


На правах рукописи



Спасская Мария Владимировна

**НЕКОТОРЫЕ НЕСВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ  
АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК  
ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Тула 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет».

Научный руководитель:

**Трещев Александр Анатольевич**  
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты:

**Шитикова Марина Вячеславовна**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский  
государственный технический  
университет», кафедра «Информационные  
технологии и автоматизированное  
проектирование в строительстве»,  
профессор

**Алексеев Андрей Алексеевич**  
кандидат технических наук, доцент, ФГБОУ  
ВО «Тверской государственной  
технической университет», кафедра  
«Сопротивления материалов, теории  
упругости и пластичности», доцент

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Саратовский  
государственный технический  
университет имени Гагарина Ю.А.»  
(г. Саратов)

Защита состоится «26» февраля 2019 г. в 14-00 на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92, ауд. 12-105.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» и на сайте [http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Spasskaya\\_MV/](http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Spasskaya_MV/)

Автореферат разослан «10» января 2019 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Глаголев Вадим Вадимович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В современном мире наука и техника имеют интенсивное развитие. Совершенствование строительства и различных производств влечет за собой возрастание требований к используемым объектам, таких, например, как увеличение надежности и прочности, снижение материалоемкости и повышение срока эксплуатации. Для создания эффективных элементов необходимы высококачественные материалы, разработка которых ведется в настоящее время. Для этих новых и многих традиционных конструкционных материалов характерно наличие усложненных свойств, таких как разносопротивляемость и структурная анизотропия.

Использование классических теорий механики деформируемого твердого тела не позволяет обеспечить должную точность расчетов напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций из материалов с усложненными свойствами. Именно поэтому необходимы надежные теории расчета, согласованные с экспериментальными данными.

Вместе с тем, совершенно недостаточно внимания уделено объектам, работающим при температурном воздействии. Рассмотрение задач термоупругости для анизотропных разносопротивляющихся материалов в настоящее время носит бессистемный характер, а так как температурные напряжения сами по себе и в сочетании с механическими напряжениями от внешних сил могут вызвать разрушение конструкций, то систематическое исследование термомеханической задачи для анизотропных разносопротивляющихся материалов актуально в рамках современной механики деформируемого твердого тела и ее практических приложений.

Для большинства разносопротивляющихся анизотропных материалов эффект связанности полей деформаций и температур мал. При обычной теплопередаче, происходящей в неравномерно нагретом теле за счет теплового воздействия окружающей среды, влиянием деформаций тела на распределение в нем температуры можно пренебречь. Поэтому для многих конструкционных материалов целесообразно рассматривать несвязанную задачу термоупругости.

В условиях ограниченности ресурсов, задачей конструкторов становится создание изделий и конструкций с минимальной материалоемкостью, обладающих высокой надежностью. Рассматриваемые материалы, благодаря высоким модулям упругости и прочностным характеристикам, способствуют решению данной задачи. Зачастую указанные материалы применяют в тонкостенных конструкциях, таких как пластины и оболочки. Тонкостенные оболочки являются одним из видов пространственных конструкций и используются в строительстве зданий и сооружений с большими не перегораживаемыми пространствами.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что учет свойств анизотропии и разносопротивляемости материалов, а также изучение влияния температурного воздействия на параметры НДС тонкостенных оболочек, является актуальной задачей как в научном, так и в прикладном плане.

**Объект исследования** – круговая цилиндрическая и пологая сферическая оболочки, выполненные из ортотропных разносопротивляющихся материалов,

работающие в условиях воздействия поперечной механической нагрузки и перепада (разности) температур на их поверхностях.

**Предмет исследования** – НДС круговой цилиндрической и пологой сферической оболочек из ортотропных разносопротивляющихся материалов.

**Целью работы** является построение математических моделей, описывающих НДС круговой цилиндрической и пологой сферической оболочек из ортотропных разносопротивляющихся материалов с учетом механических и температурных воздействий на их поверхностях.

**Задачи исследования:**

1) в рамках теории А.А. Трещева получить системы разрешающих дифференциальных уравнений, описывающих НДС круговой цилиндрической и пологой сферической ортотропных разносопротивляющихся оболочек с учетом температурных воздействий и последовательного силового нагружения;

2) следуя двухшаговому методу последовательного возмущения параметров В.В. Петрова, линеаризовать полученные разрешающие дифференциальные уравнения;

3) с помощью метода конечных разностей получить систему линеаризованных алгебраических уравнений (СЛАУ);

4) разработать алгоритм решения задач по определению НДС круговой цилиндрической и пологой сферической ортотропных оболочек, выполненных из разносопротивляющихся материалов;

5) выполнить программную реализацию полученного алгоритма на ПК;

6) используя разработанную математическую модель и прикладную программу расчета, решить серию тестовых задач по термомеханическому деформированию круговой цилиндрической и пологой сферической ортотропных оболочек, выполненных из материалов, чьи механические характеристики чувствительны к виду напряженного состояния;

7) сравнить полученные результаты решения задач с аналогичными данными, вытекающими из классической модели деформирования и наиболее применяемых апробированных моделей разносопротивляющихся материалов. Сравнить решения, полученные с учетом и без учета температурного воздействия;

8) выполнить качественный и количественный анализ результатов.

**Методология и методы исследования:**

1) общепринятые фундаментальные законы механики деформируемого твердого тела;

2) некоторые известные и апробированные теории по определению НДС конструкций из разносопротивляющихся материалов;

3) метод упругих решений;

4) метод конечных разностей;

5) двухшаговый метод последовательного возмущения параметров.

**Научная новизна работы:**

1) полученные математические модели термоупругого деформирования круговой цилиндрической и пологой сферической ортотропных оболочек, выполненных из разносопротивляющихся материалов;

2) вариант алгоритма решения задач по определению НДС оболочек вращения и его программная реализация на ПК;

3) результаты расчетов, показывающие новое количественное и качественное влияние разнородности рассмотренных материалов и воздействия температурной нагрузки на НДС оболочек вращения.

**Теоретическая значимость исследования** состоит в разработке математических моделей, описывающих НДС круговой цилиндрической и полой сферической оболочек из ортотропных разнородных материалов с учетом воздействия механической и температурной нагрузок на поверхностях оболочек. Материалы исследования могут быть использованы в рамках учебных курсов для магистрантов и аспирантов.

**Практическая значимость работы:**

1) элементы типа оболочек широко применяются в строительных конструкциях, да и практически во всех отраслях промышленности, поэтому полученные разрешающие уравнения, могут быть использованы для проектных и проверочных расчетов пространственных конструкций;

2) прикладная программа расчета НДС рассматриваемых оболочек может быть использована в проектной и конструкторской практике для разработки оболочечных конструкций, выполненных из ортотропных и изотропных разнородных материалов.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается:

1) получением теоретических результатов строгими математическими методами на основе фундаментальных соотношений и гипотез механики деформируемого твердого тела;

2) использованием апробированных экспериментальных данных;

3) сравнением результатов расчета с данными, полученными с применением классической модели и наиболее известных моделей деформирования разнородных материалов;

4) применением апробированных численных и приближенных методов решения.

**Апробация работы:** основные результаты исследования были неоднократно представлены на региональных и международных конференциях: X международная научно-практическая конференция молодых исследователей «Содружество наук. Барановичи-2014» (2014 г., Барановичи); VIII, IX, X, XI, XII региональная магистерская научная конференция (2013, 2014, 2015, 2016, 2017 г., Тула); XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и промышленности» (2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 г., Тула); VIII, IX региональная молодежная научно-практическая конференция Тульского государственного университета «Молодёжные инновации» (2014, 2015 г., Тула); III, IV, V, VI международная научно-практическая конференция молодых ученых и студентов «Опыт прошлого – взгляд в будущее» (2013, 2014, 2015, 2016 г., Тула); IV международная научно-практическая конференция института архитектуры, строительства и транспорта тамбовского государственного технического университета «Устойчивое развитие региона: архитектура, строительство,

транспорт» (2017 г., Тамбов); XIII международная конференция по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики» (2017 г., Тула).

По результатам конференций опубликованы тезисы и тексты докладов.

В полном объеме диссертация докладывалась 20 сентября 2018 г. на научном семинаре по МДТТ при ФГБОУ ВО «Тульском государственном университете» под руководством доктора физ.-мат. наук, проф. А.А. Маркина, а также на расширенном заседании кафедры «Строительства, строительных материалов и конструкций» ФГБОУ ВО «Тульского государственного университета» 03 октября 2018 года.

**Публикации.** Общее количество публикаций по теме работы – 35, в том числе количество публикаций в изданиях из перечня ВАК РФ – 7 (из них статей, входящих в международную базу цитирования Scopus – 2), публикации в иных научных журналах – 2, тезисы и полные тексты докладов на конференциях – 26.

**Реализация результатов работы** состоялась при выполнении исследований госбюджетной НИР № 07-16 «Разработка технологий новых строительных материалов и теорий расчета конструкций». Использование результатов работы подтверждено актами о внедрении методик расчета и программной продукции в проектную деятельность ООО «Строительное проектирование», ООО «СтройИнвестПроект» и ООО «Миртекс».

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка литературы и приложений. Объем работы составляет 127 страниц основного текста, включающих 36 рисунков, списка литературы из 173 наименований и приложений на 19 страницах, содержащих СЛАУ задачи о деформировании круговой цилиндрической оболочки для крайних точек и технические акты внедрения. Общий объем работы — 172 страницы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** представлено обоснование актуальности темы исследования, обозначены предмет и объект исследования, поставлены цели и задачи работы, указаны используемые методы, приведена теоретическая и практическая значимость работы, продемонстрирована достоверность и апробация результатов, сформулированы новые научные результаты, которые выносятся на защиту.

**В первом разделе** приводится обзор основных моделей деформирования анизотропных разнородных материалов, также рассматриваются модели деформирования разнородных материалов, учитывающие влияние температурной нагрузки.

В рамках данного исследования рассмотрены модели деформирования анизотропных разнородных материалов следующих авторов: С.А. Амбарцумяна, F. Tabaddor, R.M. Jones и D.A.R. Nelson, С.W. Bert и J.N. Reddy, Е.В. Ломакина, А.В. Березина и П.Л. Пономарева, А.А. Золочевского.

В рамках обзора моделей, описывающих воздействие температуры на деформирование разнородных материалов, рассмотрены работы С.А. Амбарцумяна, Н.Г. Тамурова и Г.В. Туровцева, В.М. Панферова, С.W. Bert и J.N. Reddy, N. Kamiya, F. Tabaddor, С.М. Шляхова, Н.М. Матченко и А.А. Трещева и

других авторов. Показано, что при использовании классического подхода решения несвязанной задачи термоупругости можно построить теорию, учитывающую воздействие температурной нагрузки, с применением любого варианта модели деформирования разнсопротивляющегося материала.

На основании обзора моделей делается вывод о том, что все указанные модели деформирования разнсопротивляющихся материалов основываются на различных гипотезах, но при этом имеют ряд существенных и зачастую схожих недостатков. Рассмотренные определяющие соотношения не позволяют создать законченной, достоверной и свободной от противоречий теории термоупругости анизотропных материалов чувствительных к виду напряженного состояния.

**Во втором разделе** описывается подход к построению определяющих соотношений для анизотропных разнсопротивляющихся материалов А.А. Трещева. Этот вариант базируется на пространстве нормированных напряжений, представляющим собой трехмерное пространство главных напряжений с заданным вектором полного напряжения  $S$ .

Напряженное состояние в точке тела в нормированном пространстве тензора напряжений количественно предложено определять модулем вектора полных напряжений  $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ , а качественно – нормированными напряжениями  $\alpha_{ij} = \cos \nu_{ij} = \sigma_{ij}/S$ , которые связаны условием нормировки  $\alpha_{ij}\alpha_{ij} = 1$ , где  $i, j = 1, 2, 3$ .

Уравнения связи деформаций и напряжений принимаются в форме близкой к обобщенному закону Гука для анизотропных материалов. Так как исследуется несвязанная задача термоупругости, для получения уравнений, учитывающих температурное воздействие, необходимо к уравнениям механики добавить соответствующие компоненты температурных деформаций. В общем случае в произвольной ортогональной системе координат имеем:

$$e_{ij} = C_{ijkm}(\alpha_{qp})\sigma_{km} + \alpha_{iT}\delta_{ij}\Delta T, \quad i, j, k, m, q, p = 1, 2, 3 \quad (1)$$

где  $C_{ijkm}$  – компоненты тензора податливости;  $\alpha_{iT}$  – коэффициенты линейного температурного расширения;  $\Delta T$  – изменение температуры в теле;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Далее в работе рассматриваются ортотропные материалы, поэтому закон деформирования (1) запишем в виде:

$$\begin{aligned} e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + \\ &\quad + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33} + \alpha_{1T}\Delta T; \\ e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22} + \\ &\quad + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33} + \alpha_{2T}\Delta T; \\ e_{33} &= [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22} + \\ &\quad + (A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33} + \alpha_{3T}\Delta T; \\ e_{12} &= A_{1212}\tau_{12}; \quad e_{13} = A_{1313}\tau_{13}; \quad e_{23} = A_{2323}\tau_{23}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из анализа приведенных уравнений состояния (2) следует, что они инвариантны по отношению к ортогональным преобразованиям, соответствующим классу симметрии ортотропных материалов, а для определения констант достаточно

проведения простейших опытов по одноосному растяжению, сжатию в направлении главных осей анизотропии и на сдвиг в главных плоскостях ортотропии. Выражения для определения технических констант запишем в виде:

$$A_{kkkk} = (1/E_k^+ + 1/E_k^-) / 2; \quad A_{ijij} = -(v_{ij}^+ / E_j^+ + v_{ij}^- / E_j^-) / 2; \quad A_{ijij} = 1/2G_{ij};$$

$$B_{kkkk} = (1/E_k^+ - 1/E_k^-) / 2; \quad B_{ijij} = -(v_{ij}^+ / E_j^+ - v_{ij}^- / E_j^-) / 2,$$

где  $v_{ij}^+ / E_j^+ = v_{ji}^+ / E_i^+$ ,  $v_{ij}^- / E_j^- = v_{ji}^- / E_i^-$ ,  $E_k^+$ ,  $E_i^+$ ,  $E_j^+$  – модули упругости при растяжении и сжатии в направлениях соответствующих главным осям анизотропии,  $v_{ij}^+$ ,  $v_{ji}^+$  – коэффициенты поперечной деформаций при растяжении и сжатии в направлениях соответствующих главным осям анизотропии,  $G_{ij}$  – модули сдвига в главных плоскостях анизотропии.

В диссертации выполнена оценка единственности решения, которая для анизотропных разносопротивляющихся материалов связана с устойчивостью определяющих соотношений в малом по Друккеру.

В работе проводится сопоставление экспериментальных диаграмм «напряжение-деформация» с теоретическими, полученными на основе моделей деформирования А.А. Трещева, С.А. Амбарцумяна, R.M. Jones и D.A.R. Nelson, C.W. Bert и J.N. Reddy. Результаты, полученные по модели А.А. Трещева, достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными и имеют большую точность, чем данные, полученные по моделям других авторов. Анализ теоретических и экспериментальных результатов подтверждает адекватность и достоверность рассматриваемых определяющих соотношений А.А. Трещева.

Для исследования температурной составляющей задачи записывается классическое уравнение теплопроводности для ортотропного тела:

$$T_{,t} = a_1 \cdot T_{,11} + a_2 \cdot T_{,22} + a_3 \cdot T_{,33}, \quad (3)$$

где  $T$  – температурное поле;  $t$  – время;  $a_k = \lambda_k / c$  – коэффициент температуропроводности, характеризующий теплоинерционные свойства тела;  $\lambda_k$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – удельная объемная теплоемкость тела.

В рассматриваемых задачах изменение температуры происходит только по толщине оболочек, поэтому уравнение (3) преобразуется для одномерного случая:  $T_{,t} = a_3 \cdot T_{,33}$ . Представленное уравнение теплопроводности дополнено начальными и граничными условиями.

В работе исследуется момент времени, когда распределение температуры перестало изменяться, при этом для нахождения величины перепада температур  $\Delta T$  в любой точке по толщине оболочки можно воспользоваться линейным законом распределения температуры:

$$T(z) = (T_1 - T_2) \cdot z / h + (T_1 + T_2) / 2 - T_0 \quad (4)$$

где  $T_1$  – температура на нижней (внутренней) поверхности оболочки;  $T_2$  – температура на верхней (наружной) поверхности оболочки;  $T_0$  – начальная температура оболочки,  $h$  – толщина оболочки.



В третьем разделе приводится вывод системы разрешающих уравнений, описывающих НДС полой сферической оболочки, выполненной из ортотропного разносопротивляющегося материала и работающей в условиях термомеханического нагружения.

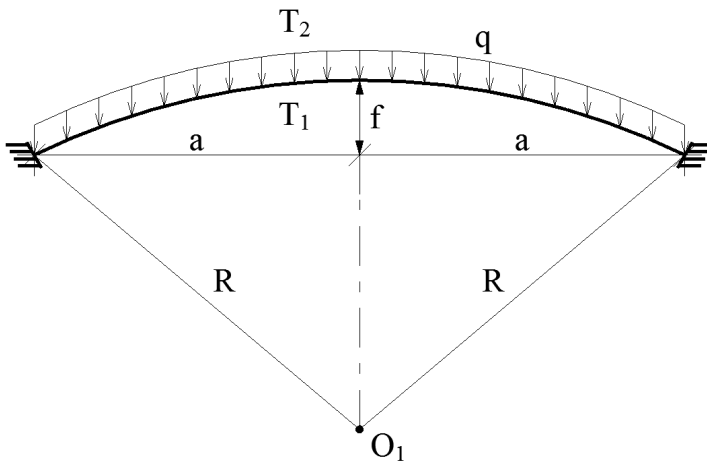


Рис. 1. Исходная схема задачи

Первоначально происходит постановка задачи, записываются основные гипотезы для расчета и кинематические соотношения в рамках теории пологих оболочек. Примем оболочку достаточно тонкой, при этом будут использоваться традиционные для данного класса задач технические гипотезы Кирхгофа-Лява. Изменение температуры в оболочке происходит только по ее толщине.

В рамках принятых гипотез компоненты тензора деформаций через перемещения и прогибы записываются следующим образом:

$$e_r = u_{,r} - kw + 0,5w_{,r}^2 - zw_{,rr}; \quad e_\theta = \frac{u}{r} - kw - z \frac{w_{,r}}{r}, \quad (5)$$

где  $u, w$  – радиальные перемещения и прогибы;  $k=1/R$  – главная кривизна оболочки;  $R$  – радиус срединной поверхности сферы,  $r$  – радиальная координата;  $z$  – вертикальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки.

В качестве физических зависимостей принимаются приведенные выше соотношения (2) с учётом температурного воздействия. При записи выражений для напряжений через деформации, преобразуются физические зависимости и выделяются все нелинейные члены отдельно:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_{11}e_r + C_{12}e_\theta - R_{11} - \varphi_{1T}; \\ \sigma_\theta &= C_{12}e_r + C_{22}e_\theta - R_{22} - \varphi_{2T}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_{11} = A_{2222} / \Delta$ ;  $C_{12} = -A_{1122} / \Delta$ ;  $C_{22} = A_{1111} / \Delta$ ;  $\Delta = A_{1111}A_{2222} - A_{1122}^2$ ;

$R_{11} = (A_{2222}T_{11} - A_{1122}T_{22}) / \Delta$ ;  $R_{22} = (A_{1111}T_{22} - A_{1122}T_{11}) / \Delta$ ;

$T_{11} = B_{1111}\alpha_r\sigma_r + B_{1122}(\alpha_r + \alpha_\theta)\sigma_\theta$ ;  $T_{22} = B_{2222}\alpha_\theta\sigma_\theta + B_{1122}(\alpha_r + \alpha_\theta)\sigma_r$ ;

$\varphi_{1T} = C_{11}\alpha_{1T}\Delta T + C_{12}\alpha_{2T}\Delta T$ ;  $\varphi_{2T} = C_{12}\alpha_{1T}\Delta T + C_{22}\alpha_{2T}\Delta T$ .

Усилия и моменты выводятся стандартным способом – интегрированием выражений для напряжений (6) по толщине оболочки.

Уравнения равновесия для пологих сферических оболочек, работающих под равномерно распределенной нагрузкой перпендикулярной к поверхности:

$$\begin{aligned} M_{r,rr} - M_{\theta,r}/r + 2M_{r,r}/r + k(N_r + N_\theta) + N_r w_{,rr} &= -q; \\ N_{r,r} + (N_r - N_\theta)/r - k[M_{r,r} + (M_r - M_\theta)/r] &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом кинематических соотношений (5), а также проинтегрированных выражений для напряжений (6) записываются соотношения для усилий и моментов

через перемещения. Полученные выражения подставляются в уравнения равновесия (7), тем самым получаем систему разрешающих дифференциальных уравнений относительно прогибов и радиальных перемещений:

$$\left\{ \begin{aligned} & -P_{11}w_{,rrr} - 2P_{11}w_{,rr}/r + w_{,rr} [P_{22}/r^2 + C_{11}hu_{,r} + C_{12}uh/r - S_{11}w + 0,5C_{11}h(w_{,r})^2] + \\ & -P_{22}w_{,r}/r^3 + 0,5S_{11}(w_{,r})^2 - kw(S_{11} + S_{22}) + S_{11}u_{,r} + S_{22}u/r - w_{,rr}(I_{11} + \eta_{1T}) - \\ & -J_{11,r} - \chi_{1T,r} - (2J_{11,r} - J_{22,r} + 2\chi_{1T,r} - \chi_{2T,r})/r - k(I_{11} + I_{22} + \eta_{1T} + \eta_{2T}) = -q; \\ & P_{11}kw_{,rr} + w_{,rr} \left( C_{11}hw_{,r} + \frac{P_{11}k}{r} \right) + w_{,r} \left( -S_{11} - P_{22} \frac{k}{r^2} \right) + 0,5 \frac{h(C_{11} - C_{12})}{r} (w_{,r})^2 + \\ & + (S_{22} - S_{11})w/r + C_{11}hu_{,r} + C_{11}hu_{,r}/r - C_{22}hu/r^2 - I_{11,r} + kJ_{11,r} - \eta_{1T,r} + k\chi_{1T,r} - \\ & - [I_{11} - I_{22} + \eta_{1T} - \eta_{2T} - k(J_{11} - J_{22} + \chi_{1T} - \chi_{2T})] / r = 0, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

где  $P_{ij} = C_{ij}h^3/12$ ;  $S_{11} = kh(C_{11} + C_{12})$ ;  $S_{22} = kh(C_{22} + C_{12})$ ,  $I_{ij}$ ,  $J_{ij}$  – нелинейные компоненты, зависящие от механических характеристик материала и вида напряженного состояния;  $\eta_{iT}$ ,  $\chi_{iT}$  – температурные компоненты.

Полученные уравнения дополнены начальными и граничными условиями.

Рассматриваемая задача является нелинейной как физически, так и геометрически, поэтому для ее решения принят способ линеаризации уравнений двухшаговым методом возмущения параметров В.В. Петрова и последующее построение СЛАУ с использованием метода конечных разностей.

**В четвертом разделе** согласно принятым уравнениям деформирования упругих анизотропных разносопротивляющихся материалов (2), основных гипотез, законов классической теплопроводности и теории упругости, проводится построение системы разрешающих уравнений, определяющих параметры НДС круговой цилиндрической оболочки, выполненной из ортотропного разносопротивляющегося материала и работающей в условиях термомеханического нагружения.

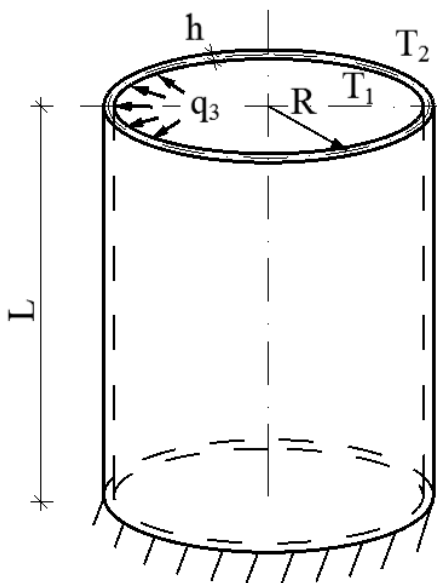


Рис. 2. Исходная схема задачи

Аналогично задаче о НДС полой сферической оболочки, проводится постановка задачи, формулируются основные гипотезы для расчета и кинематические соотношения в рамках теории пологих оболочек, используются технические гипотезы Кирхгофа-Лява.

В рассматриваемой задаче оболочка воспринимает нагрузку в виде равномерно распределенного давления  $q_3$  на внутреннюю поверхность. Так как задача является осесимметричной, все параметры НДС будут зависеть только от осевой координаты  $\beta_1$ .

В качестве физических зависимостей применяются соотношения (2).

Для получения системы разрешающих уравнений задачи первоначально необходимо перестроить физические зависимости по типу уравнений, используемых в форме метода упругих решений А.А. Ильюшина и получить выражения для напряжений через деформации:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11}e_{11} + C_{12}e_{22} - R_{11} - \varphi_{1T}; \\ \sigma_{22} &= C_{12}e_{11} + C_{22}e_{22} - R_{22} - \varphi_{2T},\end{aligned}\quad (9)$$

где  $C_{11}, C_{12}, C_{22}, R_{11}, R_{22}, \varphi_{1T}, \varphi_{2T}$  - находятся аналогично (6).

Усилия и моменты определяются стандартным способом – интегрированием выражений для напряжений (9) по толщине оболочки:

$$N_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kk} d\beta_3; \quad M_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kk} \beta_3 d\beta_3. \quad (10)$$

В соответствии с постановкой задачи и принятыми гипотезами, необходимые выражения для решения задачи принимают вид:

– кинематические зависимости:

$$\varepsilon_1 = u_{,1} + 0,5\theta_1^2; \quad \varepsilon_2 = kw; \quad (11)$$

$$e_{11} = \varepsilon_1 + \beta_3\chi_1 = u_{,1} + 0,5\theta_1^2 + \beta_3\theta_{1,1}; \quad e_{22} = \varepsilon_2 = kw;$$

– уравнения равновесия:

$$N_{1,1} = 0; \quad M_{1,1} - Q_1 - N_1\theta_1 = 0; \quad Q_{1,1} - kN_2 + q_3 = 0; \quad (12)$$

– уравнение неразрывности деформаций:

$$k\chi_1 + \varepsilon_{2,11} = 0. \quad (13)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – удлинения;  $u, w$  – осевые и радиальные перемещения;  $k = 1/R$  – главная кривизна;  $\theta_1 = -w_{,1}$  – поворот нормали к срединной поверхности;  $\chi_1 = -w_{,11}$  – кривизна;  $N_1, N_2$  – усилия в срединной поверхности оболочки;  $Q_1$  – поперечная сила;  $M_1$  – момент.

После подстановки выражений для усилий в уравнение равновесия (12), а также используя уравнение неразрывности деформаций (13), окончательно получаем систему двух дифференциальных уравнений в смешанном виде относительно неизвестных угла поворота и продольной силы в тангенциальном направлении:

$$\begin{cases} k\theta_{1,1} + L_{22}N_{2,11} = -\eta_{2,11} - \varepsilon_{2T,11}; \\ P_{11}\theta_{1,111} - kN_2 = -q_3 + J_{11,11} + \chi_{1T,11}. \end{cases} \quad (14)$$

$L_{ij}, P_{ij}$  – коэффициенты, зависящие от механических характеристик материала;  $\eta_i, J_{ij}$  – нелинейные компоненты, зависящие от механических характеристик материала и вида напряженного состояния;  $\varepsilon_{iT}, \chi_{iT}$  – температурные компоненты;  $N_2$  – продольная сила в тангенциальном направлении.

Полученные уравнения дополнены начальными и граничными условиями.

В разделе также представлен процесс линеаризации уравнений двухшаговым методом возмущения параметров В.В. Петрова и последующее построение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода конечных разностей.

В пятом разделе приводятся алгоритм расчёта и решение конкретных задач по определению характеристик НДС круговой цилиндрической и пологой сферической оболочек работающих при термомеханическом нагружении.

Для определения степени влияния разнотемпературности материала задачи были решены согласно 5-ти моделям: К – классическая модель деформирования, без учета разнотемпературности материала, Т – рассматриваемая модель (2), А – модель деформирования С.А. Амбарцумяна, JN - модель деформирования R.M. Jones и D.A.R. Nelson, BR – модель деформирования С.W. Bert и J.N. Reddy.

Исходные данные для решения задачи о деформировании пологой сферической оболочки: толщина оболочки  $h = 0,6\text{ м}$ ; радиус в плане  $a = 9\text{ м}$ ; стрела подъема  $f = 1,5\text{ м}$ . Радиус срединной поверхности оболочки  $R = 26,25\text{ м}$ . Оболочка по периметру имеет жесткое закрепление. Нагрузка на оболочку равномерно распределенная, приложенная перпендикулярно к наружной поверхности оболочки,  $q = 2\text{ МПа}$ . Температурный режим: в начальный момент времени оболочка имеет температуру  $T_0 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ , далее на оболочку действует разность температур – температура внутренней  $T_1 = -20\text{ }^\circ\text{C}$  и наружной  $T_2 = +50\text{ }^\circ\text{C}$  поверхности. Материал оболочки – трехармированный тканый полимер ПЗ6-50 со следующими механическими характеристиками: модули упругости –  $E_1^+ = 10,3\text{ ГПа}$ ,  $E_1^- = 11,77\text{ ГПа}$ ,  $E_2^+ = 17,6\text{ ГПа}$ ,  $E_2^- = 18,54\text{ ГПа}$ ; коэффициенты Пуассона –  $\nu_{12}^+ = 0,188$ ,  $\nu_{12}^- = 0,215$ . Температурные характеристики материала: коэффициенты линейного теплового расширения  $\alpha_1^\pm = 33 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\alpha_2^\pm = 40 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

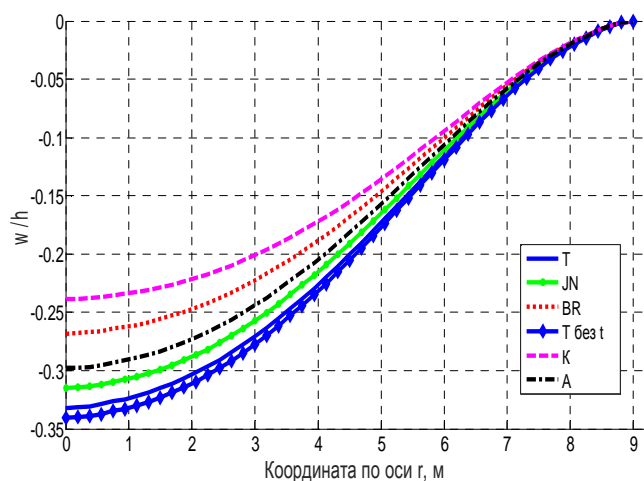


Рис. 3. Прогибы оболочки, м

На рисунках 3–7 приведены наиболее характерные результаты расчета НДС пологой сферической оболочки.

Для максимальных прогибов разница значений по классической теории и по модели деформирования А.А. Трещева составляет 39,5%. Расхождение для максимальных прогибов с учетом и без учета температурного воздействия составляет 2,6%.

Для максимальных растягивающих радиальных напряжений в заделке значения с учетом разнотемпературности превосходят данные без ее учета на 7,7%, для сжимающих – на 4,4%. Для максимальных сжимающих радиальных напряжений в центре оболочки значения по классической теории меньше результатов, полученных по модели деформирования А.А. Трещева на 27,5%. Разница в значениях с учетом и без учета температурного воздействия достигает 10,6%.

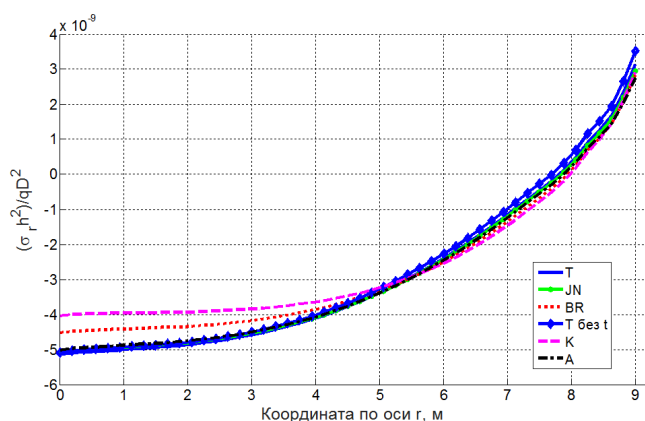


Рис. 4. Радиальные напряжения на верхней поверхности

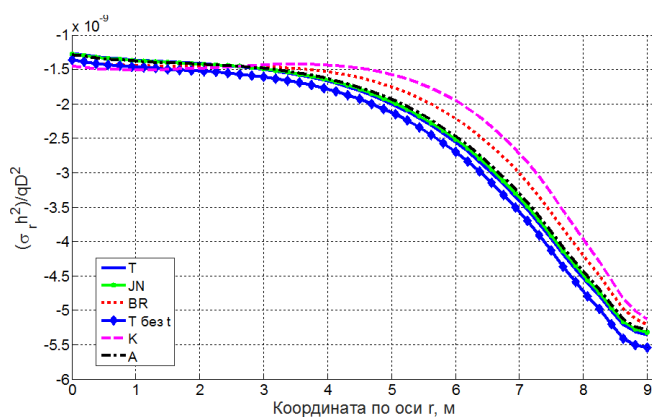


Рис. 5. Радиальные напряжения на нижней поверхности

Для растягивающих окружных напряжений в заделке значения с учетом разносопротивляемости превышают данные без ее учета на 19,6%, для сжимающих – на 1,3% ниже. Для максимальных сжимающих окружных напряжений в центре оболочки значения по классической теории меньше результатов, полученных по модели деформирования А.А. Трещева на 26,9%. Расхождение в результатах для окружных напряжений с учетом и без учета температурной нагрузки доходит до 30,6%.

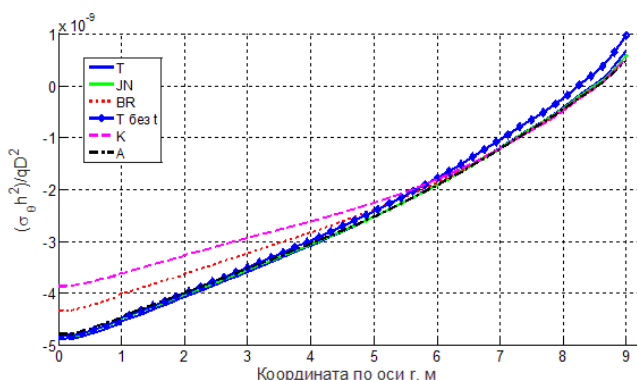


Рис. 6. Окружные напряжения на верхней поверхности

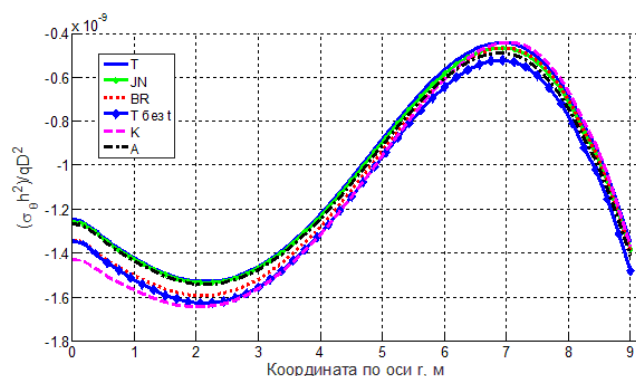


Рис. 7. Окружные напряжения на нижней поверхности

Анализируя результаты решения задач можно сделать вывод, что данные по модели деформирования А.А. Трещева хорошо согласуются с результатами расчета по другим теориям. Наиболее близкие результаты к модели А.А. Трещева получены с применением уравнений деформирования R.M. Jones и D.A.R. Nelson. Наибольшие расхождения с моделью А.А. Трещева имеем с данными по модели С.W. Bert и J.N. Reddy, которые достигают 22,8%. Среднее положение по величине расхождения результатов занимает модель С.А. Амбарцумяна.

Полные результаты решения тестовых задач о деформировании пологой сферической и круговой цилиндрической оболочек представлены в диссертации.

**В заключении** приведены основные результаты и выводы по работе.

**В приложениях** содержатся СЛАУ задачи о деформировании круговой цилиндрической оболочки для крайних точек и технические акты внедрения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Получены разрешающие уравнения, описывающие НДС круговой цилиндрической и пологой сферической оболочек, выполненных из ортотропных разносопротивляющихся материалов. Эти уравнения получены в трех формах:

- а) в форме уравнений, используемых в методе упругих решений А.А. Ильюшина, когда нелинейные члены вынесены отдельно;
- б) в линеаризованном виде по двухшаговому методу возмущения параметров В.В. Петрова;
- в) в форме метода конечных разностей.

Полученные уравнения дополнены граничными и начальными условиями.

2. Разработаны математические модели, описывающие НДС круговой цилиндрической и пологой сферической оболочек, выполненных из ортотропного разносопротивляющегося материала, при термомеханическом нагружении.

3. Разработан алгоритм решения задач по определению НДС круговой цилиндрической и пологой сферической ортотропных оболочек из разносопротивляющихся, с последующей программной реализацией на ПК.

4. С использованием разработанного программного обеспечения решены тестовые задачи по определению НДС рассматриваемых оболочек вращения.

5. Выполнено сопоставление результатов расчета оболочек, полученных по предложенной модели А.А. Трещева, с данными по наиболее применяемым и апробированным моделям разносопротивляющихся материалов и результатами классического решения. Проведенный анализ подтверждает реальность и физическую непротиворечивость представленных математических моделей.

6. Игнорирование свойства разносопротивляемости материала влечет за собой значительные погрешности при определении основных характеристик НДС оболочек вращения. Так, например, для пологой сферической оболочки из трехармированного тканого полимера учет влияния вида напряженного состояния может давать разницу в результатах до 39,5%; для круговой цилиндрической оболочки – до 36,8%.

7. Учет температурного воздействия вносит значительные поправки в картину НДС оболочек вращения. Так, в частности, учет температуры с принятым перепадом в расчете напряжений круговой цилиндрической оболочки дает поправку результатов более чем в 2 раза, а иногда дает смену знака напряжений. Для пологой сферической оболочки поправка достигает до 30,6%.

Благодаря выполненным исследованиям было получено новое решение научно-технической задачи механики деформируемого твердого тела. Оно состоит в построении математических моделей и создании программного обеспечения, необходимых для решения задач по исследованию НДС элементов сложных конструкций на примерах круговой цилиндрической и пологой сферической оболочек, выполненных из ортотропных разносопротивляющихся материалов, работающих в условиях термомеханического воздействия.

Из выше сказанного можно сделать вывод, что учет влияния вида напряженного состояния на работу материала, является необходимым, так как

позволяет получить значительно более точные результаты, сравнительно с результатами, полученными с использованием классических методик. Кроме того, учет влияния температурного воздействия также является необходимым, т.к. вносит значительные поправки в картину НДС конструкции.

**Перспективы дальнейшей разработки темы диссертации.** В рамках диссертационной работы рассмотрено два вида оболочек вращения: круговая цилиндрическая и пологая сферическая, с жестким закреплением. В дальнейшем возможно исследование других видов оболочек с различными способами их закрепления. Кроме того, представленная диссертация может служить основой для построения моделей деформирования многослойных оболочек в условиях термомеханического нагружения и с учетом разносопротивляемости материала. Предложенные пути развития темы значительно расширяют спектр решаемых задач.

## **СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ РАБОТЫ**

(публикации в изданиях, включенных в перечень ВАК):

1. Трещев, А.А. Решение задачи термоупругости для цилиндрической оболочки из анизотропного разносопротивляющегося материала / А.А. Трещев, М.В. Спасская // Известия ТулГУ. Технические науки. - 2014. – Вып. 11. Ч.2. – С. 567-575.

2. Трещев, А.А. Изучение воздействия разносопротивляемости материала на НДС круговой цилиндрической анизотропной оболочки / А.А. Трещев, М.В. Спасская // Известия ТулГУ. Технические науки. - 2014. – Вып. 11. Ч.2. – С. 603-611.

3. Спасская, М.В. Термоупругое деформирование цилиндрической оболочки из анизотропного разносопротивляющегося материала / М.В. Спасская, А.А. Трещев // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. - №1 (23). - С.65-74.

4. Спасская, М.В. Изгиб круговой цилиндрической оболочки из анизотропного разносопротивляющегося материала / М.В. Спасская, А.А. Трещев // Строительство и реконструкция. – 2015. - №3 (59). - С. 53-59.

5. Спасская, М.В. Термомеханическая задача для пологой сферической оболочки из материала с усложненными свойствами / М.В. Спасская, А.А. Трещев // Строительная механика и расчет сооружений. – Вып. №5 (280). – М.: Изд-во АО «НИЦ «Строительство». – 2018. – С. 58-65.

(статьи, опубликованные в изданиях утвержденных ВАК, при этом включенные в международную реферативную базу данных и систем цитирования Scopus):

6. Трещев, А.А. Напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической оболочки из материала с усложненными свойствами / А.А. Трещев, М.В. Спасская // Физика и механика материалов (Materials Physics and Mechanics) . – 2016. – Vol. 29. – No 1. – P. 32-38.

7. Treschev, A.A. The influence of temperature differences for the analysis of thin orthotropic cylindrical shell / A.A. Treschev, M.V. Spasskaya, M.B. Shereshevsky, A.A. Bobrishev, L.N. Shafigullin // Scientific Review Engineering and Environmental Sciences. – 2017. – Vol. 26. – No 4. – P. 528-537.

(публикации в других изданиях):

8. Спасская, М.В. Подход к решению термоупругой задачи для круговой цилиндрической оболочки из анизотропных разносопротивляющихся материалов / М.В. Спасская // Вестник Магистратуры. – 2013. - №7(22). - С.63-65.

9. Спасская, М.В. Вывод линеаризованных разрешающих уравнений несвязанной термоупругой задачи для круговой цилиндрической оболочки из ортотропных разносопротивляющихся материалов / М.В. Спасская // Материалы X Междунар. науч.-практ. конф. молодых исследователей «Содружество наук. Барановичи-2014», Книга 2. – Барановичи: РИО БарГУ, 2014. – С. 203-207.

10. Трещев, А.А. Влияние разносопротивляемости материала и температурного воздействия на НДС круговой цилиндрической ортотропной оболочки / А.А. Трещев, М.В. Спасская // Сборник материалов XVI Междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и промышленности». – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. – С. 121-122.

11. Спасская, М.В. Подход к решению задачи термоупругости для ортотропной полой сферической оболочки с учетом разносопротивляемости материала / М.В. Спасская // Материалы 6-ой Междунар. науч.-практ. конф. молодых ученых и студентов «Опыт прошлого – взгляд в будущее». – Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. – С. 392-397.

12. Трещев, А.А. Математическая модель несвязанной термомеханической задачи для полой сферической оболочки из анизотропных разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещев, М.В. Спасская // Научный Вестник ВГАСУ. Серия: Физико-химические проблемы и высокие технологии строительного материаловедения. - 2016. – №2(13) – С. 94-99.

13. Трещев, А.А. Термосиловой изгиб оболочек нулевой Гауссовой кривизны и средней толщины, выполненных из ортотропных разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещев, М.В. Спасская // Материалы 4-й междунар. науч.-практич. конф. института архитектуры, строительства и транспорта тамбовского государственного технического университета «Устойчивое развитие региона: архитектура, строительство, транспорт». – Тамбов: Изд-во Першина Р.В., 2017. – С. 203-208.