

На правах рукописи



Малик Александр Васильевич

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТРЕЩИН**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Тула - 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Лавит Игорь Михайлович

Официальные оппоненты: **Морозов Евгений Михайлович**,
доктор технических наук, профессор,
Национальный исследовательский ядерный
университет «МИФИ», профессор.

Пеньков Виктор Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Липецкий государственный
технический университет», профессор.


Ведущая организация: ФГБУН «Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения РАН»

Защита диссертации состоится «22» июня 2018 г. в 12-00 часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» и ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, Тула, просп. Ленина, 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, Тула, просп. Ленина, 92 и на сайте <http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02>.

Автореферат разослан «25» апреля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

 Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

При анализе прочности деталей машин и элементов конструкций аппаратов можно, как правило, считать режим нагружения квазистатическим. Есть, однако, случаи, когда это допущение некорректно. Сюда относятся нерасчетные, часто ударные, режимы нагружения (при этом ставится задача избежать аварии), процессы разрушения горных пород при добыче полезных ископаемых, нагрузки при землетрясениях, пробитие брони и т.п. Математическое моделирование таких процессов и установление критериев прочности намного сложнее, чем для квазистатических аналогов.

Критерий начала квазихрупкого разрушения при квазистатическом нагружении формулируется как условие достижения коэффициента интенсивности напряжений (для трещины нормального разрыва) величины вязкости разрушения. Но, как показывают эксперименты, при высокой скорости нагружения невозможно определить значение коэффициента интенсивности напряжений, при достижении которого трещина начинает расти, используя только одну материальную константу, аналогичную вязкости разрушения в квазистатическом случае. Критерий разрушения, справедливый в квазистатических условиях, необходимо обобщить.

К настоящему времени такое обобщение предложено: это критерий Морозова-Петрова. Он включает в себя как составную часть зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени. Расчет этой зависимости может быть выполнен, за исключением простейших частных случаев, только численными методами. Эти методы существуют; каждый из них обладает своими достоинствами и недостатками. Можно говорить об эффективности метода, понимая под этим сочетание высокой точности и алгоритмической простоты. Создание более эффективных методов расширяет возможности теоретического исследования динамического разрушения. Настоящая диссертация посвящена разработке такого метода и решению им ряда задач, как решенных ранее другими исследователями, так и новых. Поэтому тема диссертационного исследования представляется актуальной.

Цель работы

Целью диссертационного исследования является разработка метода расчета зависимости коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении от времени и решение этим методом ряда задач, представляющих теоретический интерес.

Научная новизна работы

1. Разработан метод решения задач динамической механики разрушения для неподвижных трещин нормального разрыва.

2. Метод применен к решению ряда задач, имеющих научное и практическое значение.

Практическая ценность

Разработанный метод позволяет вычислять коэффициент интенсивности напряжений – величину, используемую в анализе прочности методами механики разрушения – при действии динамической, в том числе и взрывной, нагрузки. Результаты решений конкретных задач могут быть использованы на различных этапах проектирования ряда конструкций.

Достоверность

Достоверность полученных результатов подтверждается корректностью используемых методов исследования, согласованностью решений тестовых задач с решениями других исследователей и экспериментальными данными.

Апробация работы

Результаты исследования обсуждались на Международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (ВГУ, Воронеж, 2015, 2017 гг.), IX Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (ВГУ, Воронеж, 2016 г.), 1-ой Всероссийской конференции «Вопросы прикладной математики и проблема взаимодействия твердых тел с жидкой и газовой средой», посвященной 85-летию со дня рождения И.А. Кийко (ИПМех РАН, Москва, 2017 г.), Всероссийских научно-технических конференциях «Техника XXI века глазами молодых ученых и специалистов» (ТулГУ, Тула, 2015, 2016 гг.), семинаре по МДТТ им. Л.А. Толоконникова (ТулГУ, Тула, руководитель – проф. А.А. Маркин), ежегодных научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава ТулГУ.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Метод численного решения задач динамической механики разрушения для неподвижных трещин нормального разрыва.
2. Решение этим методом ряда задач, имеющих научное и практическое значение.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в шести публикациях, в том числе в двух статьях в журналах, входящих в перечень ВАК.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения и приложения. Объем работы – 101 страница, включая 47 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 113 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность диссертационного исследования, сформулирована цель работы. Изложены основные положения работы по разделам. Обсуждаются достоверность, научная новизна и практическая значимость исследования.

В **первом разделе** приведен обзор исследований, близких к теме диссертации. Задача, решаемая в диссертации, формулируется в общем виде следующим образом. Пусть тело, содержащее изолированную трещину, находится в состоянии плоской деформации. Поперечное сечение тела представляет собой область S , ограниченную контуром l (рис. 1).

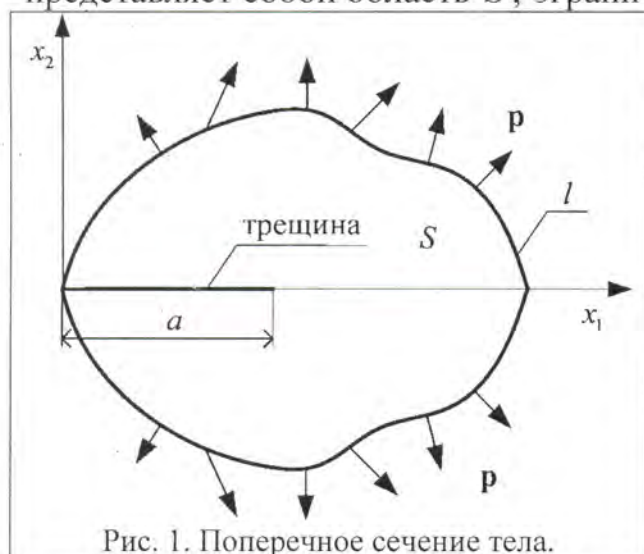


Рис. 1. Поперечное сечение тела.

Предполагается, что трещина прямолинейна и лежит на оси абсцисс. Область S и распределение поверхностных нагрузок $p(t)$, где t – время (массовые силы здесь, как и в других аналогичных исследованиях, не учитываются), симметричны относительно оси абсцисс. При этом трещина, изображенная на рис. 1, будет трещиной нормального разрыва (нормального отрыва). Разрушение предполагается квазихрупким. Это значит, что деформации малы и

материал является линейно упругим вплоть до разрушения. В настоящей диссертации рассматривается случай неподвижной трещины $a = \text{const}$ (рис. 1). Нагрузка изменяется настолько быстро, что пренебрегать инерционными силами недопустимо. Требуется найти функцию $K_I(t)$ – зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени. Она входит как составная часть в критерий Морозова-Петрова, определяющий, начнется ли рост трещины при данных условиях нагружения или нет.

Для получения зависимости $K_I(t)$ разработаны аналитические и численные методы. Если область S конечна, а именно такие случаи представляют практический интерес, решить задачу возможно только численными методами. Используются, как правило, какие-либо модификации методов конечных разностей, конечных или граничных элементов. Удобно классифицировать эти методы в зависимости от того, как в них решается проблема особой точки полей напряжений в кончике трещины.

Первая группа методов (Chen; Chen, Wilkins; Lin, Ballman; Malluck, King; Brickstad, Nilsson; Stylianou, Ivankovic и др.) основана на предположении, что при достаточно густой расчетной сетке (конечноэлементной или конечноразностной) на некотором расстоянии от кончика трещины

распределение напряжений, полученное численно, будет мало отличаться от даваемого известными асимптотическими формулами. Недостатками этих методов являются невысокая точность, а также сложность и неоднозначность процедур вычисления K_I .

Более эффективны методы второй группы (Nishioka, Atluri; Murti, Valliappan; Партон, Борисковский; King, Malluck; Kishimoto, Aoki, Sakata и др.), в которых используются специальные элементы, моделирующие сингулярность напряжений в окрестности кончика трещины. Это усовершенствование сопряжено, однако, с рядом недостатков. Во-первых, фактически исключаются из рассмотрения задачи для растущих трещин, так как при этом приходится перестраивать конечноэлементную сетку. Этот процесс предполагает многократную интерполяцию, что существенно понижает точность расчетов и сводит на нет достоинство применения сингулярных элементов. Во-вторых, сингулярное поле напряжений в окрестности кончика трещины возникает, как правило, через некоторое время после начала процесса динамического нагружения. В течение этого времени сингулярный элемент вынужденно моделирует то, чего на самом деле нет. Это, безусловно, является источником погрешности, которую невозможно оценить заранее.

Наряду с численными методами, позволяющими вычислять коэффициент интенсивности напряжений, в динамике разрушения используются численные методы, основанные на представлении о силах сцепления, притягивающих друг к другу противоположные кромки трещины. Первый такой метод был предложен Xu, Needleman в 1994 г. и применен к проблеме математического моделирования ветвления трещин. В этих методах удельная высвобожденная энергия при продвижении трещины представляется как работа сил сцепления. Эту величину можно связать с коэффициентом интенсивности напряжений, если распределение сил сцепления подчинить условиям отсутствия сингулярности поля напряжений в кончике трещины и малости длины зоны сцепления по сравнению с длиной трещины (Баренблатт). Но в упомянутых методах эти условия не выполняются. Исключение составляет метод, разработанный Моёс, Belytschko в 2002 г. В нем отсутствие сингулярности удовлетворяется с помощью итерационной процедуры, что является существенным ограничением. Метод был применен лишь к решению квазистатических задач. Решения этим методом задач динамической механики разрушения неизвестны.

Представляет интерес разработка метода, который по точности сопоставим с методами, использующими сингулярные элементы, и обладает простотой и универсальностью методов, основанных на концепции сил сцепления. Такой метод представлен в настоящей диссертации. Он основан на аналогичном методе (Лавит, 1988), предназначенном для решения квазистатических задач нелинейной механики разрушения.

Второй раздел – основной раздел диссертации – содержит описание разработанного метода расчета. Математическая модель основана на известных соотношениях теории упругости

$$\varepsilon_{km} = (\partial_k u_m + \partial_m u_k) / 2; \quad \sigma_{km} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{km} + 2\mu \varepsilon_{km}; \quad i, k, m = 1, 2; \quad \partial_k = \partial / \partial x_k; \quad (1)$$

$$\lambda = \nu E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]; \quad \mu = E / [2(1 + \nu)]; \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}; \quad c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$$

где $u_k(x_m, t)$ – поле перемещений, ε_{km} – тензор деформаций, σ_{km} – тензор напряжений, λ, μ – параметры Ламе, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, δ_{km} – символ Кронекера, ρ – плотность, c_1 – скорость волны расширения, c_2 – скорость волны сдвига. В области S выполняются уравнения движения

$$\partial_m \sigma_{km} = \rho \partial_t v_k, \quad v_k = \partial_t u_k, \quad \partial_t = \partial / \partial t \quad (2)$$

где v_k – поле скоростей. Решение уравнения (2) должно удовлетворять начальным и граничным условиям. Начальные условия предполагаются нулевыми. Граничные условия могут быть либо главными (кинематическими), либо естественными (динамическими).

Слабое решение задачи получается из принципа возможных перемещений

$$\int_S (\rho \partial_t v_k \delta u_k + \sigma_{km} \delta \varepsilon_{km}) dS = \int_l p_k \delta u_k dl \quad (3)$$

где δ – символ вариации, p_k – внешняя нагрузка (рис. 1). Уравнение (3) эквивалентно уравнениям движения и естественным граничным условиям. Решение уравнения (3) разыскивается в классе функций, удовлетворяющих главным граничным условиям. При этом вариации перемещений на участках граничного контура, где заданы главные граничные условия, равны нулю.

Предлагаемый подход к решению отличается от предшествующих методов использованием специальных когезионных конечных элементов, которые автоматически обеспечивают отсутствие сингулярности напряжений в кончике трещины, а также способом дискретизации задачи. Обычно при решении динамических задач методом конечных элементов основными неизвестными являются перемещения узлов конечноэлементной сетки, рассматриваемые как функции времени. После интегрирования по пространственным переменным получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно этих функций. В настоящем исследовании применен другой подход, называемый методом прямых (Rothe, 1930).

Первый шаг решения задачи методом прямых – преобразование уравнения (3) к конечноразностному уравнению по времени. Для этого в настоящем исследовании используется хорошо известная неявная схема Кранка-Николсон. Пусть Δt – величина шага интегрирования по времени, n – номер шага интегрирования. Конечноразностное представление производной по времени на n -ом шаге имеет вид:

$$\partial_t y = (y^n - y^{n-1}) / \Delta t$$

где y^{n-1}, y^n – значения y на границах временного интервала. Величины, не содержащие производных по времени, представляются на n -ом шаге интегрирования по времени в виде:

$$y = (y^n + y^{n-1}) / 2$$

Уравнение (3) преобразуется по этой схеме к виду:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_S \left[\rho \frac{v_k^n - v_k^{n-1}}{\Delta t} \delta u_k + \frac{1}{2} (\sigma_{km}^n + \sigma_{km}^{n-1}) \delta \varepsilon_{km} \right] dS &= \frac{1}{2} \int_l (p_k^n + p_k^{n-1}) \delta u_k dl \\ \frac{1}{2} (v_k^n + v_k^{n-1}) &= \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Величины с индексами $n-1$ известны из решения для предыдущего шага. Система (4) распадается на два уравнения:

$$\int_S \left[\frac{4\rho}{(\Delta t)^2} u_k^n \delta u_k + \sigma_{km}^n \delta \varepsilon_{km} \right] dS = \int_l (p_k^n + p_k^{n-1}) \delta u_k dl + \int_S \left[\frac{4\rho}{\Delta t} \left(\frac{u_k^{n-1}}{\Delta t} + v_k^{n-1} \right) \delta u_k - \sigma_{km}^{n-1} \delta \varepsilon_{km} \right] dS$$

$$v_k^n = \frac{2}{\Delta t} (u_k^n - u_k^{n-1}) - v_k^{n-1} \quad (5)$$

Вначале из первого уравнения (5) определяются перемещения u_k^n , затем из второго уравнения (5) – скорости v_k^n .

На каждом шаге интегрирования по времени первое уравнение (5) решается методом конечных элементов. Пусть \mathbf{U} – матрица-столбец узловых неизвестных, \mathbf{V} – матрица-столбец их скоростей, \mathbf{E} – матрица жесткости, \mathbf{M} – матрица масс, \mathbf{P} – матрица-столбец нагрузок, обусловленная первым слагаемым в правой части первого уравнения (5). Система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных \mathbf{U}^n , эквивалентная вариационному уравнению (5), записывается в виде:

$$\left[\frac{4}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \mathbf{E} \right] \mathbf{U}^n = \mathbf{P}^n + \mathbf{P}^{n-1} + \frac{4}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} (\mathbf{U}^{n-1} + \Delta t \mathbf{V}^{n-1}) - \mathbf{E} \mathbf{U}^{n-1}$$

Матрица коэффициентов разрешающей системы линейных алгебраических уравнений для краевых задач на каждом шаге одна и та же (задачи отличаются одна от другой за счет правых частей разрешающей системы уравнений), и эта матрица – ленточная. Это свойство удается использовать только в методе прямых. Узловые скорости определяются формулой, следующей из второго равенства (5):

$$\mathbf{V}^n = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}) - \mathbf{V}^{n-1}$$

Специфика, вносимая трещиной в краевую задачу теории упругости, учитывается с помощью специальных когезионных конечных элементов

(Лавит, 1988). К линии трещины примыкает слой когезионных конечных элементов (рис. 2).

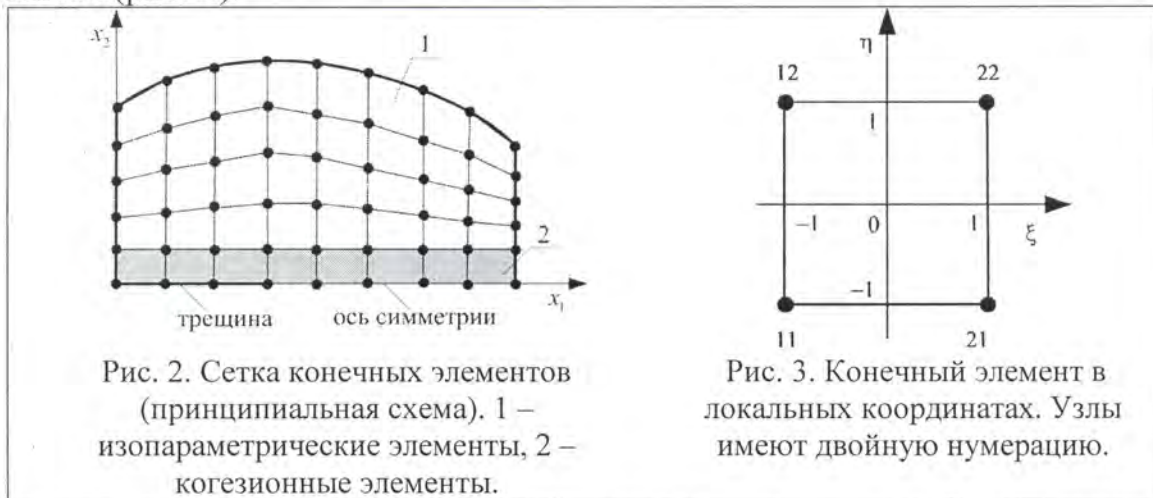


Рис. 2. Сетка конечных элементов (принципиальная схема). 1 – изопараметрические элементы, 2 – когезионные элементы.

Рис. 3. Конечный элемент в локальных координатах. Узлы имеют двойную нумерацию.

Остальная часть сечения покрывается сеткой изопараметрических конечных элементов. В данном исследовании использовались изопараметрические конечные элементы первого порядка. Каждый из них в локальных координатах представляет собой квадрат (рис. 3). Глобальные координаты точек элемента и перемещения в этих точках определяются формулами:

$$x_k = L_I(\xi)L_J(\eta)X_{k,IJ}; \quad u_k = L_I(\xi)L_J(\eta)U_{k,IJ}; \quad I, J = 1, 2; \quad \xi, \eta \in [-1, 1]$$

где $X_{k,IJ}$ – заданные глобальные координаты узла с номером IJ , $U_{k,IJ}$ – перемещения узла с номером IJ , $L_I(z)$ – интерполяционные полиномы Лагранжа:

$$L_1(z) = 0.5(1 - z); \quad L_2(z) = 0.5(1 + z)$$

Глобальные узловые координаты задаются. Узловые перемещения $U_{k,IJ}$ – это основные неизвестные задачи.

Когезионные конечные элементы, так же, как и обычные, в локальных координатах представляют собой квадраты (рис. 3). В отличие от обычных элементов когезионные элементы не являются изопараметрическими и в глобальных координатах представляют собой прямоугольники. Условие отсутствия сингулярности напряжений в кончике трещины эквивалентно условию плавного смыкания кромок трещины в ее кончике (рис. 4), которое записывается в виде

$$x_1 = a, \quad x_2 = 0: \quad \partial u_2 / \partial x_1 = 0 \quad (6)$$

Перемещения точек когезионного конечного элемента определяются формулами:

$$u_1 = L_I(\xi)L_J(\eta)U_{1,IJ};$$

$$u_2 = H_I(\xi)L_1(\eta)U_{2,I1} + L_I(\xi)L_2(\eta)U_{2,I2} + 0.5\Delta x_1 H_{I+2}(\xi)L_1(\eta)U_{3,I1}$$

где Δx_1 – размер элемента по оси абсцисс, $U_{3,I1}$ – значения производной $\partial u_2 / \partial x_1$ в I -ом узле (эти величины определяются только для узлов, лежащих на оси

абсцисс – прямой, на которой расположена трещина), $H_m(z)$ – интерполяционные полиномы Эрмита:

$$H_1(z) = 0.25(2 - 3z + z^3); \quad H_2(z) = 0.25(2 + 3z - z^3);$$

$$H_3(z) = 0.25(1 - z - z^2 + z^3); \quad H_4(z) = 0.25(-1 - z + z^2 + z^3)$$

Когезионные конечные элементы обеспечивают выполнение условия (6). Если кончик трещины совпадает с узлом конечноэлементной сетки, длина зоны сцепления равна длине элемента в направлении оси абсцисс. В случае неподвижной трещины всегда можно подобрать размеры сетки так, чтобы кончик трещины попал в узел.

При выполнении условий справедливости теории Баренблатта величина удельной высвобожденной энергии при продвижении трещины G не зависит от закона изменения сил сцепления вдоль кромки трещины $q_2(x_1)$ (рис. 4). Поэтому для вычисления G используется следующий подход. Граничные условия в кончике трещины представляют собой, с механической точки зрения, связи. Реакции этих связей, Q_B и M_B (рис. 5) легко подсчитать, подставляя значения узловых перемещений в соответствующие непреобразованные уравнения разрешающей системы уравнений.

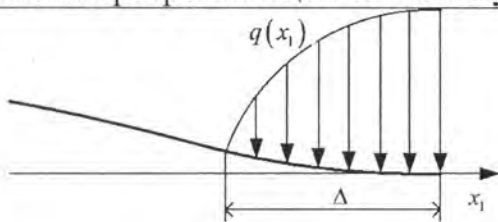


Рис. 4. Верхняя кромка трещины при деформации; Δ – длина зоны сцепления; $q(x_1)$ – силы сцепления.

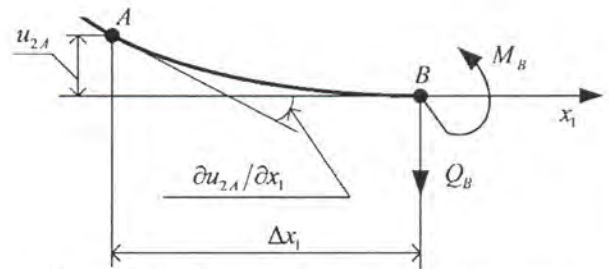


Рис. 5. Деформирование окрестности кончика трещины. Кончик трещины расположен в узле B . Δx_1 – расстояние между соседними узлами, расположенными на линии трещины.

При продвижении трещины на длину конечного элемента Δx_1 эти реакции связей уменьшаются (по модулю) до нуля, а соответствующие им перемещения u_2 и угол поворота $\partial u_2 / \partial x_1$ приобретают конечные значения. Согласно теории Баренблатта, при росте трещины конфигурация конечной области не изменяется. Это значит, что перемещения, которые получит узел B при продвижении трещины на величину Δx_1 , будут равны перемещениям узла A при совпадении кончика трещины с узлом B . При этом величина удельной высвобожденной энергии определяется формулой:

$$G = -\frac{1}{\Delta x_1} \left(Q_B u_{2A} + M_B \frac{\partial u_{2A}}{\partial x_1} \right) \quad (7)$$

Формула (7) учитывает наличие у трещины двух кромок.

Из теории Баренблатта также следует, что и при квазистатическом, и при динамическом нагружении связь удельной высвобожденной энергии при продвижении кончика трещины с коэффициентом интенсивности напряжений определяется формулой:

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2$$

Необходимость введения целого ряда когезионных элементов (рис. 2) обусловлена требованием межэлементной непрерывности перемещений, как между когезионными элементами, так и между когезионными и обычными изопараметрическими элементами. Далее в разд. 2 показано, что когезионные элементы удовлетворяют также и требованию воспроизведения правильных постоянных значений деформаций при произвольном линейном законе изменения узловых перемещений, что обеспечивает сходимость численного решения к точному с увеличением числа конечных элементов.

В **третьем разделе** излагаются результаты решения задач для прямоугольных областей. Первая из них – задача Чена (Chen) – задача о прямоугольной области с центральной трещиной. К сторонам прямоугольника, параллельным трещине, мгновенно прикладывается равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , далее остающаяся неизменной (рис. 6). Впервые эту задачу решил Chen (1975). Она была предметом ряда последующих исследований (Brickstad; Murti, Valliappan; Israil, Dargush; Lin, Ballmann и др.). В работе Murti, Valliappan эта задача названа задачей Чена, и это название закрепилось в более поздних публикациях. Авторы упомянутых исследований получили близкие результаты, причем они применяли различные методы. Поэтому задачу Чена можно считать тестовой.

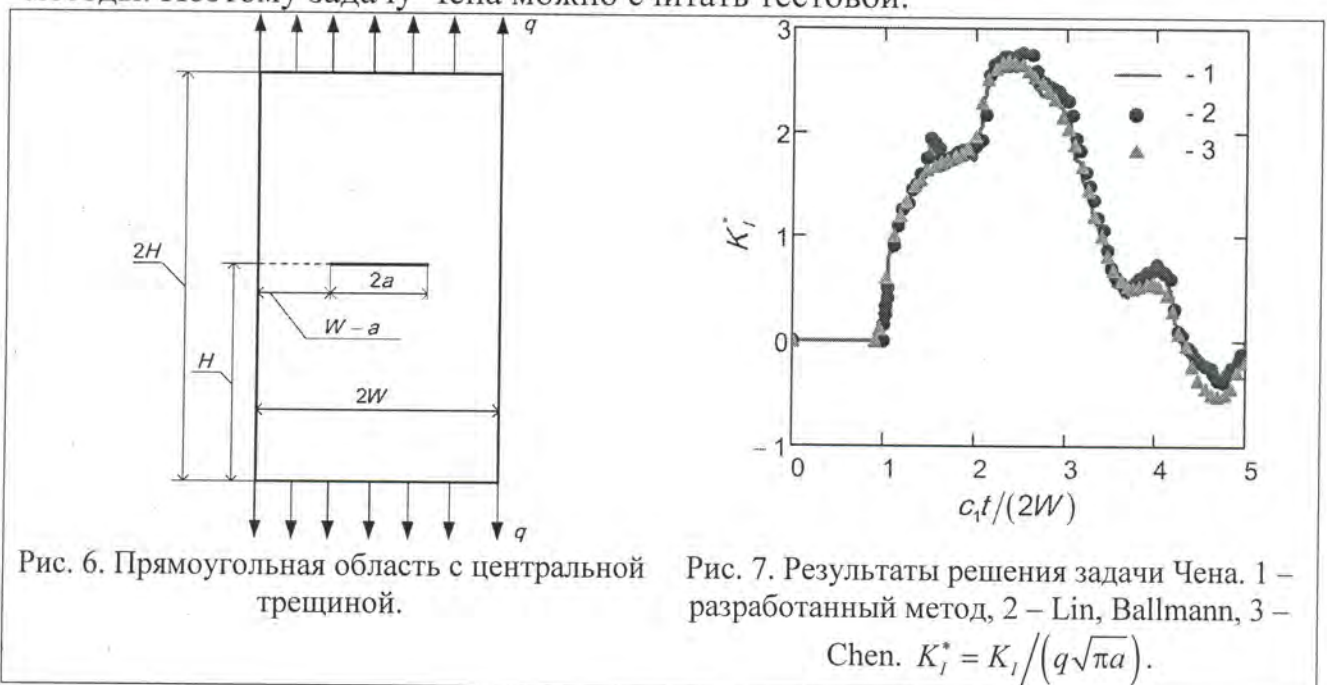


Рис. 6. Прямоугольная область с центральной трещиной.

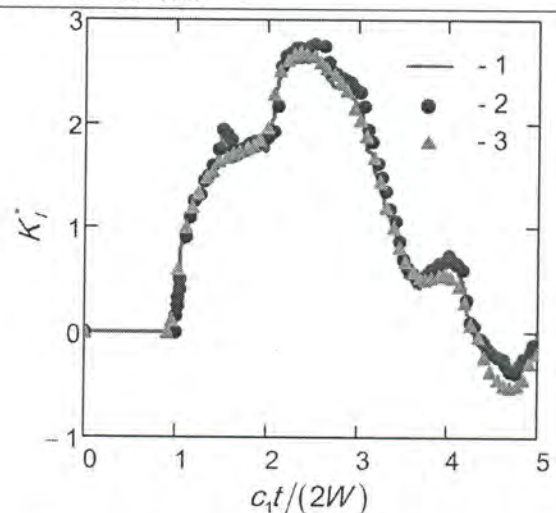


Рис. 7. Результаты решения задачи Чена. 1 – разработанный метод, 2 – Lin, Ballmann, 3 – Chen. $K_I^* = K_I / (q\sqrt{\pi a})$.

Расчеты проводились при следующих исходных данных (Chen): модуль Юнга $E = 2 \times 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 5000$ кг/м³, нагрузка $q = 400$ МПа, размеры полосы: $W = 10$ мм, $H = 20$ мм, длина трещины $a = 2.4$ мм. Рассматриваемый интервал времени равен $t_{\max} = 14$ мкс. На рис. 7 представлены результаты расчета при числе шагов по времени $N = 900$, числе конечных элементов по оси абсцисс $n_1 = 100$ и числе конечных элементов по оси ординат $n_2 = 200$. Как следует из рис. 7, результаты расчетов изложенным методом практически совпадают с результатами работ Chen; Lin, Ballmann, что подтверждает достоверность результатов расчетов разработанным методом.

Далее в разд. 3 приведены результаты решения другой задачи о прямоугольнике с центральной трещиной, отличающейся от задачи Чена исходными данными. Приведены также результаты решения задач о прямоугольнике с краевой трещиной и о трехточечном изгибном образце (балке на двух опорах, ослабленной трещиной и нагруженной в середине пролета). Полученные результаты сопоставляются с результатами других исследователей.

Особое значение имеет сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными. В экспериментах Ravi-Chandar, Knauss (1982) образцы из оптически прозрачного полимера Nomalite-100, имеющие вид прямоугольников с краевой трещиной, нагружались по ее кромкам (рис. 8). Размеры образцов: $W = 500$ мм, $H = 150$ мм. Длина трещины выбиралась таким образом, чтобы расстояние от кончика трещины до граничного контура было бы максимальным, то есть $a/W = 0.5$.

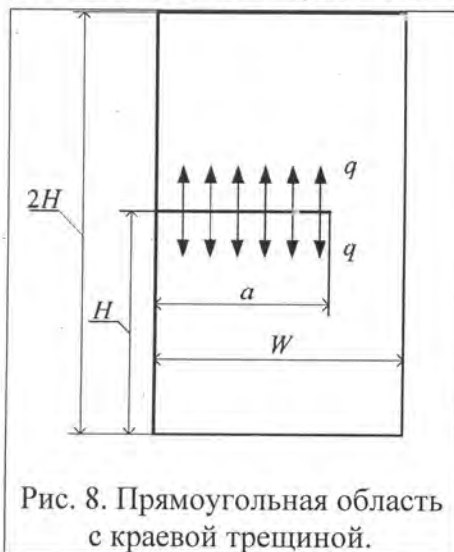


Рис. 8. Прямоугольная область с краевой трещиной.

Механические характеристики материала: $E = 4550$ МПа, $\nu = 0.31$, $\rho = 1230$ кг/м³. Нагрузка $q(t)$ вначале возрастает по линейному закону до значения q_M и далее остается постоянной. Расчеты проводились при $n_1 = 100$, $n_2 = 30$. Шаг по времени составлял $\Delta t = 10^{-3} W \sqrt{\rho/E}$. Рассмотрены четыре случая, отличающиеся величиной q_M и временным интервалом t_{\max} , который соответствовал экспериментально определенному моменту начала роста трещины. Сопоставление результатов расчетов с экспериментальными данными приведено на рис.

9.

В разд. 3 представлено также сопоставление результатов расчетов с экспериментальными данными Kalthoff, полученными на трехточечных изгибных образцах из стали и эпоксидной смолы Araldite B, и с экспериментальными данными Krishnaswamy, Rosakis, полученными на

трехточечных изгибных образцах из стали. Делается вывод об удовлетворительном согласовании теории с экспериментом.

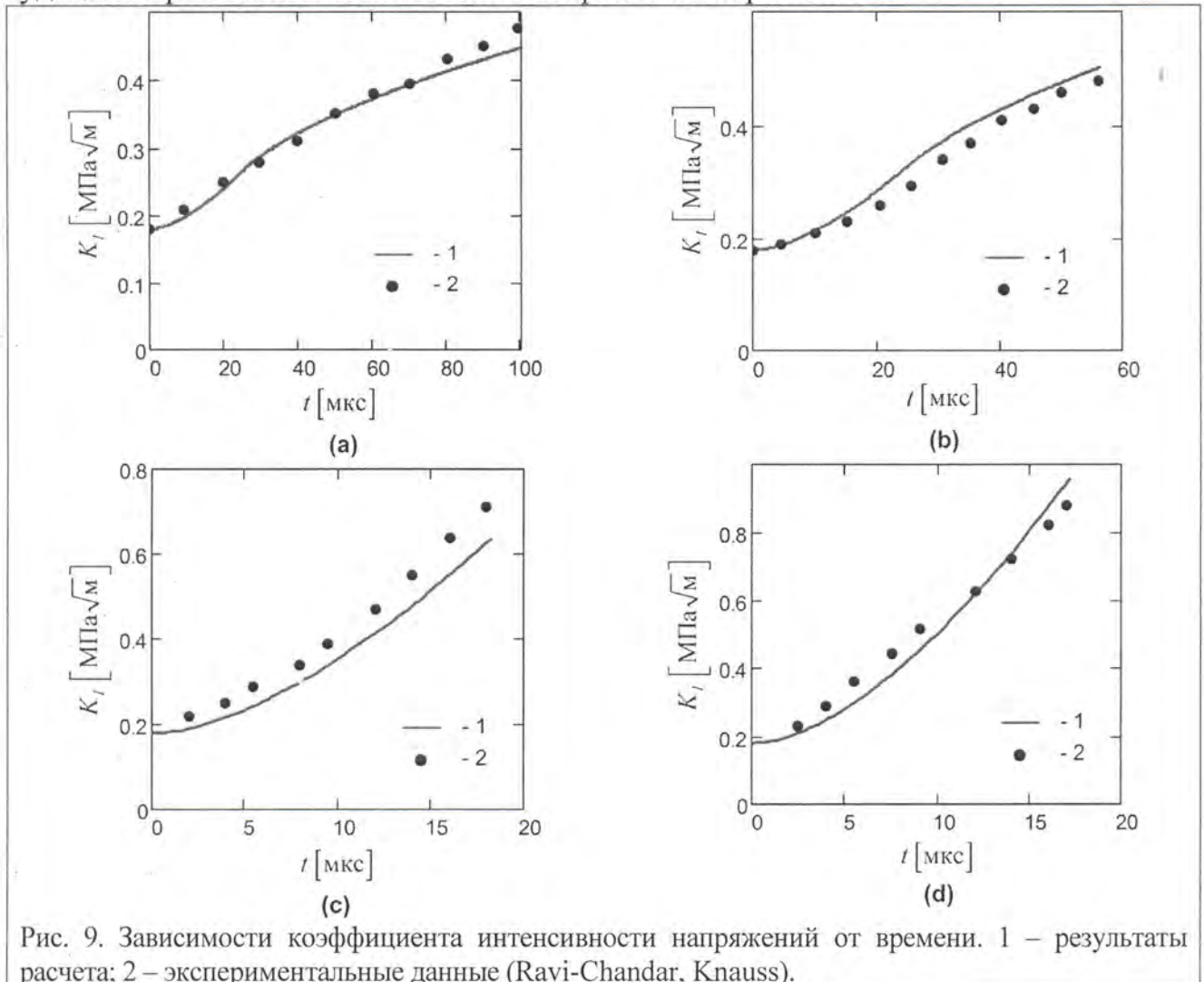


Рис. 9. Зависимости коэффициента интенсивности напряжений от времени. 1 – результаты расчета; 2 – экспериментальные данные (Ravi-Chandar, Knauss).

В четвертом разделе диссертации приведены решения задач для круговых и некруговых цилиндров с трещинами. Рассмотрим одну из таких задач – задачу о мгновенном нагружении внутренним давлением цилиндра с двумя внешними радиальными трещинами. Поперечное сечение цилиндра, имеющее две оси симметрии, изображено на рис. 10. Давление в канале цилиндра мгновенно возрастает до величины q и далее остается постоянным.

При проведении расчетов принималось: модуль сдвига $\mu = 8 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$, плотность $\rho = 7800$ кг/м³. Размеры цилиндра и трещины брались следующие: $R_2/R_1 = 1,5$, $a/(R_2 - R_1) = 0,5$. Расчеты проводились при следующих исходных данных: $N = 2243$; $n_1 = 100$; $n_2 = 80$. Полученное при этом статическое значение коэффициента интенсивности напряжений равно $K_{IS}^* = 3,612$.

Результаты решения рассмотренным методом представлены на рис. 11. Они сопоставляются с данными других исследователей. Можно отметить

близкое совпадение с данными статьи Israil, Dargush и заметное отличие от результатов статьи J. Sladek, V. Sladek.

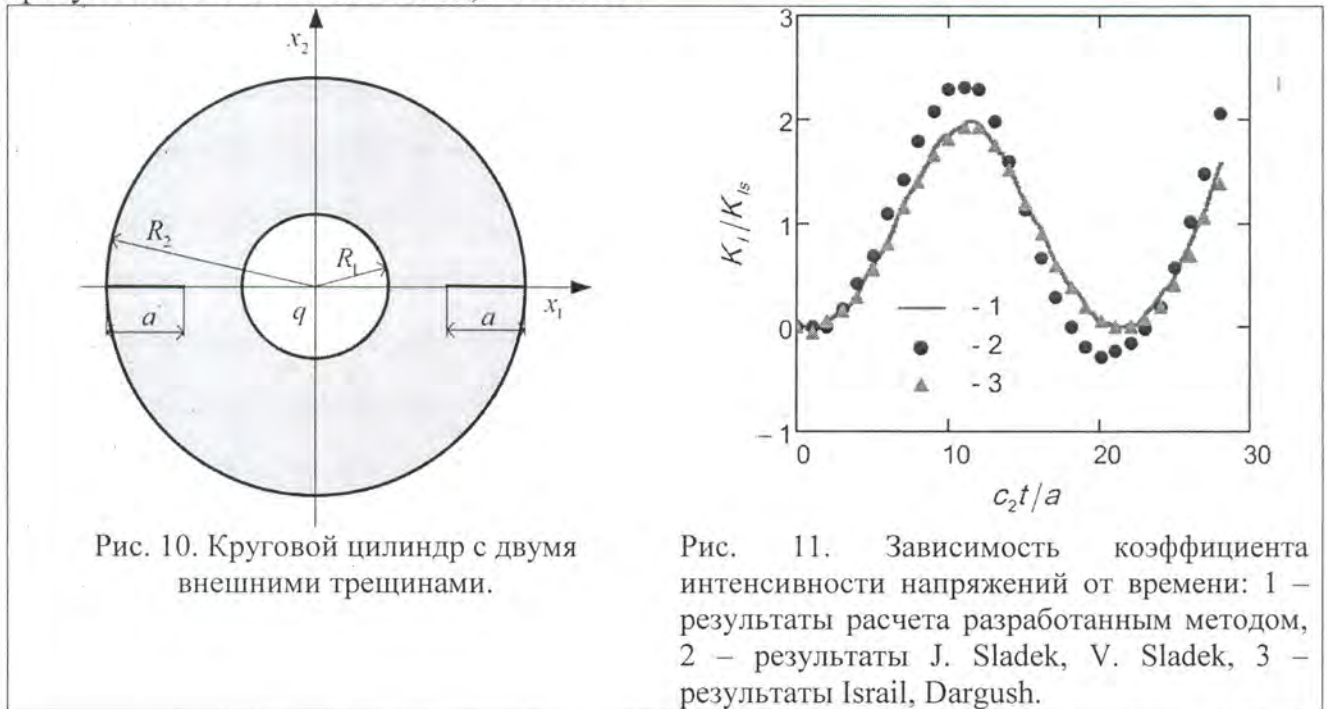


Рис. 10. Круговой цилиндр с двумя внешними трещинами.

Рис. 11. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени: 1 – результаты расчета разработанным методом, 2 – результаты J. Sladek, V. Sladek, 3 – результаты Israil, Dargush.

В разд. 4 приведены также решения задач для кругового цилиндра с одной и двумя внутренними трещинами. Рассмотрены два предельных случая действия давления в полости трещины: давление равно нулю и давление равно давлению в канале цилиндра.

Далее в разд. 4 рассмотрена задача о некруговом цилиндре: внешний контур поперечного сечения представляет собой прямоугольник. Цилиндр ослаблен двумя внутренними трещинами. Как и для кругового цилиндра, поведены расчеты для двух упомянутых предельных случаев действия давления в полости трещины.

Результаты расчетов цилиндров с трещинами там, где это возможно, сопоставляются с результатами других исследователей. Решения этих задач могут иметь значение для оценки прочности сосудов давления.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы.

В приложении (справочном) показано, что используемые изопараметрические конечные элементы удовлетворяют как требованию межэлементной непрерывности перемещений, так и требованию воспроизведения правильных постоянных деформаций при произвольном линейном законе изменения узловых перемещений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Проанализированы опубликованные методы решения задач динамической механики разрушения. Показано, что метод, разработанный в данной диссертации, обладает научной новизной.
2. Рассмотрен класс задач о динамическом нагружении линейно упругого тела, находящегося в состоянии плоской деформации. Тело ослаблено трещиной или несколькими симметрично расположенными трещинами нормального разрыва.
3. С использованием принципа возможных перемещений дана вариационная постановка задачи. Сформулированы начальные и граничные условия.
4. Для решения задачи применен метод прямых. Интегрирование по времени осуществляется методом конечных разностей с использованием неявной схемы Кранка-Николсон, интегрирование по площади поперечного сечения тела – методом конечных элементов.
5. Используются специальные конечные элементы, обеспечивающие плавность смыкания кромок трещины в ее кончике и позволяющие просто и достаточно точно вычислять коэффициент интенсивности напряжений.
6. Решены различные задачи для прямоугольных областей. Проведено сопоставление результатов расчетов с данными других теоретических исследований и с экспериментами.
7. Решен ряд задач для областей со сложным граничным контуром. Там, где это возможно, результаты расчетов сравниваются с данными других исследователей.
8. Результаты выполненных расчетов позволяют сделать вывод об адекватности математической модели и достоверности результатов, полученных разработанным методом. Решения задач, приведенные в диссертации, могут представлять научный и практический интерес.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах¹:

1. *Малик, А.В.* Об ударном нагружении с тела трещиной / *А.В. Малик, И.М. Лавит* // Материалы международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж. 2015. С. 85-88.
2. *Малик, А.В.* О динамическом нагружении тела с трещиной в условиях плоской деформации / *А.В. Малик, Л.А. Белая, И.М. Лавит* // **Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2016. № 1 (315). С. 3-10.**
3. *Малик, А.В.* Динамическое нагружение полосы с центральной трещиной / *А.В. Малик, И.М. Лавит* // Сборник трудов IX Всероссийской

¹ Жирным шрифтом выделены публикации диссертанта в изданиях, входящих в Перечень ВАК.

- конференции по механике деформируемого твердого тела. Воронеж. 2016. С. 27-31.
4. **Малик, А.В.** Ударное нагружение полосы с центральной трещиной / *А.В. Малик, И.Э. Рязанцева, И.М. Лавит* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 125-135.
 5. *Малик, А.В.* Решение задач динамической механики разрушения с использованием когезионных конечных элементов / *А.В. Малик, И.М. Лавит* // Сборник трудов Всероссийской конференции «Вопросы прикладной математики и проблема взаимодействия твердых тел с жидкой и газовой средой». Москва. 2017. С. 171-179.
 6. *Малик, А.В.* Динамическое нагружение полого цилиндра, ослабленного трещинами / *А.В. Малик, И.М. Лавит* // Материалы международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж. 2017. С. 1147-1153.