На правах рукописи

Басем Халиль Мохаммед Аджарма

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАЛИЧИИ КОМБИНАЦИОННЫХ ВНУТРЕННИХ РЕЗОНАНСОВ

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Воронеж-2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Научный руководитель: **Шитикова Марина Вячеславовна**
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «ВГТУ», международный научный центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук имени Заслуженного деятеля науки РФ профессора Россихина Ю.А., руководитель

Официальные оппоненты: **Радченко Владимир Павлович**
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», кафедра «Прикладная математика и информатика», заведующий кафедрой

Теличко Виктор Григорьевич
кандидат технических наук, ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», кафедра строительства, строительных материалов и конструкций, доцент

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов

Защита состоится «25» февраля 2020 г. в 14:00 часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92, ауд. 12-105.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Basem_Adzharma/

Автореферат разослан «26» декабря 2019.

Ученый секретарь диссертационного совета — Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Изучение явления внутренних резонансов, сопровождающих нелинейные колебания оболочек, является важной областью прикладной механики, так как оболочки используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники.

Внутренний резонанс — это такое явление, когда одна, две, три или более собственных частот находятся в некотором соответствии друг с другом. Если одна из частот равна другой частоте, мы имеем резонанс один-к-одному. Если одна из собственных частот в два раза больше, чем любая другая частота, имеет место резонанс два-к-одному и так далее. Помимо резонансов один-к-одному, два-к-одному и три-к-одному могут существовать и комбинационные резонансы, когда три или более частот находятся в некоторой взаимосвязи между собой. Различные типы комбинационных резонансов изучались в работах К.Г. Валеева, А.В. Голубкова, Н.Н. Денцова, Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, где отмечалось, что они являются наиболее неблагоприятными режимами при нелинейных колебаниях механических систем.

Изучение свободных затухающих нелинейных колебаний является важной составляющей для определения динамических характеристик системы, зависящих от амплитудно-частотных соотношений и форм колебаний. Кроме того, нелинейные колебания могут сопровождаться явлениями внутреннего резонанса, приводящими к сильному взаимодействию возбужденных мод колебаний, и, как следствие, к перекачке энергии между взаимодействующими модами. Внутренний резонанс может наблюдаться в случае некоторой комбинации собственных частот одного и того же типа колебаний, например, вертикальных, или в случае взаимодействия мод различных типов колебаний, например, вертикальных и крутильных.

Виды внутреннего резонанса в случае взаимодействия мод, принадлежащих различным типам колебаний, приводят к перекачке энергии между двумя или тремя подсистемами соответственно в случае внутреннего резонанса и комбинационного резонанса. Исследования в этом направлении были начаты А.А. Виттом и Г.С. Гореликом, которые были одними из первых, кто теоретически и экспериментально показали явление внутреннего резонанса два-к-одному с перекачкой энергии от одной подсистемы (вертикальные колебания) в другую (маятниковые колебания), используя в качестве примера самую простую механическую систему с двумя степенями свободы.

Обзоры последних достижений в области динамики тонких оболочек, приведенные в работах M. Amabili, Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, показывают, что нелинейные колебания оболочек в вязкой среде осложнены наличием резонансных явлений, которые не были достаточно изучены.

Так как внутренний резонанс является конструкционным резонансом в отличие от внешнего резонанса, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, то внутренний резонанс зачастую неустраним, поскольку готовую конструкцию уже не переделать, а при конструировании невозможно предугадать наличие в конструкции того или иного резонансного сочетания собственных частот. Поскольку таких сочетаний очень много, то их необходимо детально исследовать. Таким образом, явление комбинационного внутреннего резонанса требует очень тщательного изучения, поскольку в тонких оболочках всегда присутствуют какие-либо из типов комбинационного внутреннего резонанса.

Объект исследования – тонкие упругие цилиндрические оболочки, колеблющиеся в вязкоупругой среде, демпфирующие свойства которой описываются реологической моделью с дробной производной.

Предмет исследования - нелинейное динамическое поведение цилиндрических оболочек в условиях внутреннего комбинационного резонанса, на который может накладываться внешний резонанс от воздействия гармонической возмущающей силы.

Целью данного исследования является построение математической модели для анализа свободных и вынужденных затухающих колебаний упругих цилиндрических оболочек в вязкой среде, когда оболочка находится в условиях комбинационного резонанса, приводящего к взаимодействию собственных форм колебаний, соответствующих взаимно ортогональным перемещениям.

Для достижения поставленной цели необходимо:

- разработать алгоритм поиска возможных типов комбинационных резонансов в цилиндрической оболочке;

- разработать методику решения нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными, описывающих динамическое поведение цилиндрической оболочки, в случае наличия внутреннего комбинационного резонанса и его сочетания с внешним резонансом;

- исследовать влияние параметра дробности на процесс перекачки энергии, происходящий при нелинейных колебаниях цилиндрической оболочки, находящейся в условиях комбинационного внутреннего резонанса;

- изучить влияние малой вязкости и амплитуды возмущающей гармонической силы на характер колебательных режимов оболочки, движения которой описываются системой трех нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих производные дробного порядка, в условиях всех возможных вариантов комбинационных внутренних резонансов;

- провести качественный и количественный анализ полученных численных результатов.

Научная новизна работы заключается в следующих результатах, выносимых на защиту:

- решена задача о вынужденных нелинейных колебаниях упругих оболочек в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными в случае, когда колебательные движения описываются системой трех нелинейных уравнений со связанными линейными частями относительно трех перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях;

- дана классификация возможных типов комбинационных резонансов для исследуемой нелинейной динамической модели цилиндрической оболочки и разработан алгоритм их определения;

- разработана методика численного решения нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными, описывающих динамическое поведение цилиндрической оболочки, в случае наличия внутреннего комбинационного резонанса и его сочетания с внешним резонансом;

- проведен сравнительный анализ численных и аналитических исследований свободных и вынужденных затухающих колебаний с аддитивным и разностным типами комбинационных внутренних резонансов первого и второго рода с использованием двух различных численных методов;

- изучены все двенадцать возможных случаев комбинационного внутреннего резонанса.

Методы исследования, использованные в работе:

- общепринятые фундаментальные законы механики деформируемого твердого тела;

- обобщенный метод многих временных масштабов;

- дискретный метод решения дифференциальных уравнений дробного порядка К. Дитхельма;

- численный метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

Достоверность полученных результатов базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в данной работе решения с использованием двух различных методов дали близкие результаты во всех изученных случаях, которые согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов. При стремлении параметра дробности к единице полученные решения переходят в известные решения для производных целого порядка.

Теоретическая и практическая значимость работы. Явление комбинационного внутреннего резонанса требует очень тщательного изучения, поскольку в тонких цилиндрических оболочках всегда присутствуют какие-либо из двенадцати найденных типов комбинационного внутреннего резонанса. Полученные в ходе исследования результаты могут быть использованы проектными и научно-исследовательскими организациями при проектировании конструкций, которые в процессе колебаний могут оказаться в условиях различных внутренних комбинационных резонансов.

При наличии возмущающей гармонической силы данный подход позволит избегать наложения внешнего резонанса на внутренний, поскольку такое наложение может привести к необратимым последствиям.

Данные научные исследования выполнялись в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности «Новый подход к изучению нелинейных колебаний тонких вязкоупругих тел, демпфирующие свойства которых определяются дробными операторами (проект No. 9.5138.2017/8.9)

Разработан «Программный комплекс численного исследования нелинейных колебаний цилиндрических оболочек в условиях внутреннего комбинационного резонанса», который был зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ под номером №: 2019615163 9 апреля 2019 г.

Этот алгоритм был апробирован палестинской проектной компанией при расчете цилиндрического трубопровода, о чем свидетельствует акт о внедрении, приведенный в Приложении.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных конференциях профессорско-преподавательского состава Воронежского государственного технического университета в 2016-2019гг.; на семинарах международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук ВГТУ; на международной научной конференции International Conference on Engineering Vibration ICoEV (София, Болгария, 2017); на международной конференции по дробному исчислению и его приложениям ICFDA (Амман, Иорданское Хашимитское Королевство, 2018); на международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2018); на юбилейной XXX международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (Москва, 2018); на международной научной конференции «The First International Nonlinear Dynamics Conference» NODYCON (Рим, Италия, 2019).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 11 научных работ, в том числе 4 статьи в изданиях, проиндексированных в научных базах данных Web of Science и Scopus, и 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из 4х глав, заключения, списка литературы и 3х приложений. Диссертация изложена на 136 страницах, содержит 37 рисунков, 1 таблицу, список литературы из 162 источников и Приложений.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность исследований по рассматриваемой теме, приведены общая характеристика диссертационной работы и основные положения, которые автор выносит на защиту.

В **первой главе** приводится обзор литературы о нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек. Приведены работы, в которых для описания демпфирующих свойств используются реологические модели с дробными операторами, которые позволяют варьировать не только свойствами материала оболочки, но и вязкостью окружающей среды.

Кратко приведена постановка задачи о свободных нелинейных колебаниях упругих цилиндрических оболочек в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными, в случае, когда колебания оболочки описываются тремя нелинейными дифференциальными уравнениями относительно трех перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях, линейные части которых взаимосвязаны. Описывается новый подход, предложенный Россихиным Ю.А. и Шитиковой М.В., позволяющий развязать линейные части нелинейных уравнений цилиндрических оболочек, используя свойства эрмитовых матриц.

Именно этот подход будет обобщен в данной диссертационной работе на анализ вынужденных колебаний цилиндрических оболочек под действием гармонической силы.

Вторая глава посвящена решению задачи о вынужденных нелинейных колебаниях упругих оболочек в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными в случае, когда колебательные движения описываются системой трех нелинейных уравнений со связанными линейными частями относительно трех перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Приводится классификация возможных типов комбинационных резонансов для исследуемой нелинейной динамической модели цилиндрической оболочки.

Колебания оболочки в цилиндрической системе координат будем моделировать тремя дифференциальными уравнениями в соответствии с теорией Донелла-Муштари-Власова

$$u_{xx} + \tfrac{1-\nu}{2}\beta_1^2 u_{\varphi\varphi} + \tfrac{1+\nu}{2}\beta_1 v_{x\varphi} - \nu\beta_1 w_x + w_x\left(w_{xx} + \tfrac{1-\nu}{2}\beta_1^2 w_{\varphi\varphi}\right) + \tfrac{1+\nu}{2}\beta_1^2 w_\varphi w_{x\varphi} = \\ = \ddot{u} + æ_1\left(\tfrac{d}{dt}\right)^\gamma u, \tag{1}$$

$$\beta_1^2 v_{\varphi\varphi} + \tfrac{1-\nu}{2} v_{xx} + \tfrac{1+\nu}{2}\beta_1 u_{x\varphi} - \beta_1^2 w_\varphi + \beta_1 w_\varphi\left(\beta_1^2 w_{\varphi\varphi} + \tfrac{1-\nu}{2} w_{xx}\right) + \frac{1+\nu}{2}\beta_1 w_x w_{x\varphi} = \\ = \ddot{v} + æ_2\left(\tfrac{d}{dt}\right)^\gamma v, \tag{2}$$

$$\frac{\beta_2^2}{12}(w_{xxxx} + 2\beta_1^2 w_{xx\varphi\varphi} + \beta_1^2 w_{\varphi\varphi\varphi\varphi}) - \nu\,\beta_1 u_x - \beta_1^2 v_\varphi + \beta_1^2 w + \frac{1}{2}\nu\beta_1\left(w_x\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}\beta_1^3\left(w_\varphi\right)^2 - w_x\left(u_{xx} + \tfrac{1-\nu}{2}\beta_1^2 u_{\varphi\varphi} + \tfrac{1+\nu}{2}\beta_1 v_{x\varphi}\right) - \\ -\beta_1 w_\varphi\left(\beta_1^2 v_{\varphi\varphi} + \tfrac{1-\nu}{2} v_{xx} + \tfrac{1+\nu}{2}\beta_1 u_{x\varphi}\right) - w_{xx}\left(u_x + \nu\beta_1 v_\varphi - \nu\beta_1 w\right) - \\ -\beta_1^2 w_{\varphi\varphi}\left(\nu u_x + \beta_1 v_\varphi - \beta_1 w\right) - (1-\nu)\beta_1 w_{x\varphi}\left(\beta_1 u_\varphi + v_x\right) = \\ = -\ddot{w} - æ_3\left(\tfrac{d}{dt}\right)^\gamma w - F_0\delta(x-x_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\cos(\Omega_F t), \tag{3}$$

где $u = u(x,\varphi,t)$, $v = v(x,\varphi,t)$ и $w = w(x,\varphi,t)$ - перемещения точек, расположенных в срединной поверхности цилиндрической оболочки в направлении x,φ,r, ν – коэффициент Пуассона, R, h и l - радиус, толщина и длина цилиндрической оболочки $\beta_1 = l/R$ и $\beta_2 = h/l$ - безразмерные параметры, определяющие размеры оболочки, нижние индексы обозначают производные по соответствующим координатам, $æ_i$ - коэффициенты демпфирования, F_0 и Ω_F – амплитуда и частота внешней гармонической силы, δ - дельта-функция Дирака, (x_0,φ_0) - координаты точки приложения внешней силы, а $D^\gamma = \left(d/dt\right)^\gamma$ - дробная производная Римана-Лиувилля порядка γ $(0 < \gamma \le 1)$:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma f = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^\infty \frac{f(t) - f(t-t')}{t'^{1+\gamma}}dt' = D_+^\gamma f, (0 < \gamma \le 1)$$

К системе уравнений (1)-(3) необходимо добавить начальные условия

$$u|_{t=0} = 0, \qquad v|_{t=0} = 0, \qquad w|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

и граничные условия, которые для шарнирно-опертой оболочки (условия Навье для граней, свободно опертых в направлении оси x) имеют вид

$$w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0, \qquad v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0, \tag{5}$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \qquad w_{xx}|_{x=0} = w_{xx}|_{x=1} = 0 \tag{6}$$

Решение системы уравнений (1)–(3) для шарнирно опертой оболочки можно записать в виде решения Навье, что, в свою очередь, позволяет определить собственные частоты оболочки в результате решения задачи на собственные значения. Используя условия ортогональности для линейных мод колебаний в пределах областей $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le x \le 1$, приходим к бесконечному числу систем уравнений, каждая из которых состоит из трех связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных перемещений $x_{imn}(t)$ (i=1,2,3), где m, n – целые числа, соответствующие числу учитываемых мод колебаний.

Для анализа работы оболочки в условиях комбинационного резонанса, при котором взаимодействуют три моды колебаний с собственными частотами Ω_{imn} (i=1,2,3), предположим, что они являются доминирующими в процессе колебаний. Используя подход, базирующий на основе разложения искомого решения по собственным функциям

$$x_{i\,mn} = X_1 L^{I}_{i\,mn} + X_2 L^{II}_{i\,mn} + X_3 L^{III}_{i\,mn}, \qquad (7)$$

приходим к системе трех нелинейных уравнений, линейные части которых независимы друг от друга:

$$\ddot{X}_{1mn} + æ_1 D^{\gamma} X_{1mn} + \Omega^2_{1mn} X_{1mn} = -\sum_{i=1}^{3} F_{imn} L^{I}_{imn} - \bar{F}\cos(\Omega_F t) L^{I}_{3mn}, \qquad (8)$$

$$\ddot{X}_{2mn} + æ_2 D^{\gamma} X_{2mn} + \Omega^2_{2mn} X_{2mn} = -\sum_{i=1}^{3} F_{imn} L^{II}_{imn} - \bar{F}\cos(\Omega_F t) L^{II}_{3mn}, \qquad (9)$$

$$\ddot{X}_{3mn} + æ_3 D^{\gamma} X_{3mn} + \Omega^2_{3mn} X_{3mn} = -\sum_{i=1}^{3} F_{imn} L^{III}_{imn} - \bar{F}\cos(\Omega_F t) L^{III}_{3mn}. \qquad (10)$$

где $\bar{F} = F_0 \sin(\pi m x_0)\sin(\pi n \varphi_0)$, F_{imn} -нелинейные слагаемые, $L^{I}_{i\,mn}, L^{II}_{i\,mn}, L^{III}_{i\,mn}$ - взаимно ортогональные собственные векторы.

Для решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с дробными производными (8)-(10) будем использовать два метода: численное решение на основе алгоритма Дитхельма, который заключается в дискретизации дифференциальных операторов целого D и дробного D^{γ} порядков, или обобщенный метод многих временных масштабов, который приводит к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд и фаз нелинейных колебаний, которые далее могут быть решены численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Для этого разложим не только обобщенные перемещения в ряд по малому параметру с использованием новых временных масштабов $T_n = \varepsilon^n t$ в следующем виде:

$$X_i(t) = \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1, T_2 \ldots) + \varepsilon^2 X_{i2}(T_0, T_1, T_2 \ldots) + \varepsilon^3 X_{i3}(T_0, T_1, T_2 \ldots) + \ldots, \qquad (11)$$

где $T_0 = t$ – быстрое время, характеризующее движения с собственными частотами линейных колебаний, $T_1 = \varepsilon t$ и $T_2 = \varepsilon^2 t$ – медленные масштабы, характеризующие модуляцию амплитуд и фаз нелинейных колебаний, но и производные по времени целого и дробного порядков:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \ldots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2\left(D_1^2 + 2D_0 D_2\right) + \ldots \qquad (12)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\gamma} = \left(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \ldots\right)^{\gamma} = D^{\gamma}_{0+} + \varepsilon\gamma D^{\gamma-1}_{0+} D_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\gamma\left[\left(\gamma-1\right) D^{\gamma-2}_{0+} D_1^2 + 2D^{\gamma-1}_{0+} D_2\right] + \ldots, \quad (13)$$

где $D_0 = \partial / \partial T_0$, $D_1 = \partial / \partial T_1$ и $D_2 = \partial / \partial T_2$.

Поскольку целью данной работы является исследование наложения внешнего резонанса на различные случаи комбинационного резонанса с помощью обобщенного метода многих временных масштабов, то необходимо положить вязкость среды, окружающей рассматриваемую оболочку, и амплитуду внешней силы малыми величинами, то есть $æ_i = \varepsilon^k \mu_i \tau_i^{\gamma}$ и $f = \varepsilon^{k+1}\bar{F}$, где τ_i – время ретардации *i*-ого обобщённого перемещения, μ_i и f – конечные величины.

Подставляя (11)-(13) в уравнение (8)-(10), после приравнивания коэффициентов с одинаковыми степенями ε к нулю, приходим к системе рекуррентных уравнений различного порядка

при ε:

$$D_0^2X_{11}+\Omega_1^2X_{11}=0\,,\qquad D_0^2X_{21}+\Omega_2^2X_{21}=0\,,\qquad D_0^2X_{31}+\Omega_3^2X_{31}=0\;; \tag{14}$$

при ε^2:

$$\begin{aligned}
&D_0^2X_{12}+\Omega_1^2X_{12}=-2D_0D_1X_{11}-a_{11}^IX_{11}^2-a_{22}^IX_{21}^2-a_{33}^IX_{31}^2-\\
&\quad-a_{12}^IX_{11}X_{21}-a_{13}^IX_{11}X_{31}-a_{23}^IX_{21}X_{31}-\mu_1(2-k)\tau_1^\gamma D_0^\gamma X_{11}-(2-k)\,f_1\cos(\Omega_Ft),\\
&D_0^2X_{22}+\Omega_2^2X_{22}=-2D_0D_1X_{21}-a_{11}^{II}X_{11}^2-a_{22}^{II}X_{21}^2-a_{33}^{II}X_{31}^2-\\
&\quad-a_{12}^{II}X_{11}X_{21}-a_{13}^{II}X_{11}X_{31}-a_{23}^{II}X_{21}X_{31}-\mu_2(2-k)\tau_2^\gamma D_0^\gamma X_{21}-(2-k)\,f_2\cos(\Omega_Ft),\\
&D_0^2X_{32}+\Omega_3^2X_{32}=-2D_0D_1X_{31}-a_{11}^{III}X_{11}^2-a_{22}^{III}X_{21}^2-a_{33}^{III}X_{31}^2-a_{12}^{III}X_{11}X_{21}-\\
&\quad-a_{13}^{III}X_{11}X_{31}-a_{23}^{III}X_{21}X_{31}-\mu_3(2-k)\tau_3^\gamma D_0^\gamma X_{31}-(2-k)\,f_3\cos(\Omega_3T_0+\sigma T_1);
\end{aligned} \tag{15}$$

при ε^3:

$$\begin{aligned}
&D_0^2X_{13}+\Omega_1^2X_{13}=-2D_0D_1X_{12}-\left(D_1^2+2D_0D_2\right)X_{11}-2a_{11}^IX_{11}X_{12}-\\
&\quad-2a_{22}^IX_{21}X_{22}-2a_{33}^IX_{31}X_{32}-a_{12}^I\left(X_{11}X_{22}+X_{12}X_{21}\right)-\\
&\quad-a_{13}^I\left(X_{11}X_{32}+X_{12}X_{31}\right)-a_{23}^I\left(X_{21}X_{32}+X_{22}X_{31}\right)-\\
&\quad-\mu_1(2-k)\tau_1^\gamma D_0^\gamma X_{12}-\mu_1\gamma(2-k)\tau_1^\gamma D_0^{\gamma-1}D_1X_{11}-\mu_1(k-1)\tau_1^\gamma D_0^\gamma X_{11}-(k-1)\,f_1\cos(\Omega_Ft),\\
&D_0^2X_{23}+\Omega_2^2X_{23}=-2D_0D_1X_{22}-\left(D_1^2+2D_0D_2\right)X_{21}-2a_{11}^{II}X_{11}X_{12}-\\
&\quad-2a_{22}^{II}X_{21}X_{22}-2a_{33}^{II}X_{31}X_{32}-a_{12}^{II}\left(X_{11}X_{22}+X_{12}X_{21}\right)-\\
&\quad-a_{13}^{II}\left(X_{11}X_{32}+X_{12}X_{31}\right)-a_{23}^{II}\left(X_{21}X_{32}+X_{22}X_{31}\right)-\\
&\quad-\mu_2(2-k)\tau_2^\gamma D_0^\gamma X_{22}-\mu_2\gamma(2-k)\tau_2^\gamma D_0^{\gamma-1}D_1X_{21}-\mu_2(k-1)\tau_2^\gamma D_0^\gamma X_{21}-(k-1)\,f_2\cos(\Omega_Ft),\\
&D_0^2X_{33}+\Omega_3^2X_{33}=-2D_0D_1X_{32}-\left(D_1^2+2D_0D_2\right)X_{31}-2a_{11}^{III}X_{11}X_{12}-2a_{22}^{III}X_{21}X_{22}-\\
&\quad-2a_{33}^{III}X_{31}X_{32}-a_{12}^{III}\left(X_{11}X_{22}+X_{12}X_{21}\right)-a_{13}^{III}\left(X_{11}X_{32}+X_{12}X_{31}\right)-\\
&\quad-a_{23}^{III}\left(X_{21}X_{32}+X_{22}X_{31}\right)-\mu_3(2-k)\tau_3^\gamma D_0^\gamma X_{32}-\mu_3\gamma(2-k)\tau_3^\gamma D_0^{\gamma-1}D_1X_{31}-\\
&\quad-\mu_3(k-1)\tau_3^\gamma D_0^\gamma X_{31}-(k-1)\,f_3\cos(\Omega_Ft).
\end{aligned} \tag{16}$$

При этом будем полагать, что частота внешней гармонической силы Ω_F близка по своему значению собственной частоте вертикальных колебаний Ω_3, так что имеет место следующее равенство: $\Omega_F=\Omega_3+\varepsilon\sigma$, где σ – частотная расстройка, определяющая степень близости частот.

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка (14) имеет вид

$$X_{j1}=A_j(T_1,T_2)\exp(i\omega_jT_0)+\bar{A}_j(T_1,T_2)\exp(-i\omega_jT_0)\,, \tag{17}$$

где $A_j(T_1,T_2)$ $(j=1,2,3)$ – неизвестные комплексные функции и $\bar{A}_j(T_1,T_2)$ – сопряжённые функции с $A_j(T_1,T_2)$.

Используя далее на каждом шаге решение с предыдущего шага и исключая вековые члены во время интегрирования, приходим к системам разрешающих уравнений для случаев с вязкостью порядков ε и ε^2, из которых следует возможность возникновения десяти случаев комбинационного внутреннего резонанса аддитивно-разностного типа, то есть:

вязкость порядка ε:

1. $\Omega_1=\Omega_2+\Omega_3$, *или* $\Omega_2=\Omega_1-\Omega_3$, *или* $\Omega_3=\Omega_1-\Omega_2$ (18)

2. $\Omega_1=\Omega_2-\Omega_3$, *или* $\Omega_2=\Omega_1+\Omega_3$, *или* $\Omega_3=\Omega_2-\Omega_1$ (19)

3. $\Omega_1=\Omega_3-\Omega_2$, *или* $\Omega_2=\Omega_3-\Omega_1$, *или* $\Omega_3=\Omega_1+\Omega_2$ (20)

вязкость порядка ε^2:

1. $\Omega_1=\Omega_2+2\Omega_3$, *или* $\Omega_2=\Omega_1-2\Omega_3$, *или* $2\Omega_3=\Omega_1-\Omega_2$ (21)
2. $\Omega_1=2\Omega_2+\Omega_3$, *или* $2\Omega_2=\Omega_1-\Omega_3$, *или* $\Omega_3=\Omega_1-2\Omega_2$ (22)
3. $\Omega_1=2\Omega_3-\Omega_2$, *или* $\Omega_2=2\Omega_3-\Omega_1$, *или* $2\Omega_3=\Omega_1+\Omega_2$ (23)
4. $\Omega_1=\Omega_2-2\Omega_3$, *или* $\Omega_2=2\Omega_3+\Omega_1$, *или* $2\Omega_3=\Omega_2-\Omega_1$ (24)
5. $\Omega_1=2\Omega_2-\Omega_3$, *или* $2\Omega_2=\Omega_1+\Omega_3$, *или* $\Omega_3=2\Omega_2-\Omega_1$ (25)
6. $\Omega_1=\Omega_3-2\Omega_2$, *или* $2\Omega_2=\Omega_3-\Omega_1$, *или* $\Omega_3=2\Omega_2+\Omega_1$ (26)
7. $2\Omega_1=\Omega_2+\Omega_3$, *или* $\Omega_2=2\Omega_1-\Omega_3$, *или* $\Omega_3=2\Omega_1-\Omega_2$ (27)
8. $2\Omega_1=\Omega_2-\Omega_3$, *или* $\Omega_2=2\Omega_1+\Omega_3$, *или* $\Omega_3=\Omega_2-2\Omega_1$ (28)
9. $2\Omega_1=\Omega_3-\Omega_2$, *или* $\Omega_2=\Omega_3-2\Omega_1$, *или* $\Omega_3=2\Omega_1+\Omega_2$ (29)

Рассмотрим сначала случай $\Omega_1=\Omega_2+\Omega_3$ (18), для которого система разрешающих уравнений имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&2i\Omega_1 D_1 A_1(T_1)+\mu_1 A_1\left(i\Omega_1\tau_1\right)^{\gamma}+a_{23}^{I}A_2A_3=0,\\
&2i\Omega_2 D_1 A_2(T_1)+\mu_2 A_2\left(i\Omega_2\tau_2\right)^{\gamma}+a_{13}^{II}A_1\bar{A}_3=0,\\
&2i\Omega_3 D_1 A_3(T_1)+\mu_3 A_3\left(i\Omega_3\tau_3\right)^{\gamma}+a_{12}^{III}A_1\bar{A}_2+\tfrac{1}{2}f_3\,\mathrm{e}^{(i\sigma T_1)}=0.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Из уравнений (30) видно, что это система трех нелинейных уравнений, которые описывают движения точек на срединной поверхности оболочки для случая слабого демпфирования в условиях комбинационного внутреннего резонанса (18).

Представляя функции $A_{imn}(T_1)$ в полярной форме $A_{imn}(T_1)=a_{imn}(T_1)\exp[\mathrm{i}\,\varphi_{imn}(T_1)]$, где $a_{imn}(T_1)$ и $\varphi_{imn}(T_1)$ - амплитуды и фазы нелинейных колебаний, в уравнения (30) и разделяя мнимую и действительную, в результате получим

$$(\dot{a_1^2})+s_1a_1^2=\Omega_1^{-1}a_{23}^{I}a_1a_2a_3\sin\delta, \tag{31}$$

$$(\dot{a_2^2})+s_2a_2^2=-\Omega_2^{-1}a_{13}^{II}a_1a_2a_3\sin\delta, \tag{32}$$

$$(\dot{a_3^2})+s_3a_3^2=-\Omega_3^{-1}a_{12}^{III}a_1a_2a_3\sin\delta+\tfrac{1}{2\Omega_3}fa_3\sin(\sigma T_1-\varphi_3), \tag{33}$$

$$\dot{\varphi}_1-\tfrac{1}{2}\sigma_1-\tfrac{1}{2}\tfrac{a_{23}^{I}}{\Omega_1}\tfrac{a_2a_3}{a_1}\cos\delta=0, \tag{34}$$

$$\dot{\varphi}_2-\tfrac{1}{2}\sigma_2-\tfrac{1}{2}\tfrac{a_{13}^{II}}{\Omega_2}\tfrac{a_1a_3}{a_2}\cos\delta=0, \tag{35}$$

$$\dot{\varphi}_3-\tfrac{1}{2}\sigma_3-\tfrac{1}{2}\tfrac{a_{12}^{III}}{\Omega_3}\tfrac{a_1a_2}{a_3}\cos\delta-\tfrac{1}{2\Omega_3a_3}f\cos(\sigma T_1-\varphi_3)=0, \tag{36}$$

где $\delta=\varphi_1-(\varphi_2+\varphi_3)$ - сдвиг фаз, точка обозначает дифференцирование по T_1,

$$s_i=\mu_i\tau_i^{\gamma}\Omega_i^{\gamma-1}\sin\psi,\quad \sigma_i=\mu_i\tau_i^{\gamma}\Omega_i^{\gamma-1}\cos\psi,\quad \psi=\frac{1}{2}\pi\gamma. \tag{37}$$

Вторые слагаемые в уравнениях (31)-(33) описывают процесс диссипации энергии при нелинейных колебаниях, а из соотношений (37) видно, что при $0<\gamma<1$

коэффициенты демпфирования s_i зависят от собственных частот колебаний Ω_i. Когда $\gamma = 1$, коэффициенты демпфирования становятся равными $s_i = \mu_i \tau_i$, т.е. являются независимыми от собственных частот, что соответствует классической модели Кельвина-Фойгта, но противоречит гипотезе модального демпфирования.

Зная решение системы уравнений (31)-(36), можно найти обобщенные перемещения $X_i = A_i(T_i)e^{i\Omega_1 T_0} = a_1(T_1)e^{i\varphi_1(T_1)}e^{i\Omega_1 T_0}$, а далее $x_i(t)$ с помощью равенств (7) и, наконец, перемещения точек срединной поверхности оболочки. Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению системы уравнений (31)-(36).

В диссертационной работе рассмотрены все двенадцать выявленных случаев комбинационного резонанса (18)-(22), для каждого из которых получены системы нелинейных уравнений, описывающих амплитуды и фазы нелинейных колебаний.

В третьей главе описаны алгоритмы, которые использовались для получения численных результатов. Прежде всего составлен алгоритм нахождения условий возникновения комбинационных резонансов. Разработана методика численного решения нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными, описывающих динамическое поведение цилиндрической оболочки, в случае наличия внутреннего комбинационного резонанса и его сочетания с внешним резонансом.

Первый использованный метод основан на алгоритме дискретизации дифференциальных операторов целого D и дробного D^γ порядков, предложенном К. Дитхельмом для решения дифференциального уравнения с дробной производной. В данной диссертационной работе он обобщен на решение системы, состоящей из шести нелинейных уравнений, содержащих произволдные дробного порядка

Второй метод основан на численном решении систем уравнений типа (31)-(36), состоящих из шести дифференциальных уравнений первого порядка, при помощи алгоритма Рунге-Кутта четвертого порядка для системы.

В четвертой главе приведены результаты численных исследований всех случаев сочетания внешнего и двенадцати типов внутреннего комбинационного резонанса при изменении параметра дробности в пределах $0 < \gamma \le 1$. Исследовано влияние малой вязкости и амплитуды возмущающей гармонической силы на характер колебательных режимов оболочки, движения которой описываются системой трех нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих производные дробного порядка.

Проведен сравнительный анализ численных и аналитических исследований свободных и вынужденных затухающих колебаний с аддитивным и разностным типами комбинационных внутренних резонансов первого и второго рода с использованием двух различных численных методов. Изучены все двенадцать возможных случаев комбинационного внутреннего резонанса.

На рисунке 1, который построен при помощи разработанного алгоритма поиска возможных случаев проявления в цилиндрической оболочке комбинационных резонансов, каждая отдельная точка соответствует комбинационному резонансу первого рода. На рисунке 1(А) показано соотношение между параметрами оболочки β_2 и β_1 для всех возможных сочетаний собственных частот $\Omega_{1m_1n_1}$, $\Omega_{2m_2n_2}$ и $\Omega_{3m_3n_3}$, а на рисунке 1(Б) для фиксированных значений n_1, m_1, n_2, m_2, n_3, m_3 **,** которым соответствует экспоненциальная зависимость между величинами β_2 и β_1**.**

Таким образом, разработанный автором алгоритм нахождения сочетания геометрических параметров цилиндрической оболочки и механических характеристик материала, из которого она изготовлена, показал, что наступление комбинационного резонанса первого или второго рода довольно часто может возникать в реальных оболочках, используемых в качестве конструкций различных строительных инженерных сооружений.

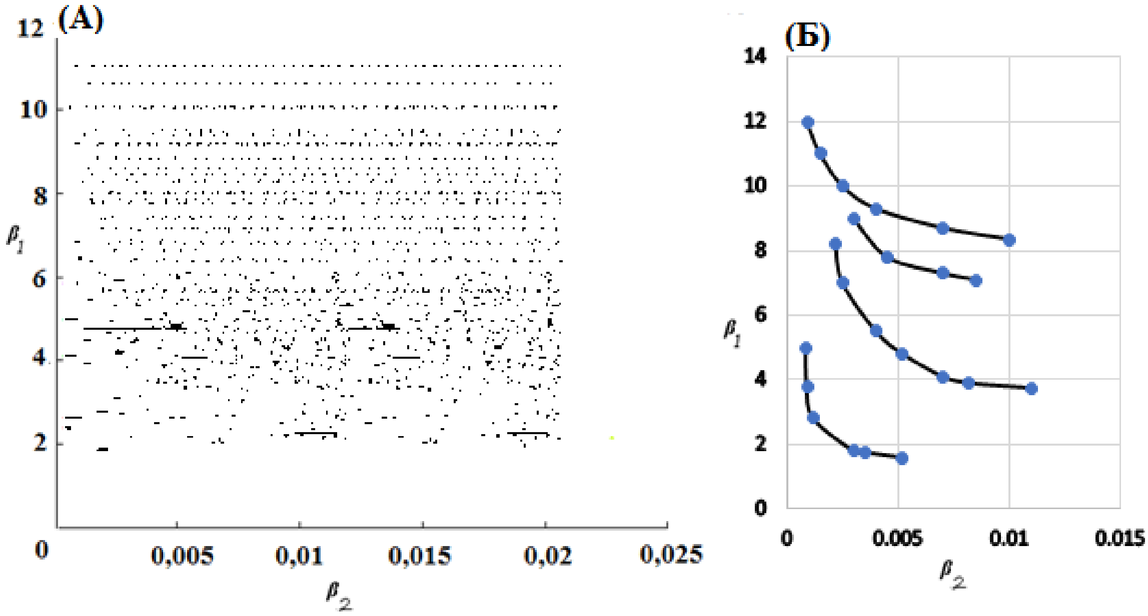

Рисунок 1 - Взаимозависимость параметров цилиндрической оболочки β_1 и β_2, отвечающих комбинационным резонансам первого рода

На рисунке 2 приведено решение системы уравнений (8)-(10) для вынужденных колебаний (F = 4.2, σ = 0) при различных значениях параметра дробности γ дискретным методом Дитхельма, реализация которого была осуществлена в системе «GNU Octave». Из рисунка 2 видно, как изменяются обобщенные перемещения (X_1, X_2, X_3) при вынужденных колебаниях со временем t для различных значений порядка дробной производной в диапазоне от нуля до единицы, при этом для каждого параметра дробности показано решение уравнений (8)-(10) в виде трех кривых, характер поведения которых указывает, что передача энергии происходит между тремя связанными модами колебаний, При увеличении параметра дробности от нуля до единицы процесс диссипации усиливается, и явление внешнего резонанса, который приводит к увеличению амплитуд колебаний при γ=0 и 0.25, начинает ослабевать и приводит к затуханию колебаний.

На Рисунке 3 приведены огибающие амплитуд вынужденных колебаний, являющиеся решением системы уравнений (31)-(36), которое было выполнено численно с использованием алгоритма четвертого порядка Рунге-Кутта в среде системы «GNU Octave». Из рисунка 3 видно, что перекачка энергии происходит между тремя модами колебаний, связанными условием внутреннего комбинационного резонанса. Увеличение параметра дробности приводит к усилению процесса диссипации энергии при колебаниях и затуханию процесса энергообмена. В случае, когда γ=1, происходит полное затухание колебаний и исчезает обмен энергией между взаимодействующими модами. Видно, что вынуждающая гармоническая сила $\tilde{F} = F_0\delta(x - x_0)\delta(\varphi - \varphi_0)$ оказывает наибольшее влияние на изменение амплитуды вертикальных колебаний.

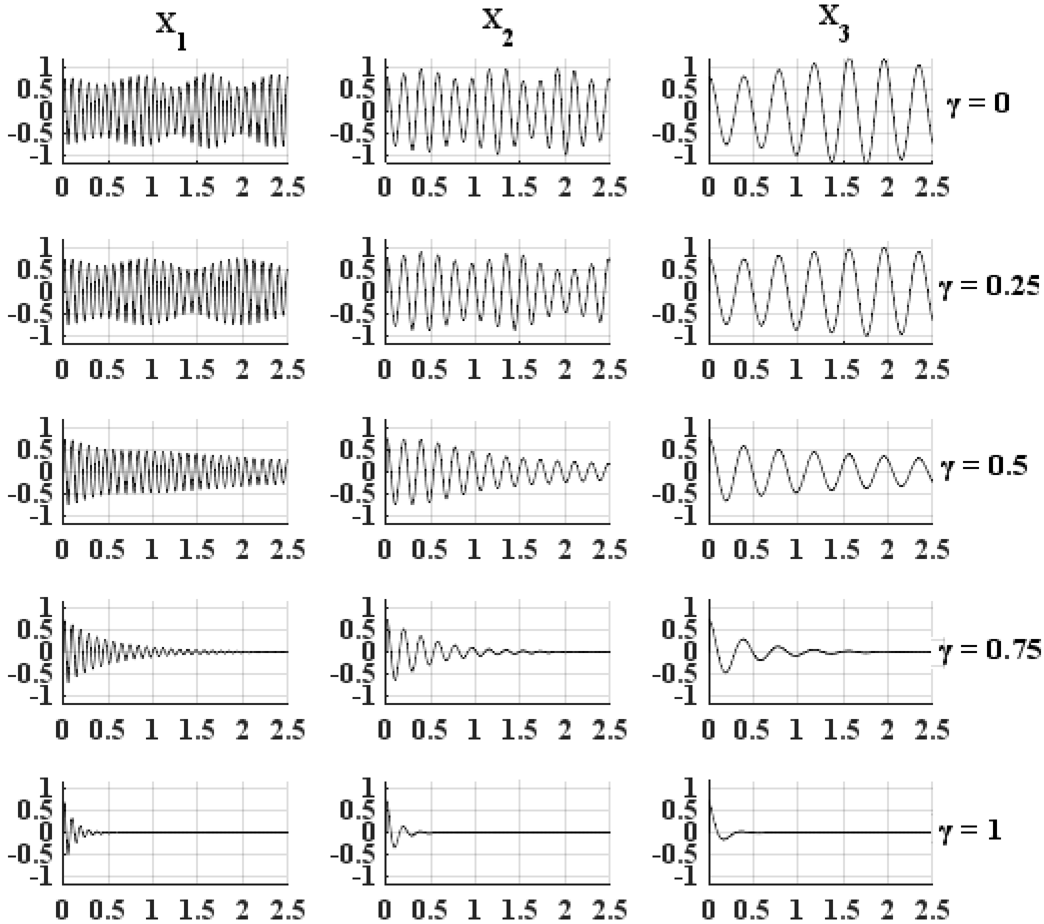

Рисунок 2 - Зависимость обобщенных перемещений от времени для вынужденных (F = 4.2, σ = 0) колебаний при различных значениях параметра дробности γ, в случае комбинационного резонанса $\Omega_1=\Omega_2-2\Omega_3$ при β_1= 13.29, β_2=0.0081, ν=0.33, Ω_1=32.9168, m_1=5, n_1=2, Ω_2=68.073, m_2=2, n_2=5, Ω_3=17.525, m_3=2, n_3=2.

На рисунке 4 показана зависимость коэффициентов σ_i и s_i (i=1,2,3) от параметра дробности γ в соответствии с соотношениями (37). На рисунке 4 проиллюстрированы все возможные значения параметров $\sigma_i = \mu_i \tau_i^{\gamma} \Omega_i^{\gamma-1} \cos\psi$ и $s_i = \mu_i \tau_i^{\gamma} \Omega_i^{\gamma-1} \sin\psi$, которые представляют собой коэффициенты затухания нелинейных колебаний с амплитудой a_i и сдвигом фазы для каждой моды колебаний. Следует обратить внимание, что коэффициенты s_i зависят от частоты колебаний и коэффициента ретардации, которые определяются заданием нелинейных амплитуд a_i с использованием производной дробного порядка. Другими словами, коэффициент демпфирования колебаний зависит от времени ретардации моды и ее собственной частоты, что согласуется с реальными данными, потому что каждая мода колебаний имеет свой собственный коэффициент затухания, и с гипотезой модального демпфирования. При стремлении параметра γ к единице, коэффициенты затухания начинают быстро возрастать, что приводит к быстрому гашению колебаний.

Из сравнений кривых, приведенных на Рисунках 2 и 3, видно, что результаты, полученные двумя различными методами, находятся в хорошем согласовании друг с другом.

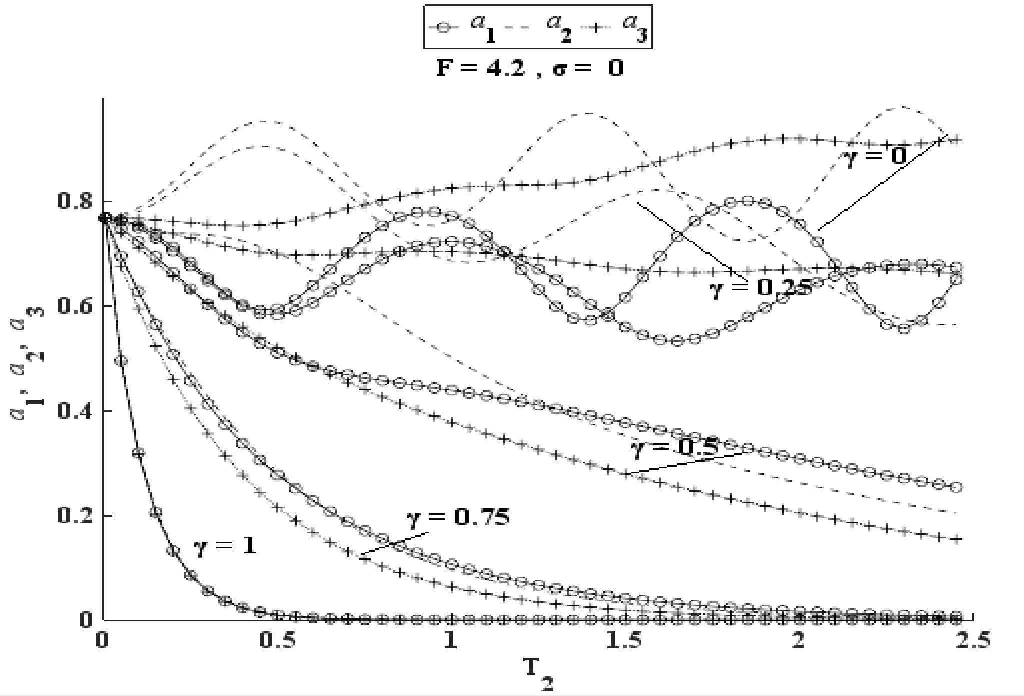

Рисунок 3 - Зависимость безразмерной амплитуды вынужденных колебаний от времени T_1 для различных значений γ при σ =0 и амплитуде вынужденной силы *F*= 4,2

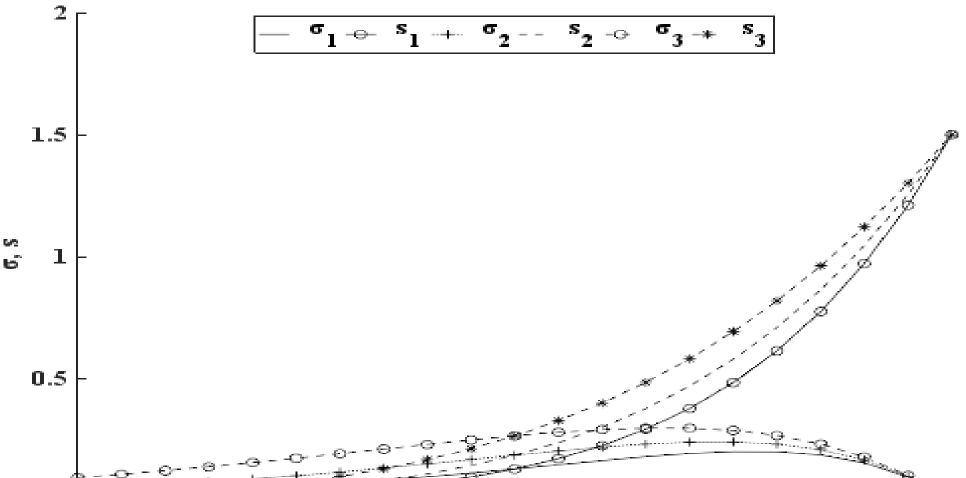

Рисунок 4 - Зависимость коэффициентов σ_i и s_i (i=1,2,3) от параметра дробности γ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты данной диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

1. Решена задача о свободных нелинейных колебаниях упругих цилиндрических оболочек в вязкой среде, демпфирующие свойства которой определяются дробными производными в случае, когда колебательные движения описываются

системой трех нелинейных уравнений со связанными линейными частями относительно трех перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях.
2. Дана классификация возможных типов комбинационных резонансов для исследуемой нелинейной динамической модели цилиндрической оболочки и разработан алгоритм их определения.
3. Аналитически получены системы шести нелинейных дифференциальных уравнений для исследования модуляции амплитуд и фаз нелинейных колебаний цилиндрических оболочек в условиях сочетания комбинационных резонансов с внешним резонансом.
4. Разработана методика численного решения нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными, описывающих динамическое поведение цилиндрической оболочки, в случае наличия внутреннего комбинационного резонанса и его сочетания с внешним резонансом и зарегистрирована.
5. Изучены все двенадцать возможных случаев комбинационного внутреннего резонанса.
6. Проведен сравнительный анализ численных и аналитических исследований свободных и вынужденных затухающих колебаний с аддитивным и разностным типами комбинационного внутреннего резонанса первого и второго рода с использованием двух различных численных методов.
7. Показано, что для свободных и вынужденных колебаний, осложненных различными комбинационными внутренними резонансами, имеют значение порядок малости вязкости и амплитуды, а также различные временные масштабы.
8. Исследовано влияние параметра дробности на характер нелинейных колебаний и на механизм перекачки энергии между взаимодействующими нелинейными модами колебаний. Показано, что перекачка энергии более активно выражена при вынужденных колебаниях.

Перспективы дальнейшей разработки темы диссертации. Методика расчета вынужденных нелинейных колебаний упругих цилиндрических оболочек в среде, демпфирующие свойства которой описываются с помощью дробной производной, может быть обобщена на модель оболочки, динамическое поведение которой описывается пятью уравнениями, учитывающими инерцию вращения и деформации поперечного сдвига.

Основные положения диссертационной работы опубликованы в следующих работах:

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и проиндексированных в международных базах Web of Science и Scopus

1. **Ajarmah B**. Numerical analysis of non-linear vibrations of a fractionally damped cylindrical shell under the additive combinational internal resonance / Ajarmah B., Shitikova M.V. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. - Vol. 14. - P. 42-58.
2. **Ajarmah B**. Numerical analysis of non-linear vibrations of a fractionally damped cylindrical shell under the conditions of combinational internal resonance / Rossikhin Yu. A., Shitikova M.V., Ajarmah B. // MATEC Web of Conferences, 2018, Vol. 148, Article ID 03006, 6 pages (проиндексировано в Web of Science и Scopus).
3. **Ajarmah B**. Nonlinear vibrations of a cylindrical shell in a fractional viscoelastic medium with combinational internal resonances of the second order / Ajarmah B.,

Shitikova M.V. // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1203 (2019) Article ID 012008, 8 pages (проиндексировано в Scopus).

4. **Ajarmah B**. Numerical analysis of nonlinear forced vibrations of a cylindrical shell with combinational internal resonance in a fractional viscoelastic medium / Ajarmah B., Shitikova M.V. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Vol. 489 (2019) Article ID: 012033, 8 pages (проиндексировано в Web of Science и Scopus).

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

5. Программный комплекс численного исследования нелинейных колебаний цилиндрических оболочек в условиях внутреннего комбинационного резонанса / Аджарма Б., Шитикова М.В. // Регистрационный номер №: 2019615163, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 9 апреля 2019 г.

Статьи и материалы конференций

6. **Ajarmah B**. Computational analysis of the new approach for studying non-Linear dynamics response of a thin fractionally damped cylindrical shell with combinational internal resonance of the second order / Rossikhin Yu.A, Shitikova M.V., Ajarmah B. // SSRN Electronic Journal, 6 pages, DOI: 10.2139/ssrn.3277699 .
7. **Аджарма Б**. Численный анализ нелинейных колебаний цилиндрических оболочек в вязкоупругой среде при наличии разностного комбинационного внутреннего резонанса / Шитикова М.В., Аджарма Б. // Материалы международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 17 - 19 декабря 2018 г. С. 997-1002. Изд-во ВГУ, 2019.
8. **Аджарма Б**. Численный анализ нелинейных колебаний цилиндрических оболочек в вязкоупругой среде при наличии комбинационного внутреннего резонанса / Аджарма Б. // Юбилейная XXX Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения, 20-23 ноября 2018, Москва. С. 274-227. ИМАШ РАН, Москва, 2019 г.
9. **Ajarmah B**. Numerical solution of non-linear vibrations of a fractionally damped cylindrical shell under the conditions of combinational internal resonance / Rossikhin Yu. A., Shitikova M.V, Ajarmah B. // Abstracts of the International Conference on Engineering Vibration, Sofia, Bulgaria, 4-7 September 2017.
10. **Ajarmah B**. Nonlinear vibrations of fractional damped cylindrical shells under the additive combinational internal resonance/ Shitikova M.V., Ajarmah B. // Book of Abstracts of the First International Nonlinear Dynamics Conference NODYCON’2019. Rome Italy, February 17-20, 2019. - P. 451-452.
11. **Ajarmah B**. Numerical study of nonlinear vibrations of fractionally damped cylindrical shells under the additive combinational internal resonance / Shitikova M. V., Ajarmah B. // Proceedings of NODYCON’2019 Rome Italy, Springer, 2019, 8 pages.

Подписано в печать 23.12.2019 г. Формат 80x64 1/16
Бумага писчая. Усл. п.л. 1,0 Тираж 120 экз. Заказ № 193

Отпечатано: отделом оперативной полиграфии ВГТУ
394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84