

На правах рукописи



Астапов Юрий Владимирович

**АНАЛИЗ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ КОНЕЧНОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность: 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тула 2020

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Маркин Алексей Александрович

Официальные оппоненты: **Бровко Георгий Леонидович**
доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра теории упругости ФГБОУ ВО
«Московский государственный университет им.
М.В. Ломоносова», профессор

Зингерман Константин Моисеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра математического моделирования и
вычислительной математики ФГБОУ ВО
«Тверской государственный технический
университет», заведующий кафедрой

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Пермский национальный
исследовательский политехнический
университет»

Защита диссертации состоится «30» сентября 2020 г. в 10:00 часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» и ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, Тула, пр. Ленина, 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, Тула, пр. Ленина, 92 и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Astapov_YV/.

Автореферат разослан «30» июля 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Высокоэластичные материалы нашли широкое применение во всех сферах деятельности человека: от амортизаторов в машиностроении до имплантов в медицине. Непрерывно ведется работа по получению новых полимерных материалов. Предпринимаются шаги к построению универсальных моделей деформирования живых тканей, имеющих множество приложений. В связи с этим в настоящее время сохраняется интерес к разработке новых математических моделей, адекватно описывающих конечные упругие деформации высокоэластичных материалов в широком диапазоне нагрузок.

Основы нелинейной теории упругости заложены в работах А.И. Лурье, Л.А. Толоконникова, В.В. Новожилова, К.Ф. Черныха, К. Труселла, Р. Хилла, В. Нолла, Р. Огдена и Р. Ривлина в середине прошлого века. В последнее время наибольшее развитие получили вопросы построения определяющих соотношений в работах Г.Л. Бровко, П.В. Трусова, А.А. Рогового, А.А. Поздеева, А.А. Адамова, А.А. Маркина, Н. Xiao, Р. Neff, Е. Arruda, А. Gent, О. Yeoh и др. Вопросам постановки краевых задач конечного деформирования высокоэластичных материалов и разработки численных методов их решения посвящены работы В.А. Левина, К.М. Зингермана, М.И. Карякина, С.Н. Коробейникова, А.И. Голованова, А.А. Поздеева, Л.У. Султанова, П.Г. Морева а также А. Freidenberg, П. Gasson, А. Giannakopoulos, М. Latorre, М. Mansouri, Р. Kakavas, К. Papoulia, Р. Wriggers.

В известных обзорах нелинейных определяющих соотношений для изотропной упругости при конечных деформациях, принадлежащих А.А. Адамову, П.В. Трусову, М. Воусе, L. Mihai, Р. Kakavas, G. Marckmann, С. Weh и др., приведены выражения почти для двух десятков известных упругих потенциалов. Мера логарифмических деформаций Генки при построении моделей гиперупругих изотропных материалов использовалась в работах С.Н. Коробейникова, А.В. Муравлева, А.А. Маркина, М.Ю. Соколовой, Р. Neff, G. Montella, Н. Xiao, М. Latorre, Р. Kakavas, К. Valanis и др. Однако, в большинстве предложенных моделей отсутствует анализ физического смысла параметров, конкретизирующих данный материал, и недостаточное внимание уделено вопросам определения диапазона деформаций, в которых применима конкретная модель. Поэтому актуальным является комплексный теоретический и экспериментальный анализ существующих определяющих соотношений, направленный на установление пределов их достоверности, а также идентификация материальных констант и функций.

Целью работы является теоретическое и экспериментальное обоснование соотношений Генки-Мурнагана, определяющих механические свойства высокоэластичных материалов, на основе постановки и решения задач по однородному и неоднородному конечному деформированию.

Для этого требуется решить следующие **основные задачи**:

- проведение теоретического анализа устойчивости соотношений модели Генки-Мурнагана, определение физического смысла констант модели и проверка их достоверности;
- постановка и численное решение краевых задач о взаимодействии слабосжимаемых высокоэластичных тел с абсолютно жесткими телами с учетом контактного трения;
- проведение экспериментов по сжатию и индентированию эластомеров, разработка методики определения констант модели.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- для модели материала Генки-Мурнагана установлен физический смысл констант при нелинейных слагаемых, и получены условия сильной эллиптичности;
- предложен способ разложения тензора Генки в ряд, сходящийся на всем интервале изменения главных значений тензора деформаций Коши-Грина;
- в рамках модели Генки-Мурнагана выполнена постановка и получено численное решение краевой задачи индентирования эластомеров;
- проведена идентификация модели Генки-Мурнагана на основе экспериментов по одноосному сжатию цилиндрических образцов;
- разработана итерационная процедура определения материальных констант из опытов по неоднородному деформированию, проведена идентификация модели Генки-Мурнагана на основе экспериментов по индентированию и численного решения краевой задачи.

Теоретическая и практическая значимость работы. Постановка краевой задачи о взаимодействии высокоэластичных тел с абсолютно-жесткими телами вместе с программными средствами ее численного решения может быть использована с целью проведения прочностных расчетов в изделиях из эластомеров при эксплуатационных нагрузках.

Диссертационная работа выполнялась в рамках грантов РФФИ: проект 14-01-31138_мол_а «Построение и экспериментальное обоснование определяющих соотношений нелинейной теории упругости»; проект 18-31-20053_мол_а_вед «Моделирование конечных деформаций и разрушения упругих элементов конструкций» и гранта Президента РФ МД-1803.2019.1 «Модели конечного неизотермического деформирования упругих материалов и их экспериментальная идентификация».

Методология и методы исследования. Сформулированные задачи решаются численными и аналитическими методами с использованием подходов, развитых в работах Г.Л. Бровко, В.И. Левитаса, А.А. Рогового, П.В. Трусова, А.И. Голованова, Л.У. Султанова, А.А. Маркина. Численные модели строятся на основе разложения тензорных функций в ряды, метода конечных элементов и метода пошагового интегрирования с исследованием их сходимости. Исследование механических свойств высокоэластичных материалов проводится экспериментальными методами с использованием сконструированной установки. Решение задачи определения параметров модели, исходя из полученных экспериментальных данных, проводится на основе известных методов оптимизации.

Положения, выносимые на защиту:

- анализ устойчивости и достоверности модели Генки-Мурнагана на основе сравнения с известными моделями сжимаемых и несжимаемых упругих материалов и результатами опытов Трелоара;
- постановка и решение краевых задач взаимодействия высокоэластичных материалов с жесткими инденторами с использованием логарифмической меры деформаций и соотношений Генки-Мурнагана;
- разработка методики определения констант модели на основе решения краевых задач и обработки данных экспериментов по сжатию и индентированию слабосжимаемых высокоэластичных материалов, проведенных на сконструированном стенде.

Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением численных результатов с известными аналитическими решениями тестовых задач и результатами других авторов. Верификация модели процесса индентирования высокоэластичных материалов, построенной в рамках соотношений Генки-Мурнагана, проводится на основе сравнения с данными проведенных экспериментов.

Публикации. По теме диссертации опубликована 21 работа, в том числе 4 статьи в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus; 4 научных статьи в изданиях, рекомендуемых ВАК Минобрнауки РФ.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы доложены на научном семинаре по механике деформируемого твердого тела им. Л.А. Толоконникова (научный руководитель – профессор А.А. Маркин, г. Тула, 2020 г.), на Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» (г. Москва, 2015, 2016, 2017, 2019 гг.), на XXI Всероссийской конференции «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики», посвященной памяти К.И. Бабенко (п. Дюрсо, Краснодарский край, 2016 г.), на II Всероссийском научном форуме «Наука будущего – наука молодых» (г. Казань, 2016 г.), на Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (г. Воронеж, 2017, 2018, 2019 гг.), на второй научной конференции-семинаре «Современные проблемы теории упругости и механики композитов», посвящённой научным школам кафедры теории упругости МГУ (г. Москва, 2018 г.), на XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Уфа, 2019 г.).

Личный вклад автора. Представленные в диссертации результаты исследований получены лично автором под руководством научного руководителя. В публикациях, выполненных в соавторстве, соискателю принадлежат результаты численного и экспериментального моделирования процессов конечного деформирования высокоэластичных материалов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Работа содержит 141 страницу, включая 60 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 192 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** показана актуальность темы диссертационной работы, представлены цель и основные направления исследований, проведен анализ работ по проблемам исследования, отмечены научная новизна работы, и изложены основные положения, выносимые на защиту.

В **главе 1** приведены основные положения кинематики деформируемого твердого тела. Дан краткий обзор мер конечных деформаций, и выписаны выражения естественных и алгебраических инвариантов используемого в данной работе для описания деформаций тензора логарифмических деформаций Генки $\mathbf{\Gamma} = \ln \mathbf{U}$, построенного по левому тензору искажений \mathbf{U} , входящему в полярное разложение аффинора деформаций $\mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$.

В работах Л.А. Толоконникова, А.А. Маркина и Н. Xiaо доказано, что в изотропном материале логарифмическая мера деформаций $\mathbf{\Gamma}$ энергетически сопряжена с обобщенным повернутым тензором напряжений

$$\mathbf{\Sigma}_R = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^{-1}, \text{ где } \mathbf{S} \text{ – тензор истинных напряжений Коши.}$$

В работе высокоэластичные материалы рассматриваются как гиперупругие. Общая форма связи между тензорами $\mathbf{\Sigma}_R$ и $\mathbf{\Gamma}$ после выделения шарового и девиаторного слагаемых имеет вид: $\mathbf{\Sigma}_R = \sigma_0 \mathbf{E} + \tau_e \tilde{\mathbf{\Gamma}} + \tau_q \mathbf{Q}$, где

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}^2 - \frac{1}{3} e^2 \mathbf{E} \text{ – девиатор тензора } \tilde{\mathbf{\Gamma}}^2, \text{ а } \sigma_0 = \sigma_0(\theta, e, \alpha), \quad \tau_e = \tau_e(\theta, e, \alpha),$$

$\tau_q = \tau_q(\theta, e, \alpha)$ – функции естественных инвариантов меры Генки, причем θ характеризует относительное изменение объема, e – интенсивность формоизменения, α – угол вида деформированного состояния.

В работах А.А. Маркина и М.Ю. Соколовой предложено представить удельную потенциальную энергию деформаций в виде следующего ряда:

$$W = W_0 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Gamma} + \frac{1}{2!} \mathbf{N} \cdots \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma} + \frac{1}{3!} \mathbf{L} \cdots \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma} + \dots, \quad (1)$$

где в случае начального ненапряженного состояния $W_0 = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Тензоры четвертого ранга \mathbf{N} и шестого ранга \mathbf{L} являются тензорами упругих констант материала.

Из разложения (1) получается известная из работ Генки физически-линейная модель материала, являющаяся естественным обобщением закона Гука на случай конечных деформаций:

$$\mathbf{\Sigma}_R = K \theta \mathbf{E} + 2G \tilde{\mathbf{\Gamma}}. \quad (2)$$

При удержании двух первых ненулевых членов ряда (1) может быть получена физически-нелинейная модель материала Генки-Мурнагана:

$$\mathbf{\Sigma}_R = \sigma_0 \mathbf{E} + \tau_e \tilde{\mathbf{\Gamma}} + \tau_q \mathbf{Q}, \quad (3)$$

$$\sigma_0 = K \theta + \frac{c_1}{6\sqrt{3}} \theta^2 + \frac{c_2}{6\sqrt{3}} e^2, \quad \tau_e = 2G + \frac{c_2}{3\sqrt{3}} \theta, \quad \tau_q = c_3. \quad (4)$$

Из (3)-(4) получены определяющие соотношения для несжимаемого материала

$$\sigma_0 = -p, \quad \tau_e = 2G, \quad \tau_q = c_3, \quad (5)$$

где p – гидростатическое давление.

В моделях (2) и (3)-(4) объемный модуль упругости K и модуль сдвига G сохраняют при конечных деформациях свой физический смысл, установленный в линейной теории упругости. Из рассмотрения чисто объемной деформации, когда $\tilde{\Gamma} = \mathbf{0}$, $e = 0$, следует, что гидростатические напряжения изменяются по закону $\sigma_0 = K\theta + \frac{c_1}{6\sqrt{3}}\theta^2$. Поэтому константа c_1 учитывает изменение объема второго порядка малости. При $c_1 \neq 0$ материал по-разному сопротивляется объемному сжатию и растяжению. При чистом формоизменении, когда $\theta = 0$, гидростатические напряжения изменяются по закону $\sigma_0 = \frac{c_2}{6\sqrt{3}}e^2$. Поэтому константа c_2 позволяет моделировать дилатационные явления в материале. Константа c_3 описывает возможное отклонение угла вида напряженного состояния от угла вида деформированного состояния.

Для модели Генки-Мурнагана определен обобщенный тензор жесткости четвертого ранга \mathbf{C} в виде $\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \Gamma \partial \Gamma} = \frac{\partial \Sigma_{\mathbf{R}}}{\partial \Gamma} = \mathbf{N} + \mathbf{L} \cdot \Gamma$. Выполнение условий положительной определенности тензора $\mathbf{A}^{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{n}$ для любого \vec{n} гарантирует сильную эллиптичность системы уравнений с определяющими соотношениями Генки-Мурнагана. Ограничимся рассмотрением необходимого условия $A_{11}^{(\vec{n})} > 0$, которое для $\Gamma = \ln \Gamma_i \vec{e}_i \vec{e}_i$, $i = 1..3$, можно представить в виде следующих неравенств:

$$\begin{aligned} K + \frac{4}{3}G + c_1 \frac{\theta}{3\sqrt{3}} + c_2 \frac{2\Gamma_1}{3\sqrt{3}} + c_3 \frac{2\tilde{\Gamma}_1}{3} &> 0; \\ G + c_2 \frac{\theta}{6\sqrt{3}} - c_3 \frac{\tilde{\Gamma}_3}{2} &> 0; \quad G + c_2 \frac{\theta}{6\sqrt{3}} - c_3 \frac{\tilde{\Gamma}_2}{2} &> 0, \end{aligned} \quad (6)$$

При $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ условия (6) принимают вид ограничений, накладываемых на линейно-упругий материал при проверке условий сильной эллиптичности: $K + \frac{4}{3}G > 0$, $G > 0$.

Проведен сравнительный анализ известных моделей гиперупругих материалов с моделью Генки-Мурнагана для задач, имеющих аналитическое решение. Были рассмотрены задачи одноосного растяжения/сжатия параллелепипеда, решение которой для модели несжимаемого материала (3), (5) имеет вид:

$$S_{11}(\lambda) = 3G \ln \lambda + \frac{3c_3}{4} \ln^2 \lambda, \quad (7)$$

и обобщенного сдвига параллелепипеда, решение которой для модели несжимаемого материала (3), (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{11}(\lambda) &= 2G \ln \lambda - c_3 \ln^2 \lambda, \\ S_{22}(\lambda) &= 4G \ln \lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Решения для моделей Синьорини, Мурнагана, Неффа и Генки-Мурнагана сжимаемых гиперупругих тел, а также решения для моделей Муни-Ривлина, Огдена, Фунга и Изихары несжимаемых гиперупругих тел в обоих типах задач при малых значениях деформаций асимптотически совпадают. В области больших деформаций рассмотренные решения имеют принципиально различный характер поведения. Для установления применимости модели к описанию конкретных материалов необходимо сравнение с экспериментальными данными.

В работах Трелоара приведены результаты экспериментов по одноосному растяжению и чистому сдвигу образцов из натурального каучука. Известны аппроксимации экспериментов моделями Трелоара, Огдена 3-го порядка. Из общих решений (7) и (8) получены аппроксимации для модели Генки-Мурнагана.

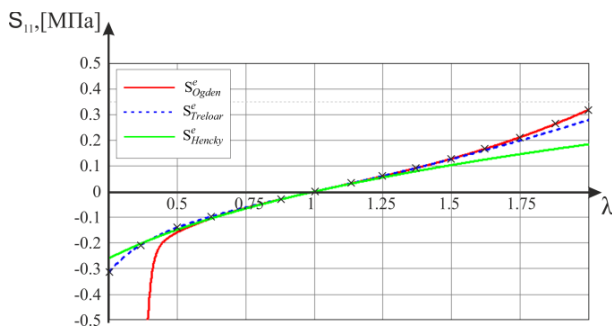


Рисунок 1 – Зависимости истинных напряжений $S_{11}(\lambda)$ для различных аппроксимаций экспериментов Трелоара на одноосное растяжение / сжатие

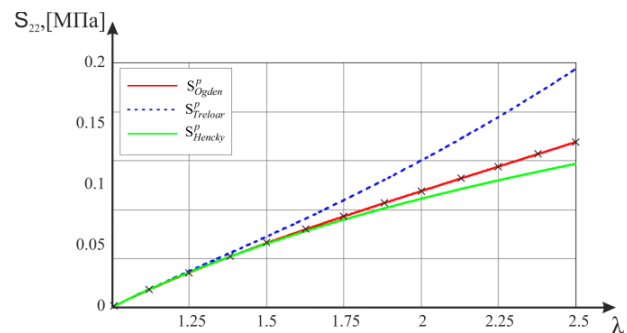


Рисунок 2 – Зависимости истинных напряжений $S_{22}(\lambda)$ для различных аппроксимаций экспериментов Трелоара на чистый сдвиг

Отметим, что, несмотря на хорошую аппроксимацию моделью Огдена экспериментальных данных при растяжении, при сжатии отклонения становятся весьма значительными, что видно из рисунка 1. Сравнение кривых показало, что модель Генки-Мурнагана лучше аппроксимирует процесс сжатия, чем модель Огдена. При чистом сдвиге модель Генки-Мурнагана описывает эксперимент лучше, чем модель Трелоара (см. рисунок 2).

В главе 2 приведена постановка краевой задачи конечного квазистатического деформирования высокоэластичных материалов при взаимодействии с абсолютно твердыми матрицами. В качестве уравнения равновесия используется условие равновесного протекания процесса деформирования в текущей конфигурации в вариационной форме:

$$\int_V \left(\frac{dV_0}{dV} \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\Sigma}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega} - \bar{\mathbf{v}} \bar{\nabla} \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\bar{\mathbf{v}} \bar{\nabla}) dV =$$

$$= \int_{\Sigma} \left(\vec{P}^{(n)} + \vec{P}^{(n)} (\dot{\theta} - \vec{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \vec{n}) \right) \cdot \delta \vec{v} d\Sigma,$$

где $\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{v} + \vec{v} \vec{\nabla})$ – симметричный тензор скоростей деформаций, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ – антисимметричный тензор угловых скоростей, \vec{F} – вектор массовых сил, ρ – плотность тела, $\vec{v}(\vec{x}, t)$ – поле скоростей, $\vec{P}^{(n)}$ – вектор внешних поверхностных сил.

Вариационное уравнение содержит производную по времени от обобщенного повернутого тензора напряжений $\Sigma_{\mathbf{R}}$, имеющую вид

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{\mathbf{R}} = & \left(\left(K - \frac{2}{3} G \right) \dot{\theta} + \left(\frac{c_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2c_2}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3} c_3 \right) \theta \dot{\theta} + \left(\frac{c_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3} c_3 \right) e \dot{e} \right) \mathbf{E} + \\ & + \left(\frac{c_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3} c_3 \right) \dot{\theta} \mathbf{\Gamma} + \left(2G + \left(\frac{c_1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3} c_3 \right) \theta \right) \mathbf{\Gamma} + c_3 (\dot{\mathbf{\Gamma}} \cdot \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}}). \end{aligned} \quad (9)$$

В работе предложен способ вычисления тензора логарифмических деформаций с помощью разложения в ряд по степеням тензора Коши-Грина $\mathbf{\varepsilon}$:

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{E} + 2\mathbf{\varepsilon}) = \mathbf{H} + \frac{\mathbf{H}^3}{3} + \frac{\mathbf{H}^5}{5} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{H}^{2k-1}}{2k-1}, \quad (10)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{\varepsilon} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{\varepsilon})^{-1} = (\mathbf{E} + \mathbf{\varepsilon})^{-1} \cdot \mathbf{\varepsilon}$. Область сходимости ряда (10) совпадает с областью допустимых значений величин главных деформаций $\varepsilon_i > -0.5$.

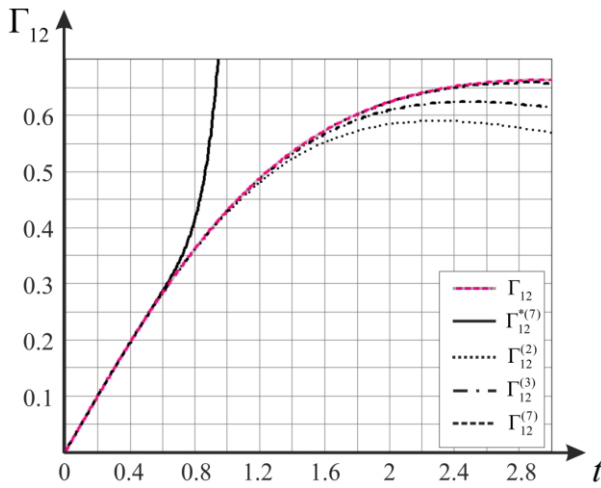


Рисунок 3 – Компоненты Γ_{12} при простом сдвиге

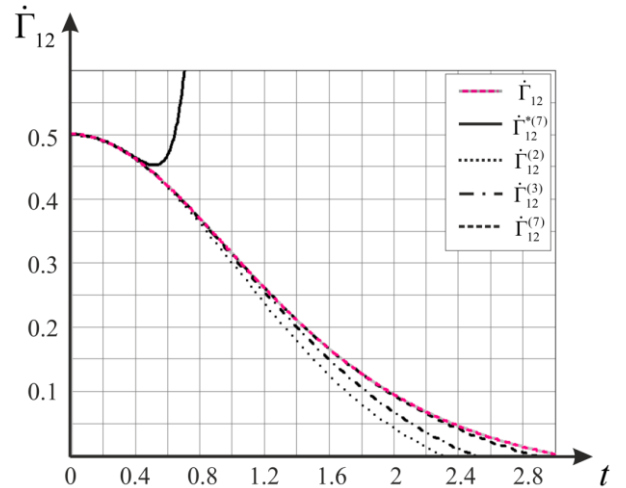


Рисунок 4 – Производные компонент Γ_{12} по параметру t при простом сдвиге

Дифференцирование слагаемых ряда (10) приводит к соотношениям, позволяющим вычислять компоненты производной тензора Генки по времени, входящей в соотношения (9):

$$\dot{\mathbf{\Gamma}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\sum_{m=1}^{2k-1} \mathbf{\varepsilon}^{m-1} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{\varepsilon})^{-m} \cdot \dot{\mathbf{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \mathbf{\varepsilon})^{-1} \cdot \mathbf{\varepsilon}) \cdot ((\mathbf{E} + \mathbf{\varepsilon})^{-1} \cdot \mathbf{\varepsilon})^{2k-m-1} \right). \quad (11)$$

В рамках разработанной численной модели решена задача о взаимодействии жесткой сферы с основанием упругого цилиндра. Для процесса индентирования (см. рисунок 5) установлена малая степень влияния учета контактного трения на интегральные силовые характеристики процесса индентирования матрицей со сферическим наконечником образца материала, описываемого моделью Генки-Мурнагана (см. рисунок 6).

В главе 3 разработана методика экспериментального определения констант модели Генки-Мурнагана для высокоэластичных материалов. Для проведения опытов с натурными образцами был сконструирован и изготовлен кинематический стенд, позволяющий осуществлять эксперименты по одноосному сжатию и индентированию призматических образцов.

На стенде была проведена серия опытов по одноосному сжатию. Образцы первого типа представляли собой цилиндры, изготовленные из силиконового компаунда Силагерм (далее «материал 1»). Образцы второго типа представляли собой цилиндры, изготовленные из материала, представляющего собой смесь поливинилхлорида с фталатными пластификаторами (далее «материал 2»). Эксперимент, включающий полный цикл нагружения материала 1, позволяет утверждать, что исследуемый материал проявляет ярко выраженные упругие свойства. Измерение поперечных размеров образцов в процессе нагружения позволило определить коэффициент поперечных деформаций при осевом сжатии и говорить о слабой сжимаемости материала 1 в указанном диапазоне деформаций. Поэтому в дальнейшем обосновано применение модели Генки-Мурнагана с $c_1 = c_2 = 0$, а идентификация модели сводится к определению двух констант G и c_3 .

Значения констант G и c_3 модели несжимаемого материала Генки-Мурнагана (3), (5) определены, исходя из требования минимальности среднеквадратичного отклонения аналитического решения $S_{zz}(\lambda_i, G, c_3)$ (7) от экспериментальных точек $\langle S_{zz} \rangle_i$: $f(G, c_3) = \sum_{i=1}^n (\langle S_{zz} \rangle_i - S_{zz}(\lambda_i, G, c_3))^2 \rightarrow \min$.

Данная задача была решена с использованием метода наименьших квадратов. Из полученных значений упругих констант и компонент дисперсии, приведенных в таблице 1, следует выполнение критерия Фишера-Снедекора, что позволяет говорить о значимости уравнения регрессии в форме (7) на уровне $\alpha = 0.05$.

Таблица 1. Результаты обработки данных эксперимента на сжатие

Материал	$G, \text{МПа}$	$c_3, \text{МПа}$	$Q_R, \text{МПа}^2$	$Q_E, \text{МПа}^2$	F	N	$F_{0.05, 1, n}$
1	0.25	-2.03	$2.76 \cdot 10^5$	713	$9.67 \cdot 10^3$	26	4.23
2	0.51	-2.69	$3.24 \cdot 10^6$	2939	$4.85 \cdot 10^4$	45	4.08

Графики аналитических зависимостей (7), построенные для испытываемых материалов 1 и 2 по модели Генки-Мурнагана с учетом значений констант из таблицы, приведены на рисунке 7.

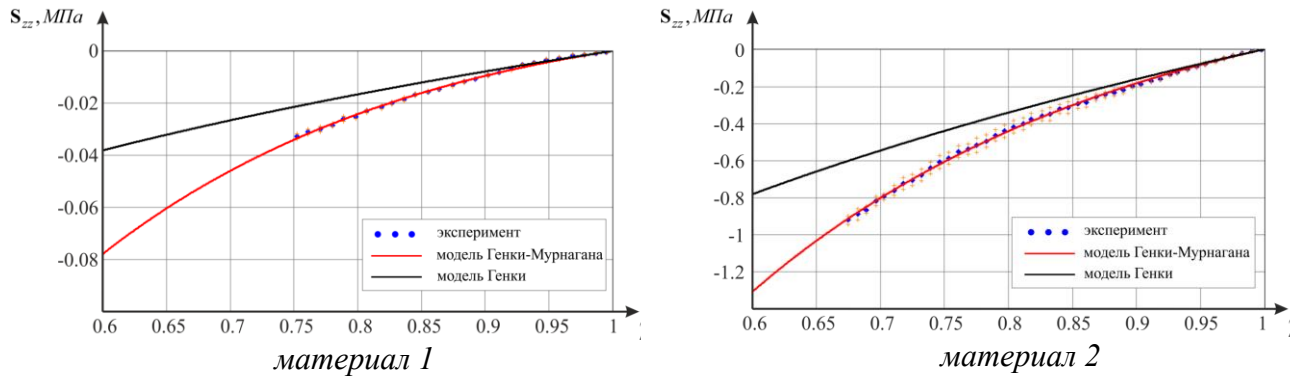


Рисунок 7 – Зависимости осевых напряжений S_{zz} от кратности удлинений λ в опыте на одноосное сжатие

Установлено, что константа G находится из опыта на сжатие достаточно точно. Для корректного определения константы c_3 из опыта на одноосное сжатие следует рассматривать эксперименты с образцами, имеющими минимально возможное соотношение r_0/h_0 , тогда влияние трения будет невелико. Предлагается использовать для определения констант материала опыт на индентирование, для которого трение оказывает минимальное влияние на интегральную характеристику процесса.

Аналитическое решение задачи об индентировании для модели Генки-Мурнагана с учетом конечности деформаций неизвестно, поэтому использована построенная численная модель. Идентификация материала Генки-Мурнагана сводится к отысканию значений параметров модели G и c_3 , доставляющих минимум суммарному среднеквадратичному отклонению расчетных значений усилий P_i^s от экспериментальных значений $\langle P^e \rangle_i$: $\Delta = \sum_{i=1}^n (P_i^s - \langle P^e \rangle_i)^2 \rightarrow \min$.

Полученная из условия минимума суммы Δ система уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{t_i} \int_{\Sigma^c} \sum_{k=1}^{2n} ([C_{mk}^r] + [C_{mk}^G]G + [C_{mk}^{c_3}]c_3)[V_k] d\Sigma^c d\tau - \langle P^e \rangle_i \right) \int_0^{t_i} \int_{\Sigma^c} \sum_{k=1}^{2n} [C_{mk}^G][V_k] d\Sigma^c d\tau = 0, \\ \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{t_i} \int_{\Sigma^c} \sum_{k=1}^{2n} ([C_{mk}^r] + [C_{mk}^G]G + [C_{mk}^{c_3}]c_3)[V_k] d\Sigma^c d\tau - \langle P^e \rangle_i \right) \int_0^{t_i} \int_{\Sigma^c} \sum_{k=1}^{2n} [C_{mk}^{c_3}][V_k] d\Sigma^c d\tau = 0 \end{cases} \quad (12)$$

решается с использованием итерационной процедуры.

Таблица 2. Значения упругих констант материала 2, определенные из опыта на сжатие для различных начальных приближений $\{G^0, c_3^0\}$

	$G^0 = 0.1 \text{ МПа}, c_3^0 = 0$	$G^0 = 1 \text{ МПа}, c_3^0 = 0$	$G^0 = 1 \text{ МПа}, c_3^0 = 1 \text{ МПа}$
$G^{12}, \text{ МПа}$	0.52681	0.52715	0.52728
$c_3^{12}, \text{ МПа}$	-2.7456	-2.7528	-2.7522

Сходимость построенной для определения упругих констант вычислительной процедуры была исследована на примере задачи определения упругих констант из опыта на сжатие для различных значений начального приближения искомых параметров. Использовались массивы данных, полученных из опытов по одноосному сжатию для материала 2.

Сравнение полученных численно из итерационной процедуры значений за 12 итераций G^{12} и c_3^{12} (таблица 2) со значениями G и c_3 (таблица 1), полученными с использованием аналитического решения для несжимаемого материала, показало, что для материала 2 максимальное отличие составляет 3.3% для константы G и 2.5% для константы c_3 . Это позволяет сделать вывод о применимости построенной итерационной процедуры для численного решения обратной задачи определения упругих констант слабосжимаемого материала.

На стенде были проведены опыты по индентированию плит, изготовленных из материалов 1 и 2, сферическими инденторами разных диаметров. С помощью построенной итерационной процедуры решения системы (12) определены значения констант G и c_3 материалов.

Таблица 3. Значения упругих констант материалов, определенные из опыта на индентирование

Материал	$R, \text{ мм}$	$G, \text{ МПа}$	$c_3, \text{ МПа}$
1	7.5	0.24	-2.82
	3	0.23	-2.4
2	3	0.49	-3.34

Анализ результатов определения упругих констант материала 1 показал, что различия в значениях, полученных из опытов с различными радиусами инденторов, составляет менее 5% для константы G и менее 15% для константы c_3 . Сравнение значений констант модели для материала 1, определенных в опыте на индентирование (см. таблицу 3) и в опыте на сжатие (см. таблицу 1) показывает, что для материала 1 различие в определении константы G составляет 8%, а для константы c_3 достигает 28%. Для материала 2 различие в определении константы G составляет 4%, а для константы c_3 менее 20%. Таким образом, учет неоднородности деформирования при индентировании позволяет уточнить значения констант модели. Зависимости осевых усилий P^e от величины относительной осадки D/R , построенные в результате численного моделирования процессов индентирования материалов с характеристиками, соответствующими таблице 3, приведены на рисунке 9. Также на рисунке 9 показаны квазилинейные численные решения, полученные при расчете по соотношениям (3)-(4) с $c_3 = 0$. В этом случае результаты расчета совпадают с результатами, полученными в рамках модели материала Генки (2).

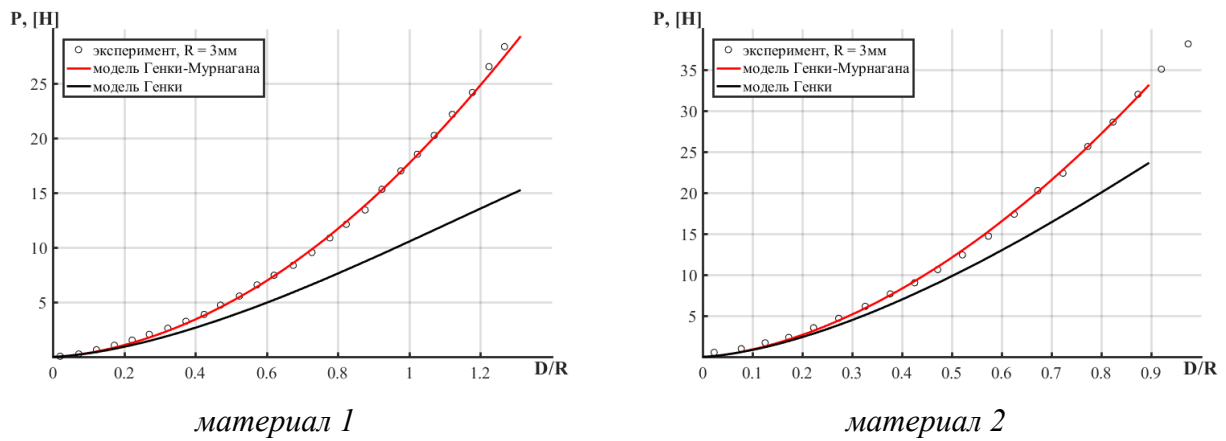


Рисунок 9 – Зависимость осевого усилия P от величины относительной осадки D/R при индентировании сферой $R = 3\text{мм}$

При величинах относительной осадки жесткой сферы $D/R > 0.5$ осевые усилия, вычисленные с использованием линейной модели материала Генки, занижены по сравнению с экспериментальными данными на 30-50% для материалов 1 и 2. В то же время расчетные усилия, найденные по моделям (2) и (3)-(4) с определенными значениями констант практически совпадают на начальном участке в диапазоне $D/R < 0.2$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертации решена научная задача теоретического и экспериментального обоснования варианта соотношений, устанавливающих законы конечного деформирования высокоэластичных материалов, имеющая значение для развития механики деформируемого твердого тела. В ходе исследований были получены следующие основные результаты:

- анализ модели Генки-Мурнагана позволил установить физический смысл констант при нелинейных слагаемых и естественным образом перейти к модели несжимаемого материала;
- для модели материала Генки-Мурнагана определен диапазон деформаций, при которых выполняются условия сильной эллиптичности. В установленном диапазоне деформаций соотношения модели хорошо описывают экспериментальные данные Трелоара;
- предложен способ разложения тензора Генки в ряд, сходящийся на всем интервале изменения главных значений тензора деформаций Коши-Грина;
- выполненная постановка и пространственно-временная дискретизация задач конечного осесимметричного деформирования позволили достоверно описать процесс взаимодействия твердых тел с жесткими матрицами. На основе вычислительных экспериментов показано, что учет контактного трения оказывает существенное влияние на макрохарактеристики процесса сжатия, а при индентировании это влияние незначительно;
- создан экспериментальный стенд, позволяющий проводить натурные испытания по сжатию и индентированию образцов из высокоэластичных

материалов. Получены экспериментальные данные для двух типов высокоэластичных слабосжимаемых материалов;
 – разработана итерационная процедура определения констант из опытов по неоднородному деформированию. Найдены значения констант модели Генки-Мурнагана для материалов двух типов. Установлено, что модель Генки-Мурнагана описывает результаты опытов по индентированию на большем диапазоне деформаций, чем модель Генки.

Основные публикации по теме диссертации

По теме диссертации опубликована 21 работа, основными из которых являются:

статьи в журналах, входящих в перечень ВАК:

1. **Астапов Ю.В.** Конечные деформации упругих тел при взаимодействии с жесткой шероховатой плоскостью / **Ю.В. Астапов**, А.А. Маркин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2016. – Т. 29. – № 3. – С. 64-75.

2. **Астапов Ю.В.** Внедрение сферического индентора в основание упругого и гипопругого круговых цилиндров при конечных деформациях / **Ю.В. Астапов** // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2017. – Т. 32. – № 2. – С. 107-116.

3. **Астапов Ю.В.** Численное и экспериментальное моделирование процесса индентирования резиновых образцов / **Ю.В. Астапов**, Д.В. Христич // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2018. – Т. 36. – № 2. – С. 65-73.

4. Христич Д.В. Конечное неизотермическое деформирование резинового шара / Д.В. Христич, **Ю.В. Астапов** // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2015. – Вып.2. – С. 84-90.

статьи в изданиях, индексируемых в WoS и Scopus:

5. **Astapov Yu.V.** The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals / **Yu.V. Astapov**, D.V. Khristich, A.A. Markin, M.Yu. Sokolova // International Journal of Applied Mechanics. – 2017. – V.9. – № 6. – P. 1750080-1 – 1750080-15. doi:10.1142/S1758825117500806.

6. **Astapov Yu.V.** Finite deformations of an elastic cylinder during indentation / **Yu.V. Astapov**, D.V. Khristich // International Journal of Applied Mechanics. – 2018. – V.10. – № 3. – P. 1850026. doi:10.1142/S1758825118500266.

7. Markin A.A. The physically nonlinear model of an elastic material and its identification / A.A. Markin, D.V. Khristich, M.Yu. Sokolova, **Yu.V. Astapov** // International Journal of Applied Mechanics. – 2019. – V.11. – № 7. – P. 1950064-1-1950064-13. doi:10.1142/S1758825119500649.

8. Khristich D.V. Experimental determination of the parameters of the nonlinearly elastic Hencky model / **Yu.V. Astapov**, D.V. Khristich // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2019. – 1203. 012015. doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012015.

другие публикации:

9. **Астапов Ю.В.** Вариант алгоритма учета контактного трения при взаимодействии гипопругого тела и жесткой преграды / **Ю.В. Астапов**,

Д.В. Христич // Тезисы докладов XXI Всероссийской конференции и Молодежной школы конференции «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики», посвященной памяти К.И. Бабенко (Дюрсо, 5–11 сентября, 2016). – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2016. 132 с. – С. 63.

10. **Астапов Ю.В.** Анализ взаимодействия жесткого штампа и упругого тела для различных вариантов определяющих соотношений / **Ю.В. Астапов** // XLIII Гагаринские чтения. Материалы международной молодежной научной конференции. Механика и моделирование материалов и технологий. – М.: изд-во ИПМ РАН, 2017. – 89 с. – С. 7-8.

11. **Астапов Ю.В.** Конечные деформации упругого цилиндра при индентировании / **Ю.В. Астапов** // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции (18–20 декабря 2017 г., Воронеж, Россия). – Воронеж: изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2017. – С. 988-992.

12. **Астапов Ю.В.** Экспериментальное определение параметров нелинейно-упругой модели Генки / Д.В. Христич, **Ю.В. Астапов** // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции (17-19 декабря 2018 г., Воронеж, Россия). – Воронеж: изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2019. – С. 1018-1021.

13. **Астапов Ю.В.** Влияние трения на поведение гиперупругого тела в коническом канале / **Ю.В. Астапов**, А.А. Маркин // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 11-13 ноября 2019 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2020. – С. 1243-1248.

14. Маркин А.А. Определение свойств эластомеров на основе экспериментов по индентированию / А.А. Маркин, **Ю.В. Астапов** // Аннотации докладов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Уфа, 19-24 августа 2019 г.: сборник трудов в 4-х томах. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 140-141.

15. Соколова М.Ю. Вариант модели Генки для изотропных упругих материалов / М.Ю. Соколова, **Ю.В. Астапов** // Аннотации докладов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Уфа, 19-24 августа 2019 г.: сборник трудов в 4-х томах. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 197-198.