad (2.22)$$

По данным, полученным в механических экспериментах с макрообразцами, удобнее определять параметры  $A_{ijkl}$  и  $B_{ijkl}$ , входящие в соотношения (2.21). Однако для идентификации коэффициентов модели (2.17) требуется найти значения  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$ . Коэффициенты  $A_{ijk}$  и  $B_{ijk}$  линейно связаны с константами  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$  соответственно.

Из выражений (2.21) и (2.17) с учётом выражений для инвариантов (1.17), (1.19) получим

$$\begin{aligned}A_{1111} &= \frac{c_0^{00}}{3} - \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{3} + \frac{2c_0^{02}}{\sqrt{6}} + \frac{c_0^{11}}{6} - \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3} + \frac{c_0^{22}}{2}, \\ A_{1122} &= \frac{c_0^{00}}{3} - \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{3} + \frac{c_0^{11}}{6} - \frac{c_0^{22}}{2}, \\ A_{1133} &= \frac{c_0^{00}}{3} + \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{6} + \frac{c_0^{02}}{\sqrt{6}} - \frac{c_0^{11}}{3} + \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3}, \\ A_{2222} &= \frac{c_0^{00}}{3} - \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{3} - \frac{2c_0^{02}}{\sqrt{6}} + \frac{c_0^{11}}{6} + \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3} + \frac{c_0^{22}}{2}, \\ A_{2233} &= \frac{c_0^{00}}{3} + \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{6} - \frac{c_0^{02}}{\sqrt{6}} - \frac{c_0^{11}}{3} - \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3}, & A_{3333} &= \frac{c_0^{00}}{3} + \frac{2\sqrt{2}c_0^{01}}{3} + \frac{2c_0^{11}}{3}; \\ B_{1111} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}c_1^{12} + \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\ B_{1122} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}c_1^{12} + \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22},\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
B_{1133} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{2}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{11} + \frac{\sqrt{2}}{3}c_1^{12}, \\
B_{1123} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}c_1^{00} - \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{01} - \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{02} + \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{11} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{12}, \\
B_{2211} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}c_1^{12} - \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\
B_{2222} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}c_1^{12} - \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\
B_{2233} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{01} - \frac{\sqrt{2}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{11} - \frac{\sqrt{2}}{3}c_1^{12}, \\
B_{3311} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} - \frac{\sqrt{3}}{6}c_1^{01} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}c_1^{02} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{11} + \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{6}c_1^{12}, \\
B_{3322} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} - \frac{\sqrt{3}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}c_1^{02} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{11} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}c_1^{12}, \\
B_{3333} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}c_1^{01} + \frac{2\sqrt{6}}{3}c_1^{11}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

В квадратичной части определяющих соотношений 10 коэффициентов  $B_{ijkl}$  линейно выражаются через 6 параметров  $c_1^{\alpha\beta}$ , поэтому линейно независимыми являются 6 констант  $B_{ijkl}$ . В качестве независимых параметров выберем следующие:  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{3311}$ ,  $B_{3333}$ . Остальные 4 из 10 параметров  $B_{1123}$ ,  $B_{1133}$ ,  $B_{2233}$ ,  $B_{3322}$  линейно выражаются через них:

$$\begin{aligned}
B_{1123} &= \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{6}+1}{2}B_{1111} + \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}-1}{2}B_{1122} + \frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}-4\sqrt{6}-9}{2}B_{2211} + \\
&+ \frac{9-6\sqrt{2}-5\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{2}B_{2222} + 2B_{3311}, \\
B_{1133} &= \frac{10\sqrt{2}+3\sqrt{6}-10}{12}B_{1111} + \frac{6-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}B_{1122} + \frac{9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-4\sqrt{6}-8}{4}B_{2211} + \\
&+ \frac{32-23\sqrt{2}-18\sqrt{3}+12\sqrt{6}}{12}B_{2222} - \sqrt{2}B_{3311} + \frac{\sqrt{2}-1}{3}B_{3333},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2233} &= \frac{\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4}{12} B_{1111} + \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4}{4} B_{1122} + \frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 6}{4} B_{2211} + \\
&+ \frac{26 - 14\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 9\sqrt{6}}{12} B_{2222} - \sqrt{2} B_{3311} + \frac{\sqrt{2} - 1}{3} B_{3333}, \\
B_{3322} &= \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6} - 4}{2} B_{1111} + \frac{4 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2} B_{1122} + \\
&+ \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 4}{2} B_{2211} + \frac{4 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} B_{2222} + B_{3311}.
\end{aligned}$$

Обращая соотношения (2.23) и 6 линейно независимых соотношений (2.24), соответствующих указанным константам  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{3311}$ ,  $B_{3333}$ , получим выражения параметров модели (2.17) через  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ :

$$\begin{aligned}
c_0^{00} &= \frac{1}{3} A_{1111} + \frac{2}{3} A_{1122} + \frac{2}{3} A_{1133} + \frac{1}{3} A_{2222} + \frac{2}{3} A_{2233} + \frac{1}{3} A_{3333}, \\
c_0^{01} &= -\frac{\sqrt{2}}{6} A_{1111} - \frac{\sqrt{2}}{3} A_{1122} + \frac{\sqrt{2}}{6} A_{1133} - \frac{\sqrt{2}}{6} A_{2222} + \frac{\sqrt{2}}{6} A_{2233} + \frac{\sqrt{2}}{6} A_{3333}, \\
c_0^{02} &= \frac{\sqrt{6}}{6} A_{1111} + \frac{\sqrt{6}}{6} A_{1133} - \frac{\sqrt{6}}{6} A_{2222} - \frac{\sqrt{6}}{6} A_{2233}, \\
c_0^{11} &= \frac{1}{6} A_{1111} + \frac{1}{3} A_{1122} - \frac{2}{3} A_{1133} + \frac{1}{6} A_{2222} - \frac{2}{3} A_{2233} + \frac{2}{3} A_{3333}, \\
c_0^{12} &= -\frac{\sqrt{3}}{6} A_{1111} + \frac{\sqrt{3}}{3} A_{1133} + \frac{\sqrt{3}}{6} A_{2222} - \frac{\sqrt{3}}{3} A_{2233}, \\
c_0^{22} &= \frac{1}{2} A_{1111} - A_{1122} + \frac{1}{2} A_{2222}; \\
c_1^{00} &= \frac{29\sqrt{6} - 9\sqrt{2} - 28\sqrt{3}}{108} B_{1111} + \frac{3\sqrt{2} + 20\sqrt{3} - 7\sqrt{6}}{36} B_{1122} + \\
&+ \frac{24 - 17\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 11\sqrt{6}}{12} B_{2211} + \frac{153\sqrt{2} + 140\sqrt{3} - 91\sqrt{6} - 216}{108} B_{2222} + \\
&+ \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{9} B_{3311} + \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{3}}{27} B_{3333}, \\
c_1^{01} &= \frac{9\sqrt{2} + 11\sqrt{3} - 9\sqrt{6} + 9}{36} B_{1111} + \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - 3}{12} B_{1122} +
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 7}{4} B_{2211} + \frac{63 - 45\sqrt{2} - 37\sqrt{3} + \sqrt{6}}{36} B_{2222} - \frac{2\sqrt{3}}{3} B_{3311} + \frac{2\sqrt{3}}{9} B_{3333}, \\
c_1^{02} &= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - 3}{4} B_{1111} + \frac{3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{4} B_{1122} + \\
& + \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} - 3}{4} B_{2211} + \frac{3 - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}{4} B_{2222}, \tag{2.26} \\
c_1^{11} &= \frac{4\sqrt{6} - 27\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 36}{108} B_{1111} + \frac{9\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 8\sqrt{6} + 12}{36} B_{1122} + \\
& + \frac{4 - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{12} B_{2211} + \frac{27\sqrt{2} + 20\sqrt{3} - 20\sqrt{6} - 36}{108} B_{2222} + \\
& + \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{9} B_{3311} + \frac{4\sqrt{6} - 4\sqrt{3}}{27} B_{3333}, \\
c_1^{12} &= \frac{6 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{4} B_{1111} + \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 6}{4} B_{1122} + \\
& + \frac{6 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{4} B_{2211} + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 6}{4} B_{2222}, \\
c_1^{22} &= \frac{\sqrt{2}}{12} B_{1111} + \frac{\sqrt{2}}{4} B_{1122} - \frac{\sqrt{2}}{4} B_{2211} - \frac{\sqrt{2}}{12} B_{2222}.
\end{aligned}$$

Укажем эксперименты, из которых можно определить параметры построенных определяющих соотношений второго порядка. Для определения параметров  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$  образцы в форме пластин для экспериментов должны быть вырезаны во взаимно перпендикулярных направлениях, образованных главными осями анизотропии ортотропного материала. В экспериментах на растяжение и сжатие требуется измерять зависимости продольных и поперечных деформаций плоских образцов от приложенного напряжения. Материальные параметры модели второго порядка определяются из следующих экспериментов:

1) из экспериментов в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_1$  определяются параметры  $A_{1111}$ ,  $A_{1122}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{2211}$ . Для этого должны быть получены зависимости  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(S_{11})$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(S_{11})$ ;

2) из экспериментов в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_2$  определяются параметры  $A_{2222}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{1122}$ . Для этого требуются экспериментальные зависимости  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(S_{22})$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(S_{22})$ ;

3) из экспериментов в плоскости  $Ox_1x_3$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_3$  по зависимостям  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(S_{33})$ ,  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}(S_{33})$  определяются параметры  $A_{1133}$ ,  $A_{3333}$ ,  $B_{3333}$ .

4) из экспериментов в той же плоскости на растяжение и сжатие по оси  $Ox_1$  по зависимости  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}(S_{11})$  можно определить  $B_{3311}$ ;

5) из экспериментов в плоскости  $Ox_2x_3$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_3$  по зависимости  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(S_{33})$  определяется параметр  $A_{2233}$ ;

6) коэффициенты модели  $D_i^j$  определяются по результатам трёх экспериментов на сдвиг в плоскостях  $Ox_1x_2$  ( $D_0^1$ ,  $D_1^1$ ),  $Ox_1x_3$  ( $D_0^2$ ,  $D_1^2$ ),  $Ox_2x_3$  ( $D_0^3$ ,  $D_1^3$ ), образованных главными направлениями анизотропии ортотропного материала. При этом эксперименты на сдвиг могут быть выполнены как опыты на двухосное растяжение-сжатие плоских образцов под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии.

Если константы  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$  найдены по результатам экспериментов, то параметры модели (2.17)  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$  вычисляются по формулам (2.25), (2.26).

### 2.3 Определяющие соотношения третьего порядка

Для записи определяющих соотношений третьего порядка для ортотропного материала зададим функции

$$c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = \bar{c}_0^{\alpha\beta} + \bar{c}_1^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + \bar{c}_2^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2) \quad \text{и}$$

$$D^\gamma(t_{(\gamma)}^2) = D_0^\gamma + D_1^\gamma t_{(\gamma)} + D_2^\gamma t_{(\gamma)}^2, \quad \text{где } \bar{c}_0^{\alpha\beta}, \bar{c}_1^{\alpha\beta}, \bar{c}_2^{\alpha\beta}, D_0^\gamma, D_1^\gamma, D_2^\gamma \text{ – постоянные в}$$

выбранном базисе трёхмерного пространства упругие параметры материала. Запишем потенциал деформаций (2.11) в виде

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^2 \left( \bar{c}_0^{\alpha\beta} + \bar{c}_1^{\alpha\beta} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + \bar{c}_2^{\alpha\beta} (\sigma_\alpha^2 + \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta^2) \right) \sigma_\alpha \sigma_\beta + \quad (2.27) \\
&+ \sum_{\gamma=1}^3 \left( D_0^\gamma + D_1^\gamma t_{(\gamma)} + D_2^\gamma t_{(\gamma)}^2 \right) t_{(\gamma)}^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \bar{c}_0^{00} + 2\bar{c}_1^{00} \sigma_0 + 3\bar{c}_2^{00} \sigma_0^2 \right) \sigma_0^2 + \left( \bar{c}_0^{01} + \bar{c}_1^{01} (\sigma_0 + \sigma_1) + \bar{c}_2^{01} (\sigma_0^2 + \sigma_0 \sigma_1 + \sigma_1^2) \right) \sigma_0 \sigma_1 + \right. \\
&+ \left( \bar{c}_0^{02} + \bar{c}_1^{02} (\sigma_0 + \sigma_2) + \bar{c}_2^{02} (\sigma_0^2 + \sigma_0 \sigma_2 + \sigma_2^2) \right) \sigma_0 \sigma_2 + \\
&+ \left( \bar{c}_0^{10} + \bar{c}_1^{10} (\sigma_1 + \sigma_0) + \bar{c}_2^{10} (\sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_0 + \sigma_0^2) \right) \sigma_1 \sigma_0 + \left( \bar{c}_0^{11} + 2\bar{c}_1^{11} \sigma_1 + 3\bar{c}_2^{11} \sigma_1^2 \right) \sigma_1^2 + \\
&+ \left( \bar{c}_0^{12} + \bar{c}_1^{12} (\sigma_1 + \sigma_2) + \bar{c}_2^{12} (\sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) \right) \sigma_1 \sigma_2 + \\
&+ \left( \bar{c}_0^{20} + \bar{c}_1^{20} (\sigma_2 + \sigma_0) + \bar{c}_2^{20} (\sigma_2^2 + \sigma_2 \sigma_0 + \sigma_0^2) \right) \sigma_2 \sigma_0 + \\
&+ \left. \left( \bar{c}_0^{21} + \bar{c}_1^{21} (\sigma_2 + \sigma_1) + \bar{c}_2^{21} (\sigma_2^2 + \sigma_2 \sigma_1 + \sigma_1^2) \right) \sigma_2 \sigma_1 + \left( \bar{c}_0^{22} + 2\bar{c}_1^{22} \sigma_2 + 3\bar{c}_2^{22} \sigma_2^2 \right) \sigma_2^2 \right] + \\
&+ \left( D_0^1 + D_1^1 t_{(1)} + D_2^1 t_{(1)}^2 \right) t_{(1)}^2 + \left( D_0^2 + D_1^2 t_{(2)} + D_2^2 t_{(2)}^2 \right) t_{(2)}^2 + \left( D_0^3 + D_1^3 t_{(3)} + D_2^3 t_{(3)}^2 \right) t_{(3)}^2.
\end{aligned}$$

В соответствии с формулами (2.12) получим

$$\begin{aligned}
\vartheta_0 &= \bar{c}_0^{00} \sigma_0 + \frac{1}{2} \left( \bar{c}_0^{01} + \bar{c}_0^{10} \right) \sigma_1 + \frac{1}{2} \left( \bar{c}_0^{02} + \bar{c}_0^{20} \right) \sigma_2 + 3\bar{c}_1^{00} \sigma_0^2 + \\
&+ \left( \bar{c}_1^{01} + \bar{c}_1^{10} \right) \sigma_0 \sigma_1 + \left( \bar{c}_1^{02} + \bar{c}_1^{20} \right) \sigma_0 \sigma_2 + \frac{1}{2} \left( \bar{c}_1^{01} + \bar{c}_1^{10} \right) \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \left( \bar{c}_1^{02} + \bar{c}_1^{20} \right) \sigma_2^2 + \\
&+ 6\bar{c}_2^{00} \sigma_0^3 + \frac{3}{2} \left( \bar{c}_2^{01} + \bar{c}_2^{10} \right) \sigma_0^2 \sigma_1 + \frac{3}{2} \left( \bar{c}_2^{02} + \bar{c}_2^{20} \right) \sigma_0^2 \sigma_2 + \left( \bar{c}_2^{01} + \bar{c}_2^{10} \right) \sigma_0 \sigma_1^2 + \\
&+ \left( \bar{c}_2^{02} + \bar{c}_2^{20} \right) \sigma_0 \sigma_2^2 + \frac{1}{2} \left( \bar{c}_2^{01} + \bar{c}_2^{10} \right) \sigma_1^3 + \frac{1}{2} \left( \bar{c}_2^{02} + \bar{c}_2^{20} \right) \sigma_2^3, \\
\vartheta_1 &= \frac{1}{2} \left( \bar{c}_0^{01} + \bar{c}_0^{10} \right) \sigma_0 + \bar{c}_0^{11} \sigma_1 + \frac{1}{2} \left( \bar{c}_0^{12} + \bar{c}_0^{21} \right) \sigma_2 + \frac{1}{2} \left( \bar{c}_1^{01} + \bar{c}_1^{10} \right) \sigma_0^2 + \\
&+ \left( \bar{c}_1^{01} + \bar{c}_1^{10} \right) \sigma_0 \sigma_1 + 3\bar{c}_1^{11} \sigma_1^2 + \left( \bar{c}_1^{12} + \bar{c}_1^{21} \right) \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{2} \left( \bar{c}_1^{12} + \bar{c}_1^{21} \right) \sigma_2^2 +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(\bar{c}_2^{01} + \bar{c}_2^{10})\sigma_0^3 + (\bar{c}_2^{01} + \bar{c}_2^{10})\sigma_0^2\sigma_1 + \frac{3}{2}(\bar{c}_2^{01} + \bar{c}_2^{10})\sigma_0\sigma_1^2 + 6\bar{c}_2^{11}\sigma_1^3 + \quad (2.28)$$

$$+\frac{3}{2}(\bar{c}_2^{12} + \bar{c}_2^{21})\sigma_1^2\sigma_2 + (\bar{c}_2^{12} + \bar{c}_2^{21})\sigma_1\sigma_2^2 + \frac{1}{2}(\bar{c}_2^{12} + \bar{c}_2^{21})\sigma_2^3,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\bar{c}_0^{02} + \bar{c}_0^{20})\sigma_0 + \frac{1}{2}(\bar{c}_0^{12} + \bar{c}_0^{21})\sigma_1 + \bar{c}_0^{22}\sigma_2 + \frac{1}{2}(\bar{c}_1^{02} + \bar{c}_1^{20})\sigma_0^2 +$$

$$+(\bar{c}_1^{02} + \bar{c}_1^{20})\sigma_0\sigma_2 + \frac{1}{2}(\bar{c}_1^{12} + \bar{c}_1^{21})\sigma_1^2 + (\bar{c}_1^{12} + \bar{c}_1^{21})\sigma_1\sigma_2 + 3\bar{c}_1^{22}\sigma_2^2$$

$$+\frac{1}{2}(\bar{c}_2^{02} + \bar{c}_2^{20})\sigma_0^3 + (\bar{c}_2^{02} + \bar{c}_2^{20})\sigma_0^2\sigma_2 + \frac{3}{2}(\bar{c}_2^{02} + \bar{c}_2^{20})\sigma_0\sigma_2^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(\bar{c}_2^{12} + \bar{c}_2^{21})\sigma_1^3 + (\bar{c}_2^{12} + \bar{c}_2^{21})\sigma_1^2\sigma_2 + \frac{3}{2}(\bar{c}_2^{12} + \bar{c}_2^{21})\sigma_1\sigma_2^2 + 6\bar{c}_2^{22}\sigma_2^3,$$

$$s_{(1)} = 2\left(D_0^1 + \frac{3}{2}D_1^1 t_{(1)} + 2D_2^1 t_{(1)}^2\right)t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2\left(D_0^2 + \frac{3}{2}D_1^2 t_{(2)} + 2D_2^2 t_{(2)}^2\right)t_{(2)},$$

$$s_{(3)} = 2\left(D_0^3 + \frac{3}{2}D_1^3 t_{(3)} + 2D_2^3 t_{(3)}^2\right)t_{(3)}.$$

Условия (2.13) существования упругого потенциала (2.27) для определяющих соотношений (2.28), как и для соотношений (2.16), выполняются тождественно. Обозначим повторяющиеся линейные комбинации параметров модели (2.28) следующим образом:

$$\bar{c}_0^{ij} + \bar{c}_0^{ji} = 2c_0^{ij}, \quad \bar{c}_1^{ij} + \bar{c}_1^{ji} = 2c_1^{ij}, \quad \bar{c}_2^{ij} + \bar{c}_2^{ji} = 2c_2^{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

С учётом этих обозначений определяющие соотношения (2.28) примут вид

$$\varepsilon_0 = (c_0^{00} + 3c_1^{00}\sigma_0 + 6c_2^{00}\sigma_0^2)\sigma_0 +$$

$$+(c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_0 + c_1^{01}\sigma_1 + 3c_2^{01}\sigma_0^2 + 2c_2^{01}\sigma_0\sigma_1 + c_2^{01}\sigma_1^2)\sigma_1 +$$

$$+(c_0^{02} + 2c_1^{02}\sigma_0 + c_1^{02}\sigma_2 + 3c_2^{02}\sigma_0^2 + 2c_2^{02}\sigma_0\sigma_2 + c_2^{02}\sigma_2^2)\sigma_2,$$

$$\varepsilon_1 = (c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_1 + c_1^{01}\sigma_0 + 3c_2^{01}\sigma_1^2 + 2c_2^{01}\sigma_0\sigma_1 + c_2^{01}\sigma_0^2)\sigma_0 +$$

$$+(c_0^{11} + 3c_1^{11}\sigma_1 + 6c_2^{11}\sigma_1^2)\sigma_1 +$$

$$+\left(c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_1 + c_1^{12}\sigma_2 + 3c_2^{12}\sigma_1^2 + 2c_2^{12}\sigma_1\sigma_2 + c_2^{12}\sigma_2^2\right)\sigma_2, \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_2 = \left(c_0^{02} + 2c_1^{02}\sigma_2 + c_1^{02}\sigma_0 + 3c_2^{02}\sigma_2^2 + 2c_2^{02}\sigma_0\sigma_2 + c_2^{02}\sigma_0^2\right)\sigma_0 +$$

$$+\left(c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_2 + c_1^{12}\sigma_1 + 3c_2^{12}\sigma_2^2 + 2c_2^{12}\sigma_1\sigma_2 + c_2^{12}\sigma_1^2\right)\sigma_1 +$$

$$+\left(c_0^{22} + 3c_1^{22}\sigma_2 + 6c_2^{22}\sigma_2^2\right)\sigma_2,$$

$$s_{(1)} = 2\left(D_0^1 + \frac{3}{2}D_1^1 t_{(1)} + 2D_2^1 t_{(1)}^2\right)t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2\left(D_0^2 + \frac{3}{2}D_1^2 t_{(2)} + 2D_2^2 t_{(2)}^2\right)t_{(2)},$$

$$s_{(3)} = 2\left(D_0^3 + \frac{3}{2}D_1^3 t_{(3)} + 2D_2^3 t_{(3)}^2\right)t_{(3)}.$$

Определяющие соотношения (2.29) являются моделью упругости третьего порядка для ортотропного материала и содержат 9 констант второго порядка  $c_0^{00}$ ,  $c_0^{01}$ ,  $c_0^{02}$ ,  $c_0^{11}$ ,  $c_0^{12}$ ,  $c_0^{22}$ ,  $D_0^1$ ,  $D_0^2$ ,  $D_0^3$ , 9 констант третьего порядка  $c_1^{00}$ ,  $c_1^{01}$ ,  $c_1^{02}$ ,  $c_1^{11}$ ,  $c_1^{12}$ ,  $c_1^{22}$ ,  $D_1^1$ ,  $D_1^2$ ,  $D_1^3$  и 9 констант четвёртого порядка  $c_2^{00}$ ,  $c_2^{01}$ ,  $c_2^{02}$ ,  $c_2^{11}$ ,  $c_2^{12}$ ,  $c_2^{22}$ ,  $D_2^1$ ,  $D_2^2$ ,  $D_2^3$ . При малых деформациях эти соотношения совпадают с линейными соотношениями (2.14). Определяющие соотношения (2.29) по сравнению с квадратичными соотношениями содержат дополнительные слагаемые третьей степени относительно инвариантов тензора напряжений.

Из выражений (2.29) с учётом (2.4)–(2.7) находим зависимости компонент тензора деформаций от компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\ & + B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + B_{1112}S_{11}S_{22} + B_{1113}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33} + \\ & + C_{1111}S_{11}^3 + C_{1112}S_{11}^2S_{22} + C_{1113}S_{11}^2S_{33} + C_{1122}S_{11}S_{22}^2 + C_{1133}S_{11}S_{33}^2 + \\ & + C_{1123}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{1222}S_{22}^3 + C_{1223}S_{22}^2S_{33} + C_{1233}S_{22}S_{33}^2 + C_{1333}S_{33}^3, \\ \varepsilon_{22} = & A_{2211}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\ & + B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + B_{2212}S_{11}S_{22} + B_{2213}S_{11}S_{33} + B_{2223}S_{22}S_{33} + \\ & + C_{2111}S_{11}^3 + C_{2112}S_{11}^2S_{22} + C_{2113}S_{11}^2S_{33} + C_{2122}S_{11}S_{22}^2 + C_{2133}S_{11}S_{33}^2 + \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$+C_{2123}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{2222}S_{22}^3 + C_{2223}S_{22}^2S_{33} + C_{2233}S_{22}S_{33}^2 + C_{2333}S_{33}^3,$$

$$\varepsilon_{33} = A_{3311}S_{11} + A_{3322}S_{22} + A_{3333}S_{33} +$$

$$+B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{3312}S_{11}S_{22} + B_{3313}S_{11}S_{33} + B_{3323}S_{22}S_{33} +$$

$$+C_{3111}S_{11}^3 + C_{3112}S_{11}^2S_{22} + C_{3113}S_{11}^2S_{33} + C_{3122}S_{11}S_{22}^2 + C_{3133}S_{11}S_{33}^2 +$$

$$+C_{3123}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{3222}S_{22}^3 + C_{3223}S_{22}^2S_{33} + C_{3233}S_{22}S_{33}^2 + C_{3333}S_{33}^3,$$

$$\varepsilon_{12} = 2\left(D_0^1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}D_1^1|S_{12}| + 4D_2^1S_{12}^2\right)S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2\left(D_0^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}D_1^2|S_{23}| + 4D_2^2S_{23}^2\right)S_{23},$$

$$\varepsilon_{31} = 2\left(D_0^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}D_1^3|S_{31}| + 4D_2^3S_{31}^2\right)S_{31}.$$

Найдём частные производные компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений:

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = A_{1122} + 2B_{1122}S_{22} + B_{1112}S_{11} + B_{1123}S_{33} +$$

$$+C_{1112}S_{11}^2 + 2C_{1122}S_{11}S_{22} + C_{1123}S_{11}S_{33} + 3C_{1222}S_{22}^2 + 2C_{1223}S_{22}S_{33} + C_{1233}S_{33}^2,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}} = A_{2211} + 2B_{2211}S_{11} + B_{2212}S_{22} + B_{2213}S_{33} +$$

$$+3C_{2111}S_{11}^2 + 2C_{2112}S_{11}S_{22} + 2C_{2113}S_{11}S_{33} + C_{2122}S_{22}^2 + C_{2133}S_{33}^2 + C_{2123}S_{22}S_{33},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = A_{1133} + 2B_{1133}S_{33} + B_{1113}S_{11} + B_{1123}S_{22} +$$

$$+C_{1113}S_{11}^2 + 2C_{1133}S_{11}S_{33} + C_{1123}S_{11}S_{22} + C_{1223}S_{22}^2 + 2C_{1233}S_{22}S_{33} + 3C_{1333}S_{33}^2,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}} = A_{3311} + 2B_{3311}S_{11} + B_{3312}S_{22} + B_{3313}S_{33} +$$

$$+3C_{3111}S_{11}^2 + 2C_{3112}S_{11}S_{22} + 2C_{3113}S_{11}S_{33} + C_{3122}S_{22}^2 + C_{3133}S_{33}^2 + C_{3123}S_{22}S_{33},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} = A_{2233} + 2B_{2233}S_{33} + B_{2213}S_{11} + B_{2223}S_{22} +$$

$$+C_{2113}S_{11}^2 + 2C_{2133}S_{11}S_{33} + C_{2123}S_{11}S_{22} + C_{2223}S_{22}^2 + 2C_{2233}S_{22}S_{33} + 3C_{2333}S_{33}^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}} = & A_{3322} + 2B_{3322}S_{22} + B_{3312}S_{11} + B_{3323}S_{33} + \\ & + C_{3112}S_{11}^2 + 2C_{3122}S_{11}S_{22} + C_{3123}S_{11}S_{33} + 3C_{3222}S_{22}^2 + 2C_{3223}S_{22}S_{33} + C_{3233}S_{33}^2. \end{aligned}$$

Из условий (2.19) существования упругого потенциала получим соотношения между параметрами модели, аналогичные связям (2.20):

$$\begin{aligned} A_{1122} = A_{2211}, \quad A_{1133} = A_{3311}, \quad A_{2233} = A_{3322}, \\ B_{2212} = 2B_{1122}, \quad B_{1112} = 2B_{2211}, \quad B_{1123} = B_{2213}, \\ B_{3313} = 2B_{1133}, \quad B_{1113} = 2B_{3311}, \quad B_{1123} = B_{3312}, \\ B_{3323} = 2B_{2233}, \quad B_{2223} = 2B_{3322}, \quad B_{2213} = B_{3312}, \\ C_{1112} = 3C_{2111}, \quad C_{1122} = C_{2112}, \quad C_{2122} = 3C_{1222}, \quad C_{1113} = 3C_{3111}, \\ C_{1133} = C_{3113}, \quad C_{3133} = 3C_{1333}, \quad C_{2223} = 3C_{3222}, \quad C_{2233} = C_{3223}, \quad C_{3233} = 3C_{2333}, \\ C_{1123} = 2C_{2113} = 2C_{3112}, \quad C_{2123} = 2C_{1223} = 2C_{3122}, \quad C_{3123} = 2C_{1233} = 2C_{2133}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

С учётом равенств (2.31) определяющие соотношения (2.30) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\ & + B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22} + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33} + \\ & + C_{1111}S_{11}^3 + 3C_{2111}S_{11}^2S_{22} + 3C_{3111}S_{11}^2S_{33} + C_{1122}S_{11}S_{22}^2 + C_{1133}S_{11}S_{33}^2 + \\ & + 2C_{2113}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{1222}S_{22}^3 + C_{1223}S_{22}^2S_{33} + C_{1233}S_{22}S_{33}^2 + C_{1333}S_{33}^3, \\ \varepsilon_{22} = & A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\ & + B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22} + B_{1123}S_{11}S_{33} + 2B_{3322}S_{22}S_{33} + \\ & + C_{2111}S_{11}^3 + C_{1122}S_{11}^2S_{22} + C_{2113}S_{11}^2S_{33} + 3C_{1222}S_{11}S_{22}^2 + C_{1233}S_{11}S_{33}^2 + \\ & + 2C_{1223}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{2222}S_{22}^3 + 3C_{3222}S_{22}^2S_{33} + C_{2233}S_{22}S_{33}^2 + C_{2333}S_{33}^3, \\ \varepsilon_{33} = & A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\ & + B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22} + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + 2B_{2233}S_{22}S_{33} + \\ & + C_{3111}S_{11}^3 + C_{2113}S_{11}^2S_{22} + C_{1133}S_{11}^2S_{33} + C_{1223}S_{11}S_{22}^2 + 3C_{1333}S_{11}S_{33}^2 + \\ & + 2C_{1233}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{3222}S_{22}^3 + C_{2233}S_{22}^2S_{33} + 3C_{2333}S_{22}S_{33}^2 + C_{3333}S_{33}^3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \left( D_0^1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 |S_{12}| + 4D_2^1 S_{12}^2 \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^2 |S_{23}| + 4D_2^1 S_{23}^2 \right) S_{23},$$

$$\varepsilon_{31} = 2 \left( D_0^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^3 |S_{31}| + 4D_2^1 S_{31}^2 \right) S_{31}.$$

Параметры  $A_{ijkl}$  и  $B_{ijkl}$  определяющих соотношений (2.32) связаны с константами модели  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$  формулами (2.23), (2.24) соответственно.

Параметры  $C_{ijkl}$  выражаются через  $c_2^{\alpha\beta}$  следующим образом:

$$C_{1111} = \frac{2}{3}c_2^{00} + \frac{2-3\sqrt{2}}{9}c_2^{01} + \frac{6+5\sqrt{6}}{9}c_2^{02} + \frac{1}{6}c_2^{11} + \frac{3-4\sqrt{3}}{9}c_2^{12} + \frac{3}{2}c_2^{22},$$

$$C_{1122} = 2c_2^{00} + \frac{2-3\sqrt{2}}{3}c_2^{01} - \frac{2}{3}c_2^{02} + \frac{1}{2}c_2^{11} - \frac{1}{3}c_2^{12} + \frac{9}{2}c_2^{22},$$

$$C_{1133} = 2c_2^{00} - \frac{1}{3}c_2^{01} + \frac{\sqrt{6}+1}{3}c_2^{02} + 2c_2^{11} + \frac{2-2\sqrt{3}}{3}c_2^{12},$$

$$C_{1222} = \frac{2}{3}c_2^{00} + \frac{2-3\sqrt{2}}{9}c_2^{01} + \frac{\sqrt{6}}{18}c_2^{02} + \frac{1}{6}c_2^{11} - \frac{\sqrt{3}}{9}c_2^{12} - \frac{3}{2}c_2^{22},$$

$$C_{1223} = 2c_2^{00} + \frac{3\sqrt{2}-4}{12}c_2^{01} + \frac{\sqrt{6}-4}{12}c_2^{02} - c_2^{11} + \frac{\sqrt{3}+1}{3}c_2^{12},$$

$$C_{1233} = 2c_2^{00} - \frac{1}{3}c_2^{01} - \frac{1}{3}c_2^{02} + 2c_2^{11} - \frac{2}{3}c_2^{12},$$

$$C_{1333} = \frac{2}{3}c_2^{00} + \frac{3\sqrt{2}+4}{18}c_2^{01} + \frac{\sqrt{6}}{18}c_2^{02} - \frac{4}{3}c_2^{11} + \frac{2\sqrt{3}}{9}c_2^{12},$$

$$C_{2111} = \frac{2}{3}c_2^{00} + \frac{2-3\sqrt{2}}{9}c_2^{01} - \frac{\sqrt{6}}{18}c_2^{02} + \frac{1}{6}c_2^{11} + \frac{\sqrt{3}}{9}c_2^{12} - \frac{3}{2}c_2^{22}, \quad (2.33)$$

$$C_{2113} = 2c_2^{00} + \frac{3\sqrt{2}-4}{12}c_2^{01} - \frac{4+\sqrt{6}}{12}c_2^{02} - c_2^{11} + \frac{1-\sqrt{3}}{3}c_2^{12},$$

$$C_{2222} = \frac{2}{3}c_2^{00} + \frac{2-3\sqrt{2}}{9}c_2^{01} + \frac{6-5\sqrt{6}}{9}c_2^{02} + \frac{1}{6}c_2^{11} + \frac{3+4\sqrt{3}}{9}c_2^{12} + \frac{3}{2}c_2^{22},$$

$$C_{2233} = 2c_2^{00} - \frac{1}{3}c_2^{01} + \frac{1-\sqrt{6}}{3}c_2^{02} + 2c_2^{11} + \frac{2\sqrt{3}+2}{3}c_2^{12},$$

$$C_{2333} = \frac{2}{3}c_2^{00} + \frac{3\sqrt{2}+4}{18}c_2^{01} - \frac{\sqrt{6}}{18}c_2^{02} - \frac{4}{3}c_2^{11} - \frac{2\sqrt{3}}{9}c_2^{12},$$

$$C_{3111} = \frac{2}{3}c_2^{00} + \frac{3\sqrt{2}-4}{36}c_2^{01} + \frac{4+3\sqrt{6}}{12}c_2^{02} - \frac{1}{3}c_2^{11} + \frac{\sqrt{3}-1}{3}c_2^{12},$$

$$C_{3222} = \frac{2}{3}c_2^{00} + \frac{3\sqrt{2}-4}{36}c_2^{01} + \frac{4-3\sqrt{6}}{12}c_2^{02} - \frac{1}{3}c_2^{11} - \frac{\sqrt{3}+1}{3}c_2^{12},$$

$$C_{3333} = \frac{2}{3}c_2^{00} + \frac{12\sqrt{2}+8}{9}c_2^{01} + \frac{8}{3}c_2^{11}.$$

В соответствии с формулами (2.33) 15 коэффициентов  $C_{ijkl}$  из определяющих соотношений (2.32) линейно выражаются через 6 параметров  $c_2^{\alpha\beta}$ , поэтому линейно независимыми являются также 6 констант  $C_{ijkl}$ . В качестве независимых параметров выберем следующие:  $C_{1111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{3333}$ . Остальные 9 из 15 параметров  $C_{ijkl}$  линейно выражаются через них:

$$C_{1122} = \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}-6}{12}C_{1111} + \frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}+2}{4}C_{1222} + \\ + \frac{6-21\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{12}C_{2222} + \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}{4}C_{3111} + \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}C_{3333}, \quad (2.34)$$

$$C_{1133} = \frac{2\sqrt{3}-15\sqrt{2}-5\sqrt{6}-6}{12}C_{1111} + \frac{15\sqrt{2}-10\sqrt{3}-3\sqrt{6}+6}{12}C_{1222} + \frac{4\sqrt{3}}{3}C_{2111} - \\ - \frac{9\sqrt{2}+14\sqrt{3}+5\sqrt{6}-6}{12}C_{2222} + \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}{4}C_{3111} + \frac{6\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{3}C_{3333},$$

$$C_{1123} = \frac{6-3\sqrt{2}-26\sqrt{3}+14\sqrt{6}}{12}C_{1111} + \frac{3\sqrt{2}+34\sqrt{3}-10\sqrt{6}-6}{12}C_{1222} + \\ + \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}C_{2111} - \frac{102\sqrt{2}+82\sqrt{3}-61\sqrt{6}-138}{12}C_{2222} + \\ + \frac{34\sqrt{2}+30\sqrt{3}-19\sqrt{6}-46}{4}C_{3111} + (2\sqrt{3}-\sqrt{6})C_{3333},$$

$$C_{1223} = \frac{36-30\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}}{24}C_{1111} + \frac{30\sqrt{2}+\sqrt{3}+5\sqrt{6}-36}{24}C_{1222} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} C_{2111} - \frac{75\sqrt{2} + 52\sqrt{3} - 46\sqrt{6} - 108}{24} C_{2222} + \\
& + \frac{25\sqrt{2} + 20\sqrt{3} - 14\sqrt{6} - 36}{8} C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2} C_{3333}, \\
C_{1233} &= \frac{\sqrt{3} - 9\sqrt{2} - \sqrt{6} - 9}{6} C_{1111} + \frac{9\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 9}{6} C_{1222} + \frac{4\sqrt{3}}{3} C_{2111} + \\
& + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - 7\sqrt{6} - 9}{6} C_{2222} - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} - 3}{2} C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3} C_{3333}, \\
C_{1333} &= \frac{18 - 10\sqrt{3} + 7\sqrt{6}}{36} C_{1111} + \frac{6\sqrt{3} - \sqrt{6} - 6}{12} C_{1222} + \frac{\sqrt{6}}{3} C_{2111} - \\
& - \frac{63\sqrt{2} + 46\sqrt{3} - 40\sqrt{6} - 90}{36} C_{2222} + \frac{7\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 10}{4} C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{9} C_{3333}, \\
C_{2223} &= \frac{275\sqrt{2} - 278\sqrt{3} + 178\sqrt{6} - 326}{72} C_{1111} + \frac{978 - 825\sqrt{2} + 906\sqrt{3} - 466\sqrt{6}}{216} C_{1222} - \\
& - \frac{6\sqrt{3} - \sqrt{6}}{54} C_{2111} - \frac{546\sqrt{2} + 714\sqrt{3} - 437\sqrt{6} - 690}{216} C_{2222} + \\
& + \frac{182\sqrt{2} + 262\sqrt{3} - 123\sqrt{6} - 230}{72} C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} - 35\sqrt{6}}{54} C_{3333}, \\
C_{2233} &= \frac{-33\sqrt{2} + 14\sqrt{3} - 11\sqrt{6} + 6}{12} C_{1111} + \frac{33\sqrt{2} - 22\sqrt{3} + 3\sqrt{6} - 6}{12} C_{1222} + \frac{4\sqrt{3}}{3} C_{2111} + \\
& + \frac{9\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 11\sqrt{6} - 6}{12} C_{2222} - \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}{4} C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3} C_{3333}, \\
C_{2333} &= \frac{27\sqrt{2} - 40\sqrt{3} + 22\sqrt{6} - 12}{36} C_{1111} - \frac{9\sqrt{2} - 16\sqrt{3} + 6\sqrt{6} - 4}{12} C_{1222} + \frac{\sqrt{6}}{3} C_{2111} - \\
& - \frac{90\sqrt{2} + 76\sqrt{3} - 55\sqrt{6} - 120}{36} C_{2222} + \frac{30\sqrt{2} + 28\sqrt{3} - 17\sqrt{6} - 40}{12} C_{3111} + \\
& + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{9} C_{3333}.
\end{aligned}$$

Обращая 6 линейно независимых соотношений (2.34), соответствующих константам  $C_{1111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{3333}$ , получим выражения параметров модели (2.29)  $c_2^{\alpha\beta}$  через  $C_{ijkl}$ :

$$\begin{aligned}
c_2^{00} &= \frac{111\sqrt{2} + 93\sqrt{3} - 248\sqrt{6} - 795}{1953} C_{1111} + \frac{7086 - 444\sqrt{2} - 954\sqrt{3} + 1088\sqrt{6}}{1953} C_{1222} + \\
&+ \frac{516\sqrt{2} + 954\sqrt{3} - 1088\sqrt{6} - 6546}{1953} C_{2111} + \frac{1335 - 39\sqrt{2} - 93\sqrt{3} + 248\sqrt{6}}{1953} C_{2222} + \\
&+ \frac{568 - 40\sqrt{2}}{651} C_{3111} + \frac{97 - 16\sqrt{2}}{1302} C_{3333}, \\
c_2^{01} &= \frac{124\sqrt{3} - 1665\sqrt{2} + 248\sqrt{6} - 444}{2604} C_{1111} + \frac{1665\sqrt{2} - 220\sqrt{3} - 608\sqrt{6} + 444}{651} C_{1222} + \\
&+ \frac{220\sqrt{3} - 1935\sqrt{2} + 608\sqrt{6} - 516}{2604} C_{2111} + \frac{585\sqrt{2} - 124\sqrt{3} - 248\sqrt{6} + 156}{2604} C_{2222} + \\
&+ \frac{150\sqrt{2} + 40}{217} C_{3111} + \frac{30\sqrt{2} + 8}{217} C_{3333}, \tag{2.35} \\
c_2^{02} &= \frac{\sqrt{6}}{4} C_{1111} - \sqrt{6} C_{1222} + \sqrt{6} C_{2111} - \frac{\sqrt{6}}{4} C_{2222}, \\
c_2^{11} &= \frac{2220\sqrt{2} - 961\sqrt{3} - 186\sqrt{6} + 6234}{7812} C_{1111} + \\
&+ \frac{4565\sqrt{3} - 4440\sqrt{2} + 1332\sqrt{6} - 14421}{3906} C_{1222} + \\
&+ \frac{5160\sqrt{2} - 4565\sqrt{3} - 1332\sqrt{6} + 15915}{3906} C_{2111} + \frac{961\sqrt{3} - 780\sqrt{2} + 186\sqrt{6} - 3246}{7812} C_{2222} - \\
&- \frac{200\sqrt{2} + 632}{651} C_{3111} - \frac{40\sqrt{2} - 134}{651} C_{3333}, \\
c_2^{12} &= \frac{\sqrt{3}}{4} C_{1111} - \frac{5\sqrt{3}}{2} C_{1222} + \frac{5\sqrt{3}}{2} C_{2111} - \frac{\sqrt{3}}{4} C_{2222},
\end{aligned}$$

$$c_2^{22} = \frac{6 - \sqrt{3} - 2\sqrt{6}}{36} C_{1111} + \frac{5\sqrt{3} + 4\sqrt{6} - 3}{18} C_{1222} - \\ - \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3}{18} C_{2111} + \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 6}{36} C_{2222}.$$

Независимые материальные константы модели третьего порядка можно определить из тех же экспериментов, что и параметры определяющих соотношений второго порядка:

1) из экспериментов в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_1$  определяются параметры  $A_{1111}$ ,  $A_{1122}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{2211}$ ,  $C_{1111}$ ,  $C_{2111}$ . Для этого должны быть получены зависимости  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(S_{11})$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(S_{11})$ ;

2) из экспериментов в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_2$  определяются параметры  $A_{2222}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{1122}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{1222}$ . Для этого требуются экспериментальные зависимости  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(S_{22})$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(S_{22})$ ;

3) из экспериментов в плоскости  $Ox_1x_3$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_3$  по зависимостям  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(S_{33})$ ,  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}(S_{33})$  определяются параметры  $A_{1133}$ ,  $A_{3333}$ ,  $B_{3333}$ ,  $C_{3333}$ ;

4) из экспериментов в той же плоскости на растяжение и сжатие по оси  $Ox_1$  по зависимости  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}(S_{11})$  можно определить  $B_{3311}$ ,  $C_{3111}$ ;

5) из экспериментов в плоскости  $Ox_2x_3$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_3$  по зависимости  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(S_{33})$  определяется параметр  $A_{2233}$ ;

6) коэффициенты модели  $D_i^j$  определяются по результатам трёх экспериментов на сдвиг в плоскостях  $Ox_1x_2$  ( $D_0^1$ ,  $D_1^1$ ,  $D_2^1$ ),  $Ox_1x_3$  ( $D_0^2$ ,  $D_1^2$ ,  $D_2^2$ ),  $Ox_2x_3$  ( $D_0^3$ ,  $D_1^3$ ,  $D_2^3$ ), образованных главными направлениями анизотропии ортотропного материала. При этом эксперименты на сдвиг могут быть выполнены как опыты на двухосное растяжение-сжатие под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии.

Если константы  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$  найдены по результатам экспериментов, то параметры модели (2.29)  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$ ,  $c_2^{\alpha\beta}$  можно найти по формулам (2.25), (2.26), (2.35) соответственно.

В качестве независимых могут выступать и другие наборы по 6 констант  $B_{ijkl}$  и  $C_{ijkl}$ , однако, сделанный выбор объясняется тем, что параметры  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{3311}$ ,  $B_{3333}$  и  $C_{1111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{3333}$  можно определить по результатам одних и тех же механических экспериментов с макрообразцами.

Отметим, что в статье [87] предложена аналогичная нелинейная модель ортотропного материала, описывающая двухосное растяжение тканей с покрытием из ПВХ. Однако модель является двумерной, предназначена для описания напряжённо-деформированного состояния тканей при растяжении и не учитывает действие касательных напряжений.

Таким образом, построены два варианта нелинейных определяющих соотношений, учитывающих зависимости компонент тензора деформаций от вторых и третьих степеней компонент тензора напряжений. Предложенные модели позволяют описать нелинейные зависимости продольных и поперечных деформаций от напряжений при растяжении и сжатии, а также нелинейное поведение материала при чистом сдвиге.

Модель второго порядка содержит 18 материальных параметров. Модель третьего порядка имеет по сравнению с ней 9 дополнительных констант. Предложена система экспериментов для определения значений параметров моделей. Для нахождения констант обеих нелинейных моделей требуются одни и те же эксперименты.

## 3 ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

### 3.1 Задача о деформировании нелинейно-упругой ортотропной пластины

Программы экспериментов по идентификации материальных параметров моделей ортотропного материала, предложенные в пп. 2.2 и 2.3, включают опыты на одноосное растяжение и сжатие и на двухосное растяжение-сжатие в плоскостях, образованных главными осями анизотропии материала. Эксперименты, результаты которых опубликованы в работах [65, 81], также выполнены на образцах в виде пластин. В связи с этим требуется решить задачу об определении напряжённо-деформированного состояния в пластине из ортотропного материала при действии растягивающих, сжимающих и сдвиговых нагрузок. В работах [32–34] получены решения некоторых задач о деформировании пластин в рамках предложенных нелинейных моделей, а также найдены значения констант по данным экспериментов.

Рассмотрим ортотропную пластину, у которой одна ось анизотропии  $\vec{a}_3$  перпендикулярна плоскости, а две другие  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  лежат в плоскости пластины. Направим оси декартовой системы координат  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  вдоль сторон пластины (рисунок 3.1). Ориентация главных осей анизотропии определяется углом  $\varphi$  между базисными векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{e}_1$ .

Связь между базисными векторами главных осей ортотропии и базисными векторами системы координат  $Ox$  определяется выражениями

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi, \\ \vec{a}_2 &= -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi, \\ \vec{a}_3 &= \vec{e}_3.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\vec{e}_1 = \vec{a}_1 \cos \varphi - \vec{a}_2 \sin \varphi,$$

$$\vec{e}_2 = \vec{a}_1 \sin \varphi + \vec{a}_2 \cos \varphi, \quad (3.2)$$

$$\vec{e}_3 = \vec{a}_3.$$

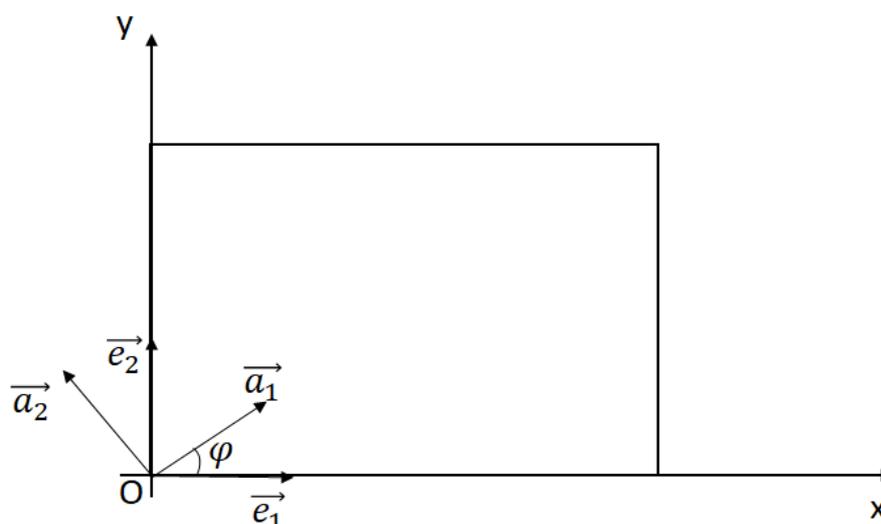


Рисунок 3.1 – Ориентация главных осей анизотропии

Пластина в общем случае нагружена нормальными и касательными усилиями, распределёнными по её краям (рисунок 3.2).

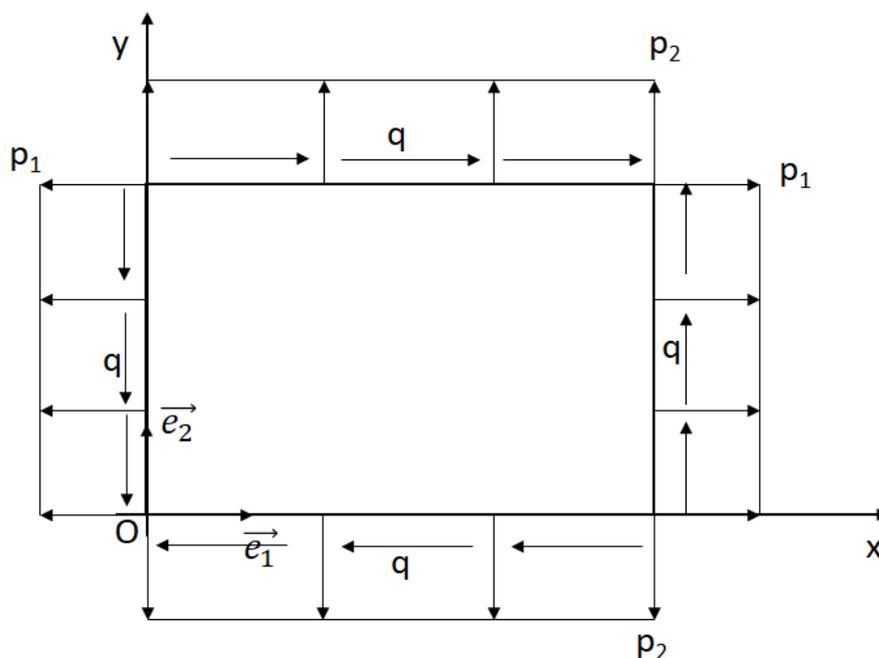


Рисунок 3.2 – Схема нагружения пластины

При заданной схеме нагружения пластины требуется определить деформации пластины как функции внешних воздействий и угла поворота главных осей анизотропии  $\varphi$ .

При такой схеме нагружения в пластине реализуется плоское напряжённое состояние, при котором компоненты тензора напряжений  $S_{xz} = S_{yz} = S_{zz} = 0$ . Тензор напряжений принимает вид

$$\mathbf{S} = S_{xx}\vec{e}_1\vec{e}_1 + S_{yy}\vec{e}_2\vec{e}_2 + S_{xy}(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1).$$

Пластина под действием приложенных нагрузок находится в состоянии равновесия. Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для решения системы уравнений равновесия (3.3) запишем граничные условия, соответствующие схеме нагружения (рисунок 3.2):

$$\begin{aligned} S_{xx}|_{x=0} = S_{xx}|_{x=a} = p_1, \quad S_{xy}|_{x=0} = S_{xy}|_{x=a} = q, \\ S_{xy}|_{y=0} = S_{xy}|_{y=b} = q, \quad S_{yy}|_{y=0} = S_{yy}|_{y=b} = p_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решением уравнений равновесия (3.3) с учетом граничных условий (3.4) является тензор напряжений

$$\mathbf{S} = p_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + q(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1), \quad (3.5)$$

который определяет однородное напряжённое состояние в пластине.

Определяющие соотношения (2.21), (2.22), (2.32) записаны в главных осях анизотропии материала. Для того, чтобы найти по ним компоненты тензора деформаций, надо записать тензор напряжений (3.5) в главных осях анизотропии.

Выразим компоненты тензора напряжений в главных осях анизотропии  $S_{11}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{12}$  через его компоненты  $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ,  $S_{xy}$  в базисе  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ , используя связь (3.2) между базисными векторами:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{xx} \cos^2 \varphi + S_{yy} \sin^2 \varphi + S_{xy} \sin 2\varphi, & S_{22} &= S_{xx} \sin^2 \varphi + S_{yy} \cos^2 \varphi - S_{xy} \sin 2\varphi, \\ S_{12} &= \frac{1}{2}(S_{yy} - S_{xx}) \sin 2\varphi + S_{xy} \cos 2\varphi, & S_{13} &= S_{23} = S_{33} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставим в соотношения (3.6) компоненты тензора напряжений (3.5) и получим выражения для напряжений в главных осях анизотропии:

$$\begin{aligned} S_{11} &= p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi, & S_{22} &= p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi, \\ S_{12} &= \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi, & S_{13} &= S_{23} = S_{33} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Найдём компоненты тензора  $\varepsilon$ , описывающего деформации в точках пластины, используя выражения (3.7) определяющие соотношения первого порядка (2.22):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= A_{1111}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{1122}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi), \\ \varepsilon_{22} &= A_{1122}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{2222}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi), \\ \varepsilon_{33} &= A_{1133}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{2233}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi), \\ \varepsilon_{12} &= 2D_0^1 \left( \frac{1}{2}(p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi \right), & \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{23} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для того, чтобы найти компоненты тензора деформаций в базисе  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ , используем соотношения (3.1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{11} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{22} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{12} \sin 2\varphi, & \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{11} \sin^2 \varphi + \varepsilon_{22} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{12} \sin 2\varphi, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \sin 2\varphi + \varepsilon_{12} \cos 2\varphi, & \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{33}, & \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{33} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

или, с учётом (3.8):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} = & \left( A_{1111}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + \right. \\ & \left. + A_{1122}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) \right) \cos^2 \varphi + \\ & + \left( A_{1122}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{2222}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) \right) \sin^2 \varphi - \\ & - 2D_0^1 \left( \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi \right) \sin 2\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} = & \left( A_{1111}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + \right. \\ & \left. + A_{1122}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) \right) \sin^2 \varphi + \\ & + \left( A_{1122}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{2222}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) \right) \cos^2 \varphi + \\ & + 2D_0^1 \left( \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi \right) \sin 2\varphi,\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{zz} = A_{1133}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{2233}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} = & \frac{1}{2} \left( A_{1111}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{1122}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) - \right. \\ & - A_{1122}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) - A_{2222}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) \left. \right) \sin 2\varphi + \\ & + 2D_0^1 \left( \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi \right) \cos 2\varphi,\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

Перегруппируем слагаемые в этих выражениях и получим компоненты тензора деформаций в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} = & \left( A_{1111} \cos^4 \varphi + A_{2222} \sin^4 \varphi + \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin^2 2\varphi \right) p_1 + \\ & + \left( A_{1122} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + \frac{1}{4} (A_{1111} + A_{2222} - 4D_0^1) \sin^2 2\varphi \right) p_2 + \\ & + \left( (A_{1111} \cos^2 \varphi - A_{2222} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin 4\varphi \right) q,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy} = & \left( A_{1122}(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + \frac{1}{4}(A_{1111} + A_{2222} - 4D_0^1)\sin^2 2\varphi \right) p_1 + \\
& + \left( A_{1111}\sin^4 \varphi + A_{2222}\cos^4 \varphi + \frac{1}{2}(A_{1122} + 2D_0^1)\sin^2 2\varphi \right) p_2 + \\
& + \left( (A_{1111}\sin^2 \varphi - A_{2222}\cos^2 \varphi)\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(A_{1122} + 2D_0^1)\sin 4\varphi \right) q, \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz} = & (A_{1133}\cos^2 \varphi + A_{2233}\sin^2 \varphi)p_1 + (A_{1133}\sin^2 \varphi + A_{2233}\cos^2 \varphi)p_2 + \\
& + (A_{1133} - A_{2233})\sin 2\varphi q,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} = & \left( \frac{1}{2}(A_{1111}\cos^2 \varphi - A_{2222}\sin^2 \varphi)\sin 2\varphi - \frac{1}{4}(A_{1122} + 2D_0^1)\sin 4\varphi \right) p_1 + \\
& + \left( \frac{1}{2}(A_{1111}\sin^2 \varphi - A_{2222}\cos^2 \varphi)\sin 2\varphi + \frac{1}{4}(A_{1122} + 2D_0^1)\sin 4\varphi \right) p_2 + \\
& + \left( \frac{1}{2}(A_{1111} + A_{2222} - 2A_{1122})\sin^2 2\varphi + 2D_0^1\cos^2 2\varphi \right) q,
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

При описании напряжённо-деформированного состояния определяющими соотношениями второго порядка (2.21) компоненты тензора  $\varepsilon$  в главных осях анизотропии запишутся в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} = & A_{1111}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{1122}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& + B_{1111}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^2 + B_{1122}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^2 + \\
& + 2B_{2211}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi), \\
\varepsilon_{22} = & A_{1122}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{2222}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& + B_{2211}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^2 + B_{2222}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^2 + \\
& + 2B_{1122}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi), \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{33} = A_{1133}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{2233}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) +$$

$$+B_{3311}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^2 + B_{3322}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^2 + \\ + B_{1123}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi),$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \left( D_0^1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \left| \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi \right| \right) \left( \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi \right),$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

Компоненты тензора  $\varepsilon$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , найденные по его компонентам (3.11) в соответствии с выражениями (3.9), принимают вид

$$\varepsilon_{xx} = \left[ A_{1111} \cos^4 \varphi + A_{2222} \sin^4 \varphi + \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin^2 2\varphi \right] p_1 + \\ + \left[ A_{1122} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + \frac{1}{4} (A_{1111} + A_{2222} - 4D_0^1) \sin^2 2\varphi \right] p_2 + \\ + \left[ (A_{1111} \cos^2 \varphi - A_{2222} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin 4\varphi \right] q + \\ + \left[ B_{1111} \cos^6 \varphi + B_{2222} \sin^6 \varphi + \frac{3}{4} (B_{1122} \sin^2 \varphi + B_{2211} \cos^2 \varphi) \sin^2 2\varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_1^2 + \\ + \left[ ((B_{1111} + 2B_{1122}) \sin^2 \varphi + (B_{2222} + B_{2211}) \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\ \left. + B_{1122} \cos^6 \varphi + B_{2211} \sin^6 \varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_2^2 + \\ + 4 \left[ (B_{1111} + B_{1122} - 2B_{2211}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + (B_{2222} + B_{2211} - 2B_{1122}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi \mp \right. \\ \left. \mp \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \cos^2 2\varphi \sin 2\varphi \right] q^2 + \\ + \left[ (2B_{1111} + 3B_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + (2B_{2222} + 3B_{2211}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\ \left. + B_{1122} \sin^6 \varphi + B_{2211} \cos^6 \varphi \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_1 p_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ 2 \left( B_{1111} \cos^4 \varphi - B_{2222} \sin^4 \varphi + (B_{2211} - B_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right) \sin 2\varphi - \right. \\
& \quad \left. - \left( B_{1122} \sin^2 \varphi + B_{2211} \cos^2 \varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin 2\varphi \right) \sin 4\varphi \right] p_1 q + \\
& + \left[ 2 \left( (B_{1111} - B_{2222}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{2211} \sin^4 \varphi - B_{1122} \cos^4 \varphi \right) \sin 2\varphi + \right. \\
& \quad \left. + \left( B_{1122} \sin^2 \varphi + B_{2211} \cos^2 \varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin 2\varphi \right) \sin 4\varphi \right] p_2 q ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy} = & \left[ A_{1122} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + \frac{1}{4} (A_{1111} + A_{2222} - 4D_0^1) \sin^2 2\varphi \right] p_1 + \\
& + \left[ A_{1111} \sin^4 \varphi + A_{2222} \cos^4 \varphi + \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin^2 2\varphi \right] p_2 + \\
& + \left[ (A_{1111} \sin^2 \varphi - A_{2222} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin 4\varphi \right] q + \\
& + \left[ ((B_{1111} + 2B_{1122}) \cos^2 \varphi + (B_{2222} + B_{2211}) \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + B_{1122} \sin^6 \varphi + B_{2211} \cos^6 \varphi \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_1^2 + \\
& + \left[ B_{1111} \sin^6 \varphi + B_{2222} \cos^6 \varphi + \frac{3}{4} (B_{1122} \cos^2 \varphi + B_{2211} \sin^2 \varphi) \sin^2 2\varphi \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_2^2 + \\
& + 4 \left[ (B_{1111} + B_{1122} - 2B_{2211}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + (B_{2222} + B_{2211} - 2B_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi \pm \right. \\
& \quad \left. \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \cos^2 2\varphi \sin 2\varphi \right] q^2 + \\
& + \left[ (2B_{1111} + 3B_{1122}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + (2B_{2222} + 3B_{2211}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + B_{1122} \cos^6 \varphi + B_{2211} \sin^6 \varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_1 p_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ 2 \left( (B_{1111} - B_{2222}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{2211} \cos^4 \varphi - B_{1122} \sin^4 \varphi \right) \sin 2\varphi - \right. \\
& \quad \left. - \left( B_{1122} \cos^2 \varphi + B_{2211} \sin^2 \varphi \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin 2\varphi \right) \sin 4\varphi \right] p_1 q + \\
& + \left[ 2 \left( B_{1111} \sin^4 \varphi - B_{2222} \cos^4 \varphi + (B_{2211} - B_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right) \sin 2\varphi + \right. \\
& \quad \left. + \left( B_{1122} \cos^2 \varphi + B_{2211} \sin^2 \varphi \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin 2\varphi \right) \sin 4\varphi \right] p_2 q ,
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{zz} = (A_{1133} \cos^2 \varphi + A_{2233} \sin^2 \varphi) p_1 + (A_{1133} \sin^2 \varphi + A_{2233} \cos^2 \varphi) p_2 + \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
& + (A_{1133} - A_{2233}) \sin 2\varphi q + \left( B_{3311} \cos^4 \varphi + B_{3322} \sin^4 \varphi + \frac{1}{2} B_{1123} \sin^2 2\varphi \right) p_1^2 + \\
& + \left( B_{3311} \sin^4 \varphi + B_{3322} \cos^4 \varphi + \frac{1}{2} B_{1123} \sin^2 2\varphi \right) p_2^2 + \\
& + (B_{3311} + B_{3322} - 2B_{1123}) \sin^2 2\varphi q^2 + \\
& + 2 \left[ (B_{3311} + B_{3322}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{1123} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \right] p_1 p_2 + \\
& + \left[ 2 (B_{3311} \cos^2 \varphi - B_{3322} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - B_{1123} \sin 4\varphi \right] p_1 q + \\
& + \left[ 2 (B_{3311} \sin^2 \varphi - B_{3322} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi + B_{1123} \sin 4\varphi \right] p_2 q ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} = & \left( \frac{1}{2} (A_{1111} \cos^2 \varphi - A_{2222} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{4} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin 4\varphi \right) p_1 + \\
& + \left( \frac{1}{2} (A_{1111} \sin^2 \varphi - A_{2222} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi + \frac{1}{4} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin 4\varphi \right) p_2 + \\
& + \left( \frac{1}{2} (A_{1111} + A_{2222} - 2A_{1122}) \sin^2 2\varphi + 2D_0^1 \cos^2 2\varphi \right) q + \\
& + \frac{1}{2} \left[ (B_{1111} - B_{2211}) \cos^4 \varphi - (B_{2222} - B_{1122}) \sin^4 \varphi + \frac{1}{2} (B_{2211} - B_{1122}) \sin^2 2\varphi \pm \right. \\
& \quad \left. \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin 4\varphi \right] \sin 2\varphi p_1^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[ (B_{1111} - B_{2211}) \sin^4 \varphi - (B_{2222} - B_{1122}) \cos^4 \varphi + \frac{1}{2} (B_{2211} - B_{1122}) \sin^2 2\varphi \pm \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin 4\varphi \right] \sin 2\varphi p_2^2 + \\
& + \left[ \frac{1}{2} (B_{1111} - B_{2222} + 3B_{1122} - 3B_{2211}) \sin^3 2\varphi \pm 3\sqrt{2} D_1^1 \cos^3 2\varphi \right] q^2 + \\
& + \left[ (B_{1111} - B_{2222} + B_{1122} - B_{2211}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + (B_{2211} - B_{1122}) (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \mp \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \mp \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin 4\varphi \right] \sin 2\varphi p_1 p_2 + \\
& + \left[ (B_{1111} - B_{2211}) \cos^2 \varphi \sin 2\varphi + (B_{2222} - B_{1122}) \sin^2 \varphi \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (B_{1122} - B_{2211}) \sin 4\varphi \mp \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \mp 3\sqrt{2} D_1^1 \cos^2 2\varphi \right] \sin 2\varphi p_1 q + \\
& + \left[ (B_{1111} - B_{2211}) \sin^2 \varphi \sin 2\varphi + (B_{2222} - B_{1122}) \cos^2 \varphi \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (B_{2211} - B_{1122}) \sin 4\varphi \pm \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \pm 3\sqrt{2} D_1^1 \cos^2 2\varphi \right] \sin 2\varphi p_2 q .
\end{aligned}$$

При использовании определяющих соотношений третьего порядка (2.32)

компоненты тензора  $\varepsilon$  в главных осях анизотропии имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} = & A_{1111} (p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{1122} (p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& + B_{1111} (p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^2 + B_{1122} (p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^2 + \\
& + 2B_{2211} (p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) (p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& + C_{1111} (p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^3 + \\
& + 3C_{2111} (p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^2 (p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& + C_{1122} (p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) (p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^2 \\
& + C_{1222} (p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^3 ,
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{22} = A_{1122} (p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{2222} (p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) +$$

$$\begin{aligned}
& +B_{2211}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^2 + B_{2222}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^2 + \\
& +2B_{1122}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& +C_{2111}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^3 + \\
& +C_{1122}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^2(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& +3C_{1222}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^2 + \quad (3.13) \\
& +C_{2222}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{33} = & A_{1133}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi) + A_{2233}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& +B_{3311}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^2 + B_{3322}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^2 + \\
& +B_{1123}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& +C_{3111}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^3 + \\
& +C_{2113}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)^2(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi) + \\
& +C_{1223}(p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi + q \sin 2\varphi)(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^2 \\
& +C_{3222}(p_1 \sin^2 \varphi + p_2 \cos^2 \varphi - q \sin 2\varphi)^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12} = & 2 \left( D_0^1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \left| \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi \right| + \right. \\
& \left. + 4D_2^1 \left( \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi \right)^2 \right) \left( \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \sin 2\varphi + q \cos 2\varphi \right).
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

Используя выражения (3.9), по компонентам (3.13) найдём компоненты тензора  $\varepsilon$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} = & \left[ A_{1111} \cos^4 \varphi + A_{2222} \sin^4 \varphi + \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin^2 2\varphi \right] p_1 + \\
& + \left[ A_{1122} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + \frac{1}{4} (A_{1111} + A_{2222} - 4D_0^1) \sin^2 2\varphi \right] p_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \left( A_{1111} \cos^2 \varphi - A_{2222} \sin^2 \varphi \right) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \left( A_{1122} + 2D_0^1 \right) \sin 4\varphi \right] q + \\
& + \left[ B_{1111} \cos^6 \varphi + B_{2222} \sin^6 \varphi + \frac{3}{4} \left( B_{1122} \sin^2 \varphi + B_{2211} \cos^2 \varphi \right) \sin^2 2\varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_1^2 + \\
& + \left[ \left( (B_{1111} + 2B_{1122}) \sin^2 \varphi + (B_{2222} + B_{2211}) \cos^2 \varphi \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + B_{1122} \cos^6 \varphi + B_{2211} \sin^6 \varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_2^2 + \\
& + 4 \left[ (B_{1111} + B_{1122} - 2B_{2211}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + (B_{2222} + B_{2211} - 2B_{1122}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi \mp \right. \\
& \quad \left. \mp \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \cos^2 2\varphi \sin 2\varphi \right] q^2 + \\
& + \left[ (2B_{1111} + 3B_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + (2B_{2222} + 3B_{2211}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + B_{1122} \sin^6 \varphi + B_{2211} \cos^6 \varphi \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_1 p_2 + \\
& + \left[ 2 \left( B_{1111} \cos^4 \varphi - B_{2222} \sin^4 \varphi + (B_{2211} - B_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right) \sin 2\varphi - \right. \\
& \quad \left. - \left( B_{1122} \sin^2 \varphi + B_{2211} \cos^2 \varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin 2\varphi \right) \sin 4\varphi \right] p_1 q + \\
& + \left[ 2 \left( (B_{1111} - B_{2222}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{2211} \sin^4 \varphi - B_{1122} \cos^4 \varphi \right) \sin 2\varphi + \right. \\
& \quad \left. + \left( B_{1122} \sin^2 \varphi + B_{2211} \cos^2 \varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin 2\varphi \right) \sin 4\varphi \right] p_2 q + \\
& + \left[ C_{1111} \cos^8 \varphi + C_{2222} \sin^8 \varphi + 4C_{2111} \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + 2 \left( C_{1122} + 4D_2^1 \right) \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + 4C_{1222} \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi \right] p_1^3 + \\
& + \left[ C_{2111} \sin^8 \varphi + C_{1222} \cos^8 \varphi + (C_{1111} + C_{1122}) \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (C_{2222} + C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + (3C_{2111} + 3C_{1222} - 8D_2^1) \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \right] p_2^3 + \\
& + \left[ (C_{3111} - C_{2113} + C_{1223} - C_{3222}) \cos^2 \varphi \sin^2 2\varphi + \right. \\
& \quad \left. + (C_{3111} - C_{2113} + C_{1223} - C_{3222}) \sin^2 \varphi \sin^2 2\varphi - 4D_2^1 \cos^3 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot q^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3 \left[ C_{1222} \sin^8 \varphi + C_{2111} \cos^8 \varphi + (C_{1122} + C_{2222}) \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (C_{1111} + C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + (3C_{2111} + 3C_{1222} - 8D_2^1) \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \right] p_1^2 p_2 + \\
& + \left[ C_{1122} (\sin^8 \varphi + \cos^8 \varphi) + 6(C_{2111} + C_{1222}) \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& + 6(C_{2111} + C_{1222}) \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + (3C_{1111} + 3C_{2222} + 4C_{1122} + 24D_2^1) \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \left. \right] p_1 p_2^2 + \\
& + 3 \left[ (C_{1222} - C_{2222}) \sin^6 \varphi + (C_{1111} - C_{2111}) \cos^6 \varphi + (C_{1122} - 3C_{1222}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (3C_{2111} - C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi - D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot p_1^2 q + \\
& + \left[ (3C_{2222} + C_{1122} - 6C_{1222}) \sin^4 \varphi + (3C_{1111} + C_{1122} - 6C_{2111}) \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (6C_{2111} + 6C_{1222} - 4C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 6D_2^1 \cos^2 2\varphi \right] \sin^2 2\varphi \cdot p_1 q^2 + \\
& + \left[ (3C_{2111} - C_{1122}) \sin^6 \varphi + (C_{1122} - 3C_{1222}) \cos^6 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (3C_{1111} + 2C_{1122} - 6C_{1222} - 3C_{2111}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& + (-3C_{2222} - 2C_{1122} + 6C_{2111} + 3C_{1222}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi - 3D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \left. \right] \sin 2\varphi \cdot p_2^2 q + \\
& + \left[ (3C_{2111} - 2C_{1122} + 3C_{1222}) \sin^4 \varphi + (3C_{2111} - 2C_{1122} + 3C_{1222}) \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (3C_{1111} + 3C_{2222} - 6C_{2111} - 6C_{1222} + 2C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \right. \\
& \quad \left. - 6D_2^1 \cos^2 2\varphi \right] \sin^2 2\varphi \cdot p_2 q^2 + \\
& + 2 \left[ (C_{1122} - 3C_{1222}) \sin^6 \varphi + (3C_{2111} - C_{1122}) \cos^6 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (6C_{2111} - 2C_{1122} + 3C_{1222} - 3C_{2222}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (3C_{1111} - 3C_{2111} + 2C_{1122} - 6C_{1222}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi - \right. \\
& \quad \left. - 3D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot p_1 p_2 q;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy} = & \left[ A_{1122} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + \frac{1}{4} (A_{1111} + A_{2222} - 4D_0^1) \sin^2 2\varphi \right] p_1 + \\
& + \left[ A_{1111} \sin^4 \varphi + A_{2222} \cos^4 \varphi + \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \sin^2 2\varphi \right] p_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \left( A_{1111} \sin^2 \varphi - A_{2222} \cos^2 \varphi \right) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \left( A_{1122} + 2D_0^1 \right) \sin 4\varphi \right] q + \\
& + \left[ \left( (B_{1111} + 2B_{1122}) \cos^2 \varphi + (B_{2222} + B_{2211}) \sin^2 \varphi \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + B_{1122} \sin^6 \varphi + B_{2211} \cos^6 \varphi \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_1^2 + \\
& + \left[ B_{1111} \sin^6 \varphi + B_{2222} \cos^6 \varphi + \frac{3}{4} \left( B_{1122} \cos^2 \varphi + B_{2211} \sin^2 \varphi \right) \sin^2 2\varphi \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_2^2 + \\
& + 4 \left[ \left( B_{1111} + B_{1122} - 2B_{2211} \right) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \left( B_{2222} + B_{2211} - 2B_{1122} \right) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi \pm \right. \\
& \quad \left. \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \cos^2 2\varphi \sin 2\varphi \right] q^2 + \\
& + \left[ \left( 2B_{1111} + 3B_{1122} \right) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \left( 2B_{2222} + 3B_{2211} \right) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + B_{1122} \cos^6 \varphi + B_{2211} \sin^6 \varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin^3 2\varphi \right] p_1 p_2 + \\
& + \left[ 2 \left( (B_{1111} - B_{2222}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{2211} \cos^4 \varphi - B_{1122} \sin^4 \varphi \right) \sin 2\varphi - \right. \\
& \quad \left. - \left( B_{1122} \cos^2 \varphi + B_{2211} \sin^2 \varphi \mp \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin 2\varphi \right) \sin 4\varphi \right] p_1 q + \\
& + \left[ 2 \left( B_{1111} \sin^4 \varphi - B_{2222} \cos^4 \varphi + (B_{2211} - B_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right) \sin 2\varphi + \right. \\
& \quad \left. + \left( B_{1122} \cos^2 \varphi + B_{2211} \sin^2 \varphi \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 \sin 2\varphi \right) \sin 4\varphi \right] p_2 q + \\
& + \left[ C_{1222} \sin^8 \varphi + C_{2111} \cos^8 \varphi + (C_{1111} + C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + \left( 3C_{1222} + 3C_{2111} - 8D_2^1 \right) \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi + (C_{1122} + C_{2222}) \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi \right] p_1^3 + \\
& + \left[ C_{1111} \sin^8 \varphi + C_{2222} \cos^8 \varphi + 3(C_{2111} + C_{1222}) \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (C_{2111} + C_{1222}) \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + 2(C_{1122} + 4D_2^1) \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \right] p_2^3 + \\
& + \left[ (C_{3111} - C_{2113} + C_{1223} - C_{3222}) \sin^2 \varphi \sin^2 2\varphi + \right. \\
& \quad \left. + (C_{3111} - C_{2113} + C_{1223} - C_{3222}) \cos^2 \varphi \sin^2 2\varphi - 4D_2^1 \cos^3 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot q^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ C_{1122} (\sin^8 \varphi + \cos^8 \varphi) + 6(C_{2111} + C_{1222}) \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad + 6(C_{2111} + C_{1222}) \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + \\
& \quad \left. + (3C_{1111} + 3C_{2222} + 4C_{1122} + 24D_2^1) \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \right] p_1^2 p_2 + \\
& + 3 \left[ C_{2111} \sin^8 \varphi + C_{1222} \cos^8 \varphi + (C_{1111} + C_{1122}) \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (C_{2222} + C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^6 \varphi + (3C_{2111} + 3C_{1222} - 8D_2^1) \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \right] p_1 p_2^2 + \\
& + \left[ (C_{1122} - 3C_{1222}) \sin^6 \varphi + (3C_{2111} - C_{1122}) \cos^6 \varphi + \right. \\
& \quad + (-3C_{2222} - 2C_{1122} + 6C_{2111} + 3C_{1222}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \\
& \quad \left. + (3C_{1111} + 2C_{1122} - 6C_{1222} - 3C_{2111}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + 3D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot p_1^2 q + \\
& + \left[ (3C_{2111} - 2C_{1122} + 3C_{1222}) \sin^4 \varphi + (3C_{2111} - 2C_{1122} + 3C_{1222}) \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad + (3C_{1111} + 3C_{2222} - 6C_{2111} - 6C_{1222} + 2C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\
& \quad \left. + 6D_2^1 \cos^2 2\varphi \right] \sin^2 2\varphi \cdot p_1 q^2 + \\
& + 3 \left[ (C_{1111} - C_{2111}) \sin^6 \varphi + (C_{1222} - C_{2222}) \cos^6 \varphi + (3C_{2111} - C_{1122}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (C_{1122} - 3C_{1222}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot p_2^2 q + \\
& + \left[ (3C_{1111} + C_{1122} - 6C_{2111}) \sin^4 \varphi + (3C_{2222} + C_{1122} - 6C_{1222}) \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (6C_{2111} + 6C_{1222} - 4C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 6D_2^1 \cos^2 2\varphi \right] \sin^2 2\varphi \cdot p_2 q^2 + \\
& + 2 \left[ (3C_{2111} - C_{1122}) \sin^6 \varphi + (C_{1122} - 3C_{1222}) \cos^6 \varphi + \right. \\
& \quad + (3C_{1111} - 3C_{2111} + 2C_{1122} - 6C_{1222}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \\
& \quad + (6C_{2111} - 2C_{1122} + 3C_{1222} - 3C_{2222}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi - \\
& \quad \left. + 3D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot p_1 p_2 q
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{zz} = (A_{1133} \cos^2 \varphi + A_{2233} \sin^2 \varphi) p_1 + (A_{1133} \sin^2 \varphi + A_{2233} \cos^2 \varphi) p_2 + \quad (3.14)$$

$$+ (A_{1133} - A_{2233}) \sin 2\varphi q + \left( B_{3311} \cos^4 \varphi + B_{3322} \sin^4 \varphi + \frac{1}{2} B_{1123} \sin^2 2\varphi \right) p_1^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( B_{3311} \sin^4 \varphi + B_{3322} \cos^4 \varphi + \frac{1}{2} B_{1123} \sin^2 2\varphi \right) p_2^2 + \\
& + (B_{3311} + B_{3322} - 2B_{1123}) \sin^2 2\varphi q^2 + \\
& + 2 \left[ (B_{3311} + B_{3322}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{1123} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \right] p_1 p_2 + \\
& + \left[ 2 (B_{3311} \cos^2 \varphi - B_{3322} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - B_{1123} \sin 4\varphi \right] p_1 q + \\
& + \left[ 2 (B_{3311} \sin^2 \varphi - B_{3322} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi + B_{1123} \sin 4\varphi \right] p_2 q + \\
& + (C_{3111} \cos^6 \varphi + C_{2113} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + C_{1223} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + C_{3222} \sin^6 \varphi) p_1^3 + \\
& + (C_{3111} \sin^6 \varphi + C_{2113} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + C_{1223} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + C_{3222} \cos^6 \varphi) p_2^3 + \\
& + (C_{3111} - C_{2113} + C_{1223} - C_{3222}) \sin^3 2\varphi \cdot q^3 + \\
& + (3C_{3111} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + 2C_{2113} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + C_{2113} \cos^6 \varphi + \\
& \quad + 2C_{1223} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + C_{1223} \sin^6 \varphi + 3C_{3222} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi) p_1^2 p_2 + \\
& + (3C_{3111} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + 2C_{2113} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + C_{2113} \sin^6 \varphi + \\
& \quad + 2C_{1223} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + C_{1223} \cos^6 \varphi + 3C_{3222} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi) p_1 p_2^2 + \\
& + (3C_{3111} \cos^4 \varphi + 2C_{2113} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - C_{2113} \cos^4 \varphi + \\
& \quad + C_{1223} \sin^4 \varphi - 2C_{1223} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 3C_{3222} \sin^4 \varphi) \sin 2\varphi \cdot p_1^2 q + \\
& + (3C_{3111} \cos^2 \varphi - 2C_{2113} \cos^2 \varphi + C_{2113} \sin^2 \varphi + \\
& \quad + C_{1223} \cos^2 \varphi - 2C_{1223} \sin^2 \varphi + 3C_{3222} \sin^2 \varphi) \sin^2 2\varphi \cdot p_1 q^2 + \\
& + (3C_{3111} \sin^4 \varphi + 2C_{2113} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - C_{2113} \sin^4 \varphi + \\
& \quad + C_{1223} \cos^4 \varphi - 2C_{1223} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 3C_{3222} \cos^4 \varphi) \sin 2\varphi \cdot p_2^2 q + \\
& + (3C_{3111} \sin^2 \varphi - 2C_{2113} \sin^2 \varphi + C_{2113} \cos^2 \varphi + \\
& \quad + C_{1223} \sin^2 \varphi - 2C_{1223} \cos^2 \varphi + 3C_{3222} \cos^2 \varphi) \sin^2 2\varphi \cdot p_2 q^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\left(3C_{3111}\sin^2\varphi\cos^2\varphi+C_{2113}\sin^4\varphi+C_{2113}\cos^4\varphi-C_{2113}\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\right. \\
& \left.-C_{1223}\sin^4\varphi-C_{1223}\cos^4\varphi+C_{1223}\sin^2\varphi\cos^2\varphi-3C_{3222}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right)\sin 2\varphi\cdot p_1p_2q', \\
\varepsilon_{xy} = & \left(\frac{1}{2}(A_{1111}\cos^2\varphi-A_{2222}\sin^2\varphi)\sin 2\varphi-\frac{1}{4}(A_{1122}+2D_0^1)\sin 4\varphi\right)p_1+ \\
& +\left(\frac{1}{2}(A_{1111}\sin^2\varphi-A_{2222}\cos^2\varphi)\sin 2\varphi+\frac{1}{4}(A_{1122}+2D_0^1)\sin 4\varphi\right)p_2+ \\
& +\left(\frac{1}{2}(A_{1111}+A_{2222}-2A_{1122})\sin^2 2\varphi+2D_0^1\cos^2 2\varphi\right)q+ \\
& +\frac{1}{2}\left[\left(B_{1111}-B_{2211}\right)\cos^4\varphi-\left(B_{2222}-B_{1122}\right)\sin^4\varphi+\frac{1}{2}\left(B_{2211}-B_{1122}\right)\sin^2 2\varphi\pm\right. \\
& \left.\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}D_1^1\sin 4\varphi\right]\sin 2\varphi\cdot p_1^2+ \\
& +\frac{1}{2}\left[\left(B_{1111}-B_{2211}\right)\sin^4\varphi-\left(B_{2222}-B_{1122}\right)\cos^4\varphi+\frac{1}{2}\left(B_{2211}-B_{1122}\right)\sin^2 2\varphi\pm\right. \\
& \left.\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}D_1^1\sin 4\varphi\right]\sin 2\varphi\cdot p_2^2+ \\
& +\left[\frac{1}{2}\left(B_{1111}-B_{2222}+3B_{1122}-3B_{2211}\right)\sin^3 2\varphi\pm 3\sqrt{2}D_1^1\cos^3 2\varphi\right]q^2+ \\
& +\left[\left(B_{1111}-B_{2222}+B_{1122}-B_{2211}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\left(B_{2211}-B_{1122}\right)\left(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi\right)\mp\right. \\
& \left.\mp\frac{3\sqrt{2}}{2}D_1^1\sin 4\varphi\right]\sin 2\varphi\cdot p_1p_2+ \\
& +\left[\left(B_{1111}-B_{2211}\right)\cos^2\varphi\sin 2\varphi+\left(B_{2222}-B_{1122}\right)\sin^2\varphi\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\left(B_{1122}-B_{2211}\right)\sin 4\varphi\mp\right. \\
& \left.\mp 3\sqrt{2}D_1^1\cos^2 2\varphi\right]\sin 2\varphi\cdot p_1q+ \\
& +\left[\left(B_{1111}-B_{2211}\right)\sin^2\varphi\sin 2\varphi+\left(B_{2222}-B_{1122}\right)\cos^2\varphi\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\left(B_{2211}-B_{1122}\right)\sin 4\varphi\pm\right. \\
& \left.\pm 3\sqrt{2}D_1^1\cos^2 2\varphi\right]\sin 2\varphi\cdot p_2q+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[ (C_{1111} - C_{2111}) \cos^6 \varphi + (3C_{2111} - C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad + (C_{1122} - 3C_{1222}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + (C_{1222} - C_{2222}) \sin^6 \varphi - \\
& \quad \left. - D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot p_1^3 + \\
& + \frac{1}{2} \left[ (C_{1111} - C_{2111}) \sin^6 \varphi + (3C_{2111} - C_{1122}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad + (C_{1122} - 3C_{1222}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + (C_{1222} - C_{2222}) \cos^6 \varphi + \\
& \quad \left. + D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot p_2^3 + \\
& + \frac{1}{2} \left[ (C_{1111} + C_{2222} - 4C_{2111} + 2C_{1122} - 4C_{1222}) \sin^4 2\varphi + 8D_2^1 \cos^4 \varphi \right] q^3 + \\
& + \frac{1}{2} \left[ (C_{1122} - 3C_{1222}) \sin^6 \varphi + (3C_{2111} - C_{1122}) \cos^6 \varphi + \right. \\
& \quad + (6C_{2111} + 3C_{1222} - 2C_{1122} - C_{2222}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \\
& \quad + (3C_{1111} + 2C_{1122} - 3C_{2111} - 6C_{1222}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \\
& \quad \left. + 3D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot p_1^2 p_2 + \\
& + \frac{1}{2} \left[ (3C_{2111} - C_{1122}) \sin^6 \varphi + (C_{1122} - 3C_{1222}) \cos^6 \varphi + \right. \\
& \quad + (3C_{1111} + 2C_{1122} - 3C_{2111} - 6C_{1222}) \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \\
& \quad + (6C_{2111} + 3C_{1222} - 2C_{1122} - C_{2222}) \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi + \\
& \quad \left. + 3D_2^1 \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi \cdot p_1 p_2^2 + \\
& + \frac{1}{2} \left[ (3C_{2222} + C_{1122} - 6C_{1222}) \sin^4 \varphi + (3C_{1111} + C_{1122} - 6C_{2111}) \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (6C_{2111} + 6C_{1222} - 4C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 6D_2^1 \cos^2 2\varphi \right] \sin^2 2\varphi \cdot p_1^2 q + \\
& + \frac{3}{2} \left[ (C_{2111} + 3C_{1222} - C_{1122} - C_{2222}) \sin^2 \varphi + (C_{1111} - 3C_{2111} + C_{1122} - C_{1222}) \cos^2 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + 4D_2^1 \cos^3 2\varphi \right] \sin^3 2\varphi \cdot p_1 q^2 + \\
& + \frac{1}{2} \left[ (3C_{1111} + C_{1122} - 6C_{2111}) \sin^4 \varphi + (3C_{2222} + C_{1122} - 6C_{1222}) \cos^4 \varphi + \right. \\
& \quad \left. + (6C_{2111} + 6C_{1222} - 4C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 6D_2^1 \cos^2 2\varphi \right] \sin^2 2\varphi \cdot p_2^2 q +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \left[ (C_{1111} - 3C_{2111} + C_{1122} - C_{1222}) \sin^2 \varphi + (C_{2111} + 3C_{1222} - C_{1122} - C_{2222}) \cos^2 \varphi + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + 4D_2^1 \cos^2 2\varphi \cos 2\varphi \right] \sin^3 2\varphi \cdot p_2 q^2 + \\
& + \left[ (3C_{2111} + 3C_{1222} - 2C_{1122}) (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad + (3C_{1111} + 3C_{2222} - 6C_{1222} - 6C_{2111} + 2C_{1122}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - 6D_2^1 \cos^2 2\varphi \right] \sin^2 2\varphi \cdot p_1 p_2 q.
\end{aligned}$$

Найденные выражения (3.10), (3.12), (3.14) являются решениями поставленной задачи об определении напряжённо-деформированного состояния пластины, полученными с использованием определяющих соотношений первого, второго и третьего порядка соответственно. Эти решения служат основой для идентификации параметров построенных моделей по данным экспериментов.

### 3.2 Идентификация параметров моделей ортотропного материала

Полученные решения (3.10), (3.12), (3.14) задачи о нагружении ортотропной пластины в её плоскости используются для определения значений параметров моделей. В соответствии с программами экспериментов, предложенными в пп. 2.2, 2.3, для нахождения параметров нужны опыты, выполненные в главных осях анизотропии. При растяжении и сжатии в направлении главных осей анизотропии в решениях (3.10), (3.12), (3.14) надо задать угол  $\varphi = 0^\circ$  или  $\varphi = 90^\circ$  в зависимости от схемы приложения напряжений.

**3.2.1 Определение параметров линейной модели.** Для идентификации параметров линейной модели (2.22) требуются следующие эксперименты:

1) растяжение и сжатие вдоль главной оси анизотропии  $\vec{a}_1$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ;

2) растяжение и сжатие вдоль главной оси анизотропии  $\vec{a}_2$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ;

3) растяжение и сжатие вдоль главной оси анизотропии  $\vec{a}_3$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ ;

4) растяжение и сжатие вдоль главной оси анизотропии  $\vec{a}_3$  в плоскости векторов  $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ ;

5) сдвиги в плоскостях, образованных парами векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ;  $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ ;  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ .

Рассмотрим эксперименты в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ .

При растяжении и сжатии по направлению  $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$  (рисунок 3.3) тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{S} = S_{xx}\vec{e}_1\vec{e}_1 = p_1\vec{e}_1\vec{e}_1$ , а угол  $\varphi = 0^\circ$ . Тогда деформации пластины в соответствии с решением (3.10) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= A_{1111}S_{xx} = A_{1111}p_1, & \varepsilon_{yy} &= A_{1122}S_{xx} = A_{1122}p_1, \\ \varepsilon_{zz} &= A_{1133}S_{xx} = A_{1133}p_1, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В известных экспериментах с пластинами при растяжении и сжатии [65, 81] обычно измеряют деформации в плоскости пластины. Поэтому в дальнейшем не будем рассматривать компоненту тензора деформаций  $\varepsilon_{zz}$ .

Если в эксперименте по растяжению и сжатию в направлении  $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$  измерены деформации  $\varepsilon_{xx}$  в направлении приложения нагрузки и  $\varepsilon_{yy}$  в поперечном направлении, то из выражений (3.15) можно определить коэффициенты линейной модели  $A_{1111}, A_{1122}$ .

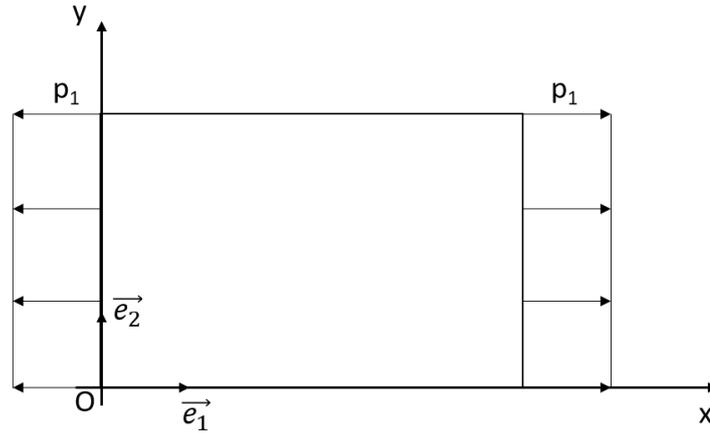


Рисунок 3.3 – Схема одноосного растяжения и сжатия по направлению  $\vec{a}_1$

При растяжении и сжатии по направлению  $\vec{e}_2 = \vec{a}_2$  (рисунок 3.4) тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{S} = S_{yy} \vec{e}_2 \vec{e}_2 = p_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2$ , угол  $\varphi = 0^\circ$ . Тогда деформации пластины в соответствии с решением (3.10) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = A_{1122} S_{yy} = A_{1122} p_2, \quad \varepsilon_{yy} = A_{2222} S_{yy} = A_{2222} p_2, \\ \varepsilon_{zz} = A_{2233} S_{yy} = A_{2233} p_2, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

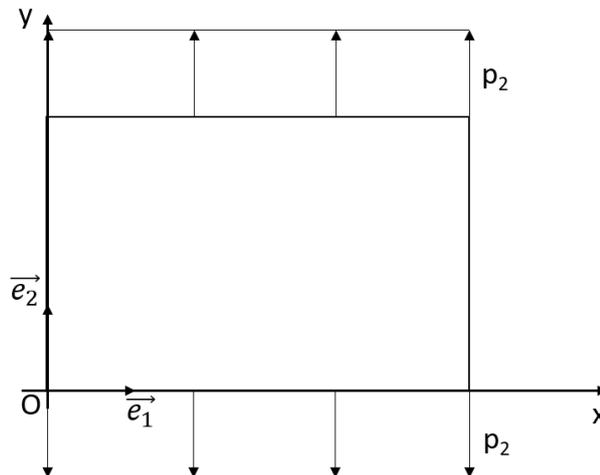


Рисунок 3.4 – Схема одноосного растяжения и сжатия по направлению  $\vec{a}_2$

Если в эксперименте по растяжению и сжатию в направлении  $\vec{e}_2 = \vec{a}_2$  измерены деформации  $\varepsilon_{yy}$  в направлении приложения нагрузки и  $\varepsilon_{xx}$  в поперечном направлении, то из выражений (3.16) можно определить коэффициенты линейной модели  $A_{1122}$ ,  $A_{2222}$ .

При сдвиге в плоскости пластины (рисунок 3.5), который может быть реализован как двухосное растяжение-сжатие под углом  $45^\circ$  к векторам  $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{a}_2$ , тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{S} = S_{xy}(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) = q(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)$ . Тогда деформации пластины в соответствии с решением (3.10) принимают вид

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 2D_0^1 S_{xy} = 2D_0^1 q, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (3.17)$$

При измеренной величине деформации  $\varepsilon_{xy}$  из соотношения (3.17) определяется параметр  $D_0^1$ .

Предположим, что в результате каждого из трёх экспериментов известны наборы значений напряжений и соответствующих им измеренных деформаций:  $\{S_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{yy}^{(i)}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_1$ ;  $\{S_{yy}^{(i)}, \varepsilon_{xx}^{(i)}, \varepsilon_{yy}^{(i)}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_2$ ;  $\{S_{xy}^{(i)}, \varepsilon_{xy}^{(i)}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_3$ , где  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  – число измерений в каждом эксперименте.

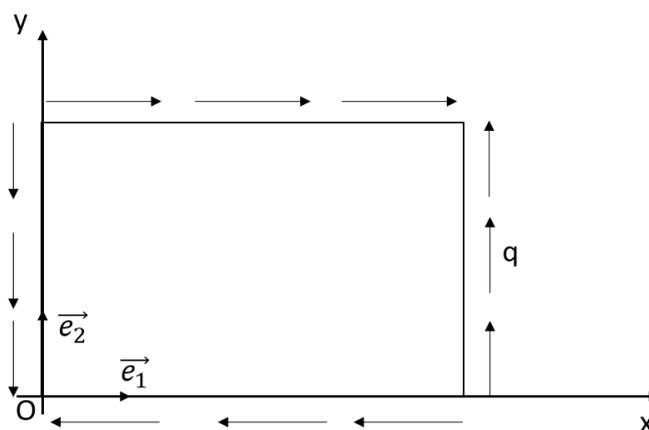


Рисунок 3.5 – Схема сдвига в плоскости пластины

После получения экспериментальных данных о напряжениях  $S_{mn}^{(i)}$  и деформациях  $\varepsilon_{mn}^{(i)}$  определим упругие константы методом наименьших квадратов. Согласно этому методу [9, 17], минимизируется функционал, равный сумме квадратов отклонений искомой функции от имеющегося набора экспериментальных данных:

$$S = \sum_{i=1}^N [f(x_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) - \phi(x_i)]^2 \rightarrow \min, \quad (3.18)$$

где  $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  – аппроксимирующая функция,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  – параметры, подлежащие определению,  $\{x_i, \phi(x_i)\}$  – результаты эксперимента,  $N$  – число измерений, выполненных в эксперименте.

Для достижения минимума функционала (3.18) должны выполняться условия

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_m} = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Решение системы уравнений (3.19) относительно параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  позволяет найти набор значений параметров модели, при которых функция  $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  заданного вида наилучшим образом (в смысле квадратического отклонения) описывает результаты экспериментов.

Запишем функционал (3.18) для функций (3.15)–(3.17), содержащих неизвестные параметры  $A_{1111}, A_{1122}, A_{2222}, D_0^1$ :

$$S = \sum_{i=1}^{N_1} (A_{1111} S_{xx}^i - \varepsilon_{xx}^i)^2 + \sum_{i=1}^{N_1} (A_{1122} S_{xx}^i - \varepsilon_{yy}^i)^2 + \sum_{i=1}^{N_2} (A_{1122} S_{yy}^i - \varepsilon_{xx}^i)^2 + \\ + \sum_{i=1}^{N_2} (A_{2222} S_{yy}^i - \varepsilon_{yy}^i)^2 + \sum_{i=1}^{N_3} (2D_0^1 S_{xy}^i - \varepsilon_{xy}^i)^2.$$

Дифференцируя составленную сумму по указанным параметрам и приравнивая производные к нулю, получим систему (3.19):

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{N_1} (A_{1111} (S_{xx}^i)^2 - S_{xx}^i \varepsilon_{xx}^i) = 0, \\ 2 \sum_{i=1}^{N_1} (A_{1122} (S_{xx}^i)^2 - S_{xx}^i \varepsilon_{yy}^i) + 2 \sum_{i=1}^{N_1} (A_{1122} (S_{yy}^i)^2 - S_{yy}^i \varepsilon_{xx}^i) = 0, \\ 2 \sum_{i=1}^{N_2} (A_{2222} (S_{yy}^i)^2 - S_{yy}^i \varepsilon_{yy}^i) = 0, \\ 2 \sum_{i=1}^{N_3} (2D_0^1 (S_{xy}^i)^2 - 2S_{xy}^i \varepsilon_{xy}^i) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Решая систему уравнений (3.20), находим константы материала, входящие в соотношения (3.10):

$$\begin{aligned} A_{1111} &= \frac{\sum_{i=1}^{N_1} S_{xx}^i \varepsilon_{xx}^i}{\sum_{i=1}^{N_1} (S_{xx}^i)^2}, & A_{1122} &= \frac{\sum_{i=1}^{N_1} S_{xx}^i \varepsilon_{yy}^i + \sum_{i=1}^{N_2} S_{yy}^i \varepsilon_{xx}^i}{\sum_{i=1}^{N_1} (S_{xx}^i)^2 + \sum_{i=1}^{N_2} (S_{yy}^i)^2}, \\ A_{2222} &= \frac{\sum_{i=1}^{N_2} S_{yy}^i \varepsilon_{yy}^i}{\sum_{i=1}^{N_2} (S_{yy}^i)^2}, & D_0^1 &= \frac{\sum_{i=1}^{N_3} S_{xy}^i \varepsilon_{xy}^i}{\sum_{i=1}^{N_3} (S_{xy}^i)^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Результаты экспериментов, выполненных в плоскостях, которые образованы другими парами главных направлений анизотропии, обрабатываются аналогично.

В статье [81] приведены зависимости напряжений от продольных и поперечных деформаций при одноосном растяжении и сжатии в направлении главной оси  $\vec{a}_1$  и зависимости касательных напряжений от сдвиговых деформаций в плоскости векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ . Чистый сдвиг реализован как двухосное растяжение-сжатие под углом  $45^\circ$  к направлениям главных осей анизотропии.

В работе [65] приведены результаты экспериментов по растяжению и сжатию образцов в направлении  $\vec{a}_1$ , в направлении  $\vec{a}_3$ , под углом  $45^\circ$  в плоскости

векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  и под углом  $45^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ . При этом измерены только продольные деформации. Покажем, как в этом случае определить значение константы  $A_{1122}$  по данным экспериментов в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ . Значения  $A_{1111}$  и  $D_0^1$  вычисляются по формулам (3.21) по данным опытов на растяжение и сжатие в направлении  $\vec{a}_1$  и на сдвиг в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ . В силу одинаковости свойств материала в направлениях  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$   $A_{2222} = A_{1111}$ . При растяжении и сжатии под углом  $\varphi = 45^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  в соответствии с решением (3.10) измеряемые в эксперименте деформации принимают вид

$$\varepsilon_{xx} = \left( \frac{1}{4} A_{1111} + \frac{1}{4} A_{2222} + \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \right) p_1 = A'_{1111} p_1. \quad (3.22)$$

Значение  $A'_{1111}$  определяется по данным экспериментов методом наименьших квадратов. Затем из формулы (3.22) вычисляется значение  $A_{1122}$ :

$$A_{1122} = 2A'_{1111} - A_{1111} - 2D_0^1. \quad (3.23)$$

Аналогично формуле (3.23) по результатам экспериментов на растяжение и сжатие под углом  $\varphi = 45^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$  вычисляется значение  $A_{1133}$ :

$$A_{1133} = 2A'_{1111} - \frac{1}{2}(A_{1111} + A_{3333}) - 2D_0^3,$$

где  $A'_{1111}$  имеет тот же смысл, что и в формуле (3.22).

Обработка экспериментальных данных, приведённых в статьях [65, 81], позволила получить следующие значения констант линейной модели:

1) для тканого композита на основе стекловолокна [81]

$$A_{1111} = 6,85 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{1122} = -5,64 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{2222} = 6,85 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1},$$

$$D_0^1 = 1,68 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1};$$

2) для композита AVCO Mod 3a [65]

$$A_{1111} = 1,62 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{2222} = 1,62 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{3333} = 5,11 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$$

$$A_{1122} = -2,08 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{1133} = -5,43 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{2233} = -5,43 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1},$$

$$D_0^1 = 1,80 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad D_0^2 = 3,97 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad D_0^3 = 3,97 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Свойства материала композита, армированного стекловолокном, обусловлены направленным расположением армирующих элементов. В статье [81] указано, что волокна располагаются в параллельных плоскостях в двух перпендикулярных направлениях. Это объясняет тот результат, что  $A_{1111} = A_{2222}$ .

В статье [65] механические свойства материала в направлениях осей  $x$  и  $y$  считаются одинаковыми вследствие схемы укладки волокон и слоёв композитного материала. Поэтому для композита AVCO Mod 3a  $A_{1111} = A_{2222}$ ,  $A_{1133} = A_{2233}$ ,  $D_0^2 = D_0^3$ .

По найденным числовым значениям параметров  $A_{ijkl}$  в соответствии с формулами (2.25) определены значения констант  $c_0^{\alpha\beta}$  для композита AVCO Mod 3a:

$$c_0^{00} = -7,38 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad c_1^{01} = -2,22 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad c_0^{02} = 0,$$

$$c_0^{11} = 7,43 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad c_0^{12} = 0, \quad c_0^{22} = 3,70 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

**3.2.2 Определение параметров модели второго порядка.** Для идентификации параметров модели второго порядка требуются следующие эксперименты:

1) растяжение и сжатие вдоль главной оси анизотропии  $\vec{a}_1$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ;

2) растяжение и сжатие вдоль главной оси анизотропии  $\vec{a}_2$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ;

3) растяжение и сжатие вдоль главной оси анизотропии  $\vec{a}_3$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ ;

4) растяжение и сжатие вдоль главной оси анизотропии  $\vec{a}_1$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ ;

5) растяжение и сжатие вдоль главной оси анизотропии  $\vec{a}_3$  в плоскости векторов  $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ ;

б) сдвиги в плоскостях, образованных парами векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ;  $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ ;  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ .

Рассмотрим эксперименты в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ .

При растяжении и сжатии по направлению  $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$  (рисунок 3.3) тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{S} = S_{xx} \vec{e}_1 \vec{e}_1 = p_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1$ , угол  $\varphi = 0^\circ$ . Деформации пластины в соответствии с решением (3.12) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= A_{1111} p_1 + B_{1111} p_1^2, & \varepsilon_{yy} &= A_{1122} p_1 + B_{2211} p_1^2, \\ \varepsilon_{zz} &= A_{1133} p_1 + B_{3311} p_1^2, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

По результатам измерений деформации  $\varepsilon_{xx}$  в направлении приложения нагрузки и  $\varepsilon_{yy}$  в поперечном направлении в эксперименте по растяжению и сжатию в направлении  $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$  из выражений (3.24) можно определить коэффициенты модели второго порядка  $A_{1111}, A_{1122}, B_{1111}, B_{2211}$ .

При растяжении и сжатии по направлению  $\vec{e}_2 = \vec{a}_2$  (рисунок 3.4) тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{S} = S_{yy} \vec{e}_2 \vec{e}_2 = p_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2$ , угол  $\varphi = 0^\circ$ . Компоненты тензора деформаций пластины в соответствии с решением (3.12) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= A_{1122} p_2 + B_{1122} p_2^2, & \varepsilon_{yy} &= A_{2222} p_2 + B_{2222} p_2^2, \\ \varepsilon_{zz} &= A_{2233} p_2 + B_{3322} p_2^2, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

По результатам измерений деформации  $\varepsilon_{yy}$  в направлении приложения нагрузки и  $\varepsilon_{xx}$  в поперечном направлении в эксперименте по растяжению и сжатию в направлении  $\vec{e}_2 = \vec{a}_2$  из выражений (3.25) определяются коэффициенты модели второго порядка  $A_{1122}, A_{2222}, B_{1122}, B_{2222}$ .

При сдвиге в плоскости пластины (рисунок 3.5) тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{S} = S_{xy}(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) = q(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)$ . Деформации пластины в соответствии с решением (3.12) принимают вид

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 2D_0^1 q + 3\sqrt{2}D_1^1 q^2, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (3.26)$$

При измеренной величине деформации  $\varepsilon_{xy}$  из первой формулы (3.26) определяются параметры  $D_0^1, D_1^1$ .

Запишем функционал (3.18) для функций (3.24)–(3.26) с неизвестными параметрами  $A_{1111}, A_{1122}, A_{2222}, B_{1111}, B_{2211}, B_{1122}, B_{2222}, D_0^1, D_1^1$ :

$$\begin{aligned} S = & \sum_{i=1}^{N_1} (A_{1111} S_{xx}^i + B_{1111} (S_{xx}^i)^2 - \varepsilon_{xx}^i)^2 + \sum_{i=1}^{N_1} (A_{1122} S_{xx}^i + B_{2211} (S_{xx}^i)^2 - \varepsilon_{yy}^i)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{N_2} (A_{1122} S_{yy}^i + B_{1122} (S_{yy}^i)^2 - \varepsilon_{xx}^i)^2 + \sum_{i=1}^{N_2} (A_{2222} S_{yy}^i + B_{2222} (S_{yy}^i)^2 - \varepsilon_{yy}^i)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{N_3} (2D_0^1 S_{xy}^i + 3\sqrt{2}D_1^1 (S_{xy}^i)^2 - \varepsilon_{xy}^i)^2. \end{aligned}$$

Дифференцируя составленную сумму по указанным параметрам и приравнявая производные к нулю, получим систему уравнений относительно неизвестных параметров

$$\left\{ \begin{array}{l}
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1111} (S_{xx}^i)^2 + B_{1111} (S_{xx}^i)^3 - S_{xx}^i \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1111} (S_{xx}^i)^3 + B_{1111} (S_{xx}^i)^4 - (S_{xx}^i)^2 \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{xx}^i)^2 + B_{2211} (S_{xx}^i)^3 - S_{xx}^i \varepsilon_{yy}^i \right) + \\
\quad + 2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{yy}^i)^2 + B_{1122} (S_{yy}^i)^3 - S_{yy}^i \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{xx}^i)^3 + B_{2211} (S_{xx}^i)^4 - (S_{xx}^i)^2 \varepsilon_{yy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{yy}^i)^3 + B_{1122} (S_{yy}^i)^4 - (S_{yy}^i)^2 \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_2} \left( A_{2222} (S_{yy}^i)^2 + B_{2222} (S_{yy}^i)^3 - S_{yy}^i \varepsilon_{yy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_2} \left( A_{2222} (S_{yy}^i)^3 + B_{2222} (S_{yy}^i)^4 - (S_{yy}^i)^2 \varepsilon_{yy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_3} \left( 2D_0^1 (S_{xy}^i)^2 + 6\sqrt{2}D_1^1 (S_{xy}^i)^3 - 2S_{xy}^i \varepsilon_{xy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_3} \left( 6\sqrt{2}D_0^1 (S_{xy}^i)^3 + 18D_1^1 (S_{xy}^i)^4 - 3\sqrt{2} (S_{xy}^i)^2 \varepsilon_{xy}^i \right) = 0.
\end{array} \right. \quad (3.27)$$

Полученная система уравнений распадается на четыре не связанные друг с другом подсистемы, включающие уравнения 1 и 2; 3, 4 и 5; 6 и 7; 8 и 9. Решая систему уравнений (3.27), находим параметры модели ортотропного материала второго порядка. Результаты экспериментов, выполненных в плоскостях, которые образованы другими парами главных направлений анизотропии, обрабатываются аналогично.

Покажем, как определить параметры модели второго порядка  $A_{1122}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$  по данным экспериментов [65] на растяжение и сжатие в плоскости векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ , в которых измерены продольные деформации, но не измерены поперечные. Значения  $A_{1111}$ ,  $B_{1111}$  и  $D_0^1$ ,  $D_1^1$  определяются из решения первых двух и последних двух уравнений системы (3.27) по данным опытов на

растяжение и сжатие в направлении  $\vec{a}_1$  и на сдвиг в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ . В силу одинаковости свойств материала в направлениях  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$   $A_{2222} = A_{1111}$ ,  $B_{2222} = B_{1111}$ ,  $B_{1122} = B_{2211}$ .

При растяжении и сжатии под углом  $\varphi = 45^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  в соответствии с решением (3.12) измеряемые в эксперименте деформации принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \left( \frac{1}{4} A_{1111} + \frac{1}{4} A_{2222} + \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \right) p_1 + \\ &+ \left[ \frac{1}{8} (B_{1111} + B_{2222}) + \frac{3}{8} (B_{1122} + B_{2211}) - \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \right] p_1^2 = A'_{1111} p_1 + B'_{1111} p_1^2, \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} (A_{1111} + A_{1122} + 2D_0^1) p_1 + \\ &+ \frac{1}{4} (B_{1111} + 3B_{1122} - 3\sqrt{2} D_1^1) p_1^2 = A'_{1111} p_1 + B'_{1111} p_1^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Константы  $A'_{1111}, B'_{1111}$  определяются по методу наименьших квадратов. Затем из формулы (3.28) можно найти значения  $A_{1122}, B_{1122}$ :

$$A_{1122} = 2A'_{1111} - A_{1111} - 2D_0^1, \quad B_{1122} = \frac{4}{3} B'_{1111} - \frac{1}{3} B_{1111} + \sqrt{2} D_1^1. \quad (3.29)$$

Для определения параметров  $A_{1133}, B_{1133}, B_{3311}$  надо использовать данные экспериментов на растяжение и сжатие под углом  $\varphi = 45^\circ$  и под углом  $\varphi = 22,5^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(45)} &= \left( \frac{1}{4} A_{1111} + \frac{1}{4} A_{3333} + \frac{1}{2} (A_{1133} + 2D_0^3) \right) p_1 + \\ &+ \left[ \frac{1}{8} (B_{1111} + B_{3333}) + \frac{3}{8} (B_{1133} + B_{3311}) - \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^3 \right] p_1^2 = A'_{1111} p_1 + B'_{1111} p_1^2, \\ \varepsilon_{xx}^{(22,5)} &= \left( \frac{3+2\sqrt{2}}{8} A_{1111} + \frac{3-2\sqrt{2}}{8} A_{3333} + \frac{1}{4} (A_{1133} + 2D_0^3) \right) p_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{10+7\sqrt{2}}{32} B_{1111} + \frac{10-7\sqrt{2}}{32} B_{3333} + \frac{3(2-\sqrt{2})}{32} B_{1133} + \frac{3(2+\sqrt{2})}{32} B_{3311} - \frac{3}{8} D_1^3 \right] p_1^2 = \\
& = A''_{1111} p_1 + B''_{1111} p_1^2,
\end{aligned}$$

где  $A'_{1111}$ ,  $B'_{1111}$ ,  $A''_{1111}$ ,  $B''_{1111}$  – коэффициенты, определяемые по данным экспериментов. Из первого соотношения вычисляется значение  $A_{1133}$ :

$$A_{1133} = 2A'_{1111} - \frac{1}{2}(A_{1111} + A_{3333}) - 2D_0^3. \quad (3.30)$$

Значения параметров  $B_{1133}$ ,  $B_{3311}$  определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} B_{1133} + B_{3311} = \frac{8}{3} B'_{1111} - \frac{1}{3} (B_{1111} + B_{3333}) + 2\sqrt{2} D_1^3, \\ 3(2-\sqrt{2}) B_{1133} + 3(2+\sqrt{2}) B_{3311} = 32B''_{1111} - (10+7\sqrt{2}) B_{1111} - (10-7\sqrt{2}) B_{3333} + 12D_1^3. \end{cases} \quad (3.31)$$

По экспериментальным данным из работ [65, 81] найдены следующие значения констант модели второго порядка:

1) для тканого композита на основе стекловолокна [81]

$$A_{1111} = 6,48 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{1122} = -6,93 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{2222} = 6,48 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1};$$

$$B_{1111} = 6,58 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{1122} = 2,32 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{2211} = 2,32 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-2},$$

$$B_{2222} = 6,58 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-2}; \quad D_0^1 = 5,36 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}, \quad D_1^1 = 1,36 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-2};$$

2) для композита AVCO Mod 3a [65]

$$A_{1111} = 1,70 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{2222} = 1,70 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{3333} = 7,58 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$$

$$A_{1122} = -7,28 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{1133} = -1,33 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{2233} = -1,33 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1};$$

$$B_{1111} = 2,69 \cdot 10^{-13} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{2222} = 2,69 \cdot 10^{-13} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{3333} = -4,32 \cdot 10^{-13} \text{ Па}^{-2},$$

$$B_{1122} = 1,13 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{1133} = -5,01 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{3311} = -1,82 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-2},$$

$$D_0^1 = 4,39 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}, \quad D_0^2 = 1,98 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad D_0^3 = 1,98 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1};$$

$$D_1^1 = 6,44 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-2}, \quad D_1^2 = -1,92 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-2}, \quad D_1^3 = -1,92 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-2}.$$

По найденным числовым значениям параметров  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$  в соответствии с формулами (2.25), (2.26) определены значения констант  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$  для композита AVCO Mod 3a:

$$\begin{aligned} c_0^{00} &= -8,73 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}, & c_1^{01} &= -9,07 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}, & c_0^{02} &= 0, \\ c_0^{11} &= 2,60 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & c_0^{12} &= 0, & c_0^{22} &= 2,43 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}; \\ c_1^{00} &= 8,50 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-2}, & c_1^{01} &= 2,29 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, & c_1^{02} &= -3,96 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-2}, \\ c_1^{11} &= -3,15 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, & c_1^{12} &= 9,91 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-2}, & c_1^{22} &= 0. \end{aligned}$$

**3.2.3 Определение параметров модели третьего порядка.** Как указана в п. 2.3, для идентификации параметров модели третьего порядка требуются такие же эксперименты, как в случае модели второго порядка. Рассмотрим эксперименты в плоскости векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ .

При растяжении и сжатии по направлению  $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$  (рисунок 3.3) тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{S} = S_{xx} \vec{e}_1 \vec{e}_1 = p_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1$ , угол  $\varphi = 0^\circ$ . Деформации пластины в соответствии с решением (3.14) принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= A_{1111} p_1 + B_{1111} p_1^2 + C_{1111} p_1^3, & \varepsilon_{yy} &= A_{1122} p_1 + B_{2211} p_1^2 + C_{2111} p_1^3, & (3.32) \\ \varepsilon_{zz} &= A_{1133} p_1 + B_{3311} p_1^2 + C_{3111} p_1^3, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned}$$

По результатам измерений деформации  $\varepsilon_{xx}$  в направлении приложения нагрузки и  $\varepsilon_{yy}$  в поперечном направлении в эксперименте по растяжению и сжатию в направлении  $\vec{e}_1 = \vec{a}_1$  из выражений (3.32) определяются коэффициенты модели третьего порядка  $A_{1111}$ ,  $A_{1122}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{2211}$ ,  $C_{1111}$ ,  $C_{2111}$ .

При растяжении и сжатии по направлению  $\vec{e}_2 = \vec{a}_2$  (рисунок 3.4) тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{S} = S_{yy} \vec{e}_2 \vec{e}_2 = p_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2$ , угол  $\varphi = 0^\circ$ . Компоненты тензора деформаций пластины в соответствии с решением (3.14) принимают вид

$$\varepsilon_{xx} = A_{1122} p_2 + B_{1122} p_2^2 + C_{1222} p_2^3, \quad \varepsilon_{yy} = A_{2222} p_2 + B_{2222} p_2^2 + C_{2222} p_2^3, \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{zz} = A_{2233}p_2 + B_{3322}p_2^2 + C_{3222}p_2^3, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

По результатам измерений деформации  $\varepsilon_{yy}$  в направлении приложения нагрузки и  $\varepsilon_{xx}$  в поперечном направлении в эксперименте по растяжению и сжатию в направлении  $\vec{e}_2 = \vec{a}_2$  из выражений (3.33) определяются коэффициенты модели второго порядка  $A_{1122}$ ,  $A_{2222}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2222}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2222}$ .

При сдвиге в плоскости пластины (рисунок 3.5) тензор напряжений имеет вид  $\mathbf{S} = S_{xy}(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) = q(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)$ . Деформации пластины в соответствии с решением (3.14) принимают вид

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 2D_0^1q + 3\sqrt{2}D_1^1q^2 + 4D_2^1q^3, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (3.34)$$

При измеренной величине деформации  $\varepsilon_{xy}$  из первой формулы (3.34) определяются параметры  $D_0^1$ ,  $D_1^1$ ,  $D_2^1$ .

Запишем функционал (3.18) для функций (3.32)–(3.34) с неизвестными параметрами  $A_{1111}$ ,  $A_{1122}$ ,  $A_{2222}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2222}$ ,  $C_{1111}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2222}$ ,  $D_0^1$ ,  $D_1^1$ ,  $D_2^1$ :

$$\begin{aligned} S = & \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1111}S_{xx}^i + B_{1111}(S_{xx}^i)^2 + C_{1111}(S_{xx}^i)^3 - \varepsilon_{xx}^i \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122}S_{xx}^i + B_{2211}(S_{xx}^i)^2 + C_{2111}(S_{xx}^i)^3 - \varepsilon_{yy}^i \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{N_2} \left( A_{1122}S_{yy}^i + B_{1122}(S_{yy}^i)^2 + C_{1222}(S_{yy}^i)^3 - \varepsilon_{xx}^i \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{N_2} \left( A_{2222}S_{yy}^i + B_{2222}(S_{yy}^i)^2 + C_{2222}(S_{yy}^i)^3 - \varepsilon_{yy}^i \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{N_3} \left( 2D_0^1S_{xy}^i + 3\sqrt{2}D_1^1(S_{xy}^i)^2 + 4D_2^1(S_{xy}^i)^3 - \varepsilon_{xy}^i \right)^2. \end{aligned}$$

Дифференцируя составленную сумму по указанным параметрам и приравнявая производные к нулю, получим систему уравнений относительно неизвестных параметров

$$\left\{ \begin{array}{l}
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1111} (S_{xx}^i)^2 + B_{1111} (S_{xx}^i)^3 + C_{1111} (S_{xx}^i)^4 - S_{xx}^i \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1111} (S_{xx}^i)^3 + B_{1111} (S_{xx}^i)^4 + C_{1111} (S_{xx}^i)^5 - (S_{xx}^i)^2 \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1111} (S_{xx}^i)^4 + B_{1111} (S_{xx}^i)^5 + C_{1111} (S_{xx}^i)^6 - (S_{xx}^i)^3 \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{xx}^i)^2 + B_{2211} (S_{xx}^i)^3 + C_{2111} (S_{xx}^i)^4 - S_{xx}^i \varepsilon_{yy}^i \right) + \\
+ 2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{yy}^i)^2 + B_{1122} (S_{yy}^i)^3 + C_{1222} (S_{yy}^i)^4 - S_{yy}^i \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{xx}^i)^3 + B_{2211} (S_{xx}^i)^4 + C_{2111} (S_{xx}^i)^5 - (S_{xx}^i)^2 \varepsilon_{yy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{xx}^i)^4 + B_{2211} (S_{xx}^i)^5 + C_{2111} (S_{xx}^i)^6 - (S_{xx}^i)^3 \varepsilon_{yy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{yy}^i)^3 + B_{1122} (S_{yy}^i)^4 + C_{1222} (S_{yy}^i)^5 - (S_{yy}^i)^2 \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_1} \left( A_{1122} (S_{yy}^i)^4 + B_{1122} (S_{yy}^i)^5 + C_{1222} (S_{yy}^i)^6 - (S_{yy}^i)^3 \varepsilon_{xx}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_2} \left( A_{2222} (S_{yy}^i)^2 + B_{2222} (S_{yy}^i)^3 + C_{2222} (S_{yy}^i)^4 - S_{yy}^i \varepsilon_{yy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_2} \left( A_{2222} (S_{yy}^i)^3 + B_{2222} (S_{yy}^i)^4 + C_{2222} (S_{yy}^i)^5 - (S_{yy}^i)^2 \varepsilon_{yy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_2} \left( A_{2222} (S_{yy}^i)^4 + B_{2222} (S_{yy}^i)^5 + C_{2222} (S_{yy}^i)^6 - (S_{yy}^i)^3 \varepsilon_{yy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_3} \left( 2D_0^1 (S_{xy}^i)^2 + 6\sqrt{2}D_1^1 (S_{xy}^i)^3 + 8D_2^1 (S_{xy}^i)^4 - 2S_{xy}^i \varepsilon_{xy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_3} \left( 6\sqrt{2}D_0^1 (S_{xy}^i)^3 + 18D_1^1 (S_{xy}^i)^4 + 12\sqrt{2}D_2^1 (S_{xy}^i)^5 - 3\sqrt{2} (S_{xy}^i)^2 \varepsilon_{xy}^i \right) = 0, \\
2 \sum_{i=1}^{N_3} \left( 8D_0^1 (S_{xy}^i)^4 + 12\sqrt{2}D_1^1 (S_{xy}^i)^5 + 16D_2^1 (S_{xy}^i)^6 - 4(S_{xy}^i)^3 \varepsilon_{xy}^i \right) = 0.
\end{array} \right. \quad (3.35)$$

Решением этой системы уравнений являются параметры модели третьего порядка ортотропного материала. Систему уравнений (3.35) можно разделить на четыре независимые подсистемы, состоящие из уравнений 1–3; 4–8; 9–11; 12–14.

Результаты экспериментов, выполненных в плоскостях, которые образованы другими парами главных направлений анизотропии, обрабатываются аналогично.

В статье [65] приведены результаты экспериментов по одноосному растяжению, одноосному сжатию и сдвигу образцов в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ . Значения  $A_{1111}, B_{1111}, C_{1111}$  и  $D_0^1, D_1^1, D_2^1$  определяются из решения первых трёх и последних трёх уравнений системы (3.35) по данным опытов на растяжение и сжатие в направлении  $\vec{a}_1$  и на сдвиг в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ . В силу одинаковости свойств материала в направлениях  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$   $A_{2222} = A_{1111}, B_{2222} = B_{1111}, B_{1122} = B_{2211}, C_{2222} = C_{1111}, C_{1222} = C_{2111}$ .

Эксперименты на растяжение и сжатие в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  выполнены для значений угла  $\varphi = 0^\circ, \varphi = 22,5^\circ, \varphi = 45^\circ$ .

При растяжении и сжатии под углом  $\varphi = 22,5^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  в соответствии с решением (3.14) измеряемые в эксперименте деформации принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(22,5)} &= \left( \frac{3+2\sqrt{2}}{8} A_{1111} + \frac{3-2\sqrt{2}}{8} A_{2222} + \frac{1}{4} (A_{1122} + 2D_0^1) \right) p_1 + \\ &+ \left[ \frac{10+7\sqrt{2}}{32} B_{1111} + \frac{10-7\sqrt{2}}{32} B_{2222} + \frac{3(2-\sqrt{2})}{32} B_{1122} + \frac{3(2+\sqrt{2})}{32} B_{2211} - \frac{3}{8} D_1^1 \right] p_1^2 + \\ &+ \left[ \frac{17+2\sqrt{2}}{64} C_{1111} + \frac{17-2\sqrt{2}}{64} C_{2222} + \frac{3+2\sqrt{2}}{16} C_{2111} + \frac{1}{32} (C_{1122} + 4D_2^1) + \frac{3-2\sqrt{2}}{16} C_{1222} \right] p_1^3 = \\ &= A'_{1111} p_1 + B'_{1111} p_1^2 + C'_{1111} p_1^3, \\ \varepsilon_{xx}^{(22,5)} &= \left( \frac{3}{4} A_{1111} + \frac{1}{4} (A_{1122} + 2D_0^1) \right) p_1 + \left[ \frac{5}{8} B_{1111} + \frac{3}{8} B_{1122} - \frac{3}{8} D_1^1 \right] p_1^2 + \\ &+ \left[ \frac{17}{32} C_{1111} + \frac{3}{8} C_{1222} + \frac{1}{32} (C_{1122} + 4D_2^1) \right] p_1^3 = A'_{1111} p_1 + B'_{1111} p_1^2 + C'_{1111} p_1^3, \quad (3.36) \end{aligned}$$

При растяжении и сжатии под углом  $\varphi = 45^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  в соответствии с решением (3.14) измеряемые в эксперименте деформации выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(45)} &= \left( \frac{1}{4} A_{1111} + \frac{1}{4} A_{2222} + \frac{1}{2} (A_{1122} + 2D_0^1) \right) p_1 + \\ &+ \left[ \frac{1}{8} (B_{1111} + B_{2222}) + \frac{3}{8} (B_{1122} + B_{2211}) - \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \right] p_1^2 + \\ &+ \frac{1}{16} (C_{1111} + C_{2222} + 4C_{2111} + 2C_{1122} + 8D_2^1 + 4C_{1222}) p_1^3 = \\ &= A'_{1111} p_1 + B'_{1111} p_1^2 + C'_{1111} p_1^3, \\ \varepsilon_{xx}^{(45)} &= \frac{1}{2} (A_{1111} + A_{1122} + 2D_0^1) p_1 + \frac{1}{4} (B_{1111} + 3B_{1122} - 3\sqrt{2}D_1^1) p_1^2 + \\ &+ \frac{1}{8} (C_{1111} + 4C_{1222} + C_{1122} + 4D_2^1) p_1^3 = A''_{1111} p_1 + B''_{1111} p_1^2 + C''_{1111} p_1^3. \quad (3.37) \end{aligned}$$

Величины  $A'_{1111}, B'_{1111}, C'_{1111}, A''_{1111}, B''_{1111}, C''_{1111}$  определяются по методу наименьших квадратов. Константы модели материала  $A_{1122}, B_{1122}$  можно найти из соотношения (3.37) по формулам (3.29). Параметры  $C_{1222}, C_{1122}$  определяются из системы уравнений, которые следуют из формул (3.36), (3.37):

$$\begin{cases} \frac{3}{8} C_{1222} + \frac{1}{32} C_{1122} = C'_{1111} - \frac{17}{32} C_{1111} - \frac{1}{8} D_2^1, \\ \frac{1}{2} C_{1222} + \frac{1}{8} C_{1122} = C''_{1111} - \frac{1}{8} C_{1111} - \frac{1}{2} D_2^1. \end{cases}$$

В статье [65] также приведены результаты экспериментов на растяжение и сжатие в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ , выполненных для значений угла  $\varphi = 0^\circ, \varphi = 22,5^\circ, \varphi = 45^\circ, \varphi = 67,5^\circ$ . При растяжении и сжатии под различными углами  $\varphi = 22,5^\circ, \varphi = 45^\circ, \varphi = 67,5^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$  в соответствии с решением (3.14) измеряемые в эксперименте деформации выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{(22,5)} &= \left( \frac{3+2\sqrt{2}}{8} A_{1111} + \frac{3-2\sqrt{2}}{8} A_{3333} + \frac{1}{4} (A_{1133} + 2D_0^3) \right) p_1 + \\
&+ \left[ \frac{10+7\sqrt{2}}{32} B_{1111} + \frac{10-7\sqrt{2}}{32} B_{3333} + \frac{3(2-\sqrt{2})}{32} B_{1133} + \frac{3(2+\sqrt{2})}{32} B_{3311} - \frac{3}{8} D_1^3 \right] p_1^2 + \\
&+ \left[ \frac{17+2\sqrt{2}}{64} C_{1111} + \frac{17-2\sqrt{2}}{64} C_{3333} + \frac{3+2\sqrt{2}}{16} C_{3111} + \frac{1}{32} (C_{1133} + 4D_2^3) + \frac{3-2\sqrt{2}}{16} C_{1333} \right] p_1^3 = \\
&= A'_{1111} p_1 + B'_{1111} p_1^2 + C'_{1111} p_1^3, \tag{3.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{(45)} &= \left( \frac{1}{4} A_{1111} + \frac{1}{4} A_{3333} + \frac{1}{2} (A_{1133} + 2D_0^3) \right) p_1 + \\
&+ \left[ \frac{1}{8} (B_{1111} + B_{3333}) + \frac{3}{8} (B_{1133} + B_{3311}) - \frac{3\sqrt{2}}{4} D_1^1 \right] p_1^2 + \\
&+ \frac{1}{16} (C_{1111} + C_{3333} + 4C_{3111} + 2C_{1133} + 8D_2^3 + 4C_{1333}) p_1^3 = \\
&= A''_{1111} p_1 + B''_{1111} p_1^2 + C''_{1111} p_1^3, \tag{3.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{(67,5)} &= \left( \frac{3-2\sqrt{2}}{8} A_{1111} + \frac{3+2\sqrt{2}}{8} A_{3333} + \frac{1}{4} (A_{1133} + 2D_0^3) \right) p_1 + \\
&+ \left[ \frac{10-7\sqrt{2}}{32} B_{1111} + \frac{10+7\sqrt{2}}{32} B_{3333} + \frac{3(2+\sqrt{2})}{32} B_{1133} + \frac{3(2-\sqrt{2})}{32} B_{3311} - \frac{3}{8} D_1^3 \right] p_1^2 + \\
&+ \left[ \frac{17-2\sqrt{2}}{64} C_{1111} + \frac{17+2\sqrt{2}}{64} C_{3333} + \frac{3-2\sqrt{2}}{16} C_{3111} + \frac{1}{32} (C_{1133} + 4D_2^3) + \frac{3+2\sqrt{2}}{16} C_{1333} \right] p_1^3 = \\
&= A'''_{1111} p_1 + B'''_{1111} p_1^2 + C'''_{1111} p_1^3. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Из соотношения (3.39) в соответствии с выражениями (3.30), (3.31) определяются константы  $A_{1133}$ ,  $B_{1133}$ ,  $B_{3311}$ . Приравнявая в соотношениях (3.38)–(3.40) коэффициенты при  $p_1^3$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{3+2\sqrt{2}}{16}C_{3111} + \frac{1}{32}C_{1133} + \frac{3-2\sqrt{2}}{16}C_{1333} = C'_{1111} - \frac{17+2\sqrt{2}}{64}C_{1111} - \frac{17-2\sqrt{2}}{64}C_{3333} - \frac{1}{8}D_2^3, \\ \frac{1}{8}C_{3111} + \frac{1}{8}C_{1133} + \frac{1}{4}C_{1333} = C''_{1111} - \frac{1}{16}C_{1111} - \frac{1}{16}C_{3333} - \frac{1}{2}D_2^3, \\ \frac{3-2\sqrt{2}}{16}C_{3111} + \frac{1}{32}C_{1133} + \frac{3+2\sqrt{2}}{16}C_{1333} = C'''_{1111} - \frac{17-2\sqrt{2}}{64}C_{1111} - \frac{17+2\sqrt{2}}{64}C_{3333} - \frac{1}{8}D_2^3. \end{cases} \quad (3.41)$$

Из системы (3.41) по результатам испытаний на растяжение и сжатие для значений угла  $\varphi = 22,5^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\varphi = 67,5^\circ$  определяются значения констант  $C_{3111}$ ,  $C_{1133}$ ,  $C_{1333}$ . Таким образом, значения всех параметров, входящих в определяющие соотношения третьего порядка, могут быть найдены по данным экспериментов.

По экспериментальным данным из работ [65, 81] найдены следующие значения констант модели третьего порядка:

1) для тканого композита на основе стекловолокна [81]

$$A_{1111} = 5,84 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{1122} = -8,95 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{2222} = 5,84 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1};$$

$$B_{1111} = 5,76 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{1122} = 2,07 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{2211} = 2,07 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-2},$$

$$B_{2222} = 5,76 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-2};$$

$$C_{1111} = 2,17 \cdot 10^{-16} \text{ Па}^{-3}, \quad C_{2222} = 2,17 \cdot 10^{-16} \text{ Па}^{-3}, \quad C_{1222} = 6,69 \cdot 10^{-15} \text{ Па}^{-3},$$

$$C_{2111} = 6,69 \cdot 10^{-15} \text{ Па}^{-3}, \quad C_{1122} = 2,20 \cdot 10^{-16} \text{ Па}^{-3};$$

$$D_0^1 = 1,56 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}, \quad D_1^1 = -1,74 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-2}, \quad D_2^1 = 2,33 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-3};$$

2) для композита AVCO Mod 3a [65]

$$A_{1111} = 1,12 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{2222} = 1,12 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{3333} = 6,48 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$$

$$A_{1122} = -3,13 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{1133} = -5,52 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad A_{2233} = -5,52 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1};$$

$$B_{1111} = 9,15 \cdot 10^{-13} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{2222} = 9,15 \cdot 10^{-13} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{3333} = -7,82 \cdot 10^{-13} \text{ Па}^{-2},$$

$$B_{1122} = -1,33 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{2211} = -1,33 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-2}, \quad B_{3311} = -6,26 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-2};$$

$$C_{1111} = 2,86 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-3}, \quad C_{2222} = 2,86 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-3}, \quad C_{3333} = 5,64 \cdot 10^{-15} \text{ Па}^{-3},$$

$$C_{1222} = 2,74 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-3}, \quad C_{2111} = 2,74 \cdot 10^{-14} \text{ Па}^{-3}, \quad C_{3111} = 1,05 \cdot 10^{-12} \text{ Па}^{-3};$$

$$D_0^1 = 1,93 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, D_0^2 = 3,58 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, D_0^3 = 3,58 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1};$$

$$D_1^1 = -1,08 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, D_1^2 = -2,14 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, D_1^3 = -2,14 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2};$$

$$D_2^1 = 5,19 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-3}, D_2^2 = 2,57 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-3}, D_2^3 = 2,57 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-3}.$$

По найденным числовым значениям параметров  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$  в соответствии с формулами (2.25), (2.26), (2.35) определены значения констант  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$ ,  $c_2^{\alpha\beta}$  для композита AVCO Mod 3a:

$$c_0^{00} = -8,48 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, c_1^{01} = -1,50 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, c_0^{02} = 0,$$

$$c_0^{11} = 7,12 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, c_0^{12} = 0, c_0^{22} = 4,25 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1};$$

$$c_1^{00} = -2,87 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, c_1^{01} = 6,80 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, c_1^{02} = 5,10 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-2},$$

$$c_1^{11} = -7,44 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, c_1^{12} = -1,02 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, c_1^{22} = 0;$$

$$c_2^{00} = 8,44 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-3}, c_2^{01} = 1,23 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-3}, c_2^{02} = 0,$$

$$c_2^{11} = -1,44 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-3}, c_2^{12} = 0, c_2^{22} = 1,16 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-3}.$$

Значимость построенных определяющих уравнений моделей первого, второго и третьего порядков исследована методами дисперсионного анализа [17]. Для каждого набора экспериментов, использованных для определения параметров модели, были вычислены регрессионное слагаемое дисперсии

$$Q_R = \sum_{m=1}^n \left( \varepsilon_{ij}(S_{ij}^m, A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}, D_i^j) - \bar{\varepsilon}_{ij} \right)^2, \quad (3.42)$$

и остаточное слагаемое дисперсии

$$Q_E = \sum_{m=1}^n \left( \varepsilon_{ij}^m - \varepsilon_{ij}(S_{ij}^m, A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}, D_i^j) \right)^2, \quad (3.43)$$

где  $\varepsilon_{ij}(S_{ij}^m, A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}, D_i^j)$  – компоненты тензора деформации, вычисленные по уравнению модели при значениях напряжений  $S_{ij}^m$ , измеренных в эксперименте;

$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \varepsilon_{ij}^m$  – средняя величина измеренной деформации;  $\varepsilon_{ij}^m$  – измеренные в опыте компоненты тензора деформаций;  $n$  – число наблюдений.

Уравнение регрессии считается значимым на уровне  $\alpha$ , если выполняется неравенство

$$F = \frac{Q_R(n-2)}{Q_E} > F_{\alpha, k_1, k_2}, \quad (3.44)$$

где  $F_{\alpha, k_1, k_2}$  – табличное значение критерия Фишера–Снедекора для уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $k_1=1$ ,  $k_2=n-2$ , где  $n$  – число экспериментальных точек. Компоненты дисперсии (3.42), (3.43) и значения критерия  $F$  (3.44) для трёх моделей тканого композита на основе стекловолокна [81] и композита AVCO Mod 3a [65] приведены в таблицах 3.1 и 3.2 соответственно.

Таблица 3.1 – Дисперсионный анализ моделей тканого композита на основе стекловолокна

	Компо- ненты тензора деформа- ций	$Q_R$	$Q_E$	$F$	$n$	$F_{0.01,1,n}$
Линейная модель	$\varepsilon_{11}$	$9,53 \cdot 10^{-4}$	$2,85 \cdot 10^{-5}$	688,08	22	7,95
	$\varepsilon_{22}$	$2,25 \cdot 10^{-5}$	$5,74 \cdot 10^{-6}$	31,44	10	10,44
Модель второго порядка	$\varepsilon_{11}$	$9,76 \cdot 10^{-4}$	$2,34 \cdot 10^{-5}$	834,30	22	7,95
	$\varepsilon_{22}$	$4,40 \cdot 10^{-5}$	$8,88 \cdot 10^{-7}$	400,79	10	10,44
Модель третьего порядка	$\varepsilon_{11}$	0,0010	$2,91 \cdot 10^{-6}$	6880,7	22	7,95
	$\varepsilon_{22}$	$4,19 \cdot 10^{-5}$	$2,48 \cdot 10^{-7}$	1350	10	10,44

Таблица 3.2 – Дисперсионный анализ моделей  
композиата AVCO Mod 3a

	Компо- ненты тензора деформа- ций	$Q_R$	$Q_E$	$F$	$n$	$F_{0.01,1,n}$
Линейная модель	$\varepsilon_{11}$	0,0029	$8,46 \cdot 10^{-5}$	1130,6	35	7,56
	$\varepsilon_{22}$	$2,37 \cdot 10^{-5}$	$1,02 \cdot 10^{-5}$	76,65	35	7,56
	$\varepsilon_{33}$	$6,81 \cdot 10^{-5}$	$1,37 \cdot 10^{-5}$	49,70	12	9,33
	$\varepsilon_{12}$	$4,77 \cdot 10^{-5}$	$5,44 \cdot 10^{-5}$	52,65	8	13,75
	$\varepsilon_{13}$	$4,18 \cdot 10^{-5}$	$3,39 \cdot 10^{-6}$	98,76	10	10,44
Модель второго порядка	$\varepsilon_{11}$	0,0028	$7,63 \cdot 10^{-6}$	12014	35	7,56
	$\varepsilon_{22}$	$2,67 \cdot 10^{-5}$	$6,23 \cdot 10^{-7}$	1416	35	7,56
	$\varepsilon_{33}$	$7,67 \cdot 10^{-5}$	$4,33 \cdot 10^{-6}$	177,21	12	9,33
	$\varepsilon_{12}$	$6,76 \cdot 10^{-4}$	$6,86 \cdot 10^{-6}$	591,62	8	13,75
	$\varepsilon_{13}$	$5,99 \cdot 10^{-5}$	$5,09 \cdot 10^{-7}$	940,14	10	10,44
Модель третьего порядка	$\varepsilon_{11}$	0,0028	$2,40 \cdot 10^{-6}$	38486	35	7,56
	$\varepsilon_{22}$	$2,76 \cdot 10^{-5}$	$1,13 \cdot 10^{-7}$	8046,7	35	7,56
	$\varepsilon_{33}$	$7,87 \cdot 10^{-5}$	$2,18 \cdot 10^{-6}$	360,13	12	9,33
	$\varepsilon_{12}$	$6,52 \cdot 10^{-4}$	$3,55 \cdot 10^{-7}$	11017	8	13,75
	$\varepsilon_{13}$	$5,73 \cdot 10^{-5}$	$1,57 \cdot 10^{-7}$	2927,1	10	10,44

Критерий (3.44) выполняется для всех определяющих уравнений каждой из трёх моделей. Поэтому можно утверждать, что уравнения построенных моделей (2.21), (2.22), (2.32) значимы на уровне  $\alpha = 0,01$ .

### 3.3 Анализ моделей ортотропного материала

Проведём сравнение разработанных моделей между собой и с экспериментальными данными. Для этого построим экспериментальные точки, полученные при одноосном растяжении и сжатии и при сдвиге, и графики зависимостей деформаций от напряжений, задаваемых определяющими соотношениями (2.21), (2.22), (2.32). Графики построены для наборов параметров, полученных для композита на основе стекловолокна и композита AVCO Mod 3a.

На рисунках 3.6–3.9 представлены графики зависимостей напряжений от деформаций, построенные по определяющим соотношениям (2.21), (2.22), (2.32) со значениями параметров, найденных для тканого композита на основе стекловолокна.

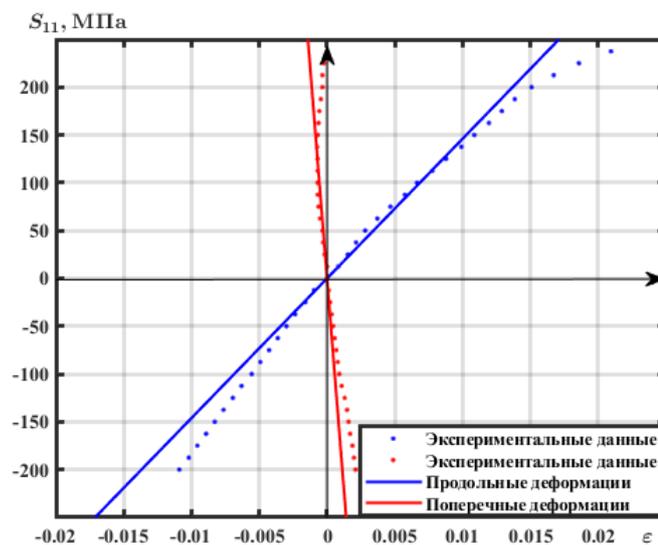


Рисунок 3.6 – Зависимости напряжений от деформаций при растяжении и сжатии композита на основе стекловолокна в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$  (линейные определяющие соотношения)

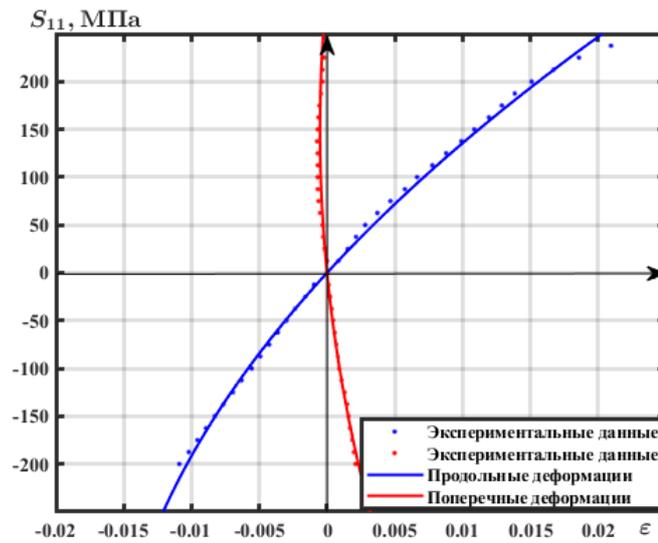


Рисунок 3.7 – Зависимости напряжений от деформаций при растяжении и сжатии композита на основе стекловолокна в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$  (определяющие соотношения второго порядка)

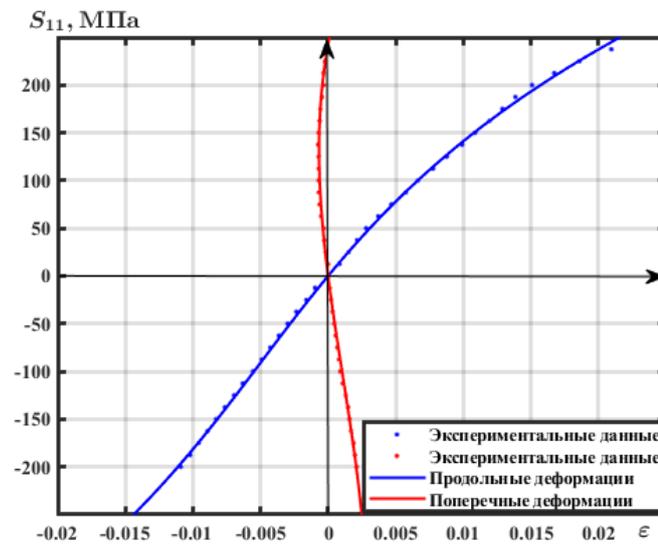


Рисунок 3.8 – Зависимости напряжений от деформаций при растяжении и сжатии композита на основе стекловолокна в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$  (определяющие соотношения третьего порядка)

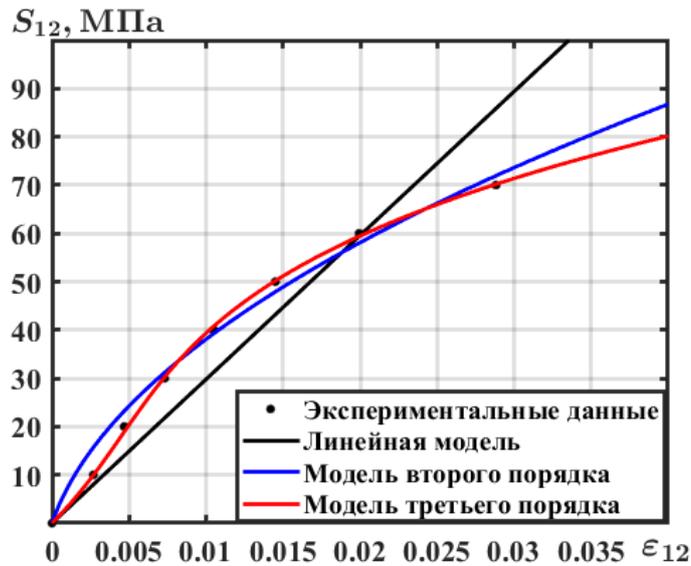


Рисунок 3.9 – Зависимости напряжений от деформаций при сдвиге композита на основе стекловолокна в плоскости главных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

На рисунках 3.10–3.13 представлены графики зависимостей напряжений от деформаций, построенные по определяющим соотношениям (2.21), (2.22), (2.32) со значениями параметров, найденных для композита AVCO Mod 3a.

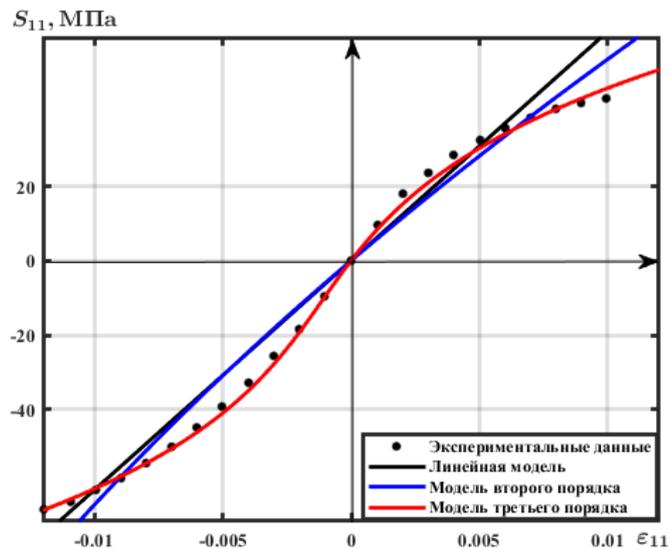


Рисунок 3.10 – Зависимости напряжений от деформаций при растяжении и сжатии композита AVCO Mod 3a в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$

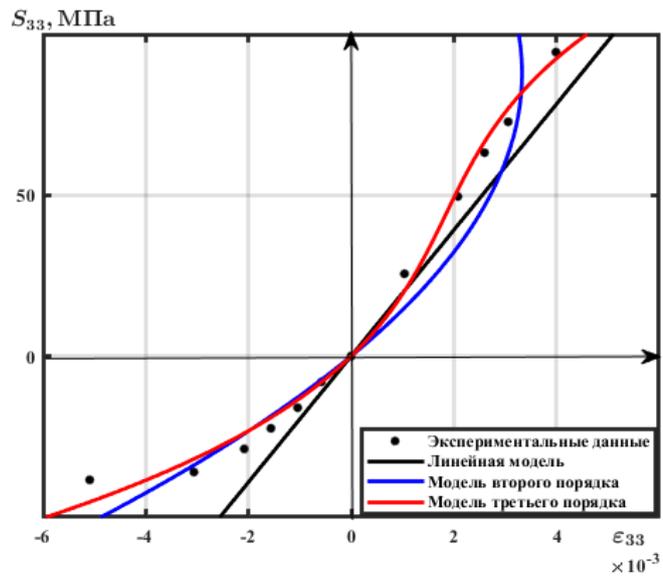


Рисунок 3.11 – Зависимости напряжений от деформаций при растяжении и сжатии композита AVCO Mod 3a в направлении главного вектора  $\vec{a}_3$

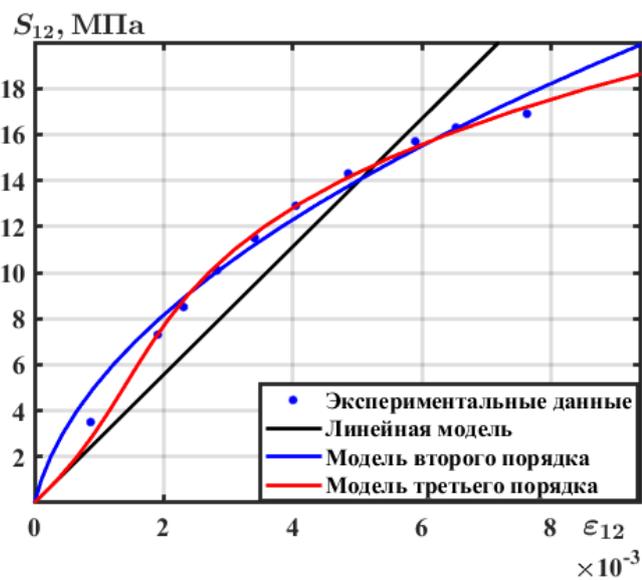


Рисунок 3.12 – Зависимости напряжений от деформаций при сдвиге композита AVCO Mod 3a в плоскости главных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

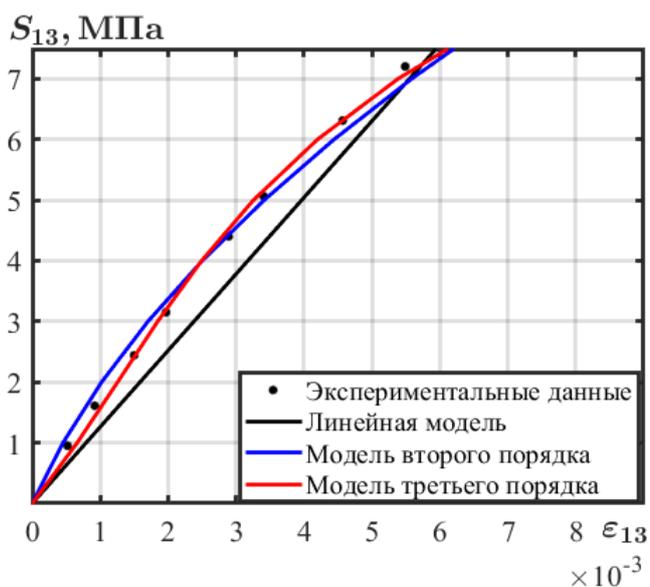


Рисунок 3.13 – Зависимости напряжений от деформаций при сдвиге композита AVCO Mod 3a в плоскости главных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$

Графики на рисунках 3.6–3.13 показывают, что предложенные нелинейные определяющие соотношения, учитывающие зависимости деформаций от напряжений второго и третьего порядков, позволяют описать результаты экспериментов с анизотропным материалом более адекватно, чем линейные соотношения обобщённого закона Гука. Предложенные нелинейные определяющие соотношения позволяют описывать разносопротивляемость анизотропного материала растяжению и сжатию, наблюдаемую в эксперименте.

Заметим, что модель второго порядка с константами для материала AVCO Mod 3a неверно описывает данные эксперимента на растяжение в направлении  $\vec{a}_3$  (рисунок 3.11), поэтому для учёта нелинейности следует использовать модель третьего порядка. Однако на рисунке 3.13 кривые, построенные по определяющим соотношениям второго и третьего порядков для сдвига, достаточно близки.

Экспериментальные данные, приведённые в статье [81], использованы также в работе Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова [70] для идентификации и верификации модели, учитывающей нелинейную зависимость сдвиговых деформаций от касательных напряжений, но постулирующей линейную связь

между деформациями и напряжениями при растяжении и сжатии вдоль главных осей анизотропии.

На рисунках 3.14–3.16 представлены графики зависимостей напряжений от деформаций, построенные по определяющим соотношениям (2.32) со значениями параметров для тканого композита на основе стекловолокна и по определяющим соотношениям, предложенным в статье [70], с параметрами для того же материала.

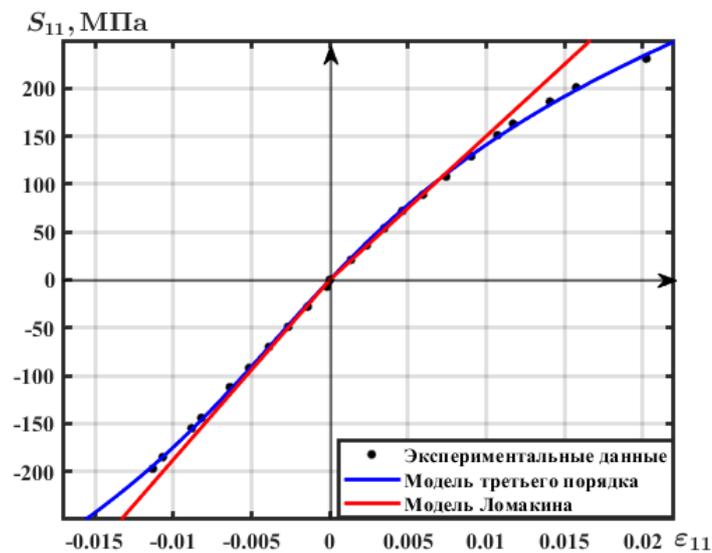


Рисунок 3.14 – Зависимости напряжений от продольных деформаций при растяжении и сжатии композита на основе стекловолокна в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$

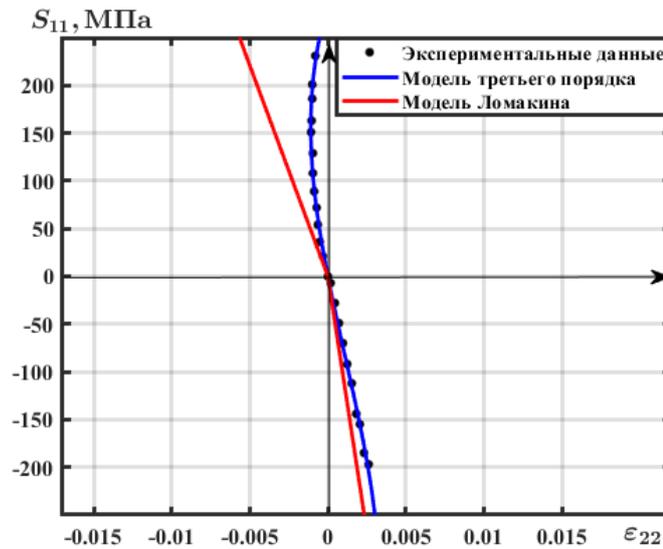


Рисунок 3.15 – Зависимости напряжений от поперечных деформаций при растяжении и сжатии композита на основе стекловолокна в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$

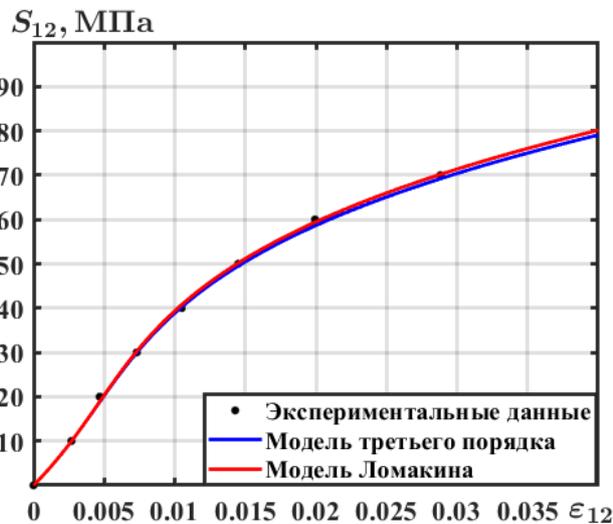


Рисунок 3.16 – Зависимости напряжений от деформаций при сдвиге композита на основе стекловолокна в плоскости главных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

Построенные в настоящей работе модели (2.21), (2.32) учитывают нелинейность в упругом поведении анизотропного материала не только при сдвиге, но и при одноосном растяжении и сжатии, а их параметры идентифицируются по данным таких экспериментов. Таким образом,

предложенные модели второго и третьего порядков позволяют описывать наблюдаемую в экспериментах нелинейность зависимости между напряжениями и деформациями не только в процессах сдвига, но и в процессах растяжения и сжатия вдоль главных осей анизотропии, а также разнсопротивляемость анизотропных материалов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение приведём основные результаты работы.

1. Построены конкретные формы нелинейных определяющих соотношений для упругого ортотропного материала, удовлетворяющие предельной форме обобщения частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы.

2. Показано, что для ортотропного материала в рамках использованной гипотезы число констант в определяющих соотношениях второго порядка равно 18, в определяющих соотношениях третьего порядка – 27.

3. Сформулирована программа экспериментов, достаточных для идентификации параметров предложенных соотношений, которая включает восемь опытов с плоскими образцами. В экспериментах должны быть измерены продольные и поперечные деформации.

Предложен способ определения значений констант по экспериментам, в которых измерены только продольные деформации при растяжении и сжатии под разными углами к направлениям главных осей анизотропии.

4. По известным из литературы экспериментальным данным для композитного материала на основе стекловолокна и композитного материала AVCO Mod 3a определены значения констант моделей первого, второго и третьего порядков.

5. Показано, что предложенные модели описывают наблюдаемое в экспериментах явление разносопротивляемости и нелинейное поведение композитных материалов при чистом сдвиге. При этом модель третьего порядка описывает экспериментальные данные лучше, чем модели второго и первого порядков. В отличие от известных нелинейных моделей предложенные модели описывают не только нелинейное поведение материала при чистом сдвиге, но и нелинейную зависимость между напряжениями, продольными и поперечными деформациями.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Абрамов, А.В. Обработка экспериментальных данных по определению механических свойств конструкционных материалов / А.В. Абрамов, М.Е. Березовская, О.В. Войкина, А.С. Черенева // Научный электронный журнал «Новости материаловедения. Наука и техника». – 2014. – № 1. – 13 с.
2. Амбарцумян, С.А. К разномодульной теории упругости / С.А. Амбарцумян, А.А. Хачатрян // Инженерный журнал, Механика твёрдого тела. – 1966. – № 6. – С. 64–67.
3. Амбарцумян, С.А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела / С.А. Амбарцумян // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1969. – № 3. – С. 51–61.
4. Амбарцумян, С.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию / С.А. Амбарцумян, А.А. Хачатрян // Инженерный журнал, Механика твёрдого тела. – 1966. – № 2. – С. 44–53.
5. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
6. Амелина, Е.В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчёт / Е.В. Амелина, С.К. Голушко, В.С. Ерасов, С.В. Идимешев, Ю.В. Немировский, Б.В. Семисалов, А.В. Юрченко, Н.О. Яковлев // Вычислительные технологии. – 2015. – № 5. – С. 27–52.
7. Астапов, Ю.В. Внедрение сферического индентора в основание упругого и гипоупругого круговых цилиндров при конечных деформациях / Ю.В. Астапов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2017. – Т. 32. – № 2. – С. 107–116.
8. Астапов, Ю.В. Численное и экспериментальное моделирование процесса индентирования резиновых образцов / Ю.В. Астапов, Д.В. Христинич // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я.

Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2018. – Т. 36. – № 2. – С. 65–73.

9. Бахвалов, Н.С. Численные методы: Учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.

10. Бригадиров, Г.В. Вариант построения основных соотношений разномодульной теории упругости / Г.В. Бригадиров, Н.М. Матченко // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1971. – № 5. – С. 109–111.

11. Буренин, А.А. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / А.А. Буренин, В.М. Ярушина // Проблемы механики деформируемых твёрдых тел и горных пород: Сб. ст. к 75-летию Е.И. Шемякина. – М.: Физматлит, 2006. – С. 100–106.

12. Вареник, К.А. Аппроксимация диаграммы деформирования древесины / К.А. Вареник // Вестник Новгородского государственного университета. Технические науки. – 2013. – № 75(1). – С. 60–64.

13. Ватульян, А.О. Коэффициентные обратные задачи механики / А.О. Ватульян. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 272 с.

14. Золочевский, А.А. Определяющие уравнения и некоторые задачи разномодульной теории упругости анизотропных материалов / А.А. Золочевский // ПМТФ. – 1985. – № 4. – С. 131–138.

15. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды: учебник / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

16. Ильюшин, А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.

17. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 551 с.

18. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. В 10-ти т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – Т. VII. Теория упругости: учеб. пособие. – 248 с.

19. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
20. Ломакин, Е.В. Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния / Е.В. Ломакин // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1980. – № 4. – С. 92–99.
21. Ломакин, Е.В. Разномодульность композитных материалов / Е.В. Ломакин // Механика композитных материалов. – 1981. – № 1. – С. 23–29.
22. Ломакин, Е.В. Соотношения теории упругости для анизотропного тела, деформационные характеристики которых зависят от вида напряженного состояния / Е.В. Ломакин // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1983. – № 3. – С. 63–69.
23. Ломакин, Е.В. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела / Е.В. Ломакин, Ю.Н. Работнов // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1978. – № 6. – С. 29–34.
24. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
25. Маркин, А.А. Термомеханика конечного деформирования анизотропных тел / А.А. Маркин, М.Ю. Соколова // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. – Т. 7. – Вып. 2. Механика. – 2001. – С.130–137.
26. Маркин, А.А. Термомеханика упругопластического деформирования / А.А. Маркин, М.Ю. Соколова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 320 с.
27. Маркин, А.А. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений / А.А. Маркин, М.Ю. Соколова, Д.В. Христич // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2011. – № 1. – С. 38–45.
28. Матченко, Н.М. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах / Н.М. Матченко, Л.А. Толоконников // Инженерный журнал, Механика твёрдого тела. – 1968. – № 6. – С. 108–110.
29. Матченко, Н.М. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов / Н.М. Матченко, А.А. Трещёв // Прикладные задачи теории упругости. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ. – 2004. – 211 с.

30. Матченко, Н.М. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения / Н.М. Матченко, А.А. Трещёв. – Тула: ТулГУ, 2000. – 149 с.

31. Мясников, В.П. Основные общие соотношения изотропно-упругой разносопротивляющейся среды / В.П. Мясников, А.И. Олейников // Доклады АН СССР. – 1992. – Т. 332. – № 1. – С. 57–60.

32. Нгуен, Ш.Т. Нелинейные модели упругости ортотропного материала / Ш.Т. Нгуен // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2021. – № 4 (50). – С. 25–32.

33. Нгуен, Ш.Т. Определение констант материала ортотропной пластины / Ш.Т. Нгуен // Вестник Тульского государственного университета. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – 2021. – № 1. – С. 59–72.

34. Нгуен, Ш.Т. Идентификация параметров квадратичной модели упругого анизотропного материала / Ш.Т. Нгуен, Д.В. Христинич // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2021. – № 3 (49). – С. 3–11.

35. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

36. Новожилов, В.В. Теория упругости / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.

37. Пеньков, В.Б. Метод граничных состояний с возмущениями в решении физически нелинейных задач для анизотропных сред / В.Б. Пеньков, Д.А. Иванычев, Л.В. Левина, Е.А. Новиков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2020. – 1950 с. – С. 1480–1483.

38. Пеньков, В.Б. Решение физически нелинейной первой основной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения / В.Б. Пеньков, Д.А. Иванычев, Л.В. Левина, Е.А. Новиков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной

конференции, Воронеж, 7–9 декабря 2020 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2021. – 1855 с. – С. 1382–1386.

39. Пеньков, В.Б. Построение полнопараметрических решений задач статики ортотропной пластины методом граничных состояний с возмущениями / В.Б. Пеньков, Д.А. Иванычев, О.С. Новикова, Л.В. Левина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 18–20 декабря 2017 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2017. – С. 1221–1227.

40. Победря, Б.Е. Лекции по тензорному анализу: учеб. пособие / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 206 с.

41. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 744 с.

42. Седов, Л.И. Механика сплошной среды: учебник для студентов университетов и высших технических учебных заведений / Л.И. Седов. – Т.1. – М.: Наука, 1973. – 536 с.

43. Толоконников, Л.А. Вариант разномодульной теории упругости / Л.А. Толоконников // Механика полимеров. – 1969. – № 2. – С. 363–365.

44. Толоконников, Л.А. Вариант соотношений разномодульной теории упругости / Л.А. Толоконников // Прочность и пластичность. – М.: Наука. – 1971. – С. 102–104.

45. Трещёв, А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А.А. Трещёв. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. – 328 с.

46. Трещёв, А.А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения: монография / А.А. Трещёв. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2008. – 264 с.

47. Трещёв, А.А. Теория деформирования и прочности разносопротивляющихся материалов: учебник / А.А. Трещёв. – Тула: ТулГУ, 2020. – 359 с.

48. Трещёв, А.А. Изгиб кольцевых пластин из ортотропного нелинейно разносопротивляющегося материала/ А.А. Трещёв, Е.А. Журин // Строительство и реконструкция. – 2019. – № 4 (84). – С. 48–63.

49. Трещёв, А.А. Потенциал деформаций для нелинейно ортотропных разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещёв, В.С. Лисицкий // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики: сборник научных трудов 9-й Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики. В 2 т. Т. 2 / под общ. ред. А.Б. Копылова, И.А. Басалай. – Минск: БНТУ, 2013. – С. 454–458.

50. Христич, Д.В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипотупругих тел / Д.В. Христич // Дисс. ... д.ф.-м.н. Тула, 2015. 252 с.

51. Цвелодуб, И.Ю. О разномодульной теории упругости / И.Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49. – № 1. – С. 157–164.

52. Черных, К.Ф. Введение в анизотропную упругость / К.Ф. Черных. – М.: Наука, 1988. – 192 с.

53. Черных, К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах / К.Ф. Черных. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

54. Шапиро, Г.С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / Г.С. Шапиро // Инженерный журнал, Механика твёрдого тела. – 1966. – № 2. – С. 123–125.

55. Astarov, Yu.V. Experimental determination of the parameters of the nonlinearly elastic Hencky model / Yu.V. Astarov, D.V. Khristich // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1203. 012015.

56. Astapov, Yu.V. Finite deformations of an elastic cylinder during indentation / Yu.V. Astapov, D.V. Khristich // *International Journal of Applied Mechanics*. – 2018. – Vol.10. – No. 3. – P. 1850026.
57. Aster, R.C. Parameter estimation and inverse problems / R.C. Aster, B. Borchers, C. Thurber. 2nd edition. – Academic Press, 2016. – 376 p.
58. Bert, C.W. Bending of thick rectangular plates laminated of bimodulus composite materials / C.W. Bert, J.N. Reddy, V.S. Reddy, W.C. Chao // *AIAA Journal*. – 1981. – Vol. 19. – No. 10. – P. 1342–1349.
59. Bert, C. W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression / C.W. Bert // *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*. – 1977. – Vol. 99. – No. 4. – P. 344–349.
60. Fedulov, B. Nonlinear shear behavior and failure of composite materials under plane stress conditions / B. Fedulov, A. Fedorenko, A. Safonov and E. Lomakin // *Acta Mechanica*. – 2017. – 228(6). – P. 2033–2040.
61. Hahn, H.T. Nonlinear elastic behavior of unidirectional composite laminae / H.T. Hahn, S.W. Tsai // *Journal of Composite Materials*. – 1973. – No. 7. – P. 102–118.
62. Hsu, Y.S. Thermoelasticity of circular cylindrical shells laminated of bimodulus composite materials / Y.S. Hsu, C.W. Bert, J.N. Reddy // *Journal of Thermal Stresses*. – 1981. – Vol. 4. – No. 2. – P. 155–177.
63. Jones, R.M. Analysis of nonlinear stress-strain behavior of fiber-reinforced composite materials / R.M. Jones, H.S. Morgan // *AIAA Journal*. – 1977. – Vol. 15. – No. 12. – P. 1669–1676.
64. Jones, R.M. Material models for nonlinear deformation of graphite / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // *AIAA Journal*. – 1976. – Vol. 14. – No. 6. – P. 709–716.
65. Jones, R.M. Modeling nonlinear deformation of carbon-carbon composite materials / R.M. Jones // *AIAA Journal*. – 1980. – Vol. 18. – No. 8. – P. 995–1001.
66. Jones, R.M. A Nonsymmetric compliance matrix approach to nonlinear multimodulus orthotropic materials / R.M. Jones // *AIAA Journal*, 1977. – Vol. 15. – No. 10. – P. 1436–1443.

67. Jones, R.M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression / R.M. Jones // *AIAA Journal*, 1977. – Vol. 15. – No. 1. – P. 16–25.
68. Jones, R.M. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // *AIAA Journal*. – 1976. – Vol. 14. – No. 10. – P. 1427–1435.
69. Leliec, J. Nonlinear constitutive behavior of orthotropic materials / J. Leliec, J. Majak // *Mechanics of Composite Materials*. – 2000. – Vol. 36. – No. 4. – P. 261–266.
70. Lomakin, E.V. Nonlinear anisotropic elasticity for laminated composites / E.V. Lomakin, B.N. Fedulov // *Meccanica*. – 2015. – Vol. 50. – N. 6. – P. 1527–1535.
71. Lomakin, E. Nonlinear deformation and failure analysis of laminated composites / E. Lomakin, B. Fedulov // *Procedia Structural Integrity*. – 2018. – Vol. 13. – P. 664–669.
72. Lüders, C. Nonlinear-elastic orthotropic material modeling of an epoxy-based polymer for predicting the material behavior of transversely loaded fiber-reinforced composites / C. Lüders // *Journal of Composite Science*. – 2020. – 4. – 46. – 22 p.
73. Papazoglou, V.J. Mechanical behavior of bimodulus laminated plates / V.J. Papazoglou, N.G. Tsouvalis // *Composite Structures*. – 1991. – Vol. 17. – P. 1–22.
74. Patel, B.P. A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels / B.P. Patel, K. Khan, Y. Nath // *Composite Structures*. – 2014. – Vol. 110. – P. 183–191.
75. Penkov, V.B. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations / V.B. Penkov, D.A. Ivanychev, O.S. Novikova, L.V. Levina // *IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series*. – 2018. – Vol. 973. – 012015.
76. Penkov, V.B. The method of boundary states with perturbations as applied to the analysis of geometrically non-linear elastostatic bodies / V.B. Penkov, E.A.

Novikov, L.V. Levina, S.Yu. Nazarov // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1902. – 012020.

77. Penkov, V.B. Using the method of boundary states with perturbations to solve physically nonlinear problems of the theory of elasticity / V.B. Penkov, D.A. Ivanychev, E.A. Novikov, L.V. Levina // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – 012134.

78. Reddy, J.N. On the behavior of plates laminated of bimodulus composite materials / J.N. Reddy, C.W. Bert // ZAMM. – 1982. – Vol. 62. – № 6. – P. 213–219.

79. Saliklis, E.P. Bilinear modelling of cellulosic orthotropic nonlinear materials / E.P. Saliklis, T.J. Urbanik, B. Tokyay // Journal of Pulp and Paper Science. – 2003. – Vol. 29. – No. 12. – P. 407–411.

80. Schmueser, D.W. Nonlinear stress-strain and strength response of axisymmetric bimodulus composite material shells / D.W. Schmueser // AIAA Journal. – 1983. – Vol. 21. – No. 12. – P. 1742–1747.

81. Smith, E.W. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite / E.W. Smith, K.J. Pascoe // Composites. – 1977. – October. – P. 237–243.

82. Sokolova, M. Strains of plates of nonlinear anisotropic materials / M. Sokolova, V. Rudakov, D. Khristich // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. 012024.

83. Tabaddor, F. Analysis for beams made of bi-modulus elastic orthotropic materials / F. Tabaddor // Fiber Science and Technology. – 1976. – No. 9. – P. 51-62.

84. Tabaddor, F. Constitutive equations for bimodulus elastic materials / F. Tabaddor // AIAA Journal. – 1972. – Vol. 10. – No. 4. – P. 516-518.

85. Tabaddor, F. Two-dimensional bi-linear orthotropic elastic materials / F. Tabaddor // Journal of Composite Materials. – 1969. – Vol. 3. – Oct. – P. 725–727.

86. Tabiei, A. Three-dimensional nonlinear orthotropic finite element material model for wood / A. Tabiei, J. Wu // Composite Structures. – 2020. – Vol. 50. – P. 143–149.

87. Yang, B. The nonlinear orthotropic material model describing biaxial tensile behavior of PVC coated fabrics / B. Yang, Z. Yu, Q. Zhang, Y. Shang, Y. Yan // Composite Structures. – 2020. – Vol. 236. – 111850.

88. Yao, W.-j. Nonlinear mechanical behavior of combined members with different moduli / W.-j. Yao, C.-h. Zhang, X.-f. Jiang // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2006. – No. 7(2). – P. 233–238.