

На правах рукописи

Ромашина Анастасия Викторовна

**НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЛЯ
ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН
ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Тула 2019

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет».

Научный руководитель:

Трещев Александр Анатольевич
член-корреспондент РААСН, доктор
технических наук, профессор.

Официальные оппоненты:

Пеньков Виктор Борисович
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ «Липецкий
государственный технический университет»,
кафедра «Общей механики», профессор.

Крысько Антон Вадимович
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский
государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.», кафедра
«Прикладная математика и системный
анализ», профессор.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Тверской государственный
технический университет» (г. Тверь).

Защита состоится «26» ноября 2019 г. в 14-00 на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92, ауд. 12-105.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Romashina_AV/

Автореферат разослан «27» сентября 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современных конструкциях наряду с материалами, при расчетах принимаемыми за однородные и изотропные, используются для изготовления деталей и анизотропные материалы. Большинство новых и традиционных анизотропных конструкционных материалов не подчиняются классическим законам их упругопластического деформирования, основанным на гипотезе единых кривых. Их механические свойства зависят от вида напряженного состояния. Подобными свойствами обладают железобетоны, ряд полимеров, конструкционные графиты и большинство композитов.

Несмотря на уникальные механические свойства, использование таких анизотропных материалов вызывает определенные трудности у проектировщиков. В ряде случаев наблюдается потеря эксплуатационной надежности элементов, выполненных из этих материалов. Почти всегда это происходит либо по вине проектировщика, который не полностью осведомлен об усложненных свойствах, либо по вине изготовителя, у которого отсутствует информация о подлинных особенностях таких материалов.

Зависимость деформационных характеристик от вида напряженного состояния для рассматриваемых анизотропных материалов достаточно сложна и не сводится только к неодинаковому их поведению при одноосных растяжении и сжатии. Экспериментально установлено, что деформации большинства подобных материалов могут зависеть не только от знаков возникающих напряжений, но и от их количественных соотношений. Из этого следует, что классические теории не могут адекватно оценить напряженно-деформированные состояния материалов, обладающих перечисленными особенностями.

Необходимо также отметить, что технологические, конструктивные, экономические, экологические и другие требования обуславливают необходимость устройства отверстий различных форм, вырезов, полостей, пазов, выточек и других нарушений целостности элементов конструкций, усложняющих расчет. Это смотровые и загрузочные люки химического оборудования, перфорированные барабаны ядерных реакторов, диски газотурбинных двигателей, лазы и люки в палубных перекрытиях корабля, тоннели, скважины и прочее. В процессе эксплуатации несплошности становятся местами резких всплесков напряжений. Концентрация напряжений является одним из главных факторов, влияющих на прочность перфорированных элементов.

В настоящее время нет единого способа решения задач о пластинах с концентраторами из анизотропных разносопротивляющихся материалов, поэтому исследование влияния различных типов концентраторов на поведение элементов конструкций, из таких материалов, а также поиск путей снижения концентрации напряжений представляется одной из актуальных задач современной механики.

Объект исследования – тонкие перфорированные пластины из ортотропных разносопротивляющихся материалов, работающие в условиях воздействия равномерно распределенной растягивающей или сжимающей нагрузки.

Предмет исследования – напряженно-деформированное состояние (НДС) пластин, ослабленных отверстиями, изготовленных из материалов с усложненными свойствами при плоском напряженном состоянии.

Целью работы является построение математической модели определения НДС тонких ортотропных пластин, выполненных из материалов, механические

характеристики которых чувствительны к виду напряженного состояния, имеющих отверстия различных конфигураций в условиях плоского напряженного состояния.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи работы:**

1. провести анализ известных экспериментальных данных по влиянию отверстий различных форм на изменение НДС пластин при плоском напряжении и существующих теоретических работ по этому влиянию на НДС конструкций из разносопротивляющихся материалов;

2. адаптировать определяющие соотношения, представленные в работах Н.М.Матченко и А.А.Трещева, для класса задач о плоском напряженном состоянии, связанных с необходимостью определения параметров НДС пластин из разносопротивляющихся ортотропных материалов, имеющих ослабления в виде отверстий;

3. получить системы разрешающих уравнений задач о плоском напряженном состоянии для ортотропных разносопротивляющихся материалов в декартовой системе координат;

4. разработать конечно-элементную модель для плоского напряженного состояния пластин с ослаблениями из материалов с усложненными свойствами;

5. разработать и реализовать алгоритм расчета параметров НДС тонкой пластины с отверстием с учетом ортотропии и разносопротивляемости ее материала в рамках процедуры пошаговых нагружений;

6. исследовать влияние величины прикладываемой нагрузки на значения напряжений при растяжении или сжатии тонкой ортотропной пластины с отверстием, выполненной из разносопротивляющегося материала;

7. используя разработанную математическую модель и ее программную реализацию, выполнить апробацию модели путем решения серии тестовых задач;

8. провести качественный и количественный анализ полученных результатов;

9. сравнить результаты решения плоских задач по деформированию перфорированных пластинчатых элементов из ортотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния, с аналогичными данными, полученными на основе наиболее апробированных и применяемых моделей.

Научная новизна работы заключается в следующих результатах, выносимых на защиту:

1. разработана математическая модель плоского напряженного состояния пластин с различными отверстиями из ортотропных разносопротивляющихся материалов;

2. приведены конечно-элементные модели анализа НДС перфорированных пластинчатых элементов из ортотропных разносопротивляющихся материалов;

3. разработан и реализован алгоритм расчета НДС перфорированных ортотропных пластин, подверженных растяжению или сжатию;

4. получены результаты расчетов, демонстрирующие новые количественные эффекты влияния концентраторов напряжений на НДС пластин, изготовленных из ортотропных разносопротивляющихся материалов и находящихся под воздействием внешней растягивающей или сжимающей нагрузки.

Теоретическая значимость работы:

1. выполнен анализ существующих экспериментальных данных и теоретических работ по влиянию отверстий различных конфигураций на изменение параметров напряженно-деформированного состояния пластин из анизотропных материалов;

2. разработана математическая модель плоского напряженного состояния ослабленных пластин из ортотропных разносопротивляющихся материалов, которая реализована при решении ряда прикладных задач о пластинах с концентраторами напряжений.

Практическая значимость работы:

1. полученные разрешающие уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние тонких ортотропных ослабленных отверстиями пластин, выполненных из разносопротивляющегося материала, могут быть использованы для расчета широкого круга конструктивных элементов, таких как: стенки химических аппаратов с технологическими отверстиями, ядерных реакторов и газотурбинных двигателей, палубные перекрытия корабля с люками, элементы покрытий зданий и сооружений;

2. программная реализация алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния пластинчатых перфорированных элементов может использоваться в инженерной практике для проведения проектных и поверочных расчетов конструкций с учетом зависимости деформационных характеристик их материалов от вида напряженного состояния;

3. анализ распределения напряжений и деформаций, полученных по уточненной теории, поможет однозначно ответить на вопрос о наличии зоны разрушения, её расположении, форме, размерах, что окажется ценным при установлении работоспособности перфорированных пластинчатых элементов конструкций;

4. материалы диссертационного исследования могут быть использованы в рамках выполнения учебных проектов по дисциплине «Теория деформирования разносопротивляющихся материалов» для магистрантов, проходящих подготовку по направлению 08.04.01 «Строительство», а также в рамках учебных курсов для аспирантов.

Методы исследования, использованные в работе:

1. общепринятые фундаментальные законы механики деформируемого твердого тела;

2. метод конечных элементов;

3. метод пошаговых нагружений;

4. метод переменных параметров упругости И.А. Биргера.

Достоверность представленных в исследовании положений и выводов подтверждается:

1. использованием общепринятых допущений и гипотез, базирующихся на фундаментальных положениях механики деформируемого твердого тела;

2. использованием апробированных и проверенных на экспериментальных данных теоретических и эмпирических соотношений; корректным применением известных математических методов;

3. реализацией модели численно на ЭВМ, с помощью метода конечных элементов с оценкой точности решения;

4. хорошим согласованием результатов расчета параметров напряженно-деформированного состояния ослабленных пластин из ортотропных материалов,

полученных с помощью разработанной прикладной программы и данных численного эксперимента, проведенного в САПР ANSYS 11.0, ANSYS 17.2 без учета разносопротивляемости материалов.

Апробация работы: основные результаты диссертации неоднократно представлены на региональных, всероссийских и международных конференциях: XIV, XV, XVI, XVII, XVIII международные НТК «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии» (2013, 2014, 2015, 2016, 2017 г., Тула); VIII региональная магистерская научной конференция (2013 г., Тула); международная НПК молодых ученых и студентов «Опыт прошлого – взгляд в будущее» (2013 г., Тула); X Международная научно-практическая конференция молодых исследователей «Содружество наук. Барановичи-2014» (2014 г., Барановичи); VIII, IX региональные молодёжные научно-практические конференции Тульского государственного университета «Молодёжные инновации» (2014, 2015 г., Тула); VIII международный симпозиум «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела» посвященного 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова (9-11 декабря 2015 г., Тверь); XIII международная конференция по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики» (2017 г., Тула); круглый стол с международным участием «Современные вопросы механики сплошных сред-2017» (2017 г., Чебоксары); 1-я всероссийская конференция с международным участием «Цифровые средства производства инженерного анализа» (2017 г., Тула); XII научно-техническая конференция молодых специалистов EuroChem (2018 г., Сочи). По результатам конференций опубликованы тезисы и тексты докладов.

В полном объеме диссертация докладывалась 24 октября 2018 г. на научном семинаре по МДТТ при ФГБОУ ВО «Тульском государственном университете» под руководством доктора физ.-мат. наук, проф. А.А. Маркина, а также на расширенном заседании кафедры «Строительства, строительных материалов и конструкций» ФГБОУ ВО «Тульского государственного университета» 11 апреля 2019 года.

Публикации. Общее количество публикаций по теме работы – 22, в том числе количество публикаций в изданиях из перечня ВАК РФ – 2, статей, входящих в международную базу цитирования Scopus – 1, публикации в иных научных журналах – 4, тезисы и полные тексты докладов на конференциях – 15.

Реализация результатов работы состоялась при выполнении исследований по госбюджетной НИР № 07-16 «Разработка технологий новых строительных материалов и теорий расчета конструкций». Использование результатов работы подтверждено актами о внедрении методик расчета и программной продукции в проектную деятельность ООО «Строительное проектирование», АО «Тулагипрохим».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка литературы и приложений. Объем работы составляет 116 страниц основного текста, включающих 32 рисунка, списка литературы из 257 наименований и приложений на 19 страницах. Общий объем работы — 171 страница.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлено обоснование актуальности темы исследования, обозначены предмет и объект исследования, поставлены цели и задачи работы, указаны используемые методы, приведена теоретическая и практическая значимость работы, продемонстрирована достоверность и апробация результатов, сформулированы новые научные результаты, которые выносятся на защиту.

В первом разделе приводится обзор известных экспериментальных исследований по деформированию анизотропных разносопротивляющихся материалов различной структуры, анализируются имеющиеся подходы к аналитическому описанию материалов с усложненными свойствами. В рамках данного исследования рассмотрены модели деформирования анизотропных разносопротивляющихся материалов следующих авторов: С.А.Амбарцумяна, F.Tabaddor, R.M.Jones и D.A.R.Nelson, С.W.Bert и J.N.Reddy, Е.В.Ломакина, А.В.Березина и П.Л.Пономарева, А.А.Золочевского, Н.М.Матченко - А.А.Трещева.

Приводится обзор существующих работ по определению степени влияния ослаблений на напряженно-деформированное состояние пластин с ними. Здесь рассматриваются методики определения НДС пластин с отверстиями для изотропных (G.Kirsch, G.V. Jeffery, R.D.Mindlin, Г.В.Колосов, Н.И.Мухелишвили, Д.И.Шерман, Г.Я.Попов), анизотропных (С.Г.Михлин, А.С. Космодамианский, А.С.Нескородев, Г.И.Львов, Н.М.Дариязаде, Г.А. Ванин, Г.Н.Савин, С.Г.Лехницкий, К.Линг, Н.Г.Франклин, В.Н.Максименко, В.Б.Пеньков, А.В.Крысько, В.А.Крысько, J.Awrejcewicz), изотропных разносопротивляющихся материалов (А.В.Неделин, А.А.Трещев), а также решения данного класса задач с помощью метода фотоупругости (Р.Петерсон, М.Фрохт, А.Я.Александров, Г.Л.Хесин).

На основании обзора обосновывается объективный вывод, что большинство существующих определяющих соотношений для разносопротивляющихся материалов и методик учета явления концентрации напряжений около отверстий имеют ряд недостатков, не позволяющих с достаточной точностью описать НДС перфорированных пластин с из анизотропных разносопротивляющихся материалов.

Во втором разделе описывается подход к построению определяющих соотношений для анизотропных разносопротивляющихся материалов А.А.Трещева, описываются принципы вычисления констант уравнений состояния. Этот вариант соотношений базируется на пространстве нормированных напряжений с заданным вектором полного напряжения S .

Напряженное состояние в точке тела в нормированном пространстве тензора напряжений количественно предложено определять модулем вектора полных напряжений $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$, а качественно – нормированными напряжениями $\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$, которые связаны условием нормировки $\alpha_{ij}\alpha_{ij} = 1$, где $i, j = 1, 2, 3$.

Уравнения связи деформаций и напряжений принимаются в форме, близкой к обобщенному закону Гука для анизотропных материалов:

$$e_{ij} = C_{ijkm}(\alpha_{ij})\sigma_{km}, \quad i, j, k, m = 1, 2, 3, \quad (1)$$

Далее в работе рассматриваются ортотропные материалы, поэтому закон деформирования (1) представлен в виде:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\
 e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22} + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\
 e_{33} &= [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22} + (A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33}, \\
 \gamma_{12} &= J_{1212} \tau_{12}; \quad \gamma_{13} = J_{1313} \tau_{13}, \quad \gamma_{23} = J_{2323} \tau_{23}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Из анализа приведенных уравнений состояния (2) следует, что они инвариантны по отношению к ортогональным преобразованиям, соответствующим классу симметрии ортотропных материалов, а для определения констант достаточно проведения простейших опытов по одноосному растяжению, сжатию в направлении главных осей анизотропии и на сдвиг в главных плоскостях ортотропии. Выражения для определения технических констант записываются в виде:

$$\begin{aligned}
 A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-) / 2; & A_{ijij} &= -(v_{ij}^+ / E_j^+ + v_{ij}^- / E_j^-) / 2; & J_{ijij} &= 1/G_{ij}; \\
 B_{kkkk} &= (1/E_k^+ - 1/E_k^-) / 2; & B_{ijij} &= -(v_{ij}^+ / E_j^+ - v_{ij}^- / E_j^-) / 2,
 \end{aligned}$$

где $v_{ij}^+ / E_j^+ = v_{ji}^+ / E_i^+$, $v_{ij}^- / E_j^- = v_{ji}^- / E_i^-$; $E_k^\pm, E_i^\pm, E_j^\pm$ – модули упругости при растяжении и сжатии в направлениях соответствующих главным осям ортотропии, v_{ij}^\pm, v_{ji}^\pm – коэффициенты поперечной деформаций при растяжении и сжатии в направлениях соответствующих главным осям ортотропии, G_{ij} – модули сдвига в главных плоскостях ортотропии. Базовые опыты, проводимые под руководством профессора Зубчанинова В.Г его учениками Охлопковым Н.Л., Гараниковым В.В, Гульятеевым В.И. и Алексеевым А.А. в лаборатории ТГТУ позволяют определить все материальные параметры конструкционного материала для описания процесса его деформирования.

В диссертации выполнена оценка единственности решения, которая связана с устойчивостью определяющих соотношений в малом по Друккеру.

Приводится сопоставление принятых определяющих соотношений с результатами экспериментальных исследований по деформированию ряда конструкционных материалов с усложненными свойствами при простом нагружении, заимствованное из работ Н.М.Матченко и А.А.Трещева. Хорошая их согласованность подтверждает адекватность и достоверность принятых определяющих соотношений.

В третьем разделе изложена общая постановка задачи о плоском напряженном состоянии для ортотропных разносопротивляющихся материалов. Исходя из общих положений теории деформирования упругих структурно ортотропных разносопротивляющихся тел, приведенной в разделе 2, и основных положений и законов классической механики деформируемого твердого тела, строятся разрешающие уравнения, описывающие напряженно-деформированные состояния тонких пластин при плоском напряженном состоянии.

Рассматривается равновесие тонкой пластины толщиной h в направлении оси X_3 , конечными размерами в направлении двух основных осей координат X_1, X_2 , подверженной действию нагрузок в своей плоскости, приложенных к внешнему контуру и равномерно распределенных по толщине.

Функции, описывающие напряженно-деформированное состояние пластинки, зависят только от координат X_1 и X_2 декартовой системы координат. Вектор перемещений

имеет две ненулевые составляющие $u_1 = u$ и $u_2 = v$ в направлении соответствующих осей.

Уравнения связи между основными компонентами тензора малой деформации и перемещениями для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$e_{11} = u_{,1}; \quad e_{22} = u_{,2}; \quad \gamma_{12} = u_{,2} + u_{,1}. \quad (3)$$

Уравнения связи между компонентами тензора деформаций и напряжений применительно к условиям плоского напряженного состояния, с учетом зависимостей (2), в форме метода переменных «параметров упругости» Биргера приводятся к виду:

$$\{e\} = [C]\{\sigma\} \quad \text{или} \quad \{\sigma\} = [D(\alpha_{ij})]\{e\}, \quad (4)$$

где $\{e\} = \{e_{11} e_{22} \gamma_{12}\}^T$ – вектор-столбец основных деформаций; $[C]$ – матрица податливостей ортотропного разносопротивляющегося материала, зависящих от вида напряженного состояния; $\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \sigma_{22} \tau_{12}\}^T$ – вектор-столбец ненулевых напряжений, $[D(\alpha_{ij})] = [C]^{-1}$ – матрица жесткостей материала, зависящая от вида напряженного состояния.

Компоненты матрицы податливостей $[C]$ определяются через тензорные параметры:

$$C_{11} = A_{1111} + B_{1111} \cdot \alpha_{11}; \quad C_{12} = C_{21} = A_{1122} + B_{1122} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22}); \quad C_{13} = C_{31} = C_{32} = C_{23} = 0; \quad (5)$$

$$C_{22} = A_{2222} + B_{2222} \cdot \alpha_{22}; \quad C_{33} = J_{1212} = 1 / G_{12},$$

где A_{ijkm} , B_{ijkm} , J_{ijij} – константы, определяемые из экспериментов по деформированию образцов материала, приведенных в работах Н.М.Матченко и А.А.Трещёва.

Принимая за основу те или иные физические соотношения, мы не изменяем уравнения статико-геометрической природы. Основные положения и зависимости классической механики деформируемого твердого тела остаются справедливыми. Уравнения равновесия для данной задачи при отсутствии объемных сил представим следующим образом:

$$\sigma_{11,1} + \tau_{12,2} = 0; \quad \tau_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0. \quad (6)$$

Сохраняется одно из уравнений неразрывности деформаций Сен-Венана:

$$e_{11,22} + e_{22,11} = \gamma_{12,12} \quad (7)$$

Совокупность уравнений (3), (4), (7) можно решить по методу сил или по методу перемещений. Для метода сил третье уравнение из разрешающей системы после ряда подстановок примет вид:

$$C_{1212} \cdot \tau_{12,12} + C_{1212,12} \cdot \tau_{12} + C_{1212,2} \cdot \tau_{12,1} + C_{1212,1} \cdot \tau_{12,2} = (C_{1111,22} + C_{1122,11})\sigma_{11} +$$

$$+(C_{1122,22} + C_{2222,11})\sigma_{22} + C_{1111} \cdot \sigma_{11,22} + C_{1122}(\sigma_{11,11} + \sigma_{22,22}) + C_{2222} \cdot \sigma_{22,11} +$$

$$+2(C_{1111,2} \cdot \sigma_{11,2} + C_{1122,2} \cdot \sigma_{22,2} + C_{1122,1} \cdot \sigma_{11,1} + C_{2222,1} \cdot \sigma_{22,1}) \quad (8)$$

Для метода перемещений в результате преобразований получаем два уравнения с двумя неизвестными перемещениями:

$$D_{11}u_{,11} + D_{11,1}u_{,1} + D_{12}v_{,12} + D_{12,1}v_{,2} + D_{33}(u_{,22} + v_{,12}) + D_{33,2}(u_{,2} + v_{,1}) = 0;$$

$$D_{22}v_{,22} + D_{22,2}v_{,2} + D_{12}u_{,12} + D_{12,2}u_{,1} + D_{33}(u_{,12} + v_{,22}) + D_{33,1}(u_{,2} + v_{,1}) = 0, \quad (9)$$

где D_{ij} – компоненты матрицы жесткостей материала.

Для однозначности решения задачи разрешающие уравнения дополняются необходимыми граничными условиями. При статических граничных условиях на контуре пластинки имеется:

$$p_{1v} = \sigma_{11} \cos(vx_1) + \tau_{12} \cos(vx_2); \quad p_{2v} = \sigma_{22} \cos(vx_2) + \tau_{12} \cos(vx_1), \quad (10)$$

где $\cos(vx_k)$ – косинусы углов между осями x_k и внешней нормалью к площадке, на которую действуют усилия с проекциями p_{kv} , ($k = 1, 2$).

В четвертом разделе на основе метода конечных элементов и метода пошаговых нагружений строится пошагово-итерационный алгоритм для решения прикладных задач об определении НДС тонкой пластины с отверстием, выполненной из ортотропного разносопротивляющегося материала, находящейся под действием внешней равномерно распределенной нагрузки.

Принимается плоская конечно-элементная модель с двумя степенями свободы в узле. Область, ограниченная контуром пластинки, покрывается треугольными симплекс конечными элементами. В местах ожидаемой концентрации напряжений, т. е. около отверстий сетка конечных элементов сгущается.

Перемещения в произвольной точке элемента $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$ представляются через перемещения его узлов $\{U\}$:

$$\{u \quad v\}^T = [N]\{U\}, \quad (11)$$

где $\{U\} = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k\}^T$; i, j, k – номера узлов конечного элемента.

Поля перемещений в пределах треугольного элемента определяются выражениями:
 $u = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2$; $v = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 x_2$.

Функции формы $[N]$ принимаются в виде:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $N_i = (a_i + b_i x_1 + c_i x_2) / (2\Delta)$, ($i \rightarrow j \rightarrow k$), Δ – площадь треугольного элемента;

$a_i = x_{1j} x_{2k} - x_{1k} x_{2j}$; $b_i = x_{1i} - x_{2k}$; $c_i = x_{1k} - x_{2j}$.

Зависимости между деформациями и перемещениями узлов элемента записываются следующим образом:

$$\{e\} = [B]\{U\}, \quad (13)$$

$$\text{где } [B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}; \quad 2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{vmatrix}.$$

Уравнение связи между напряжениями и деформациями в матричной форме принимается в виде (4).

Общая формулировка принятого МКЭ основана на вариационном принципе возможных перемещений, сформулированном Лагранжем. Потенциальная энергия тела определяется разностью внутренней энергии деформации W и работы внешних сил: $\Pi = W - A$. Энергия деформации элемента объема dV определяется формулой

$dW = \{e\}^T \{\sigma\} / 2$. Тогда выражение работы внешних сосредоточенных и поверхностных сил без учета массовых сил записывается в виде:

$$A = \{U\}^T \{P\} + \int_S \{U\}^T [N]^T \{p\} dS, \quad (14)$$

где $\{p\}$ – вектор внешней поверхностной нагрузки в проекциях на декартовы оси координат; S – контур внешней границы конечного элемента.

Потенциальная энергия конечного элемента с учетом (13) и (6) сводится к виду:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{U\}^T [B]^T [D(\sigma)] [B] \{U\} dV - \{U\}^T \{P\} - \int_S \{U\}^T [N]^T \{p\} dS. \quad (15)$$

После минимизации функционала (15) по вектору $\{U\}$ и приведения распределенной поверхностной нагрузки к сосредоточенным узловым силам, для плоского напряженного состояния конечного элемента имеем общее уравнение МКЭ:

$$[K] \{U\} = \{P\}, \quad (16)$$

где $[K] = [B]^T [D(\sigma)] [B] h \Delta$ – матрица жесткости конечного элемента.

Сложение матриц жесткости отдельных конечных элементов приводит к получению глобальной матрицы жесткости. Векторы $\{U\}$ и $\{P\}$, рассматриваются как неизвестные узловые перемещения и внешние узловые нагрузки на пластину.

Решение системы алгебраических уравнений рассматриваемой задачи с учетом полученной глобальной матрицы жесткости и соответствующих граничных условий производится методом Гаусса. Исходная нелинейная задача решается методом «переменных параметров упругости» в сочетании методом пошаговых нагружений.

Точность полученного решения зависит от размера шага нагружения. Шаг по нагрузке на начальных этапах нагружения принимается равным $0,05R$, а по мере приближения напряжений на краю отверстия к R – равным $0,005R$, где R – предел прочности материала на осевое растяжение или сжатие в зависимости от решаемой задачи. На каждом шаге нагружения параметры НДС твердого тела уточняются итерационно с проверкой сходимости вычислительного процесса. Сходимость итерационных процедур оценивалась по величинам узловых перемещений смежных этапов приближения:

$$\left| (\{U\}^k - \{U\}^{k-1}) / \{U\}^{k-1} \right| < \delta_u, \quad (17)$$

где k – номер итерации; δ_u – устанавливаемая точность (принимается $\delta_u = 0,001$).

Сходимость конечно-элементного метода проверяется путем сравнения результатов расчета при разбишке тела на n элементов и на $2n$. Если разница в результатах расчета удовлетворяет точности, то окончательно для анализа принимается n -элементная модель, иначе производится сравнение $2n$ -элементной модели с $4n$ -элементной и так далее до достижения необходимой точности.

Для большей гарантии обеспечения корректности работы прикладной программы были проведены расчеты на одноосные сжатие и растяжение пластин с отверстиями из классических ортотропных материалов. Результаты расчета сопоставлялись с соответствующими результатами, полученными с помощью конечно-элементного пакета ANSYS Mechanical APDL 17.2.

В пятом разделе на основе разработанной математической модели, приведенной в предыдущих главах, с помощью численной реализации в среде MATLAB решается ряд

конкретных задач по определению НДС тонких перфорированных пластин из ортотропных разносопротивляющихся материалов, находящихся под воздействием равномерно-распределенной нагрузки в плоскости. Схемы расположения отверстий и приложения нагрузок приведены на рис. 1.

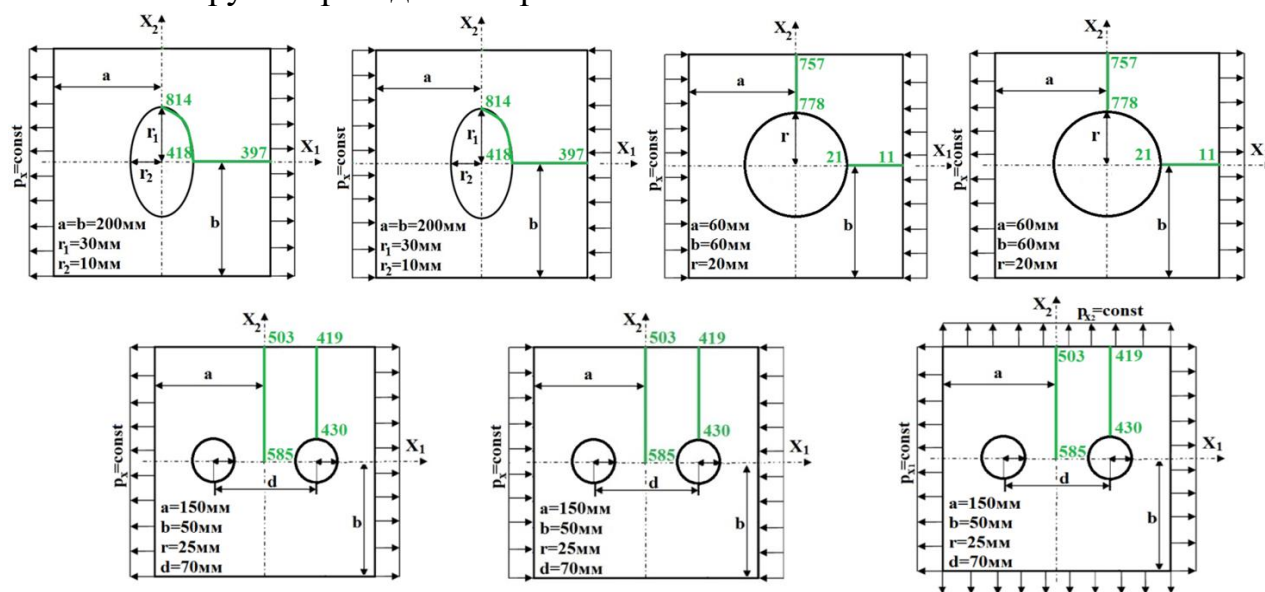


Рис. 1. Схемы тестовых задач

Механические характеристики используемых для расчета трехармированных тканых полимеров ПЗ6-50 и ПЗ7-52 приведены в диссертации. Характеристики приняты на основании известных экспериментальных данных, приведенных в работах А.В. Розе.

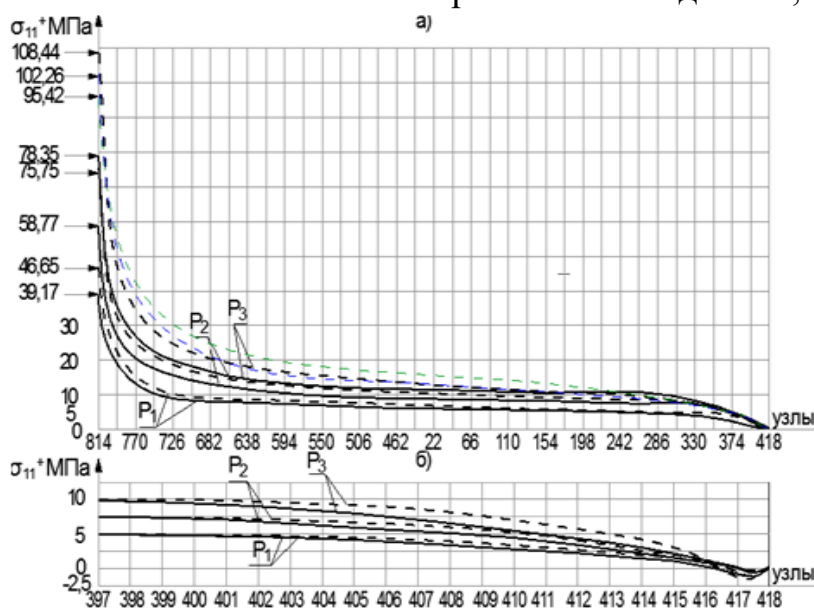


Рис. 2 - σ_{11} для пластин с эллиптическим отверстием при растяжении: а) по узлам 814-22-418; б) 397-418;

Исследуется влияние разносопротивляемости, а также приводится сравнение с решениями, полученными на основе различных моделей разномодульной теории упругости анизотропных материалов. Основные результаты решения тестовых задач для пластин из материала ПЗ6-50 с центральным круглым, центральным эллиптическим отверстиями, а также пластин со спаренными отверстиями представлены в пятом разделе диссертации.

Чтобы оценить влияние усложненных механических свойств материала ПЗ6-50 на разных уровнях их проявления были приняты 3 характерные уровня нагрузки. Для графиков, представленных на рис. 2а, 2б нагрузки равны: $P_1 = 5$ МПа, $P_2 = 7,5$ МПа, $P_3 = 10$ МПа. Для графиков, представленных на рис. 3а, 3б нагрузки равны: $P_1 = -6$ МПа, $P_2 = -7,0$ МПа, $P_3 = -14$ МПа. Сплошным кривым соответствует классическое решение для однородных ортотропных материалов, штриховым – решения, полученные на основе разработанной

математической модели, которая учитывает разносопротивляемость. Синими пунктирными линиями показано решение, полученное с использованием соотношений С.В. Bert и J.N. Reddy, а зелеными штрихпунктирными - соотношений С.А.Амбарцумяна.

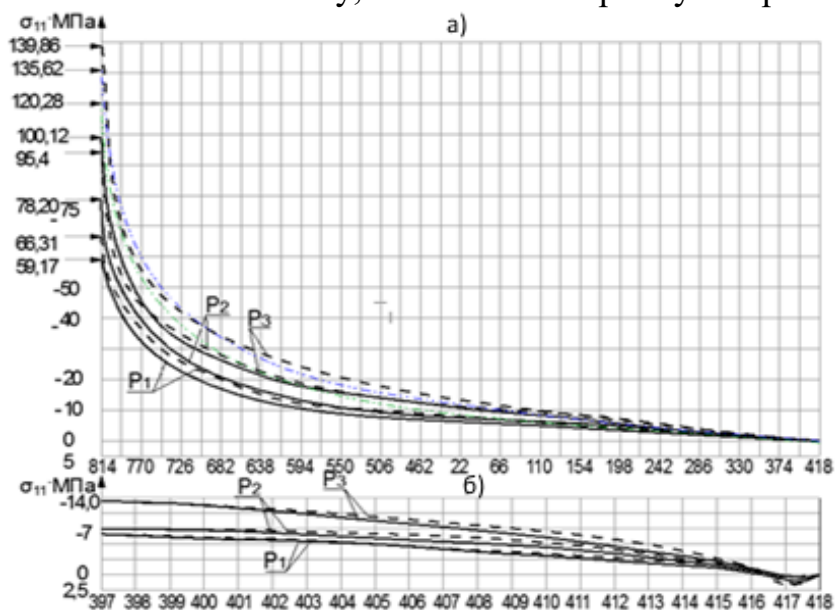


Рис. 3- σ_{11} для пластины с эллиптическим отверстием при сжатии: а) по узлам 814-22-418; б) 397-418.

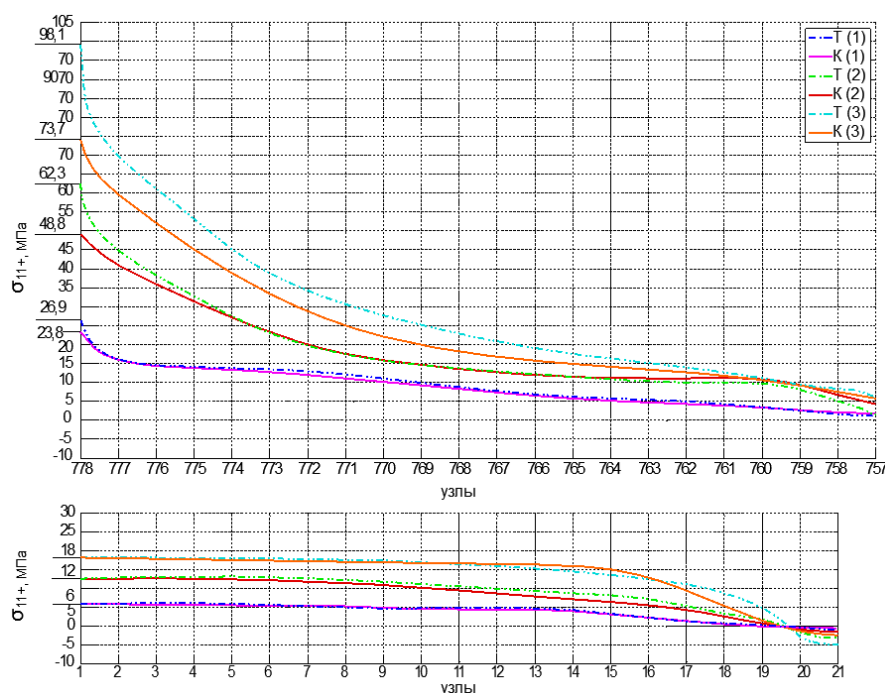


Рис. 4 - σ_{11} для пластины с круглым отверстием при растяжении: а) по узлам 778-757; б) 1-21.

нагрузки влияние разносопротивляемости полимера на распределение напряжений прослеживается более явно и становится существенным.

Разница напряжений σ_{22} в аналогичной зоне может достигать 42,3%, но величины этих напряжений существенно ниже σ_{11} (в 1,8 - 3 раза). Отличие напряжений τ_{12} при растяжении от данных классической теории достигает 29,7 %.

Для этих моделей отличия напряжений на краю отверстия составляют 12,7% и 5,9% при растяжении и 14,1% и 3,1% при сжатии, соответственно.

Для задачи о растяжении пластины с круглым отверстием также были приняты 3 характерные уровня нагрузки, обозначенные на графиках цифрами в скобках: 1 – $P_1 = 6$ МПа, 2 – $P_2 = 12$ МПа, 3 – $P_3 = 18$ МПа. Буквенные обозначения на графиках соответствуют: Т – решению с учётом разносопротивляемости, К – классическому решению.

Результаты решения задачи для пластины из материала ПЗ6-50, представленные на рисунке 4 показывают, что начальных этапах нагружения интенсивностью P_1 при деформировании слабо проявляются свойства разносопротивляемости полимера ПЗ6-50.

Около отверстия, непосредственно в зоне концентрации напряжений разница в значениях напряжений σ_{11} при уровне нагрузки P_1 не превышает 13,03 %, при P_2 – 27,66 %, при P_3 – 33,12 %. По мере увеличения действующей

В заключении приведены основные результаты и выводы по работе.

В приложениях содержатся основные результаты решения задач о деформировании тонких пластин с круглым отверстием для различных направлений для ортотропного полимера ПЗ2-57 с учетом и без учета его разносопротивляемости, а также технические акты внедрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задачи типа Кирша, как и решение других инженерных задач для пластин с концентраторами напряжений нуждается в применении надежных определяющих соотношений, поэтому в работе при построении модели было принято решение использовать определяющие соотношения в нормированных напряжениях. Они позволяют наиболее полно и адекватно описать поведение ортотропных разносопротивляющихся материалов, свободны от ограничений на некоррелируемые константы материалов, а также при ряде преобразований легко приводятся к определяющим соотношениям других авторов.

На основе принятой модели деформирования ортотропных разносопротивляющихся материалов, был решен ряд прикладных задач. Полученные в работе результаты указывают на то, что рассмотренные определяющие соотношения для деформируемых материалов с неклассическими свойствами и ориентированные на их использование численные методы решения могут служить удовлетворительной основой для исследования деформирования сложных элементов конструкций, выполненных из ортотропных разносопротивляющихся материалов.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Получены разрешающие уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние ослабленных отверстиями пластин, выполненных из ортотропных разносопротивляющихся материалов и испытывающих плоское напряженное состояние.

2. Разработана математическая модель, ориентированная на решение задач по исследованию НДС перфорированных пластинчатых элементов конструкций, выполненных из ортотропных разносопротивляющихся материалов и подверженных различным видам нагружения при плоском напряженном состоянии. В основу этой модели положен метод конечных элементов.

3. С использованием разработанного алгоритма и его реализации на ПК решены задачи по определению характеристик НДС при разных плоских напряженных состояниях и для пластин с различными ослаблениями из рассматриваемых материалов.

4. Произведено сравнение результатов расчета, полученных в рамках предложенной модели с результатами классического решения для ортотропных материалов, а также с данными по наиболее применяемым и апробированным моделям разносопротивляющихся материалов. Данные сравнения подтверждают реальность и физическую непротиворечивость построенной модели.

5. В результате решения задач о пластинах с концентраторами установлено, что учет структурной ортотропии материала в сочетании с зависимостью его механических характеристик от вида напряженного состояния вносит существенные изменения в картину напряженно-деформированного состояния перфорированных пластин по сравнению с классическими теориями механики деформируемого твердого тела,

особенно в зонах концентраторов напряжений. Для рассмотренных в работе пластин из трехармированных тканых полимеров ПЗ6-50 и ПЗ2-57 учет влияния вида напряженного состояния даёт отличие нормальных напряжений от классического решения в пределах 17 – 23 %, но в отдельных точках контуров отверстий может достигать 34 – 53 %. Отличие касательных напряжений от классического решения составляет до 24,5 %. Стоит отметить, что для исследуемых в работе материалов отношение модулей упругости и коэффициентов Пуассона по направлениям составляет всего 1,6 – 1,7 и 1,3 – 1,5, соответственно. Для материалов с большей разницей между перечисленными характеристиками расхождение решения с учетом разносопротивляемости от классического для ортотропного материала будет гораздо больше полученных.

6. Получено новое решение научно-технической задачи механики деформируемого твердого тела. Оно состоит в построении математической модели, алгоритма решения и его реализации, необходимых для решения задач по исследованию НДС перфорированных пластин, выполненных из ортотропных разносопротивляющихся материалов, работающих в условиях механического нагружения в своей плоскости.

7. Учет влияния вида напряженного состояния на работу пластин в совокупности с учетом эффекта концентрации напряжений является необходимым, так как позволяет получить значительно более точные картины НДС конструкции, сравнительно с результатами, вытекающими из классических методик.

Перспективы дальнейшей разработки темы диссертации. В рамках данной работы в качестве тестовых задач рассмотрены пластины с центральным или симметричным расположением отверстий. С целью расширения области применимости предлагается рассмотреть другие формы, комбинации и вариации расположения отверстий относительно центра пластин. Это позволит рациональнее проектировать пластинчатые элементы, предсказывать поведение конструкции в целом. В дальнейшем, легко расширить спектр решаемых задач за счет корректировки математической модели и распространения на плоскую деформацию.

По теме диссертации опубликовано 22 печатные работы, основными из которых являются:

(публикации в изданиях, включенных в перечень ВАК):

1. Ромашина, А.В. Концентрация напряжений в пластине из ортотропного разносопротивляющегося материала. / А.В. Ромашина, А.А. Трещев // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.* - 2017. - №6-(326). - С. 4-12.

2. Ромашина, А.В. НДС пластины из материала с усложненными свойствами и с концентратором напряжений эллиптического типа / А.В. Ромашина, А.А. Трещев // *Строительная механика и расчет сооружений.* – 2018. – №3. – С. 24-29

(в изданиях, утвержденных ВАК, при этом включенных в международную реферативную базу данных и систем цитирования Scopus):

3. Romashina, A.V. Concentration of stress on holes in a plate of different resistant material / A.V. Romashina, L.N Shafigullin, A.A. Treschev, V.T. Erofeev // *Astra Salvensis.* – 2017. – N2. – pp. 213-225.

(публикации в других изданиях):

4. Ромашина, А.В. Напряженно-деформированное состояние элементов строительных конструкций с технологическими отверстиями, изготовленных из материалов с усложненными свойствами / А.В. Ромашина, А.А. Трещев// Транспортное строительство. – 2018. – №10. – С. 20-22

5. Ромашина, А.В. Напряженно-деформированное состояние пластины с круглым отверстием из материала с усложненными свойствами при растяжении / А.В. Ромашина, А.А. Трещев // Строительство и реконструкция. – 2017. – №4-(72). – С. 72-79.

6. Ромашина, А.В. О концентрации напряжений в пластинке с круговыми отверстиями, выполненной из нелинейно-упругого ортотропного материала / А.В. Ромашина, А.А. Трещев // Строительная механика и конструкции – Воронеж: ВГАСУ. – 2017. – Вып.2.– С.20-26.

7. Ромашина, А.В. Концентрация напряжений на отверстиях в пластине из ортотропного разносопротивляющегося материала. / А.В. Ромашина, А.А. Трещев // Сборник статей по материалам круглого стола с международным участием «Современные вопросы механики сплошных сред 2017».– Чебоксары: ЧувГУ им. И.Н.Ульянова. – 2017. – С. 91-104.

8. Ромашина, А.В. Задача типа Кирша для ортотропного разносопротивляющегося материала / А.В. Ромашина, А.А. Трещев// Сборник материалов VIII международного симпозиума «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела» посвященного 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. – Тверь: Изд-во ТГТУ.– 2015. – С. 225–230.

9. Ромашина (Морозова), А.В. Решение задачи типа Кирша для пластины из анизотропного разносопротивляющегося материала / А.В. Ромашина (Морозова), А.А. Трещев // Научный вестник ВГАСУ. Сер. Физико-химические проблемы и высокие технологии строительного материаловедения. – Воронеж: Изд-во ВГАСУ. – 2015. – вып.1. – С. 72–79.