

На правах рукописи



ЧИКОВ ВАЛЕРИЙ СЕРГЕЕВИЧ

**КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ ИЗ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Тула 2018

Диссертация выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Соколова Марина Юрьевна

Официальные оппоненты: **Зингерман Константин Моисеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», заведующий кафедрой

Лисовенко Дмитрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН», старший научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

Защита диссертации состоится «26» февраля 2019 г. в 16-00 часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, Тула, пр. Ленина, 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, Тула, пр. Ленина, 92, и на сайте <http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02>

Автореферат разослан «24» декабря 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Технический прогресс в различных отраслях промышленности, особенно в авиационной и ракетно-космической технике, неразрывно связан с разработкой новых конструктивных решений и прогрессивных технологий на базе использования современных композиционных материалов. Данные материалы рассматривают как материалы с конструктивной анизотропией физико-механических свойств. Примерами материалов, обладающих конструктивной или естественной цилиндрической анизотропией, являются композиты, образованные намоткой, древесина, нанотрубки и др.

Механические свойства анизотропных материалов обычно определяют из экспериментов на растяжение плоских образцов, различным образом ориентированных относительно главных осей анизотропии. Такие эксперименты для тел с криволинейной анизотропией связаны с нарушением структуры материала и взаимной ориентации армирующих элементов, что может привести к неправильному определению констант материала или оказывается принципиально невозможным. В данной работе моделируются эксперименты с цилиндрическими образцами (стержнями и трубками) из цилиндрически-ортотропного материала.

Актуальной является также разработка подхода к проведению экспериментов по конечному деформированию сплошных цилиндров и толстостенных труб, в которых создается неоднородное напряженно-деформированное состояние, что позволяет увеличить диапазон деформаций, достигаемых без потери устойчивости образцов. Обработка экспериментов с такими образцами связана с необходимостью разработки математических моделей конечного деформирования цилиндрических образцов с целью определения связи между функциями, описывающими распределение напряжений и деформаций во внутренних точках образцов, с измеряемыми в опытах силовыми и геометрическими параметрами.

Определение материалов, обладающих криволинейной анизотропией, дано в работах С.Г. Лехницкого, Е.К. Ашкенази и Э.В. Ганова, П.Г. Микляева и Я.Б. Фридмана, Е.В. Ломакина, В.И. Альшица, Т.С.Т. Ting, Т.А. Chen, J.Q. Tarn. Поведение упругих анизотропных тел при малых деформациях рассматривается в многочисленных работах отечественных и зарубежных авторов, в том числе в классических работах П. Бехтерева, Н.Г. Ченцова, В.В. Новожилова, С.Г. Лехницкого, С.А. Амбарцумяна, В.С. Саркисяна, А.К. Малмейстера, В.П. Тамужа, Г.А. Тетерса, Е.К. Ашкенази, Я. Рыхлевского, Н.М. Матченко, А.А. Трещева, Б.Г. Миронова, Р.В. Гольдштейна, В.А. Городцова, Д.С. Лисовенко, Б.Д. Аннина, Н.И. Остросаблина, Т.А. Chen, С.Н. Huang. Описанию конечных деформаций анизотропных тел посвящены монографии А. Грина и Дж. Адкинса, К.Ф. Черныха, В.И. Левитаса, статьи отечественных и зарубежных авторов, в том числе работы А.С. Кравчука, А.А. Маркина, М.Ю. Соколовой, Д.В. Христича, К.М. Зингермана, Л.М. Зубова, В.А. Левина. Одной из основных проблем

построения нелинейных моделей анизотропных материалов является установление возможности определения входящих в модель материальных функций из системы экспериментов, состоящей из наименьшего числа опытов. Для материалов с криволинейной анизотропией эта проблема остается нерешенной.

Целью настоящей работы является построение и конкретизация нелинейных определяющих соотношений для материалов с цилиндрической анизотропией, на основе разработки программы экспериментов по конечному деформированию цилиндрических образцов.

Основные задачи исследования:

- 1) формулировка определяющих соотношений нелинейной упругости для цилиндрически-ортотропных материалов;
- 2) разработка программы экспериментов для определения материальных функций, входящих в предложенные соотношения, при конечных деформациях;
- 3) построение математических моделей комбинированного нагружения цилиндрических тел с использованием различных мер конечных деформаций и проведение сравнительного анализа.

Объектом исследования являются сплошные и полые цилиндры из цилиндрически-ортотропного материала подверженные комбинированному нагружению в области больших деформаций.

Предметом исследования является программа экспериментов, позволяющих идентифицировать предложенный вариант нелинейных определяющих соотношений упругости для цилиндрически-ортотропного материала.

Научная новизна результатов, полученных автором диссертации, состоит в следующем:

- получен вариант нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропных материалов, удовлетворяющих обобщению частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы;
- разработана модель конечного упругого деформирования сплошных и полых цилиндрических образцов из цилиндрически-ортотропного материала при комбинированном нагружении;
- разработана программа экспериментов, направленная на конкретизацию предложенных соотношений.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Предложенная постановка задачи о комбинированном нагружении цилиндрически-ортотропного тела и разработанная программа экспериментов может использоваться в качестве методики расчетов и испытаний образцов в АО КБП (г. Тула), АО «НПО «Сплав» (г. Тула) и других НИИ и КБ.

Диссертационная работа выполнялась в рамках грантов РФФИ №№ 14-01-31138 мол_а «Построение и экспериментальное обоснование определяющих соотношений нелинейной теории упругости», 15-01-01875 А «Термомеханическая модель деформирования тел из кристаллических и квазикристаллических материалов».

На защиту выносятся:

- вариант нелинейных соотношений, определяющих поведение цилиндрически-ортотропного материала;
- математическая модель конечного упругого деформирования сплошных и полых цилиндров из цилиндрически-ортотропного материала при комбинированном нагружении;
- программа экспериментов по определению материальных констант, входящих в предложенные определяющие соотношения;
- анализ образов процессов конечного деформирования цилиндрических тел в шестимерном пространстве А.А. Ильюшина.

Достоверность и обоснованность научных положений, предложенных в работе, обеспечивается корректностью сформулированных задач, выбором обоснованных математических моделей, описывающих упругое поведение анизотропного материала, а также совпадением результатов исследований в частных случаях с известными аналитическими решениями различных авторов.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертационной работы докладывались на научно-практической конференции Молодёжные инновации (Тула, 2014); международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики и информатики" (Тула, 2014); на международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2017); на научном семинаре по механике деформируемого твёрдого тела им. Л.А. Толоконникова (научный руководитель – профессор А.А. Маркин, г. Тула, 2018 г.)

Публикации автора по теме исследования. Основные научные результаты диссертационного исследования опубликованы в 9 печатных работах, из которых 3 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, выводов и списка литературы, включающего 139 наименований, изложена на 116 страницах машинописного текста и содержит 27 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении показана актуальность работы и целей выполненных исследований, дана краткая аннотация всех разделов работы.

В первом разделе на основе общего варианта нелинейных определяющих соотношений для упругих анизотропных материалов, предложенного в работах Д.В. Христича и М.Ю. Соколовой, получен вариант соотношений для цилиндрически-ортотропных материалов, удовлетворяющих обобщению частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы. Рассмотрена тензорно-линейная связь между напряжениями и конечными деформациями в цилиндрически-ортотропном материале. Описана процедура построения образа

процесса нагружения в шестимерном пространстве.

Рассмотрены два подхода к описанию конечных деформаций сплошной среды: с использованием голономного инвариантного тензора деформаций Коши-Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$ и неголономной индифферентной меры деформаций \mathbf{K} , введенной в работах А.А. Маркина, для которой обобщенная яуманновская производная совпадает с тензором деформации скорости. Выписаны тензорно-линейные соотношения как обобщение закона Гука на случай конечных деформаций, в которых использованы энергетически сопряженные тензоры напряжений и деформаций: энергетический тензор напряжений \mathbf{T} и тензор истинных напряжений Коши \mathbf{S} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}_{(\boldsymbol{\varepsilon})} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{N}_{(\mathbf{K})} \cdot \mathbf{K} \quad (1)$$

где $\mathbf{N}_{(\boldsymbol{\varepsilon})}$ и $\mathbf{N}_{(\mathbf{K})}$ постоянные тензоры четвертого ранга, называемые тензорами упругости.

В силу того, что соотношения (1) при бесконечно малых деформациях асимптотически стремятся к закону Гука, тензоры упругости $\mathbf{N}_{(\boldsymbol{\varepsilon})}$ и $\mathbf{N}_{(\mathbf{K})}$ имеют равные компоненты, но отнесены к различным базисам: $\mathbf{N}_{(\boldsymbol{\varepsilon})}$ к неподвижному базису, в начальный момент совпадающему с положением главных осей анизотропии; $\mathbf{N}_{(\mathbf{K})}$ отнесен к базису, совпадающему в течение всего процесса деформирования с главными осями анизотропии. При этом предполагается, что главные оси анизотропии в процессе деформирования изменяют свою ориентацию относительно неподвижного базиса.

Рассматриваемый в данной работе цилиндрически-ортотропный материал обладает криволинейной анизотропией и в каждой точке среды имеет в качестве главных осей анизотропии оси цилиндрической системы координат. Лехницким С.Г. установлено, что при данном виде анизотропии тензор упругости в главных осях анизотропии имеет шесть независимых компонент N_{rrrr} , N_{zzzz} , $N_{rr\varphi\varphi}$, N_{rrzz} , $N_{r\varphi r\varphi}$, N_{zrzr} . Таким образом, цилиндрически-ортотропный материал имеет структуру тензора упругости такую же, как и тетрагональный материал.

В шестимерном пространстве в представлении тензора упругости цилиндрически-ортотропного материала \mathbf{n} получены ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} n_{00} &= \frac{1}{3}(2N_{rrrr} + 2N_{rr\varphi\varphi} + 4N_{rrzz} + N_{zzzz}), \quad n_{11} = \frac{1}{3}(N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - 4N_{rrzz} + 2N_{zzzz}), \quad (2) \\ n_{10} = n_{01} &= -\frac{\sqrt{2}}{3}(N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz}), \quad n_{22} = N_{rrrr} - N_{rr\varphi\varphi}, \quad n_{33} = N_{r\varphi r\varphi}, \quad n_{44} = n_{55} = N_{zrzr}. \end{aligned}$$

При рассмотрении нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропного материала используется в качестве основной гипотезы сформулированный в работах А.А. Ильюшина частный постулат изотропии, который в работах А.А. Маркина, М.Ю. Соколовой и Д.В. Хриistica был обобщен на случай анизотропных материалов. В соответствии с предельной формой обобщения частного постулата образ процесса с траекторией деформирования, расположенной в собственном подпространстве тензора упругости, также расположен в этом подпространстве. В соответствии с этим

связь между напряжениями и деформациями содержит только линейные и квадратичные инварианты, характеризующие материалы различных типов.

Цилиндрически-ортотропные материалы также как и тетрагональные материалы имеют пять собственных подпространств: четыре одномерных с базисами $\Omega_1 = \vec{\omega}_1\vec{\omega}_1$, $\Omega_2 = \vec{\omega}_2\vec{\omega}_2$, $\Omega_3 = \vec{i}_2\vec{i}_2$, $\Omega_4 = \vec{i}_3\vec{i}_3$ и единственное двумерное собственное подпространство с базисом $\Omega_5 = \vec{i}_4\vec{i}_4 + \vec{i}_5\vec{i}_5$. Здесь \vec{i}_α , $\alpha = 0...5$ – базисные векторы шестимерного пространства, а два собственных вектора $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ определяются выражениями

$$\vec{\omega}_1 = \vec{i}_0 \cos \varphi + \vec{i}_1 \sin \varphi, \quad \vec{\omega}_2 = -\vec{i}_0 \sin \varphi + \vec{i}_1 \cos \varphi, \quad (3)$$

где угол φ определяется через (2): $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2n_{01}}{n_{00} - n_{11} + \sqrt{(n_{00} - n_{11})^2 + 4n_{01}^2}}$.

В соответствии с (3) найдены два линейных и три квадратичных инварианта деформаций:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \quad (4)$$

$$s_{(3)}^2 = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2, \quad s_{(4)}^2 = \varepsilon_{12}^2, \quad s_{(5)}^2 = \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2. \quad (5)$$

В случае цилиндрически-ортотропного материала нелинейные определяющие соотношения представляются в виде

$$\vec{t} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{\alpha, \beta=1} \left(n^{\alpha\beta} + \frac{\partial n^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_\alpha} \varepsilon_\alpha \right) \varepsilon_\beta \vec{i}_\alpha + \sum_{\gamma=3}^5 2 \left(G^\gamma + \frac{\partial G^\gamma}{\partial s_{(\gamma)}^2} s_{(\gamma)}^2 \right) \vec{\varepsilon}_{(\gamma)}, \quad (6)$$

где \vec{t} – шестимерный вектор напряжений, $\vec{\varepsilon}$ – шестимерный вектор деформаций, $n^{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$, – материальные функции линейных инвариантов деформаций, $2G^\gamma(s_{(\gamma)}^2)$, $\gamma = 3, 4, 5$, – материальные функции квадратичных инвариантов.

Если материальные функции из (6) аппроксимировать линейными функциями своих аргументов, то получим связь между компонентами вектора напряжений \vec{t} и компонентами вектора деформаций $\vec{\varepsilon}$ в виде:

$$\begin{aligned} t_0 &= \left(n_0^{00} + 3\bar{n}^{00} \varepsilon_0 + \bar{n}^{01} \varepsilon_1 \right) \varepsilon_0 + \left(n_0^{01} + \bar{n}^{01} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \right) \varepsilon_1, \\ t_1 &= \left(n_0^{01} + \bar{n}^{01} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \right) \varepsilon_0 + \left(n_0^{11} + \bar{n}^{01} \varepsilon_0 + 3\bar{n}^{11} \varepsilon_1 \right) \varepsilon_1, \\ t_2 &= \left(2G_0^3 + 3\bar{G}^3 |\varepsilon_2| \right) \varepsilon_2, \quad t_3 = \left(2G_0^4 + 3\bar{G}^4 |\varepsilon_3| \right) \varepsilon_3, \\ t_4 &= \left(2G_0^5 + 3\bar{G}^5 \sqrt{\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2} \right) \varepsilon_4, \quad t_5 = \left(2G_0^5 + 3\bar{G}^5 \sqrt{\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2} \right) \varepsilon_5. \end{aligned} \quad (7)$$

где $n_0^{\alpha\beta}, \bar{n}^{\alpha\beta}, G_0^\gamma, \bar{G}^\gamma$ – константы материала, которые требуется определить для идентификации модели.

Для двух рассмотренных в работе подходов к описанию конечных деформаций в соотношениях (7) векторы \vec{t} и $\vec{\varepsilon}$ могут быть построены либо в шестимерном пространстве тензора деформаций $\mathbf{\varepsilon}$, либо в пространстве тензора

деформаций \mathbf{K} .

В работе для идентификации моделей (6) и (7) предлагается использовать опыты с цилиндрическими образцами.

Во втором разделе рассмотрена задача о конечных деформациях однородного цилиндрического тела при комбинированном нагружении. Полагаем, что деформированное состояние однородно вдоль оси и антисимметрично относительно оси цилиндра. Закон движения точек цилиндра в цилиндрической системе координат принимается в наиболее общем виде:

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \lambda_\rho(\rho_0, t), \\ \varphi = \varphi_0 + \nu(\rho_0, t) + z_0 \psi(t), \\ z = z_0 \lambda_z(t) + w(\rho_0, t), \end{cases} \quad (8)$$

где $\lambda_\rho(\rho_0, t)$, $\nu(\rho_0, t)$, $w(\rho_0, t)$ – функции начального радиуса, отвечающие за раздачу цилиндра, цилиндрический и продольный сдвиги, $\psi(t)$, $\lambda_z(t)$ – параметры кручения и растяжения, t – монотонно изменяющийся параметр («время»).

Для закона движения (8) аффинор деформаций $\mathbf{\Phi} = \overset{0}{\nabla} \vec{x}$ представляется в смешанном диадном базисе в виде

$$\mathbf{\Phi} = \rho' \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + \rho \nu' \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\varphi^0 + w' \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_z^0 + \lambda_\rho \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0 + \rho \psi \vec{e}_z^0 \vec{e}_\varphi^0 + \lambda_z \vec{e}_z^0 \vec{e}_z^0, \quad (9)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по начальному радиусу ρ_0 .

Для отыскания кинематических характеристик процесса и полярного разложения аффинора деформаций $\mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$ ортогональный тензор, сопровождающий деформацию, может быть представлен в виде произведения трех ортогональных тензоров

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\rho \cdot \mathbf{R}_\varphi \cdot \mathbf{R}_z, \quad (10)$$

где $\mathbf{R}_\rho = \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + \cos \chi \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0 + \sin \chi \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_z^0 - \sin \chi \vec{e}_z^0 \vec{e}_\varphi^0 + \cos \chi \vec{e}_z^0 \vec{e}_z^0$,

$$\mathbf{R}_\varphi = \cos \zeta \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 - \sin \zeta \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_z^0 + \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0 + \sin \zeta \vec{e}_z^0 \vec{e}_\rho^0 + \cos \zeta \vec{e}_z^0 \vec{e}_z^0,$$

$$\mathbf{R}_z = \cos(\varphi - \varphi_0) \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\rho^0 + \sin(\varphi - \varphi_0) \vec{e}_\rho^0 \vec{e}_\varphi^0 + \cos(\varphi - \varphi_0) \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\rho^0 - \sin(\varphi - \varphi_0) \vec{e}_\varphi^0 \vec{e}_\varphi^0 + \vec{e}_z^0 \vec{e}_z^0.$$

В работе получены выражения для углов χ , ζ через функции, входящие в закон движения (8), и их производные. Предложенный подход позволяет упростить определение кинематических характеристик рассматриваемого процесса.

Проведен анализ поля скоростей точек цилиндра, соответствующего закону движения (8), и получены выражения для тензора деформации скорости \mathbf{W} , тензора вихря $\boldsymbol{\omega}$ и тензора спина $\mathbf{\Omega}$ через тензоры, входящие в полярное разложение аффинора деформаций и их производные по времени. Получены дифференциальные уравнения для определения компонент неголономной меры деформаций \mathbf{K} в полярном базисе:

$$\dot{K}_{11} = W_{\rho\rho} \cos^2 \zeta - W_{\rho z} \sin 2\zeta + W_{zz} \sin^2 \zeta;$$

$$\begin{aligned}
\dot{K}_{12} &= \sin \chi \left(\frac{1}{2} \sin 2\zeta (W_{\rho\rho} - W_{zz}) + W_{\rho z} \cos 2\zeta \right) + \cos \chi (W_{\rho\varphi} \cos \zeta - W_{\varphi z} \sin \zeta); \\
\dot{K}_{13} &= \cos \chi \left(W_{\rho z} \cos 2\zeta + \frac{1}{2} (W_{\rho\rho} - W_{zz}) \sin 2\zeta \right) + \sin \chi (W_{\varphi z} \sin \zeta - W_{\rho\varphi} \cos \zeta); \quad (11) \\
\dot{K}_{22} &= W_{\varphi\varphi} \cos^2 \chi + \sin^2 \chi (W_{\rho\rho} \sin^2 \zeta + W_{zz} \cos^2 \zeta) + \\
&+ W_{\rho z} \sin^2 \chi \sin 2\zeta + \sin 2\chi (W_{\varphi z} \cos \zeta + W_{\rho\varphi} \sin \zeta); \\
\dot{K}_{23} &= \frac{1}{2} \sin 2\chi (W_{\rho\rho} \sin^2 \zeta + W_{zz} \cos^2 \zeta - W_{\varphi\varphi} + W_{\rho z} \sin 2\zeta) + \\
&+ \cos 2\chi (W_{\rho\varphi} \sin \zeta + W_{\varphi z} \cos \zeta); \\
\dot{K}_{33} &= \cos^2 \chi (W_{zz} \cos^2 \zeta + W_{\rho\rho} \sin^2 \zeta + W_{\rho z} \sin 2\zeta) + \\
&+ W_{\varphi\varphi} \sin^2 \chi - \sin 2\chi (W_{\varphi z} \cos \zeta + W_{\rho\varphi} \sin \zeta).
\end{aligned}$$

Моделирование процессов деформирования цилиндрических тел при различных схемах нагружения, соответствующих рассматриваемым экспериментальным методикам, заключается в решении системы дифференциальных уравнений равновесия

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (12)$$

дополненной кинематическими и определяющими соотношениями, и определении функций $\lambda_z(t)$, $\rho(\rho_0, t)$, $\nu(\rho_0, t)$, $w(\rho_0, t)$, $\psi = \psi(t)$.

Проведено построение и анализ траекторий деформирования для частных случаев нагружения, соответствующих схемам опыта по идентификации модели (6) и (7): растяжение сплошного цилиндра, задача толстостенного цилиндра при зажатых торцах, цилиндрический сдвиг, продольный сдвиг, кручение сплошного цилиндра. В этих частных случаях уравнения (11) могут быть проинтегрированы.

Анализ траекторий деформирования показал, что в опытах на растяжение и, кручение сплошного цилиндра и задачу полого цилиндра реализуются траектории деформирования, имеющие проекции в собственные подпространства Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , и, следовательно, этих экспериментов достаточно для определения материальных функций $n^{00}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{01}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{11}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ и $2G^3(s_{(3)})$. В экспериментах на цилиндрический и продольный сдвиги реализуются траектории деформирования, имеющие проекции в собственные подпространства Ω_4 и Ω_5 , соответственно, и из них можно определить материальные функции $2G^4(s_{(4)})$ и $2G^5(s_{(5)})$.

В частных случаях деформирования перечисленные функции определены и выражены через измеряемые параметры деформирования наружных поверхностей:

при растяжении сплошного цилиндра $\lambda_\rho(\rho_0, t) = \frac{b + u_b(t)}{b}$, $\nu(\rho_0, t) = 0$, $w(\rho_0, t) = 0$,

где b – наружный радиус цилиндра в начальном состоянии, $u_b(t)$ – перемещения точек наружной поверхности; при раздаче полого цилиндра при зажатых торцах функция $\rho(\rho_0, t)$ определяется численно;

при цилиндрическом сдвиге полого цилиндра
$$v(\rho_0, t) = \frac{C_1(t)}{(1 - \tilde{k})\rho_0^{\tilde{k}-1}} + C_2(t),$$

где
$$C_1(t) = (1 - \tilde{k}) \frac{(ab)^{\tilde{k}-1}}{b^{\tilde{k}-1} - a^{\tilde{k}-1}} \alpha(t), \quad C_2(t) = -\frac{(ab)^{\tilde{k}-1}}{b^{\tilde{k}-1} - a^{\tilde{k}-1}} \frac{\alpha(t)}{b^{\tilde{k}-1}}, \quad \tilde{k} = 1 + \frac{N_{rrrr} - N_{rr\varphi\varphi}}{2N_{rrrr}},$$

 $\alpha(t)$ – угол поворота;

при продольном сдвиге полого цилиндра
$$w(\rho_0, t) = \frac{\tilde{C}_1(t)}{2 - \tilde{k}} \rho_0^{2-\tilde{k}} + \tilde{C}_2(t),$$

где
$$\tilde{C}_1(t) = \frac{2 - \tilde{k}}{a^{2-\tilde{k}} - b^{2-\tilde{k}}} \beta(t), \quad \tilde{C}_2(t) = -\frac{b^{2-\tilde{k}}}{a^{2-\tilde{k}} - b^{2-\tilde{k}}} \beta(t), \quad \beta(t)$$
 – смещение обоймы;

при кручении решение получено асимптотическим методом

$$\rho \approx \rho_0 + \left[C_1 \rho_0 - \frac{k_1}{2(5-k)} \rho_0^3 + \frac{k_2}{3(6-k)} \rho_0^4 \right] \psi^2,$$

где C_1 и коэффициенты k, k_1, k_2 определяются через константы упругости и наружный радиус сплошного цилиндра.

В третьем разделе решена задача об идентификации предложенного варианта нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропного материала (6) или (7), которая состоит в экспериментальном определении пяти функций $n^{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$, $2G^\gamma(s_{(\gamma)})$, $\gamma = 3, 4, 5$, содержащих 12 констант. Шесть из этих констант $n_0^{00}, n_0^{01}, n_0^{11}, G_0^3, G_0^4, G_0^5$ связаны с константами упругости, входящими в закон Гука для цилиндрически-ортотропного материала. Предлагается для определения констант, входящих в нелинейные соотношения, провести перечисленные выше эксперименты с цилиндрическими образцами, ось которых совпадает с осью цилиндрической анизотропии.

В первой части раздела получены системы разрешающих уравнений для определения материальных функций, входящих в соотношения, построенные по тензору деформаций Коши ε . Из опытов на растяжение и раздачу цилиндра четыре искомые материальные функции можно выразить через растягивающие напряжения $\sigma(t)$ (осевую силу), осевое удлинение $\lambda_z(t)$ и перемещения точек наружной поверхности при растяжении, а также через внутреннее давление $p(t)$ и перемещения точек внутренней $u_a(t)$ и внешней $u_b(t)$ поверхностей цилиндра при раздаче. Система разрешающих уравнений в этом случае имеет вид:

$$n^{01} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \cdot \left(2C(t)^2 + \lambda_z(t)^2 - 3 \right) \lambda_z(t) + \\ + \sqrt{2} n^{11} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \cdot \left(\lambda_z(t)^2 - C(t)^2 \right) \lambda_z(t) = 2\sqrt{2} C(t)^2 \sigma(t),$$

$$\begin{aligned}
& n^{00} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \cdot \left(2C(t)^2 + \lambda_z(t)^2 - 3 \right) + n^{01} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \cdot \left(\lambda_z(t)^2 - 4C(t)^2 - 3 \right) + \\
& + n^{11} \left({}^{(1)}\varepsilon_0, {}^{(1)}\varepsilon_1 \right) \cdot \left(2\lambda_z(t)^2 - C(t)^2 \right) = 0, \\
& \left(2\sqrt{2}n^{00} \left({}^{(2)}\varepsilon_0, {}^{(2)}\varepsilon_1 \right) - 4n^{01} \left({}^{(2)}\varepsilon_0, {}^{(2)}\varepsilon_1 \right) + \sqrt{2}n^{11} \left({}^{(2)}\varepsilon_0, {}^{(2)}\varepsilon_1 \right) \right) \times \\
& \times \frac{1}{12\sqrt{2}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} + 2\sqrt{3}G^3 \left({}^{(2)}s_3 \right) \left((\rho')^2 - \lambda_\rho^2 \right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=a} = -p(t), \\
& \left(2\sqrt{2}n^{00} \left({}^{(3)}\varepsilon_0, {}^{(3)}\varepsilon_1 \right) - 4n^{01} \left({}^{(3)}\varepsilon_0, {}^{(23)}\varepsilon_1 \right) + \sqrt{2}n^{11} \left({}^{(3)}\varepsilon_0, {}^{(3)}\varepsilon_1 \right) \right) \times \\
& \times \frac{1}{12\sqrt{2}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} + 2\sqrt{3}G^3 \left({}^{(3)}s_3 \right) \left((\rho')^2 - \lambda_\rho^2 \right) \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=b} = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где обозначено при растяжении

$${}^{(1)}\varepsilon_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(2C(t)^2 + \lambda_z(t)^2 - 3 \right), \quad {}^{(1)}\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\lambda_z(t)^2 - C(t)^2 \right);$$

при раздаче на внутренней поверхности

$${}^{(2)}\varepsilon_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \Big|_{\rho_0=a}, \quad {}^{(2)}\varepsilon_1 = \frac{-1}{2\sqrt{6}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \Big|_{\rho_0=a},$$

$${}^{(2)}s_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\rho')^2 - \lambda_\rho^2 \right) \Big|_{\rho_0=a}, \quad \rho'(a,t) = A(t) - \frac{B(t)}{a^2}, \quad \lambda_\rho(a,t) = A(t) + \frac{B(t)}{a^2};$$

при раздаче на внешней поверхности

$${}^{(3)}\varepsilon_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \Big|_{\rho_0=b}, \quad {}^{(3)}\varepsilon_1 = \frac{-1}{2\sqrt{6}} \left((\rho')^2 + \lambda_\rho^2 - 2 \right) \Big|_{\rho_0=b},$$

$${}^{(3)}s_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\rho')^2 - \lambda_\rho^2 \right) \Big|_{\rho_0=b}, \quad \rho'(b,t) = A(t) - \frac{B(t)}{b^2}, \quad \lambda_\rho(b,t) = A(t) + \frac{B(t)}{b^2}.$$

Если упругие константы материала (2) известны, по ним определяются константы $n_0^{00}, n_0^{01}, n_0^{11}, G_0^3$. Тогда разрешающие соотношения, которые получаются из задач на растяжение и раздачу (13), служат для определения четырех констант $\bar{n}^{00}, \bar{n}^{01}, \bar{n}^{11}, \bar{G}^3$. Причем в каждом из опытов достаточно провести по одному измерению перечисленных силовых и кинематических характеристик. Если же константы $n_0^{00}, n_0^{01}, n_0^{11}, G_0^3$ заранее не известны, то в каждом эксперименте требуется провести по два измерения, для каждого из которых будут записаны разрешающие уравнения.

Для определения материальных функций $2G^4(s_{(4)})$ и $2G^5(s_{(5)})$, входящих в нелинейные определяющие соотношения (6) для цилиндрически-ортотропного материала, требуется проведение дополнительных экспериментов на цилиндрический и продольный сдвиги.

В опыте на цилиндрический сдвиг измеряемыми параметрами являются угол поворота обоймы $\alpha(t)$ и момент на обойме $M_1(t)$, связанные соотношением

$$M_1 = 2\pi G^4 \left(\|\varepsilon_3\|_{\rho_0=a} \right) \frac{(1-\tilde{k})a^2 b^{\tilde{k}-1}}{b^{\tilde{k}-1} - a^{\tilde{k}-1}} \alpha(t). \quad (14)$$

В опыте на продольный сдвиг измеряемыми параметрами являются смещение обоймы $\beta(t)$ и осевая сила F , связанные соотношением

$$F = 2\pi G^5 \left(\|\varepsilon_5\|_{\rho_0=a} \right) \cdot \frac{(2-\tilde{k})a^{2-\tilde{k}}}{a^{2-\tilde{k}} - b^{2-\tilde{k}}} \beta(t). \quad (15)$$

Таким образом, для определения 12 констант, входящих в нелинейные определяющие соотношения для цилиндрически ортотропного материала (7), достаточно провести 4 эксперимента с цилиндрическими образцами, в каждом из которых произвести по два измерения. Искомые константы в этом случае можно найти из разрешающей системы уравнений (13), (14), (15). Полученные уравнения могут быть использованы и для решения более сложной задачи: определения нелинейных функций $n^{00}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{01}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $n^{11}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $2G^3(s_{(3)})$, $2G^4(s_{(4)})$ и $2G^5(s_{(5)})$ по результатам измерений по большему числу точек.

При идентификации определяющих соотношений, построенных в пространстве меры деформаций \mathbf{K} , получена система разрешающих уравнений в виде:

$$\begin{aligned} & n^{01} \left({}^{(1)}k_0, {}^{(1)}k_1 \right) \cdot \ln \left(C(t)^2 \lambda_z(t) \right) + \sqrt{2} n^{11} \left({}^{(1)}k_0, {}^{(1)}k_1 \right) \cdot \ln \frac{\lambda_z(t)}{C(t)} = \sigma(t), \\ & n^{01} \left({}^{(1)}k_0, {}^{(1)}k_1 \right) \cdot \ln \left(C(t)^2 \lambda_z(t) \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} n^{01} \left({}^{(1)}k_0, {}^{(1)}k_1 \right) \cdot \ln \frac{\lambda_z(t)}{C(t)^4} - \\ & - n^{11} \left({}^{(1)}k_0, {}^{(1)}k_1 \right) \cdot \ln \frac{\lambda_z(t)}{C(t)} = 0, \\ & \left(2\sqrt{2} n^{00} \left({}^{(2)}k_0, {}^{(2)}k_1 \right) - 4n^{01} \left({}^{(2)}k_0, {}^{(2)}k_1 \right) + \sqrt{2} n^{11} \left({}^{(2)}k_0, {}^{(2)}k_1 \right) \right) \cdot \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln(\rho' \lambda_\rho) \Big|_{\rho_0=a} + \\ & + 2\sqrt{3} G^3 \left({}^{(2)}s_3 \right) \ln \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=a} = -p(t), \\ & \left(2\sqrt{2} n^{00} \left({}^{(3)}k_0, {}^{(3)}k_1 \right) - 4n^{01} \left({}^{(3)}k_0, {}^{(3)}k_1 \right) + \sqrt{2} n^{11} \left({}^{(3)}k_0, {}^{(3)}k_1 \right) \right) \cdot \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln(\rho' \lambda_\rho) \Big|_{\rho_0=b} + \\ & + 2\sqrt{3} G^3 \left({}^{(3)}s_3 \right) \ln \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \Big|_{\rho_0=b} = 0, \\ & M_1 = \sqrt{2} \pi a^2 G^4 \left(\|k_3\|_{\rho_0=a} \right) k_3 \Big|_{\rho_0=a}, \\ & F = \sqrt{2} \pi a G^5 \left(\|k_5\|_{\rho_0=a} \right) \cdot k_5 \Big|_{\rho_0=a}, \end{aligned} \quad (16)$$

где введены обозначения при растяжении

$${}^{(1)}k_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \ln C(t) + \lambda_z(t) \right), \quad {}^{(1)}k_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} \left(\ln \lambda_z(t) - \ln C(t) \right), \quad C(t) = 1 + \frac{u_a(t)}{a};$$

при раздаче на внутренней поверхности

$${}^{(2)}k_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(\rho' \lambda_\rho) \Big|_{\rho_0=a}, \quad {}^{(2)}k_1 = \frac{-1}{\sqrt{6}} \ln(\rho' \lambda_\rho) \Big|_{\rho_0=a}, \quad {}^{(2)}s_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \ln \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \right|_{\rho_0=a},$$

$$\rho'(a,t) = A(t) - \frac{B(t)}{a^2}, \quad \lambda_\rho(a,t) = A(t) + \frac{B(t)}{a^2};$$

при раздаче на внешней поверхности

$${}^{(3)}k_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(\rho' \lambda_\rho) \Big|_{\rho_0=b}, \quad {}^{(3)}k_1 = \frac{-1}{\sqrt{6}} \ln(\rho' \lambda_\rho) \Big|_{\rho_0=b}, \quad {}^{(3)}s_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \ln \frac{\rho'}{\lambda_\rho} \right|_{\rho_0=b},$$

$$\rho'(b,t) = A(t) - \frac{B(t)}{b^2}, \quad \lambda_\rho(b,t) = A(t) + \frac{B(t)}{b^2};$$

при цилиндрическом сдвиге

$$k_3 \Big|_{\rho_0=a} = \sqrt{2} \left(\frac{\tilde{k}-1}{2} \frac{b^{\tilde{k}-1}}{b^{\tilde{k}-1} - a^{\tilde{k}-1}} \alpha(t) - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\tilde{k}-1}{2} \frac{b^{\tilde{k}-1}}{b^{\tilde{k}-1} - a^{\tilde{k}-1}} \alpha(t) \right) \right);$$

при продольном сдвиге

$$k_5 \Big|_{\rho_0=a} = \sqrt{2} \left(\frac{2-\tilde{k}}{2} \frac{a^{1-\tilde{k}}}{b^{2-\tilde{k}} - a^{2-\tilde{k}}} \beta(t) - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2-\tilde{k}}{2} \frac{a^{1-\tilde{k}}}{b^{2-\tilde{k}} - a^{2-\tilde{k}}} \beta(t) \right) \right).$$

Верификацию нелинейных определяющих соотношений с константами, определенными в четырех опытах с цилиндрическими образцами возможно провести, выполняя кручение сплошного цилиндрического образца из рассматриваемого материала. При этом виде нагружения подлежит определению функция $\lambda_\rho(\rho_0, t)$ из закона движения (8). Решение этой задачи произведено методом асимптотического разложения по параметру $\psi = \frac{\varphi - \varphi_0}{z_0}$, играющему роль времени.

По компонентам вектора деформаций и векторов напряжений построены траектории деформирования и нагружения в пространствах тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{K} , \mathbf{T} и \mathbf{S} . Напряженно-деформированное состояние сплошного цилиндра при кручении неоднородно, поэтому рассмотрены траектории деформирования и нагружения на наружной поверхности цилиндра ($\rho_0 = b$). Проведенные расчеты показали, что при кручении траектории деформирования в пятимерных девiatorных подпространствах мер $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{K} практически являются плоскими кривыми, но расположенными в различных плоскостях относительно базисных векторов этих подпространств. На рисунке 1 представлены проекции траекторий деформирования в соответствующие плоскости нулевого и пятого базисных векторов в пространствах тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{K} .

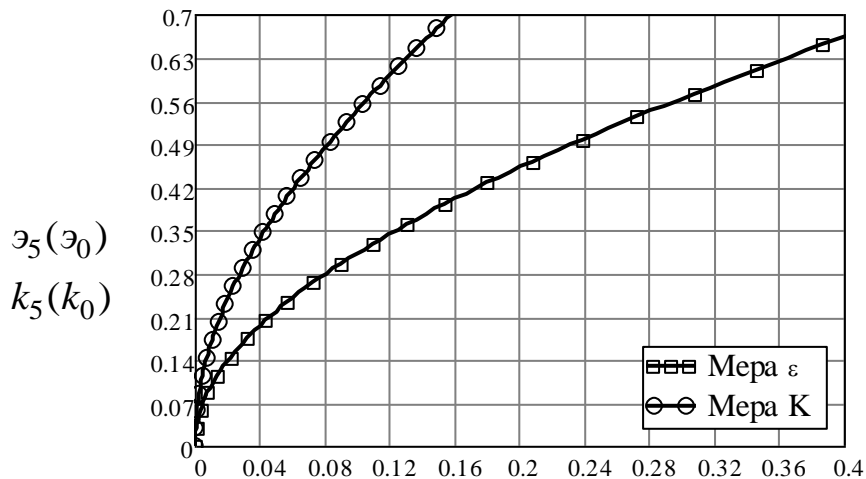


Рисунок 1 – Образы процессов деформирования при кручении

Расчеты кривизны и крутки траектории деформирования показали, что в пространстве меры **К** траектория деформирования практически является окружностью с постоянной кривизной, а траектория деформирования в пространстве меры **ε** является кривой, кривизна которой уменьшается с ростом параметра кручения. Вычисленные значения круток траекторий деформирования малы, их значения колеблются в пределах вычислительной погрешности, что и позволяет сделать вывод о том, что траектории деформирования являются плоскими. Проведен анализ траекторий нагружения $\vec{t}(t)$ и $\vec{\sigma}(t)$, полученных расчетом по нелинейным соотношениям, которые также являются плоскими кривыми.

Произведен расчет крутящего момента. Величина момента, отнесенная к модулю упругости N_{zzzz} , представлена на рисунке 2. Здесь красные и синие кривые соответствуют расчетам напряжений по тензорам деформаций **ε** и **К**: сплошные линии – по нелинейным соотношениям, пунктирные – по линейным. При малых углах закручивания все кривые совпадают.

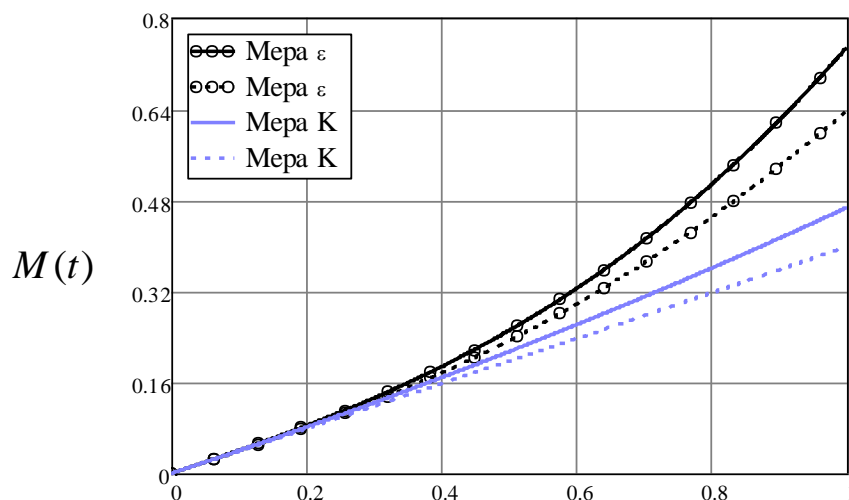


Рисунок 2 – Изменение крутящего момента

Расчет напряжений по тензору деформаций Коши ϵ приводит к более высоким значениям крутящего момента, чем при расчете напряжений по тензору деформаций \mathbf{K} , причем с ростом угла закручивания эти отличия возрастают. Расчеты по нелинейным соотношениям также дают более высокие значения крутящего момента, чем расчеты по линейным соотношениям. Отличия составляют до 20%.

Если константы материала определены из экспериментов на растяжение, раздачу, цилиндрический и продольный сдвиги, то из опыта на кручение сплошного цилиндра можно определить экспериментальную зависимость $M(\psi)$.

Сравнение экспериментальной кривой с расчетными, представленными на рисунке 2, позволит, во-первых, отдать предпочтение описанию напряженно-деформированного состояния цилиндрических тел с использованием тензора деформаций Коши или неголономной меры деформаций, во-вторых, провести верификацию нелинейной модели, описывающей деформации цилиндрических тел из цилиндрически ортотропных материалов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Получен вариант нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропных материалов, удовлетворяющих обобщению частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы.

2. Разработана программа экспериментов с цилиндрическими образцами, направленная на конкретизацию предложенных соотношений. Получена система разрешающих уравнений для определения материальных функций, входящих в нелинейные определяющие соотношения.

3. Построена математическая модель комбинированного деформирования цилиндрических тел, учитывающая конечность деформаций и нелинейный характер деформирования. Определены функции, входящие в закон движения точек цилиндрического тела, для частных процессов деформирования.

4. Проведен анализ образов процессов конечного деформирования в шестимерном пространстве А.А. Ильюшина при кручении сплошного цилиндра. Показано, что в этом процессе траектории деформирования - плоские кривые. В рамках нелинейных определяющих соотношений может быть описана депланация напряжений.

5. Показано, что использование неголономной меры деформаций \mathbf{K} позволяет адекватно описывать процессы конечного деформирования, сопровождающиеся большими поворотами, и учитывать вращение главных осей анизотропии.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Соколова М.Ю., Чиков В.С. Описание конечных деформаций сплошных цилиндров при кручении // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 2. Ч. 1. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – С. 109-118.

2. Соколова М.Ю., Христич Д.В., Чиков В.С. Вариант нелинейных

определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропного материала // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – Чебоксары: Изд-во ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2017. – № 3 (33). – С. 58-63.

3. Чиков В.С. Экспериментальные методики конкретизации определяющих соотношений с использованием цилиндрических образцов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – Чебоксары: Изд-во ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2018. – №2 (36). – С. 38-49.

4. Соколова М.Ю., Чиков В.С. Кручение сплошного цилиндра из нелинейного цилиндрически-ортотропного материала // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2017. – Вып. 10. – С. 156-164.

5. Чиков В.С. Дифференциальные уравнения для функций, входящих в закон движения при комбинированном нагружении цилиндрических тел // Вестник ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. – С. 93-99.

6. Чиков В.С. Комбинированное нагружение цилиндрических анизотропных тел // Материалы Международной научно-технической конференции Прочность конструкций, сейсמודинамика зданий и сооружений (Ташкент, 12-14 сентября 2016 г.). – Проблемы механики. – Ташкент, 2016. – С. 110-113.

7. Чиков В.С. Конкретизация нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропных материалов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 18–20 декабря 2017 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2017. – С. 1293-1297.

8. Чиков В.С. Конечные деформации и нелинейные эффекты при простом кручении сплошного цилиндра // Молодёжные инновации: сборник докладов VIII региональной молодежной научно-практической конференции Тульского государственного университета. Ч.2: Секции: Технические науки; Естественнонаучный комплекс; Математика и информатика. – Тула: ТулГУ, 2014. – 244 с.

9. Чиков В.С. Конечные деформации при растяжении анизотропного цилиндра // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики и информатики" (Тула, 15-19 сентября 2014 года). – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – С. 290-296.