

На правах рукописи



Аженеза Олег

**АНАЛИЗ УДАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ВЯЗКОУПРУГУЮ
ПЛАСТИНКУ, МАТЕРИАЛ КОТОРОЙ ОБЛАДАЕТ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ
КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА**

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ВГТУ»).

Научный руководитель:

Шитикова Марина Вячеславовна

доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «ВГТУ», международный научный центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук имени Заслуженного деятеля науки РФ профессора Росихина Ю.А., руководитель

Официальные оппоненты:

Ерофеев Владимир Иванович

доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем машиностроения РАН – филиала ФГБУ НУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН», директор, г. Нижний Новгород

Лисовенко Дмитрий Сергеевич

доктор физико-математических наук, ФГБУ науки «Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН», лаборатория механики технологических процессов, заведующий лабораторией, г. Москва

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (г. Самара)

Защита состоится «22» июня 2021 г. в 16:00 часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92, ауд. 12-105.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Ageneza_O/

Автореферат разослан « » апреля 2021.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д. физ.-мат. н.

Глаголев Вадим
Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В настоящее время внимание материаловедов привлекают методы повышения эксплуатационных характеристик традиционных материалов путем создания структур, обладающих существенно нелинейными и аномальными деформационными свойствами, вплоть до получения адаптивной (приспособительной) механической реакции материалов на внешнее воздействие. К таким аномалиям можно отнести материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона, которые способны расширяться/сужаться в направлении, перпендикулярном направлению растяжения/сжатия соответственно. Такие материалы получили название «ауксетики». Обзоры об ауксетиках, их свойствах, способах получения и области применения приведены в работах К.Е. Evans, К.L. Alderson, R.S. Lakes, Д.А. Конека, К.В. Войцеховски, Ю.М. Плескачевского и др.

Ввиду отрицательного коэффициента Пуассона ауксетические материалы обладают полезным набором механических свойств, большинство которых превосходят аналогичные свойства неауксетических материалов, а некоторые являются уникальными. В результате экспериментальных исследований было показано, что материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона являются лучшим вариантом для гашения (амортизации) ударных воздействий относительно традиционных материалов. Данное свойство можно усовершенствовать сочетанием ауксетических и вязкоупругих материалов. Ауксетики имеют широкое практическое применение, поэтому материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона привлекают внимание специалистов в области механики материалов, и этим объясняется большое количество сведений о них (I.I. Argatov, A. Alderson, К.Е. Evans, A. Atalp, M. Shokri Rad, C. Qi и др.), и в том числе в научной русскоязычной литературе (Р.В. Гольдштейн, В.А. Городцов, Д.С. Лисовенко, В.И. Ерофеев, И.С. Павлов, Россихин Ю.А., Шитикова М.В. и др.).

При погрузке и разгрузке, транспортировке, монтаже и в процессе эксплуатации элементы строительных конструкций (балки, пластинки, оболочки) часто подвергаются ударным воздействиям. Натурные наблюдения и экспериментальные исследования подтверждают, что ударные воздействия могут вызывать появление трещин и даже разрушение этих элементов, что может привести, в конечном счёте, к повреждению конструкции в целом.

Поскольку пластинки часто используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники, то изучение их механической реакции на внешние ударные воздействия является весьма актуальным и важным особенно в тех случаях, когда свойства соударяющихся тел изменяются в области контакта в процессе ударного взаимодействия.

Большинство работ, которые посвящены ауксетикам, сводятся к экспериментальному исследованию характеристик материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона и их численному анализу, в то время как количество работ, в которых проведены расчеты конструкций из ауксетиков, довольно ограничено. Математическое моделирование поведения ауксетиков находится в стадии становления.

В данной диссертационной работе рассматривается актуальная задача о поведении пластинки из ауксетического материала при ударном воздействии.

Целью диссертационной работы является анализ динамического поведения вязкоупругой пластины, материал которой проявляет ауксетические свойства, при ударных воздействиях.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решены следующие задачи:

1. Постановка задачи об ударном воздействии на вязкоупругую пластинку, коэффициент Пуассона материала которой изменяется с течением времени, приводящем к интегро-дифференциальным уравнениям;
2. Разработка метода решения полученных уравнений, учитывающих вязкоупругие и ауксетические свойства мишени в виде пластинки;
3. Получение приближенных аналитических решений и их численный анализ.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Предложена математическая модель, описывающая механическое поведение пластинчатых конструкций, выполненных из вязкоупругого материала, коэффициент Пуассона которого изменяется с течением времени.
2. Решена задача об ударе шара по ауксетической вязкоупругой шарнирно опертой пластинке Кирхгофа-Лява, при этом вязкоупругие и ауксетические свойства мишени описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной. Решение задачи вне области контакта строится при помощи функции Грина, а в контактной зоне - при помощи обобщенной теории Герца, что требует расшифровки сложных операторных выражений, которые приводят к линейным комбинациям дробных операторов Ю.Н. Работнова.
3. Найдены приближенные аналитические решения полученных интегро-дифференциальных уравнений для местного смятия и контактной силы.

Основные положения, выносимые на защиту:

- математическая модель, описывающая механическое поведение пластинчатых конструкций, выполненных из вязкоупругого ауксетического материала;
- постановка задачи об ударе шара по вязкоупругой шарнирно опертой пластинке Кирхгофа-Лява, вязкоупругие и ауксетические свойства которой описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной;
- алгоритм решения полученных интегро-дифференциальных уравнений, учитывающих вязкоупругие и ауксетические свойства пластинки;
- приближенное аналитическое решение полученных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в разработке и исследовании математической модели динамического поведения вязкоупругой ауксетичной пластинки и в решении краевой задачи ее соударения с шаром. Разработанный алгоритм решения может быть использован для анализа механического поведения различных элементов конструкций, выполненных из материалов с отрицательными коэффициентами Пуассона.

Полученные в данной работе результаты могут быть использованы проектными и научно-исследовательскими организациями в процессе проектирования конструкций, которые в процессе эксплуатации могут подвергаться различным ударным воздействиям, приводящим к изменению свойств соударяющихся тел в зоне контакта.

Данные исследования выполнялись в соответствии с планом НИР международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области

естественных и строительных наук ФГБОУ ВО «ВГТУ» в рамках проекта РФФИ «Анализ ударного взаимодействия вязкоупругих балок, пластин и оболочек с учетом сдвиговой и объемной релаксации на основе дробных операторов Ю.Н. Работнова» (проект № 17-01-00490 а).

Апробация работы. Основные положения работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: на XXX Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2018), Москва, 2018г.; на международной научной конференции «Modern Materials and Manufacturing 2019» (MMM 2019 Baltic Conference) Таллинн, 2019г.; на международной научной конференции «Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures», Львов, 2019г.; на XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 2019г.; на XXXI Международной инновационной конференции молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения МИКМУС-2019, Москва, 2019г. Результаты работы докладывались на научных семинарах международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук Воронежского государственного технического университета (руководитель профессор Шитикова М.В., 2018-2020 гг.) и на научном семинаре кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (руководитель профессор Маркин А.А., 2020г.).

Достоверность результатов работы базируется на корректной математической постановке задачи. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями на основе принятых гипотез о наследственно-упругом теле. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и преемственностью полученных новых теоретических и прикладных результатов с известными сведениями, когда существующие классические теории являются частными случаями предложенной модели. Так, при стремлении параметра дробности (порядка дробного оператора) к единице полученное решение переходит в известное решение для производных целого порядка, а при стремлении параметра дробности к нулю – в решение известной задачи упругого соударения.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах, 3 из которых в международных научных изданиях, проиндексированных в базах данных Web of Science и Scopus, а 5 - в сборниках трудов научных конференций.

Тематика работы. Содержание диссертации соответствует п.2 «Теория моделей деформируемых тел с простой и сложной структурой», п.5 «Теория упругости, пластичности и ползучести» и п.8 «Математические модели и численные методы анализа применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического исследования» области исследования паспорта специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела».

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 3-х глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 116 страниц текста, включая 49 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 261 источник, в том числе 194 из англоязычных изданий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность исследований по рассматриваемой теме, приведены общая характеристика диссертационной работы и основные положения, которые автор выносит на защиту.

В первой главе приводится обзор существующей литературы, посвящённой ауксетическим материалам. Приведены механизмы деформации ауксетических материалов, их свойства, существующие и возможные приложения, а также преимущество сочетания свойств ауксетических и вязкоупругих материалов.

Вторая глава посвящена анализу поведения вязкоупругой пластинки Кирхгоффа-Лява, материал которой обладает отрицательным коэффициентом Пуассона, при ударных воздействиях.

Пусть жесткий шар массы m и радиуса R движется вдоль оси z со скоростью V_0 навстречу линейной вязкоупругой прямоугольной пластинке Кирхгоффа-Лява шириной a и длиной b , перпендикулярной оси z , на срединной плоскости которой находится декартова система координат x, y (рис. 1). Удар происходит в точке N с координатами x_0, y_0 в начальный момент времени.

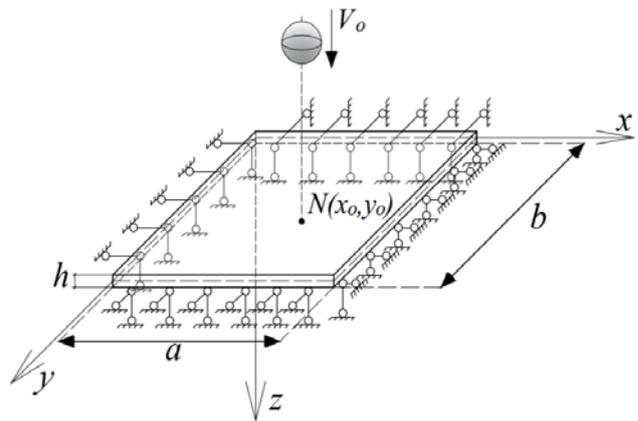


Рисунок 1– Схема ударного взаимодействия сферического ударника с пластинкой Кирхгофа-Лява

Уравнение движения шара запишется так:

$$m\ddot{z} = -P(t), \quad (1)$$

где $P(t)$ - контактная сила, $z(t)$ - перемещение шара, точки над величиной означают производные по времени,

$$\dot{z}(0) = V_0, \quad z(0) = 0. \quad (2)$$

Уравнение движения вязкоупругой пластинки, свободно опертой по контуру, имеет вид

$$\frac{\tilde{E}h^2}{12(1-\tilde{\nu}^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -\rho \ddot{w} + h^{-1} P(t) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0), \quad (3)$$

где \tilde{E} и $\tilde{\nu}$ - зависящие от времени операторы модуля Юнга и коэффициента Пуассона, h - толщина пластинки, $w(x, y, t)$ - динамический прогиб пластинки, ρ - плотность, $\delta(x-x_0)$ и $\delta(y-y_0)$ - дельта-функции Дирака.

К уравнению (3) следует присоединить граничные

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b$$
(4)

и начальные условия

$$w|_{t=0} = 0, \quad \dot{w}|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Величины $z(t)$ и $w(x_0, y_0, t)$ связаны друг с другом соотношением

$$z(t) = \alpha(t) + w(x_0, y_0, t), \quad (6)$$

где величина $\alpha(t)$ характеризует местное смятие материала вязкоупругой пластинки в месте удара, которая связана с контактной силой $P(t)$ при помощи обобщенного закона Герца

$$P(t) = \tilde{k} [\alpha(t)]^{3/2}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{k} = \frac{4\sqrt{R}}{3} \tilde{d}, \quad \tilde{d} = \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2}.$$

Из уравнения (7) видно, что в отличие от упругой задачи коэффициент жесткости при ударном взаимодействии с вязкоупругой пластинкой является зависящим от времени оператором \tilde{k} , который, в свою очередь, зависит от оператора Юнга \tilde{E} и оператора Пуассона $\tilde{\nu}$ вязкоупругого материала пластинки. Следовательно, чтобы найти контактную силу, сначала надо определить вид операторов \tilde{E} и $\tilde{\nu}$, что затем позволит записать оператор жесткости \tilde{k} , используя алгебру безразмерных операторов Ю.Н. Работнова.

Сначала найдем решение для вязкоупругой пластинки. Для этого будем искать решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям (4), в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (8)$$

где $\xi_{mn}(t)$ - пока неизвестные функции.

Подставим разложение (8) в уравнение движения (3) и учтем ортогональность $\sin \frac{m\pi x}{a}$ на отрезке $[0, a]$ и $\sin \frac{n\pi y}{b}$ на отрезке $[0, b]$. В результате получим

$$\ddot{\xi}_{mn}(t) + \frac{h^2 \pi^4}{12\rho} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \frac{\tilde{E}}{(1 - \tilde{\nu}^2)} \xi_{mn}(t) = P(t) F_{mn}, \quad (9)$$

где $F_{mn} = \frac{4}{\rho h a b} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$.

Чтобы получить уравнение, определяющее функцию Грина $G_{mn}(t)$, нужно в уравнении (9) заменить функцию $P(t)$ на дельта-функцию Дирака $\delta(t)$, т.е.

$$\ddot{G}_{mn}(t) + \frac{h^2 \pi^4}{12\rho} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \frac{\tilde{E}}{1 - \tilde{\nu}^2} G_{mn}(t) = \delta(t) F_{mn}. \quad (10)$$

Для построения функции Грина учтем тот факт, что для большинства вязкоупругих материалов объемной релаксацией можно пренебречь по сравнению со сдвиговой, т.е. считать оператор \tilde{K} константой, равной длительному модулю объемного расширения-сжатия K_0 . Тогда, используя принцип соответствия Вольтерра, можно записать

$$\frac{\tilde{E}}{1 - 2\tilde{\nu}} = 3K_0. \quad (11)$$

Известно, что для изотропного вязкоупругого материала из всех физических характеристик, которые являются зависящими от времени операторами, по аналогии с изотропным упругим материалом, только два оператора являются независимыми и задаются исходя из экспериментальных данных, а все остальные находятся из известных соотношений между упругими модулями, используя принцип соответствия.

Таким образом, уже задав один оператор $\tilde{K} = K_0$, необходимо задаться еще одним: оператором Юнга \tilde{E} , или оператором Пуассона $\tilde{\nu}$, или одним из операторов Ламэ, $\tilde{\mu}$ или $\tilde{\lambda}$. Из имеющихся в литературе данных по экспериментальному определению параметров наследственно упругих материалов известно, что наиболее часто выполняются опыты по идентификации модуля сдвига.

Поэтому будем предполагать, что оператор сдвига $\tilde{\mu}$ подсчитывается на основе модели Кельвина-Фойгта с дробной производной и имеет вид

$$\tilde{\mu} = \mu_0 \left[1 + \left(\tau_\sigma^\mu \right)^\gamma D^\gamma \right], \quad (12)$$

где μ_0 – релаксированный (или длительный) модуль сдвига, τ_σ^μ – время ретардации (или время запаздывания) при сдвиге, $\gamma (0 < \gamma \leq 1)$ – параметр дробности, который является порядком дробной производной Римана – Лиувилля

$$D^\gamma x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t') dt'}{\Gamma(1 - \gamma)(t - t')^\gamma}, \quad (13)$$

$\Gamma(1 - \gamma)$ – гамма-функция и $x(t)$ – произвольная функция.

Чтобы найти оператор $\tilde{\nu}$ из соотношения (11), необходимо определить сначала оператор \tilde{E} , используя известное выражение для зависимости между модулем Юнга E , модулем сдвига μ и объемным модулем K

$$\tilde{E} = \frac{9K_0\tilde{\mu}}{3K_0 + \tilde{\mu}}. \quad (14)$$

Вычисляя прямой оператор с учетом формулы (12)

$$3K_0 + \tilde{\mu} = (3K_0 + \mu_0)(1 + t_\sigma^\gamma D^\gamma)$$

и обратный

$$(3K_0 + \tilde{\mu})^{-1} = (3K_0 + \mu_0)^{-1} \mathcal{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma), \quad (15)$$

где $\mathcal{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) = (1 + t_\sigma^\gamma D^\gamma)^{-1}$ – безразмерный дробный оператор Ю.Н. Работнова, а $t_\sigma^\gamma = \mu_0(\tau_\sigma^\mu)^\gamma(3K_0 + \mu_0)^{-1}$, и подставляя выражения (12) и (15) в формулу (14) с учетом соотношения

$$t_\sigma^\gamma D^\gamma \mathcal{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) = 1 - \mathcal{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma), \quad (16)$$

находим

$$\tilde{E} = 9K_0 \left[1 - \frac{E_0}{3\mu_0} \mathcal{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) \right], \quad (17)$$

где $E_0 = \frac{9K_0\mu_0}{3K_0 + \mu_0}$ – длительный (релаксированный) модуль упругости.

Зная оператор \tilde{E} (17), из соотношения (11) находим оператор Пуассона

$$\tilde{\nu} = -1 + \frac{E_0}{2\mu_0} \mathcal{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma). \quad (18)$$

Если оператором (18) подействовать на единичную функцию Хевисайда, то в результате получим

$$\nu(t) = -H(t) + \frac{E_0}{2\mu_0} \mathcal{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) H(t). \quad (19)$$

Из выражения (19) имеем

$$\nu(0) = -1 \quad , \quad \nu(\infty) = \frac{E_0 - 2\mu_0}{2\mu_0} = \nu_0, \quad (20)$$

при этом учитывалось, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) H(t) = 1.$$

Из формул (20) видно, что выбранная математическая модель описывает поведение вязкоупругого ауксетика, у которого коэффициент Пуассона может изменяться от -1 до релаксированного значения ν_0 .

Первое упоминание о соотношениях между параметрами изотропного тела можно найти в знаменитом трактате А. Лява «Математическая теория упругости», первое издание которого было опубликовано в Кембридже в 1892 году (перевод на русский язык был сделан в 1935 году с 4-го английского издания), где автор отмечает, что коэффициент Пуассона может находиться в пределах от -1 до $\frac{1}{2}$, обеспечивая тем самым неотрицательность модуля сдвига

μ и модуля объемного сжатия K , замечая, что «отрицательные значения коэффициента ν по соображениям устойчивости не исключаются, но такие значения не были найдены ни для одного изотропного тела».

В России в 1944 году Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц в учебнике «Механика сплошных сред» также отмечают, что «поскольку K и μ всегда положительны, то коэффициент Пуассона может меняться для различных веществ только в пределах от -1 (при $K=0$) до $1/2$ (при $\mu=0$)», далее замечая, что «в природе не известно тел, у которых было бы $\nu < 0$, т.е. которые бы испытывали увеличение поперечных размеров при продольном растяжении... Хотя это и не является необходимым с точки зрения термодинамики».

Таким образом, построенная в данном исследовании математическая модель не противоречит законам термодинамики и описывает поведение вязкоупругого ауксетика. В настоящее время уже создано большое количество разнообразных материалов, обладающих отрицательными коэффициентами Пуассона.

На рис. 2 приведен график изменения коэффициента Пуассона вязкоупругого ауксетика в зависимости от безразмерного времени для различных значений параметра дробности γ . Из рис. 2 видно, что коэффициент Пуассона меняется от своего мгновенного значения, равного -1, затем с течением времени возрастая, переходит через ноль и стремится к своему релаксированному значению, равному ν_0 , т.е. при $t \rightarrow \infty$ теряет свои ауксетические свойства.

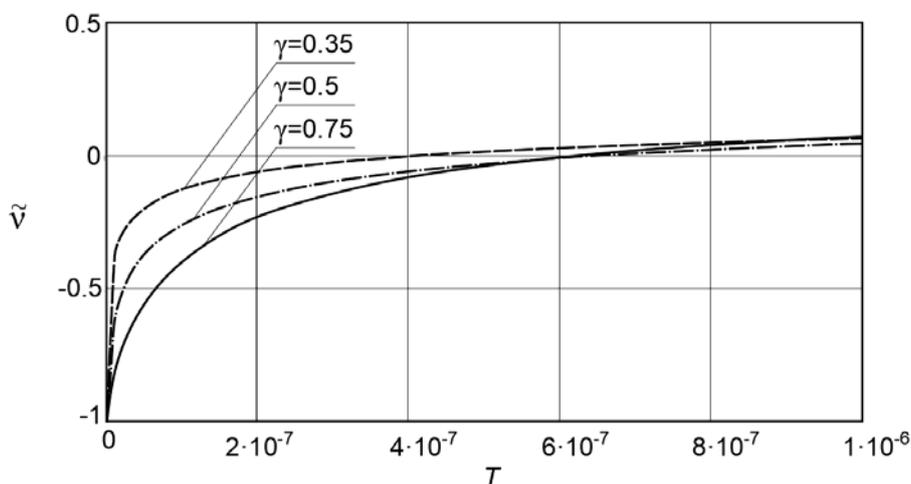


Рисунок 2– График зависимости оператора $\tilde{\nu}$ от безразмерного времени T

Зная вид операторов \tilde{E} (17) и $\tilde{\nu}$ (18), можно получить следующие интегральные уравнения:

для определения контактной силы $P(t)$

$$V_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t')(t-t') dt' = \left\{ \frac{3}{4\sqrt{R}} \int_0^t \left[a_1 \mathcal{E}_\gamma \left(-\frac{t-t'}{\tau_1} \right) + a_2 \mathcal{E}_\gamma \left(-\frac{t-t'}{\tau_2} \right) \right] P(t') dt' \right\}^{2/3} + \quad (21)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \int_0^t G_{mn}(t-t') P(t') dt',$$

и для местного смятия материала пластинки $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = V_0 t - \frac{4\sqrt{R}}{3m} \xi \int_0^t \left[\alpha^{3/2}(t') + b_1 \frac{d}{dt'} \int_0^{t'} \frac{\alpha^{3/2}(t'') dt''}{\Gamma(1-\gamma)(t'-t'')^\gamma} + \right. \\ \left. + b_2 \int_0^{t'} \mathcal{E}_\gamma \left(-\frac{t'-t''}{T^\gamma} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] (t-t') dt' - \quad (22)$$

$$- \frac{4\sqrt{R}}{3} \xi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \int_0^t G_{mn}(t-t') \times \\ \times \left[\alpha^{3/2}(t') + b_1 \frac{d}{dt'} \int_0^{t'} \frac{\alpha^{3/2}(t'') dt''}{\Gamma(1-\gamma)(t'-t'')^\gamma} + b_2 \int_0^{t'} \mathcal{E}_\gamma \left(-\frac{t'-t''}{T^\gamma} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right] dt',$$

где

$$b_1 = \eta \xi^{-1}, b_2 = \zeta \xi^{-1}, \xi = \frac{1}{4}(9\lambda_0 + 10\mu_0), \eta = 3(\lambda_0 + \mu_0) t_\sigma^\gamma, \zeta = -\frac{1}{4} \frac{(3\lambda_0 + 2\mu_0)^2}{\lambda_0 + \mu_0}, T^\gamma = \frac{4(\lambda_0 + \mu_0)}{\lambda_0 + 2\mu_0} t_\sigma^\gamma$$

$$\mathcal{E}_\gamma(-t/\tau_i) = \frac{t^{\gamma-1}}{\tau_i^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_i)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad - \text{дробно-экспоненциальная функция Ю.Н.}$$

Работнова.

Зная операторы \tilde{E} и $\tilde{\nu}$ из выражений (17) и (18), вычисляем оператор

$$\tilde{d} = \frac{1}{2} \tilde{E} \left(\frac{1}{1+\tilde{\nu}} + \frac{1}{1-\tilde{\nu}} \right) = \xi + \eta D^\gamma + \zeta \mathcal{E}_\gamma^*(T^\gamma). \quad (23)$$

Уравнение (10) с учетом найденного оператора \tilde{d} запишется в виде

$$\ddot{G}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 \left[1 + b_1 D^\gamma + b_2 \mathcal{E}_\gamma^*(T^\gamma) \right] G_{mn}(t) = F_{mn} \delta(t), \quad (24)$$

$$\text{где } \omega_{mn}^2 = \frac{h^2 \pi^4}{12\rho} \xi \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2, \quad b_1 = \eta \xi^{-1}, \quad b_2 = \zeta \xi^{-1}.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (24), находим

$$\bar{G}_{mn} = \frac{F_{mn} (T^{-\gamma} + p^\gamma)}{f_{mn}(p)}, \quad (25)$$

где черта над величиной означает трансформанту Лапласа этой величины, p - параметр преобразования и

$$f_{mn}(p) = p^{2+\gamma} + p^2 T^{-\gamma} + \omega_{mn}^2 b_1 p^{2\gamma} + \omega_{mn}^2 (1 + b_1 T^{-\gamma}) p^\gamma + \omega_{mn}^2 T^{-\gamma} (1 + b_2). \quad (26)$$

Характеристическое уравнение

$$f_{mn}(p) = 0$$

имеет два комплексно-сопряженных корня при фиксированных значениях m и n

$$p_{mn}^{1,2} = r_{mn} e^{\pm i\psi_{mn}} = -\alpha_{mn} \pm i\Omega_{mn}.$$

Решение (25) в пространстве оригиналов определяется по формуле обращения Меллина-Фурье

$$G_{mn}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{G}_{mn}(p) e^{pt} dp. \quad (27)$$

Используя основную теорему теории вычетов, можно записать решение (27) в виде

$$G_{mn}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\bar{G}_{mn}(se^{-i\pi}) - \bar{G}_{mn}(se^{i\pi})] e^{-st} ds + \sum_k \text{res} [\bar{G}_{mn}(p_{mn}^k) e^{p_{mn}^k t}], \quad (28)$$

где сумма берется по всем особым точкам (полюсам).

Первое слагаемое в выражении (28) вычисляется непосредственно и имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\bar{G}_{mn}(se^{-i\pi}) - \bar{G}_{mn}(se^{i\pi})] e^{-st} ds = \frac{F_{mn}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\theta_{mn}^s(s) e^{-st} ds}{[\theta^c(s)]^2 + [\theta^s(s)]^2} = A_{0mn}(t), \quad (29)$$

где

$$\theta_{mn}^s(s) = \omega_{mn}^2 (R_1 \sin \phi_1 - b_2 R_2^{-1} \sin \phi_2), \quad R_2 = \sqrt{1 + 2T^\gamma s^\gamma \cos \pi\gamma + T^{2\gamma} s^{2\gamma}},$$

$$\text{tg} \phi_1 = \frac{b_1 s^\gamma \sin \pi\gamma}{1 + b_1 s^\gamma \cos \pi\gamma}, \quad \text{tg} \phi_2 = \frac{T^\gamma s^\gamma \sin \pi\gamma}{1 + T^\gamma s^\gamma \cos \pi\gamma}.$$

Вид второго слагаемого в выражении (28) зависит от числа корней характеристического уравнения (26) при каждом фиксированных значениях m и n и имеет вид

$$\sum_k \text{res} [G_{mn}(p_{mn}^k) e^{p_{mn}^k t}] = A_{mn} e^{-\alpha_{mn} t} \sin(\Omega_{mn} t - \varphi_{mn}), \quad (30)$$

$$\text{где } A_{mn} = 2F_{mn} \sqrt{a_{mn}^2 + b_{mn}^2}, \quad \text{tg} \varphi_{mn} = -\frac{a_{mn}}{b_{mn}}, \quad a_{mn} = \frac{\rho_{mn} (\eta_{mn}^c \cos \chi_{mn} + \eta_{mn}^s \sin \chi_{mn})}{(\eta_{mn}^c)^2 + (\eta_{mn}^s)^2},$$

$$b_{mn} = \frac{\rho_{mn} (\eta_{mn}^c \sin \chi_{mn} - \eta_{mn}^s \cos \chi_{mn})}{(\eta_{mn}^c)^2 + (\eta_{mn}^s)^2}, \quad \eta_{mn}^c = (2 + \gamma) r_{mn}^{1+\gamma} \cos(1 + \gamma)\psi_{mn} +$$

$$+ 2T^{-\gamma} r_{mn} \cos \psi_{mn} + 2\gamma \omega_{mn}^2 b_1 r_{mn}^{2\gamma-1} \cos(2\gamma - 1)\psi_{mn} + \gamma \omega_{mn}^2 (1 + b_1 T^{-\gamma}) r_{mn}^{\gamma-1} \cos(\gamma - 1)\psi_{mn},$$

$$\eta_{mn}^s = (2 + \gamma) r_{mn}^{1+\gamma} \sin(1 + \gamma)\psi_{mn} + 2T^{-\gamma} r_{mn} \sin \psi_{mn} + 2\gamma \omega_{mn}^2 b_1 r_{mn}^{2\gamma-1} \sin(2\gamma - 1)\psi_{mn} +$$

$$+ \gamma \omega_{mn}^2 (1 + b_1 T^{-\gamma}) r_{mn}^{\gamma-1} \sin(\gamma - 1)\psi_{mn}, \quad \rho_{mn} = \sqrt{r_{mn}^{2\gamma} + 2T^{-\gamma} r_{mn}^\gamma \cos \gamma\psi_{mn} + T^{-2\gamma}} \text{ и}$$

$$\operatorname{tg} \chi_{mn} = \frac{r_{mn}^{\gamma} \sin \gamma \psi_{mn}}{T^{-\gamma} + r_{mn}^{\gamma} \cos \gamma \psi_{mn}}.$$

На основании формул (29) и (30) функцию Грина можно представить в виде

$$G_{mn}(t) = A_{0mn}(t) + A_{mn} e^{-\alpha_{mn} t} \sin(\Omega_{mn} t - \varphi_{mn}). \quad (31)$$

Подставляя соотношение (31) в уравнения (21) и (22), приходим к окончательному виду нелинейных интегральных уравнений для определения контактной силы $P(t)$ и местного смятия $\alpha(t)$.

В третьей главе найдены приближенные аналитические решения, проанализированы предельные и частные случаи и проведены численные исследования.

Прежде всего заметим, что используя предельную теорему для трансформанты Лапласа функции Грина, получим

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{G}_{mn}(p) = G_{mn}(0) = 0. \quad (32)$$

Иначе говоря, для малых значений времени t функция Грина $G_{mn}(t)$ пропорциональна времени t . Поскольку ударный процесс является кратковременным, то свойство пропорциональности функции $G_{mn}(t)$ времени t будет приближенно выполняться для всех времен, для которых мишень и ударник будут находиться в контакте друг с другом.

Исходя из соотношения (31) и учитывая формулу (32), имеем

$$A_{0mn}(0) = A_{mn} \sin \varphi_{mn}, \quad (33)$$

а с учетом выражения (33) и малости временного интервала функция Грина $G_{mn}(t)$ приближенно равна

$$G_{mn}(t) \approx t A_{mn} \Omega_{mn} \cos \varphi_{mn}. \quad (34)$$

Затем, используя обобщенный закон Герца (7), из интегрального уравнения (21) получаем

$$P(t) = \frac{4\sqrt{R}}{3} \xi \left[\alpha^{3/2}(t) + b_1 \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\alpha^{3/2}(t'') dt''}{\Gamma(1-\gamma)(t-t'')^{\gamma}} + b_2 \int_0^t \mathfrak{E}_{\gamma} \left(-\frac{t-t''}{T^{\gamma}} \right) \alpha^{3/2}(t'') dt'' \right]. \quad (35)$$

Кроме того, малость временного интервала позволяет дробно-экспоненциальную функцию Ю.Н. Работнова заменить более простым выражением

$$\mathfrak{E}_{\gamma} \left(-\frac{t}{T^{\gamma}} \right) \approx \frac{t^{\gamma-1}}{T^{\gamma} \Gamma(\gamma)}. \quad (36)$$

Подставляя в выражение (35) вместо $\alpha(t)$ величину $V_0 t$ в качестве первого приближения, а также учитывая формулу (36), получим в результате асимптотическое выражение для контактной силы $P(t)$

$$P(t) \approx \frac{4\sqrt{R}}{3} V_0^{3/2} \left\{ \xi t^{3/2} + \eta^* \frac{t_\sigma^\gamma}{(1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} 3/2(5/2-\gamma) [3/2-(1-\gamma)2/5] t^{3/2-\gamma} + \right. \\ \left. + \zeta^* \frac{t_\sigma^{-\gamma}}{\gamma\Gamma(\gamma)} 3(1/3-1/5\gamma) t^{3/2+\gamma} \right\}, \quad (37)$$

где $\eta^* = 3(\lambda_0 + \mu_0)$, $\zeta^* = -1/16(3\lambda_0 + 2\mu_0)^2(\lambda_0 + \mu_0)^{-1}$.

Теперь получим асимптотическое выражение для $\alpha(t)$, используя уравнение (22) и учитывая выражения (34) и (36), а также полагая $\alpha(t) = V_0 t$ в подынтегральных выражениях. В результате имеем

$$\alpha(t) \approx V_0 t - \Delta_\gamma V_0^{3/2} \int_0^t \left[\xi t'^{3/2} + \eta^* t_\sigma^\gamma \frac{d}{dt'} \int_0^{t'} \frac{t''^{3/2} dt''}{\Gamma(1-\gamma)(t'-t'')^\gamma} + \right. \\ \left. + \zeta^* t_\sigma^{-\gamma} \int_0^{t'} \frac{(t'-t'')^{\gamma-1} t''^{3/2}}{\Gamma(\gamma)} dt'' \right] (t-t') dt', \quad (38)$$

$$\text{где } \Delta_\gamma = \frac{4\sqrt{R}}{3m} \left[1 + m \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Omega_{mn} \cos \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \right].$$

Учитывая, что

$$\int_0^t t''^{3/2} (t-t'')^{-\gamma} dt'' \approx \frac{1}{(1-\gamma)} 3/2 [2/3 - (1-\gamma)2/5] t^{5/2-\gamma},$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t t''^{3/2} (t-t'')^{-\gamma} dt'' \approx \frac{1}{(1-\gamma)} 3/2(5/2-\gamma) [2/3 - (1-\gamma)2/5] t^{3/2-\gamma},$$

$$\int_0^t t''^{3/2} (t-t'')^{\gamma-1} dt'' \approx \frac{3}{\gamma} (1/3 - 1/5\gamma) t^{3/2+\gamma},$$

из выражения (38) находим

$$\alpha(t) \approx V_0 t - \Delta_\gamma V_0^{3/2} \left\{ \xi 4/35 t^{7/2} + \right. \\ \left. + \eta^* \frac{t_\sigma^\gamma}{(1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} 3/2(5/2-\gamma) [2/3 - (1-\gamma)2/5] \frac{t^{7/2-\gamma}}{(5/2-\gamma)(7/2-\gamma)} + \right. \\ \left. + \zeta^* \frac{t_\sigma^{-\gamma}}{\gamma\Gamma(\gamma)} 3(1/3-1/5\gamma) \frac{t^{7/2+\gamma}}{(5/2+\gamma)(7/2+\gamma)} \right\}. \quad (39)$$

Если использовать соотношение (39), то для любого γ ($0 < \gamma \leq 1$) можно получить выражения для вычисления времени контакта шара и пластинки $t_{cont}^{(\gamma)}$, времени, при котором смятие достигает своего максимума $t_{max}^{(\gamma)}$, и максимальное значение смятия пластинки $\alpha_{max}^{(\gamma)}$

$$\begin{array}{ll}
\text{при } t_\sigma^\gamma \ll 1 & \text{при } t_\sigma^\gamma \gg 1 \\
t_{cont}^{(\gamma)} = \left(\frac{1}{\Delta_\gamma \sqrt{V_0} \zeta^* d_\gamma} \right)^{1/(5/2+\gamma)} & t_{cont}^{(\gamma)} = \left(\frac{1}{\Delta_\gamma \sqrt{V_0} \eta^* \bar{d}_\gamma} \right)^{1/(7/2-\gamma)} \\
t_{max}^{(\gamma)} = \left(\frac{1}{\Delta_\gamma \sqrt{V_0} \zeta^* d_\gamma (7/2+\gamma)} \right)^{1/(5/2+\gamma)} & t_{max}^{(\gamma)} = \left(\frac{1}{\Delta_\gamma \sqrt{V_0} \eta^* \bar{d}_\gamma (7/2-\gamma)} \right)^{1/(5/2-\gamma)} \\
\alpha_{max}^{(\gamma)} = \left(\frac{(5/2)+\gamma}{(7/2)+\gamma} \right) V_0 t_{max}^{(\gamma)} & \alpha_{max}^{(\gamma)} = V_0 t_{max}^{(\gamma)} \left(\frac{(5/2)-\gamma}{(7/2)-\gamma} \right)
\end{array}$$

где

$$d_\gamma = \frac{t_\sigma^{-\gamma} 3(1/3 - 1/5 \gamma)}{\gamma \Gamma(\gamma)(5/2+\gamma)(7/2+\gamma)} \quad ; \quad \bar{d}_\gamma = \frac{t_\sigma^\gamma 3/2 [2/3 - (1-\gamma)2/5]}{(1-\gamma) \Gamma(1-\gamma)(7/2-\gamma)}.$$

Рассмотрим два предельных случая: при $\gamma \rightarrow 0$ все полученные выше соотношения будут справедливы для чисто упругой пластинки Кирхгофа-Лява, а при $\gamma \rightarrow 1$ - демпфирующие свойства пластинки будут описываться классической моделью Кельвина-Фойгта.

$$\begin{array}{ll}
\text{при } \gamma \rightarrow 0 & \text{при } \gamma \rightarrow 1 \\
P(t) \approx \frac{4\sqrt{R}}{3} V_0^{3/2} t^{3/2} (\xi + \eta^* + \zeta^*) & P(t) \approx \frac{4\sqrt{R}}{3} V_0^{3/2} \left(\frac{3}{2} \eta^* t_\sigma + \xi t + \frac{2}{5} \zeta^* t_\sigma^{-1} t^2 \right) t^{1/2} \\
\alpha(t) \approx V_0 t - \frac{4}{35} \Delta_0 V_0^{3/2} (\xi + \eta^* + \zeta^*) t^{7/2} & \alpha(t) \approx V_0 t - \Delta_1 V_0^{3/2} \left(\frac{2}{5} \eta^* t_\sigma + \frac{4}{35} \xi t + \frac{8}{315} \zeta^* t_\sigma^{-1} t^2 \right) t^{5/2} \\
\text{при } t_\sigma^\gamma \ll 1 & \text{при } t_\sigma^\gamma \gg 1 \\
\alpha(t) \approx V_0 t \left(1 - \frac{8}{315} \Delta_1 V_0^{1/2} \zeta^* t^{7/2} t_\sigma^{-1} \right) & \alpha(t) \approx V_0 t \left(1 - \frac{2}{5} \Delta_1 V_0^{3/2} \eta^* t^{3/2} t_\sigma \right) \\
t_{cont}^{(0)} = \left[\frac{35}{4 \Delta_0 \sqrt{V_0} (\xi + \eta^* + \zeta^*)} \right]^{2/5} & t_{cont}^{(1)} = \left(\frac{315 t_\sigma}{8 \Delta_1 \sqrt{V_0} \zeta^*} \right)^{2/7} & t_{cont}^{(1)} = \left(\frac{5}{2 \Delta_1 \sqrt{V_0} \eta^* t_\sigma} \right)^{2/3} \\
t_{max}^{(0)} = \left[\frac{5}{2 \Delta_0 \sqrt{V_0} (\xi + \eta^* + \zeta^*)} \right]^{2/5} & t_{max}^{(1)} = \left(\frac{35 t_\sigma}{4 \Delta_1 \sqrt{V_0} \zeta^*} \right)^{2/7} & t_{max}^{(1)} = \left(\frac{1}{\Delta_1 \sqrt{V_0} \eta^* t_\sigma} \right)^{2/3} \\
\alpha_{max}^{(0)} = \frac{5}{7} V_0 t_{max}^{(0)} & \alpha_{max}^{(1)} = \frac{7}{9} V_0 t_{max}^{(1)} & \alpha_{max}^{(1)} = \frac{3}{5} V_0 t_{max}^{(1)}
\end{array}$$

$$\text{где } \Delta_0 = \frac{4\sqrt{R}}{3m} \left[1 + \frac{4m}{\rho h a b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{m\pi x_0}{a} \sin^2 \frac{n\pi y_0}{b} \right] \text{ и}$$

$$\xi + \eta^* + \zeta^* = \frac{75\lambda_0^2 + 160\lambda_0\mu_0 + 84\mu_0^2}{16(\lambda_0 + \mu_0)}.$$

Полученные асимптотические решения для предельных и частных случаев позволяют оценить соответствующие решения для произвольных значений параметра дробности $0 < \gamma < 1$.

На рис. 3 приведены зависимости изменения коэффициента Пуассона вязкоупругого ауксетика от безразмерного времени при различных значениях отношения длительного модуля Юнга к длительному модулю сдвига при фиксированном значении параметра дробности $\gamma = 0.5$. Из рис. 3. видно, что при уменьшении значения $E_0 / 2\mu_0$ время проявления ауксетических свойств растет, и в силу малости времени контактного взаимодействия пластинка может вести себя как ауксетик в течение всего процесса контакта с ударником с момента ударного нагружения до момента отскока.

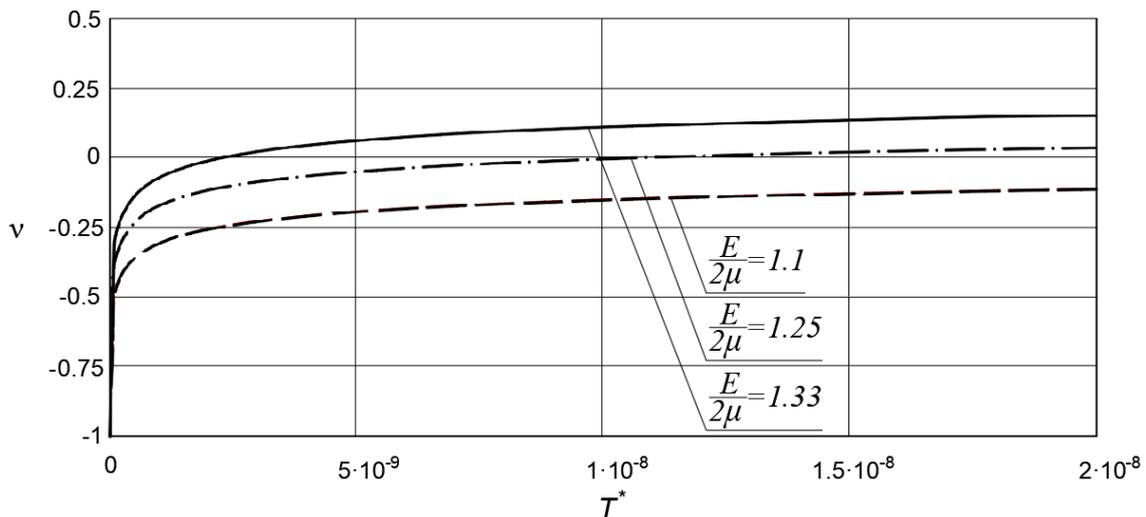


Рисунок 3 – Зависимость изменения коэффициента Пуассона вязкоупругого ауксетика от безразмерного времени при различных значениях отношения длительного модуля Юнга к длительному модулю сдвига

Используя полученные асимптотические зависимости местного смятия и контактной силы от времени, на рис. 4 приведены численные расчеты безразмерных величин от безразмерного времени при различных значениях параметра дробности $\gamma = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ и 1 .

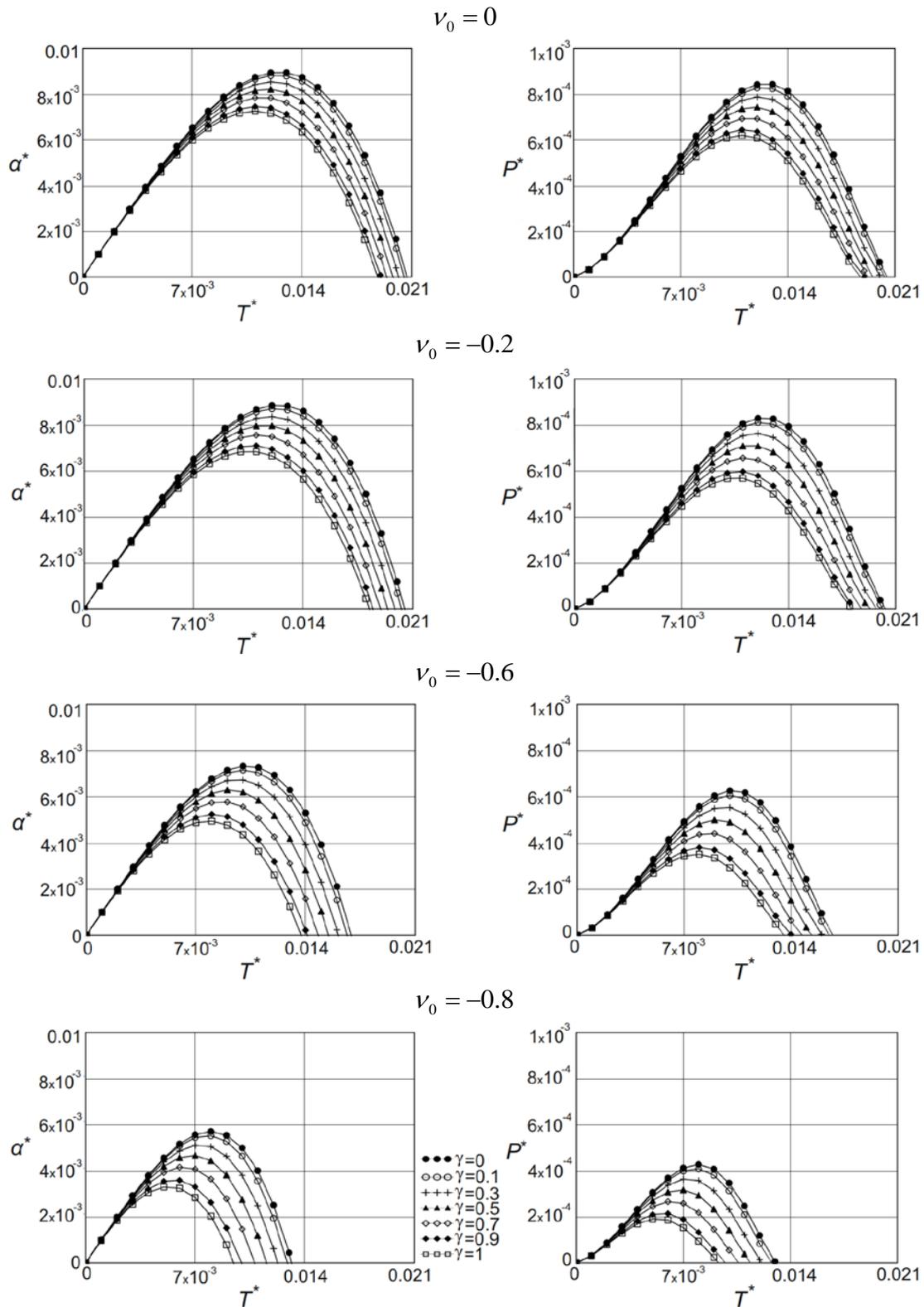


Рисунок 4 – Зависимости безразмерных величин местного смятия и контактной силы от безразмерного времени при различных значениях параметра дробности

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты данной диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Анализ современной литературы показал, что для дальнейшего развития практического применения материалов с отрицательными коэффициентами Пуассона, т.е. ауксетиков, требуется более глубокое понимание и тщательное изучение их механизмов деформации и их связь с механическими свойствами. В частности, сочетание ауксетических материалов с классическими неауксетическими материалами, может привести к созданию материалов и структур, обладающих интересными физическими и механическими свойствами, которые невозможно получить при использовании исключительно обычных материалов или ауксетических материалов.
2. Относительно традиционных материалов с положительным коэффициентом Пуассона, ауксетики обладают улучшенным сопротивлением ударным воздействиям. Данное свойство можно усовершенствовать сочетанием ауксетических и вязкоупругих материалов. Поэтому в данной работе предложена математическая модель, описывающая поведение ауксетического вязкоупругого материала пластинки Кирхгофа-Лява, демпфирующие свойства которой описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробными производными и которая позволяет учесть ауксетические свойства пластинки.
3. С использованием алгебры безразмерных операторов Ю.Н. Работнова показано, что построенная модель не противоречит законам термодинамики, и коэффициент Пуассона вязкоупругого изотропного ауксетика может изменяться только в пределах от -1 до некоторого релаксированного значения, не превышающего $1/2$.
4. Поставлена задача об ударе жесткого шара по вязкоупругой ауксетичной пластинке Кирхгофа-Лява, которая сводится к решению интегральных уравнений относительно контактной силы или местного смятия материала мишени.
5. Решение задачи вне области контакта построено при помощи функции Грина, а в контактной зоне - при помощи обобщенной теории Герца, что потребовало расшифровки сложных операторных выражений, которые приводят к линейным комбинациям дробных операторов Ю.Н. Работнова.
6. Показано, что поведение пластинки Кирхгофа-Лява из вязкоупругого ауксетика отличается от поведения такой же пластинки из обычного вязкоупругого материала. Это связано с тем, что данная вязкоупругая модель ауксетика сочетает в себе две классические вязкоупругие модели: модель стандартного линейного тела с дробными производными и модель Кельвина-Фойгта с дробной производной, причем свойства первой модели преобладают при малых значениях времени ретардации, а

свойства второй модели проявляются при больших значениях времени ретардации. Такое свойство выбранной модели наглядно иллюстрируется поведением корней характеристического уравнения, а также асимптотическим поведением контактной силы и местного смятия материала пластинки.

7. Численные исследования показали, что уменьшение отрицательного значения коэффициента Пуассона приводит к проявлению свойств ауксетичных материалов при ударных воздействиях и, как следствие, к уменьшению максимальных значений контактной силы и местного смятия материала мишени, а также к уменьшению времени контакта. А ослабление вязких свойств пластинки при уменьшении параметра дробности до нуля приводит к обратному процессу: увеличению контактной силы и величины проникновения ударника в материал мишени.

Таким образом, построенная в данной диссертационной работе математическая модель и проведенные расчеты на основе полученных асимптотических решений задачи удара жесткого шара по ауксетичной вязкоупругой пластинке подтвердили имеющиеся экспериментальные данные по ауксетикам, свидетельствующие о повышенном сопротивлении вдавливанию и ударным нагрузкам.

Основные положения диссертационной работы опубликованы в следующих работах:

Статьи в изданиях, проиндексированных в международных базах Web of Science и Scopus

- 1) **Ajeneza O.** Mathematical model of the impact response of a linear viscoelastic auxetic plate / O. Ajeneza, Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Moscow, 2019. Vol. 489. Paper ID 012001 (проиндексировано в Web of Science и Scopus)
- 2) **Ajeneza O.** Mathematical model to study the impact response of a viscoelastic auxetic plate / M.V. Shitikova, Yu.A. Rossikhin, O. Ajeneza // Key Engineering Materials, 2019. Vol. 799. P. 205–210 (проиндексировано в Scopus)
- 3) **Ajeneza O.** Auxetic materials: classification, mechanical properties and applications / A.V. Mazaev, O. Ajeneza, M.V. Shitikova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 747. Paper ID 012008 (проиндексировано в Scopus)

Статьи и материалы конференций

- 4) **Аженеза О.** Удар жесткого шара по линейной пластинке Кирхгоффа-Лява из вязкоупругого ауксетика / О. Аженеза, М.В. Шитикова // XXX Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС–2018). М.: Федеральное государственное

- бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 2019. С. 4–7.
- 5) **Аженеза О.** Анализ динамического поведения пластинки из вязкоупругого ауксетика при ударных воздействиях / М.В. Шитикова, О. Аженеза // Тезисы XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, 19-24 августа 2019. С. 220.
 - 6) **Ajenez O.** Mathematical modeling the impact response of viscoelastic plates made of auxetic materials / M.V. Shitikova, O. Ajenez // *Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures*. Lviv, 2019. Vol. 5. P. 93.
 - 7) **Аженеза О.** Анализ динамического поведения пластинки из вязкоупругого ауксетика при ударных воздействиях / М.В. Шитикова, О. Аженеза // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, 2019. Том 3. С. 539–541.
 - 8) **Аженеза О.** Ауксетические материалы: классификация, механические свойства и приложения / А.В. Мазаев, О. Аженеза, М.В. Шитикова // Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС-2019). М.: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, 2020. С. 32–35.