

На правах рукописи

СКОБЕЛЬЦЫН СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ



**НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ
ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНЫХ
АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Тула – 2020

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет».

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Толоконников Лев Алексеевич

Официальные оппоненты: **Медведский Александр Леонидович** – доктор физико-математических наук, профессор РАН, ФГУП «ЦАГИ», первый заместитель ген. директора

Тарлаковский Дмитрий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, заведующий лабораторией

Шитикова Марина Вячеславовна – доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «ВГТУ», международный научный центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук им. Россихина Ю.А., руководитель

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук**

Защита диссертации состоится «23» июня 2020 г. в 14:00 часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» и ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, Тула, пр. Ленина, 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, Тула, просп. Ленина, 92 и на сайте <http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02>.

Автореферат разослан «25» марта 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследование дифракции звуковых волн на неоднородных и анизотропных упругих телах различной геометрической формы имеет важное теоретическое и практическое значение. В частности это связано с все более широким применением современных функционально-градиентных и композитных материалов. При решении практических задач гидроакустики, геофизики, дефектоскопии, биомеханики, медицинской диагностики широко используются эффекты рассеяния звуковых волн.

Реальные тела почти всегда являются неоднородными, а часто оказываются еще и анизотропными. Поэтому построение и анализ решений прямых и обратных задач рассеяния звуковых волн неоднородными и анизотропными телами является актуальной проблемой.

Обратные задачи приводят к малоисследованным математическим проблемам, требующим новых подходов и методов решения. В настоящее время накоплен определенный опыт решения обратных задач механики. Решен ряд задач по реконструкции неоднородных упругих свойств непрерывно-слоистых сред. Необходимо отметить большой вклад в теорию обратных задач Ватульяна А.О., Немировского Ю.В., Нестерова С.А., Романова В.Г., Соловьева А.Н., Янковского А.П., Ammari H., Audoin B., Bonnet M., Bui H.D., Constantinescu A., Han X., Guzina V.B., Liu G.R., Perton M. и др.

Необходимость решения обратных задач теории дифракции звуковых волн возникает при определении неизвестных свойств рассеивателя (геометрических параметров, свойств материала). Известен ряд работ по решению обратных задач дифракции звука для упругих тел (Буров В.А., Ворович И.И., Горюнов А.А., Ринкевич А.Б., Сасковец А.В. Смородинский Я.Г., Veilina L., Hanneman R., Klibanov M.V., Langenberg K.J., Liu G.R., Marklein R., Zhang D.). При этом теория обратных задач дифракции звуковых волн на упругих телах с учетом их неоднородности и анизотропии до сих пор не разработана.

Целью работы является разработка теоретических положений, позволяющих определять свойства материала и геометрические характеристики неоднородных анизотропных тел на основе анализа рассеяния ими звуковых волн.

Для достижения этой цели необходимо:

- разработать новые подходы и методы, позволяющие ставить и решать прямые задачи дифракции звуковых волн на анизотропных и неоднородных телах;
- используя предложенные методы постановки прямых задач, разработать теоретические положения, позволяющие ставить и решать обратные задачи дифракции звуковых волн на анизотропных и неоднородных телах;
- провести верификацию разработанных положений на основе решения представительного набора прямых и обратных задач дифракции звуковых волн на анизотропных и неоднородных телах.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- предложен подход к решению задач о рассеянии звука неоднородными анизотропными упругими телами канонической формы со слоистой неоднородностью;
- на основе МКЭ разработан метод решения задач дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах сложной формы с законами неоднородности и анизотропии общего вида;
- решены новые прямые задачи о рассеянии гармонических звуковых волн неоднородными анизотропными упругими телами различной конфигурации;
- выявлены особенности влияния неоднородности и анизотропии упругого материала тела на его акустические свойства;
- предложена вариационная формулировка и разработаны алгоритмы решения обратной задачи о нахождении параметров неоднородного анизотропного упругого тела по рассеянному звуковому полю на основе разработанных методов решения прямых задач дифракции;
- решен ряд задач идентификации геометрических параметров и параметров материала неоднородного анизотропного упругого тела по известному рассеянному акустическому полю;
- выполнена вариационная формулировка и предложены алгоритмы поиска параметров анизотропного неоднородного упругого тела, обеспечивающих требуемые характеристики рассеяния звуковых волн;
- решен ряд обратных задач об определении параметров неоднородного анизотропного упругого тела, обеспечивающих требуемые характеристики рассеяния звуковых волн.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы являются вкладом в теорию обратных задач дифракции звука на неоднородных и анизотропных упругих телах.

Результаты работы могут быть использованы в гидроакустике при звуковой эхолокации объектов; в дефектоскопии для разработки методов неразрушающего контроля; в медицине при разработке методов ультразвуковой диагностики; в архитектурной акустике; для проектирования промышленных материалов и конструкций с требуемыми звукоотражающими свойствами.

Методы исследования. В диссертационной работе используются аналитические и численные методы исследования.

Решение прямых задач дифракции звука на упругих телах получены в рамках линейной теории упругости и гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости.

Аналитическое описание волновых полей получено на основе метода разделения переменных с использованием разложений по волновым функциям.

Решение краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при определении поля смещений в неоднородном анизотропном упругом теле, находится модифицированным методом пристрелки или дифференциальной ортогональной прогонки.

При решении некоторых задач волновые поля как в жидкости, так и в упругой среде находятся методом конечных элементов. При этом конечно-элементная постановка осуществляется на основе метода Галеркина. Решение систем линейных алгебраических уравнений большой размерности выполняется методом LU -факторизации.

Решение обратных задач приводится к нелинейной задаче математического программирования. Поиск условного экстремума целевой функции со многими переменными выполняется методами случайного поиска, покоординатного спуска, Хука-Дживса, генетического алгоритма.

Достоверность полученных результатов обеспечивается математически корректной постановкой задач; применением апробированных математических методов; проведением расчетов на ЭВМ с контролируемой точностью; подтверждается совпадением с известными результатами для частных и предельных случаев, а также с решениями в специализированных пакетах.

На защиту выносятся следующие положения:

- подход к решению задач о рассеянии звука неоднородными анизотропными упругими телами со слоистой неоднородностью;
- метод решения задач дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах с неоднородностью и анизотропией общего вида на основе метода конечных элементов;
- аналитические и численные решения прямых задач дифракции гармонических звуковых волн на плоских, цилиндрических, сферических и эллипсоидальных неоднородных и анизотропных упругих телах;
- решение обратных коэффициентных задач об идентификации параметров упругих тел по известному рассеянному акустическому полю;
- решение обратных задач об определении законов неоднородности упругих тел с оптимальными звукоотражающими свойствами;
- результаты численных исследований решений прямых и задач дифракции звуковых волн неоднородными анизотропными упругими телами.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались:

- на 9 Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Н. Новгород, Нижегородский гос. ун-т, 2006);
- на Международных научных конференциях "Современные проблемы математики, механики, информатики" (Тула, Тульский гос. ун-т, 2000-2014);
- на II Всероссийской акустической конференции, совмещенной с XXX сессией Российского акустического общества (Н. Новгород, ИПФ РАН, 2017);
- на II Всероссийской научно-технической конференции "Механика и математическое моделирование в технике" (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017);
- на Международных научно-технических конференциях "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" (Воронеж, Воронежский гос. ун-т, 2017, 2018);

- на 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (Москва, ИПРИМ РАН, 2018);
- на XXV международном симпозиуме им. А.Г. Горшкова "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" (Москва, Вятичи, МАИ, НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИ механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2019);
- на семинаре лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций Института проблем механики РАН (Москва, ИПМех РАН, 2019);
- на семинаре кафедры теории упругости Южного федерального университета (Ростов, ЮФУ, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, 2019);
- на ежегодных научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава Тульского гос. ун-та (Тула, 2001-2019);
- на семинарах по механике деформируемого твердого тела Тульского гос. ун-та им. Л.А. Толоконникова (Тула, 2016-2019).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 53 работы, в том числе 10 статей в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus; 11 научных статей в изданиях, рекомендуемых ВАК Минобрнауки РФ; 2 монографии. Получены 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

На различных этапах работа поддерживалась грантами РФФИ (проекты 06-01-00701, 09-01-97504, 11-01-97509, 12-01-00655, 13-01-97514, 16-41-710083), Минобрнауки России (государственное задание № 1.1333.2014/К), Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

Личный вклад. Модели раздела 1.3 и решения задач, представленные в разделах 2.2.4, 2.3, 4.1, 3.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.3, 3.3.4, 4.3, 4.5, 4.7 получены автором. Модели и решения задач, представленные в разделах 2.1, 2.2.1, 2.2.3, изложены на основе совместных работ с Толоконниковым Л.А. Личный вклад автора в эти работы – постановка задач, получение аналитических решений, построении алгоритмов численного решения, проведение численные исследований и анализ результатов. В разделах 4.2, 4.4, 4.6 представлены результаты, опубликованные в совместных работах с Толоконниковым Л.А. и Лариным Н.В. Автор участвовал в постановке задач, разработке алгоритмов решения и проведении анализа полученных результатов вычислительных экспериментов. При написании разделов 2.2.2, 2.2.3, 3.2.3-3.3.2 использованы результаты, полученные в работах, написанных совместно с Ивановым В.И. и Пешковым Н.Ю. Личный вклад автора в эти работы – постановка задач, аналитико-численное решение задач, проведение численных исследований и анализ результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и четырех приложений. Работа содержит

317 страниц, включая 251 рисунок и 22 таблицы. Список литературы содержит 356 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** показана актуальность темы диссертационной работы, представлены цель и основные направления исследований, проведен анализ работ по проблемам исследований, отмечены научная новизна работы и возможные практические приложения полученных результатов, излагаются основные положения, выносимые на защиту.

Глава 1 состоит из трех разделов. В разделе **1.1** представлен обзор литературы по проблеме решения обратных задач дифракции звука на неоднородных и анизотропных упругих телах.

В обзоре отмечены существенные результаты, полученные многими авторами при решении прямых задач дифракции звуковых и упругих волн на упругих телах. Значительным вкладом в это направление исследований являются работы Бабешко В.А., Бреховских Л.М., Векслера Н.Д., Воровича И.И., Горшкова А.Г., Гузя А.Н., Кубенко В.Д., Лямшева Л.М., Медведского А.Л., Молоткова Л.А., Петрашени Г.И., Поручикова В.Б., Приходько В.Ю., Тарлаковского Д.В., Толоконникова Л.А., Тютюкина В.В., Шендерова Е.Л., Berliner M.J., Dickey J.W., Dragonette L.R., Fan Y., Faran J.J., Flax L., Gaunard G.C., Hasheminejad S.M., Honarvar F., Marston P.L., Rajabi M., Sinclair A.N., Solecki R., Varadan V.K., Varadan V.V., Überall H., Werby M.F. и др. Обозначена актуальность решения обратных задач дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных телах.

В разделе **1.2** приводятся математические модели распространения звуковых волн в идеальной жидкости и упругих волн в неоднородных анизотропных телах.

Для установившегося режима колебаний с временным множителем $e^{-i\omega t}$, где ω – круговая частота, движение идеальной сжимаемой жидкости в области Ω_0 , характеризующейся скоростью звука c_0 , в случае малых возмущений описывается волновым уравнением Гельмгольца для потенциала смещения Ψ_0

$$\Omega_0 : \quad \Delta \Psi_0 + k_0^2 \Psi_0 = 0 \quad (k_0 = \omega/c_0). \quad (1.1)$$

При этом вектор смещения \mathbf{u}_0 и акустическое давление p_0 в жидкости определяются соотношениями

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } \Psi_0, \quad p_0 = \rho_0 \omega^2 \Psi_0, \quad (1.2)$$

где k_0 – волновое число, ρ_0 – плотность жидкости.

Первичным полем возмущения является плоская звуковая волна с потенциалом смещения

$$\Psi_p = \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (1.3)$$

Полное акустическое поле в жидкости представляется суммой $\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_s$, где Ψ_s – потенциал смещения в рассеянной волне. Он удовлетворяет уравнению

вида (1.1)

$$\Omega_0 : \quad \Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0. \quad (1.4)$$

Распространение малых возмущений в области Ω неоднородного упругого тела описывается общими уравнениями движения линейной упругой среды

$$\Omega : \quad \text{Div } \sigma = -\rho \omega^2 \mathbf{u}, \quad \sigma_{jk} = \lambda_{jk}^{mn} \varepsilon_{mn}, \quad \varepsilon_{mn} = 1/2(u_{m,n} + u_{n,m}), \quad (1.5)$$

где σ_{jk} , ε_{mn} – компоненты тензора напряжений и деформаций. В общем случае плотность и модули упругости являются функциями координат

$$\rho = \rho(\mathbf{r}), \quad \lambda_{jk}^{mn} = \lambda_{jk}^{mn}(\mathbf{r}). \quad (1.6)$$

В результате отражения волны (1.3) неоднородным телом формируется рассеянное звуковое поле Ψ_s . Так что $\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_s$, а сам потенциал Ψ_s удовлетворяет уравнению вида (1.1)

$$\Omega_0 : \quad \Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0. \quad (1.7)$$

На границе упругого тела и жидкости $\Gamma\{\Omega\}$ устанавливаются условия непрерывности нормальных смещений и компонент вектора поверхностных напряжений

$$\Gamma : \quad u_n = \frac{\partial \Psi_0}{\partial n}, \quad \sigma_{nn} = -p_0, \quad \sigma_{n\tau} = 0 \quad (\tau = 1, 2). \quad (1.8)$$

На границе раздела упругих сред Γ_1 должны выполняться условия

$$\Gamma_1 : \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \quad \sigma_{nn} = \sigma_{1nn}, \quad \sigma_{n\tau} = \sigma_{1n\tau}. \quad (1.9)$$

Кроме того, необходимо выполнение дополнительных условий: условий излучения на бесконечности для потенциала Ψ_s и условий ограниченности волнового поля внутри упругого тела.

В разделе **1.3** приведены математические постановки двух типов обратных задач. Общая схема решения обратных задач дифракции звука представлена на рис. 1. При решении обратной задачи ищется приближенное значение некоторых величин f_1, f_2, \dots, f_J , которые рассчитываются по рассеянному акустическому полю Ψ_s и определяют свойства препятствия.

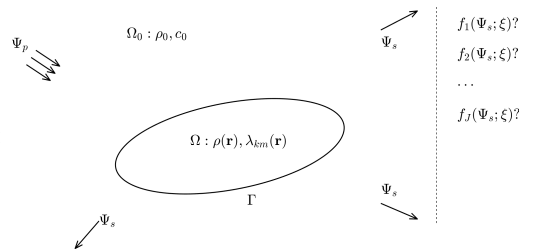


Рис. 1. К постановке обратной задачи

В общем случае решение обратной задачи получается на основании многократного решения прямой задачи при заданных: падающей волне, геометрических параметрах и параметрах неоднородности тела. Пусть вектор ξ представляет собой значения параметров тела (в общем случае функциональных), используемых при решении прямой задачи. Тогда характеристики f_1, \dots, f_J можно рассматривать как функции и рассеянного поля Ψ_s , и ξ .

В работе решаются два типа обратных задач. В качестве искомым значений f_j выступают параметры неоднородности тела ξ и/или геометрические параметры тела.

В задачах первого типа частично известным (во множестве точек наблюдения) считается рассеянное акустическое поле Ψ_s при некоторых параметрах падающей волны (направление распространения, ω). Действительные (но неизвестные) параметры упругого тела обозначим вектором ξ^* . Пусть \mathbf{V} – множество точек наблюдения, \mathbf{a} – набор параметров падающей волны, которые считаются известными, известный вектор $\Psi_s^* = \Psi_s^*(\xi^*; \mathbf{V}, \mathbf{a})$ – вектор наблюдаемых (измеренных) значений Ψ_s .

Обозначим вектором $\Psi_s = \Psi_s(\xi; \mathbf{V}, \mathbf{a})$ – расчетные (теоретические) значения Ψ_s , получаемые в результате решения прямой задачи рассеяния звука при некоторых заданных ξ в тех же точках наблюдения \mathbf{V} и при тех же параметрах падающей волны \mathbf{a} . Введем функционал, характеризующий отклонение расчетных значений Ψ_s от измеренных

$$\delta(\xi) = \|\Psi_s(\xi; \mathbf{V}, \mathbf{a}) - \Psi_s^*\|. \quad (1.10)$$

Действительные параметры упругого тела находятся на основании критерия

$$\delta(\xi) \xrightarrow{\xi \in D} \min. \quad (1.11)$$

Таким образом, приближенное решение задачи первого типа представляется в виде

$$\xi' = \arg \min_{\xi \in D} \delta(\xi). \quad (1.12)$$

В обратных задачах второго типа вводится функционал, характеризующий интенсивность рассеянного поля в \mathbf{V} при параметрах волны \mathbf{a}

$$\Phi(\Psi_s) = \Phi(\Psi_s, \xi; \mathbf{V}, \mathbf{a}). \quad (1.13)$$

Путем выбора параметров ξ требуется получить максимальное или минимальное значение $\Phi(\Psi_s)$. При решении задач этого типа не требуются измерение рассеянного поля, а используются только расчетные значения Ψ_s . В этом случае решается задача

$$\Phi(\Psi_s; \xi) \xrightarrow{\xi \in D} \text{extr}. \quad (1.14)$$

Ее решение

$$\xi' = \arg \text{extr}_{\xi \in D} \Phi(\Psi_s; \xi). \quad (1.15)$$

В главе 2 представлено решение прямых задач дифракции звука на упругих неоднородных и анизотропных телах.

В разделе 2.1 представлено решение задачи о прохождении плоской звуковой волны через анизотропный плоский упругий слой (рис. 2).

Предполагается, что плотность и модули упругости в системе координат x , y , z изменяются только в зависимости от расстояния от поверхности слоя, т.е. зависят от координаты z .

Плоская волна (1.3) падает из полупространства $z > 0$ Волновой вектор k_0 расположен в плоскости xOz .

Потенциалы смещения в отраженной от слоя Ψ_s и в прошедшей через слой Ψ_1 волнах ищем в виде

$$\Psi_s = A \exp[i(k_{0x}x + k_{0z}z)], \quad \Psi_1 = B \exp[i(k_{0x}x - k_{1z}z)], \quad (2.1)$$

где $k_j = \omega/c_j$ ($j = 0, 1$); c_j – скорость звука в j -й жидкости.

Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном слое описывается уравнениями движения упругой среды (1.5). Вектор смещения \mathbf{u} и вектор напряжения $\mathbf{p} = (\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz})^T$ к поверхностям $z = \text{const}$ в упругом слое Ω будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, z) &= \mathbf{U}(z) \exp(ik_{0x}x), \\ \mathbf{p}(x, z) &= \mathbf{P}(z) \exp(ik_{0x}x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Краевые условия на поверхности $z = 0$ имеют вид (1.8), где $n = z$, а условия на поверхности $z = H$ получаются из условий при $z = 0$ заменой $\partial\Psi_0/\partial z$ на $\partial\Psi_1/\partial z$ и p_0 на p_1 .

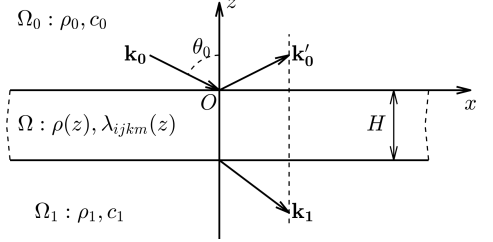


Рис. 2. Геометрия задачи 2.1

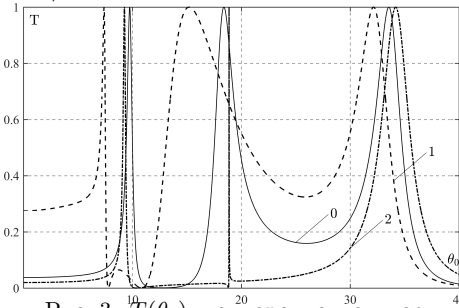


Рис. 3. $T(\theta_0)$ в однородном случае

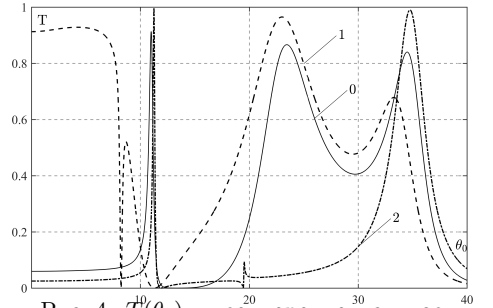


Рис. 4. $T(\theta_0)$ в неоднородном случае

Подстановкой (2.2) в уравнения движения (1.5), получается система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для вектор-функций $\mathbf{U}(z)$ и $\mathbf{P}(z)$

$$\mathbf{U}' = \hat{A}\mathbf{U} + \hat{B}\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}' = \hat{C}\mathbf{U} + \hat{D}\mathbf{P}, \quad (2.3)$$

где штрих обозначает дифференцирование по z , а компоненты матриц-коэффициентов \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} – матрицы третьего порядка.

При подстановке (2.1), (2.2) в граничные условия (1.8) получим выражения

$$A = A(\mathbf{U}(0)), \quad B = B(\mathbf{U}(H)) \quad (2.4)$$

и краевые условия для системы уравнений (2.3) вида

$$\hat{E}\mathbf{U} + \mathbf{P}|_{z=0} = \mathbf{G}, \quad \hat{F}\mathbf{U} + \mathbf{P}|_{z=H} = 0. \quad (2.5)$$

Краевая задача (2.3), (2.5) решается численно модифицированным методом пристрелки.

Были проведены расчеты зависимостей A и B для ряда частных случаев свойств материала слоя, частоты падающей волны и угла падения θ_0 . Для сопоставления рассматривались материалы с различной анизотропией: изотропный (тип 0), трансверсально-изотропный двух типов (тип 1 и тип 2).

На рис. 3 показаны результаты расчета коэффициента прозрачности $T = |B^2|$ в зависимости от θ_0 (град.) при $k_0 H = 8.5$ для слоя из однородных материалов типа 0, 1, 2, на рис. 4 – для случаев, когда модули упругости изменяются по толщине слоя. Видно, что анизотропия и неоднородность материала существенно изменяют зависимость $T(\theta)$.

В разделе 2.2 представлены решения задач дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных телах цилиндрической, сферической и эллипсоидальной формы.

В разделе 2.2.1 приведено решение задачи о рассеянии звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным полым круговым бесконечным цилиндром, внутри которого находится идеальная жидкость.

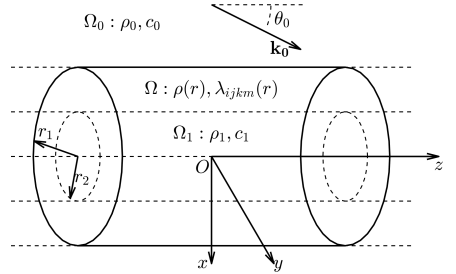


Рис. 5. Геометрия задачи 2.2.1

Считается, что анизотропия материала является цилиндрической и согласованной с формой поверхности Ω , а неоднородность проявляется только в зависимости от r – расстояния от оси цилиндра. Система координат x, y, z вводится так, как показано на рис. 5. Вводится также система координат кругового цилиндра r, φ, z , связанная с декартовой системой.

Поскольку свойства материала цилиндра не зависят от координаты z , то в силу закона Снеллиуса волновые поля в упругом слое цилиндра и в жидкостях будут зависеть от z по закону $g = e^{ik_{0z}z}$, где $k_{0z} = k_0 \cos \theta_0$, θ_0 – угол между \mathbf{k}_0 и осью z .

Потенциалы смещения в отраженной Ψ_s и в возбужденной в полости Ψ_1 волнах ищутся в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям

$$\Psi_s = g \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k_{0r}r) \cos m\varphi, \quad \Psi_1 = g \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_m(k_{1r}r) \cos m\varphi.$$

Физические компоненты вектора смещения \mathbf{u} в упругом цилиндрическом слое представляются в виде

$$u_r = g \sum_{m=0}^{\infty} U_{1m}(r) \cos m\varphi, \quad u_\varphi = g \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}(r) \sin m\varphi, \quad u_z = g \sum_{m=0}^{\infty} U_{3m}(r) \cos m\varphi.$$

Аналогичным образом представляются и компоненты вектора напряжения \mathbf{P} к поверхностям $r = \text{const}$

$$\sigma_{rr} = g \sum_{m=0}^{\infty} P_{1m}(r) \cos m\varphi, \quad \sigma_{r\varphi} = g \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m}(r) \sin m\varphi, \quad \sigma_{rz} = g \sum_{m=0}^{\infty} P_{3m}(r) \cos m\varphi.$$

Подставляя выражения компонентов \mathbf{u} и \mathbf{P} в уравнения движения (1.5), получим для каждого m систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для вектор-функций $\mathbf{U}_m(r) = (U_{1m}, U_{2m}, U_{3m})^T$ и $\mathbf{P}(r) = (P_{1m}, P_{2m}, P_{3m})^T$

$$\mathbf{U}'_m = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}_m + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{P}_m, \quad \mathbf{P}'_m = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{U}_m + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{P}_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.6)$$

Из граничных условий (1.8) находятся выражения для коэффициентов разложений

$$A_m = A_m(U_{1m}(r_1)), \quad B_m = B_m(U_{1m}(r_2)) \quad (2.7)$$

и краевые условия для уравнений (2.6)

$$\hat{\mathbf{E}}\mathbf{U}_m + \mathbf{P}_m|_{r=r_1} = \mathbf{G}, \quad \hat{\mathbf{F}}\mathbf{U}_m + \mathbf{P}_m|_{r=r_2} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.8)$$

Краевая задача (2.6), (2.8) решается численно методом дифференциальной ортогональной прогонки. После ее решения можно вычислить A_m , B_m по соотношениям (2.7).

Исследована дальняя зона акустического поля ($r \rightarrow \infty$). Нормированная форм-функция потенциала смещения в рассеянной волне имеет вид

$$F(k_0 r_1, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi k_0 r_1}} \left| \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m A_m \cos(m\varphi) \right|. \quad (2.9)$$

Были проведены расчеты диаграмм направленности и частотных характеристик рассеянного поля при разных типах анизотропии и неоднородности. Показано, что форма диаграмм направленности существенно зависит от типа анизотропии материала упругого слоя. Неоднородность материала на некоторых частотах приводит к изменению характеристик рассеяния сравнимым по величине с изменениями, связанными с типом анизотропии. Особенно эффекты влияния анизотропии и неоднородности проявляются в области резонансных частот, близким к частотам собственных колебаний упругого слоя. На рис. 6 показаны частотные зависимости $F(k_0 r_1, \pi)$, демонстрирующие заметное изменение коэффициента обратного отражения при переходе от однородного изотропного слоя к анизотропному и к неоднородному анизотропному.

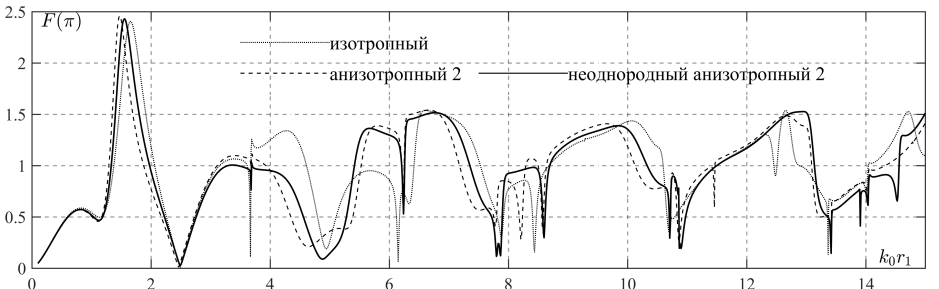


Рис. 6. $F(k_0 r_1, \pi)$ для цилиндра с анизотропией типа 2

В разделе 2.2.2 решена задача о дифракции плоской звуковой волны на конечном упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием (рис. 7).

Здесь предложен аналитико-численный метод на основе МКЭ, который пригоден для решения задач дифракции звуковых волн на неоднородных и анизотропных упругих телах сложной формы и/или сложными видами неоднородности и анизотропии.

Основная идея этого метода состоит в том, что рассеиватель окружается сферической поверхностью Γ_0 . В шаровой области, включающей упругое тело и прилегающий слой жидкости Ω'_0 , решение проводится МКЭ, а во внешней области однородной акустической среды решение ищется в аналитической форме.

Введены декартова (x, y, z) и связанные с ней цилиндрическая (R, φ, z) и сферическая (r, θ, φ) системы координат. Для рассматриваемой задачи выделение слоя Ω'_0 показано на рис. 8. В области Ω'_0 вводится дополнительное неизвестное – потенциал смещения в этой части жидкости Ψ . Потенциал Ψ должен удовлетворять уравнению Гельмгольца.

На поверхности $\Gamma_0(r = R_0)$ вводятся условия согласования параметров движения жидкости в области Ω'_0 и во внешней среде Ω_0

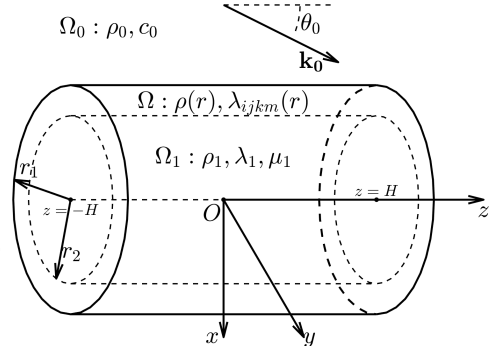


Рис. 7. Геометрия задачи 2.2.2

$$\Gamma_0 : \quad a) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}, \quad b) \quad \Psi = \Psi_0. \quad (2.10)$$

Таким образом, требуется решить уравнения (1.7), (1.5) в Ω и аналогичные в Ω_1 с учетом граничных условий (1.8), (1.9), (2.10) и условий излучения.

Разобьем все подобласти шара $\Omega' = \Omega'_0 \cup \Omega \cup \Omega_1$ на конечные элементы в форме тетраэдров. Иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 9.

Все неизвестные функции в Ω представляются в виде линейных комбинаций координатных функций узлов. В частности для потенциала Ψ можно записать

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \psi_k f_k(\mathbf{r}), \quad (2.11)$$

где ψ_k – узловые значения потенциала в области Ω'_0 ; $f_k(\mathbf{r})$ – координатные функции конечно-элементной модели; K – количество узлов; будем считать, что множество значений $k = \overline{1..K}$ охватывает узлы всей КЭ-сетки области Ω' , просто в узлах, не относящихся к Ω'_0 , положим $\psi_k \equiv 0$.

Во внешней области содержащей жидкости потенциал смещений Ψ_s в рассеянной волне будем искать с учетом условий излучения в виде разложения по сферическим гармоникам

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} h_n^{(1)}(k_0 r) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (2.12)$$

где $h_n^{(1)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля первого рода порядка n ; $P_n^m(x)$ – присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m . Потенциал смещения в падающей плоской волне (1.3) также разложим по сферическим гармоникам.

Из второго уравнения граничных условий (2.10) находим выражения для коэффициентов A_{nm} разложения (2.12) через узловые значения ψ_k функции Ψ .

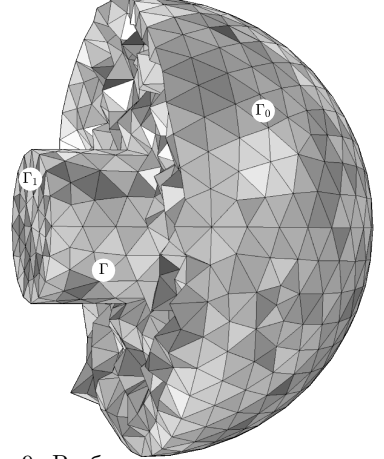
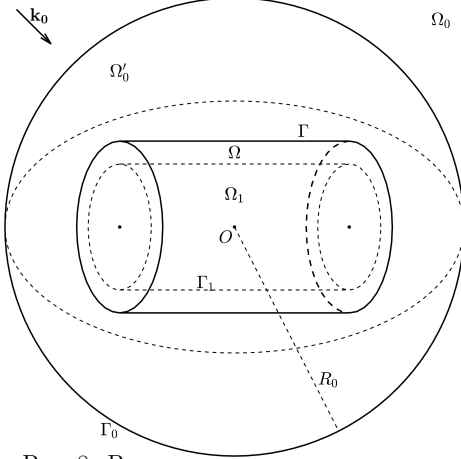


Рис. 8. Выделение прилегающего слоя Рис. 9. Разбиение на конечные элементы

В форме, аналогичной (2.11), ищется и смещение в упругой части препятствия (в областях Ω, Ω_1)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{U}_k f_k(\mathbf{r}). \quad (2.13)$$

Здесь \mathbf{u} рассматривается как общее обозначение для смещений \mathbf{u}, \mathbf{u}_1 в областях Ω и Ω_1 соответственно.

В результате граничные условия (1.8), (1.9) и первое из (2.10) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций $\Psi, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1$ из ограниченной области Ω' . Далее краевая задача для уравнений (1.5) и аналогичных в Ω_1 с указанными граничными условиями решается стандартной технологией МКЭ методом Галеркина. В результате решения находятся все узловые значения неизвестных функций ψ_k, U_k ($k = 1, 2, \dots, K$). Подстановкой значений ψ_k ($k = 1, 2, \dots, K_0$) в выражения для A_{nm} находим коэффициенты в разложении потенциала смещения в рассеянном поле (2.12).

Для рассматриваемой задачи проведены расчеты форм-функция $F(\theta)$ амплитуды рассеянного поля в дальней зоне

$$F(k_0 r_1, \theta, \varphi) = \frac{2}{k_0 r_1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} (-i)^n P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi) \right|. \quad (2.14)$$

Выявлена степень влияния параметров конечного цилиндра на рассеянное поле. Установлено, что с помощью неоднородного анизотропного покрытия можно изменять звукоотражающие характеристики тела.

В 2.2.3 представлено решение осесимметричной задачи о рассеянии плоской звуковой волны радиально-неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем с жидкостью внутри.

Потенциалы смещения в отраженной Ψ_s и в возбужденной в полости Ψ_1 волнах ищутся в виде разложения по сферическим волновым функциям

$$\Psi_s = \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m^{(1)}(k_0 r) P_m(\cos \theta), \quad \Psi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} B_m j_m(k_1 r) P_m(\cos \theta), \quad (2.15)$$

где $j_m(x)$ – сферическая функция Бесселя; $P_m(x)$ – полином Лежандра.

Физические компоненты вектора смещения \mathbf{u} и вектора напряжения \mathbf{P} в слое Ω представляются в виде

$$u_r(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} U_{1m}(r) P_m(\cos \theta), \quad u_\theta(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} U_{2m}(r) \frac{d}{d\theta} P_m(\cos \theta). \quad (2.16)$$

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{1m}(r) P_m(\cos \theta), \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m}(r) \frac{d}{d\theta} P_m(\cos \theta). \quad (2.17)$$

Подставляя (2.16) и (2.17) в уравнения движения (1.5), получим для каждого m систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для вектор-функций $\mathbf{U}_m(r) = (U_{1m}, U_{2m})^T$ и $\mathbf{P}(r) = (P_{1m}, P_{2m})^T$. По форме соответствующая система имеет вид (2.6), в которых матрицы \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} имеют размерность 2×2 .

Из граничных условий (1.8) находятся выражения для коэффициентов A_m , B_m разложений (2.15) и краевые условия вида (2.8) для дифференциальных уравнений относительно $\mathbf{U}_m(r)$, $\mathbf{P}_m(r)$. Краевая задача для $\mathbf{U}_m(r)$ и $\mathbf{P}_m(r)$ решается численно. После решения определяются коэффициенты A_m , B_m .

Проведены расчеты угловых и частотных характеристик рассеяния в дальней зоне поля по (2.14). Обнаружены области частот в которых анизотропия и неоднородность материала рассеивателя оказывают наиболее существенное влияние.

В разделе **2.2.4** представлено решение задачи о дифракции звука на упругом трехосном эллипсоиде с неоднородным покрытием.

Декартова система координат x , y , z вводится так, чтобы ее оси были направлены по осям эллипсоида с длиной полуосей a , b , c . Полагается, что анизотропия материала покрытия задается компонентами тензора модулей упругости в x , y , z , а неоднородность проявляется только в зависимости от q – расстояния от поверхности однородной части Γ_1 .

Заметим, что внешняя поверхность упругого тела Γ в общем случае не может быть совмещена с координатной поверхностью известных ортогональных

систем координат. Для решения используется метод, представленный в разделе 2.2.2.

Проведены расчеты и анализ диаграмм направленности рассеянного поля (2.14) ($r_1 = (a + b + c)/3$) при различных видах неоднородности покрытия. Показано, что полученное решение может быть использовано для оценки влияния покрытия на звукоотражающие характеристики тела.

В разделе 2.3 представлены решения задач о дифракции звуковых волн на неоднородных упругих телах в присутствии подстилающей поверхности.

В разделе 2.3.1 рассмотрена задача о рассеянии плоской звуковой волны бесконечным упругим эллиптическим цилиндром с внешним неоднородным слоем. Предполагается, что цилиндр находится в идеальной жидкости Ω_0 , граничащей с однородным упругим полупространством Ω_2 . Внешний неоднородный слой цилиндра Ω имеет постоянную толщину. Вторичными волнами, отраженными телом пренебрегаем.

Под действием первичной волны Ψ_p и отраженной от поверхности Π вторичной Ψ_q звуковых волн в цилиндре формируются поля упругих колебаний, которые представляются векторами смещений: \mathbf{u}_1 – в однородной части и \mathbf{u} – в неоднородном покрытии. Взаимодействие звуковых полей и упругих колебаний цилиндра порождает отраженное звуковое поле Ψ_s . Таким образом, суммарное звуковое поле в акустической среде Ω_0 будет определяться линейной комбинацией $\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_q + \Psi_s$. Поле смещений в упругом полупространстве Ω_2 будет представлено вектором $\mathbf{u}_2 = \text{grad } \Psi_2 + \text{rot } \Phi_2$.

Для решения задачи вводятся две декартовых системы координат: x, y, z , связанная с поверхностью Π ; и x_1, y_1, z_1 , связанная с цилиндром (рис. (10)).

Поля Ψ_q, Ψ_2, Φ_2 находятся из решения задачи отражения плоской звуковой волны Ψ_p от упругого полупространства.

Далее решается задача о дифракции двух плоских волн Ψ_p, Ψ_q на упругом цилиндре с внешним неоднородным слоем. Решение проводится с использованием метода, предложенного в разделе 2.2.2 для решения трехмерных задач. При этом указанный метод модифицирован для случая двумерных задач.

Полученное решение использовано для численных расчетов диаграмм направленности. Выявлено, влияние неоднородности материала покрытия на рассеяние звука в присутствии упругого полупространства.

В разделе 2.3.2 представлено решение задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом эллипсоиде с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью (абсолютно жесткой или акустически мягкой).

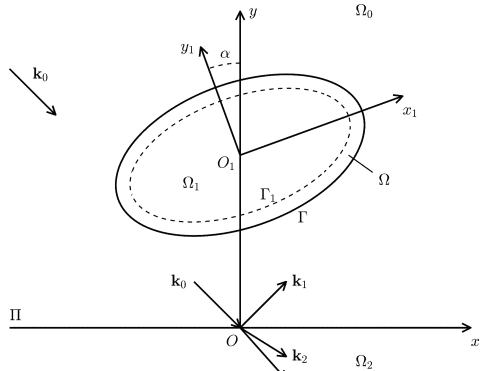


Рис. 10. Введение систем координат

Задача сведена к задаче дифракции звука на двух идентичных рассеивателях, находящихся в безграничном пространстве в поле двух падающих плоских волн с одинаковой амплитудой. При этом волновой вектор второй плоской волны является зеркальным отражением волнового вектора \mathbf{k}_0 падающей волны. Кроме того, выражение для потенциала смещения второй волны по форме совпадает с Ψ_p и имеет знак “+” в случае абсолютно жесткой подстилающей поверхности и знак “-” в случае мягкой поверхности.

Проведены расчеты диаграмм направленности рассеянного поля для линейных законов неоднородности материала покрытия при разных волновых размерах рассеивателя.

В главе 3 представлено решение коэффициентных задач идентификации параметров упругих тел по рассеянию звука. В разделе 3.1 показано решение задач определения параметров неоднородного упругого слоя по рассеянию плоской звуковой волны.

В разделе 3.1.1 рассматривается задача определения законов неоднородности плоского трансверсально-изотропного неоднородного по толщине упругого слоя, граничащего с идеальной жидкостью, по коэффициенту прохождения звука. Геометрия задачи приведена на рис. 2.

Законы неоднородности аппроксимируются многочленами третьей степени. Предполагается, что каждый из материальных параметров упругого слоя s представляется зависимостью вида

$$s = s^0 \cdot \alpha f(z), \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3. \quad (3.1)$$

где s^0 – среднее по толщине слоя значение параметра s , α – нормировочный коэффициент.

Неизвестные коэффициенты в этих полиномиальных зависимостях ищутся путем решения задачи минимизации функции многих переменных. Минимизируемая функция представляет собой меру отклонения измеренного коэффициента прохождения звуковой волны и его значения, полученного в результате численного решения задачи.

Функция $f(z)$ в (3.1) может быть задана ее значениями в 4-х равноотстоящих точках z_k . Кроме того, вводится ограничение на максимальное и минимальное значение $f(z)$ в точках z_k

$$f_- \leq f(z_k) \leq f^+, \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad (3.2)$$

Таким образом, зависимость параметра s в (3.1) от координаты z задается 4-мя числами $f_k = f(z_k)$ из отрезка $[f_-, f^+]$. При этом коэффициенты a_k в $f(z)$ рассчитываются по интерполяционным формулам

Далее полагалось, что среднее значение s^0 и границы отрезка $[f_-, f^+]$ для каждого искомого параметра заданы. В качестве неизвестных выступают числа f_k , ($k = 0, 1, 2, 3$).

Неизвестные величины f_k определялись на основе решения прямой задачи об отражении плоской звуковой волны неоднородным анизотропным упругим слоем, приведенного в разделе 2.1.

В трансверсально-изотропном материале с плоскостью изотропии, совпадающей с $z = 0$, в качестве 5 искоемых неизвестных выступают: плотность ρ и модули упругости λ_{11} , λ_{13} , λ_{33} , λ_{44} . Соответствующие им переменные f_k , определяющие зависимости $f(z)$ будем обозначать f_{lk} , где $l = 0$ соответствует набору переменных f_k для плотности ρ ; $l = 1, 2, 3, 4$ – для модулей упругости λ_{11} , λ_{13} , λ_{33} , λ_{44} соответственно.

Считается, что для нахождения параметров f_{lk} проводится серия M экспериментов по определению коэффициента прохождения плоской звуковой волны B (см. (2.4)) для различных частот ω и углов падения θ_0 . Действительные значения параметров f_{lk} для материала исследуемого слоя обозначим f_{lk}^* , а значения коэффициента прохождения – B_m^* ($m = 1, 2, \dots, M$ – номер эксперимента), B_m^* объединим в вектор \mathbf{B}^* . В общем случае можно считать, что при проведении экспериментов по определению B_m^* возможна погрешность $-\eta$.

По теоретическому решению задачи об отражении звука упругим слоем для тех же частот и углов падения при некотором наборе параметров f_{lk} , строится вектор \mathbf{B} , составленный из расчетных значений коэффициента прохождения B . Для характеристики степени отличия действительного набора параметров f_{lk}^* и использованного при расчетах f_{lk} будем использовать функцию типа (1.10)

$$\delta(f_{lk}) = \|\mathbf{B} - \mathbf{B}^*\| = \sqrt{\sum_{m=1}^M (B_m - B_m^*)^2}. \quad (3.3)$$

Задача поиска параметров неоднородности f_{lk}^* в соответствии с (1.11) имеет вид

$$\delta(f_{lk})|_{f_{lk} \in D_f} \rightarrow \min, \quad (3.4)$$

где D_f определяет диапазон изменения параметров в соответствии с (3.2) и некоторые дополнительные ограничения, например шаг изменения, при поиске.

Задача (3.4) является нелинейной задачей оптимизации функции многих переменных. Поскольку тип функциональной зависимости δ от ее параметров оценить не представляется возможным, то метод решения задачи (3.4) выбирается с учетом того, что характер зависимости $\delta(f_{lk})$ от ее параметров может быть достаточно общим.

Для анализа такого подхода к поиску параметров неоднородности упругого слоя был построен алгоритм минимизации функции $\delta(f_{lk})$ на основе комбинации методов случайного поиска и покоординатного спуска и проведен ряд численных экспериментов.

Поиск минимума функции (3.3) выполнялся путем просмотра N случайных начальных точек из множества D_f при $f_- = 0.5$, $f^+ = 1.5$ с последующим поиском минимума в окрестности полученной начальной точки путем покоординатного спуска при случайном порядке выбора очередной координаты для спуска. Шаг изменения параметра полагался равным 0.1.

Эксперименты показывают, что для нахождения переменных f_{lk} для одного материального параметра (при одном фиксированном l) достаточно использовать N от 300 до 500. При поиске f_{lk} для двух материальных параметров требуется $N > 2000$.

Был проведен анализ зависимости точности определения параметра f_{lk} от ошибки измерения η . Обнаружено, что среднее квадратическое значение погрешности определения параметров почти линейно зависит от ошибки измерения.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что определение совокупности переменных f_{lk} , определяющих характер изменения материальных параметров упругого слоя, в количестве больше 4 требует большого объема вычислений. Кроме того, точность определения f_{lk} существенно зависит от точности задания коэффициента преломления B .

В разделе 3.1.2 представлено решение задачи об определении по отражению звука положения границы раздела двухслойной упругой пластины толщиной H . Рассматривается однопараметрическая обратная задача для конструктивно неоднородного упругого слоя.

Пластина, образованная из двух слоев постоянной толщины, каждый из которых состоит из однородного изотропного упругого материала, помещена в идеальную жидкость. Толщина h слоя, на который падает плоская волна под углом θ_0 к нормали к поверхности (рис. 11), определяется на основе известного решения задачи об отражении звука составным упругим слоем.

После введения обозначений

$X = (A, B, A_{11}, A_{12}, B_{11}, B_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{21}, B_{22})^T$ – вектор коэффициентов в выражениях потенциалов (A – коэффициент в потенциале смещения Ψ_s отраженной волне в Ω_0 ; B – коэффициент в потенциале смещения Ψ_3 прошедшей волны в Ω_3 ; A_{jk} – коэффициенты в потенциалах двух продольных волн ($k = 1, 2$) в слое пластины Ω_j ; B_{jk} – коэффициенты в потенциалах поперечных волн в Ω_j) и $Y = (-i\chi_0 \cos \theta_0, i\rho_0\omega, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, то система линейных алгебраических уравнений, получаемых из граничных условий на $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ (см. рис. 11), записывается в матричной форме

$$QX = Y, \quad (3.5)$$

где Q – матрица порядка 10, компоненты которой зависят от частоты, угла θ_0 , материальных свойств сред, H и h .

При разрешении системы (3.5) относительно A , получается выражение

$$A = f(h), \quad (3.6)$$

где аргументом у f указана только толщина h , поскольку остальные параметры задачи известны.

Считается, что для определения h проводятся измерения коэффициента отражения A при множестве значений ω, θ_0 . Совокупность измеренных значений

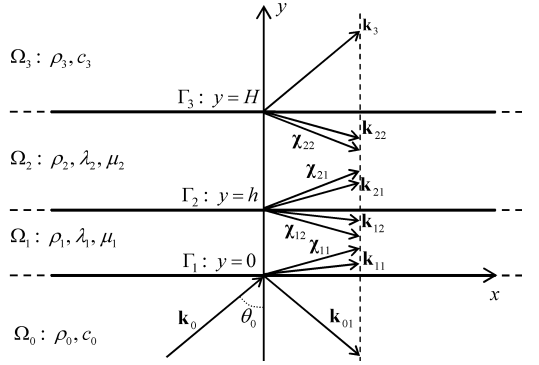


Рис. 11. Геометрия задачи 3.1.2

обозначена \mathbf{A}^* . Совокупность значений коэффициента отражения A , вычисленных по (3.6) при том же множестве значений ω , θ_0 для некоторого фиксированного h ($0 < h < H$) обозначена $\mathbf{A}(h)$.

Вводится целевая функция

$$\delta(h) = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}^*\| = \sqrt{\sum_{m=1}^M (A_m - A_m^*)^2}, \quad (3.7)$$

где M – число измерений (элементов в \mathbf{A}^*); m – номер измерения (элемента вектора).

Задача определения h формулируется следующим образом

$$\delta(h) \underset{0 < h < H}{\rightarrow} \min,$$

которая является задачей поиска минимума функции одной переменной. Минимум $\delta(h)$ ищется методом золотого сечения.

В разделе **3.1.3** выполняется идентификация параметров неоднородности трансверсально-однородного покрытия упругого полупространства по коэффициенту отражения плоской звуковой волны (рис. 12).

Полагаются известными свойства падающей волны, материальные параметры жидкости и однородной упругой среды. Для неоднородного слоя Ω заданы толщина h , средние по толщине значения материальных параметров ρ' , λ'_{ij} и форма законов неоднородности для плотности $\rho(z)$ и модулей упругости $\lambda_{ijk}(z)$ в виде полиномов второй степени от z . Для коэффициентов полиномов известны интервалы их изменения, образующие множество D .

На основе подхода, аналогичного использованному при решении задачи раздела 3.1.2, по измеренным коэффициентам A при различных значениях частоты ω и углах падения волны θ_0 определяются величины коэффициентов в зависимостях $\rho(z)$ и $\lambda_{ij}(z)$. Они ищутся на основе минимизации нормы разности измеренных (\mathbf{A}^*) и расчетных значений коэффициента отражения A

$$\delta(\xi) = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}^*\| \underset{\xi \in D}{\rightarrow} \min, \quad (3.8)$$

где ξ – вектор коэффициентов в функциональных зависимостях параметров материала покрытия.

Минимизация (3.8) выполняется путем перебора координат вектора ξ на некоторой регулярной сетке в области D с последующим уточнением решения методом покоординатного спуска.

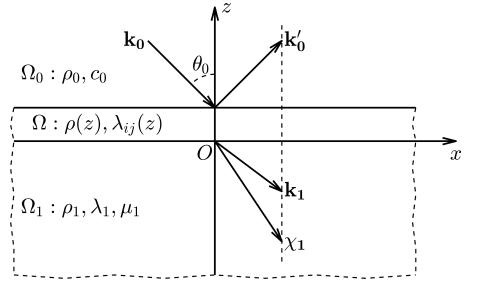


Рис. 12. Геометрия задачи 3.1.3

В разделе **3.2** представлено решение коэффициентных задач идентификации параметров неоднородных цилиндрических упругих препятствий по рассеянию звука.

В разделе **3.2.1** рассматривается решение задачи идентификации плотности материала упругого цилиндра по рассеянному акустическому полю.

Волна распространяется по нормали к образующей цилиндра. Параметры рассеяния звука цилиндром фиксируются небольшим количеством точечных датчиков звукового давления V_k ($k=1, \dots, K$).

На рис. 13 схематично показана геометрия задачи. Датчики расположены симметрично относительно оси цилиндра с постоянным шагом на отрезке длиной $2H$ на линии пересечения плоскости ортогональной оси цилиндра и плоскости параллельной плоскости фронта падающей волны и расположенной на расстоянии L от оси цилиндра со стороны противоположной источнику звука.

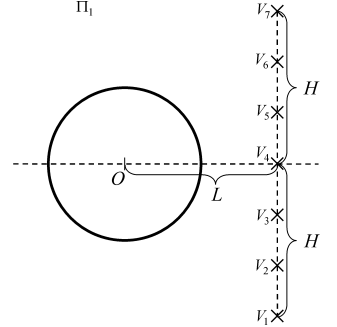


Рис. 13. Геометрия задачи 3.2.1

Решение задачи определения плотности цилиндра строится на основе известного аналитического решения задачи о рассеянии плоской звуковой волны однородным изотропным упругим цилиндром.

Потенциал смещения в рассеянной волне Ψ_s представляется в виде

$$\Psi_s = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k_0 r) \cos(m\varphi). \quad (3.9)$$

Для представления поля смещений в упругом цилиндре Ω вводятся потенциалы продольных Ψ и поперечных $\Phi = \Phi \mathbf{i}_z$ волн. При этом смещение частиц в цилиндре $\mathbf{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi$.

Функции Ψ и Φ удовлетворяют волновым уравнениям и с учетом симметрии поля смещения относительно оси x , независимости от z и условий ограниченности на оси z могут быть разложены по волновым цилиндрическим функциям

$$\Psi = \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_m(kr) \cos(m\varphi), \quad \Phi = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_m(\chi r) \sin(m\varphi), \quad (3.10)$$

где k , χ – волновые числа продольных и поперечных волн.

После подстановки (3.9), (3.10) в граничные условия (1.8) получается выражение

$$A_m = A_m(k_0 a, ka, \chi a, \omega, \rho_0, \rho), \quad (3.11)$$

где a – радиус цилиндра, ω – частота, ρ_0 – плотность жидкости, ρ – плотность материала цилиндра.

В рассматриваемой задаче полагается, что все параметры, кроме ρ известны. Тогда давление в суммарном акустическом поле $p_0 = \rho_0 \omega^2 (\Psi_p + \Psi_s)$, где Ψ_s определяется соотношением (3.9), можно рассматривать как функцию плотности ρ .

Предполагается, что проведено измерение акустического давления p_0 в соответствии со схемой, приведенной на рис. 13. Измерения проводятся при нескольких фиксированных значениях частоты падающей волны ω_j ($j = 1, 2, \dots, J$).

Предполагается, что известен диапазон $D = [\rho_1, \rho_2]$, в котором находится действительная (искомая) плотность ρ^* материала цилиндра.

Обозначим вектором \mathbf{P}^* совокупность измеренных значений давления P_{jk}^* при частоте ω_j в точке V_k , т.е.

$$\mathbf{P} = (P_{11}^*, P_{12}^*, \dots, P_{1K}^*, P_{21}^*, \dots, P_{JK}^*). \quad (3.12)$$

Через $p_{jk}(\rho)$ или просто p_{jk} будем обозначать теоретическое значение давления в точке V_k , рассчитанное для частоты ω_j и некоторой, произвольно зафиксированной, плотности материала цилиндра ρ . Значение $p_{jk}(\rho)$ рассчитывается по формуле (1.2).

Измеренные значения P_{jk}^* в общем случае включают погрешность. С учетом этого P_{jk}^* представляются в виде суммы

$$P_{jk}^* = p_{jk}(\rho^*) + \eta, \quad (3.13)$$

где η – некоторая случайная величина с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением σ_0 . При численных экспериментах полагалось, что η имеет нормальное распределение $N(0; \sigma_0)$.

Совокупность рассчитанных значений p_{jk} при заданной плотности ρ представляется вектором $\mathbf{p}(\rho)$ или просто \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1K}, p_{21}, \dots, p_{JK}),$$

построенным для точек и частот, при которых проводились измерения.

Близость выбранного для расчетов значения плотности ρ к действительной ρ^* характеризуется нормой

$$\delta(\rho) = \|\mathbf{P} - \mathbf{p}\|. \quad (3.14)$$

Задача определения плотности цилиндра является нелинейной задачей одномерной оптимизации.

$$\delta(\rho) \xrightarrow{\rho \in [\rho_1, \rho_2]} \min. \quad (3.15)$$

где $[\rho_1, \rho_2]$ – предполагаемый интервал, в котором находится искомая плотность. Ее решение $\rho = \rho'$ является оценкой действительной плотности материала ρ^* .

Для проверки схемы идентификации плотности препятствия был проведен ряд численных экспериментов.

Оценка влияния ошибок измерения \mathbf{P}^* выполнена с помощью имитационного моделирования решения задачи (3.15) при ненулевых значениях η . Проведена серия расчетов ρ' с использованием псевдослучайных рядов η . Получены статистические оценки числовых характеристик ошибки определения плотности и ее выборочное распределение.

В разделе **3.2.2** рассматривается задача определения параметров трансверсально-изотропного материала покрытия упругого кругового цилиндра по

отражению плоской звуковой волны. Обратная задача решается на основе решения прямой дифракционной задачи, изложенной в разделе 2.2.1, в случае однородного покрытия.

В качестве неизвестных параметров обратной задачи выступают материальные параметры анизотропного слоя $\xi = (\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{55})$. Область допустимых значений искомым параметров D задается интервалами для отдельных параметров и известными физическими ограничениями на них.

В качестве области точек измерения V_j давления в рассеянном звуковом поле рассматривается окружность в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Точки размещаются на окружности равномерно.

Для определения параметров материала покрытия цилиндра построена невязка $\delta(\xi)$ характеризующая отклонение расчетных (теоретических давлений) от измеренных в форме (3.14).

Минимизация невязки выполнена с использованием комбинированного алгоритма на основе методов случайного поиска и покоординатного спуска.

В разделе **3.2.3** представлено решение задачи определения положения геометрических параметров произвольно расположенной эллиптической полости в упругом круговом цилиндре по отражению плоской звуковой волны, падающей по нормали к образующей цилиндра.

В конструктивно неоднородном теле считаются известными радиус цилиндра и механические характеристики материала. В качестве неизвестных рассматриваются положение центра полости (координаты X, Y), полуоси нормального сечения полости ($a > b$) и угол наклона φ_1 большей полуоси к направлению распространения падающей волны Ψ_p .

Решение обратной задачи выполняется на основе минимизации целевой функции вида (3.14), в которой аргументом функции δ выступает вектор $\xi = (X, Y, a, b, \varphi_1)$. Множество допустимых значений D в задаче (1.11) формируется на основе геометрических ограничений на значения X, Y, a, b .

Минимизация целевой функции выполняется комбинированным методом поиска минимума функции многих переменных на основе метода случайного поиска и метода Хука-Дживса.

В разделе **3.3** рассматривается решение задач определения параметров рассеивателя по известному акустическому полю при дифракции плоской звуковой волны на упругих телах в трехмерном пространстве.

В разделе **3.3.1** представлена задача определения по рассеянному звуковому полю положения сферической полости в упругом шаре. Полагается, что падающая волна является плоской, радиус шара и механические характеристики его материала известны.

Требуется по измеренным значениям давления \mathbf{P}^* в рассеянном акустическом поле вблизи шара определить радиус R_1 полости и координаты ее центра R_0, θ_0, φ_0 в сферической системе координат – системе отсчета, полярная ось в которой совпадает с направлением \mathbf{k}_0 . Таким образом, вектор неизвестных параметров – $\xi(R_1, R_0, \theta_0, \varphi_0)$.

Множество допустимых значений параметров в самом общем случае имеет вид $D = \{\xi : R_0 + R_1 < R\}$. В качестве множества точек наблюдения рассеянного поля \mathbf{V} рассматривается множество точек, равномерно распределенных на концентрической сферической поверхности. Целевая функция задачи $\delta(\xi)$ имеет вид (3.14).

Обратная задача решается на основе прямой задачи дифракции плоской звуковой волны на конечном цилиндре, рассмотренной в разделе 2.2.2.

При решении прямой задачи дифракции плоской волны на упругом шаре с произвольно расположенной полостью волновые поля в шаре и полости ищутся в виде разложений по сферическим функциям, записанным в двух локальных системах координат, связанных с шаром и полостью. При удовлетворении граничных условий используются теоремы сложения для волновых сферических функций. Определение коэффициентов разложений сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Схема решения обратной задачи аналогична предложенной в разделе 3.2.2.

Проведены численные исследования предложенного решения когда \mathbf{V} – вершины икосаэдра. Показано влияние изменения отдельных геометрических параметров полости на величину функции $\delta(\xi)$.

В разделе **3.3.2** рассматривается решение задачи определения по рассеянному звуку геометрических параметров конечного однородного упругого цилиндра, расположенного у границы полупространства (абсолютно жесткого или акустически мягкого).

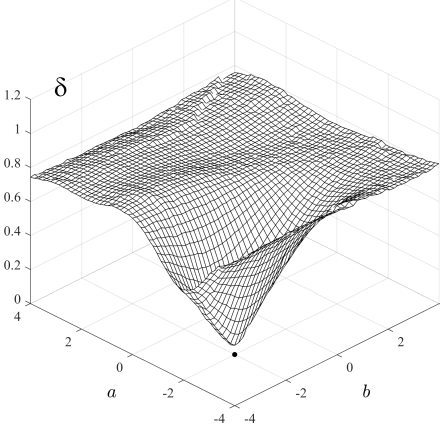
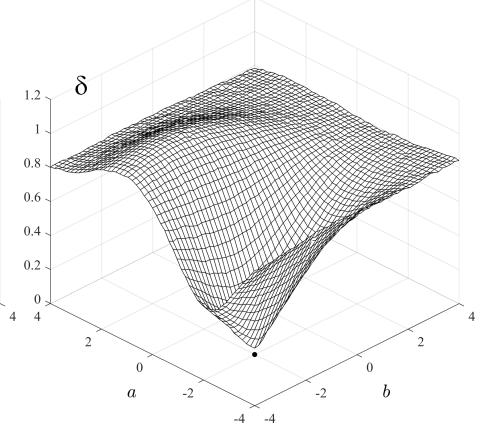
Определяются координаты центра, радиус (R), высота (H) и ориентация (α, β) конечного упругого цилиндра T . Координаты центра a, b, c и углы α, β ищутся в некоторой системе отсчета с плоскостью $z = 0$, совпадающей с границей полупространства. Идентификация параметров цилиндра $\xi = (R, H, a, b, c, \alpha, \beta)$ проводится по известному рассеянному полю волны. Целевая функция $\delta(\xi)$ имеет вид (3.14), в которой векторы \mathbf{P}^* и \mathbf{p} рассчитываются в некотором множестве точек наблюдения \mathbf{V} в окрестности предполагаемого расположения цилиндра. Рассматриваются различные схемы расположения точек \mathbf{V} , которые фиксируются в системе отсчета: \mathbf{V}_1 – на сферической поверхности, охватывающей T ; на плоскости вблизи T (в прямоугольной области – \mathbf{V}_2 и по кругу – \mathbf{V}_3).

В качестве области поиска D используется совокупность интервалов изменения параметров, входящих в ξ .

Решение прямой задачи проведено с использованием подходов, изложенных в разделах 2.2.2, 2.3.2. Поиск минимума $\delta(\xi)$ выполняется методом, описанным в разделе 3.2.2.

Проведены численные исследования процедуры определения ξ' в вариационной задаче (1.12). На рис. 14, 15 представлены зависимости функции $\delta(\xi)$ в виде поверхности, построенной на области D для случая, когда искомыми параметрами являются только a, b – проекции центра цилиндра на поверхность полупространства. На рис. 14 показан результат вычислений для случая размещения точек измерения на полусфере \mathbf{V}_1 при их общем количестве $K = 38$.

Рис. 15 показывает результаты вычисления δ при размещении точек измерения в квадратной области V_2 при их общем количестве $K = 36$.

Рис. 14. δ при V_1 Рис. 15. δ при V_2

Выделенная точка на поверхности $\delta = 0$ соответствует искомому параметру ξ^* . Сеточные поверхности расчетных значений $\delta(\xi)$ имеют абсолютный минимум в точке $\xi = \xi^*$. Так что, решение задачи приводит к $\xi' = \xi^*$.

В разделе **3.3.3** решается задача определения величины плотности и модулей упругости трансверсально-изотропного покрытия упругого шара по измеренному звуковому давлению в окрестности шара.

Предполагается, что материальные параметры внутренней изотропной части шара и диапазон изменения параметров покрытия известны. Значения материальных параметров покрытия предлагается искать путем решения задачи минимизации функции многих переменных, которая представляет собой меру отклонения измеренных значений давления в рассеянной звуковой волны и их значений, полученных в результате численного решения задачи дифракции.

Вектор искомых параметров — $\xi = (\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{55})$. Полагается, что для параметров известны интервалы изменения. Целевая функция $\delta(\xi)$ имеет вид (3.14). В качестве области размещения точек измерения рассеянного поля V_k рассматривалась прямоугольная область, параллельная направлению распространения волны расположенная на расстоянии порядка радиуса шара от его поверхности.

Для решения обратной задачи использовалось решение задачи о рассеянии звука сферическим анизотропным слоем, рассмотренное в разделе 2.2.3, и алгоритм минимизации на основе случайного поиска и покоординатного спуска.

При численном моделировании решения выявлено, что при наличии погрешностей в измерениях анизотропный материал некоторых типов трудно идентифицировать. Однако алгоритм поиска параметров анизотропии покрытия может быть уточнен, если использовать не только абсолютную величину отклонения, но и учитывать направление (фазу) отклонения.

В разделе 3.3.4 решена задача определения по рассеянному звуковому полю направления оси упругой симметрии однородного анизотропного шара. Рассматривается дифракция плоской звуковой волны на анизотропном шаре с гексагональной симметрией упругих свойств. Прямая задача дифракции решается с помощью метода на основе МКЭ, представленного в разделе 2.2.2. Показано существенное влияние на рассеянное поле ориентации оси упругой симметрии. Это позволяет определить ее направление на основе измерений давления в окрестности шара. Особенность постановки этой задачи состоит в том, что характер анизотропии не согласован с формой тела.

Проведена оценка влияния гексагональной анизотропии материала сферического препятствия в случае, когда анизотропия является прямоугольной – характерной для материалов с кристаллической структурой.

Система отсчета связана с центром шара и направлением \mathbf{k}_0 (рис. 16). Предполагается наличие повернутой системы координат x', y', z' (z' направлена по оси упругой симметрии материала \mathbf{n}), в которой тензор модулей упругости имеет компоненты $\lambda'_{22} = \lambda'_{11}$, $\lambda'_{23} = \lambda'_{13}$, $\lambda'_{55} = \lambda'_{44}$, $\lambda'_{66} = (\lambda'_{11} - \lambda'_{12})/2$ (остальные $\lambda_{ij} \equiv 0$). Считается, что значения плотность ρ и λ'_{pq} известны, но неизвестно направление \mathbf{n} . Таким образом, в обратной задаче (1.11), (1.12)

$$\xi = (\alpha, \gamma), \quad D: \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi/2.$$

Выполнялись расчеты амплитуды давления p_0 в рассеянной волне на расстоянии R от поверхности шара. На основе расчетов формировалась целевая функция $\delta(\xi)$ обратной задачи в виде (3.14). Точки V_k располагались на поверхности $r = 2R$ с шагом в 2° по углу θ и φ . Минимум δ находится перебором начальных значений пар (α, γ) с фиксированным шагом с последующим уточнением ξ' покоординатным спуском.

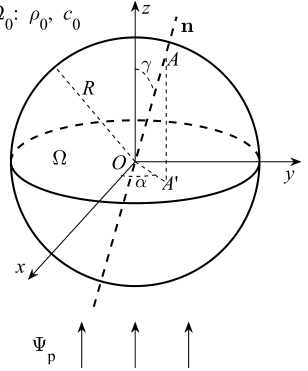


Рис. 16. Геометрия задачи

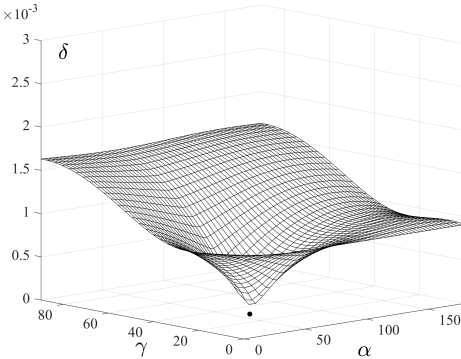


Рис. 17. Поверхность $\delta(\xi)$, $\eta = 0$

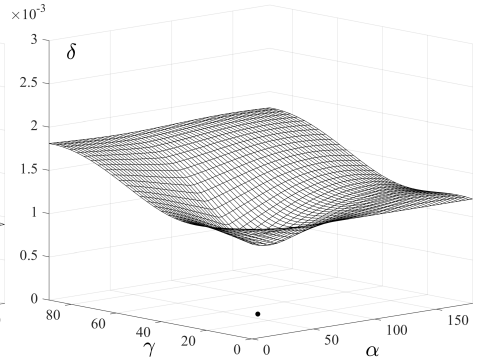


Рис. 18. $\delta(\xi)$ при $\sigma(\eta) = 0.1$

На рис. 17 показана форма поверхности $\delta(\xi)$ при $\gamma^* = 30^\circ$, $\alpha^* = 60^\circ$ в случае отсутствия ошибок измерения. Значение $\delta(\xi^*)=0$ образует на поверхности единственный явно выраженный минимум. На рис. 18 поверхность представляет среднее значение величины $\delta(\xi)$ в случае наличия ошибок измерения P^* при $\sigma(\eta) = 0.1$ Как видно, в этом случае средний уровень δ возрос на 5-10%, минимальное значение в точке ξ^* не обращается в 0. При этом угловые параметры в найденном решении ξ' в большей части реализаций η отличаются от ξ^* на 1-2°.

В главе 4 рассмотрены задачи об определении законов неоднородности упругих тел с требуемыми звукоотражающими свойствами.

В разделе 4.1 рассматривается задача об определении линейных законов неоднородности плоского трансверсально-изотропного упругого слоя, имеющего наименьшее отражение при заданном интервале углов падения плоской звуковой волны $[\theta_1, \theta_2]$.

Решение прямой задачи об отражении звука неоднородным плоским упругим слоем представлено в разделе 2.1. Но в разделе 4.1 решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3), (2.5) найдено не численно, а приближенным аналитическим методом степенных рядов.

Задача определения законов неоднородности материала упругого слоя, для которых будет иметь наименьшее отражение звука при заданном угле падения плоской волны θ_0 формулируется как задача минимизации функционала Φ , выражающего коэффициент отражения звука по энергии

$$\Phi[\rho, \lambda_{km}; \theta_1, \theta_2] = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |A(\theta)|^2 d\theta, \quad (4.1)$$

где $A(\theta)$ – комплексная амплитуда потенциала смещения в рассеянной волне. Функционал Φ определен на классе линейных функций

$$\rho(z) = \rho^{(0)}(\alpha_0 + \beta_0 z/h), \quad \lambda_{km}(z) = \lambda_{km}^{(0)}(\alpha_j + \beta_j z/h), \quad (4.2)$$

где $\rho^{(0)}$, $\lambda_{km}^{(0)}$ – некоторые характерные значения материальных параметров (например, средние значения в однородном случае); $j = 1, 2, 3, 4$ для значений индексов $km = 11, 13, 33, 44$, соответственно; $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ – коэффициенты линейных зависимостей, подлежащие определению.

Для функций (4.2) заданы интервальные ограничения

$$A_j \leq \alpha_j + \beta_j(z) \leq B_j \quad (4.3)$$

где $A_j > 0$, $B_j > 0$ ($j = 0, 1, \dots, 4$) известны и формируют для пары коэффициентов (α_j, β_j) область допустимых значений в виде ромба D_j (рис. (19)).

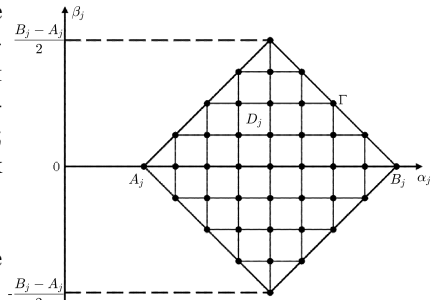


Рис. 19. Сетка для области D_j

Предложен алгоритм минимизации функционала (4.1). Поиск неизвестных величин α_j, β_j ($j = 0, 1, \dots, 4$), удовлетворяющих условиям (4.3) минимизирующих функцию (4.1) выполняется с помощью следующей вычислительной процедуры.

Каждую из областей $D_j(\alpha_j, \beta_j)$ покрывается квадратной сеткой, форма которой показана на рис. 19. Сетка выбирается так, чтобы ее узлы или принадлежали области D_j , или находились на ее границе Γ .

Последовательно методом перебора для каждого набора 5 узлов сеток D_j ($j = 1, 2, \dots, 5$) вычисляем значение Φ и определяем наименьшее из них. После чего фиксируем коэффициенты $\rho^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ ($k = 0, 1$), соответствующие этому значению Φ .

В результате реализации алгоритма для некоторых характерных значений плотности и модулей упругости получены аналитические выражения, описывающие механические параметры неоднородного слоя для обеспечения минимальной интенсивности отражения при заданном интервале углов падения $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Было обнаружено, что для законов неоднородности, зависимости которых симметричны относительно средней поверхности слоя, неоднородный слой не различим по коэффициенту отражения и прохождения звука.

В разделе 4.2 представлено моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами. Рассматривается задача об определении законов неоднородности покрытия плоской упругой пластины, обеспечивающих наименьшее отражение при заданном интервале углов падения плоской звуковой волны $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Построен функционал Φ , определенный на классе параболических функций

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho^{(0)} + \rho^{(1)}z + \rho^{(2)}z^2, & \lambda(z) &= \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}z + \lambda^{(2)}z^2, \\ \mu(z) &= \mu^{(0)} + \mu^{(1)}z + \mu^{(2)}z^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

выражающий коэффициент отражения по энергии

$$\Phi[\rho, \lambda, \mu; \theta_1, \theta_2, \omega] = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |A|^2 d\theta.$$

Найдены такие значения коэффициентов $\rho^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$) безразмерных функций (4.4), при которых функционал Φ достигает минимального значения.

Для функций $\rho(z), \lambda(z), \mu(z)$, определенных на отрезке $[-1, 0]$ безразмерной координаты z , введем ограничения

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\leq \rho^{(0)} + \rho^{(1)}z + \rho^{(2)}z^2 \leq \alpha_1, & \beta_0 &\leq \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}z + \lambda^{(2)}z^2 \leq \beta_1, \\ \gamma_0 &\leq \mu^{(0)} + \mu^{(1)}z + \mu^{(2)}z^2 \leq \gamma_1 \quad (z \in [-1, 0]), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = 0, 1$) – некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (4.5) вида $b_0 \leq f(z) \leq b_1$, где $f(z) = a^{(0)} + a^{(1)}z + a^{(2)}z^2$, задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс z и осью ординат f бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$D'(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}) = \{(z, f) : -1 \leq z \leq 0, \quad b_0 \leq f \leq b_1\},$$

Здесь под тройкой коэффициентов $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)})$ подразумевается одна из троек $(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$, а под b_0 и b_1 – соответствующие границы.

В области D' каждая парабола $f(z)$ единственным образом определяется тремя точками $G_0(0, f_0)$, $G_1(-0.5, f_1)$, $G_2(-1, f_2)$, где $f_q \in [b_0, b_1]$ ($q = 0, 1, 2$). Откуда находим

$$a^{(0)} = f_0, \quad a^{(1)} = 3f_0 - 4f_1 + f_2, \quad a^{(2)} = 2f_0 - 4f_1 + 2f_2.$$

Нахождение значений неизвестных величин $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$), удовлетворяющих условиям (4.5) и минимизирующих функцию девяти переменных

$$\Phi(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$$

выполняется с помощью введения равномерной сетки с шагом h_q дискретных значений f_0, f_1, f_2 для трех параметров.

Поиск оптимального набора параметров $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ выполняется с помощью комбинации методов случайного поиска и покоординатного спуска.

Начальная точка для искомых параметров при организации итерационного процесса выбиралась случайным образом на трех сетках вида значений f_0, f_1, f_2 . При покоординатном спуске последовательно движением по узлам сетки уточнялись сначала параметры $\rho^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$, $\mu^{(0)}$, затем $-\rho^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ и, наконец, $-\rho^{(2)}$, $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(2)}$. Случайный выбор начальной точки повторялся N раз. В качестве конечного решения выбирался набор параметров, обеспечивающий минимальное значение Φ среди N допустимых локальных решений. Получаемое таким образом решение является приближенным, точность которого зависит от выбора шага сетки h_q и числа N .

Для конкретных примеров были проведены расчеты параметров законов неоднородности покрытия пластины, обеспечивающие наименьшее отражение при заданных волновом размере пластины и угле падения плоской волны.

Для оценки влияния неоднородного покрытия на звукоотражение пластины было рассчитано значение $|A|^2$ для пластины без покрытия.

Результаты расчетов показывают, что с помощью неоднородного покрытия можно существенно уменьшить интенсивность акустического поля, отраженного пластиной.

В случае, когда частота колебаний в падающей волне является не фиксированной, а изменяется в некотором диапазоне от ω_1 до ω_2 построен функционал Φ' вида

$$\Phi'[\rho, \lambda, \mu; \theta_0, \omega_1, \omega_2] = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |A|^2 d\omega.$$

Минимизация функционала Φ' проведена с использованием изложенного выше подхода.

В разделе 4.3 представлено решение задачи определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного трансверсально-изотропного покрытия конечной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения плоской звуковой волны.

Полагается, что механические характеристики материала пластины и содержащей среды, а также геометрические параметры пластины и полости известны. Геометрическая постановка задачи показана на рис. 20.

Плотность материала и модули упругости покрытия ρ , λ_{ij} представляют собой линейные функции

$$\rho = \rho(q), \quad \lambda_{ij} = \lambda_{km}(q), \quad (4.6)$$

где q – расстояние от поверхности пластины.

Предполагается, что характер анизотропии покрытия таков, что плоскости, параллельные поверхности пластины являются поверхностями изотропии (ось упругой симметрии направлена по нормали к поверхности).

Считаются известными интервалы возможных значений толщины покрытия, плотности, модулей упругости. Требуется найти такое сочетание параметров покрытия: h , $\rho(q)$, $\lambda_{ij}(q)$ при котором минимизировать среднее значение амплитуды отраженной волны в полупространство содержащей среды со стороны покрытия пластины.

Прямая задача дифракции плоской звуковой волны на пластине с полостью и неоднородным анизотропным покрытием решается с использованием МКЭ (раздел 2.2.2).

Для решения задачи вводится глобальная декартова система координат x , y , z так, что ее начало совпадает с O , оси направлены по ребрам пластины, а граница пластины с покрытием находится в плоскости $z = 0$. В этой системе координат в покрытии Ω ненулевыми будут только модули упругости λ_{11} , λ_{12} , λ_{13} , λ_{33} , λ_{44} . Таким образом, набор параметров обратной задачи (1.14) представляется кортежем

$$\xi = (h, \rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{33}, \lambda_{44}).$$

Введем сферическую систему координат, связанную с глобальной декартовой. Функционал, характеризующий среднее значение амплитуды рассеянной волны Ψ_s вдали от тела в верхнем полупространстве, имеет вид

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F(k_0 r_1, \theta, \varphi) \sin \theta dQ d\varphi, \quad (4.7)$$

где $F(k_0 r_1, \theta, \varphi)$ – форм-функция вида (2.14).

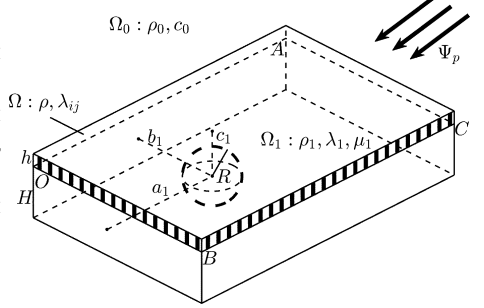


Рис. 20. Геометрия задачи 4.3

Минимизация функционала (4.7) выполняется с помощью комбинированного алгоритма на основе метода случайного поиска и покоординатного спуска. Проведены расчеты для некоторых частных случаев.

В разделе 4.4 приведено решение задачи об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии плоской звуковой волны. На основе аналитического решения прямой задачи (раздел 2.2.1) в цилиндрической системе координат построен функционал, выражающий интенсивность отражения цилиндра в направлении полярного угла φ_0

$$\Phi[\rho, \lambda, \mu; k_0 r_1, \varphi_0] = F(k_0 r_1, \varphi_0)^2, \quad (4.8)$$

где $F(k_0 r_1, \varphi)$ – форм-функция амплитуды рассеянного поля при $r \rightarrow \infty$; r_1 – внешний радиус цилиндра.

Функционал определен на классе линейных функций

$$\rho(r) = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}r, \quad \lambda(r) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}r, \quad \mu(r) = \mu^{(0)} + \mu^{(1)}r. \quad (4.9)$$

Ищутся такие значения коэффициентов $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ ($k = 0, 1$) функций (4.9), при которых функционал (4.8) достигает минимального значения для фиксированного полярного угла точки наблюдения φ_0 .

Для функций $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$, определенных на отрезке $[r_2, r_1]$, вводятся ограничения

$$\alpha_0 \leq \rho^{(0)} + \rho^{(1)}r \leq \alpha_1, \quad \beta_0 \leq \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}r \leq \beta_1, \quad \gamma_0 \leq \mu^{(0)} + \mu^{(1)}r \leq \gamma_1,$$

где $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$, $\gamma_j > 0$ ($j = 0, 1$) – заданные константы.

При поиске параметров для неизвестных величин использовалась сетка возможных значений с фиксированным шагом. Методом перебора последовательно для каждого сочетания параметров вычисляется значение Φ и определяется наименьшее. После чего фиксируем значения коэффициентов $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ ($k = 0, 1$), соответствующие наименьшему значению. По окончании перебора получаем квазиоптимальное решение $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$.

Выполнена реализация предложенного алгоритма. Получено аналитическое описание законов неоднородности для частных случаев геометрических параметров, механических свойств однородных материалов и ограничений на свойства покрытия.

В разделе 4.5 представлено решение задачи определения законов изменения плотности и модулей упругости покрытия упругого некругового цилиндра с полостью для обеспечения заданных отражающих свойств при рассеянии звука.

Предполагается, что материальные параметры упругого цилиндра и диапазон изменения параметров покрытия известны. Законы неоднородности материала покрытия определяются на основе анализа функции формы амплитуды рассеянного акустического поля в дальней зоне для заданного диапазона углов.

Внутренняя часть цилиндра Ω_1 представляет собой однородную упругую среду с плотностью ρ_1 и модулями упругости λ_1 , μ_1 (рис. 21).

Покрытие цилиндра – неоднородный упругий слой Ω , имеющий толщину h , плотность $\rho(x, y)$ и модули упругости Ламе – $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$, которые в общем случае зависят от координат x и y , изменяющихся в плоскости нормального сечения цилиндра. Область полости – Ω_2 .

Вводится декартова система координат x, y, z так, чтобы ось z была направлена по образующей цилиндра, а начало координат O находилось в геометрическом центре некоторого нормального сечения цилиндра. Направление оси Ox

совпадает с направлением распространения падающей волны. С декартовой системой координат связана система координат кругового цилиндра r, φ, z .

Построен функционал, характеризующий среднюю амплитуду рассеяния в угловом секторе $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$

$$\Phi[\rho, \lambda, \mu; \varphi_1, \varphi_2] = \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(k_0 r_1, \varphi) d\varphi, \quad (4.10)$$

где $F(k_0 r_1, \varphi)$ определяется выражением (2.9).

Решение прямой задачи дифракции плоской звуковой волны выполняется на основе МКЭ (раздел 2.3.1). Для иллюстрации особенностей решения задачи дифракции и возможности поиска параметров неоднородного покрытия для получения требуемых акустических эффектов в отраженном поле был проведен ряд численных экспериментов для эллиптического цилиндра с круговой полостью.

Плотность и модули упругости в покрытии были аппроксимированы линейными функциями

$$\rho = \rho^*(\alpha_0 + \beta_0 q/h), \quad \lambda = \lambda^*(\alpha_1 + \beta_1 q/h), \quad \mu = \mu^*(\alpha_2 + \beta_2 q/h),$$

где q – расстояние от поверхности однородной части цилиндра до точки во внешнем слое.

При решении обратной задачи найдены параметры α_j, β_j дающие минимальное значение функционала (4.10).

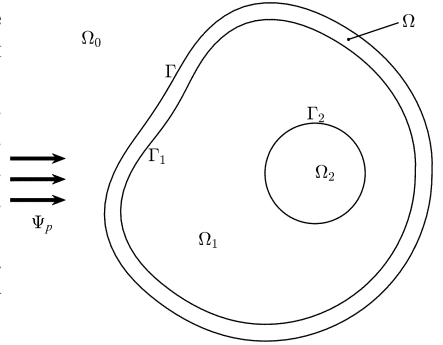


Рис. 21. Геометрия задачи 4.5

В разделе 4.6 представлено решение обратной задачи об определении законов неоднородности покрытия упругого шара, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот.

На основе известного решения прямой задачи, определяются такие законы неоднородности материала покрытия, для которых наблюдается наименьшее усредненное значение интенсивности рассеяния в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ при фиксированном угле наблюдения θ' , а также в заданном угловом секторе наблюдения $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ при фиксированной частоте ω' .

Считается, что функции $\rho(r)$, $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ аппроксимированы многочленами до третьей степени включительно относительно радиальной переменной r , то есть рассматриваются следующие законы неоднородности материала покрытия

$$\rho(r) = \rho^0 \rho^*(r), \quad \lambda(r) = \lambda^0 \lambda^*(r), \quad \mu(r) = \mu^0 \mu^*(r),$$

где

$$\rho^*(r) = \sum_{k=0}^3 \rho^{(k)} r^k, \quad \lambda^*(r) = \sum_{k=0}^3 \lambda^{(k)} r^k, \quad \mu^*(r) = \sum_{k=0}^3 \mu^{(k)} r^k, \quad (4.11)$$

ρ^0, λ^0, μ^0 — характерные величины механических свойств материала покрытия.

Построены функционалы Φ_1 и Φ_2 вида

$$\Phi_1[\rho, \lambda, \mu; \theta_1, \theta_2, \omega'] = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\omega', \theta)^2 d\theta,$$

$$\Phi_2[\rho, \lambda, \mu; \omega_1, \omega_2, \theta'] = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega, \theta')^2 d\omega,$$

определенные на классе кубических функций $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$.

Для каждого функционала найдем такие значения коэффициентов $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) функций (4.11), при которых он достигает минимального значения.

Для функций (4.11), определенных на отрезке $[r_0, r_1]$, вводятся ограничения

$$\alpha_0 \leq \rho^*(r) \leq \alpha_1, \quad \beta_0 \leq \lambda^*(r) \leq \beta_1, \quad \gamma_0 \leq \mu^*(r) \leq \gamma_1, \quad (4.12)$$

где $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = 0, 1$) — некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (4.12) вида $b_0 \leq f(r) \leq b_1$, где

$$f(r) = a^{(0)} + a^{(1)}r + a^{(2)}r^2 + a^{(3)}r^3$$

задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс r и осью ординат f бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$\Omega(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) = \{(r, f) : r_0 \leq r \leq r_1, \quad b_0 \leq f \leq b_1\}.$$

Нахождение оптимального набора параметров $\rho^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, 3$), удовлетворяющего условиям (4.12) и минимизирующего функцию двенадцати

переменных

$$\Phi_m(\rho^{(0)}, \dots, \rho^{(3)}, \lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(3)}, \mu^{(0)}, \dots, \mu^{(3)}) \rightarrow \min \quad (m = 1, 2),$$

выполняется с помощью генетического алгоритма.

Отдельное значение f_q ($q = 0, 1, 2, 3$) записывается в виде $f_q = b_0 + m_q h$. Целое неотрицательное число m_q представляется двоичным p -разрядным числом и рассматривается как отдельный ген. Хромосома состоит из 4 генов, содержащих значения m_0, m_1, m_2, m_3 , которые соответственно определяют величины f_0, f_1, f_2, f_3 . Особь популяции X , представляющая некоторое решение задачи, задается тремя хромосомами, определяющими наборы f_q для ρ^*, λ^*, μ^* . Фенотипом особи являются три соответствующих набора коэффициентов $(a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$.

В целом параметрами генетического алгоритма выступают: p — разрядность гена (при этом $h = (b_1 - b_0)/(2^p - 1)$); const_m — постоянная для построения функции приспособленности; δ — пороговое относительное улучшение значения функции приспособленности; K — число поколений для контроля условия остановки; N_0 — мощность популяции; N_1 — число особей с наилучшим значением Φ_m , переходящих в новое поколение напрямую; N_2 — дополнительное число особей родительского пула; N_3 — число пар особей, участвующих в скрещивании.

По предложенному алгоритму были проведены расчеты параметров законов неоднородности покрытия шара для некоторых частных случаев.

Для оценки влияния неоднородного покрытия на рассеяние звука шаром были рассчитаны значения величин Φ_1 и Φ_2 для шара без покрытия. Сравнение значений интегральных характеристик рассеяния в дальней зоне поля, рассчитанных для шаров с покрытием и без него, показывает, что в рассматриваемых диапазоне частот и секторе наблюдений неоднородное покрытие, механические свойства которого определяются найденными зависимостями, существенно уменьшает среднее значение интенсивности звукоотражения.

Расчеты показали, что с помощью неоднородного покрытия с соответствующими законами неоднородности можно заметно уменьшить интенсивность рассеянного акустического поля в заданном диапазоне частот и в определенном направлении.

В разделе 4.7 представлено решение задачи поиска параметров неоднородности покрытия эллипсоида, находящегося вблизи плоской идеальной поверхности, для минимизации отражения звука в заданном угловом секторе. Выбор параметров базируется на основе решения прямой задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом эллипсоиде с внешним слоисто-неоднородным слоем.

Решение прямой задачи рассеяния плоской звуковой волны эллипсоидом с неоднородным покрытием, который находится в полупространстве, заполненном идеальной жидкостью рассмотрены в разделе 2.3.2. Это решение позволяет вычислять рассеянное звуковое поле для различных геометрических параметров упругого тела, и свойств материала покрытия.

В качестве функциональных зависимостей переменных материальных параметров упругой среды в неоднородном слое препятствия рассматривались линейные зависимости, в которых функции зависят только от расстояния q от однородной части эллипсоида и от коэффициента τ

$$f(q; \tau) = 1 + \tau(2q/h - 1),$$

где D : $-0.5 \leq \tau \leq 0.5$.

Такая запись зависимости $f(q)$ позволяет удобно представлять однопараметрические варианты изменения свойств по толщине, сохраняющие их средние значения.

При численном моделировании рассматривались материалы покрытия, в которых варьировались зависимости только для плотности и модуля Юнга. В этом случае при каждой данной реализации такого неоднородного слоя сфероида задавались два коэффициента τ : для плотности – τ_1 и для модулей упругости – τ_2 . Тогда зависимости параметров материала покрытия принимали вид

$$\rho = f(q; \tau_1)\rho', \quad \lambda = f(q; \tau_2)\lambda', \quad \mu = f(q; \tau_2)\mu', \quad (4.13)$$

где ρ' , λ' , μ' – средние значения материальных параметров по толщине слоя.

Известно, что в ряде приложений особую роль играет направление отраженной волны, обратное распространению падающей волны (направление на источник). В связи с этим в частности был рассмотрен вариант поиска свойств покрытия, обеспечивающего экстремальное значение функционала, характеризующего интенсивность отражения звука эллипсоидом в направлении $\theta_1 = \theta_0$, $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi$

$$\Phi[\rho, \lambda, \mu; \theta_1, \varphi_1] = \frac{1}{(\Delta\varphi)^2} \int_{\theta_1 - \Delta\varphi}^{\theta_1 + \Delta\varphi} \int_{\varphi_1 - \Delta\varphi}^{\varphi_1 + \Delta\varphi} F(k_0 r_1, \theta, \varphi)^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta,$$

где θ_0 , φ_0 – направление распространения волны Ψ_p ; $\Delta\varphi$ – определяет ширину учитываемого углового диапазона. В предельном случае при $\Delta\varphi = 0$ рассматривался вариант

$$\Phi'[\rho, \lambda, \mu; \theta_1, \varphi_1] = F(k_0 r_1, \theta_1, \varphi_1)^2.$$

Для Φ и Φ' решались экстремальные задачи по поиску минимума и максимума при некоторых фиксированных параметрах акустической среды, материальных (ρ_1 , λ_1 , μ) и геометрических свойств эллипсоида, параметрах падающей волны. Полагалось, что для материальных свойств покрытия справедливо $\rho' = \rho_1$, $\lambda' = \lambda_1$, $\mu' = \mu_1$.

Обнаружено, что выбором простых законов изменения параметров покрытия вида (4.13) можно обеспечить отношение $\Phi_{max}/\Phi_{min} = 5 \dots 10$. Найдены коэффициенты τ_1 , τ_2 соответствующих зависимостей.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертационной работе получила развитие теория обратных задач дифракции звука. Обратные задачи решены на основе прямых дифракционных

задач. При проведении теоретических исследований дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных и анизотропных телах получены новые результаты:

- Предложены подходы к решению прямых задач дифракции звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах.

Первый подход применим к решению задач о рассеянии звука упругими телами канонической формы со слоистой неоднородностью. Он заключается в построении краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения волнового поля внутри неоднородного тела и в аналитическом описании внешнего акустического поля.

Второй подход заключается в построении замкнутой поверхности (круговой цилиндрической в двумерном случае и сферической – в трехмерном), содержащей в себе рассеиватель сложной формы с неоднородностью и анизотропией общего вида. Вне этой поверхности акустическое поле описывается аналитически, а внутри волновые поля в упругом рассеивателе и прилегающем слое жидкости находятся с помощью МКЭ.

- Получены решения прямых задач дифракции звука на плоских, цилиндрических, сферических и эллипсоидальных телах. Выявлено существенное влияние неоднородности и анизотропии материала тела на рассеянные акустические поля.
- Найдены решения прямых задач дифракции звука на упругих эллиптическом цилиндре и трехосном эллипсоиде с неоднородными покрытиями в присутствии подстилающей поверхности. Изучено влияние границы раздела сред на рассеяние звука.
- Предложена вариационная формулировка и разработаны алгоритмы решения обратной задачи о нахождении параметров неоднородного анизотропного упругого тела. Построен функционал, характеризующий отклонение теоретических (расчетных) значений акустических характеристик рассеянного поля от измеренных в некоторой области. Предложен алгоритм минимизации построенной невязки.
- Предложена технология имитационного моделирования для оценки точности решения обратных коэффициентных задач на основе серии вычислительных экспериментов со случайными значениями ошибок измерения рассеянного поля в точках наблюдения. Построено выборочное распределение плотности вероятности ошибки определения искомого параметра.
- Решены задачи об определении параметров неоднородного плоского упругого слоя по известному рассеянному акустическому полю: предложен алгоритм определения законов неоднородности материала слоя; решена задача об определении положения границы раздела двухслойной пластины.
- Осуществлена идентификация параметров неоднородных цилиндрических препятствий по известному рассеянному акустическому полю. Определены плотность материала цилиндрического тела и его модули упругости. Решена задача об определении положения эллиптической полости в круговом упругом цилиндре.

- Получены решения обратных задач по определению геометрических параметров и свойств анизотропии трехмерных тел по рассеянию звука. Предложен алгоритм определения положения полости в упругом шаре. Определены геометрические параметры конечного цилиндра, расположенного вблизи границы раздела сред. Проведена идентификация параметров анизотропного покрытия упругого шара. Решена задача об определении направления оси упругой симметрии анизотропного шара.
- Проведено моделирование неоднородных покрытий упругих пластин (конечной и бесконечной), некругового цилиндра, шара и эллипсоида, обеспечивающих оптимальные звукоотражающие свойства. Получены аналитические выражения для законов, описывающих механические параметры покрытия.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в изданиях, индексируемых в системах WoS, Scopus

1. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акуст. журн. 1995. Т. 41. №1. С. 134-138.
2. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Акуст. журн. 1995. Т. 41. №6. С. 917-923.
3. Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 5. С. 552-558.
4. Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480-488.
5. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 4. С. 189-199.
6. Tolokonnikov L.A., Larin N.V., Skobel'tsyn S.A. Modeling an Inhomogeneous Coating of an Elastic Sphere with the Required Sound Reflecting Properties // Mathematical Models and Computer Simulations. 2018. Vol. 10. No. 3. P. 333-340.
7. Скобельцын С.А. Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19, вып. 1, С. 220-237.
8. Скобельцын С.А., Федотов И.С., Титова А.С. Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19, вып. 4, С. 177-193.
9. Skobel'tsyn S.A., Peshkov N.Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // J. Phys.: Conf. Ser., 2019. V. 1203. 012023 pp. 1-10.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

10. Королев А.Н., Скобельцын С.А. Метод конечных элементов в задаче о рассеянии плоской упругой волны неоднородным цилиндром // Изв. ТулГУ Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 5. С. 187-200.
11. Иванов В.И., Королев А.Н., Скобельцын С.А. Моделирование периодических решений краевых задач для неограниченных областей с помощью МКЭ в FEMLAB // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2007. Вып. 1. С. 132-138.
12. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 132-145.
13. Скобельцын С.А., Иванов В.И. Моделирование задачи идентификации положения полости в упругом препятствии по рассеянному звуковому полю // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2011. Вып. 3. С. 74-86.
14. Иванов В.И., Скобельцын С.А. О модели рассеяния звука цилиндрическим телом с полостями на основе метода конечных элементов // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 3. С. 69-83.
15. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Влияние неоднородного покрытия на прохождение звука через упругую оболочку // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 179-192.
16. Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54-62.
17. Скобельцын С.А. Определение положения границы разделения двухслойной упругой пластины по отражению звука // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 122-130.
18. Скобельцын С.А. Рассеяние звуковых волн конечной упругой криволинейной пластиной с неоднородным покрытием и полостью // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 93-101.
19. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64-75.
20. Скобельцын С.А. Идентификация плотности материала упругого цилиндра по рассеянному акустическому полю // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 4. С. 158-169.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

21. Скобельцын С.А. Программа расчета коэффициента линейной неоднородности плотности упругого слоя по отражению монохроматической плоской звуковой волны. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663467, 18.12.2015. 1 с.
22. Скобельцын С.А. Программа определения параметров анизотропного материала упругого цилиндра по отражению плоской звуковой волны. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017612053, 14.02.2017. 1 с.
23. Скобельцын С.А. Программа определения толщины упругого покрытия полупространства по отражению гармонической плоской звуковой волны. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019662933, 07.10.2019. 1 с.

Монографии

24. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А. Дифракция звуковых волн на неоднородных и анизотропных телах / Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. 200 с.
25. Скобельцын С.А. Решение задач акустики с использованием метода конечных элементов / Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 224 с.

Статьи в других научных изданиях

26. Скобельцын С.А. Подход к решению задач о рассеянии упругих волн с использованием МКЭ // Тез. докл. Международной научной конф. "Современные проблемы математики механики, информатики" (Россия, Тула, 17-19 ноября 2004) Тула: Изд-во ТулГУ, 2004.
27. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородности сферического упругого слоя по характеристикам рассеяния звуковых волн // Тез. докладов 9 Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2006. С. 194.
28. Скобельцын С.А. О вариационной постановке задачи идентификации материала упругого цилиндра по характеристикам отражения звуковых волн // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики" (Россия, Тула, 22-26 ноября 2010) Тула: Изд-во ТулГУ. С. 186-189.
29. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. О дифракции звука на упругом сфероиде с непрерывно-неоднородным покрытием // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики" (Россия, Тула, 15-19 сентября 2013) Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С. 457-464.
30. Скобельцын С.А. Дифракция звука полым упругим сфероидом с внешним неоднородным покрытием // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики" Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 404-411.
31. Скобельцын С.А. Идентификация положения границы разделения двухслойной упругой пластины по отражению звука // Вестник ТулГУ. Сер. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2015. Вып.1. С. 80-88.
32. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Изв. ТулГУ. Техн. науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246-253.
33. Скобельцын С.А. Идентификация параметров анизотропного покрытия упругого шара по отраженному звуку // Изв. ТулГУ. Техн. науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 144-156.
34. Скобельцын С.А. Определение направления оси упругой симметрии анизотропного шара по рассеянному звуковому полю / Сб. трудов II Всероссийской акустической конференции, совмещенной с XXX сессией Российского акустического общества (Нижний Новгород, ИПФ РАН, 6-9 июня 2017) Н. Новгород: ИПФ РАН, 2017. 1 электрон. опт. диск С. 1699-1705.
35. Скобельцын С.А. Определение свойств неоднородного покрытия упругого цилиндра с полостью для обеспечения требуемых параметров отражения звука / Сб. трудов II Всероссийской научно-технической конференции "Механика и математическое моделирование в технике" (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 22-23 ноября 2017) М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2017. С. 71-76

36. Скобельцын С.А. Идентификация размера и положения полости в упругом шаре по отражению звуковой волны / Сб. трудов Международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" (Воронеж, Воронежский государственный университет, 18-20 декабря 2017) Воронеж: "Научно-исследовательские публикации". 2017. ISBN 978-5-9500319-1-5. С. 1255-1262.
37. Скобельцын С.А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Изв. ТулГУ. Техн. науки. 2017. Вып. 7. С. 83-92.
38. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Определение геометрических параметров конечного цилиндра, расположенного у границы полупространства, по рассеянному звуку // Сборник трудов междунар. научно-технич. конф. "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" (Россия, Воронеж, ВГУ, 17-19 декабря 2018) Воронеж: Издательство "Научно-исследовательские публикации", 2018. С. 1263-1269.
39. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Определение параметров неоднородности анизотропного покрытия упругого полупространства по отражению звука // Тезисы докладов 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" (Россия, Москва, ИПРИМ РАН, 18-19 декабря 2018) М.: ИПРИМ РАН, 2018. С. 58.
40. Скобельцын С.А. Минимизация рассеяния звука сфероидом вблизи идеальной поверхности выбором параметров внешнего слоя // Изв. ТулГУ. Техн. науки. 2018. Вып. 9. С. 421-437.
41. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородности покрытия эллиптического цилиндра по рассеянию звука в присутствии упругого полупространства // Изв. ТулГУ. Техн. науки. 2018. Вып. 9. С. 290-302.
42. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Дифракция звука в полупространстве на конечном упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Техн. науки. 2018. Вып. 7. С. 158-174.