

На правах рукописи

РУСИНА ЕЛЕНА ЮРЬЕВНА



**МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ОДНОМ КЛАССЕ ПЛОСКИХ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформированного твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет».

Научный руководитель: **Ковалев Алексей Викторович**
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Козлов Владимир Анатольевич**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой строительной механики ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»

Тихонов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н.Ульянова»

Ведущая организация: Российский Университет транспорта (МИИТ).

Защита состоится «18» июня 2019 года в 14-00 часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, д. 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тульского государственного университета и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Rusina_EY/.

Автореферат разослан «25» апреля 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность работы. Применение процесса создания деталей путем запрессовки в различных сооружениях и технических конструкциях позволяет многократно удешевить и упростить производственный процесс. Как следствие, полученный таким образом узел детали будет более надежным, поэтому на данном этапе развития производства и инженерии такой подход к созданию деталей имеет большое распространение. Особую важность при таком процессе приобретает предсказание вариантов поведения конструкций с запрессованными элементами, а также деталей, в которых выполнены различные подкрепления, выемки, выточки, что вызывает необходимость разработки современных математических моделей, точность которых позволяет давать оценки процессов и явлений, происходящих в таких конструкциях и деталях. Несмотря на большие возможности получения численного решения таких задач, использование приближенно-аналитического решения является более выигрышным, так как за счет аналитической части такого решения возникает возможность применить богатый математический аппарат для проведения, в том числе и компьютерных экспериментов.

Цель работы заключается в разработке схемы применения метода возмущения и его модификации в виде метода малого параметра к определению НДС в задачах о двухосном растяжении тонких пластин с отверстиями, содержащими упругое (шайба и кольцо) или упругопластическое включение (кольцо), близкое по форме к правильному многоугольнику.

Научная новизна диссертации заключается в том, что с помощью схемы Ивлева - Ершова в одном классе плоских упругопластических конструкций, содержащих упругое и упругопластическое включения:

- получено решение задачи о двухосном растяжении тонкой пластины с отверстием, имеющим форму, близкую к правильному многоугольнику, заполненным полым включением. Полое включение имеет зоны упругого и пластического деформирования;
- получено решение задачи о двухосном растяжении тонкой пластины с отверстием, имеющим форму, близкую к правильному многоугольнику,

заполненным полым или сплошным включением. Включение имеет упругие свойства;

– проведена оценка влияния контуров включения на НДС конструкции.

Теоретическая и практическая ценность работы состоит в решении актуальной научной задачи об определении напряженно-деформированного состояния в тонких упругопластических пластинах с отверстиями различных форм под действием внешней нагрузки и контактного давления между пластиной и включением, что может быть использовано при прочностном расчете конструкций.

Достоверность и обоснованность. Использование метода возмущений в различных областях науки и техники, где требуется решить упругопластические задачи, показало надежность и достоверность его применения.

Результаты диссертационного исследования согласованы с физическими представлениями, являются следствием корректной постановки задачи и дальнейших строгих выкладок.

На защиту выносятся:

- алгоритм применения метода возмущения для определения НДС в одном классе плоских упругопластических задач с включениями;
- определение НДС в задачах о двухосном растяжении тонкой упругопластической пластины с отверстием, близким к правильному многоугольнику, в которое с натягом помещаются включения различной формы.
- исследование влияния вида отверстия в пластине, внешней и внутренней формы включения на упругопластические границы в пластине и во включении.

Апробация работы. Основные результаты работы были доложены и обсуждались: на конференции AMSCM, IOP Publishing, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 973 012010 – 2018, в статье Rusina E.Y. On the determination of stress fields and displacements in a thin elastoplastic plate containing elastic inclusion – a shim; на семинарах кафедры механики и

компьютерного моделирования Воронежского госуниверситета в 2015 - 2018 гг и кафедры вычислительной математики и механики Тульского госуниверситета в 2018 г.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 10 научных работ, в том числе 1 в базе данных Scopus. Две работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа включает в себя следующие блоки: введение, три главы (13 параграфов), заключение и список литературы, включающий 173 наименований. Общий объем работы составляет 101 страница печатного текста, включая 9 рисунков.

Содержание диссертации.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, приведен обзор публикаций, затрагивающих тему исследования, кратко изложено содержание работы.

Метод возмущений нашел широкое применение в различных разделах механики, физики, математики, а именно таких, как небесная механика, теория колебаний, устойчивость движения. Относительно недавно этот метод стал использоваться для решения краевых задач деформируемых тел со сложными физико-механическими свойствами. Развитие исследований в этом направлении связано с именами Б.Д. Анина, М.Т. Алимжанова, М.А. Артемова, Г.И. Быковцева, М. Ван-Дайка, С.А. Вульмана, Л.А. Галина, А.Н. Гузя, Г.Д. Деля, Б.А. Друянова, Л.В. Ершова, М.И. Ерхова, Д.Д. Ивлева, А.А. Ильюшина, А.Ю. Ишлинского, Я.Ф. Каюка, А.В. Ковалева, Д. Коула, В.А. Ломакина, Ю.Н. Немиша, А. Найфэ, В. Прагера, И.В. Свирского, Т.Д. Семькиной, А.Н. Спорыхина, А.И. Сумина, Г.П. Черепанова, Ю.Д. Цветкова, и других авторов.

В первой главе приведена схема решения упругопластических задач Ивлева – Ершова в рамках идеальной пластичности.

Приведены соотношения, необходимые для описания механического поведения упругопластического тела.

1. Уравнения равновесия (в напряжениях при отсутствии массовых сил):

$$\nabla_i \sigma_{ij} = 0, \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ∇_i – ковариантная производная.

2. Соотношения Коши:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (2)$$

связи между компонентами тензора деформаций e_{ij} и вектора перемещений u_i .

3. Связь полных деформаций упругих и пластических:

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad (3)$$

где e_{ij} – компоненты тензора полных деформаций, e_{ij}^e – компоненты тензора упругих деформаций, e_{ij}^p – компоненты тензора пластических деформаций.

4. Соотношения закона Гука:

$$S_{ij} = 2G e_{ij}^e, \quad (4)$$

для несжимаемого ($e_{kk}^e = 0$) материала - связи между напряжениями и упругими деформациями, где G – модуль сдвига, S_{ij} – девиатор тензора напряжений, e_{ij}^e – компоненты тензора деформаций.

5. Уравнение поверхности нагружения для случая идеально-пластической среды, где $p = 1..n$:

$$F_p(\sigma_{ij}) = 0, \quad (5)$$

6. Соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$de_{ij}^p = d\lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6)$$

где $d\lambda^p$ – скалярный положительный множитель, $p = 1..n$.

Дополним приведенные соотношения следующими граничными условиями.

7. Граничные условия на части поверхности тела, где заданы усилия P_i , n_j – компоненты вектора нормали

$$\sigma_{ij} n_j = P_i. \quad (7)$$

Граничные условия на части поверхности тела, где заданы перемещения u_i^* , имеют вид:

$$u_i = u_i^*. \quad (8)$$

8. Зададим на границе разделений упругой и пластических областей следующие условия сопряжения:

$$[\sigma_{ij}n_j] = 0, [u_i] = 0. \quad (9)$$

Для обозначения процессов, происходящих на границе упругого и пластического деформирования материала, применим общепринятое обозначение для условий сопряжения на упругопластической границе. Знак $[]$, в этом месте и в дальнейшем, будет означать для величины, стоящей в скобках, разность между ее значениями, соответствующими упругой и пластической зонам. Для суммирования элементов тензоров, дважды повторяющийся индекс означает сумму в диапазоне от 1 до 3, если не используется другое правило.

Вышеперечисленные блоки уравнений, граничных условий и условий сопряжения (1) – (9) представляют замкнутую систему уравнений, которая описывает напряженно-деформированное состояние упругопластического тела.

Далее проведена линеаризация соотношений (1)-(9). Для этого все функции раскладываются в ряды по степени малого параметра δ

$$\left\{ \sigma_{ij}, e_{ij}^p, e_{ij}^e, \lambda, \dots \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \left\{ \sigma_{ij}^{(n)}, e_{ij}^{p(n)}, e_{ij}^{e(n)}, \lambda^{(n)}, \dots \right\}, (\delta \ll 1). \quad (13)$$

Величинами n -го порядка, здесь и ниже, называются выражения, отмеченные сверху индексом (n) .

Дальнейшее решение будем проводить в цилиндрической системе координат r, θ, z , ограничимся при этом случаем плоско-напряженного состояния.

Во второй главе в безразмерных переменных получено решение задачи о растяжении тонкой упругопластической пластины с отверстием, в которую с натягом вкладывается или впаивается немного большее по размеру упругопластическое включение цилиндрической формы (рис. 1). Внешний и внутренний контур включения имеют форму

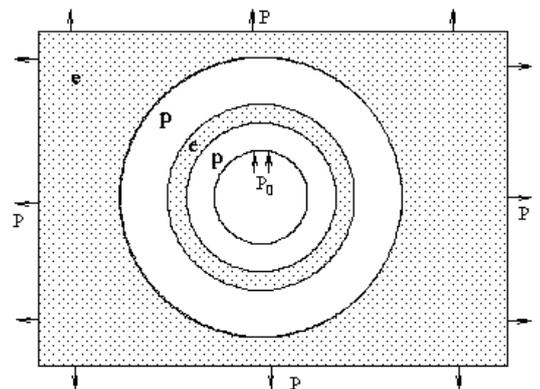


Рис. 1.

правильного многоугольника со «сглаженными» углами, при этом количество углов во внешней границе включения обозначено через m , а во внутренней $-n$. При $m=2$ имеем эллиптическую форму отверстия в пластине и во внешней границе включения, при $n=2$ эллиптический внутренний контур включения. Рассматривается случай плоско-напряженного состояния. Решение находится в цилиндрических координатах (ρ, θ, z) , при этом ось OZ направим перпендикулярно плоскости пластины. Начало координат выбираем в центре кругового отверстия в пластине.

В качестве невозмущенного состояния или нулевого приближения принималось осесимметричное состояние тонкой пластины с круговым отверстием радиуса α с тонким упругопластическим включением с внешним радиусом α_1 ($\alpha_1 > \alpha$) и внутренним β .

Величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к $2k_1$ – пределу текучести на сдвиг материала пластины. Перемещения отнесены к радиусу упругопластической границы в пластине. Для обозначения безразмерных величин используем прежние обозначения.

В постановке задачи материал пластины предполагается несжимаемым, упругопластическим. На бесконечности конструкция растягивается взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями P . Внутренний контур включения нагружен усилиями с интенсивностью P_0 . При этом считаем, что пластическая зона полностью охватывает контур отверстия в пластине, а также во включении.

Задача решается методом малого параметра, при этом определено два приближения: нулевое и первое. Малый параметр δ характеризует возмущение статических граничных условий $\delta d_3 = (P_1 - P_2) / 4k_1$.

Граничные условия для нулевого приближения имеют вид:

- на бесконечности

$$\sigma_\rho^{e\infty} = P, \quad \tau_{\rho\theta}^{e\infty} = 0, \quad \rho = \infty \quad (\rho = \rho / r_{s0}), \quad (14)$$

- на контуре отверстия

$$\sigma_\rho^p = -q, \quad \tau_{\rho\theta}^p = 0, \quad \rho = \alpha \quad (\rho = \rho / r_{s0}, \quad \alpha = \alpha / r_{s0}), \quad (15)$$

- на внутреннем контуре круглого кольца-включения

$$\sigma_{B\rho} = -P_0, \quad \tau_{B\rho\theta} = 0, \quad \rho = \beta \quad (\rho = \rho/r_{s0}, \quad \beta = \beta/r_{s0}). \quad (16)$$

Общее уравнение для описания контуров, ограничивающих отверстие в пластине, внешнее и внутреннее очертания включения, имеет вид

$$\rho = \gamma(1 + \delta d_v \cosh \theta - \dots), \quad (17)$$

где γ - соответствующий радиус в нулевом приближении ($\alpha_1 > \alpha$, α , α_1 , β); d_v - безразмерная константа, δ - малый параметр, h принимает значение m и n - количество «сглаженных» углов в соответствующих контурах.

Ввиду малости величины ε , примем за линию контакта пластины и включения внешнюю границу включения, которая при разложении представляется в форме

$$\rho_{kon} = R^{(0)} + \delta R^{(1)}, \quad (18)$$

где $R^{(0)} = \alpha_1$, $R^{(1)} = \alpha_1 d_1 \cos m\theta$.

Граничные условия для первого приближения на бесконечности

$$\sigma_\rho^\infty = -d_3 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^\infty = d_3 \sin 2\theta, \quad (19)$$

где $P = (P_1 + P_2)/4k_1$, $\delta d_3 = (P_1 - P_2)/4k_1$.

На внутреннем контуре отверстия в пластине

$$\left(\sigma_\rho^{(1)} + \frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} \alpha d_2 \cos n\theta \right) \Big|_{\rho=\beta} = 0, \quad \left(\tau_{\rho\theta}^{(1)} + 2(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_\rho^{(0)}) d_2 \sin n\theta \right) \Big|_{\rho=\beta} = 0. \quad (20)$$

Линеаризированные условия сопряжения на упругопластической границе в пластине описываются соотношением

$$\left[\sigma_{ij}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial \rho} r_{s1}^{(1)} \right] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (21)$$

а во включении

$$\left[\sigma_{ij}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial \rho} r_{s2}^{(1)} \right] \Big|_{\rho=r_i} = 0, \quad (22)$$

где $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$ - компоненты тензора напряжений для нулевого и первого приближения соответственно, $r_{s1}^{(1)}$, $r_{s2}^{(1)}$ - соотношения, описывающие радиусы

вектора упругопластических границ в пластине и во включении в первом приближении.

Вдоль линии контакта пластины и включения запишем условие сопряжения, когда:

1) включение вложено с натягом в пластину

$$\sigma_{\rho}^{p(1)} + \frac{d\sigma_{\rho}^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} = \sigma_{B\rho}^{e(1)} + \frac{d\sigma_{B\rho}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)}, \quad \tau_{B\rho\theta}^{e(1)} - (\sigma_{B\theta}^{e(0)} - \sigma_{B\rho}^{e(0)}) \dot{s}_1 = 0, \quad (23)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{p(1)} - (\sigma_{\theta}^{p(0)} - \sigma_{\rho}^{p(0)}) \dot{s}_1 = 0, \quad \left(u_{\rho}^{p(1)} + \frac{du_{\rho}^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} \right) = \left(u_{B\rho}^{e(1)} + \frac{du_{B\rho}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)} \right), \quad \text{при } \rho = R^{(0)},$$

2) включение впаяно в пластину

$$\sigma_{\rho}^{p(1)} + \frac{d\sigma_{\rho}^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} = \sigma_{B\rho}^{e(1)} + \frac{d\sigma_{B\rho}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)}, \quad \tau_{B\rho\theta}^{e(1)} - (\sigma_{B\theta}^{e(0)} - \sigma_{B\rho}^{e(0)}) \dot{s}_1 = \tau_{\rho\theta}^{p(1)} - (\sigma_{\theta}^{p(0)} - \sigma_{\rho}^{p(0)}) \dot{s}_1, \quad (24)$$

$$\left(u_{\rho}^{p(1)} + \frac{du_{\rho}^{p(0)}}{d\rho} R^{(1)} \right) = \left(u_{B\rho}^{e(1)} + \frac{du_{B\rho}^{e(0)}}{d\rho} R^{(1)} \right), \quad u_{\theta}^{p(1)} + u_{\rho}^{p(0)} \dot{s}_1 = u_{B\theta}^{e(1)} + u_{B\rho}^{e(0)} \dot{s}_1, \quad \text{при } \rho = \alpha_1,$$

где $R^{(1)} = \alpha_1 d_1 \cos m\theta$, $s_1 = R^{(1)} / R^{(0)} \Rightarrow \dot{s}_1 = -md_1 \sin m\theta$.

Из решения линеаризированной системы уравнений (1)-(9) определены выражения для напряжений и перемещений в упругой и пластических областях пластины и включения, а также выражения для радиусов упругопластических границ, которые в общем виде представляются следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= f_{11}(\rho) + \delta(f_{12}(\rho) \cos 2\theta + f_{13}(\rho) \cos m\theta + f_{14}(\rho) \cos n\theta), \\ \sigma_{\theta} &= f_{21}(\rho) + \delta(f_{22}(\rho) \cos 2\theta + f_{23}(\rho) \cos m\theta + f_{24}(\rho) \cos n\theta), \\ \tau_{\rho\theta} &= f_{31}(\rho) + \delta(f_{32}(\rho) \sin 2\theta + f_{33}(\rho) \sin m\theta + f_{34}(\rho) \sin n\theta), \\ u_{\rho} &= f_{41}(\rho) + \delta(f_{42}(\rho) \cos 2\theta + f_{43}(\rho) \cos m\theta + f_{44}(\rho) \cos n\theta), \\ u_{\theta} &= f_{51}(\rho) + \delta(f_{52}(\rho) \sin 2\theta + f_{53}(\rho) \sin m\theta + f_{54}(\rho) \sin n\theta), \\ r_{s1} &= f_{61}(\rho) + \delta(f_{62}(\rho) \cos 2\theta + f_{63}(\rho) \cos m\theta + f_{64}(\rho) \cos n\theta), \\ r_{s2} &= f_{71}(\rho) + \delta(f_{72}(\rho) \cos 2\theta + f_{73}(\rho) \cos m\theta + f_{74}(\rho) \cos n\theta). \end{aligned} \quad (25)$$

Из-за громоздкости полученных выражений конкретный вид функций f_{ij} , $i=1, \dots, 7$, $j=1, \dots, 4$ в автореферате не приводится.

Из анализа выражений для полей напряжений и перемещений, а также радиусов вектора упругопластических границ можно сформулировать сле-

дующий вывод. Основное влияние на состояние формы упругопластической границы в пластине производит отклонение внешнего контура включения от окружности, которое можно определить, как возмущение внешнего контура включения.

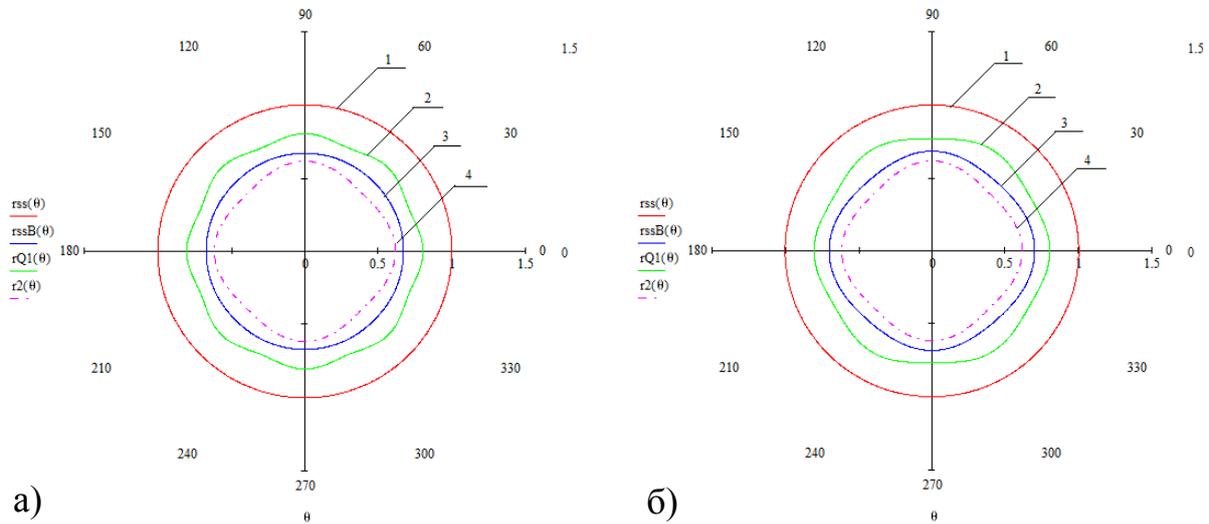


Рис. 2

На рис. 2 представлены результаты численного расчета радиусов упругопластических границ при следующих вариантах включения.

- а) Пример вставленного с натягом включения в пластину. При $\delta = 0.01$, $\alpha = 0.2$ м, $\alpha_1 = 0.201$ м, $E_1 = 810$ МН/м², $E_2 = 1100$ МН/м², $d_1 = 25$, $d_2 = 50$, $d_3 = -0.04$, $k = 12/\sqrt{3}$ МН/м², $P_1 = 9.0$ МН/м², $P_2 = 10.1$ МН/м², $P_0 = 33.5$ МН/м², $n = 4$, $m = 8$;
- б) Пример впаянного включения в пластину. При $\delta = 0.01$, $\alpha = 0.2$ м, $\alpha_1 = 0.201$ м, $E_1 = 810$ МН/м², $E_2 = 1100$ МН/м², $d_1 = 25$, $d_2 = 50$, $d_3 = -0.04$, $k = 12/\sqrt{3}$ МН/м², $P_1 = 9.0$ МН/м², $P_2 = 10.1$ МН/м², $P_0 = 33.5$ МН/м², $n = 4$, $m = 6$.

На рис. 2 зависимость радиуса вектора r_{s1} от угла θ отражает кривая 1, т.е. представляет собой форму упругопластической границы в пластине. Контур отверстия в пластине отражает кривая 2. Зависимость радиуса вектора r_{s2} во включении от угла θ отражает кривая 3, т.е. представляет собой форму упругопластической границы во включении. Контур внутреннего отверстия во включении отражает кривая 4.

В третьей главе в безразмерных переменных получено решение задач о растяжении тонкой упругопластической пластины с отверстием, в которую с натягом вкладывается или впаивается немного большее по размеру полое (рис. 3) или сплошное (рис. 4) упругое включение.

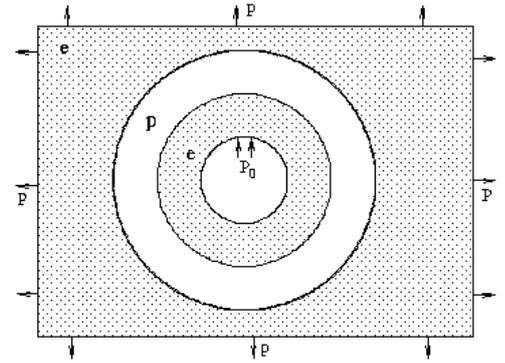


Рис. 3.

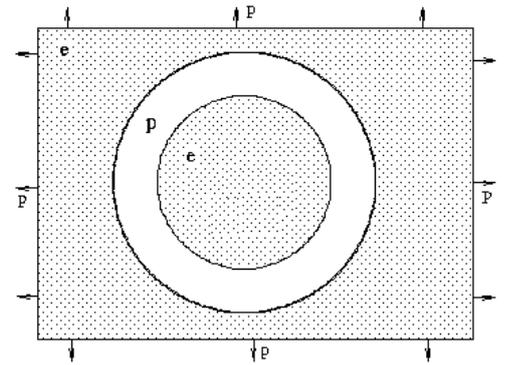


Рис. 4

Решение задач проводится с помощью линеаризованных соотношений (1)-(9) при граничных условиях (14)-(16), (19), (20) и условиях сопряжения (23), (24) по алгоритму, приведенному в диссертационной работе. Результаты определения напряжений, перемещений и радиусов упругопластических границ в пластине по внешнему виду совпадают с (25). Однако здесь включения являются упругими и, естественно, итоговые полные выражения для НДС отличаются от выражений НДС второй главы.

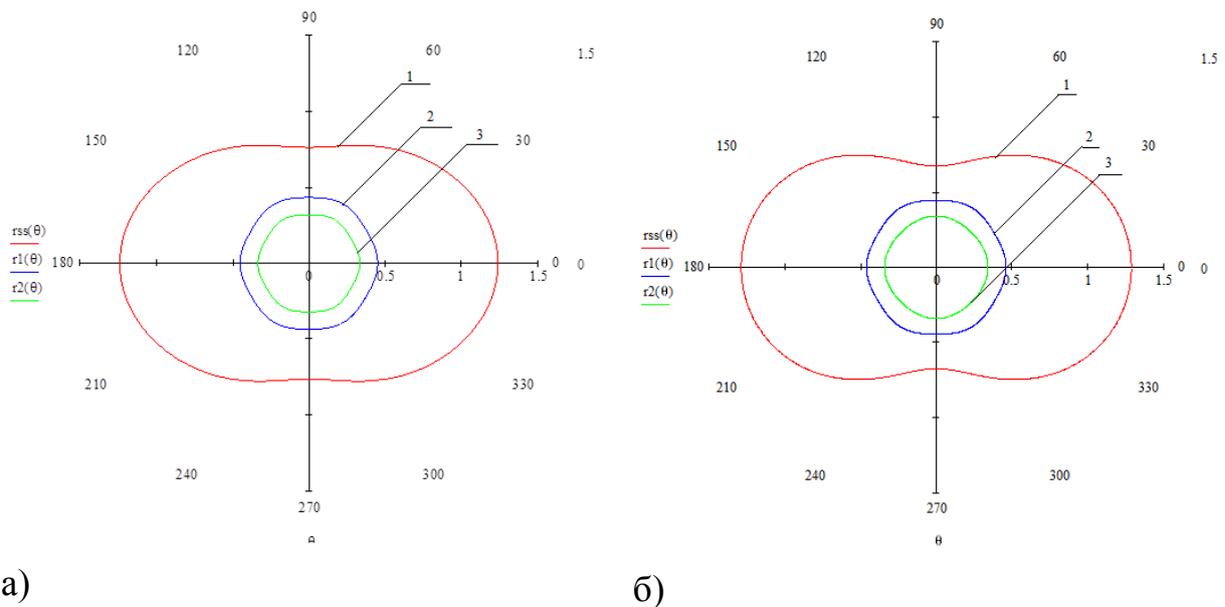


Рис. 5

На рис. 5 представлены результаты численного расчета радиуса упругопластической границы в задаче о двухосном растяжении тонкой пластины

а) Пример вставленного с натягом включения в пластину. При $\delta = 0.01$, $\alpha = 0.2$ м, $\alpha_1 = 0.201$ м, $E_1 = 810$ МН/м², $E_2 = 1100$ МН/м², $d_1 = 2.79$, $d_2 = 1.804$, $k = 12/\sqrt{3}$ МН/м², $P_1 = 9.5$ МН/м², $P_2 = 9.0$ МН/м², $m = 6$;

б) Пример впаянного включения в пластину. При $\delta = 0.01$, $\alpha = 0.2$ м, $\alpha_1 = 0.201$ м, $E_1 = 810$ МН/м², $E_2 = 1100$ МН/м², $d_1 = 2.79$, $d_2 = 0.361$, $k = 12/\sqrt{3}$ МН/м², $P_1 = 9.1$ МН/м², $P_2 = 9.0$ МН/м², $m = 4$.

На рис. 6 зависимость радиуса вектора r_s от угла θ отражает кривая 1, т.е. представляет собой форму упругопластической границы в пластине. Контур отверстия в пластине отражает кривая 2.

Результаты и выводы.

1. Определено напряженно-деформированное состояние тонкой пластины, подверженной двухосному растяжению, с отверстием, имеющим форму, близкую к правильному многоугольнику, в которое с натягом вставлено включение из упругопластического материала в виде кольца, внутренний и внешний контуры которого имеет форму, близкую к правильному многоугольнику.

2. Определено напряженно-деформированное состояние тонкой пластины, подверженной двухосному растяжению, с отверстием, содержащим с натягом упругое включение в виде шайбы, имеющей внешнюю границу, близкую к правильному многоугольнику.

3. Определено напряженно-деформированное состояние тонкой пластины, подверженной двухосному растяжению, с отверстием, имеющим форму, близкую к правильному многоугольнику, в которое с натягом вставлено включение из упругого материала в виде кольца, внутренний и внешний контуры которого имеет форму, близкую к правильному многоугольнику.

4. Проведено исследование влияния возмущения контуров пластины и включения на поведение границ раздела зон упругого и пластического деформирования в пластине.

В результате анализа полученных выражений для полей напряжений и перемещений, а также радиусов вектора упругопластических границ можно

сформулировать следующий вывод. Основное влияние на состояние формы упругопластической границы в пластине производит отклонение внешнего контура включения от окружности, которое можно определить как возмущение внешнего контура включения.

В случае, когда включение не имеет зоны пластического деформирования, было выявлено следующее:

- заметное изменение формы упругопластической границы происходит при возмущении внешнего контура, ограничивающего включение;
- незначительное изменение формы упругопластической границы оказывает возмущение контура, ограничивающего внутреннее отверстие включения.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

В изданиях, индексируемых в WoS и Scopus:

1. Rusina E.Y. On the determination of stress fields and displacements in a thin elastoplastic plate containing elastic inclusion – a shim / E.Y. Rusina, A.V. Kovalev, A.Y. Yakovlev // AMSCM. IOP Publishing. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 973 012010 – 2018 – P.10

Статьи в журналах, входящих в список ВАК:

2. Русина Е.Ю. О механическом взаимодействии элементов тонкой упругопластической конструкции / Е.Ю. Русина, А.В. Ковалев, А.Ю. Яковлев // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, Серия: Механика предельного состояния – 2017. – №1 (31) – С. 3-14.
3. Русина Е.Ю. Об определении упругопластических границ в тонкой упругопластической конструкции с включением / Е.Ю. Русина // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, Серия: Механика предельного состояния – 2017. – №4 (34) – С. 36-44.

Другие публикации:

4. Русина Е.Ю. Об исследовании механического взаимодействия элементов тонкой упругопластической конструкции / Е.Ю. Русина, А.В. Ковалев, А.Ю. Яковлев // Материалы Всероссийской научной школы-конференции,

- посвященной 85-летию профессора Д.Д. Ивлева «Механика предельного состояния и смежные вопросы» – г. Чебоксары – 2015. – С. 107-114.
5. Русина Е.Ю. Об определении напряжений и деформаций в тонкой упруго-пластической пластине с упругим включением / Е.Ю. Русина, А.В. Ковалев, А.Ю. Яковлев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научно-технической конференции. Воронеж Издательство «Научно-исследовательские публикации» – 2015. – С. 2.
 6. Русина Е.Ю. Теория и практика решения неодномерных задач упругопластического деформирования. Задача о напряженно-деформированном состоянии в тонкой пластине с включением / Е.Ю. Русина, Д.В. Гоцев, А.В. Ковалев, А.Ю. Яковлев // Учебно-методическое пособие – Воронеж. Изд. Дом ВГУ. – 2016. – С. 25.
 7. Русина Е.Ю. О математической модели механического взаимодействия тонкого упруго кольца и тонкой упругопластической пластине / Е.Ю. Русина, А.В. Ковалев, А.Ю. Яковлев // Сборник трудов IX Всероссийской конференции в рамках Международной научно-технической конференции. Воронеж. Издательство «Научно-исследовательские публикации», – 2016, – С. 101-103.
 8. Русина Е.Ю. Исследование напряженно-деформированного состояния в тонкой содержащей упругое включение в виде шайбы / Е.Ю. Русина, А.В. Ковалев, А.Ю. Яковлев // Вопросы науки. Серия. Вестник. ПММ. – 2017. – №2. –Выпуск 15. – С 68-75.
 9. Русина Е.Ю. Об исследовании напряженно-деформированного состояния в тонкой пластине с упругим включением в виде шайбы / Е.Ю. Русина, А.В. Ковалев, А.Ю. Яковлев // X Всероссийская конференция по механике деформирования твердого тела. – Самара. – 2017. – С. 35-38.
 10. Русина Е.Ю. Об определении полей напряжений и перемещений в тонкой упругопластической пластине, содержащей упругое включение – шайбу / Е.Ю. Русина, А.В. Ковалев, А.Ю. Яковлев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов. Международной научно-технической конференции. Воронеж. 18-20 декабря 2017 г. – 2017. – С. 1083-1089.