

На правах рукописи



СЁМКА ЭЛЕОНОРА ВИКТОРОВНА

**ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ И ГЛАДКИХ УСЛОВИЙ  
ПЛАСТИЧНОСТИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
КРУГОВЫХ ДИСКОВ И СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ**

Специальность 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Воронеж-2021

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,  
**Артемов Михаил Анатольевич**

Официальные оппоненты **Шитикова Марина Вячеславовна** –  
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ  
ВО «ВГТУ», Международный научный центр по фун-  
даментальным исследованиям в области естественных и  
строительных наук им. заслуженного деятеля науки РФ,  
проф. Россихина Ю.А., руководитель

**Мурашкин Евгений Валерьевич** –  
кандидат физико-математических наук, ФГБУН «Ин-  
ститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Рос-  
сийской академии наук», г. Москва, старший научный  
сотрудник

Ведущая организация Федеральное государственное бюджетное учреждение  
науки «Хабаровский Федеральный исследовательский  
центр Дальневосточного отделения Российской акаде-  
мии наук» (ХФИЦ ДВО РАН), г. Хабаровск

Защита состоится «01» марта 2022 г. в 14.00 часов на заседании объединенного  
диссертационного совета 99.2.059.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский госу-  
дарственный университет», ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»,  
по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92, (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский госу-  
дарственный университет» и на сайте [http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Syomka\\_EV/](http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Syomka_EV/)

Автореферат разослан «11» января 2022.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Глаголев Вадим Вадимович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность исследования.

Математическая теория пластичности является основой многих инженерных направлений. Одно из направлений связано с исследованием напряжений и деформаций в элементах многих машин под действием, например, центробежных сил, возникающих при вращении. Другое из разрабатываемых направлений связано с развитием механики твердого деформируемого тела в области термоупругопластического деформирования. Обработка металлов давлением сопровождается температурными напряжениями, поэтому область допустимых значений параметров нагрузки важна для правильного построения технологических процессов. При комбинированной нагрузке необходимо определение значений допустимых нагрузок при решении конкретных задач в рамках выбранных математических моделей сложных континуальных систем.

В работе А.А. Буренина, А.В. Ткачевой, Г.А. Щербатюк 2018 г. «К использованию кусочно-линейных пластических потенциалов в нестационарной теории температурных напряжений» в условиях кусочно-линейного пластического потенциала, задающего в пространстве главных напряжений условие пластичности максимальных приведенных касательных напряжений, получено решение одномерной квазистатической задачи теории температурных напряжений о локальном нагреве круглой пластины, изготовленной из идеального упругопластического материала. В работе «Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk» U. Gamer отметил, что поле смещения, принадлежащее упругопластическому полю напряжений во вращающемся твердом диске для условия пластичности Треска, претерпевает разрыв на упругопластической границе.

Одной из первых работ по деформации полого шара под действием внутреннего и наружного давления являлось исследование А.А. Ильюшина. Возмущенное состояние полой сферы из идеально пластического материала при условии полной пластичности рассматривали А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев.

Вопросы, связанные с изменением напряжений и деформаций сферической оболочки под действием тепловых или силовых нагрузок, изучали многие авторы, например – Ю.Н. Шевченко, М.Е. Бабешко, В.В. Пискун, В.Г. Савченко, Е.П. Дац, А.В. Ткачева, Г.А. Щербатюк, Л.В. Ковтанюк, К.Н. Галимзянова, Г.Л. Панченко, Е.В. Мурашкин, Ю.А. Россихин, М.В. Шитикова, D. Bland, G.R. Cowper, J. Betten, H. Parkus, W.T. Koiter.

Интерес к данной задаче обусловлен широким практическим применением сферических оболочек в разных конструкциях, а также вопросами, которые возникают в процессе математического моделирования подобного рода объектов и при построении алгоритмов и комплексов программ для получения численных результатов. В 1988 г. U. Gamer дал решение задачи о толстостенной сферической оболочке для изотропно упрочняющегося материала. К.Н. Галимзянова и Г.Л. Панченко в 2019 г. исследовали процесс накопления необратимых деформаций в материале сферического слоя под действием изменяющегося со временем всестороннего давления на его внешней поверхности. Е.П. Дац, Е.В. Мурашкин в 2012 г.-2017 г. приводят решение упругопластической задачи о полом шаре для разных вариантов теплового воздействия. А.А. Буренин, Е.П. Дац, С.Н. Мокрин в 2012 г. исследовали формирование поля остаточных напряжений в упругопластических телах за счет локального теплового воздействия. Е.П. Дац, Е.В. Мурашкин, Р. Велмуруган в 2015 г. рассматривали необратимые деформации в полом упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия. Задачи нелинейной термоупругости были изучены в работах А.А. Маркина. В.В. Козлов, А.А. Маркин, В.Е. Петрова в 2020 г. решили задачу о конечных деформациях полутороидальной оболочки под действием внутреннего давления. В работе А.Н. Максимова, Н.Н. Пушкаренко, Е.А. Деревянных, Ю.П. Дмитриева в 2018 г. в лине-

аризованной постановке исследовалось упругопластическое состояние пространства с полостью из сжимаемого идеально пластического материала при трехосном сдавливании на бесконечности. А.В. Ковалев в 2018 г. рассмотрел остаточные напряжения в упрочняющемся упругопластическом шаре с учетом температурных эффектов.

Из анализа работ следует, что определение напряженно-деформированного состояния круговых дисков и сферических тел, испытывающих комбинированное внешнее воздействие, остается не до конца изученным. Поэтому дальнейшее исследование пределов применимости выбранных математических моделей остается актуальным.

**Целью работы является** постановка и решение задач определения упругопластического состояния круговых дисков и сферических тел, испытывающих комбинированное силовое и тепловое внешнее воздействие; изучение особенностей поведения моделей упругопластических тел при выборе кусочно-линейных и гладких условий пластичности; определение допустимых границ внешних параметров для упругого и упругопластического состояния рассматриваемых объектов; изучение влияния значения материальных параметров на напряженно-деформированное состояние объектов.

Для достижения поставленной цели решены следующие **задачи**:

- разработаны алгоритмы определения напряженно деформируемого состояния быстровращающегося диска для кусочно-линейных и гладких функций пластичности;
- определены возможности использования условия пластичности Треска при определении напряженного и деформируемого состояния быстровращающегося тонкого диска;
- определено напряженно-деформированное состояние толстостенной сферической оболочки при силовом и тепловом воздействии, когда функция пластичности зависит от всех инвариантов тензора напряжений и учитывается упрочнение материала;
- определена область допустимых значений комбинированной нагрузки для разных упругопластических состояний толстостенной сферической оболочки.

#### **Научная новизна.**

Научная новизна настоящего исследования состоит в следующем:

- показано, что при решении задачи о быстровращающемся диске для кусочно-линейных условий пластичности, кроме условия пластичности максимально приведенного напряжения, в центре диска наблюдается неограниченный рост пластических деформаций, выбор условия пластичности Треска приводит к разрыву перемещений в центре диска;
- показано, что при выборе гладких функций пластичности, в том числе позволяющих с высокой степенью точности аппроксимировать кусочно-линейные функции пластичности, в центре диска не наблюдается неограниченный рост пластических деформаций;
- определена область допустимых значений комбинированной нагрузки для разных упругопластических состояний толстостенной сферической оболочки;
- показано, что учет первого инварианта тензора напряжений в условии пластичности приводит к ограничениям на допустимые значения внешних давлений, действующих на толстостенную сферическую оболочку;
- дана оценка зависимости напряженно-деформированного состояния рассматриваемых объектов от значения материальных констант.

**Теоретическая и практическая значимость** диссертации заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы при расчёте напряжений и перемещений элементов конструкций при термоупругопластическом состоянии объектов, изготовленных из различных материалов, с учетом границ нагрузок (силовых и температурных). Результаты диссертации позволяют определить области изменения нагрузок,

при которых толстостенная сферическая оболочка находится в определенном состоянии, что позволит прогнозировать ряд технологических операций.

Для расчетов состояния дисков разработан «Программный комплекс для расчета состояния дисков», который был зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ под номером №: 2020660330 «02» сентября 2020 г.

#### **Степень достоверности и апробация результатов диссертации.**

Достоверность результатов диссертации базируется на использовании классической математической модели упругопластического деформирования и корректном использовании соответствующего математического аппарата.

Полученные в процессе работы над диссертацией результаты прошли апробацию на научных конференциях: Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (2018, 2019 г. Воронеж), XIX Международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии» (2019, 2020 г. Воронеж), Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (2019 г. Уфа), VIII национальной научно-практической конференции с международным участием «Моделирование энергоинформационных процессов» (2020 г. Воронеж).

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликовано 16 научных работ, в том числе: 3 научные статьи опубликованы в изданиях, рекомендуемых ВАК РФ, 1 работа в изданиях, входящих в список источников, индексируемых в Web of Science и Scopus, 12 публикаций в сборниках материалов Всероссийских и Международных научных и научно-практических конференций и семинаров, 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Область исследования.** Диссертационная работа соответствует пунктам паспорта специальности «Механика деформируемого твердого тела»:

5. Теория упругости, пластичности и ползучести.

7. Постановка и решение краевых задач для тел различной конфигурации и структуры при механических, электромагнитных, радиационных, тепловых и прочих воздействиях, в том числе применительно к объектам новой техники.

8. Математические модели и численные методы анализа применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического исследования.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

- аналитические и численные решения задачи о быстровращающемся тонком диске и толстостенной сферической оболочке при выборе кусочно-линейных и гладких функций пластичности;
- границы внешних воздействий, в пределах которых тела находятся в упругом, упругопластическом и предельном состоянии;
- рекомендации при использовании кусочно-линейных условий пластичности для расчета плоского напряженного состояния в упругопластических телах.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, пяти приложений. Диссертационная работа изложена на 190 страницах, содержит 50 рисунков, список литературы из 232 наименований.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** сделан краткий анализ литературы, посвященный методам расчета напряжений и перемещений в сферических телах и круговых дисках для различных условий пластичности. Отмечено, что большая часть работ связана с использованием условий пластичности Треска, что делает возможным интегрирование соотношений ассоциированного закона пластического течения. Во введении обоснована актуальность

диссертационной работы, рассмотрена степень разработанности, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследования, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе приводятся** основные соотношения теории упругопластического тела, которые используются в рамках теории малых деформаций.

Для малых деформаций принимаются соотношения Коши, определяющие связь тензора малых деформаций и перемещений, аддитивное разложение полных деформаций на деформации разных видов

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \nabla \otimes \mathbf{u}^T), \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  – тензор упругих деформаций,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  – тензор пластических деформаций.

Упругие деформации связаны с напряжениями соотношениями линейного закона Гука

$$E\boldsymbol{\varepsilon}^e = (1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{\nu \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e}{1-2\nu} \mathbf{I} \right), \quad (3)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{I}$  – свертка.

Предположение о малости деформаций существенно упрощает математическую модель. Все соотношения будут относиться к отсчетной конфигурации.

Уравнение движения

$$\rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{a}$  – вектор ускорения материальной точки,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{F}$  – плотность массовых сил.

При тепловом воздействии на тело деформации теплового расширения определяются соотношением

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\theta = \alpha_T (T - T_0) \mathbf{I}, \quad (5)$$

где  $\alpha_T$  – коэффициент линейного расширения материала,  $T$  – актуальная температура,  $T_0$  – начальная температура (температура, при которой деформации считаются нулевыми). Тогда в случае малых деформаций полные деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^\theta + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (6)$$

Соотношения закона Гука с учетом деформаций теплового расширения являются соотношениями Дюгамеля – Неймана

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^\theta) = (1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{I} + E\alpha_T (T - T_0) \mathbf{I}. \quad (7)$$

В рамках термодинамики необратимых процессов постулируется закон теплопроводности. Для равновесных и квазиравновесных процессов принимается закон Фурье, определяющий пропорциональность теплового потока  $\mathbf{q}$  градиенту температуры

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T. \quad (8)$$

При решении несвязной задачи уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \Delta T = w(\mathbf{r}, t), \quad (9)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности среды,  $w(\mathbf{r}, t)$  – функция тепловых источников,  $T$  – температура в точке с координатами  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ .

Уравнение теплопроводности при решении стационарной задачи при отсутствии тепловых источников принимает вид

$$\Delta T = 0. \quad (10)$$

В качестве поверхности нагружения рассматривались следующие условия пластичности:

– условие пластичности максимального касательного напряжения (условие пластичности Треска)

$$F = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} - 2\tau_s, ; \quad (11)$$

где  $\tau_s$  – предел пластичности при чистом сдвиге;

– условие максимального приведенного напряжения (Ишлинского – Ивлева)

$$F = \max\{|\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma|\} - \frac{2}{3}\sigma_s, \quad (12)$$

где  $\sigma_s$  – предел пластичности при одноосном напряжении;

– кусочно-линейные условия пластичности общего вида

$$F = \max_{i=1:n}\{\alpha_i\sigma_1 + \beta_i\sigma_2 + \gamma_i\sigma_3\} - k, k = const, \quad (13)$$

где  $n$  – число несингулярных режимов пластичности,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  – числовые коэффициенты;

– условие пластичности (Мизеса) (условие постоянства интенсивности касательных напряжений)

$$F = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_s^2; \quad (14)$$

– условие пластичности Херши – Хосфорда

$$F = (\sigma_1 - \sigma_2)^{2s} + (\sigma_2 - \sigma_3)^{2s} + (\sigma_3 - \sigma_1)^{2s} - 2\sigma_s^{2s}, \quad (15)$$

где  $s$  – целочисленный параметр.

В математической теории пластичности рассматриваются разные подходы к построению уравнений, определяющих связь скоростей пластических деформаций или пластических деформаций с напряжениями. Так,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \dot{\lambda} \geq 0, \quad (16)$$

где  $\dot{\lambda}$  – коэффициент пластической податливости,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  – тензор скоростей пластических деформаций.

Задача определения напряжений и деформаций включает уравнения (1)-(16), дополненные начальными и граничными условиями.

**Во второй главе** определяется упругопластическое состояние вращающегося тонкого диска постоянной толщины, на внешний контур которого действует давление  $p_b$ . Рассматриваются кусочно-линейное условие пластичности общего вида, условие пластичности Треска, условие пластичности Ишлинского – Ивлева, а также линейная комбинация условий пластичности Треска и Ишлинского – Ивлева (12-угольник), условие пластичности Херши – Хосфорда. Все величины приводятся к безразмерному виду. Величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу пластичности  $k$ . Величины, имеющие размерности длины, отнесены к радиусу диска  $b$  ( $\rho = r/b$ ). Для безразмерных величин сохранены обозначения соответствующих размерных величин.

Уравнение баланса импульса для вращающегося диска имеет вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0, \quad (17)$$

где  $m = \tau \rho^2 \omega^2 / kg$  – безразмерный параметр,  $\omega$  – угловая скорость вращения диска,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\tau$  – удельный вес.

В случае, когда выбирается условие пластичности общего вида (13), определены напряжения, перемещения и деформации,

$$\sigma_\rho = \frac{k}{\alpha_i + \beta_i} - \frac{\alpha_i m \rho^2}{3\alpha_i + \beta_i} + \frac{C}{\rho^{(\alpha_i + \beta_i)/\alpha_i}}, \quad \sigma_\theta = \frac{k}{\alpha_i + \beta_i} + \frac{\beta_i m \rho^2}{3\alpha_i + \beta_i} - \frac{\beta_i C}{\alpha_i \rho^{(\alpha_i + \beta_i)/\alpha_i}}, \quad (18)$$

$$Eu = \frac{(1-\nu)k}{\alpha_i + \beta_i} \rho - (\beta_i^2 + 2\nu\alpha_i\beta_i + \alpha_i^2) \cdot \left( \frac{m\rho^3}{9\alpha_i^2 - \beta_i^2} + \frac{C}{\alpha_i\beta_i} \rho^{-\frac{\beta_i}{\alpha_i}} \right) + C_1 \rho^{\frac{\beta_i}{\alpha_i}}, \quad (19)$$

$$E\varepsilon_\rho^e = \frac{1-\nu}{\alpha_i + \beta_i} k - (\alpha_i + \nu\beta_i) \left( \frac{m\rho^2}{3\alpha_i + \beta_i} - \frac{C}{\alpha_i} \rho^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}} \right), \quad (20)$$

$$E\varepsilon_\theta^e = \frac{1-\nu}{\alpha_i + \beta_i} k + (\beta_i + \nu\alpha_i) \left( \frac{m\rho^2}{3\alpha_i + \beta_i} - \frac{C}{\alpha_i} \rho^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}} \right), \quad (21)$$

$$E\varepsilon_\rho^p = \frac{1-\nu}{\alpha_i + \beta_i} k - (\beta_i^2 + 2\nu\alpha_i\beta_i + \alpha_i^2) \left( \frac{3m\rho^2}{9\alpha_i^2 - \beta_i^2} + \frac{C}{2\alpha_i^2} \rho^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}} \right) + \frac{\beta_i}{\alpha_i} C_1 \rho^{\frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i}}, \quad (22)$$

$$E\varepsilon_\theta^p = \frac{1-\nu}{\alpha_i + \beta_i} k - (\beta_i^2 + 2\nu\alpha_i\beta_i + \alpha_i^2) \left( \frac{m\rho^2}{9\alpha_i^2 - \beta_i^2} + \frac{C}{\alpha_i\beta_i} \rho^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}} \right) + C_1 \rho^{\frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i}}, \quad (23)$$

$$E\varepsilon_\rho^p = -\frac{(3+\nu)\beta_i + (1+3\nu)\alpha_i}{9\alpha_i^2 - \beta_i^2} \beta_i m \rho^2 - \frac{\alpha_i^2 - \beta_i^2}{2\alpha_i^2} C \rho^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}} + \frac{\beta_i}{\alpha_i} C_1 \rho^{\frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i}}, \quad (24)$$

$$E\varepsilon_\theta^p = -\frac{(3+\nu)\beta_i + (1+3\nu)\alpha_i}{9\alpha_i^2 - \beta_i^2} \alpha_i m \rho^2 - \frac{\alpha_i^2 - \beta_i^2}{2\alpha_i\beta_i} C \rho^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}} + C_1 \rho^{\frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i}}. \quad (25)$$

Напряжения, деформации, перемещения для частных случаев, когда  $\alpha_i = 0$ ,  $\beta_i = 0$ ,  $\alpha_i + \beta_i = 0$  (режимы условия пластичности Треска) или  $9\alpha_i^2 - \beta_i^2 = 0$ , следуют из (18)-(25), в результате предельного перехода с учётом, что величины  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  зависят от параметров  $\alpha_i, \beta_i$ .

На рис.1 представлены кривые пластичности: шестиугольник Треска, шестиугольник Ишлинского – Ивлева и 12-ти угольник – линейная комбинация условия Треска и Ишлинского – Ивлева. Так, для режима  $AB$  рис.1 условие пластичности

$$F = \alpha_1 \sigma_\theta + \beta_1 \sigma_\rho = k, \quad \alpha_1 \in [0.5; 1], \quad \beta_1 = 1 - \alpha_1. \quad (26)$$

В случае, когда  $\alpha_1 = 0.5$  условие (26) определяет режим Ишлинского – Ивлева  $\sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k$ . Когда  $\alpha_1 = 1$  условие (26) определяет режим Треска

$$\sigma_\theta = k, \quad 0 \leq \sigma_\rho \leq k \quad (27)$$



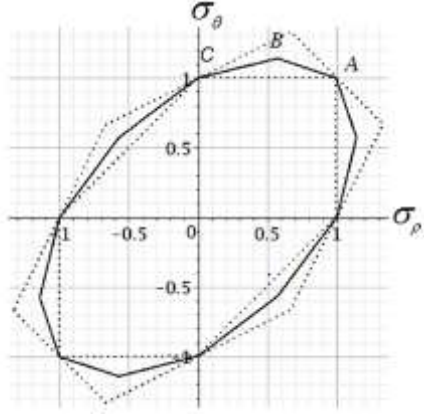


Рис.1. Кривые пластичности: шестиугольник Треска, шестиугольник Ишлинского – Ивлева и 12-ти угольник.

Выражения для перемещения, упругих, полных и пластических деформаций, используя условие (26), получаем из соотношений (18)-(25) при  $\alpha_1 \in [0.5; 1]$ ,  $\beta_1 = 1 - \alpha_1$ .

В центре диска  $\rho = 0$  зарождается пластическая зона, когда

$$\begin{cases} m = m_0 = \frac{8(k + p_b)}{(3 + \nu)b^2}, \\ p_b \in (-k; p_{\max}] \end{cases} \quad (28)$$

где  $p_{\max}$  – определяется из условия пластичности, для условия пластичности Треска  $p_{\max} = k$ , для Ишлинского – Ивлева  $p_{\max} = 4k(1 + \nu)/5 - \nu$ . Если в пластической области выполняется только режим (26), то радиус упругопластической границы определяется по формуле

$$c_1 = \sqrt{b^2 - 2b \sqrt{2 \frac{(1 + 2\alpha_1)(k + p_b) - \alpha_1 m b^2}{(3 + \nu)(1 + 2\alpha_1) - 2\alpha_1} m}}. \quad (29)$$

Для режима (26) показано, что весь диск переходит в предельное состояние  $c_1 = b$ , если параметры  $m$  и  $p_b$

$$m\alpha_1 b^2 - (1 + 2\alpha_1)(k + p_b) = 0. \quad (30)$$

Соотношение (27) следует из общего кусочно-линейного условия (13), если  $\alpha_i = 1, \beta_i = 0$ . Известные выражения для напряжений, перемещений и деформаций следуют из (18)-(25).

Когда диск находится в упругом состоянии, получено выражение для годографа вектора напряжений  $\vec{\sigma}(\sigma_\rho, \sigma_\theta)$

$$\sigma_\theta = \mu\sigma_\rho + (1 - \nu) \left( \frac{mb^2}{4} - \frac{2p_b}{3 + \nu} \right). \quad (31)$$

Из (31) следует, что одновременное увеличение или уменьшение нагрузок  $m$  и  $p_b$  приводит к противоположным эффектам, а наклон прямой (31) к оси абсцисс зависит от коэффициента Пуассона  $\nu$ : увеличивается с увеличением параметра  $\nu$ .

Выражения для напряжений, перемещений и деформаций при условии  $\alpha_i = 0.5, \beta_i = 0.5$  (условие пластичности Ишлинского – Ивлева  $\sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k$ ) следуют из (18)-(25).

Получена зависимость между внешними нагрузками  $p_b$  и  $m$  для условия пластичности Ишлинского – Ивлева, когда радиус упругопластической границы не должен превышать значения

$$c = \sqrt{b^2 - b \sqrt{\frac{2}{1 + \nu} \left( \frac{4(k + p_b)}{m} - b^2 \right)}}, \quad m = \frac{8(k + p_b)b^2}{(1 + \nu)(b^2 - c^2) + 2b^4}, \quad (32)$$

где ограничение на параметр  $p_b$  определяется из условия пластичности.

Поскольку для сингулярных режимов координаты  $\sigma_\rho^{(i)}, \sigma_\theta^{(i)}$  вершин многоугольника пластичности

$$\sigma_\rho^{(i)} = \frac{(\alpha_i - \alpha_{i+1})k}{\alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i}, \quad \sigma_\theta^{(i)} = \frac{(\beta_{i+1} - \beta_i)k}{\alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i}, \quad (33)$$

то уравнение равновесия может выполняться только, когда  $\rho = const$

$$\frac{(\alpha_i - \alpha_{i+1})k}{\alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i} - \frac{(\beta_{i+1} - \beta_i)k}{\alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i} + m\rho^2 = 0. \quad (34)$$

При рассмотрении сингулярных режимов условий пластичности, в случае плоского напряженного состояния, использование ассоциированного закона пластического течения не позволяет получить непрерывные поля пластических деформаций.

На рис.2 приведены графики распределения, деформаций и перемещений в диске для одного режима условия пластичности Треска  $\sigma_\theta = k, 0 \leq \sigma_\rho \leq k$ , для случая линейной комбинации условия Треска и Ишлинского – Ивлева кривая пластичности в плоскости  $\sigma_\theta, \sigma_\rho$  – 12-угольник (26), условия пластичности Ишлинского – Ивлева  $\sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k$ .

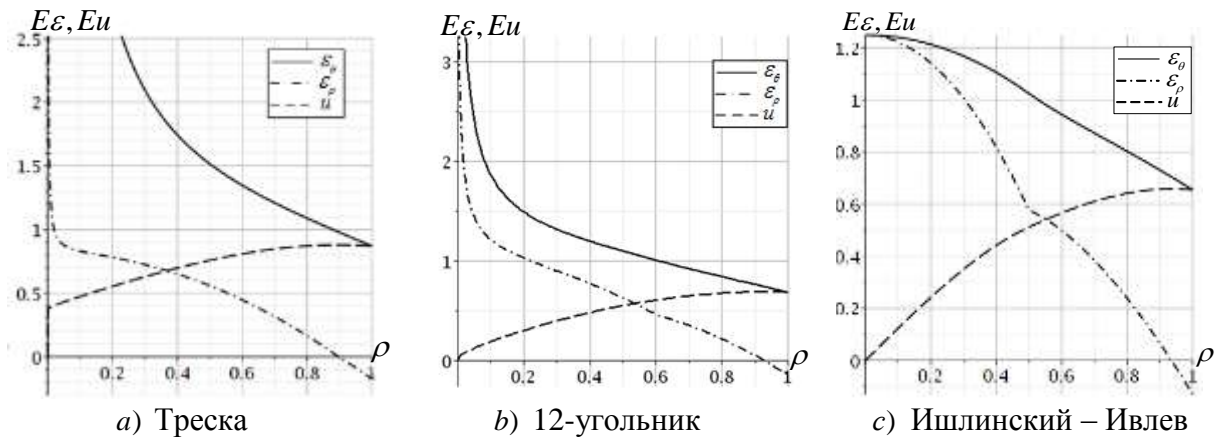


Рис.2. Зависимость деформаций, перемещений от радиуса диска.

Поскольку для сингулярных режимов пластичности ассоциированный закон пластического течения не обеспечивает непрерывность пластических деформаций, предлагается использовать гладкие функции пластичности. Например, можно использовать условие пластичности Херши – Хосфорда (15). При  $s=1,2$  условие (15) в девиаторной плоскости определяет окружность Мизеса, а при  $s \rightarrow \infty$  шестиугольник Треска. На рис.3 приведены графики распределения деформаций (рис.3a), перемещений (рис.3a), напряжений (рис.3b) и годограф напряжений (рис.3c) в диске для условия пластичности (15).

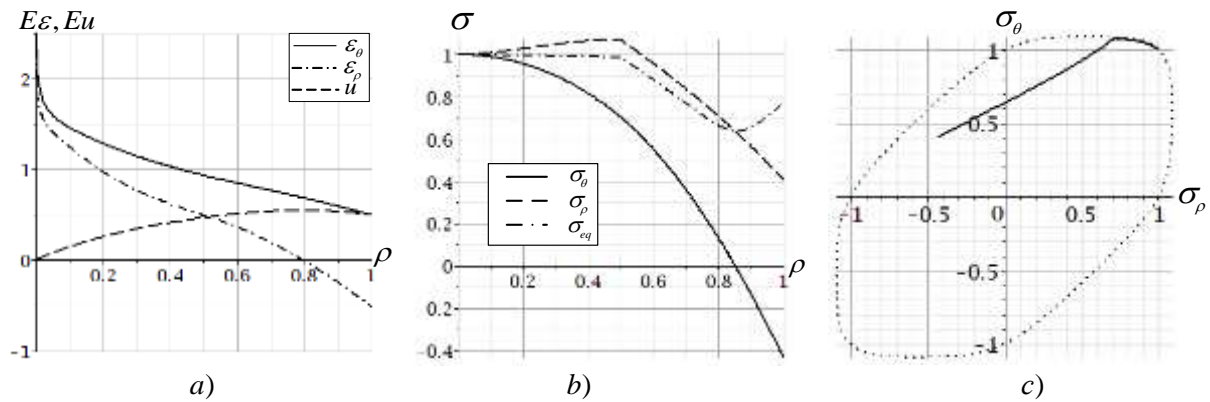


Рис. 3. Зависимость деформаций, перемещений и напряжений от радиуса диска, c) годограф вектора напряжений (условие пластичности Херши – Хосфорда).

Для условия (15) получена зависимость между внешними параметрами  $m$  и  $p_b$  (рис.4), когда в диске зарождается пластическая область. Упругому состоянию диска соответствует значение параметров  $m$  и  $p_b$ , лежащих в области ABC. Если значения этих параметров выходят из этой области, то диск будет находиться в упругопластическом состоянии.

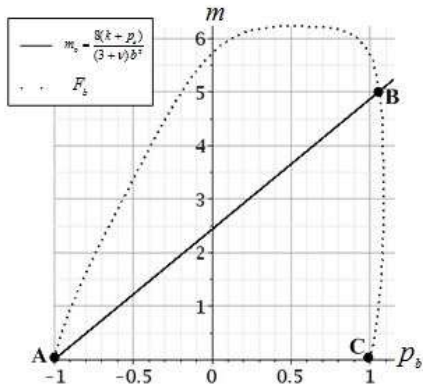


Рис.4. Зависимость  $m$  и  $p_b$ .

Выполненные исследования показали, что для кусочно-линейных условий пластичности, кроме Ишлинского – Ивлева, в центре диска имеет место неограниченный рост деформаций  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon^p = \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon^p_\theta = \infty$  рис.2а. При  $\alpha_1 \rightarrow 1$  в малой окрестности точки  $\rho=0$  производная  $du/d\rho$  стремится к бесконечности, а  $\lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} u|_{\rho=0} \neq 0$ . Это говорит о том, что в этом случае теорию малых деформаций использовать нельзя. То, что при условии Треска в центре диска перемещения претерпевают разрыв в работе U. Gamer «Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk», интерпретировалось как неприемлемость условия пластичности Треска (11), данное утверждение следовало из рассмотрения переопределённой задачи. При рассмотрении данной задачи с гладкими условиями пластичности, например Херши – Хосфорда, не наблюдается неограниченного роста деформаций в центре диска и перемещения равны нулю рис.3а.

В третьей главе диссертации рассматриваются модели изотропно упрочняющегося упругопластического вращающегося тонкого диска постоянной толщины для кусочно-линейных функций пластичности

$$\begin{cases} f = \max_{i=1+n} \{ \alpha_i \sigma_\theta + \beta_i \sigma_\rho + \gamma_i \sigma_z \} = k(1 + \eta \cdot \varepsilon_{eq}^p), \\ \sigma_z = 0, \end{cases} \quad (35)$$

где  $\eta$  - параметр упрочнения,  $\varepsilon_{eq}^p$  - эквивалентная пластическая деформация.

Для регулярных режимов условия пластичности (35) напряжения

$$\sigma_\rho = \frac{k}{\alpha_i + \beta_i} - M_\rho m \rho^2 + \frac{C_1}{\rho^{(1+n)}} + \frac{C_2}{\rho^{(1-n)}}, \quad \sigma_\theta = \frac{k}{\alpha_i + \beta_i} + M_\theta m \rho^2 - n \frac{C_1}{\rho^{(1+n)}} + n \frac{C_2}{\rho^{(1-n)}}, \quad (36)$$

$$M_\rho = \frac{\alpha_i ((v+3) \cdot \eta \chi + 3\alpha_i - \beta_i)}{8\alpha_i \eta \chi + 9\alpha_i^2 - \beta_i^2}, \quad M_\theta = \frac{(((3v+1) \cdot \eta \chi - 3\beta_i) \alpha_i + \beta_i^2)}{8\alpha_i \eta \chi + 9\alpha_i^2 - \beta_i^2},$$

где

$$\chi = \sqrt{\frac{2(\alpha_i^2 - \alpha_i + 1)}{\alpha_i^2}}, \quad n = \sqrt{1 - \frac{\alpha_i^2 - \beta_i^2}{\alpha_i(\eta \chi + \alpha_i)}}.$$

На рис. 5 приведены численные результаты для напряжений (рис.5а), деформаций, перемещений (рис.5б) и годографа напряжений (рис.5с), когда в пластической области реализуется режим

$$f = \alpha_1 \sigma_\theta + \beta_1 \sigma_\rho = k(1 + \eta \varepsilon_{eq}^p), \quad \alpha_1 \in (0.5; 1), \beta_1 = 1 - \alpha_1. \quad (37)$$

На рис.6 приведены графики напряжений (рис.6а) и годограф напряжений (рис.6б), когда в пластической области реализуется режим (38)

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2k(1 + 4\eta E \varepsilon_\theta^p), \quad (38)$$

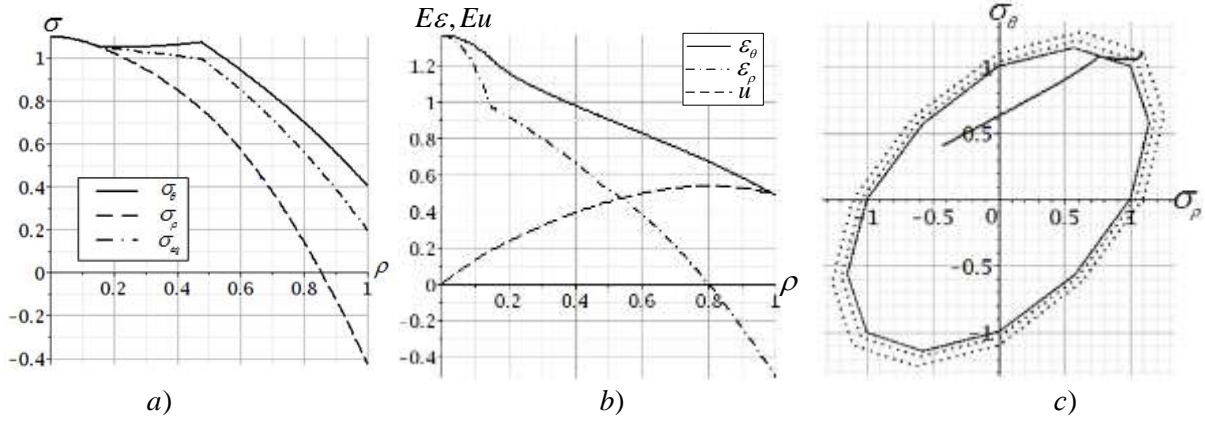


Рис.5. Зависимости для напряжений, деформаций, перемещений и годограф напряжений.

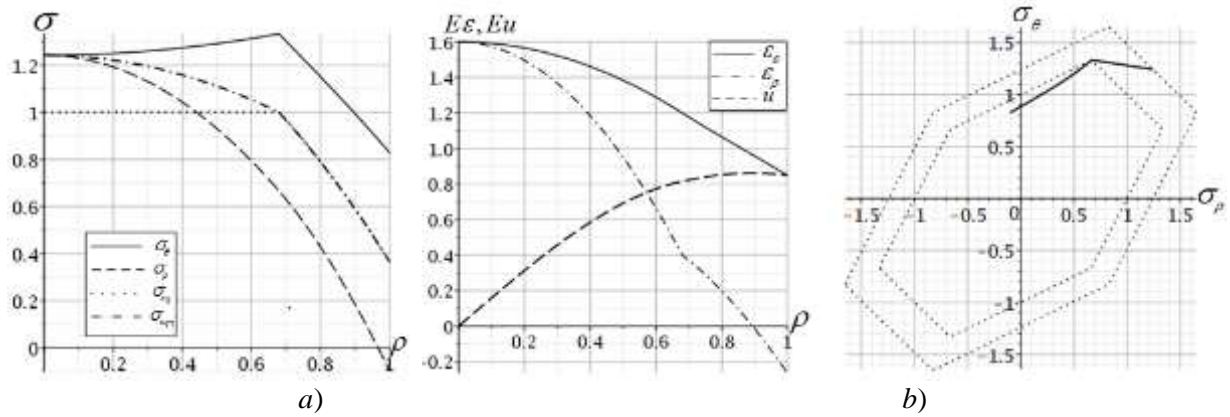


Рис.6. Зависимости для напряжений, деформаций, перемещений и годограф напряжений, условие пластичности Ишлинского – Ивлева с учетом упрочнения.

Выбор кусочно-линейной функции пластичности позволяет получить аналитическое выражение радиуса упругопластической границы  $\rho = c$ . Так для условия Ишлинского – Ивлева получено

$$c = \sqrt{(1 + 8\eta)b^2 - b \sqrt{2 \left( b^2 \left( 32\eta^2 - \frac{4\eta(1-\nu) + 1}{1+\nu} \right) + \frac{4(k + p_b)(1 + 8\eta)}{m(1+\nu)} \right)}}. \quad (39)$$

В четвертой главе рассмотрена задача об упругопластической толстостенной сферической оболочке в условиях теплового и силового воздействий при условии пластичности

$$F(\sigma_\rho, \sigma_\theta) = \frac{\zeta(\sigma_\rho^w + 2\sigma_\theta^w)^{\frac{1}{w}} + n(|\sigma_\rho - \sigma_\theta|)^\nu + \psi(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^\nu)^{\frac{1}{\nu}}}{n(1 + \xi)^{1/\nu} + \zeta} = k, \quad (40)$$

где  $\zeta, n, w, \psi, \nu, \xi$  - числовые коэффициенты.

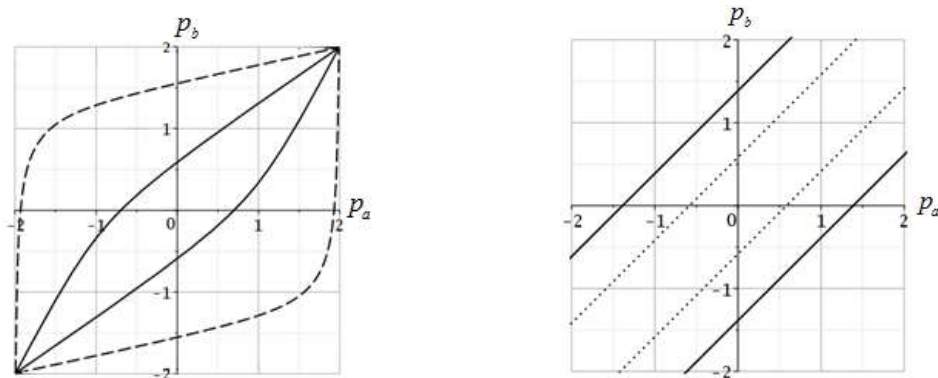
Все величины приводятся к безразмерному виду. За масштаб длины принимается внешний радиус шара  $\rho = b$ . Все величины, имеющие размерность напряжений отнесены к пределу пластичности при одноосном растяжении.

Уравнение равновесия для толстостенной сферической оболочки имеет вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) = 0. \quad (41)$$

При рассмотрении упругопластического состояния полого шара под действием внутреннего  $p_a$  и внешнего давления  $p_b$  для условия (40), при разных числовых коэф-

коэффициентах функции, определены допустимые значения параметров  $p_a, p_b$  для разных состояний шара рис.7  $a = 0.5, b = 1$ .



а)  $\zeta = 0, n = \sqrt{6}, w = 2, m = 3, \xi = 0.5, \psi = 0$       б)  $\zeta = 0, n = 1, m = 1, \xi = 0, \psi = 0$

Рис.7. Области значений параметров  $p_a, p_b$ .

Результаты рис.7 показывают, что при учете первого инварианта тензора напряжений (рис.7 а), когда точка шара находится в упругом состоянии, нагрузка может изменяться в ограниченном диапазоне. Когда первый инвариант в условии пластичности не учитывается (рис.7 б), то упругое состояние возможно для любого значения давления на границах шара, но ограничен перепад давления  $\Delta p = p_a - p_b$ . Учет знака третьего инварианта девиатора напряжений влияет на значения пределов пластичности.

Решена задача определения развития пластических зон в сферической толстостенной оболочке под действием силового и температурного воздействия для условия пластичности (40), когда предел пластичности зависит от температуры линейно  $k = k_0(1 - \zeta T)$ . Изменение температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) в толстостенной сферической оболочке определяется по формуле

$$T = T_b + \frac{a\Delta T}{(b-a)} \left( \frac{b}{\rho} - 1 \right), \Delta T = T_a - T_b, \quad (42)$$

где  $T_a$  - температура на внутренней стенке шара  $\rho = a$ ,  $T_b$  - температура на внешней стенке шара  $\rho = b$ .

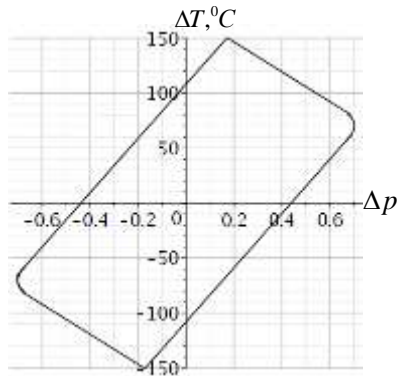
Для оценки напряженного состояния в упругой области введено эквивалентное напряжение, равное выбранной функции пластичности.

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{2} \left| \frac{3a^2b^2(ab\Delta p - (b-a)\lambda_0\Delta T)}{(b^3 - a^3)\rho^3} + \frac{\lambda_0\Delta T}{\rho} \right|, \lambda_0 = \frac{abE\alpha}{(1-\nu)(b-a)}. \quad (43)$$

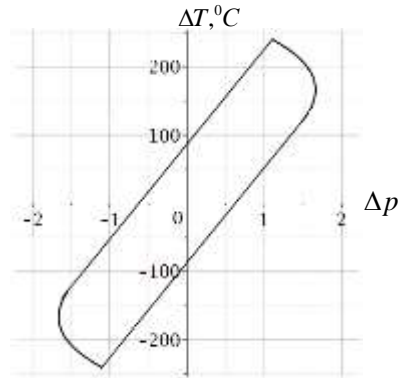
Получены области допустимых значений в 2D подпространстве  $\Delta T, \Delta p$  внешних параметров рис.8, когда толстостенная оболочка находится в упругом состоянии.

Если значения внешних параметров  $\Delta p$  и  $\Delta T$  определяются координатами точек на кривой (рис.8), то происходит зарождение пластической области на одной из границ шара, или между внешней и внутренней границами шара, или одновременно на обеих границах шара.

На рис. 9-10 приведены графики напряжений и годографов вектора напряжений, когда область шара  $a \leq \rho \leq c_1$  находится в пластическом состоянии (рис.9), в случае двух пластических зон (рис.10). На рис. 11-12 приведены графики напряжений и годограф вектора напряжений, с учетом трансляционного упрочнения в случае одной пластической зоны (рис.11) и двух пластических зон (рис.12).

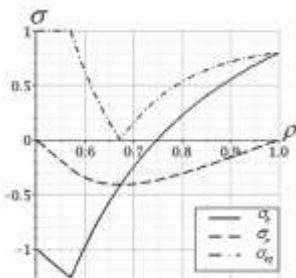


a)  $a=0.7, b=1, \nu=0.2, E\alpha=0.012$

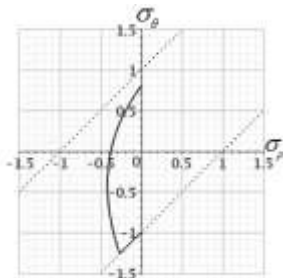


b)  $a=0.4, b=1, \nu=0.2, E\alpha=0.012$

Рис. 8. Области допустимых значений  $\Delta T, \Delta \rho$ .



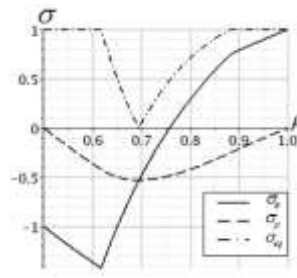
a) напряжения



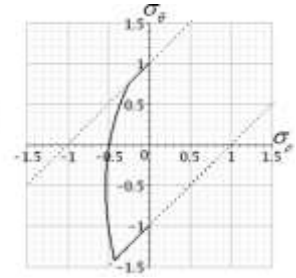
b) годограф

Рис. 9. Графики напряжений.

$\nu=0.3, a=0.5, b=1, \Delta T=170^0C, c_1=0.57$ .



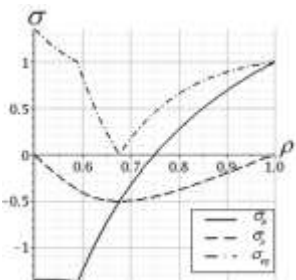
a) напряжения



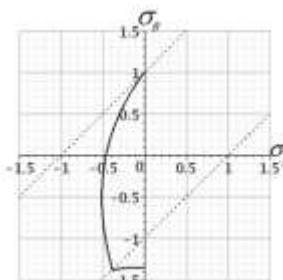
b) годограф

Рис. 10. Графики напряжений.

$\nu=0.3, a=0.5, \Delta T=270^0C, c_1=0.62, c_2=0.88$ .



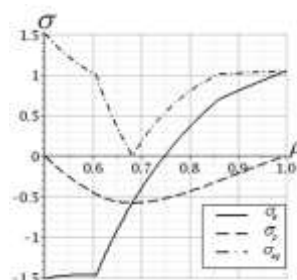
a) напряжения



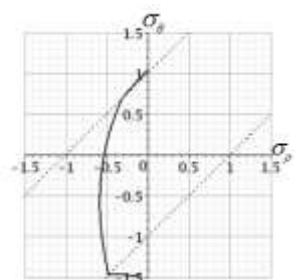
b) годограф

Рис. 11. Графики напряжений.

$\nu=0.3, a=0.5, \Delta T=215.3^0C, c_1=0.59$ .



a) напряжения



b) годограф

Рис. 12. Графики напряжений.

$\nu=0.3, a=0.5, \Delta T=270^0C, c_1=0.61, c_2=0.86$ .

Результаты численных вычислений показали, что, когда имеет место только тепловое воздействие, полый шар полностью не переходит в пластическое состояние (рис. 9-12).

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы:

- показано, что при решении задачи о быстровращающемся диске для кусочно-линейных условий пластичности, кроме условия пластичности максимально приведенного напряжения, в центре диска наблюдается неограниченный рост пластических деформаций, выбор условия пластичности Треска приводит к разрыву перемещений в центре диска;
- показано, что при выборе гладких функций пластичности, в том числе позволяющих с высокой степенью точности аппроксимировать функцию пластичности Треска, в

центре диска не наблюдается неограниченный рост пластических деформаций, что позволило использовать этот подход при решении практических задач;

- предложены алгоритмы численного нахождения напряжений и деформаций в круговом тонком диске для нелинейных функций пластичности;
- рассмотрено влияние комбинированной нагрузки, включающей разные давления и температуру на границах толстостенной сферической оболочки;
- определена область допустимых значений внешнего воздействия (нагрузки), когда толстостенная сферическая оболочка находится в упругом состоянии;
- определена область допустимых значений нагрузки для предельного состояния толстостенной сферической оболочки, когда условие пластичности зависит от трех независимых инвариантов тензора напряжений;
- определены границы изменения комбинированной нагрузки, когда пластическая зона зарождается либо на внутренней границе, либо на внешней границе, либо на внутренней и внешней стенками толстостенной сферической оболочки;
- выполнены численные расчеты и представлены графики распределения напряжений, деформаций, перемещений для конкретных условий пластичности.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК.

1. Сёмка, Э.В. О некоторых аспектах теории пластичности / М.А. Артемов, Е.С. Барановский, Э.В. Сёмка, Ю.Н. Третьякова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2018. – № 1 (35). – С. 39–46.
2. Сёмка, Э.В. Об алгоритме вычисления параметров состояния термопластического диска / Э.В. Сёмка // Вестник Башкирского университета. Серия: Математика и механика – Уфа – 2021. – Т. 26. – №1 – С. 10–15. – DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.1.2
3. Сёмка, Э.В. Задача о толстостенной сферической оболочке / М.А. Артемов, Е.С. Барановский, А.А. Верлин, Э.В. Сёмка // Advanced Engineering Research, Донской государственный технический университет – Ростов-на-Дону – 2021. – Т. 21 – С. 22–31. – DOI: <https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-1-22-31>.

### Публикации в изданиях, входящих в список источников, индексируемых в Web of Science и Scopus.

4. Semka, E.V. Mathematical modeling of rotating disk states / E.V. Semka, M.A. Artemov, Y.N. Babkina, E.S. Baranovskii and A I Shashkin // Published under licence by IOP Publishing Ltd Journal of Physics: Conference Series, Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems 11-13 November 2019. –Voronezh, Russian Federation – 2020. – V. 1479. – DOI:10.1088/1742-6596/1479/1/012122.

### Статьи и материалы конференций.

5. Сёмка, Э.В. Об условиях текучести идеально-пластического тела / Э.В. Сёмка, И.Г. Бердзенишвили, С.В. Золотарев // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж: Изд. дом ВГУ. – 2016. – Выпуск 13 –С.32–35.
6. Сёмка, Э.В. О нейтральном нагружении диска при тепловом и силовом воздействиях / М.А. Артемов, Е.С. Барановский, Г.Г. Бердзенишвили, Э. В. Сёмка, Д.Б. Фатхудинов // Инженерный вестник Дона. – 2018. – № 2. – URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4970>.
7. Сёмка, Э.В. О поведении упругопластического диска под действием теплового источника / М.А. Артемов, Е.С. Барановский, Г.Г. Бердзенишвили, Э.В. Сёмка, Д.Б. Фатхудинов // Инженерный вестник Дона. – 2018. – № 2. – URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4973>.

8. Сёмка, Э.В. Жесткопластическое состояние вращающегося диска / Г.Г. Бердзенишвили, Э.В. Сёмка, Ю.Н. Третьякова, Д.Б. Фатхудинов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации». – 2019. – С. 1043–1050.
9. Сёмка, Э.В. Математическое моделирование состояния вращающегося диска / Г.Г. Бердзенишвили, Н.А. Пеньков, Э.В. Сёмка, Д.Б. Фатхудинов // Информатика: проблемы, методология, технологии: Материалы XIX Международной научно-методической конференции Воронеж, 14-15 февраля 2019 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации». – 2019. – С. 210–216.
10. Сёмка, Э.В. Кусочно-линейные функции пластичности и вращающийся диск / М.А. Артемов, Е. С. Барановский Э.В. Сёмка // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах, Уфа, 19-24 августа 2019. – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2019. –Т. 3. – С. 370–372.
11. Сёмка, Э.В. К задаче о вращающемся диске / Э.В. Сёмка // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации». – 2020. – С. 1525–1529.
12. Сёмка, Э.В. Об использовании кусочно-линейных функций пластичности / М.А. Артемов, Е.С. Барановский, Э.В. Сёмка, А.И. Шашкин // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации». – 2020. – С. 1234–1239.
13. Сёмка, Э.В. Определение допустимых значений параметров управления в задаче о шаре / Э.В. Сёмка // Моделирование энергоинформационных процессов: Материалы VIII национальной научно-практической конференции с международным участием – Воронеж: ФГБОУ ВО «ВГУИТ». – 2020. – С. 84–91.
14. Сёмка, Э.В. Упругопластический полый шар в условиях теплового и силового воздействий / Ю.Н. Бабкина, А.А. Верлин, Э.В. Сёмка, Н. Souikat // Информатика: проблемы, методы, технологии: Сборник трудов Международной конференции, Воронеж, 13–14 февраля 2020 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации». – 2020. – С.–269–275.
15. Semka, E.V. Determining Acceptable Values for Control Parameters in the Hollow Full-Sphere Problem / E.V.Semka, O.S. Lemina, A.A. Verlin, D.I. Solomatin // Informatics: problems, methods, technologies: Proceedings of the International Conference, Voronezh, 13–14 february 2020. – Voronezh: Publishing House "Research Publications". – 2020. – P.240–247.
16. Сёмка, Э.В. Упругопластическое состояние полого шара /Сёмка Э.В. // Вестник инженерной школы ДВФУ. Серия: Механика деформируемого тела – 2020. – № 3(44) – DOI: <http://www.dx.doi.org/10.24866/2227-6858/2020-3-1>.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

17. Сёмка, Э.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. «Программный комплекс для расчета состояния дисков» / М.А. Артемов, Е.С. Барановский, Э.В. Сёмка. – №2020660330; Заявл. 24.04.2020; Зарегистр. 02.09.2020.

Подписано в печать \_\_\_\_ Формат 80x64 1/16.  
Усл. печ.л.096.Тираж100 экз. Зак.№\_\_\_\_  
Отпечатано в типографии Издательский дом ВГУ  
394006, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3