

*На правах рукописи*

**Ле Тхи Тхань**

## **КОГЕЗИОННАЯ КРАЕВАЯ ТРЕЩИНА В ПОЛУПЛОСКОСТИ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Тула 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Тульский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент  
**Лавит Игорь Михайлович**

Официальные оппоненты: **Галыбин Александр Николаевич**,  
доктор физико-математических наук,  
ФГБУН «Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта  
РАН», ведущий научный сотрудник.

**Устинов Константин Борисович**,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю.  
Ишлинского РАН», ведущий научный сотрудник.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Защита диссертации состоится 21 июня 2018 г. в 14-00 часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» и ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, Тула, просп. Ленина, 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, Тула, просп. Ленина, 92 и на сайте <http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02> .

Автореферат разослан «25» апреля 2018 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Глаголев Вадим Вадимович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Развитие механики разрушения последние десятилетия характеризуется растущим интересом исследователей к когезионным моделям трещин. Это обусловлено распространением методов механики разрушения на исследование бетона, керамик, композитов и других материалов, свойства которых заметно отличаются от свойств металлов и металлических сплавов. Представляет также интерес гипотеза о связи аномальных закономерностей роста коротких усталостных трещин с распределением когезионных сил (сил сцепления) вдоль их кромок.

Однако применение когезионных моделей резко усложняет теорию, особенно, если используются нелинейные определяющие соотношения для когезионных сил. Аналитических решений получающихся краевых задач не существует. Численные методы решения разделяются на две группы: прямые методы (метод конечных разностей и т.п.) и численно-аналитические методы, в которых максимально используются возможности аналитического решения. Методы второй группы не универсальны, зато для тех задач, к которым они применимы, с их помощью получается решение, сколь угодно близкое к точному, которое может служить эталоном для прямых методов.

В настоящей диссертации представлен численно-аналитический метод решения задачи о когезионной краевой трещине в полуплоскости. Аналогичные методы решения этой задачи неизвестны, и, таким образом, тема диссертации актуальна.

### Цель работы

Целью диссертационного исследования является разработка численно-аналитического метода решения задачи о когезионной краевой трещине в полуплоскости.

### Научная новизна работы

1. Разработан метод решения задачи о когезионной краевой трещине в полуплоскости.
2. Усовершенствован метод Ирвина для решения задачи о краевой трещине в полуплоскости.
3. Обобщено и уточнено решение задачи о когезионной полубесконечной трещине в плоскости.

### Практическая ценность

1. Решения, полученные разработанным методом, могут быть использованы как эталон при тестировании прямых методов решения.
2. Разработанный метод может быть использован при построении

решений для сред с физической и (или) геометрической нелинейностью.

### **Достоверность**

Достоверность полученных результатов подтверждается корректностью использованных методов исследования, согласованностью решений тестовых задач с аналитическими решениями или численными решениями других исследователей.

### **Апробация работы**

Результаты исследования обсуждались на Международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (ВГУ, Воронеж, 2015, 2017 гг.), IX Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (ВГУ, Воронеж, 2016 г.), 1-ой Всероссийской конференции «Вопросы прикладной математики и проблема взаимодействия твердых тел с жидкой и газовой средой», посвященной 85-летию со дня рождения И.А. Кийко (ИПМех РАН, Москва, 2017 г.), Всероссийских научно-технических конференциях «Техника XXI века глазами молодых ученых и специалистов» (ТулГУ, Тула, 2015, 2016 гг.), семинаре по МДТТ им. Л.А. Толоконникова (ТулГУ, Тула, руководитель – проф. А.А. Маркин), ежегодных научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава ТулГУ.

### **На защиту выносятся следующие положения:**

1. Численно-аналитический метод решения задачи о когезионной краевой трещине в полуплоскости.
2. Усовершенствование метода Ирвина для решения задачи о краевой трещине в полуплоскости.
3. Обобщение и уточнение решения задачи о когезионной полубесконечной трещине в плоскости.
4. Результаты численных расчетов, позволяющие сделать вывод об эффективности предложенного численно-аналитического метода.

### **Публикации**

Основные результаты диссертации изложены в девяти публикациях, в том числе в пяти статьях в журналах из перечня ВАК.

### **Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения и приложения. Объем работы – 100 страниц, включая 26 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 110 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность диссертационного исследования, сформулирована цель работы. Изложены основные положения работы по разделам. Обсуждаются достоверность, научная новизна и практическая значимость исследования.

В **первом разделе** приведен обзор литературы по теме диссертации.

Предметом исследования является когезионная краевая трещина нормального разрыва (отрыва) в линейно упругой полуплоскости. Расчетная схема изображена на рис. 1. К краям трещины приложена произвольно распределенная внешняя нормальная нагрузка. На отрезке  $x_1 \in [a-b, a]$ , который называется концевой областью (зоной сцепления, когезионной зоной), действуют силы сцепления (когезионные силы), притягивающие друг к другу противоположные края трещины. Нужно найти коэффициент интенсивности напряжений от внешней нагрузки и распределение напряжений в полуплоскости.

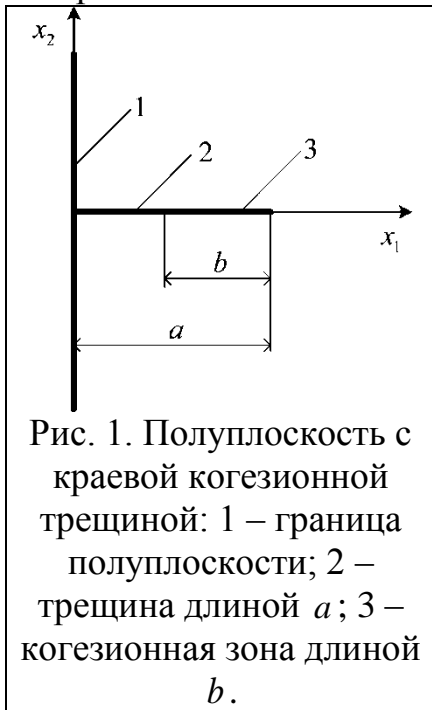


Рис. 1. Полуплоскость с краевой когезионной трещиной: 1 – граница полуплоскости; 2 – трещина длиной  $a$ ; 3 – когезионная зона длиной  $b$ .

Сформулированная задача при тех или иных ограничениях на внешние силы и силы сцепления в течение последних шестидесяти лет решалась в работах различных исследователей. В разд. 1 обсуждаются известные аналитические и численно-аналитические методы<sup>1</sup> решения задачи при отсутствии сил сцепления. Это методы Койтера (Koiter); Уиглсуэрта (Wigglesworth); Ирвина (Irwin); Сталлибрасса (Stallybrass); Снеддона (Sneddon) и Даса (Das); Дорана (Doran) и Бучвальда (Buchwald); Тонояна и Мелкумяна; Кулиева; Храпкива и др. Анализ этих исследований показывает, что оптимальным сочетанием точности и простоты реализации обладает метод Ирвина. Однако его оригинальная формулировка, ориентированная на решение методом последовательных приближений, вследствие развития вычислительной техники оказывается устаревшей.

Необходимая модернизация выполнена в настоящем диссертационном исследовании.

На основе упомянутых методов созданы методы решения задач для когезионных трещин. Наиболее простой случай, когда эпюра сил сцепления – кусочно-постоянная, рассмотрен в работах Ховарда (Howard) и Оттера (Otter); Кулиева; Синха (Singh), Данилюка (Danyluk) и Врбика (Vrbik); Бовье (Bowie) и Трейси (Tracy); Панасюка, Витвицкого и Кутеня; Петроски (Petroski). Намного

<sup>1</sup> Из рассмотрения исключены прямые методы, то есть методы конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов.

сложнее задача, в которой интенсивность сил сцепления и раскрытие трещины связаны кусочно-линейной зависимостью. Эту задачу решили Ванг (Wang) и Дэмпси (Dempsey) в 2011 г. Однако общий случай нелинейных определяющих соотношений для сил сцепления не рассматривался. Настоящее диссертационное исследование восполняет этот пробел.

**Второй раздел** содержит решение задачи о полуплоскости, нагруженной по граничному контуру. Рассмотрен общий случай ориентации полуплоскости относительно координатных осей. Решение получено новым методом. Кроме того, в разд. 2 приведено усовершенствованное решение задачи о когезионной полубесконечной трещине в плоскости. Решения задач, приведенные в разд. 2, используются в последующих разделах диссертации.



Рассмотрим первую задачу (рис. 2). В отличие от предыдущих исследований граничное уравнение не преобразуется в функциональное уравнение, а решается непосредственно с учетом голоморфности искомых функций. Пусть рассматриваемая полуплоскость  $D$  (рис. 1) расположена ниже прямой

$$L: \begin{cases} x_1 = \tau \cos \alpha \\ x_2 = \tau \sin \alpha \end{cases}; \quad \tau \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

На контуре  $L$  задается граничное условие:

$$\begin{aligned} & [\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] \bar{n} - [\bar{t} \Phi'(t) + \Psi(t)] n = \bar{p}; \\ & t \in L; \quad n = n_1 + i n_2; \quad |n| = 1; \quad p = p_1 + i p_2 \end{aligned} \quad (2)$$

где  $i$  – мнимая единица;  $n_1, n_2$  – компоненты единичной внешней нормали к контуру  $L$  (рис. 1);  $p_1, p_2$  – компоненты распределенной внешней нагрузки, приложенной к контуру  $L$ ;  $\Phi(z), \Psi(z)$  – искомые функции Колосова, голоморфные в полуплоскости  $D$ . Здесь  $z = x_1 + i x_2$ . В рассматриваемом случае условие (2) принимает вид:

$$[\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] e^{-2i\alpha} + \tau e^{-i\alpha} \Phi'(t) + \Psi(t) = i e^{-i\alpha} \bar{p} \quad (3)$$

Граничное условие (3) необходимо дополнить граничными условиями в бесконечно удаленной точке  $r = |z| \rightarrow \infty$ . Будем считать, что нагрузка  $p(t)$  самоуравновешена, то есть ее главный вектор и главный момент равны нулю:

$$\int_L p_1 dL = 0; \quad \int_L p_2 dL = 0; \quad \int_L (p_2 x_1 - p_1 x_2) dL = 0 \quad (4)$$

Введем в рассмотрение новую голоморфную функцию  $\Omega(z)$ , связанную с функциями  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  равенством:

$$\Psi(z) = -e^{-2i\alpha} [\Omega(z) + z\Phi'(z) + \Phi(z)] \quad (5)$$

Отсюда следует:

$$\Omega(t) = \overline{\Phi(t)} - ie^{i\alpha} \bar{p} \quad (6)$$

Для решения уравнения (6) выберем замкнутый контур  $\Gamma$ , состоящий из отрезка  $CA$  границы полуплоскости и полуокружности  $ABC$  с центром в начале координат (рис. 1). Так как  $\Phi(t)$  и  $\Omega(t)$  – граничные значения функций, голоморфных в области  $D$ , они должны удовлетворять тождеству Племеля:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(\xi) d\xi}{\xi - t}; \quad \Omega(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega(\xi) d\xi}{\xi - t} \quad (7)$$

где  $t, \xi \in \Gamma$ . Интегралы в этих формулах – сингулярные. Подставим соотношение (6) в тождество Племеля для функции  $\Omega(t)$ . Получим:

$$\Phi(t) = \Phi(t_+) = -ie^{-i\alpha} \left[ \frac{p}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{pd\xi}{\xi - t} \right] \quad (8)$$

откуда, с учетом формул Сохоцкого-Племеля и равенств (4), следует:

$$\Phi(z) = -\frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{pd\xi}{\xi - z} = \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \int_L \frac{pd\xi}{\xi - z} \quad (9)$$

Рассуждая так же, как и выше, получим:

$$\Omega(z) = -\frac{e^{i\alpha}}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\bar{p}d\xi}{\xi - z} = \frac{e^{i\alpha}}{2\pi} \int_L \frac{\bar{p}d\xi}{\xi - z} \quad (10)$$

Формулы (9), (10) и (5) дают решение задачи – позволяют найти напряжения в любой точке полуплоскости  $D$ .



Вторая задача, решенная в разд. 2 – это задача о полубесконечной трещине нормального разрыва в плоскости (рис. 3). Задача симметрична относительно оси абсцисс, поэтому достаточно рассмотреть деформирование только верхней части плоскости. Нагрузка, приложенная к верхней кромке трещины, представляется в виде

$$p_1 = 0; \quad p_2(x_1) = p(x) - g(x); \quad x = x_1 \quad (11)$$

где  $p(x)$  – внешняя нагрузка,  $g(x) \geq 0$  – силы сцепления (когезионные силы). Когезионные силы

отличны от нуля только в интервале  $x \in [-b, 0]$  (в когезионной зоне). Предполагается, что интенсивность сил сцепления определяется перемещением

кромки трещины вдоль оси ординат. Определяющее соотношение для сил сцепления записывается при этом в виде  $g = g[v(x)]$ , где  $v(x) = u_2(x_1, 0)$  – перемещение верхней кромки трещины вдоль оси ординат. Задача решается в линейной постановке

$$g = g_M (1 - v/v_M) \quad (12)$$

где  $g_M, v_M$  – материальные константы. Граница когезионной зоны определяется условием:

$$x = -b: v = v_M; g = 0 \quad (13)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений от внешней нагрузки  $K_{Ip}$  и от сил сцепления  $K_{Ig}$  связаны постулатом об уничтожении особенности

$$K_{Ip} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty p(\xi) d\xi; \quad K_{Ig} = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{b}} g(\xi) d\xi; \quad K_I = K_{Iq} + K_{Ig} = 0 \quad (14)$$

При этом получается:

$$v(s) = \frac{4(1-v^2)}{E} \left[ \frac{K_{Ip}}{\sqrt{2\pi}} s + \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{b}} \xi \ln \left| \frac{\xi-s}{\xi+s} \right| g(\xi) d\xi \right]; \quad K_{Ip} = \sqrt{\frac{Eg_M v_M}{1-v^2}}; \quad s = \sqrt{-x} \quad (15)$$

где  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Подстановка соотношений (15) в равенство (12) приводит к интегральному уравнению для сил сцепления

$$g_*(s_*) - \lambda \int_0^1 \xi_* \ln \left| \frac{\xi_* + s_*}{\xi_* - s_*} \right| g_*(\xi_*) d\xi_* = 1 - \sqrt{2\lambda} s_*; \quad g_*(1) = 0; \quad (16)$$

$$s_* = \frac{s}{\sqrt{b}}; \quad \xi_* = \frac{\xi}{\sqrt{b}}; \quad g_* = \frac{g}{g_M}; \quad \lambda = \frac{4(1-v^2)g_M b}{\pi E v_M}$$

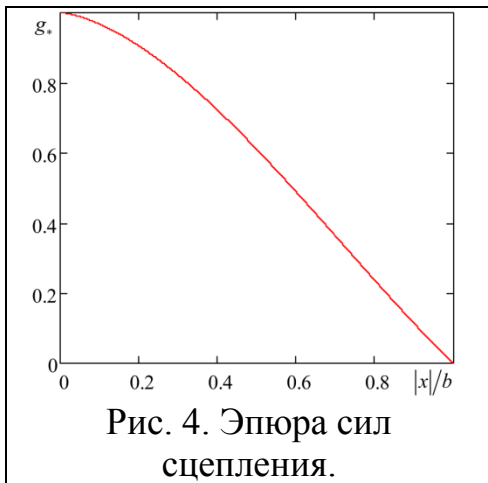


Рис. 4. Эпюра сил сцепления.

В разд. 2 показано, что это уравнение является уравнением Фредгольма. С помощью замены переменных  $s_* = \text{tg}(\theta/2)$ ;  $\xi_* = \text{tg}(\varphi/2)$  оно преобразуется в уравнение с вырожденным ядром. Решение уравнения представляется рядом:

$$g_*(\theta) = 1 - \sqrt{2\lambda} \text{tg}(\theta/2) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\theta \quad (17)$$

При проведении расчетов сумма ряда (17) заменяется суммой его первых  $N$  членов. Для определения коэффициентов  $c_k$  получается система

линейных алгебраических уравнений



$$c_k - a_{km}c_m = b_k; \quad k, m = 1, \dots, N; \quad a_{km} = \frac{\lambda}{k} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \sin k\varphi \sin m\varphi d\varphi; \quad (18)$$

$$b_k = \frac{\lambda}{k} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \sin k\varphi \left( 1 - \sqrt{2\lambda} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

Решение системы (18) находится при заданном значении параметра  $\lambda$ ; последнее определяется вторым из соотношений (16), которое, вкуче с системой (18), представляет собой трансцендентное уравнение для величины  $\lambda$ . С увеличением числа удерживаемых членов ряда решение сходится к величине  $\lambda = 0.9309$ .

В **третьем разделе** изложено решение задачи о краевой трещине в полуплоскости. Это решение находится методом Ирвина. В метод внесены изменения, упрощающие вывод основных уравнений и повышающие точность вычислений. Во-первых, вместо интегральных преобразований используется аппарат теории функции комплексного переменного. Во-вторых, система интегральных уравнений преобразуется в одно интегральное уравнение. И, в-третьих, вместо метода последовательных приближений применен метод Галеркина. Эффективность двух последних модификаций – следствие развития вычислительной техники.

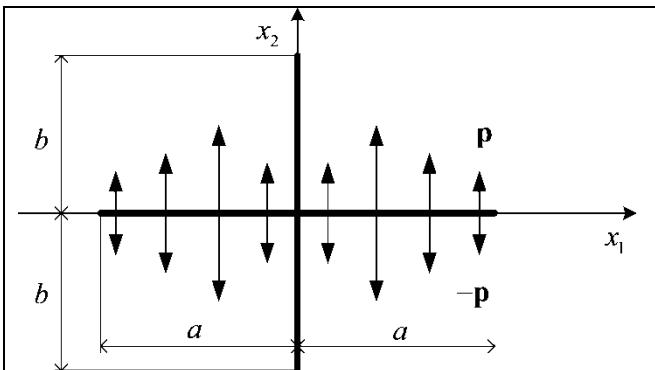


Рис. 5. Плоскость с двумя пересекающимися трещинами. Интенсивность нагрузки  $p_2(x_1)$  – четная функция

Рассмотрим плоскость с двумя пересекающимися трещинами (рис. 5): трещиной 1 длиной  $2a$  и ненагруженной трещиной длиной  $2b$ . При  $b \rightarrow \infty$  кромки трещины 2 трансформируются в граничные контуры двух полуплоскостей, и расчетная схема, изображенная на рис. 5, становится эквивалентной схеме, изображенной на рис. 1. Исходная задача представляется как композиция двух задач, решения которых известны. Первая из этих задач (далее – задача 1) – это задача о трещине

длиной  $2a$  в плоскости, вторая (далее – задача 2) – задача о правой полуплоскости, нагруженной по граничному контуру (формулы разд. 2 при  $\alpha = \pi/2$ ). Функции Колосова можно представить в виде:

$$\Phi(z) = \Phi_{(1)}(z) + \Phi_{(2)}(z); \quad \Psi(z) = \Psi_{(1)}(z) + \Psi_{(2)}(z) \quad (19)$$

где индекс в скобках обозначает номер задачи.

Решение первой задачи с учетом ее симметрии имеет вид:

$$\Phi_{(1)}(z) = -\frac{z}{\pi(z^2 - a^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} p_{(1)}(t) dt}{t^2 - z^2}; \quad \Psi_{(1)}(z) = -z\Phi'_{(1)}(z) \quad (20)$$

где  $p_{(1)}(t) = p_2(t) + q(t)$ ;  $p_2(t)$  – нагрузка, действующая на кромки трещины (включая силы сцепления);  $q(t)$  – неизвестная дополнительная нагрузка, компенсирующая влияние разреза вдоль оси ординат.

Решение второй задачи с учетом симметрии представляется как:

$$\Phi_{(2)}(z) = -\frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p_{(2)}(\eta) d\eta}{\eta^2 + z^2}; \quad \Psi_{(2)}(z) = z\Phi'_{(2)}(z) \quad (21)$$

где нагрузка  $p_{(2)}(\eta)$ , приложенная к граничному контуру полуплоскости в направлении оси абсцисс, компенсирует действие разреза (трещины).

Согласно решению задачи 1, на правую полуплоскость со стороны левой полуплоскости действует нагрузка, равная  $-\sigma_{(1)11}(0, y)$ , где  $y = x_2$ . Ее и компенсирует распределенное усилие  $p_{(2)}(y)$ :

$$p_{(2)}(y) = \sigma_{(1)11}(0, y) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dy} \left[ \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + a^2}} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} p_{(1)}(t) dt}{t^2 + y^2} \right] \quad (22)$$

Из решения задачи 2 получается, что на верхнюю кромку трещины со стороны нижней кромки действует нагрузка, равная  $-\sigma_{(2)22}(x, 0)$ , где  $x = x_1$ . Ее компенсирует нагрузка  $q(x)$ :

$$q(x) = \sigma_{(2)22}(x, 0) = -\frac{4x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 p_{(2)}(\eta) d\eta}{(\eta^2 + x^2)^2} \quad (23)$$

Система интегральных уравнений (22), (23) относительно функций  $q(x)$ ,  $p_{(2)}(y)$  тождественна системе, полученной Ирвином (Irwin) с помощью интегральных преобразований. Исключим из нее функцию  $p_{(2)}(y)$ . Приходим к уравнению:

$$q(x) - \lambda \int_0^a K(x, t) q(t) dt = f(x); \quad (24)$$

$$\lambda = \frac{16}{\pi^2}; \quad K(x, t) = x\sqrt{a^2 - t^2} I(x, t); \quad f(x) = \lambda \int_0^a K(x, t) p(t) dt$$

где функция  $I(x, t)$  определяется выражением

$$I(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{\eta^3 (\eta^2 - x^2) d\eta}{(\eta^2 + x^2)^3 (t^2 + \eta^2) \sqrt{\eta^2 + a^2}} = \frac{t^2 (t^2 + x^2)}{(t^2 - x^2)^3} [F_1(x) - F_1(t)] -$$

$$-\frac{x^2 (3t^2 - x^2)}{(t^2 - x^2)^2} F_2(x) + \frac{2x^4}{t^2 - x^2} F_3(x); \quad F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right); \quad (25)$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2(a^2 - x^2)} \left[ \frac{a}{x^2} - F_1(x) \right]; \quad F_3(x) = \frac{1}{4(a^2 - x^2)} \left[ \frac{a}{x^4} - 3F_2(x) \right]$$

Чтобы уравнение (25) было уравнением Фредгольма, необходимо выполнение условия:

$$\int_0^a \int_0^a [K(x,t)]^2 dx dt < M \quad (26)$$

где  $M$  – некоторое сколь угодно большое действительное число. Как следует из соотношений (25), ядро  $K(x,t)$  непрерывно при всех возможных значениях аргументов, за исключением случая, когда они оба стремятся к нулю. Асимптотическое выражение для ядра при  $x, t \rightarrow 0$  имеет вид

$$K(r, \varphi) \sim -\frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{r \cos^2 2\varphi} \left( \frac{\ln \operatorname{tg} \varphi}{\cos 2\varphi} + 1 \right); \quad x = r \cos \varphi; \quad t = r \sin \varphi; \quad \varphi \in [0, \pi/2] \quad (27)$$

Легко показать, что при  $r \neq 0$  это выражение конечно. Из-за особенности в точке  $r = 0$  ядро не удовлетворяет неравенству (26). В разд. 2 показано, что сингулярность ядра обусловлена тем, что не существует функций  $q(x)$ ,  $p_{(2)}(y)$ , обеспечивающих эквивалентность схем, изображенных на рис. 1 и 5, при  $x, t \rightarrow 0$ . Однако такая точка только одна. Поэтому существует слабое решение уравнения (24), которое тем точнее, чем дальше рассматриваемая точка находится от начала координат. Так как интерес представляет окрестность кончика трещины, такое решение вполне применимо.

Как следует из выражения (27), интеграл

$$\int_0^a \int_0^a K(x,t) \psi(x,t) dx dt \quad (28)$$

где  $\psi(x,t)$  – некоторая непрерывная функция, сходится. Это дает основание использовать для решения уравнения (24) метод Галеркина. Решение ищется в виде отрезка ряда по координатным функциям

$$q(x) = \sum_{k=0}^N c_k P_k(x) \quad (29)$$

где  $N+1$  – число координатных функций,  $c_k$  – искомые коэффициенты разложения. Первые  $N$  функций непрерывны в интервале  $x \in [0, a]$ . Особенность ядра приводит к особенности у искомой функции. Поэтому функция  $P_N(x)$  имеет особенность в точке  $x = 0$ . В разд. 3 обоснован выбор  $P_N(x) = \ln(x)$ . В качестве непрерывных координатных функций выбраны полиномы Лежандра, которые на отрезке  $[-1, 1]$  ортогональны и образуют полную систему функций. При этом метод Галеркина дает решение, стремящееся к точному при  $N \rightarrow \infty$ .

Для преобразования интервала интегрирования в уравнении (24) в отрезок  $[-1,1]$  вводятся новые переменные  $\zeta, \tau$ :

$$x = 0.5a(1 + \zeta); \quad t = 0.5(1 + \tau); \quad \zeta, \tau \in [-1,1] \quad (30)$$

Подставим выражение (29) в уравнение (24), умножим уравнение (24) на  $P_j(\zeta)$  и проинтегрируем по отрезку  $[-1,1]$ . В результате получим систему  $N + 1$  линейных алгебраических уравнений относительно  $N + 1$  неизвестных  $c_k$ :

$$\sum_{k=0}^N \mu_{jk} c_k = b_j; \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (31)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mu_{jk} &= \int_{-1}^1 [1 - F(\zeta)] P_k(\zeta) P_j(\zeta) d\zeta - \frac{\lambda a}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(\zeta, \tau) [P_k(\tau) - P_k(\zeta)] P_j(\zeta) d\zeta d\tau; \\ b_j &= \int_{-1}^1 F(\zeta) p(\zeta) P_j(\zeta) d\zeta + \frac{\lambda a}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(\zeta, \tau) [p(\tau) - p(\zeta)] P_j(\zeta) d\zeta d\tau; \\ F(x) &= \frac{16x}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\eta^3 (\eta^2 - x^2) d\eta}{\sqrt{\eta^2 + a^2} (\eta^2 + x^2)^3} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{t^2 + \eta^2} = 1 + \frac{8ax}{\pi(a^2 - x^2)} \left\{ 1 + \frac{3x^2}{4(a^2 - x^2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4a(a^2 - x^2)^{3/2}} \left[ (a^2 - x^2)^2 + 3a^4 \right] \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

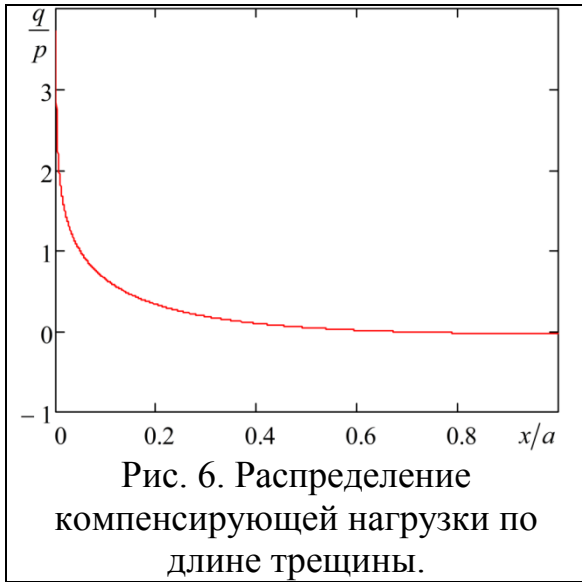
Интегралы (32) находятся численно. В настоящем исследовании использовался следующий алгоритм. Интервал интегрирования разбивался на  $n$  равных отрезков. Интегрирование внутри каждого отрезка выполнялось методом Гаусса (Гаусса-Лежандра) с 12 узлами. По такой же схеме вычислялись интегралы в других разделах диссертации.

Поскольку поле напряжений, получаемое в результате решения задачи 2, регулярно в кончике трещины, коэффициент интенсивности напряжений определяется по формуле для задачи 1

$$K_I = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^a \frac{p_{(1)}(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \quad (33)$$

Сопоставим результаты расчетов  $K_I$  разработанным методом с точным решением при постоянной нагрузке  $p_2 = p = \text{const}$ . Аналитическое решение для этого случая (Уиглсуэрт) дает величину, с точностью до семи значащих цифр равную  $K_I^* = K_I / (p\sqrt{\pi a}) = 1.121522$ . При решении разработанным методом это значение

достигается уже при  $N = 20$ ;  $n = 400$ . Все численные результаты, и представленные на рис. 6, и о которых говорится ниже, получены при этих исходных данных.



**Четвертый раздел** – основной раздел диссертации – посвящен описанию метода решения задачи о когезионной краевой трещине в полуплоскости при нелинейном определяющем соотношении для сил сцепления. Расчетная схема представляет собой упругую полуплоскость с прямолинейной трещиной нормального разрыва, перпендикулярной границе полуплоскости (рис. 1). Нагрузка, приложенная к верхней кромке трещины, определяется формулой (11). Естественно предположение, что силы сцепления по длине трещины изменяются непрерывно. С учетом

того, что они отличны от нуля только в когезионной зоне, определяющее соотношение для них записывается в виде

$$g = \begin{cases} g_M f(v/v_M), & v \leq v_M; \\ 0, & v > v_M \end{cases}; \quad f(0) = 1; \quad f(1) = 0; \quad v(a-b) = v_M \quad (34)$$

В настоящей работе рассматривается общий случай формулы (34), то есть нелинейное соотношение. Аналогичная более простая задача о когезионной трещине в плоскости рассматривалась в ряде работ. Для решения нелинейной задачи Хуанг (Huang) применил метод Ньютона, но как показано в работе Унгсуварунгсри (Ungsuwarungsri) и Кнаусса (Knauss), не менее эффективно и гораздо проще использовать здесь метод последовательных приближений. Настоящая работа следует этим рекомендациям. В каждой итерации процесса решения нелинейной задачи необходимо решить задачу линейной теории упругости. Решение такой задачи получено в разд. 3. Различие между итерациями заключается в различном распределении сил  $p_2(x)$ .

При построении алгоритма итерационного процесса удобно представить внешнюю нагрузку в виде

$$p(x) = Cp_0(x) \quad (35)$$

где  $p_0(x)$  – заданная функция,  $C$  – постоянная, меняющаяся от итерации к итерации. Условие конечности напряжений (14) при заданном распределении сил сцепления представляет собой линейное уравнение для определения  $C$ .

Для вычисления сил сцепления необходимо, согласно формуле (34), найти перемещение верхней кромки трещины вдоль оси ординат. Так как трещина – это сильный разрыв поля перемещений, а перемещения в задаче 2 (см. разд. 3) непрерывны, упомянутое перемещение верхней кромки трещины полностью определяется решением задачи 1 – задачи о трещине в плоскости. Оно определяется, как показано в разд. 4, для случая плоской деформации при выполнении условия (14) формулой

$$v(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^a [p_{(1)}(t) - p_{(1)}(x)] \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 - t^2} + \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - t^2} - \sqrt{a^2 - x^2}} \right| dt + \right. \\ \left. + p_{(1)}(x) \sqrt{a^2 - x^2} \right\} \quad (36)$$

Итерационный процесс строится следующим образом. К началу  $k$ -той итерации известны перемещения верхней кромки трещины  $v_{k-1}(x)$  и, соответственно, граница когезионной зоны  $b_{k-1}$ . По формуле (34) находится распределение сил сцепления вдоль кромки трещины  $g_{k-1}(x)$ . Следующий шаг – решение линейной задачи о полуплоскости с краевой трещиной и определение из уравнения (14) константы  $C_{k-1}$ . Далее по формуле (36) находятся перемещения  $v_k(x)$  и из условия (34) – новое значение границы когезионной зоны  $b_k$ . Итерационный процесс повторяется до сходимости, определяемой критерием:

$$\frac{|b_k - b_{k-1}|}{a} < \varepsilon \quad (37)$$

где  $\varepsilon > 0$  – достаточно малое заданное число. В соответствии с рекомендациями Унгсуварунгси и Кнаусса начальное приближение выбирается в виде:

$$v_0(x) = v_M \left( \frac{a-x}{b_0} \right)^{1.5} \quad (38)$$

В приведенных ниже примерах полагалось  $\nu = 0.3$ ; распределение внешней нагрузки бралось постоянным:  $p_0 = 1$ . Допускаемая относительная погрешность решения (37) принималась равной  $\varepsilon = 10^{-7}$ .

Эффект протяженности когезионной зоны проявляется в величине  $J$ -интеграла

$$J = -2 \int_{a-b}^a g(x) \frac{dv}{dx} dx = 2W(v_M) = 2 \int_0^{v_M} g(v) dv \quad (39)$$

Эту величину естественно сопоставить со значением  $J$ -интеграла для некогезионной трещины  $J_* = (1 - \nu^2) K_{I*}^2 / E$ , где  $K_{I*}$  – коэффициент интенсивности напряжений, вычисленный по формуле (33) при условии, что  $p_2(x) = p(x)$ , то есть в отсутствие сил сцепления.

Рассмотрим вначале решение задачи для трещины Леонова-Панасюка-Дагдейла

$$g = \begin{cases} g_M, & x \geq a - b \\ 0, & x < a - b \end{cases} \quad (40)$$

$b/a$	$p_* = p/g_M$		
	Разработанный метод	Ванг и Дэмпси	Ховард и Оттер
0.1	0.2588	0.2599	0.2588
0.2	0.3734	0.3752	0.3734
0.4	0.5505	0.5517	0.5505
0.6	0.7049	0.7050	0.7049
0.8	0.8529	0.8528	0.8529

В табл. представлены результаты расчета нагрузки на кромки трещины в зависимости от длины когезионной зоны. Можно отметить приемлемое согласование результатов, полученных разными методами. Это подтверждает достоверность результатов, получаемых изложенным методом.

Рассмотрим теперь решение задачи для нелинейного определяющего соотношения (34). Функция  $f(v/v_M)$  непрерывна, и, согласно теореме Вейерштрасса, ее можно сколь угодно точно аппроксимировать полиномом. Естественно считать ее не только непрерывной, но и гладкой. Простейшая такая функция имеет вид:

$$f(v/v_M) = \frac{g}{g_M} = \begin{cases} 1 - 3(v/v_M)^2 + 2(v/v_M)^3, & v \leq v_M; \\ 0, & v > v_M \end{cases} \quad (41)$$

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad f'(1) = 0$$

Некоторые результаты расчетов при  $g_M/E = 0.05$  представлены на рис. 7–10. На рис. 7 приведена зависимость внешней нагрузки от длины когезионной зоны, а на рис. 8 – зависимость отношения значений  $J$ -интеграла для когезионной и некогезионной трещин. Отличие этого отношения от единицы может служить мерой фактора, обуславливающего anomальное поведение коротких трещин. Графики на рис. 9, 10 получены при  $v_M/a = 0.02$ .

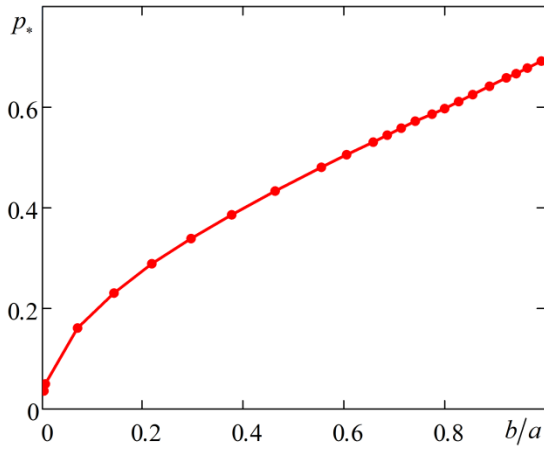


Рис. 7. Интенсивность внешней нагрузки в зависимости от длины когезионной зоны.

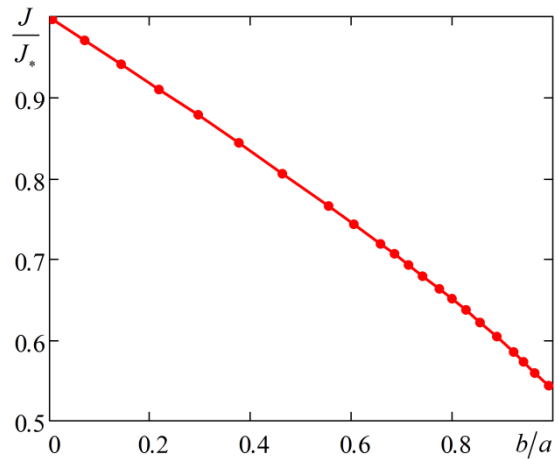


Рис. 8. Отношение значений  $J$ -интеграла в зависимости от длины когезионной зоны.

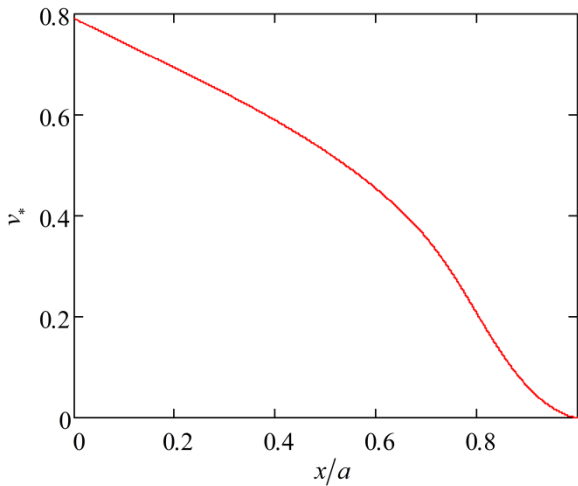


Рис. 9. Вертикальные перемещения верхней кромки трещины.  

$$v_* = \sqrt{2\pi}Ev / [4(1-\nu^2)K_{I*}\sqrt{a}].$$

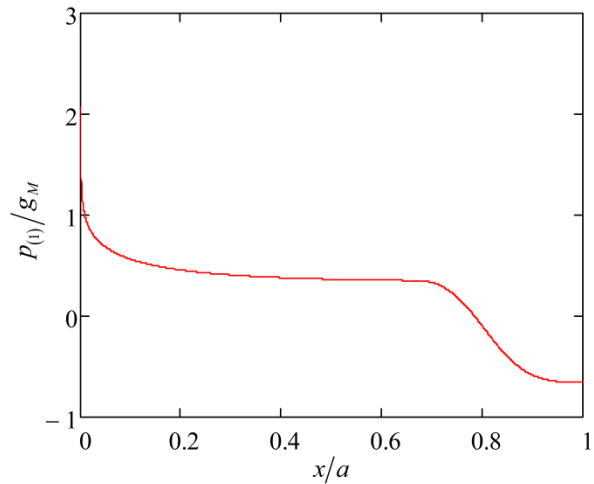


Рис. 10. Эпюра нагрузки на верхнюю кромку трещины.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы.

**Приложение** (справочное) содержит формулы решения задачи о прямолинейной трещине в плоскости.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Найдено новое решение задачи о полуплоскости, нагруженной по границе. Отличие от предшествующих решений, использующих комплексный анализ, в том, что граничное уравнение не преобразуется в функциональное уравнение, а решается непосредственно с учетом голоморфности искомых функций. Это оказывается возможным благодаря использованию тождества Племеля.



2. Обобщено и уточнено решение задачи о когезионной полубесконечной трещине в плоскости при линейной связи интенсивности сил сцепления с раскрытием трещины. В отличие от предыдущих исследований, где разрешающее интегральное уравнение следовало из постановки некоторой модельной задачи, доказана, благодаря новому выводу, универсальность этого уравнения: оно оказывается справедливым при любом распределении внешней нагрузки. Уточнены также численные результаты предыдущих исследований.
3. Усовершенствован метод Ирвина для решения задачи о краевой трещине в полуплоскости. Упрощен вывод разрешающей системы интегральных уравнений за счет того, что вместо интегральных преобразований используется аппарат теории функции комплексного переменного. Система интегральных уравнений преобразована в одно интегральное уравнение. Вместо метода последовательных приближений применен метод Галеркина.
4. На основе этих результатов разработан численно-аналитический метод решения задачи о когезионной краевой трещине в полуплоскости при нелинейной связи интенсивности сил сцепления с раскрытием трещины. Нелинейность учитывается методом последовательных приближений. В каждой итерации решается задача о краевой трещине в полуплоскости разработанным в диссертации методом.
5. Разработанный метод решения задачи о когезионной краевой трещине в полуплоскости применен к решению задач при постоянной интенсивности сил сцепления (трещина Леонова-Панасюка-Дагдейла) и линейной связи интенсивности сил сцепления с раскрытием трещины – задач, решенных в предшествующих исследованиях. Результаты расчетов согласуются с данными других исследователей, что свидетельствует о достоверности результатов, получаемых разработанным методом.
6. Рассмотрен пример решения задачи при нелинейной связи интенсивности сил сцепления с раскрытием трещины. Приведены эпюры когезионных сил вдоль кромок трещины, эпюры интенсивности напряжений в окрестности ее кончика.

### **Основные результаты диссертации опубликованы в работах<sup>2</sup>:**

1. *Ле Тхи Тхань*. Напряженное состояние полуплоскости, нагруженной по граничному контуру / *Ле Тхи Тхань, И.М. Лавит* // Труды Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж, 2015. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2015. – С. 82 – 84.

<sup>2</sup> Жирным шрифтом выделены публикации диссертанта в изданиях, входящих в Перечень ВАК.

2. *Ле Тхи Тхань*. Вариант решения задачи о краевой трещине в полуплоскости / *Ле Тхи Тхань, И.М. Лавит* // Сборник трудов IX Всероссийской конференции «Механика деформируемого твердого тела». Воронеж, 12-15 сентября 2016 г. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2016. – С. 24 – 26.
3. *Ле Тхи Тхань*. О решении задачи теории упругости для полуплоскости / *Ле Тхи Тхань, Л.А. Белая, И.М. Лавит* // **Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии**. – 2017. – № 2 (322). – С. 14 – 17.
4. *Ле Тхи Тхань*. Асимптотика напряженного состояния окрестности кончика когезионной трещины / *Ле Тхи Тхань, Л.А. Белая, И.М. Лавит* // **Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии**. – 2017. – № 3 (323). – С. 68 – 73.
5. *Ле Тхи Тхань*. Численный метод решения задачи о краевой трещине в полуплоскости / *Ле Тхи Тхань, И.М. Лавит* // **Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии**. – 2017. – № 5 (325). – С. 12 – 18.
6. *Ле Тхи Тхань*. Численно-аналитическое решение задачи о краевой трещине в полуплоскости / *Ле Тхи Тхань, И.М. Лавит* // Сборник трудов Всероссийской конференции «Вопросы прикладной математики и проблема взаимодействия твердых тел с жидкой и газовой средой», Москва, 16-18 октября 2017, ИПМех РАН. – М.: Диалог-МИФИ, 2017. – С. 83 – 90.
7. *Ле Тхи Тхань*. Когезионная краевая трещина в полуплоскости / *Ле Тхи Тхань, И.М. Лавит* // **Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии**. – 2017. – № 6 (326). – С. 12 – 18.
8. *Ле Тхи Тхань*. Задача об упругой полуплоскости с когезионной краевой трещиной / *Ле Тхи Тхань, И.М. Лавит* // Труды Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж, 18-20 декабря 2017. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2017. С. 1141 – 1146.
9. *Le Thi Thanh*. A solution to the problem of elastic half-plane with a cohesive edge crack / *Le Thi Thanh, L.A. Belaya, I.M. Lavit* // **Journal of Physics: Conference Series**. – 2018. – V. 973. – P. 012020.