На правах рукописи

ПОЛИКАРПОВ МАКСИМ ВЛАДИМИРОВИЧ

АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА УПРУГОЕ ТЕЛО МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Липецк 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Липецкий государственный технический университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Пеньков Виктор Борисович**
Официальные оппоненты:	**Зингерман Константин Моисеевич**, доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», заведующий кафедрой
	Глаголев Леонид Вадимович, кандидат физико-математических наук, начальник бюро управления "Центр подготовки специалистов" АО "КБП"
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВО "Самарский государственный технический университет"**

Защита состоится «01» марта 2022 г. в 16-00 на заседании диссертационного совета Д 99.2.059.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина 92. (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» и на сайте https://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Polikarpov_MV/

Автореферат разослан «11» января 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Трудности, которые возникают в ходе решения задач для тел, включающих особенности физического и геометрического характера, представляют собой одну из важнейших проблем фундаментальных научных исследований по направлению «Математика и механика». Данные особенности возникают в случаях если граничные условия или сама граница области не являются гладкими. Области, в которых происходит нарушение этих условий, принято называть особыми или сингулярными. Характеризуются они наличием бесконечных напряжений в конкретных точках границы, где, например, происходит контакт различных материалов, смена типа граничных условий и др. Находиться особые точки могут также и внутри области тела, а не только на его границе.

При решении задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) сингулярности различного характера встречаются нередко. Окрестность особых точек является зоной концентрации напряжений, что и является практической значимостью этих решений. Наличие сингулярности значительно усложняет формирование решения, которое могло бы в полной мере отвечать распределению напряжений и деформаций.

Количество полученных точных решений для задач МДТТ при наличии сингулярностей крайне мало. Использование приближенных численных или аналитических методов сталкивается с рядом проблем, связанных с проявлением сингулярности в решениях, которая выражается в виде больших значений напряжений в особых точках. Подводя итог, можно сделать вывод, что наличие зоны ярко выраженной концентрации напряжений, говорит о необходимости дополнительных исследований в окрестности проявления сингулярности.

В конце девятнадцатого века задача о физической сингулярности типа сосредоточенной силы, действующей на границу полуплоскости, была решена профессором Буссинеском Ж.В. в 1885 году. По условиям задачи необходимо было определить значения вертикальных и касательных напряжений в точке, расположенной на площадке, параллельной плоскости, ограничивающей массив от действия сосредоточенной силы.

Мусхелишвили Н.И. для обобщенно плоского напряженного состояния формирует функции, соответствующие действию сосредоточенной силы, приложенной в начале координат к неограниченному телу в рамках теории функций комплексного переменного.

Плоские задачи о напряженно-деформированном состоянии (НДС) при наличии сосредоточенных сил рассматривались в статьях Колганова Ю.А. и Прониной Ю.Г. Ряд работ Кундрата Н.М. и Ядрухина А.К. посвящен механике разрушения под действием сосредоточенных силовых факторов. В рамках динамики сосредоточенные силы и нагрузки исследовались в работах Журавкова М.А. и Романова В.Г.

В трудах Работнова Ю.Н. рассматривается задача о воздействии сосредоточенной силы в изотропной неограниченной упругой среде. Метод решения задач о сосредоточенных воздействиях по поверхности шара и шарового слоя описан в монографии Лурье А.И., акцент сделан именно на сферический характер границ тела.

Для класса плоских задач механики деформируемого твердого тела при организации метода граничных состояний изучены все возможности использования специальных решений в трудах Пенькова В.Б. и Рязанцевой Е.А. Используя эти результаты, можно строить решения плоских задач математической теории упругости практически любой сложности.

В пространственном случае аналогичная проблема встает достаточно остро. Количество сформированных решений для задач механики деформируемого твердого тела, включающего физические или геометрические особенности, крайне мало. Применение численных приближенных методов, как уже говорилось ранее, сталкивается с рядом проблем в местах проявления сингулярности.

Пренебрежение физическими и геометрическими особенностями тел при построении напряженно-деформированного состояния может привести к недостаточной точности и даже к потере решения.

Целью исследования является развитие метода граничных состояний на класс пространственных задач механики деформируемого твердого тела, включающих сингулярности.

Задачи исследования следуют из поставленной цели:

1) разработка общей методики численно-аналитического построения НДС трёхмерного тела произвольной формы, включающего сингулярности, на основе классического (регулярного) способа;

2) постановка пространственных задач математической физики для тел, включающих физические особенности, в терминах метода граничных состояний;

3) теоретическое обеспечение использования «специальных» решений для учета физических особенностей при решении пространственных задач механики деформируемого твердого тела;

4) разработка общей методики численно-аналитического построения НДС для пространственных задач механики деформируемого твердого тела, включающих конечное множество особенностей, для класса сингулярных функций и без искусственных осложнений в описании формы тела;

5) применение предложенных методик для решения конкретных задач с особенностями.

Научная новизна. Научная новизна проводимого исследования заключается в модификации и усовершенствовании МГС на класс пространственных задач теории упругости, включающих физические и геометрические особенности тела. МГС позволяет строить численно-аналитические решения, благодаря чему эффект от учета сингулярности является предсказуемым фактором, чего нельзя ожидать от сугубо численных методов, таких как метод конечных элементов, метод граничных элементов и так далее. МГС также потенциально позволяет строить решения задач, содержащие все физические, геометрические, нагрузочные параметры, то есть полнопараметрические.

Разработка общей методики построения решений пространственных задач математической физики для тел, включающих физические особенности, позволит обеспечить сбережение вычислительных ресурсов.

Теоретическая значимость заключается в предоставлении реальных возможностей построения численно-аналитических решений для пространственных задач, осложненных наличием сингулярности (в перспективе – автоматическими средствами компьютерных алгебр).

Практическая ценность заключается в ресурсосбережении. Предложенная методика численно-аналитического построения НДС для пространственных задач механики деформируемого твердого тела позволяет анализировать влияние сингулярностей без искусственных осложнений в описании формы тела.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-31-90065.

Методология и методы исследования. Методология исследования включает в себя использование классических моделей механики сплошной среды и основные строго доказанные положения относительно линейно-упругой среды:

1) принцип возможных перемещений для обоснования справедливости свойств скалярных произведений и установления изоморфизма гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний;

2) строгий математический аппарат теории пространств;

3) самодостаточный с позиций обеспечения с задаваемой точности решения энергетический метод граничных состояний.

Положения, выносимые на защиту:

1. Общая методика численно аналитического построения НДС трехмерного тела произвольной формы, включающего особенности на основе классического (регулярного) способа, а также для класса сингулярных функций и без искусственных осложнений в описании формы тела.

2. Постановка задач о механических сингулярностях произвольного характера.

3. Технология компенсации “следов” сингулярностей на границе тела при наложении множества полей НДС.

4. Численно-аналитические решения конкретных пространственных задач эластостатики.

Вычисления проводились средствами системы Mathematica.

Степень достоверности. Использование энергетического метода граничных состояний позволяет:

1) гарантировать построение решения с любой наперед заданной точностью за счет наращивания удерживаемого отрезка базиса состояний;

2) благодаря тому, что в постановках задач теории упругости определяющие соотношения среды удовлетворяются тождественно, фактическую точность построенного решения можно оценить сравнением заданных граничных условий с построенным граничным состоянием

использованием любой оценочной меры (визуальное сопоставление граничных условий с решением, оценка невязки решения с граничными условиями).

Таким образом, **достоверность** обеспечивается:

1) использованием классических положений теории упругости;

2) корректной математической постановкой задач;

3) использованием самодостаточного метода решения (МГС), ориентированного на компьютерные алгебры. Самодостаточность состоит в том, что дифференциальные уравнения удовлетворяются тождественно, а ошибка формируется только в отклонении при восстановлении граничного состояния от граничных условий из-за ограничиваемого размера базиса пространства состояний;

4) оценкой погрешности решений при помощи среднеквадратичной интегральной невязки.

Область исследования. Диссертационная работа соответствует пунктам 2, 5, 8 паспорта специальности «Механика деформируемого твердого тела».

Апробация работы. Результаты исследования и основные материалы диссертационной работы многократно представлялись на семинарах научной школы «Математические методы и модели механики» (руководитель В.Б. Пеньков, Липецк, ЛГТУ), на научной конференции студентов и аспирантов ЛГТУ «Тенденции развития современной науки» (Липецк, ЛГТУ, 24–26 апреля 2017 г.), на V международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы в науке и практике» (Самара, 1 февраля 2018 г.), на научной конференции студентов, магистров и аспирантов института машиностроения в ЛГТУ (Липецк, ЛГТУ, 9 февраля 2018 г.), на областном профильном семинаре «Школа молодых ученых по проблемам технических наук» (Липецк, ЛГТУ, 15 ноября 2019 г.), на международной конференции по системам управления, математическому моделированию, автоматизации и энергоэффективности SUMMA (Липецк, 11-13 ноября 2020 г.), на международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 7-9 декабря 2020 г.), на IX международном научном симпозиуме «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела» (Тверь, 16 декабря 2020 г.), на научном семинаре по механике деформируемого твёрдого тела имени Л.А. Толоконникова (Тула, ТулГУ, 25 мая 2021 г.).

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 15 печатных работ, в том числе 2 статьи опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК РФ, 2 статьи – в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных Scopus, и 2 статья – Web of Science. Во всех публикациях [1-15] с соавторами соискателем выполнены процедуры, связанные с организацией построения решения для пространственных задач механики деформируемого твердого тела, включающих конечное множество механических сингулярностей.

Структура и объем диссертации: диссертация состоит из введения, трёх разделов, заключения, списка литературы. Объем основного текста составляет 71 страницу, включая 41 рисунок и список литературы из 102 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведены актуальность темы исследования, цели и задачи, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методология и методы исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов.

В первом разделе описывается разработка основанной на МГС методики численно-аналитического построения НДС трехмерного тела произвольной формы, нагруженного системой сосредоточенных сил. Особенности учитывались классическим (регулярным) способом, при помощи специальных решений, непосредственно включенных в исходный базис внутренних и граничных состояний, но из упругого тела исключались малые окрестности сингулярных воздействий.

Сосредоточенная сила представляет собой идеализацию локально сконцентрированного в малой области поверхностного усилия значительной величины. Этот подход согласуется с принципом Сен-Венана, постулирующим индифферентность индивидуальной формы приложенной нагрузки по отношению к удаленной точке наблюдения: требуется, чтобы главные величины, характеризующие механическое воздействие (главный вектор, момент) имели соответствующие значения. Этот же подход позволяет при проведении вычислений заменять сосредоточенный фактор эквивалентным по действию распределенным.

Поверхность ∂V трехмерного тела с гладкими границами покрыта n локальными “пятнами” S_k габаритного диаметра 2ε каждое, в центре которых сосредоточены силы $\mathbf{p}_k$ (рисунок 1). Каждый вектор $\mathbf{p}_k$ заменен его приближенным представлением в форме вектора пространственного многочлена 4-го порядка, обеспечивающих нулевое значение гладкого “полипа” на границах пятна и гладкость его перехода к нулевому уровню напряжений $\mathbf{p}_k = 0$, $x \in S_0 = \partial V \setminus \cap_{k=1}^{n} S_k$.

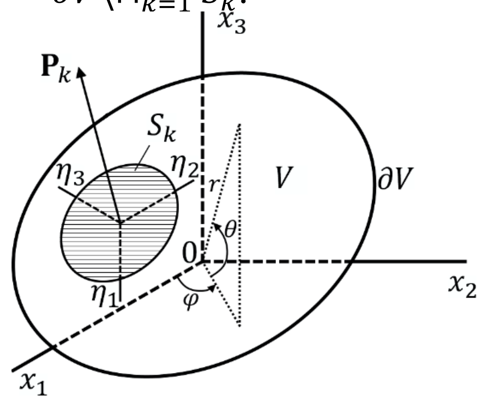


Рисунок 1 – Локализация пятна S_k

$$\mathbf{P}_k = \int_{S_k} \mathbf{p}_k(\eta) dS_\eta,$$
$$\mathbf{p}_k = p_j^k(\eta),\ \eta = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\},$$
$$p_j^k(\eta) = p_j^{0k}\left(\frac{3}{\varepsilon^2\pi} - \frac{6r^2}{\varepsilon^4\pi} + \frac{3r^4}{\varepsilon^6\pi}\right),$$
$$r^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2,\ \eta \in S_k,$$

где p_j^{0k}- максимальное значение усилия на пятне k в направлении оси j.

Кроме смягченных сосредоточенных воздействий будем полагать заданной по всей границе ∂V функцию $\mathbf{p}_0(x)$, имеющую непрерывный гладких характер. Таким образом граничные условия первой основной задачи имеют вид

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} \mathbf{p}_0(x) + \mathbf{p}_k(x), & x \in S_k \\ \mathbf{p}_0(x), & x \in S_0 \end{cases}.$$

По всей границе ∂V вектор $\mathbf{p}(x)$ представляет собой гладкую непрерывную функцию.

Как известно, решение первой основной задачи средствами МГС сводится к вычислению коэффициентов Фурье через ортонормированный базис $\{\gamma^{(l)}\}$ пространства граничных состояний Г и последующему восстановлению актуальных внутренних и граничных состояний через ряды Фурье.

Реально вместо полного базиса используется его усеченный вариант с $l \in [1, N]$. В силу особенности граничных условий, близких к сингулярным для обеспечения точности можно не назначать чрезмерно высокое значение, для N, но ввести в исходный базис специальные элементы "схватывающие" эти особенности. Порядок ряда N при этом снижается кардинально. Введенные решения имеют право наполнять базис, поскольку:

1) они линейно-независимы: никакой конечный набор ограниченных в ограниченной области, охватывающей все особые точки, не может дать бесконечных значений в этих точках;

2) их введение в исходный регулярный отрезок базиса не отражается на требованиях его полноты.

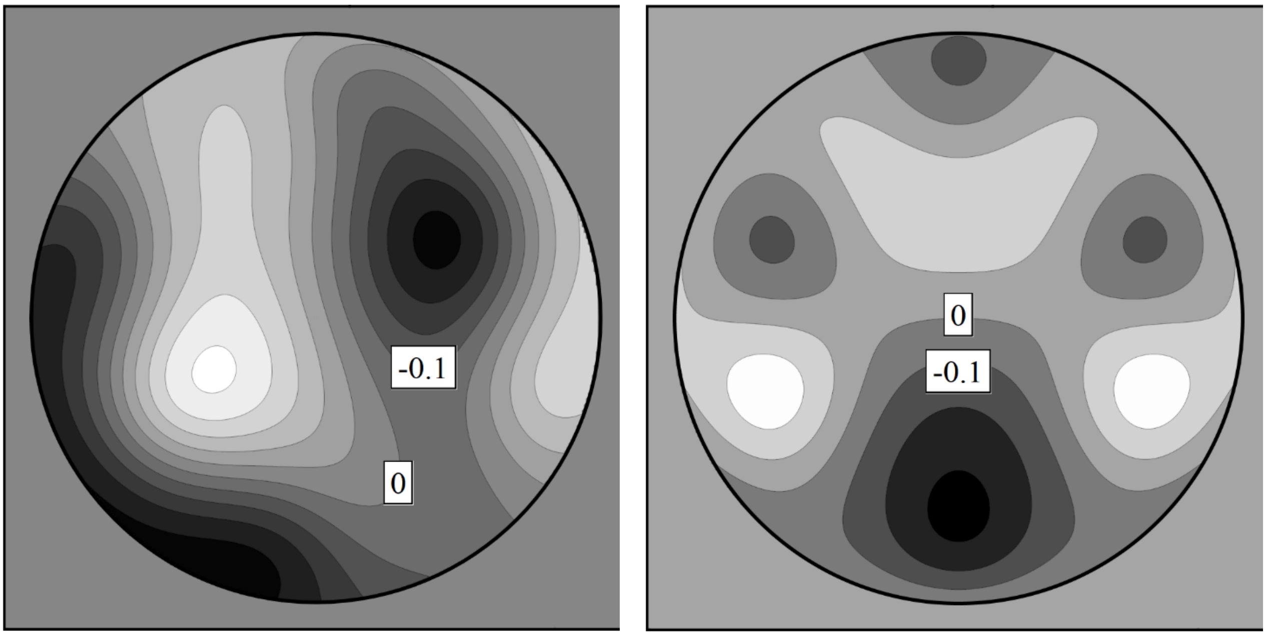
Точка, находящаяся под воздействием сосредоточенной силы, смещена от границы тела на малую величину ε. Это вынужденная, но допустимая мера, поскольку: 1) на удалении от центра воздействия на расстояние, многократно превышающем ε картина деформирования идентична идеализированной, согласно принципу, Сен-Венана; 2) смещение центра воздействия на ε от границы тела позволяет гарантированно вычислять пространственные и поверхностными интегралы, скрытые в скалярных произведениях, численными средствами.

В качестве конкретных примеров эффективности использования специальных решений для преодоления сингулярности физического характера средствами МГС выполнены решения двух задач о шаре, покоящимся под воздействием сжимающих встречно ориентированных сосредоточенных сил, направленных вдоль координатных осей x, y, z. Обоснована достоверность полученных результатов.

В случае первой основной задачи коэффициенты Фурье разложения искомого состояния по ортонормированному базису $\{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(k)}, \cdots\} \in \Xi$ пространства внутренних состояний Ξ вычисляются в соответствии с определением скалярного произведения по границе тела.

Характеристики, которые отвечают за напряженно-деформированное состояние имеют форму громоздких аналитических выражений; из-за их визуальной необозримости они здесь не приведены. Для краткости на рисунке 2 представлены изолинии напряжений, построенные в сечении $x + y + z = 0$ для случая с шестью заданными сосредоточенными силами на полюсах шара.

На рисунках более светлые слои отвечают большему уровню напряжений (нулевой уровень представлен фоном за пределами тела). На изолиниях отражено увеличение напряжения по мере приближения к областям с сингулярностью.



а) б)

Рисунок 2 – Изолинии напряжений при шести сосредоточенных вдоль координатных осей сил а) σ_{xx}; б) σ_{xy}

В качестве сравнения результата подхода МГС для решения задач, осложнённых наличием физической сингулярности, с классическим решением, выполнен расчет НДС для сферы, внутрь которой помещена особенность типа центр расширений.

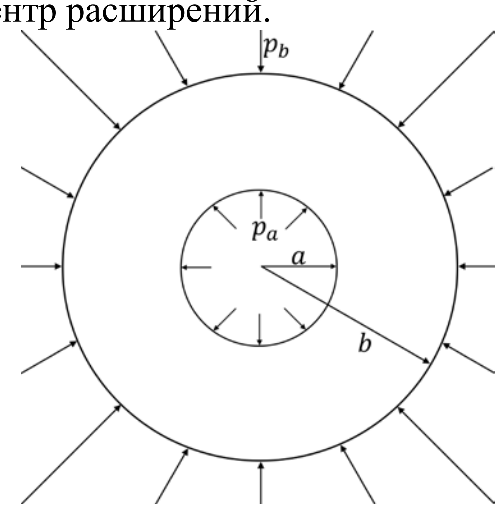


Рисунок 3 – Деформация толстостенного сферического сосуда

Решение такой задачи можно найти в классических руководствах по МДТТ. В частности, в монографии Безухова Н.И, решение выписано для полярно-симметричной деформации толстостенного сосуда (рисунок 3). Окончательный вид для напряжений представлен в алгебраической форме

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t &= p_a\frac{a^3(2r^3+b^3)}{2r^3(b^3-a^3)} + p_b\frac{b^3(2r^3+a^3)}{2r^3(b^3-a^3)},\\ \sigma_r &= p_a\frac{a^3(r^3-b^3)}{r^3(b^3-a^3)} + p_b\frac{b^3(a^3-r^3)}{r^3(b^3-a^3)}.\end{aligned}\right\}$$

Сравнение решения полученного по методу граничных состояний с классическим решением приведено на рисунке 4, на котором график, построенный в сечении $y = z = 0$, где полужирной черной пунктирной линией обозначено классическое решение, а сплошной синей – полученное решение по методу граничных состояний.

Приведенный график убеждает в высокоточном совпадение полученного решения с классическим решением тестовой задачи.

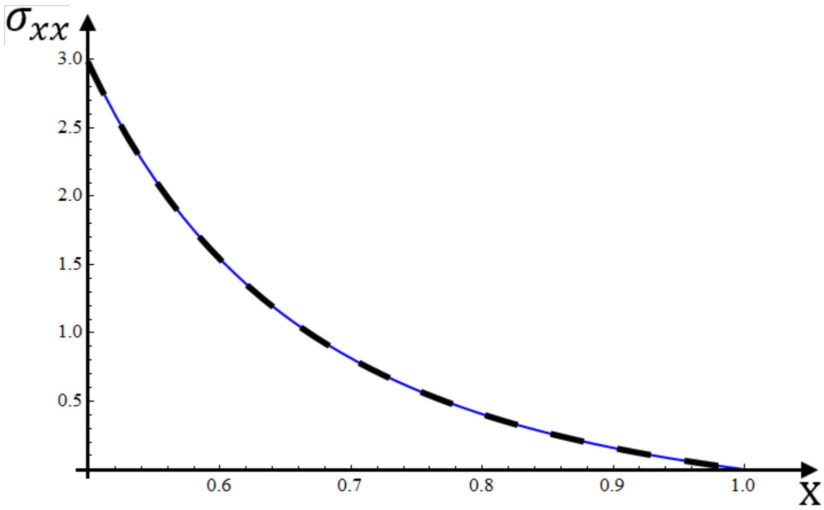


Рисунок 4 – Сравнение решения МГС с классическим

Во втором разделе введено понятие механической сингулярности как внешнего фактора воздействия на упругую среду и ему соответствующего напряжённо-деформированного состояния. Конкретизировано понятие локализации механической сингулярности как множества точек трехмерного пространства, отвечающего за сингулярную часть внутреннего состояния поля.

С математической точки зрения можно под механической сингулярностью пространства R^n будем понимать связанное множество точек, обладающее меньшей (не большей) размерностью, чем n.

В частности, в трехмерном пространстве:

1. “0-сингулярность” – изолированные особые точки;

2. “1-сингулярность” – пространственно-непрерывная линия, при приближении к которой R^3 наблюдаются особые свойства в поведении решения;

3. “2-сингулярность” – слой, совокупность точек непрерывной двумерной области;

4. “3-сингулярность” – обобщение на случай полной размерности, удобно использовать, например, для описания частного решения от объемных сил.

Внутреннему состоянию $\check{\xi}$ изоморфно соответствует граничное состояние $\check{\gamma}$: $\check{\xi} \leftrightarrow \check{\gamma}$, являющейся его “следом” на границе ∂V области V, занятой телом.

Приведены примеры нульмерных и одномерных механических сингулярностей (“0,1 – сингулярность”), определяющих сингулярные особенности локализованных воздействий на механические поля.

1. Сосредоточенная сила

$$\mathbf{u}(M,Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R}\left[(3-4\nu)\hat{E} + \frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right] \times \mathbf{P}. \qquad (1)$$

2. Центр расширения (давления)

$$\mathbf{u}(M,Q) = \frac{q}{4\pi\mu(1-\nu)}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}. \qquad (2)$$

Отмечено, что объемные силы можно рассматривать как “3 – сингулярность”, что удобно, поскольку общий метод построения строгого решения для силы полиномиального характера известен.

Выполнена постановка задач о механических сингулярностях произвольного характера. Указаны методы решения таких задач.

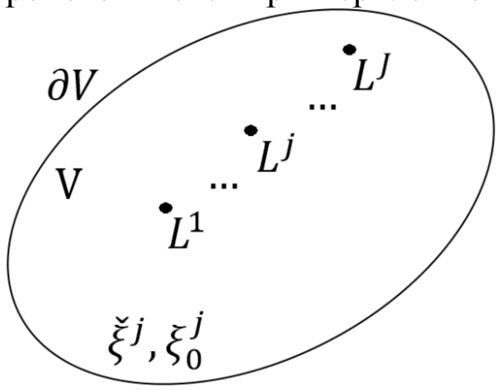


Рисунок 5 – Локализация конечного множества механических сингулярностей

Пусть множество механических сингулярностей $\{L^j\}$ локализовано в области $V \in R^3$ с границей ∂V (рисунок 5).

Для краткости область определения L^j механической сингулярности j будем называть локализацией.

$$L = \cup_{j=1}^{J} L^j, J = \left|\{L^j\}\right|,$$

где $|\ldots|$ определяет мощность конечного множества $\{L^j\}$.

В общем случае каждая механическая сингулярность j характеризуется своим скалярным параметром p_j, имеющим значение именно для неё. В области V ей отвечает в общем случае сингулярное внутреннее состояние $\check{\xi}^j = p_j \check{\xi}_0^j$, где $\check{\xi}_0^j$ есть “эталонное” состояние, отвечающее единичному значению параметра.

Состоянию $\check{\xi}^j$ соответствует изоморфное граничное состояние $\check{\gamma}^j = p_j \check{\gamma}_0^j$, где $\check{\gamma}^j, \check{\gamma}_0^j$ отвечают соответствующим значениям p_j. Граничное состояние $\check{\gamma}^j{}_0$ позволяет восстановить соответствующее $(-\check{\gamma}_0^j)$ регулярное состояние ξ_0^j. Сумма $\check{\xi}^j + \xi_0^j$ компенсирует воздействие на границе ∂V до тривиального уровня.

Обозначим через $F(\xi, L^j)$ значение функционала, возвращающее величину некоторого скалярного параметра p, соответствующего состоянию ξ над локализацией L^j. В частности, примем обозначения

$$\check{l}_{kj} = F(\check{\xi}_0^k, L^j). \tag{3}$$

Отсюда в силу “эталонности” воздействия для состояния $\check{\xi}_0^k$ получим

$$\check{l}_{kk} = F(\check{\xi}_0^k, L^k) = 1.$$

Справедливы также соотношения:

$$F(\check{\xi}^k, L^j) = p_k \check{l}_{kj}, F(\check{\xi}^k, L^k) = p_k. \tag{4}$$

Введенные обозначения позволяют решать вопрос о назначении в специальные решения, отвечающие за механические сингулярности, значений параметров p_{j0}, обеспечивающих, требуемый уровень p_j при всевозможных комбинациях полей механических сингулярностей и компенсирующих реакций на них.

Обнаружена особенность в построении решения, связанного с наложением множества полей напряжённо-деформированного состояния, образованных собственно сингулярными воздействиями, компенсацией “следов” механических сингулярностей на границе тела, конкретными граничными условиями. Указаны эффективные средства преодоления трудностей во всех случаях, сводящего к формированию и решению дополнительной системы линейных алгебраических уравнений относительно значений характеризующих параметров каждой механической сингулярности.

Пусть в области V локализована единственная механическая сингулярность $L \subset \mathrm{V}$ (рисунок 6).

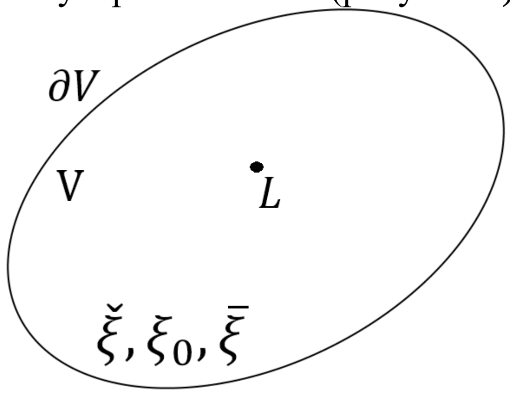


Рисунок 6 – Локализация одной механической сингулярности

На рисунке обозначено:

$\check{\xi}$ – сингулярное внутреннее состояние от механической сингулярности;

ξ_0 – регулярное состояние, компенсирующее возмущение граничных условий (ГУ) механической сингулярностью;

$\bar{\xi}$ – регулярное состояние, вызванное только ГУ на ∂V без учета воздействия механической сингулярности.

В силу линейных свойств состояний $\check{\xi}, \xi_0, \bar{\xi}$ справедливо утверждать о том, что реальное состояние ξ (результирующее состояние) является суперпозицией всех упомянутых факторов:

$$\xi = \check{\xi} + \xi_0 + \bar{\xi},$$

а в силу однородности этих состояний получим

$$\xi = p_0\check{\xi}_0 + p_0\xi_0^0 + \bar{\xi},$$

где p_0 – задаваемое значение параметра механической сингулярности, $\check{\xi}_0$ – сингулярное поле от эталонного воздействия, ξ_0^0 – регулярное поле, компенсирующее эталонное (единичное) воздействие механической сингулярности в части возмущения граничных условий сингулярным воздействием.

Для случая с конечным множеством механических сингулярностей $L^1, \cdots, L^J$ в локализации $L^j \subset \mathrm{V}$ и характеризующиеся в L^j значениями параметров p_j, где $j, k \in \{1, \ldots, J\}$.

Суперпозиция состояний дает

$$\xi = \sum_{k=1}^{J} p_0\left(\check{\xi}_0^k + \xi_0^k\right) + \bar{\xi}. \tag{5}$$

Суперпозиция полей вызывает искажение требуемого значения параметра p сингулярности в локализации L. Для обеспечения требуемого значения в качестве параметра сингулярности следует использовать такое p_0, чтобы в результирующем состоянии наблюдалось именно p.

Пусть за оценку значения параметра p в локализации L отвечает линейный функционал $p = F(\xi, L)$.

Тогда его применение к результирующему полю (5) дает

$$F(\xi, L) = F\left(p_0\check{\xi}_0 + p_0\xi_0^0 + \bar{\xi}\right) = p_0\left[F\left(\check{\xi}_0, L\right) + F(\xi_0^0, L)\right] + F\left(\bar{\xi}, L\right) =$$
$$p_0[1 + F(\xi_0^0, L)] + F\left(\bar{\xi}, L\right).$$

При заданных граничных условиях и эталонном воздействии в локализации сингулярности значения функционалов в правой части уравнения вычислено, а в левой части оно должно быть равно p. Тогда из уравнения следует, что

$$p_0 = \frac{p - F(\bar{\xi}, L)}{1 + F(\xi_0^0, L)}. \tag{6}$$

Задавая в специальном решении $\check{\xi}$ значение параметра p_0, обеспечиваем в результирующем состоянии требуемое значение p.

В третьем разделе рассмотрены различные подходы к моделированию источника давления. Определена связь параметра интенсивности в центре растяжения с давлением на границе источника давления. Подробно описано назначение введенного выше функционала.

Продемонстрирована эффективность использования предложенной методики численно-аналитического построения напряженно-деформированного состояния для пространственных задач механики деформируемого твердого тела, включающих конечное множества сингулярностей, позволяющей избежать искусственных осложнений в описании формы тела и искать решения не в классе регулярных функций, но в классе сингулярных.

Построено решение, которое отвечает за напряженно-деформированное состояние, неограниченной однородной эластостатической среды, осложненной двумя встречно-направленными сосредоточенными силами, а также решение для задачи, содержащей три сосредоточенные силы.

На рисунке 7 представлено отображение насыщения полей напряжений в виде изолиний для задачи с двумя сосредоточенными силами, построенных в сечении $z = 2$.

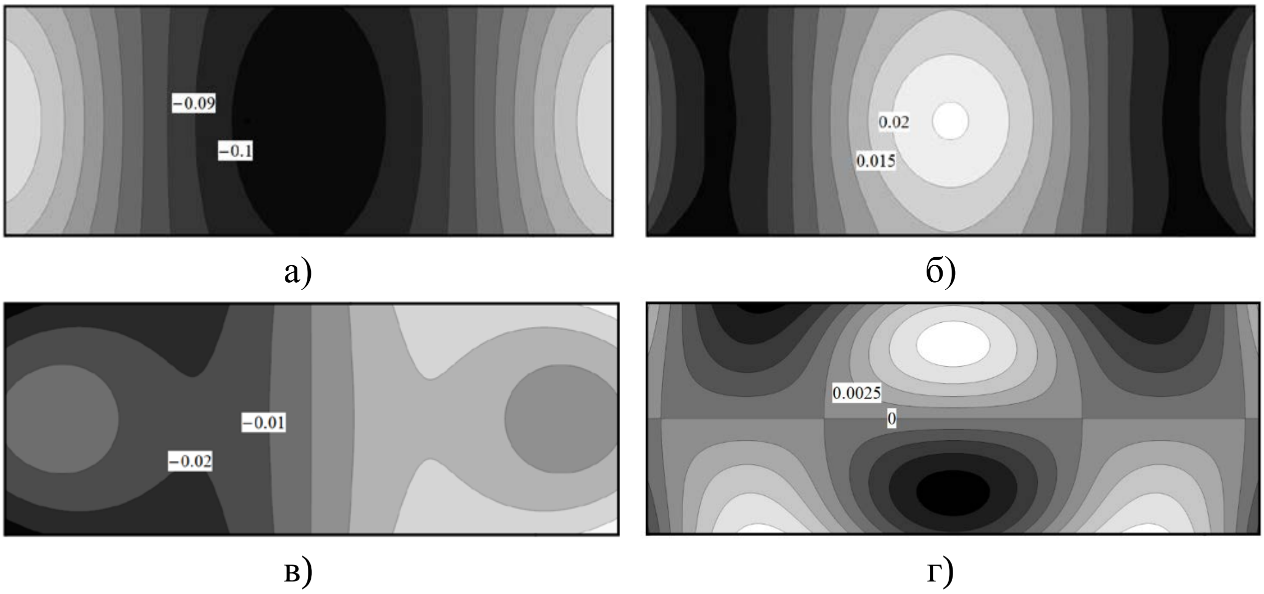


Рисунок 7 – Изолинии напряжений а) σ_{xx}; б) σ_{yy}; в) σ_{xz}; г) σ_{yz}

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования цель достигнута. Все поставленные задачи выполнены:

1. Разработана общая методика численно-аналитического построения НДС трехмерного тела произвольной формы, включающего особенности на основе классического (регулярного) способа.

2. Введено понятие механической сингулярности как внешнего фактора воздействия на упругую среду и ему соответствующего напряжённо-деформированного состояния. Конкретизировано понятие локализации механической сингулярности как множества точек трехмерного пространства, отвечающего за сингулярную часть внутреннего состояния поля.

3. Выполнена постановка задач о механических сингулярностях произвольного характера. Указаны методы решения таких задач.

4. Предложена и обоснована методика численно-аналитического построения НДС для пространственных задач механики деформируемого твердого тела, включающих конечное множество особенностей для класса сингулярных функций и без искусственных осложнений в описании формы тела.

5. Решена проблема в построении решения, связанного с наложением множества полей НДС, образованных собственно сингулярными воздействиями, компенсацией “следов” механических сингулярностей на границе тела, конкретными граничными условиями. Указаны эффективные средства преодоления трудностей во всех случая, сводящего к формированию и решению дополнительной системы линейных алгебраических уравнений относительно значений характеризующих параметров каждой механической сингулярности.

6. Все вышеперечисленные выводы подтверждены решением представительной серии конкретных задач:

- две задачи о шаре, покоящимся под воздействием сжимающих встречно ориентированных сосредоточенных сил;
- моделирование взаимодействия двух полостей при варьировании внутриполостного давления, а также зависимости прочностных характеристик несущего массива от расстояния между полостями;
- тестовая задача с единственной сингулярностью, типа центра расширения;
- моделирование однородной эластостатической среды, осложненной двумя и тремя встречно-направленными сосредоточенными силами;
- серия задач о взаимодействие конечного множества центров расширения.

7. Круг решенных задач убеждает в эффективности разработанных методик.

Просматриваются следующие ближайшие перспективы расширения разработанной методики численно-аналитического построения НДС для пространственных задач механики деформируемого твердого тела: оценка погонных нагрузок, распределенных по прямой, полупрямой, отрезку; оценка неограниченного пространственного ребра на поверхности тела с постоянным углом раствора, меняющимся углом раствора; доведение вычислительного комплекса, базирующегося на компьютерной алгебре среды Matematica, до уровня автоматизированной системы, выписывающего решение для произвольной задачи эластостатики тела, включающего конечное множество сингулярностей.

Соискатель выражает благодарность Л.В. Левиной за своевременные и четкие консультации в части МГС.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, включенных в перечень ВАК:

1. Поликарпов, М.В. Оптимизация облегченных элементов крепления при варьировании геометрических параметров / М.В. Поликарпов, В.Б. Пеньков, Л.В. Левина, О.С. Новикова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2017. – №4 (34). – С. 45–51.
2. Поликарпов, М.В. Сосредоточенные силовые воздействия в методе граничных состояний / М.В. Поликарпов, В.Б. Пеньков // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2020. № 1 (43). – С. 34-44.

Публикации в изданиях, индексируемых в Web of Science:

3. Polikarpov, M.V., Penkov, V.B. (2020) Method of boundary states in problems of interactions of two cavities. International Transaction Journal of Engineering, Management, and Applied Sciences and Technologies. Vol. 11. No 12. pp. 220-229. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2020.244.
4. Ivanychev, D.A., Levina, E.Yu., Novikov, E.A., Polikarpov, M.V. (2021). Solution of the First Main Problem of the Theory of Elasticity for a Transtropic Body of Revolution. International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies, 12(3), 12A3L, 1-9. http://doi.org/10.14456/ITJEMAST.2021.54.

Публикации в изданиях, индексируемых в Scopus:

5. Penkov, V.B., Polikarpov, M.V., Levina, L.V., "Efficient Solutions of Mixed-Type Axial Symmetry Problems for Perfect Fluids," 2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russia, 2020, pp. 52-55, doi: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280583.
6. Point-like mechanical singularity in the method of boundary states / M.V. Polikarpov V.B. Penkov, L.V. Levina // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series / International Conference «Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems». – 2021. – Volume 1902, № 012022. – 12 p. – doi: 10.1088/1742-6596/1902/1/012022.

Другие публикации:

7. Поликарпов, М.В. Математическое моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния неоднородных конструкционных элементов / М.В. Поликарпов // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. – 2015. – С. 159-162.
8. Поликарпов, М.В. Упругое состояние неоднородных конструкционных элементов / М.В. Поликарпов, В.Б. Пеньков, Л.В. Левина// Потенциал современной науки. - 2015. - № 3. - С. 7-13.
9. Поликарпов, М.В. Упругое состояние однородных конструкционных элементов / М.В. Поликарпов, Л.В. Левина // Проблемы современной науки, сборник научных трудов конференции Липецкого государственного технического университета. Липецк: Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2016. – С. 134-137.

10. Поликарпов, М.В. Напряжённо-деформированное состояние неоднородных конструкций при варьировании геометрических параметров / М.В. Поликарпов, Л.В. Левина, О.С. Новикова, Е.А. Новиков // Тенденции развития современной науки: сб. тез. докл. науч. конф. студентов и аспирантов ЛГТУ (24–26 апреля 2017 г.): в 2 ч. Ч. 1. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2017. – С. 33-36.

11. Включение геометрических параметров в полнопараметрическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии неоднородного тела / В.Б. Пеньков, О.С. Новикова, М.В. Поликарпов, Л.В. Левина // Актуальные вопросы в науке и практике: сб. ст. по материалам V междунар. науч.-практ. конф. (Самара, 1 февраля 2018 г.) В 4 ч. Ч.1 - Уфа: Изд-во «Дендра», 2018. – С. 212-218.

12. Поликарпов, М.В. Применение метода граничных состояний для расчета напряженно-деформированного состояния пространственного тела, подверженного сингулярным воздействиям / М.В. Поликарпов // Материалы областного профильного семинара «Школа молодых ученых» по проблемам технических наук, 15 ноября 2019 г. – Липецк: Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2019. – С. 138–141.

13. Поликарпов, М. В. Механическая сингулярность типа сосредоточенной силы в методе граничных состояний / М. В. Поликарпов, В. Б. Пеньков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 7-9 декабря 2020 г. — Воронеж, 2021. – С. 1422-1427.

14. Поликарпов, М. В. Сингулярность типа центра расширения в методе граничных состояний / М. В. Поликарпов, В. Б. Пеньков, Л. В. Левина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 7-9 декабря 2020 г. — Воронеж, 2021. – С. 1428-1434.

15. Поликарпов, М.В. Исследование сингулярных воздействий на упругое тело средствами метода граничных состояний / М.В. Поликарпов, В.Б. Пеньков, Л.В. Левина // Материалы IX Международного научного симпозиума «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела». – Тверь, 2021.