

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тульский государственный университет»

На правах рукописи



Кузнецова Оксана Игоревна

**КОНСТРУИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНО МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫХ
ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Буркин Игорь Михайлович

Тула - 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Глава 1. Аттракторы динамических систем: классификация и характеристики. Системы-хамелеоны.....	13
1.1 Аттрактор динамической системы. Самовозбуждающиеся и скрытые аттракторы.....	13
1.2 Система в форме Лурье. Приведение системы в форме Лурье к системе каскадного типа. Метод продолжения по параметру для поиска скрытых аттракторов.....	17
1.3 Управляемость, наблюдаемость.....	22
1.4 О секторах линейной устойчивости и неустойчивости.....	23
1.5 Гипотезы Айзермана и Калмана.....	24
1.6 Вычисление характеристик аттрактора.....	25
1.7 Метод построения систем хамелеонов.....	29
1.8 Выводы по главе 1.....	41
Глава 2. Мультистабильность и мегастабильность. Генерирование мегастабильных систем на основе систем в форме Лурье со скалярной нелинейностью.....	42
2.1 Мультистабильные системы и известные методы их генерирования.....	42
2.2 Генерирование мегастабильных систем с 1-D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье.....	45
2.3 Генерирование мегастабильных систем с $(n-1)$ -D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье.....	58
2.4 Выводы по главе 2.....	71
Глава 3. Новые подходы к генерированию мегастабильных систем.....	72
3.1 Конструирование мегастабильных систем с n -D решеткой хаотических аттракторов.....	73
3.2 Другие методы генерирования мегастабильных систем.....	80
3.3 Выводы по главе 3.....	86

Глава 4. Применение мегастабильных хаотических систем для обеспечения безопасной связи.....	87
4.1 Метод адаптивной синхронизации для общего класса хаотических вещественных моделей.....	88
4.2 Адаптивная синхронизация для мегастабильной системы с 4-D решеткой скрытых хаотических аттракторов.....	91
4.3 Адаптивная синхронизация для мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых аттракторов.....	101
4.4 Выводы по главе 4.....	106
Заключение.....	107
Список литературы.....	109
Приложение А. Программа для шифрования информации с использованием мегастабильной системы с 4-D решеткой хаотических аттракторов.....	123
Приложение Б. Программа для шифрования информации с использованием мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых аттракторов.....	124

Введение

С момента первого обнаружения в 1960-х годах XX века Эдвардом Лоренцем [87] нерегулярных колебаний в детерминированных динамических системах мир хаотических моделей стал поистине необъятным. Теория хаоса была интегрирована во многие научные области, начиная от физики [38, 72] и инженерии [40], до окружающей среды [104], медицины [46, 55], нейробиологии [39, 69, 88], экономики [56, 61]. Благодаря своей высокой чувствительности к начальным условиям и значениям параметров, хаотические системы оказались очень полезными в приложениях, требующих использования систем высокой сложности, таких как шифрование [59], безопасная связь [123], робототехника [93], генераторы случайных чисел [94], системы спутниковой связи и сотовой телефонии [51] и многих других.

Разрушение традиционного взгляда на то, что хаос вреден, и не поддается контролю, породило непрерывный интерес к исследованию особенностей вновь обнаруживаемых систем с хаотическим поведением. Оказалось, что хаотические системы могут иметь различное число и геометрические формы состояний равновесия [50, 58, 64, 107]. Такие системы могут быть мультистабильными, то есть обладать одновременно несколькими аттракторами со своими областями притяжения, характеризующимися различными начальными условиями [41, 75]. Более того, хаотические системы могут быть экстремально мультистабильными, обладающими бесконечным числом сосуществующих аттракторов [79, 81, 83, 100].

Знаковым событием в теории динамического хаоса явилось открытие в 2010 году Г.А. Леоновым и Н.В. Кузнецовым так называемых скрытых аттракторов (*hidden attractors*) [34], области притяжения которых, в отличие от областей притяжения самовозбуждающихся (*self-excited*) аттракторов, не пересекаются с малыми окрестностями неустойчивых положений равновесия системы. Развитые в работах Г.А. Леонова и Н.В. Кузнецова аналитико-численные методы поиска скрытых аттракторов в системах в форме Лурье позволили найти такие аттракторы в системах с единственным устойчивым

состоянием равновесия (построить контрпримеры [3, 34] к известным гипотезам Айзермана [1], и Калмана [65]), а также впервые найти скрытый аттрактор в классической системе Чуа [74]. Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах [2, 3, 20, 34, 70, 71]. Открытие скрытых аттракторов в динамических системах породило волну публикаций исследователей по всему миру. Обзор этих публикаций можно найти, например, в [53, 118]. В работах [62, 99] были рассмотрены системы, которые при различных значениях, входящих в них параметров могут обладать как самовозбуждающимися, так и скрытыми аттракторами, эти системы получили название "системы-хамелеоны". К категории скрытых аттракторов относятся также аттракторы систем без состояний равновесия [96].

В последние годы многие исследователи сосредоточились на вопросах конструирования новых хаотических систем, востребованных в приложениях [99, 112]. Чтобы создать новую хаотическую систему, было разработано несколько различных подходов. Один из подходов – рассмотреть существующую хаотическую систему и изменить ее, добавив дополнительные члены в дифференциальные уравнения, описывающие систему [104], или модифицировать существующий член [64, 73], или даже добавить новые состояния в систему и изменить её порядок, например, добавить в систему мемристор [122].

Одним из наиболее перспективных методов генерирования хаотических систем, востребованных в приложениях, оказался приём, получивший название усиление смещения (*offset boosting*), предложенный С. Li, J.C. Sprott, Y. Mei [83]. Дело в том, что для хаотических сигналов, используемых в информационной инженерии, включая хаотичную безопасную связь, маскировку информации и обработку нейронных сигналов, важны такие характеристики как масштаб и смещение. Усиление смещения означает, что аттрактор перемещается в фазовом пространстве в любом направлении, то есть среднее значение соответствующей переменной необходимым образом масштабируется. Последнее обстоятельство дает

инженеру прямой способ преобразовать биполярный хаотический сигнал в униполярный. Более того, оказалось, что использование процедуры усиления смещения позволяет получить такие эффекты, как самовоспроизводящиеся аттракторы [81, 86], удвоение числа аттракторов [78], условно симметричные аттракторы [85]. Методы, использование которых позволяет достигнуть описанных эффектов, подробно изложены в работе [75]. Таким образом, использование усиления смещения позволяет, опираясь на известные простые хаотические системы, генерировать достаточно сложные (мультистабильные) системы, в том числе системы со скрытыми аттракторами [43], которые могут быть использованы, например, для маскировки информации и организации безопасной связи [97, 98, 102, 112, 115].

В диссертации предложены новые аналитико-численные методы конструирования систем-хамелеонов и мегастабильных хаотических систем, обладающих самовозбуждающимися или скрытыми хаотическими аттракторами на основе многомерных систем в форме Лурье.

Сгенерированные автором мегастабильные системы, обладающие хаотическими аттракторами, используются для обеспечения безопасной связи.

Целью работы является разработка аналитико-численных методов конструирования мегастабильных хаотических систем, которые могут быть использованы для защиты информации в системах коммуникации.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать метод конструирования однопараметрических систем-хамелеонов.
2. Разработать методы конструирования n -мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих $1-D$, $(n-1)-D$ решеткой аттракторов.
3. Разработать методы конструирования n -мерных мегастабильных систем, обладающих $n-D$ решеткой аттракторов.
4. Разработать метод генерирования мегастабильных систем без состояний равновесия.

5. Разработать и реализовать алгоритмы для преобразования информации, передаваемой по каналам связи, на основе сконструированных мегастабильных систем, обладающих хаотическими аттракторами, в виде комплекса программ.

Методы исследования. При выполнении диссертационного исследования использовались методы теории матриц, теории устойчивости, обобщенный принцип Пуанкаре-Бендиксона, метод продолжения по параметру, частотные методы, методы вычисления показателей Ляпунова и размерности Каплана-Йорке аттракторов; при разработке вычислительных алгоритмов использовались MATLAB, Mathcad.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод конструирования однопараметрических систем-хамелеонов в форме Лурье, использующий прием продолжения по параметру.
2. Методы конструирования n -мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих 1-D, $(n-1)$ -D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье.
3. Метод конструирования n -мерных мегастабильных систем, обладающих n -D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье.
4. Метод генерирования мегастабильных систем без состояний равновесия, обладающих аналитическими решениями.
5. Алгоритм и его программная реализация для преобразования информации, передаваемой по каналам связи, на основе сконструированных мегастабильных систем, обладающих хаотическими аттракторами в виде комплекса программ в пакете вычислений MATLAB.

Научная новизна. Все пункты, перечисленные в положениях, выносимых на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы представляют собой вклад в разработку новых

аналитико-численных методов конструирования однопараметрических систем-хамелеонов, а также мегастабильных хаотических систем, допускающих потенциальное использование в маскировке информации, представленной в виде текста, изображений, аудио и видеoinформации, или создании сигналов нужной полярности.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим использованием математического аппарата и подтверждается сравнением с ранее известными результатами.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались:

- на Международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, Воронежский государственный университет, 2017, 2022);
- на XXV Международной научной конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2018);
- на Международных научных конференциях «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Москва, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2018, 2020);
- на the 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018) (Irkutsk, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, 2018);
- на Международной конференции, посвященной 70-летию С.Л. Атанасяна, 70-летию И.С. Красильщика, 70-летию А.М. Самохина, 80-летию В.Т. Фоменко (Рязань, Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина. 2018);
- на V Международной конференции и молодежной школе «Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2019)» (Самара, Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева, 2019);
- на Всероссийской конференции с международным участием «Теория

управления и математическое моделирование (СТММ 2020)», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Удмуртский государственный университет, 2020);

- на семинарах кафедры «Вычислительной механики и математики» Тульского государственного университета (Тула, Тульский государственный университет, 2017-2021);

- на XVI Международной Казанской школе-конференции «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2023);

- на семинарах научно-исследовательской лаборатории «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе» Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого (Тула, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023).

Публикации. По теме диссертации опубликована 21 работа, в том числе: 2 публикации в журналах, индексируемых в базе Scopus [44, 45], 5 публикаций в изданиях, индексируемых в базе Scopus и рекомендованных Высшей аттестационной комиссией [8, 12, 13, 25, 43], 2 публикации. в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией [26, 27],

Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [26, 27].

Работа поддержана грантом №2017-49 Публ. Тульского государственного университета в 2017 году.

В работах [12, 44] диссертанту принадлежит численное моделирование, соавтору принадлежат постановка задачи и остальные результаты. В работах [8, 43, 45] диссертанту принадлежат численное моделирование и метод конструирования систем, обладающих 1-D, $(n-1)$ -D решеткой аттракторов, соавтору принадлежит постановка задачи. В работе [13] диссертанту принадлежат метод генерирования трехмерных систем без состояний равновесия, содержащих 2-D полосу скрытых хаотических аттракторов размерности "почти 3" и численное моделирование, соавтору принадлежит

постановка задачи. Во всех работах обработка и интерпретация полученных результатов выполнена лично диссертантом.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и 2 приложений. Полный объем диссертации составляет 124 страницы со 105 рисунками и 6 таблицами. Список литературы содержит 124 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приведён обзор научной литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель, поставлены задачи работы, показана научная новизна и практическая значимость работы.

В **первой главе** диссертации излагаются основные понятия и математический аппарат, используемые в последующих главах диссертации. Приведен обзор известных подходов к поиску скрытых аттракторов динамических систем, основанных на использовании метода продолжения по параметру [20].

Основным результатом, представленным в первой главе, является метод конструирования однопараметрических систем-хамелеонов в форме Лурье, использующий метод продолжения по параметру.

Вторая глава диссертации посвящена разработке методов конструирования n -мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих $1-D$, $(n-1)-D$ решеткой аттракторов, на основе систем в форме Лурье.

Предложено два подхода к конструированию мегастабильных систем. Первый подход заключается в замене нелинейности на периодическую функцию, что, по сути дела, является преобразованием исходной системы в систему с угловой координатой. Этот подход позволяет строить системы с $1-D$ решеткой аттракторов (как самовозбуждающихся, так и скрытых).

Второй подход использует возможность преобразования системы в форме Лурье в систему каскадного типа. Замена в новой системе подходящим

образом некоторых переменных на периодические функции этих переменных позволяет строить динамические системы с $(n-1)$ -D решеткой аттракторов.

В третьей главе диссертации предложен метод конструирования n -мерных мегастабильных систем, обладающих n -D решеткой хаотических аттракторов, на основе систем в форме Лурье с помощью синтеза подходов, изложенных во второй главе диссертации.

Мегастабильные системы, содержащие 1-D решетку хаотических аттракторов, удастся получить, заменяя нелинейность в исходной системе на периодическую функцию. Далее, переходя к системе каскадного типа и заменяя некоторые переменные в новой системе на периодические функции этих переменных, удастся построить мегастабильную систему, содержащую n -D решетку хаотических аттракторов. В качестве одного из примеров в диссертации впервые построена система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов.

Излагаются и другие методы конструирования мегастабильных хаотических систем. Предложен метод, использующий прием усиления смещения, введение периодических функций, а также некоторые идеи С. Ли использования функции sign и функции абсолютного значения для удвоения сосуществующих аттракторов системы. С помощью этого подхода удастся сконструировать мегастабильную систему с 2-D полосой скрытых аттракторов без состояний равновесия.

Во второй и третьей главах диссертации приведены многочисленные примеры сконструированных мегастабильных систем на основе систем в форме Лурье с помощью методов, разработанных автором диссертации.

В четвертой главе предлагаются методы обеспечения безопасной связи на основе адаптивной синхронизации между двумя разработанными автором в третьей главе диссертации идентичными мегастабильными системами, обладающими хаотическими аттракторами.

Использована улучшенная схема адаптивной синхронизации, предложенная А.А.-Н. Shoreh, N.V. Kuznetsov, T.N. Mokaev [106], которая

связывает линейные и нелинейные члены в динамической системе. Схема обеспечения безопасной связи построена таким образом, чтобы разделить сообщение и распределить его между двумя каналами, что повышает безопасность системы связи, и усложняет задачу декодирования злоумышленником. Некоторый бит информационного сигнала вводится в параметры модуляции и передается по одному из двух каналов связи; тем временем другой бит вводится в хаотическое состояние передатчика и передается по второму каналу. На стороне приемника сообщение может быть точно извлечено с помощью адаптивных методов и функции декодирования. Предложенная схема надежна к различным масштабам аддитивного белого гауссовского шума.

С помощью предложенной схемы синхронизации между парой идентичных мегастабильных систем, обладающих хаотическими аттракторами, удалось замаскировать текст, изображение в градациях серого, цветное изображение, аудиосигнал и видеосигнал.

Вышеописанная стратегия реализована автором в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента [26, 27] с использованием среды MATLAB & Simulink.

В заключении представлены основные результаты работы.

В приложениях приводятся свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Глава 1

Аттракторы динамических систем: классификация и характеристики.

Системы-хамелеоны

Системы-хамелеоны – класс систем, характеризующийся тем, что при одних значениях входящих в систему параметров в них наблюдаются самовозбуждающиеся колебания, а при других значениях – скрытые.

В этой главе кратко представлены необходимые в работе сведения из теории динамических систем и теории управления, а также предложен численно-аналитический метод конструирования однопараметрических систем-хамелеонов в форме Лурье.

Содержание этой главы опирается на работы [14, 19, 23, 24, 44].

1.1 Аттрактор динамической системы. Самовозбуждающиеся и скрытые аттракторы

В данной работе мы будем рассматривать только непрерывные динамические системы, порожденные дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \in R, \quad x \in R^n. \quad (1.1.1)$$

Здесь R^n – евклидово пространство, t – независимая переменная, $f(x)$ – вектор-функция: $R^n \rightarrow R^n$.

Приведенные ниже определения аттракторов системы (1.1.1) принадлежат Г.А. Леонову [30].

Определение 1.1. Будем говорить, что множество $K \subset R^n$ инвариантно, если $x(t, K) = K, \forall t \geq 0$.

Здесь $x(t, K) = \{x(t, x_0) | x_0 \in K\}$.

Определение 1.2. Будем говорить, что $\rho(K, x)$ – расстояние от точки x до множества K , которое определяется по формуле

$$\rho(K, x) = \inf_{z \in K} |z - x|$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в R^n . Будем обозначать $K(\varepsilon)$ – множество точек x , для которых $\rho(K, x) < \varepsilon$.

Определение 1.3. Будем говорить, что инвариантное множество K является локально притягивающим (обладает свойством 1), если для некоторой ε -окрестности этого множества $K(\varepsilon)$ выполнено соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(K, x(t, x_0)) = 0, \quad \forall x_0 \in K(\varepsilon).$$

Определение 1.4. Будем говорить, что инвариантное множество K является глобально притягивающим (обладает свойством 2), если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(K, x(t, x_0)) = 0, \quad \forall x_0 \in R^n.$$

Определение 1.5. Будем говорить, что K – локальный аттрактор, если K является инвариантным, замкнутым, локально притягивающим множеством. Будем говорить, что K – глобальный аттрактор, если K является инвариантным, замкнутым, глобально притягивающим множеством.

Аттрактор может быть состоянием равновесия (точкой), периодическим (предельным циклом), квазипериодическим (n -мерным тором) или хаотическим (странным аттрактором).

Если в фазовом пространстве динамической системы находится более одного аттрактора, такая система называется мультистабильной.

Из определения аттрактора следует, что он может быть легко визуализирован численно, если траектории с начальными данными из его открытой окрестности в фазовом пространстве притягиваются к рассматриваемому аттрактору при возрастании времени. Для визуализации такого аттрактора достаточно выбрать начальную точку из бассейна его притяжения и численно наблюдать за процессом притяжения траектории, начинающейся в выбранной точке, к аттрактору.

Анализ динамической системы (1.1.1) обычно начинается с поиска ее состояний равновесия, которые могут быть легко найдены численно или аналитически. Если система обладает *самовозбуждающимся аттрактором*

(*self-excited attractor*), то проблем с визуализацией аттрактора системы не возникает.

Определение 1.6. Аттрактор называется самовозбуждающимся, если его бассейн притяжения пересекается со сколь угодно малой окрестностью какого-либо состояния равновесия системы (1.1.1).

Структура многих физических динамических систем такова, что существование аттракторов в них почти очевидно, поскольку решения систем не могут стремиться к бесконечности, а все состояния равновесия систем неустойчивы по Ляпунову, и колебания возбуждаются из их окрестности. Такое происходит во многих классических многомерных системах, поэтому долгое время казалось, что такой способ возбуждения колебаний является единственным. Так считал и Леон Чуа [49], предложивший первую электрическую схему управления колебаниями, генерирующую хаотический сигнал (рис.1.1.1).

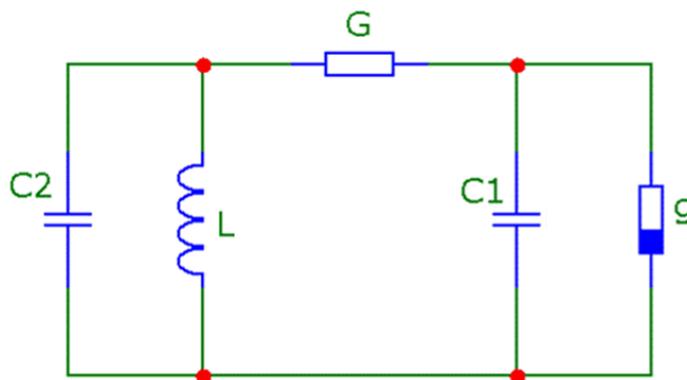


Рис.1.1.1. Цепь Чуа

Цепь состоит из двух конденсаторов C_1 , C_2 , одной катушки индуктивности L , линейного резистора G и нелинейного резистора g с отрицательным сопротивлением, который носит название «диод Чуа». Математическая модель этой схемы является кусочно-линейной автономной системой и для случая пяти элементов (рис.1.1.1) в безразмерных координатах имеет вид (1.1.2):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x) - \alpha\varphi(x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z.\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

Если нелинейность имеет вид (1.1.3), то система (1.1.2) называется классической системой Чуа

$$\varphi(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|).\tag{1.1.3}$$

Полной неожиданностью оказалось, что при значениях параметров $\alpha = 8.4562$, $\beta = 12.0732$, $\gamma = 0.0052$, $m_0 = -0.1768$, $m_1 = -1.1468$ в этой системе, имеющей 3 состояния равновесия, нет ни одного аттрактора, возбуждающегося из их окрестностей. Такой феномен был обнаружен Г.А. Леоновым и Н.В. Кузнецовым [3, 34] Тем не менее, как показано в упомянутых работах, рассматриваемая система имеет хаотический аттрактор, который может быть обнаружен путем численного интегрирования с начальным условием (3.414309, 1.41477, -3.666077). Этот аттрактор представлен на рисунке 1.1.2. Такой аттрактор было предложено назвать *скрытым (hidden attractor)*.

Определение 1.7. Аттрактор называется скрытым, если его область притяжения не содержит малых окрестностей положений равновесия.

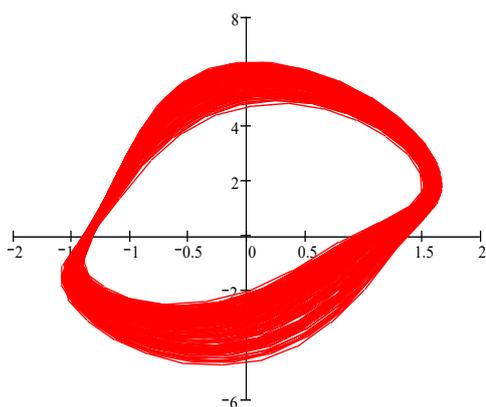


Рис.1.1.2. Скрытый аттрактор классической системы Чуа

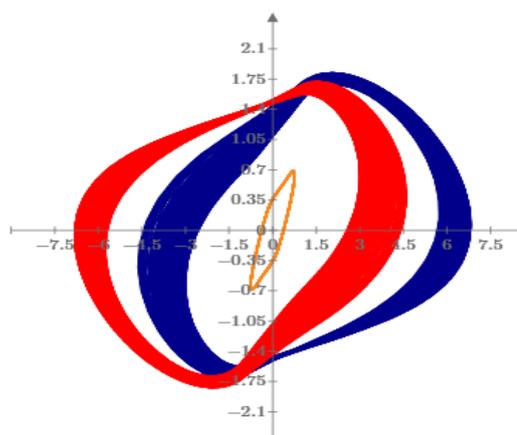


Рис.1.1.3. Скрытый аттрактор обобщенной системы Чуа

Оказалось, что обобщенная система Чуа, то есть система (1.1.2) с нелинейностью вида (1.1.4)

$$\varphi(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|) + 0.5(s - m_0)(|x + \delta| - |x - \delta|) \quad (1.1.4)$$

при значения параметров $\alpha = 8.4562$, $\beta = 12.0732$, $\gamma = 0.0052$, $\delta = 0.2$, $s = -0.9668$, $m_0 = 0.14$, $m_1 = -1.1468$, как показано в [20], имеет три скрытых аттрактора: цикл и два хаотических аттрактора-близнеца, расположенных в полосе $|x| \leq x_0 < 2$. Эти аттракторы, представленные на рисунке 1.1.3, могут быть обнаружены при численном интегрировании системы с начальными условиями $x_0 = (-0.458, -0.107, 2.522)$ и $x_{1,2} = (\pm 1.360, \pm 1.633, \pm 1.631)$.

Справедливость гипотезы о существовании самовозбуждающихся аттракторов у диссипативной системы с неустойчивыми состояниями равновесия представляется почти очевидной, а также очевидными и естественными являются методы поиска таких аттракторов. Для систем с устойчивыми состояниями равновесия, или не имеющими состояний равновесия установление самого факта существования скрытых аттракторов, и, тем более, разработка эффективных методов их поиска представляет серьезную проблему. Для предсказания существования скрытых аттракторов динамических систем предлагалось, например, использовать хаотические временные ряды и нечеткие функции [57]. Однако методы, представленные в упомянутой работе, не позволяют обнаруживать скрытые аттракторы.

1.2 Система в форме Лурье. Приведение системы в форме Лурье к системе каскадного типа. Метод продолжения по параметру для поиска скрытых аттракторов

Системой в форме Лурье со скалярной нелинейностью называется система следующего вида [35]:

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \sigma = c^T x, \quad (1.2.1)$$

где A – $n \times n$ -матрица, b и c – n -векторы, $\varphi(\sigma)$ – функция, которую в дальнейшем будем предполагать непрерывной и кусочно-дифференцируемой. Отметим, что система вида (1.2.1) является математической моделью широкого класса систем автоматического управления. В частности, такой вид

имеет система Чуа (1.1.2).

Пусть I – единичная $n \times n$ -матрица. Для системы (1.2.1) определим дробно-рациональную функцию комплексного аргумента p следующим образом: $\chi(p) = c^T (A - pI)^{-1} b$. Пусть передаточная функция $\chi(p)$ невырожденная [31] и $\chi(p) = m(p)[n(p)]^{-1}$.

Определение 1.8. Передаточная функция $\chi(p)$ называется невырожденной, если многочлен в знаменателе дроби $\chi(p)$ имеет степень n и несократим с ее числителем (где, напомним, n – порядок матрицы A).

Результаты, полученные в настоящей диссертации, существенно опираются на тот факт, что система в форме Лурье со скалярной нелинейностью (1.2.1) неособым линейным преобразованием может быть приведена к системе каскадного типа (1.2.2).

Определение 1.9. Многомерной системой каскадного типа называется система следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ &\dots \\ \dot{i} &= f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots, x). \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Теорема 1.1. Система (1.2.1) с невырожденной передаточной функцией $\chi(p)$ неособым линейным преобразованием всегда может быть приведена к системе каскадного типа.

Утверждение 1.1. [31] Две системы вида (1.2.1) с одной и той же передаточной функцией эквивалентны с точностью до неособого линейного преобразования их координат.

Доказательство теоремы 1.1 базируется на утверждении 1.1. Пусть передаточная функция системы (1.2.1) имеет вид

$$\chi(p) = \frac{c_0 + c_1 p + \dots + c_{n-1} p^{n-1}}{a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n}.$$

Тогда система (1.2.1) неособым преобразованием $x = Mu$ может быть

приведена к виду

$$\dot{y} = A_1 y + b_1 \varphi(\sigma), \quad \sigma = c_1^T y, \quad (1.2.3)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1.2.4)$$

$$b_1 = \text{col}(0, 0, \dots, 0, 1), \quad c_1 = \text{col}(-c_0, -c_1, \dots, -c_{n-1}).$$

При этом матрица преобразования M может быть найдена как решение системы уравнений

$$AM = MA_1, \quad b = Mb_1, \quad c_1 = M^T c. \quad (1.2.5)$$

Система (1.2.3)-(1.2.4) является системой каскадного типа. Если система (1.2.1) имела аттрактор, то и система (1.2.3)-(1.2.4), очевидно, также имеет аттрактор. Последнее обстоятельство позволяет, в частности, использовать многие известные результаты, связанные с существованием самовозбуждающихся или скрытых аттракторов у систем в форме Лурье [32, 53], для генерирования экстремально мультистабильных систем, о чем речь пойдет во второй и третьей главах.

По-видимому, единственным конструктивным методом, позволяющим эффективно отыскивать скрытые аттракторы многомерных динамических систем, в настоящее время является метод продолжения по параметру. Основная идея метода поиска скрытых колебаний динамической системы (1.1.1) использованного, в частности, в работах Г.А. Леонова и Н.В. Кузнецова, состоит в следующем. Рассматривается однопараметрическое семейство систем

$$\dot{x} = \varphi(x, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1] \quad (1.2.6)$$

такое, что $\varphi(x, 1) = f(x)$, и при малых $\varepsilon > 0$ система (1.2.6) имеет легко

обнаруживаемый самовозбуждающийся цикл. Численно отслеживается эволюция этого цикла при возрастании ε до 1. Возможна следующая альтернатива: либо при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ происходит бифуркация исчезновения аттрактора, либо при $\varepsilon = 1$ обнаруживается скрытый аттрактор исследуемой динамической системы.

Ясно, что ключевым моментом в приведенном алгоритме является построение функции $\varphi(x, \varepsilon)$, обладающей перечисленными выше свойствами. В работах Г.А. Леонова и Н.В. Кузнецова рассматривается класс систем в форме Лурье, для которых применяются эффективный численно-аналитический подход к построению нужной функции, основанный на методе малого параметра, методе описывающей функции (гармонической линеаризации), численных методах и прикладной теории бифуркаций.

Другой метод поиска скрытых аттракторов многомерных систем в форме Лурье, также основанный на использовании идеи продолжения по параметру, но являющийся "менее затратным" на этапе подготовки к реализации численного алгоритма поиска скрытого аттрактора, предложен в работе [20]. Этот метод будет использован в данной диссертации, поэтому остановимся на нем подробнее.

Метод построения функции, необходимой для старта вычислительной процедуры поиска скрытого аттрактора системы вида (1.2.1), основан на использовании следующей теоремы, являющейся модификацией утверждения, сформулированного в работе [20].

Теорема 1.2. Пусть функция $\varphi(\sigma)$ в системе (1.2.1) непрерывна, кусочно-дифференцируема и выполнены следующие условия:

- 1) График функции $\varphi(\sigma)$ имеет единственную точку пересечения $\sigma = 0$ с прямой $\sigma + \chi(0)\varphi = 0$ (или с прямой $\varphi = 0$, если матрица A особая);
- 2) Существуют такие числа μ_1 и μ_2 , что во всех точках дифференцируемости функции $\varphi(\sigma)$ выполнены условия $\mu_1 \leq \varphi'(\sigma) \leq \mu_2$;
- 3) Существует число $\lambda > 0$ такое, что при всех $\omega \in [0, \infty)$

справедливо неравенство

$$P(\omega) = 1 + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{Re} \chi(i\omega - \lambda) + \mu_1 \mu_2 |\chi(i\omega - \lambda)|^2 > 0; \quad (1.2.7)$$

4) Существует $\phi'(0)$ и матрица $A + \phi'(0)bc^T$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \leq \operatorname{Re} p \leq 0$;

5) Матрица $A + hbc^T$ является гурвицевой и $|\phi(\sigma) - h\sigma| < \gamma < \infty$.

Тогда система (1.2.1) имеет по крайней мере один цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$ системы.

Пусть $x_0 \neq 0$ – произвольная точка из окрестности состояния равновесия $x = 0$. Численно найдем решение $x_0(t)$ системы (1.2.1) с нелинейностью $\psi(\sigma)$ на промежутке $[0, T]$, где T достаточно велико, и начальным условием $x_0(0) = x_0$. Значение $x_0(T)$ будет достаточно близко к циклу. Рассмотрим теперь, семейство систем (1.2.1) с нелинейностями $\varepsilon_j \phi(\sigma) + (1 - \varepsilon_j) \psi(\sigma)$, где $\varepsilon_j = 0.1j$, $j = 0, 1, \dots, 10$. Решения этих систем будем обозначать $x_j(t)$. При численном интегрировании каждой из систем семейства в качестве начального условия $x_j(0)$ будем брать $x_{j-1}(T)$. Если при интегрировании всех систем семейства получаем аттрактор, то при $j = 10$ будет найден аттрактор системы (1.2.1) с нелинейностью $\phi(\sigma)$. Если же при некотором значении ε_j аттрактор численным интегрированием не обнаруживается, то это означает, что произошла бифуркация и исчезновение аттрактора.

Замечание 1.1. Если в процессе реализации описанного алгоритма на некотором шаге аттрактор не обнаруживается, то это может означать, что очередной аттрактор имеет очень малую область притяжения. В этом случае целесообразно попытаться уменьшить шаг дискретизации по ε и повторить процедуру поиска с меньшим шагом.

1.3 Управляемость, наблюдаемость

В этом разделе будут приведены некоторые хорошо известные алгебраические утверждения, которые будут использованы в дальнейшем.

Рассмотрим нелинейную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b\xi, \quad \sigma = c^T x, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad (1.3.1)$$

где $x \in R^n$, $\sigma \in R^l$, $\xi \in R^m$, A, b, c – постоянные матрицы размером $n \times n$, $n \times m$, $n \times l$ соответственно, $\varphi(\sigma)$ – вектор-функция нелинейности.

Определение 1.10. [21] Матрица $\chi(p) = c^T (A - pI)^{-1} b$ (порядка $l \times m$), где p – комплексная переменная, называется передаточной матрицей (при $m = l = 1$ – передаточной функцией) системы (1.3.1) от входа ξ к входу $(-\sigma)$.

Определение 1.11. [32] Пара (A, b) называется управляемой, если $\text{rang} \|b, Ab, \dots, A^{n-1}b\| = n$.

Определение 1.12. [32] Пара (A, c) называется наблюдаемой, если $\text{rang} \|c, A^T c, \dots, (A^T)^{n-1} c\| = n$.

Определение 1.13. [21] Пусть либо $l > 1$, либо $m > 1$. Передаточная матрица $\chi(p)$ называется невырожденной, если для любого корня λ_0 многочлена $\delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ существует такой минор $\mu(\lambda)$ матрицы $\chi(\lambda)$, что $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \delta(\lambda) \mu(\lambda) \neq 0$.

Теорема 1.3. [21] Для того, чтобы система (1.3.1) была управляемой и наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы передаточная матрица $\chi(\lambda)$ системы была невырожденной.

Лемма 1.1. (лемма Шура) Если $\det A \neq 0$, то

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B). \quad (1.3.2)$$

Если $\det D \neq 0$, то

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \det(A - BD^{-1}C). \quad (1.3.3)$$

1.4 О секторах линейной устойчивости и неустойчивости

Пусть имеется некоторая система, которая может быть записана в виде (1.2.1). Проведем "линейный анализ" этой системы. Положим что $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, то есть рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = (A + \mu bc^T)x. \quad (1.4.1)$$

Будем предполагать, что число μ выбрано так, что система (1.4.1) не имеет периодических решений, то есть матрица $A + \mu bc^T$ не имеет чисто мнимых собственных значений. Это предположение эквивалентно условию $1 + \mu\chi(i\omega) \neq 0$ для всех $\omega \geq 0$. Поскольку при непрерывном изменении μ спектр матрицы $A + \mu bc^T$ меняется непрерывно, то на плоскости (σ, φ) можно построить такой сектор $S[\nu_1, \nu_2] = \{\sigma, \varphi : \nu_1 \leq \varphi/\sigma \leq \nu_2\}$, что матрицы всех линейных систем с $\varphi = \mu\sigma$, $\nu_1 \leq \mu \leq \nu_2$ имеют одно и тоже число собственных значений в правой полуплоскости и не имеют их на мнимой оси. Расширяя сектор $S[\nu_1, \nu_2]$, придем к таким значениям $\nu_1 = \mu_j$, $\nu_2 = \mu_{j+1}$, что

$$1 + \mu_j \chi(i\omega_j) = 0, \quad 1 + \mu_{j+1} \chi(i\omega_{j+1}) = 0. \quad (1.4.2)$$

Очевидно, что чисел μ , для которых выполняется условие (1.4.2), может быть лишь конечное число. Добавим к ним значения $-\infty$ и ∞ , а в случае вырожденной матрицы A также число $\mu = 0$, и положим

$$\mu_1 = -\infty < \mu_2 < \dots < \mu_h < \mu_{h+1} = \infty. \quad (1.4.3)$$

Из определения чисел (1.4.3) следует, что матрицы линейных систем для $\mu_h < \mu < \mu_{h+1}$ имеют одинаковое число k собственных значений в правой полуплоскости и не имеют их на мнимой оси.

Определение 1.14. Если при некотором значении $\mu \in (\mu_h, \mu_{h+1})$ и $k = 0$

матрица $A + \mu bc^T$ гурвицева, то множество $\{(\varphi, \sigma) : \mu_h \leq \frac{\varphi}{\sigma} \leq \mu_{h+1}\}$ – сектор линейной устойчивости.

Определение 1.15. Если при некотором значении $\mu \in (\mu_h, \mu_{h+1})$ матрица $A + \mu bc^T$ имеет $k \geq 1$ собственных значений с положительными вещественными частями, то множество $\{(\varphi, \sigma) : \mu_h \leq \frac{\varphi}{\sigma} \leq \mu_{h+1}\}$ называется сектором линейной неустойчивости степени k .

Таким образом, плоскость (σ, φ) разбита прямыми $\varphi = \mu_h \sigma$ на l секторов $S[\mu_h, \mu_{h+1}]$, $h = 1, 2, \dots, l$.

Рисунок 1.4.1 демонстрирует поведение некоторой нелинейной функции $\varphi(\sigma)$, график которой переходит из сектора в сектор.

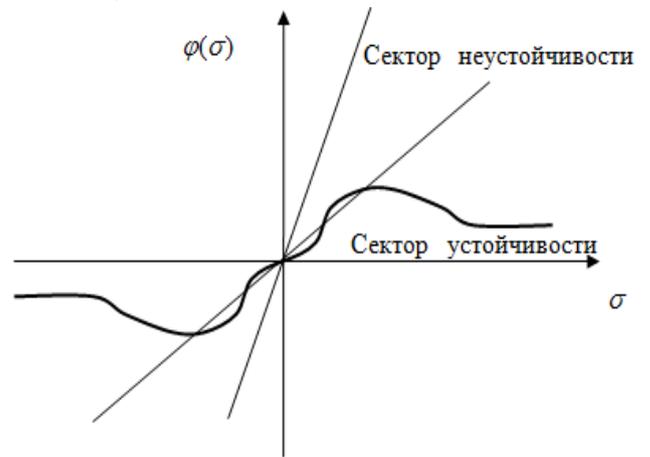


Рис. 1.4.1. График нелинейности $\varphi(\sigma)$

1.5 Гипотезы Айзермана и Калмана

Задача анализа скрытых колебаний возникает при исследовании инженерных проблем автоматического управления. В 50–60-х годах исследования известных гипотез Маркуса-Ямабе [90], Айзермана [1] и Калмана [65] об абсолютной устойчивости привели к обнаружению скрытых колебаний в системах автоматического управления с единственной устойчивой неподвижной точкой и с нелинейностью, принадлежащей сектору линейной устойчивости. Рассмотрим систему с одной скалярной нелинейностью

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\psi(r^T x), \quad x \in R^n, \quad (1.5.1)$$

где P – постоянная матрица порядка $n \times n$, q, r – постоянные n -мерные

векторы, $\psi(\sigma)$ – кусочно-непрерывная скалярная функция и $\psi(0) = 0$.

В 1949 году Марк Айзерман сформулировал следующую проблему: пусть все линейные системы вида (1.5.1) с $\psi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$, асимптотически устойчивы. Тогда система (1.5.1) с любой нелинейностью $\psi(\sigma)$, удовлетворяющей условию $\mu_1 < \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} < \mu_2$, $\forall \sigma \neq 0$, глобально устойчива (т.е. нулевое решение системы (1.5.1) асимптотически устойчиво и любое решение стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$).

В 1957 году Рудольф Калман сформулировал следующую гипотезу: пусть $\psi(\sigma)$ – кусочно-дифференцируемая функция, все линейные системы (1.5.1) с $\psi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ асимптотически устойчивы и удовлетворяют условию $\mu_1 < \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} < \mu_2$, $\forall \sigma \neq 0$, а так же, в точках дифференцируемости выполняется неравенство $\mu_1 < \psi'(\sigma) < \mu_2$. Тогда система (1.5.1) глобально устойчива.

1.6 Вычисление характеристик аттрактора

Основными характеристическими величинами аттрактора является его спектр показателей Ляпунова и размерность Ляпунова, которые могут быть вычислены, например, как показано в [22, 71]. Для вычисления спектра показателей Ляпунова существуют и другие эффективные методы, и подходы: алгоритм Бенеттина [42], якобиана [54], Кантца [66], Розенштейна [101], Сато [103], Вольфа [119].

Показатели Ляпунова – это величины, характеризующие скорость расхождения бесконечно близких траекторий. Другими словами, показатели Ляпунова измеряют чувствительность динамической системы к небольшим изменениям начальных условий. Таким образом, они обеспечивают хороший количественный тест на хаотическое поведение в динамической системе [60, 119].

Остановимся вначале на вычислении показателей Ляпунова аттракторов.

Пусть $A = A(t)$ – $n \times n$ -матрица.

Теорема 1.4. (теорема Ляпунова) Для любого решения $x(t)$ системы уравнений вида:

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.6.1)$$

существует ляпуновский характеристический показатель (ЛХП) Λ – вещественное число, отличное от $\pm\infty$, определяемое следующим образом

$$\Lambda_{x(t)} = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|x(T)\|.$$

Показатель Ляпунова обладает следующими **свойствами**:

1) При умножении решения на константу показатель Ляпунова не меняется, т. е. $\Lambda_{x(t)} = \Lambda_{Cx(t)}$.

2) Показатель Ляпунова линейной комбинации двух решений, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, меньше или равен большему из показателей этих двух решений:

$$\Lambda_{C_1x_1(t)+C_2x_2(t)} \leq \max(\Lambda_{x_1(t)}, \Lambda_{x_2(t)}).$$

Для уравнения (1.6.1) имеется n линейно независимых решений $x_i(t)$ (фундаментальная система решений), где n – размерность фазового пространства, которым отвечает n показателей Ляпунова в порядке убывания: $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_n$. Наибольшее из чисел, Λ_1 , называется старшим показателем Ляпунова.

Определение 1.16. Спектром показателей Ляпунова является упорядоченный набор чисел $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n\}$.

Спектр показателей Ляпунова следует рассматривать как характеристику системы уравнений (1.6.1), а не какого-то одного ее решения $x(t)$, поскольку он не зависит от выбора фундаментальной системы решений $\{x_i(t)\}$. Для любого решения $x(t)$ показателем Ляпунова обязательно будет одно из чисел спектра $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n\}$.

Утверждение 1.2. Траектория в фазовом пространстве системы (1.6.1) является неустойчивой по Ляпунову при наличие в спектре хотя бы одного показателя Ляпунова, для которого $\Lambda_i > 0$ при $i \in 1, 2, \dots, n$.

Утверждение 1.3. Траектория является асимптотически устойчивой, если $\Lambda_i < 0$ для любого $i \in 1, 2, \dots, n$.

Если старший показатель Ляпунова $\Lambda_1 = 0$, нельзя сделать вывод об устойчивости или неустойчивости траектории по Ляпунову.

Теорема 1.5. Спектр показателей Ляпунова аттрактора удовлетворяет следующим условиям:

1) Сумма всех n показателей Ляпунова должна быть отрицательна

$$\sum_{i=1}^n \Lambda_i < 0.$$

2) Аттрактор должен обладать хотя бы одним нулевым показателем Ляпунова.

Условие 1) – это условие диссипативности, благодаря которому аттрактор является притягивающим множеством в фазовом пространстве, на котором концентрируется с течением времени облако изображающих точек.

Обозначим положительный показатель Ляпунова знаком плюс, отрицательный – знаком минус, нулевой – нулем, тогда аттрактору в фазовом пространстве R^n будет отвечать определенный набор из n таких знаков $\{+, -, 0\}$, о котором говорят как о сигнатуре спектра показателей Ляпунова. Соответствие между знаками показателей Ляпунова и типом решений приведены в таблице 1.6.1.

Таблица 1.6.1.

Знаки показателей Ляпунова и соответствующий им тип решений

	<i>LE1</i>	<i>LE2</i>	<i>LE3</i>	<i>LE4</i>	...
Притягивающая неподвижная точка	-	-	-	-	-
Периодическое решение (предельные циклы)	0	-	-	-	-
Квазипериодическое решение (двумерный тор)	0	0	-	-	-
Хаос (странный аттрактор)	+	0	-	-	-
Гиперхаос	+	+	0	-	-

Очевидно, что аттрактор для систем (1.6.1) можно наблюдать, начиная с размерности фазового пространства $\dim \geq 3$.

Отличительной особенностью странного аттрактора является его фрактальная размерность, т.е. мера степени заполненности траекториями определённого подпространства динамической системы (если фазовое пространство системы является конечным). Это связано с тем, что траектории, расходясь экспоненциально, вынуждены с течением времени занимать все больший объём, который, тем не менее, должен оставаться конечным. Данное противоречие разрешается благодаря тому, что в области странного аттрактора осуществляется процедура растягивания с образованием складок фазового пространства.

Фрактальную размерность аттрактора динамической системы в фазовом пространстве R^n можно оценить с помощью спектра показателей Ляпунова. Такая оценка называется размерностью Ляпунова и вычисляется следующим образом.

Если система обладает странным хаотическим аттрактором, то $\Lambda_1 > 0$ и $S_n = \sum_{i=1}^n \Lambda_i < 0$. Будем последовательно вычислять $S_j = \sum_{i=1}^j \Lambda_i$ для $j = 1, 2, \dots, n$, в

результате сначала будем получать $S_j = \sum_{i=1}^j \Lambda_i > 0$, и затем, начиная с

некоторого значения $j + 1$, сумма показателей сумма показателей поменяет

знак, т.е. $S_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} \Lambda_i < 0$. Вычисляя на каждом шаге $j = 1, 2, \dots, n$ значение S_j ,

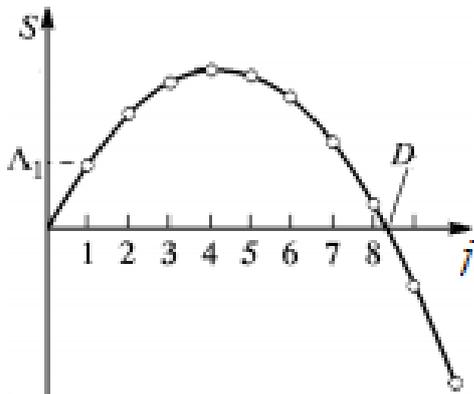


Рис. 1.6.1. График функции $S_j = S(j)$

можно задать некоторую кусочно-линейную функцию, $S_j = S(j)$, график которой изображен на рисунке 1.6.1. Точка пересечения графика, образованного отрезками прямых, с осью абсцисс дает ляпуновскую размерность аттрактора по формуле Каплана-Йорке [67]. Аналитически

размерность Ляпунова по формуле Каплана-Йорке находится в следующем виде:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \Lambda_i}{|\Lambda_{j+1}|} \quad (1.6.2)$$

1.7 Методы построения систем-хамелеонов

Впервые понятие "система-хамелеон" было введено в работе [62].

Определение 1.17. Системой-хамелеоном (*chameleon system*) будем называть динамическую систему, которая при различных значениях, входящих в нее параметров демонстрирует самовозбуждающиеся или скрытые колебания.

Системы-хамелеоны были исследованы в многочисленных работах, например, [92, 120, 124].

В дальнейшем будем рассматривать только однопараметрические системы-хамелеоны вида (1.7.1) с единственным параметром ε :

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, 1], \quad x \in R^n. \quad (1.7.1)$$

В настоящей диссертации предлагается использовать метод продолжения по параметру, применявшийся ранее для поиска скрытых аттракторов, для синтезирования однопараметрических систем-хамелеонов. Используя соображения, на которых базируется метод обнаружения скрытых аттракторов, описанный в разделе 1.2 настоящей диссертации, и теорему 1.2, в которой вместо непрерывной и кусочно-дифференцируемой функции $\varphi(\sigma)$ будем рассматривать однопараметрическую нелинейность $f(\sigma, \varepsilon)$, где $\varepsilon \in [0, 1]$, сформулируем ниже идею метода генерирования систем-хамелеонов.

Рассмотрим некоторую систему в форме Лурье (1.2.1)

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \sigma = c^T x.$$

Предположим, что она имеет единственное устойчивое состояние

равновесное $x=0$. Далее проведем "линейный анализ" этой системы, подробно описанный в разделе 1.4 и, опираясь на метод продолжения по параметру из [20], описанный в разделе 1.2, будем численно искать скрытый аттрактор системы.

Опираясь на теорему 1.2, построим вспомогательную систему

$$\dot{x} = Ax + b\psi(\sigma), \quad \sigma = c^T x, \quad (1.7.2)$$

имеющую по крайней мере один цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности единственного состояния равновесия $x=0$ этой системы. Наконец, построим однопараметрическую систему

$$\dot{x} = Ax + bf(\sigma, \varepsilon), \quad \sigma = c^T x, \quad (1.7.3)$$

где $f(\sigma, \varepsilon) = \varepsilon\varphi(\sigma) + (1 - \varepsilon)\psi(\sigma)$.

При малом значении параметра $\varepsilon > 0$, в системе (1.7.4) присутствует самовозбуждающийся цикл. Затем, численно отслеживается эволюция этого цикла при возрастании параметра ε от 0 до 1. Возможна следующая альтернатива: либо при некотором значении $\varepsilon = \varepsilon_0$ из интервала $\varepsilon \in (0, 1)$ происходит бифуркация, в результате которой аттрактор в рассматриваемой системе разрушается, либо при $\varepsilon = 1$ состояние равновесия становится устойчивым и обнаруживается скрытый аттрактор этой системы. Процесс поиска скрытого аттрактора сопровождается визуализацией аттрактора, полученного на каждом этапе реализации описанного алгоритма. Визуализация может быть выполнена с помощью любого математического пакета, например, MATLAB, Mathcad, Maple.

Если в результате реализации описанной процедуры обнаружен скрытый аттрактор системы (1.7.3), то это означает, что мы построили однопараметрическую систему-хамелеон (1.7.1) с функцией $f(\sigma, \varepsilon) = \varepsilon\varphi(\sigma) + (1 - \varepsilon)\psi(\sigma)$. Система (1.7.3) с нелинейностью $\psi(\sigma)$ имеет самовозбуждающийся аттрактор, а с нелинейностью $\varphi(\sigma)$ – скрытый аттрактор.

Замечание 1.2. *Вспомогательная система (1.7.2) может быть построена так, что она имеет самовозбуждающийся из окрестности состояния равновесия $x=0$ хаотический аттрактор. Если при изменении параметра ε в системе (1.7.3) этот аттрактор эволюционирует в скрытый аттрактор, то тем самым оказывается построенной однопараметрическая система-хамелеон.*

Метод синтезирования систем-хамелеонов на основе системы гипертолчка с единственным состоянием равновесия будет продемонстрирован в подразделе 1.7.1 диссертации, на основе системы автоматического управления в подразделе 1.7.2, для системы с обратной связью в подразделе 1.7.3, а для однопараметрических систем-хамелеонов, обладающих бесконечным числом состояний равновесия, будет продемонстрирован в подразделе 1.7.4.

1.7.1 Система-хамелеон на основе системы "гипертолчка"

В этом подразделе рассмотрена система "гипертолчка" четвёртого порядка, на базе которой будет построена система-хамелеон, следуя приведенному выше алгоритму.

Определение 1.18. Система вида (1.7.1.1)

$$\frac{d^4 x}{dt^4} = J \left(\frac{d^3 x}{dt^3}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x \right) \quad (1.7.1.1)$$

называется системой "гипертолчка" или "рывковой системой" (*hyperjerk system*) [110], где J называется "рывком" и является функцией одной скалярной переменной x .

Рассмотрим систему

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + \frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{dx}{dt} + x = -f(\sigma, \varepsilon), \quad \sigma = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (1.7.1.2)$$

где $f\left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \varepsilon\right)$ представляет собой нелинейную функцию, представленную

ниже. Система (1.7.1.2) может быть записана в виде (1.7.3), где

$$x = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma = c^T x.$$

Для данной системы сектор $(-\infty, 10/3)$ является сектором линейной неустойчивости степени 2, а сектор $(10/3, \infty)$ – сектор линейной устойчивости, передаточная функция имеет вид $\chi(p) = p^2(p^4 + p^3 + 3p + 1)^{-1}$.

При $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 4.5$, $\lambda = 0.3$ для функции $\chi(p)$ выполняется условие (1.2.7) теоремы 1.2. Проверка выполнения частотного неравенства (1.2.7) (график функции $\Pi(\omega)$) проиллюстрирована на рис 1.7.1.1.

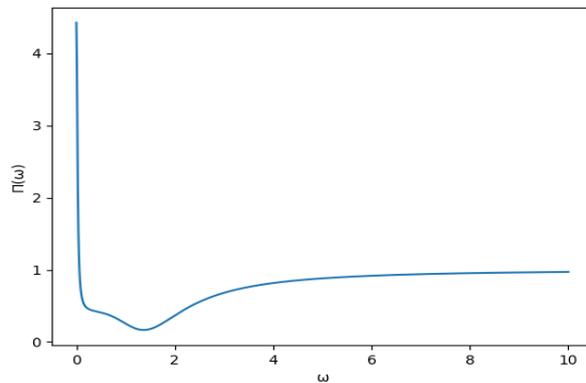


Рис. 1.7.1.1. График функции $\Pi(\omega)$

Возьмем нелинейность следующего вида:

$$f(\sigma, \varepsilon) = 2\varepsilon \cdot \operatorname{arctg}(4\sigma)e^{\frac{\sigma}{3}} + (1 - \varepsilon) \frac{4(\sigma^3 + 3\sigma)}{\sigma^2 + 4}. \quad (1.7.1.3)$$

Для функций (1.7.1.3) при $\varepsilon = 0$, выполняются все условия теоремы 1.2:

1) Очевидно, функция $f(\sigma, 0)$ имеет единственную точку пересечения $\sigma = 0$ с прямой $\sigma + \chi(0)f(\sigma, 0) = 0$.

$$2) \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{4(\sigma^4 + 9\sigma^2 + 12)}{(\sigma^2 + 4)^2} = 3, \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{4(\sigma^4 + 9\sigma^2 + 12)}{(\sigma^2 + 4)^2} = 4.$$

4) Собственные значения матрицы $A + \varphi'(0)bc^T$ равны $\lambda_{1,2} = -0.552037887307518 \mp 0.242274534663871i$, $\lambda_{3,4} = 0.052037887307518 \mp$

$\mp 1.65793752011099i$ и не лежат в полосе $-\lambda \leq \operatorname{Re} p \leq 0$

$$5) \text{ При } h = 4, \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \left| \frac{4(\sigma^3 + 3\sigma)}{\sigma^2 + 4} - 4\sigma \right| = 0 < \infty.$$

Следовательно, согласно утверждению теоремы 1.2, система (1.7.1.2)-(1.7.1.3) имеет самовозбуждающийся аттрактор (цикл) при $\varepsilon = 0$. Поскольку для всех $\varepsilon \in [0, 1]$ график функции $f(\sigma, \varepsilon)$ "поочередно посещает" сектора линейной устойчивости и сектора линейной неустойчивости степени 2 системы (1.7.1.2) (рис. 1.7.1.2-1.7.1.3), то, согласно результатам [4], для всех $\varepsilon \in [0, 1]$ система (1.7.1.2) с нелинейностью (1.7.1.3) может иметь аттрактор.

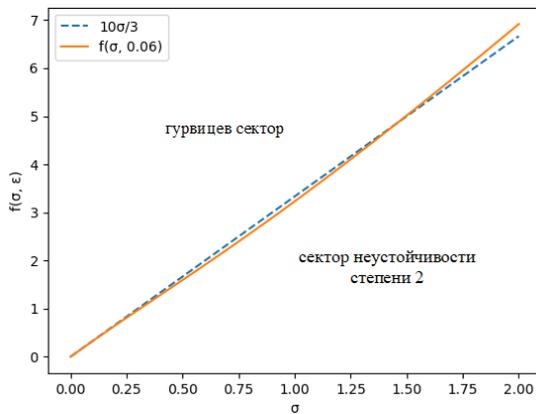


Рис. 1.7.1.2. График функции $f(\sigma, \varepsilon)$ при $\varepsilon=0.06$

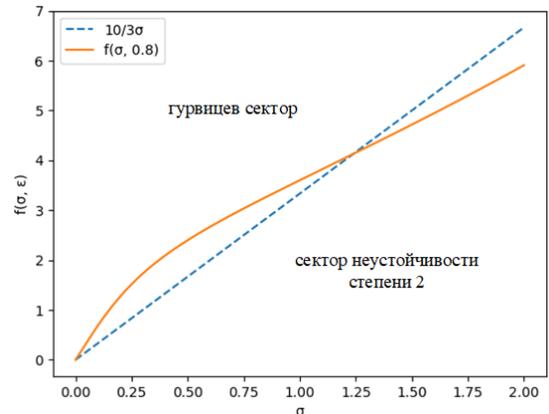
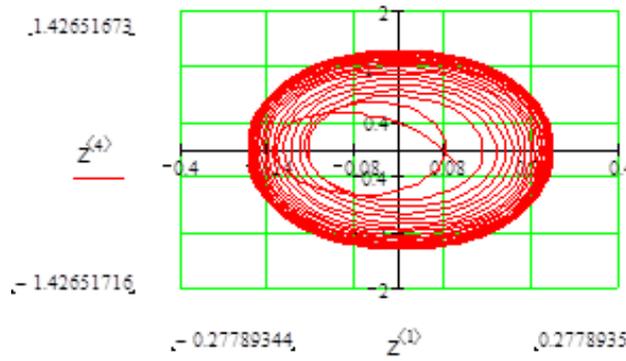
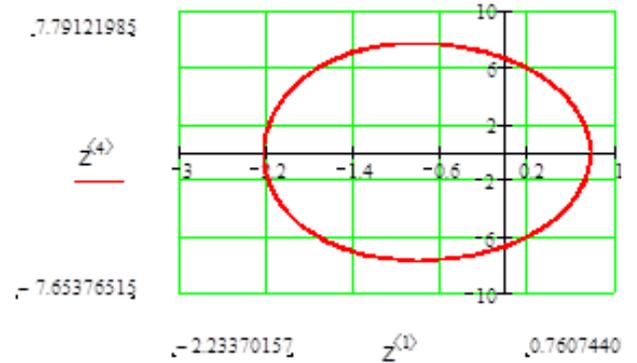


Рис. 1.7.1.3. График функции $f(\sigma, \varepsilon)$ при $\varepsilon=0.8$

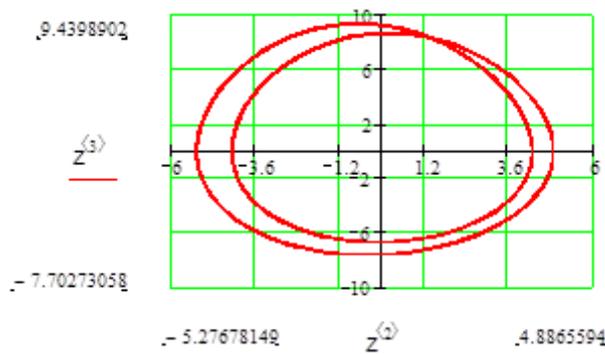
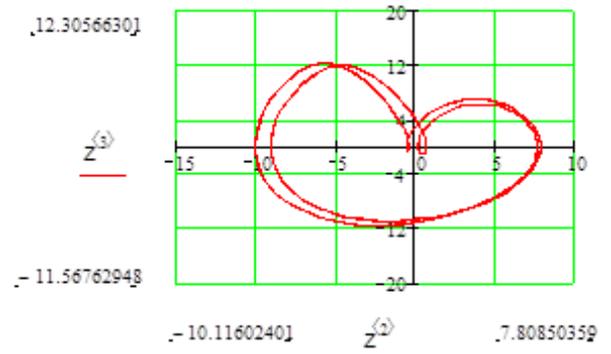
Ввиду того, что $f'(0, \varepsilon) = 5\varepsilon + 3$, этот аттрактор будет самовозбуждающимся при $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{15}\right]$ и скрытым при $\varepsilon \in \left(\frac{1}{15}, 1\right]$.

Теперь мы будем использовать описанный выше метод для численного отслеживания эволюции существующего при $\varepsilon = 0$ цикла системы (1.7.1.2)-(1.7.1.3), когда ε изменяется от 0 до 1.

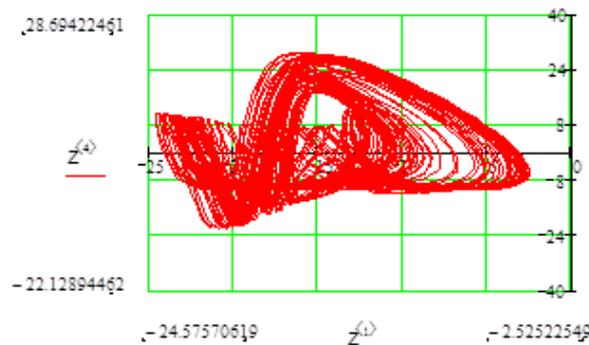
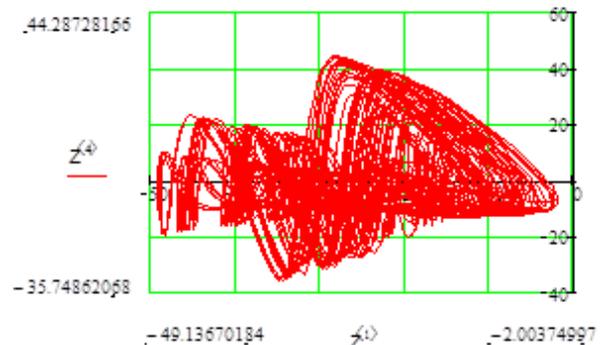
На рис. 1.7.1.4. показана проекция самовозбуждающегося цикла на плоскость (x_1, x_4) при $\varepsilon = 0$, полученная интегрированием системы (1.7.1.2)-(1.7.1.3) с начальными условиями $(0.1, 0.2, -0.2, -0.2)$. Проекция на ту же плоскость скрытого цикла при $\varepsilon = 0.2$ представлена на рис. 1.7.1.5.

Рис. 1.7.1.4. $\varepsilon = 0$ Рис. 1.7.1.5. $\varepsilon = 0.2$

При $\varepsilon \approx 0.637$ обнаруживается удвоение периода скрытого цикла (рис. 1.7.1.6), а при $\varepsilon \approx 0.826$ – учетверение периода (рис. 1.7.1.7). На рисунках приведены проекции на плоскость (x_2, x_3) .

Рис. 1.7.1.6. $\varepsilon = 0.637$ Рис. 1.7.1.7. $\varepsilon = 0.826$

На рис. 1.7.1.8-1.7.1.9 представлены проекции скрытого странного аттрактора системы (1.7.1.2)-(1.7.1.3) при соответствующих значениях параметра $\varepsilon = 0.88$ и $\varepsilon = 1$ на плоскость (x_1, x_4) .

Рис. 1.7.1.8. $\varepsilon = 0.88$ Рис. 1.7.1.9. $\varepsilon = 1$

Чтобы убедиться, что аттракторы, представленные на рис. 1.7.1.8-1.7.1.9, являются хаотическими, необходимо вычислить их показатели Ляпунова и размерность Ляпунова. Наличие положительных показателей Ляпунова подтверждает хаотическое поведение динамической системы. Существуют различные методы вычисления показателей Ляпунова. В дальнейшем в диссертации будет использоваться алгоритм Бенеттина [42], для их вычисления. Как уже было описано в разделе 1.6, для вычисления размерности Ляпунова аттрактора по формуле Каплана-Йорке системы четвертого порядка необходимо сначала вычислить показатели Ляпунова $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ системы. Кроме того, размерность системы по формуле Каплана-Йорка получается, как $D_{KY} = k + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) |\lambda_{k+1}|^{-1}$, где $\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0$. Результаты расчетов приведены в таблице 1.7.1.1.

Таблица 1.7.1.1

Показатели Ляпунова и размерность Ляпунова системы (1.7.1.1)
при различных значениях параметра ε

ε	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	D_{KY}
0.88	0,1045429	-0,0290923	-0,2226633	-0,8609476	2,3755037
1	0,0611581	-0,01322	-0,1323177	-0,9156204	2,3622955

1.7.2 Система-хамелеон автоматического управления

Хорошо известно, что уравнения вида (1.7.3) описывают широкий класс систем автоматического управления [68]. Рассмотрим систему (1.7.2.1), с нелинейностью (1.7.2.2) и передаточной функцией (1.7.2.3)

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 & 1 & -4.5 & -2 \\ -4 & -2 & 3.5 & 2.5 \\ 2.5 & 1 & -2.5 & -1 \\ -0.5 & -1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -25.5 \\ 26.05 \\ -15.5 \\ -4.55 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -9.2 \\ -20.2 \\ -21 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \sigma = c^T y, \quad (1.7.2.1)$$

$$f(\sigma, \varepsilon) = (15 - 14\varepsilon) \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{e^\sigma + e^{-\sigma}} + 0.1(1 - \varepsilon)\sigma, \quad (1.7.2.2)$$

$$\chi(p) = \frac{10.1p^3 + 10p^2}{(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)}. \quad (1.7.2.3)$$

При $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 20$, $\lambda = 0.3$ выполняется условие 3) теоремы 1.2. Проверка выполнения частотного неравенства (1.2.7) приведен на рис 1.7.2.1.

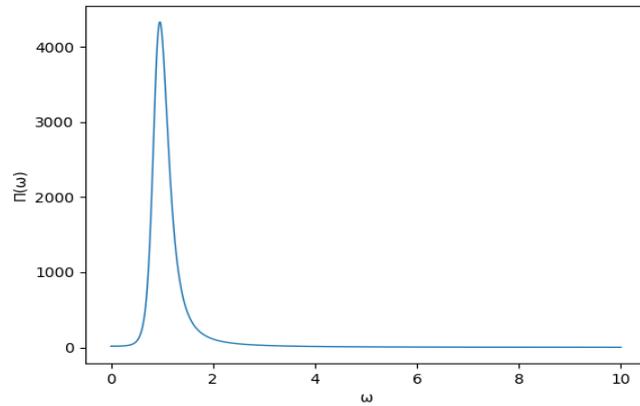


Рис. 1.7.2.1. График функции $P(\omega)$

При $\varepsilon = 0$ теорема 1.2 гарантирует, что рассматриваемая система имеет один цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$ системы. Эволюция этого цикла при возрастании ε от 0 до 1 представлена на рис. 1.7.2.2-1.7.2.4 в проекции на плоскость (x_3, x_4) . Отметим, что при значении параметра $\varepsilon > \frac{5.2}{14.1}$ цикл является скрытым.

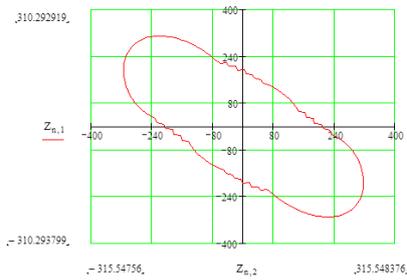


Рис. 1.7.2.2. $\varepsilon = 0$

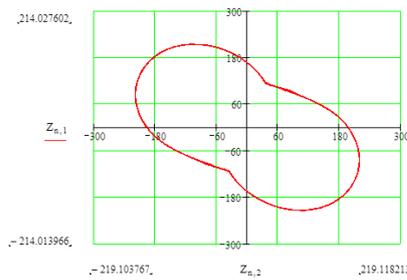


Рис. 1.7.2.3. $\varepsilon = 0.6$

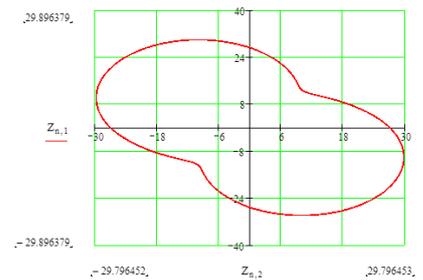


Рис. 1.7.2.4. $\varepsilon = 1$

Функция $f(\sigma, 1)$ удовлетворяет условиям $0 < f'(\sigma, 1) < 2$, в то время как $A + \mu bc^T$ является матрицей Гурвица для $0 < \mu < 9.9$. Таким образом, рассматриваемая система с нелинейностью $f(\sigma, 1)$ удовлетворяет всем предположениям известной гипотезы Калмана [65].

1.7.3 Система-хамелеон на основе системы с обратной связью

Рассмотрим систему с обратной связью (1.7.3.1), содержащую параметр, которая может быть записана в форме Лурье (1.7.3) с нелинейностью (1.7.3.2)

$$\dot{x} = Ax + b[\varepsilon\varphi(\sigma) + (1 - \varepsilon)\psi(\sigma)],$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -19 \\ -3.5 \\ -3.2 \end{pmatrix} \quad (1.7.3.1)$$

$$\varphi(\sigma) = 15\operatorname{arctg}(\sigma) - 0.27\sigma, \quad \psi(\sigma) = 0.9\operatorname{arctg}(\sigma) \quad (1.7.3.2)$$

При $\varepsilon = 0$ система (1.7.3.1) имеет самовозбуждающийся из окрестности точки $(0,0,0)$ цикл, представленный на рис. 1.7.3.1. При $\varepsilon \approx 0.3327$ цикл становится скрытым, проекция цикла при $\varepsilon = 0.333$ представлена на рис. 1.7.3.2. Начиная с $\varepsilon = 0.95$ наблюдается каскад удвоений периода цикла. При $\varepsilon = 0.995$ в системе наблюдается хаотический аттрактор, представленный на рис. 1.7.3.3. Показатели Ляпунова и размерность по формуле Каплана-Йорке этого аттрактора приведены в табл. 1.7.3.1. При $\varepsilon = 1$ система (1.7.3.1) имеет три состояния равновесия и пару симметричных относительно начала координат хаотических аттракторов-близнецов, представленных на рис. 1.7.3.4, с показателями Ляпунова и размерностью Ляпунова, которые приведены в табл. 1.7.3.1. Эти аттракторы не возбуждаются из окрестностей состояний равновесия (т.е. являются скрытыми).

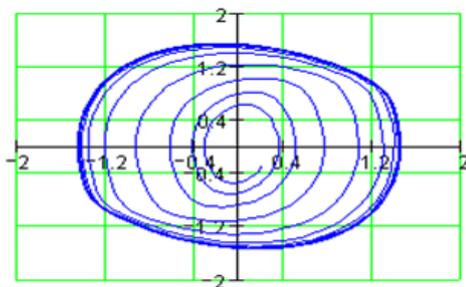


Рис. 1.7.3.1. $\varepsilon = 0$

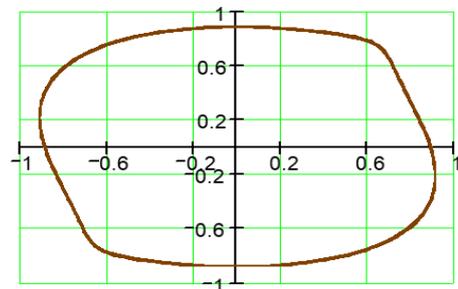


Рис. 1.7.3.2. $\varepsilon = 0.333$

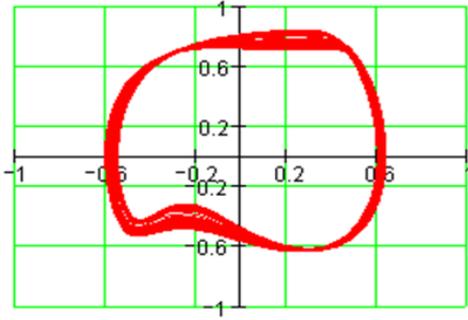
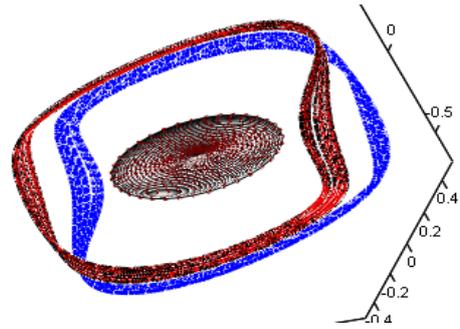
Рис. 1.7.3.3. $\varepsilon = 0.995$ Рис. 1.7.3.4. $\varepsilon = 1$

Таблица 1.7.3.1

Показатели Ляпунова и размерность Ляпунова системы (1.7.3.1)-(1.7.3.2) при различных значениях параметра ε

ε	λ_1	λ_2	λ_3	D_{KY}
0.995	0.053	0	-0.977	2.054
1	0.028	0	-0,942	2.030

1.7.4 Система-хамелеон с бесконечным числом состояний равновесия

Теперь мы рассмотрим систему следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Pz + q\varphi(\sigma, \varepsilon), \\ \dot{\sigma} &= r^T z + \beta\varphi(\sigma, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.7.4.1)$$

где P – матрица размера $(n-1) \times (n-1)$, q и r – $(n-1)$ -мерные векторы, β – скаляр, $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ – 2π -периодическая функция по переменной σ . Уравнения вида (1.7.4.1) описывают широкий класс систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). В настоящее время различные модификации ФАПЧ широко используются в радиосистемах, телекоммуникационных системах, системах глобального позиционирования (GPS), компьютерных архитектурах, кардиостимуляторах, а также в других областях.

Если функция $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ при некотором значении ε имеет нули на периоде $[0, 2\pi)$, то система (1.7.4.1) имеет бесконечное число состояний равновесия.

Предположим что $q^T (P - pI_{n-1})^{-1} r = m(p) [n(p)]^{-1}$ и передаточная

функция $\chi(p) = [m(p) - \beta n(p)] [pn(p)]^{-1}$, где $m(p)$ и $n(p)$ – многочлены. Для поиска скрытых аттракторов в системах вида (1.7.4.1) с бесконечным числом состояний равновесия удобно использовать следующую теорему, доказанную в [5].

Теорема 1.6. Пусть при некотором значении параметра ε функция $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ в системе (1.7.4.1) непрерывна и кусочно-дифференцируема и выполняются следующие условия:

- 1) график функции $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ имеет единственную точку пересечения $\sigma = \tilde{\sigma}$ с прямой $\varphi = 0$;
- 2) существуют такие числа μ_1 и μ_2 , что условия $\mu_1 < \varphi'(\sigma, \varepsilon) < \mu_2$ выполняются во всех точках, где функция $\varphi(\sigma, \varepsilon)$ дифференцируема;
- 3) для некоторых значений $\lambda > 0$ и всех значений $\omega \geq 0$ справедливо неравенство:

$$\Pi(\omega) = 1 + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{Re} \chi(i\omega - \lambda) + \mu_1 \mu_2 |\chi(i\omega - \lambda)|^2 > 0;$$

- 4) многочлен $[m(p) - \beta n(p)] \varphi'(\tilde{\sigma}, \varepsilon) + pn(p)$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями;
- 5) для некоторых значений $h \in (\mu_1, \mu_2)$ все корни многочлена $[m(p) - \beta n(p)]h + pn(p)$ имеют отрицательные вещественные части и $|\varphi(\sigma + \tilde{\sigma}, \varepsilon) - h\sigma| < \gamma < \infty$.

Тогда система (1.7.4.1) имеет по крайней мере один цикл, область притяжения которого содержит почти все точки окрестности состояния равновесия $z = 0$, $\sigma = \tilde{\sigma}$.

В работе [5] показано, что система вида (1.7.4.1)-(1.7.4.2)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -15.8 \\ -0.3 \end{pmatrix}, \beta = -3.2 \quad (1.7.4.2)$$

имеет бесконечное число скрытых аттракторов. На основе результатов этой работы ниже строится система-хамелеон, демонстрирующая при различных

значениях параметра ε самовозбуждающиеся мультивитковые аттракторы и скрытые аттракторы-близнецы.

Рассмотрим систему (1.7.4.1)-(1.7.4.2) с 2π -периодической нелинейностью вида (1.7.4.3)

$$\varphi(\sigma, \varepsilon) = \frac{\pi}{6} \left[1.00052411 \sin \sigma + \varepsilon (0.404720835 \sin 2\sigma + 0.062532677 \sin 4\sigma) \right]. \quad (1.7.4.3)$$

Нелинейность (1.7.4.3) выбрана таким образом, что ее график поочередно пребывает в секторах гурвицевости и неустойчивости степени 2. Такое поведение нелинейности дает основание предположить, что рассматриваемая система может содержать скрытые аттракторы. Данная система имеет бесконечное число состояний равновесия вида $(0, 0, \pi k)$, $k \in Z$.

Аттракторы самовозбуждаются из любой точки окрестности всех состояний равновесия $z_1 = z_2 = 0$, $\sigma = \pi m$, $m \in Z$ рассматриваемой системы при $\varepsilon \in [0, 0.78)$. Эти аттракторы являются мультивитковыми. Например, при $\varepsilon = 0.2$, пара таких аттракторов, возбуждающихся из окрестности точки $(0, 0, 0)$ (синий) и точки $(0, 0, \pi)$ (красный), представлена на рис. 1.7.4.1.

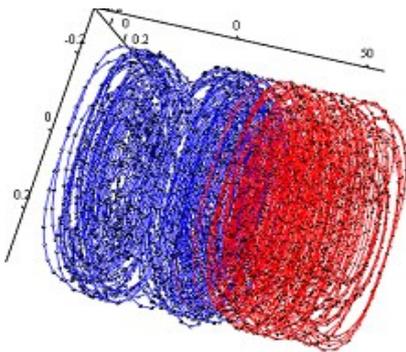


Рис. 1.7.4.1. $\varepsilon = 0.2$

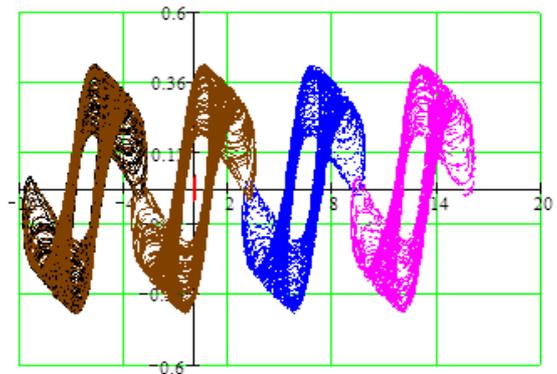


Рис. 1.7.4.2. $\varepsilon = 0.78$

Точки равновесия $(0, 0, \pi m)$ становятся устойчивыми в малом при $\varepsilon \approx 0.78$. и аттракторы, показанные на рис. 1.7.4.2 (проекция на плоскость (z_2, σ)), возбуждаются из окрестности неустойчивых точек состояний равновесия $(0, 0, (2m + 1)\pi)$.

Исследуемая система имеет бесконечное число скрытых аттракторов-близнецов при $\varepsilon=1$. Каждая пара этих аттракторов расположена в своей "полосе" $(2k-1)\pi < \sigma < (2k+1)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Проекция этих аттракторов на плоскость (z_2, σ) представлена на рис. 1.7.4.3. Показатели Ляпунова и размерность Ляпунова аттракторов, представленных на рисунках 1.7.4.1-1.7.4.3, приведены в таблице 1.7.4.1.

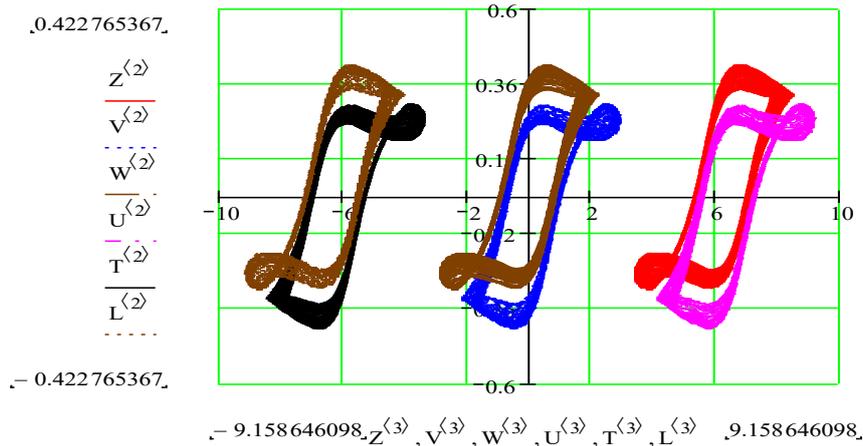


Рис.1.7.4.3. Семейство скрытых аттракторов системы (1.7.4.1)-(1.7.4.1) при $\varepsilon=1$

Таблица 1.7.4.1

Показатели Ляпунова и размерность Ляпунова системы (1.7.4.1)-(1.7.4.2)

при различных значениях параметра ε

ε	λ_1	λ_2	λ_3	D_{KY}
0.2	0.2226039	-0.0048410	-2.70566	2.0804842
0.78	0.4235692	-0.0539937	-1.2663746	2.2918375
1	0.666114	-0.0426294	-1.0348001	2.1055671

1.8 Выводы по главе 1

В этой главе были рассмотрены методы генерирования однопараметрических систем-хамелеонов. Для построения подобных систем предлагалось использовать аналитико-численный метод продолжения по параметру, который ранее использовался для поиска скрытых аттракторов. Приведены примеры, реализующие данный метод. Для проверки наличия хаотических колебаний в сконструированных системах рассчитывался спектр показателей Ляпунова и размерность Ляпунова по формуле Каплана-Йорке.

Глава 2

Мультистабильность и мегастабильность. Генерирование мегастабильных систем на основе систем в форме Лурье со скалярной нелинейностью

В данной главе будут предложены методы конструирования мегастабильных систем, содержащих 1-D и $(n-1)$ -D решетки самовозбуждающихся или скрытых аттракторов, на основе систем в форме Лурье. Приведенные методы используют идеи работ [82, 83].

Содержание данной главы существенным образом опирается на работы [8-10, 15-19, 43].

2.1 Мультистабильные системы и известные методы их генерирования

Определение 2.1. Мультистабильными называют системы, в фазовом пространстве которых есть два аттрактора и более.

Очевидно, что система, обладающая устойчивыми состояниями равновесия и скрытыми аттракторами, является мультистабильной. Так, мультистабильными являются рассмотренные в главе 1 классическая и обобщенная системы Чуа.

Определение 2.2. Экстремально мультистабильными (бесконечно мультистабильными) называют системы, содержащие бесконечное число сосуществующих нетривиальных аттракторов [81].

Определение 2.3. Мегастабильными называют системы обладающих счетным числом сосуществующих аттракторов.

К мегастабильным можно отнести все примеры, рассмотренные в главах 2-3 диссертации.

В дальнейшем будем использовать понятия и утверждения, введенные и доказанные С. Li, J.C. Sprott в работах [82, 83].

Определение 2.4. Динамическую систему $\dot{X} = F(X)$, где $X = (x_1, x_2, \dots, x_{i,\dots}, x_n)$ будем называть смещаемой по переменным (*variable-*

boostable system), если существует замена переменных $y_k = x_k - c_k$, приводящая систему к виду $\dot{Y} = F(Y) + D$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Здесь при $k \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ постоянные $c_k \neq 0$, и $c_k = 0$ при $k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$.

К смещаемым по переменным системам относятся, в частности, многомерные системы каскадного типа (1.2.2).

Основная идея, позволяющая конструировать мегастабильные системы, содержащие бесконечное число идентичных аттракторов, предложенная в работах [81, 82] заключается в том, что в системе каскадного типа (1.2.2) производится замена переменных на периодические функции этих переменных. Преимущество полученных таким образом систем состоит в том, что они создают на плоскости бесконечно много аттракторов, образуя многомерную бесконечную решетку, где каждый узел решетки может содержать аттрактор.

Легко заметить, что n -мерная система каскадного типа (1.2.2)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ &\dots \\ \dot{u} &= f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots, x). \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

является системой, смещаемой по переменным [80, 84]. Действительно, пусть $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2 + m_1$, ..., $x_{n-1} = u_{n-1} + m_{n-2}$, $x_n = u_n + m_{n-1}$, где вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ – переменные пространства состояний, а вектор $m = (m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$ – нововведенные константы, тогда

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 + m_1, \\ \dot{u}_2 = u_3 + m_2, \\ \dots \\ \dot{u}_{n-1} = u_n + m_{n-1}, \\ \dot{u}_n = f(u_2 + m_1, u_3 + m_2, \dots, u_n + m_{n-1}, u_1). \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Поскольку $f(u_2 + m_1, u_3 + m_2, \dots, u_n + m_{n-1}, u_1)$ зависит только от

производных переменных u_1, u_2, \dots, u_{n-1} по времени, которые не изменяются при введении констант m_1, m_2, \dots, m_{n-2} и не зависят от u_{n-1} , уравнение (2.1.1) идентично уравнению (1.2.2) и, таким образом, имеет ту же динамику, обеспечивая смещение переменных $\tilde{x} = (\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n)$.

Теорема 2.1. [81] *Если функции $F_1(x_2), F_2(x_3), \dots, F_{n-1}(x_n)$ являются периодическими и система*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_2), \\ \dot{x}_2 = F_2(x_3), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = F_{n-1}(x_n) \\ \dot{x}_n = f(F_1(x_2), F_2(x_3), \dots, F_{n-1}(x_n), x_1) \end{cases} \quad (2.1.2)$$

имеет ограниченное решение (аттрактор) на периоде, то n -мерная система, смещаемая по переменным, построенная из системы каскадного типа (1.2.2) допускает построение $(n-1)$ -D решетки, содержащей бесконечно много идентичных аттракторов,

Доказательство. Поскольку функции $F_1(x_2), F_2(x_3), \dots, F_{n-1}(x_n)$ являются периодическими, предположим, что p_1, p_2, \dots, p_{n-1} являются их соответствующими периодами, т. е. $F_1(x_2) = F_1(x_2 + p_1)$, $F_2(x_3) = F_2(x_3 + p_2)$, \dots , $F_{n-1}(x_n) = F_{n-1}(x_n + p_{n-1})$. При $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2 + C_1 p_1$, \dots , $x_n = u_{n-1} + C_{n-1} p_{n-1}$, где $C_1, C_2, \dots, C_{n-1} \in Z$ система (2.1.2) превращается в

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = F_1(\tilde{x}_2), \\ \dot{\tilde{x}}_2 = F_2(\tilde{x}_3), \\ \dots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} = F_{n-1}(\tilde{x}_n) \\ \dot{\tilde{x}}_n = f(F_1(\tilde{x}_2), F_1(\tilde{x}_2), \dots, F_{n-1}(\tilde{x}_n), \tilde{x}_1). \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Система (2.1.3) идентична системе (2.1.2), что указывает на то, что введение констант $C_1 p_1, C_2 p_2, \dots, C_{n-1} p_{n-1}$ не изменяет динамику системы

(2.1.2), но дает соответствующие смещения в размерах x_2, x_3, \dots, x_n , что порождает бесконечно много аттракторов (($n-1$)-D решетку аттракторов) в пространстве (x_2, x_3, \dots, x_n) . Кроме того, аттракторы могут сливаться, образуя один аттрактор, который простирается до бесконечности, но тогда индивидуальный аттрактор будет неограниченным.

Таким образом, можно получить бесконечную ($n-1$)-D решетку идентичных аттракторов, заменяя переменные в исходной системе на периодические функции. При $n=1$ решетку аттракторов будем также называть 1-D полосой.

Метод построения самовоспроизводящейся системы может быть обобщен на другие динамические системы, которые не являются системами каскадного типа (1.2.2). Однако, в таком случае, процедура введения периодических функций, позволяющая построить систему с многомерной решеткой аттракторов, оказывается намного сложнее. Это влияние на динамику может привести к разрушению аттрактора. Поэтому в дальнейшем, будем рассматривать только системы каскадного типа (1.2.2) или приводящиеся к ним.

2.2 Генерирование мегастабильных систем с 1-D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\dot{x} = f(x), f(x+d) = f(x), x \in R^n, d \in R^n, d \neq 0. \quad (2.2.1)$$

Определение 2.5. Величину $d^T x$ называют угловой координатой или фазовой координатой системы, а саму систему обычно называют фазовой системой или системой с угловой координатой.

Если система (2.2.1) имеет состояние равновесия $\bar{x} : f(\bar{x}) = 0$, то она имеет бесконечное число состояний равновесия $x_k = \bar{x} + kd, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Пусть $h \in R^n$ – некоторый вектор, такой что $h^T d = \Delta \neq 0$. Тогда $h^T x_k = h^T \bar{x} + kh^T d = h^T \bar{x} + k\Delta$.

Предположим, что система (2.2.1) имеет нетривиальный аттрактор Ω такой, что для любого $x_0 \in \Omega$ и произвольных $\tau \geq 0$ и $t \geq 0$ справедливо соотношение $|c^T x(t, x_0) - c^T x(\tau, x_0)| < \Delta$. Тогда, очевидно, фазовая система (2.2.1) имеет бесконечное число аттракторов, получаемых из аттрактора Ω сдвигом на вектор kd , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Рассмотрим систему в форме Лурье со скалярной нелинейностью (1.2.1) и невырожденной передаточной функцией $\chi(p)$. Невырожденность передаточной функции $\chi(p)$ для системы (1.2.1) влечет за собой полную управляемость пары (A, b) и полную наблюдаемость пары (A, c) (линейную независимость векторов $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ и векторов $c, A^T c, \dots, A^{T(n-1)}c$)

Предположим, что $\det A = 0$, а функция $\varphi(\sigma)$ является Δ -периодической. Из предположения $\det A = 0$ следует, что система (1.2.1) неособым преобразованием может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Bx_1 + l_1\varphi(\sigma), \\ \dot{x}_2 &= l_2\varphi(\sigma), \\ \sigma &= \alpha_1^T x_1 + \alpha_2 x_2, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

где B – $(n-1) \times (n-1)$ -матрица, l_1 и α_1 – $(n-1)$ -мерные векторы, l_2 и α_2 – числа. В силу полной наблюдаемости пары (A, c) пара (B, α_1) также полностью наблюдаема, и, следовательно, $B^T \alpha_1 \neq 0$. Из (2.2.2) имеем

$$\dot{\sigma} = \alpha_1^T Bx_1 + (\alpha_1^T l_1 + \alpha_2 l_2)\varphi(\sigma).$$

$$\text{Положив } x_1 = y, l_1 = q, B^T \alpha_1 = r, (\alpha_1^T l_1 + \alpha_2 l_2) = \rho, \text{ систему (1.2.1)}$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{y} &= By + q\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= r^T y + \rho\varphi(\sigma). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Система (2.2.3) – система с цилиндрическим фазовым пространством, где $d = (0, 0, \dots, 0, \Delta)$, $h = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Поскольку в цилиндрическом фазовом пространстве $\{(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \sigma \bmod \Delta)\}$ динамический поток системы (2.2.3) не

меняется при замене σ на $\sigma + k\Delta$, $k \in N$, то в накрывающем пространстве $\{(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \sigma)\}$ такая замена влечет за собой сдвиг фазового потока на $k\Delta$ в направлении оси σ , не меняя при этом динамику остальных переменных. Если система (2.2.3) имеет аттрактор, целиком расположенный в "полосе" $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \sigma: y_i \in (-\infty, \infty), \sigma \in (\sigma_0, \sigma_0 + \Delta)\}$, то она имеет бесконечную 1-D решетку (полосу) идентичных аттракторов-клонов.

Убедиться в том, что система (1.2.1) с особой матрицей A , Δ -периодической функцией $\varphi(\sigma)$ и невырожденной передаточной функцией $\chi(p)$ является системой с угловой координатой можно и по-другому. Пусть s – собственный вектор матрицы A , соответствующий ее нулевому собственному значению: $As = 0, s \neq 0$. Тогда $c^T s \neq 0$. В предположении противного, справедливы соотношения:

$$\begin{cases} c^T s = 0, \\ c^T A^j s = 0, j = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Из соотношений (2.2.4) и полной наблюдаемости пары (A, c) следует, что $s = 0$.

Положим $d = \Delta s (c^T s)^{-1}$. Тогда

$$A(x + d) + b\varphi[c^T(x + d)] = Ax + b\varphi(\sigma + \Delta) = Ax + b\varphi(\sigma). \quad (2.2.5)$$

Соотношение (2.2.5) означает, что рассматриваемая система является фазовой.

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.3. [17] Пусть передаточная функция системы (1.2.1) невырожденная, $\varphi(0) = 0$, $\chi(0) \neq 0$, и матрица $A - \chi(0)^{-1}bc^T$ имеет нулевое собственное значение. Пусть система (1.2.1) имеет нетривиальный аттрактор Ω такой, что для любого $x_0 \in \Omega$ справедливо соотношение $|c^T x(t, x_0)| < C < \infty$ при $t \geq 0$. Тогда функцию $\varphi(\sigma)$ в системе (1.2.1) можно заменить на Δ -периодическую функцию $\psi(\sigma)$ таким образом, чтобы новая

система имела бесконечное число состояний равновесия и 1-D решетку (полосу) идентичных аттракторов-клонов.

Доказательство. Положим $k = -\chi(0)^{-1} = -\frac{m(0)}{n(0)}$. Систему (1.2.1)

можно записать в следующем виде:

$$\dot{x} = A_1 x + b g(\sigma), \quad \sigma = c^T x, \quad (2.2.6)$$

где $g(\sigma) = \varphi(\sigma) - k\sigma$, $A_1 = A + kbc^T$. Матрица A_1 имеет нулевое собственное значение. Для доказательства справедливости последнего утверждения воспользуемся леммой 1.1 (леммой Шура) [31]:

$$\det(A + kbc^T - pI) = \det(A - pI) \det[I + k(A - pI)^{-1} bc^T] = n(p) \det[1 + kc^T (A - pI)^{-1} b] = n(p) \left(1 + k \frac{m(p)}{n(p)}\right) = n(p) + km(p) = n(p) - \frac{n(0)}{m(0)} m(p). \quad (2.2.7)$$

Из соотношений (2.2.7) при $p = 0$ получаем $\det(A + kbc^T) = 0$.

В силу предположений теоремы система (2.2.6) имеет нетривиальный аттрактор, расположенный в ограниченной полосе $\Pi = \{x : -C < c^T x < C\}$ фазового пространства. Заменим в (2.2.6) функцию $g(\sigma)$ на $2C$ -периодическую функцию $\psi(\sigma)$, совпадающую с $g(\sigma)$ на $[-C, C]$. Тогда система (2.2.6) преобразуется в систему с угловой координатой $d^T x$, где $d = \Delta s(c^T s)^{-1}$, а s – собственный вектор матрицы A_1 , соответствующий ее нулевому собственному значению. Полученная система имеет бесконечное число состояний равновесия и 1-D решетку аттракторов, полученных сдвигом аттрактора Ω системы (2.2.6) в направлении вектора d .

Продемонстрируем на примерах вышеописанный метод конструирования мегастабильных систем, обладающих 1-D решеткой аттракторов.

В подразделах 2.2.1 и 2.2.2 мегастабильная система строится на основе классической системы Чуа с различными значениями параметров. В

подразделе 2.2.3 мегастабильная система с 1-D решеткой аттракторов строится на основе обобщенной системы Чуа. При этом треть из аттракторов решетки являются скрытыми. В подразделе 2.2.4 сначала строится система, обладающая тройкой периодических аттракторов, один из которых скрыт. Путем замены нелинейность в системе на периодическую функцию строится система с 1-D решеткой периодических аттракторов, треть из которых скрыта. Наконец, в подразделе 2.2.5 сначала построена система с гладкой нелинейностью, обладающая парой скрытых хаотических аттракторов-близнецов. Заменяя в построенной системе нелинейность на периодическую функцию, получаем мегастабильную систему с 1-D решеткой (полосой) самовозбуждающихся аттракторов.

2.2.1 Мегастабильная система с 1-D решеткой хаотических аттракторов, построенная на основе классической системы Чуа с парой скрытых аттракторов-близнецов

Рассмотрим математическую модель классической цепи Чуа (1.1.2)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x) - \alpha\varphi(\sigma), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z,\end{aligned}$$

с нелинейностью $\varphi(\sigma)$ вида (1.1.3):

$$\varphi(\sigma) = m_1\sigma + 0.5(m_0 - m_1)(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|)$$

которая является системой в форме Лурье (1.2.1) и в матричном виде может быть записана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.1.1)$$

Система (2.2.1) с нелинейностью $\varphi(\sigma)$ исследовалась многими авторами, например, в работах [3, 6, 7, 34], при различных значениях входящих в нее параметров.

Как было упомянуто в разделе 1.1 диссертации, при следующих

значениях параметров: $m_1 = -1.1468$, $m_0 = -0.1768$, $\alpha = 8.4562$, $\beta = 12.0732$, $\gamma = 0.0052$ в системе (2.2.1) с нелинейностью $\varphi(\sigma)$ вида (1.1.3) был обнаружен скрытый хаотический аттрактор, который визуализируется численным интегрированием системы с начальными условиями $x_0 = \text{col}(5.858, -0.369, 8.369)$ и представлен на рисунке 2.2.1.1. Этот аттрактор имеет показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.143$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -1.135$ и размерность Ляпунова, вычисленную по формуле Каплана-Йорке, $D_{KY} = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) / |\Lambda_3|^{-1} = 2.126$.

Повторим идею конструирования мегастабильной системы, содержащей 1-D решетку аттракторов. Пусть известна система вида (1.2.1) (с произвольной функцией $\varphi(\sigma)$), имеющая хаотический аттрактор, расположенный в полосе Π . Пусть существует $k \in Z$ такое, что матрица $A + kbc^T$ имеет нулевое собственное значение. Заменяя в этой системе функцию $\varphi(\sigma)$ на функцию $g(\sigma) + k\sigma$, где $g(\sigma)$ – Δ -периодическая функция, совпадающая с $\varphi(\sigma) - k\sigma$ на $[0, \Delta]$, получим систему с угловой координатой, обладающую 1-D решеткой идентичных хаотических аттракторов.

Положим $k = -\beta(\gamma + \beta)^{-1}$, $f(\sigma) = \varphi(\sigma) - k\sigma$. Тогда матрица $A + kbc^T$ будет особой, а функция $f(\sigma)$ будет иметь три нуля $\sigma = 0$, $\sigma = \pm(\gamma + \beta)\rho$, где $\rho = (m_0 - m_1) \cdot [\beta + m_1(\gamma + \beta)]^{-1}$. Заменяем функцию $f(\sigma)$ на периодическую функцию $g(\sigma)$ периода $\Delta = -2(\gamma + \beta)\rho = 13.1766$, совпадающую с функцией $f(\sigma)$ на $[(\gamma + \beta)\rho, -(\gamma + \beta)\rho]$. После этого заменим в исходной системе $\varphi(\sigma)$ на $g(\sigma) + k\sigma$. Полученная таким образом система

$$\dot{x} = Ax + b(g(\sigma) + k\sigma), \quad \sigma = c^T x \quad (2.2.1.2)$$

является системой с угловой координатой и имеет 1-D решетку идентичных аттракторов-клонов. Все эти аттракторы могут быть получены численным интегрированием системы (2.2.1.2) с начальными условиями $x_0 + jd$, $j \in Z$, где

$d = 2\text{col}(-(\gamma + \beta)\rho, -\gamma\rho, \beta\rho)$ – собственный вектор матрицы $A + kbc^T$, соответствующий нулевому собственному значению. Фрагмент 1-D решетки аттракторов системы (2.2.1.2) представлен на рисунке 2.2.1.2. Все аттракторы решетки имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.143$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -1.135$ и размерность Ляпунова, вычисленная по формуле Каплана-Йорке равна $D_{KY} = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) |\Lambda_3|^{-1} = 2.126$.

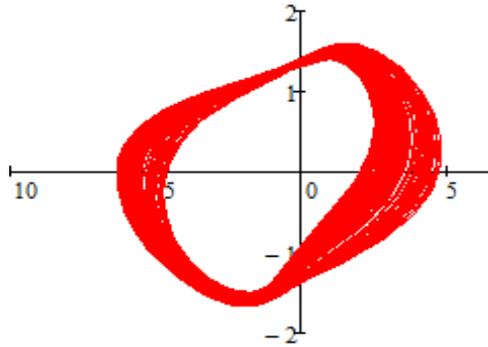


Рис.2.2.1.1. Скрытый аттрактор системы (2.2.1.1)

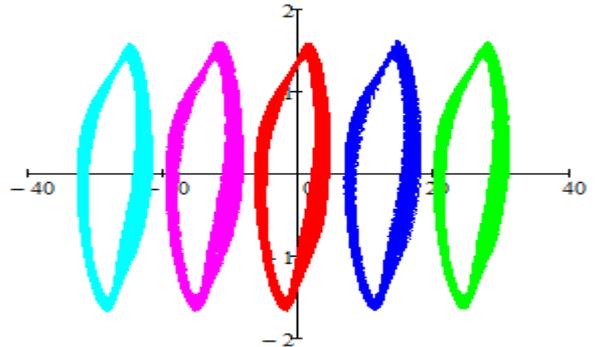


Рис.2.2.1.2. 1-D решетка аттракторов системы (2.2.1.2)

2.2.2 Мегастабильная система с 1-D решеткой хаотических аттракторов на основе классической системы Чуа с double-scroll аттрактором

Вновь рассмотрим классическую систему Чуа (2.2.1.1) с нелинейностью $\varphi(\sigma)$ вида (1.1.3), но с другими значениями параметров: $m_1 = -0.7143$, $m_0 = -1.099$, $\alpha = 9.8$, $\beta = 13.37$, $\gamma = 0$. Хорошо известно [48], что при указанных значениях параметров система имеет double-scroll аттрактор, который представлен на рисунке 2.2.2.1.

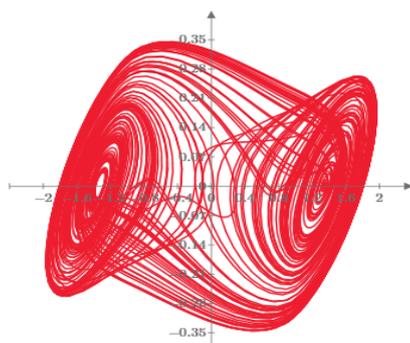


Рис.2.2.2.1. Double-scroll аттрактор системы Чуа

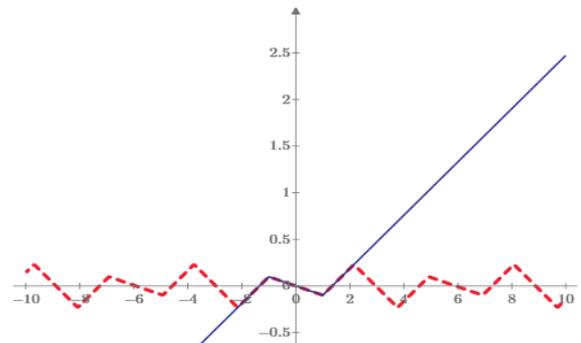


Рис.2.2.2.2. Графики функций $f(\sigma)$ (сплошная линия) и $g(\sigma)$ (пунктирная линия)

Положим $k = -1$, $f(\sigma) = \varphi(\sigma) + \sigma$. Тогда матрица $A - bc^T$ будет особой, а функция $f(\sigma)$ будет иметь три нуля: $\sigma = 0$, $\sigma = \pm\sigma_0$, $\sigma_0 = (m_1 - m_0)(m_1 + 1)^{-1}$. Заменяем функцию $f(\sigma)$ на $4.4\sigma_0$ -периодическую функцию $g(\sigma)$, совпадающую с $f(\sigma)$ на $[-1.6\sigma_0, 1.6\sigma_0]$. Графики функций $f(\sigma)$ и $g(\sigma)$ приведены на рисунке 2.2.2.2. При этом система (2.2.1.2) будет иметь 1-D решетку идентичных double-scroll аттракторов, фрагмент которой представлен на рисунке 2.2.2.3.

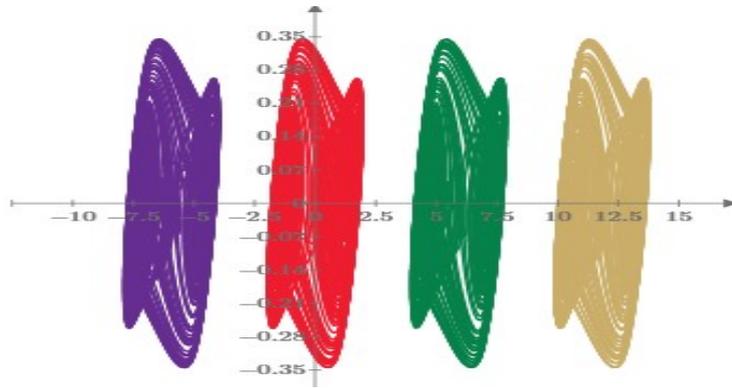


Рис. 2.2.2.3. Фрагмент 1-D решетки аттракторов системы (1.1.2)-(1.1.3)

Все аттракторы решетки, представленной на рисунке 2.2.2.3, также как аттрактор на рисунке 2.2.2.1, имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.3479$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -3.0062$ и размерность Ляпунова по формуле Каплана-Йорке $D_{KY} = 2.116$.

2.2.3 Мегастабильная система с 1-D решеткой хаотических аттракторов на основе обобщенной системы Чуа

Рассмотрим обобщенную систему Чуа (1.1.2)-(1.1.4), линейная часть которой имеет вид (2.2.1.1)

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

а нелинейность $\varphi(\sigma)$ вид (1.1.4):

$$\varphi(\sigma) = m_1\sigma + 0.5(m_0 - m_1)(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|) + 0.5(s - m_0)(|\sigma + \delta| - |\sigma - \delta|)$$

Передаточная функция системы имеет следующий вид

$$\chi(p) = \frac{\alpha p^2 + \alpha(1+\gamma)p + \alpha(\beta+\gamma)}{p^3 + (\gamma + \alpha + 1)p^2 + (\gamma + \beta + \alpha\gamma)p + \alpha\beta}. \quad (2.2.3.1)$$

Система (1.1.2)-(1.1.4) имеет три состояния равновесия: $(0,0,0)$ и $(\mp(\gamma + \beta)\rho, \mp\gamma\rho, \pm\beta\rho)$, где $\rho = [m_0 - m_1 + (s - m_0)\delta] \cdot [\beta + m_1(\gamma + \beta)]^{-1}$. При этом матрица $A_1 = A + kbc^T$ при $k = -\beta(\gamma + \beta)^{-1}$ имеет однократное нулевое собственное значение, а функция $g(\sigma) = \varphi(\sigma) - k\sigma$ имеет три нуля: $\sigma = 0$, $\sigma = \pm(\gamma + \beta)\rho$. Следуя работе [20], выберем следующие значения параметров $\alpha = 8.4562$, $\beta = 12.0732$, $\gamma = 0.0052$, $s = -0.9668$, $\delta = 0.2$. Тогда $-(\gamma + \beta)\rho = 7.236543046$. Для таких значений параметров, как показано в [20], рассматриваемая система имеет три скрытых аттрактора: цикл и два хаотических аттрактора-близнеца, расположенных в полосе $|x| \leq x_0 < 2$. Эти аттракторы, представленные на рисунке 2.2.3.1, могут быть обнаружены при численном интегрировании системы с начальными условиями $x_0 = (-0.458, -0.107, 2.522)$ и $x_{1,2} = (\pm 1.360, \pm 1.633, \pm 1.631)$.

Заменим теперь функцию $\varphi(\sigma)$ в (1.1.2)-(1.1.4) на периодическую функцию $\psi(\sigma)$ периода $\Delta = -2(\gamma + \beta)\rho = 13.1766$, совпадающую с функцией $\varphi(\sigma)$ на $[(\gamma + \beta)\rho, -(\gamma + \beta)\rho]$. Тогда новая система будет иметь 1-D решетку идентичных аттракторов, представленных на рисунке 2.2.3.2. Треть из этих аттракторов (циклы) являются скрытыми. Для отыскания аттракторов построенной системы можно применить следующую процедуру: если x_0 – точка, принадлежащая какому-либо аттрактору системы (1.1.2)-(1.1.4), d – собственный вектор матрицы A_1 , $q = \Delta d(c^T d)^{-1}$, тогда точки $x_0 + jq$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ принадлежат аттракторам 1-D решетки. Хаотические аттракторы, представленные на рисунках 2.2.2.1 и 2.2.2.2, имеют показатели Ляпунова $(0.121, 0, -1.13)$ и размерность Ляпунова равную 2.107.

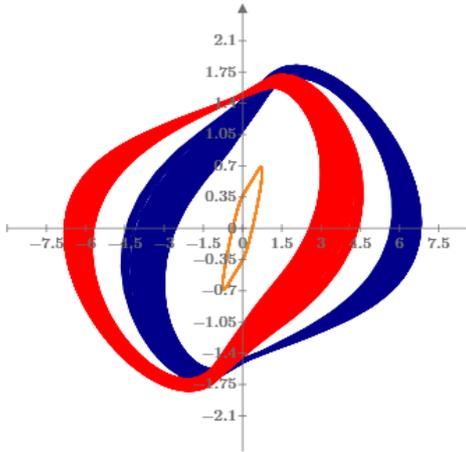


Рис.2.2.3.1. Скрытые аттракторы системы (1.1.2)-(1.1.4)

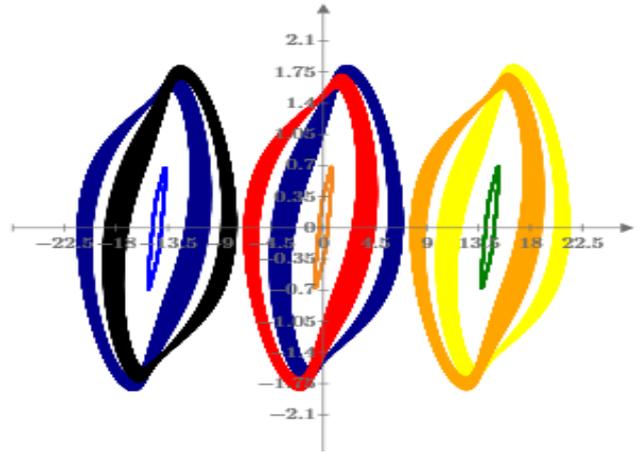


Рис. 2.2.3.2. 1-D решетка аттракторов системы (1.1.2)-(1.1.4) с периодической нелинейностью

2.2.4 Экстремально мультистабильная система с 1-D решеткой аттракторов

В настоящем разделе будет продемонстрирован еще один подход к конструированию экстремально мультистабильных систем с 1-D решеткой аттракторов, треть из которых являются скрытыми.

Для генерирования экстремально мультистабильной системы вида (1.2.1) воспользуемся одним результатом, полученным в работе [4]. Приведем формулировку теоремы из [4] в удобной для нас форме.

Теорема 2.4. Пусть в системе (1.2.1) матрица A имеет одно нулевое собственное значение, $n-1$ собственных значений с отрицательными вещественными частями, передаточная функция $\chi(p)$ невырожденная, $\lim_{p \rightarrow \infty} p\chi(p) = -c^T b \geq 0$ и выполнены следующие условия:

1) Существуют числа $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$ такие, что при всех $\omega \geq 0$ справедливо соотношение

$$\operatorname{Re}[1 + \mu_1 \chi(i\omega - \lambda_1)]^T [1 + \mu_2 \chi(i\omega - \lambda_1)] > 0. \quad (2.2.4.1)$$

При этом для некоторого $\hat{\mu} \in (\mu_1, \mu_2)$ матрица $A + \hat{\mu}bc^T$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda_1 \leq \operatorname{Re} p \leq 0$.

3) Существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что матрица $A + \lambda_2 I$ имеет одно

положительное собственное значение, $n-1$ собственных значений с отрицательными вещественными частями и при всех $\omega \geq 0$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \chi(i\omega - \lambda_2) + \nu |\chi(i\omega - \lambda_2)|^2 \leq 0 \quad (2.2.4.2)$$

Тогда можно указать такую Δ -периодическую непрерывную функцию $\varphi(\sigma)$, имеющую ровно два нуля на периоде, что система (1.2.1) будет иметь в каждой полосе $X_k = \{x : (k-1)\Delta \leq c^T x \leq k\Delta\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ любое наперед заданное число орбитально асимптотически устойчивых циклов.

Алгоритм конструирования функции $\varphi(\sigma)$, обладающей нужными свойствами, описан в работе [4]. Основная идея этого алгоритма, говоря несколько неточно, состоит в построении этой функции таким образом, чтобы ее график пребывал поочередно "достаточно долго" в секторах линейной устойчивости и линейной неустойчивости степени 2 системы (1.2.1). При этом ясно, что, если система (1.2.1) с периодической нелинейностью и двумя состояниями равновесия на периоде имеет на каждом периоде не менее трех циклов, то она имеет бесконечное число скрытых циклов. Последнее означает, что бассейн притяжения этих циклов не будет пересекаться с малой окрестностью ни одного из состояний равновесия системы.

Рассмотрим систему в форме Лурье вида (1.2.1) с передаточной функцией $\chi(p) = (p^3 + 3p^2 + 1.92p)^{-1}$. Для такой передаточной функции выполнено условие (2.2.4.1) с $\mu_1 = -0.5$, $\mu_2 = 10$, $\lambda_1 = 1.6$, а также условие (2.2.4.2) для $\lambda_2 = 0.4$, $\nu = 0.352$. Сектор $(-\infty, 0)$ является сектором неустойчивости степени 1, Сектор $(0, 5.76)$ – сектор линейной устойчивости, сектор $(5.76, \infty)$ – сектор неустойчивости степени 2. Следуя описанной в работе [4] процедуре, построим нечетную периодическую функцию периода $\Delta = 0.12(e^{1.2} + 2)$ так, чтобы на каждом периоде система имела три орбитально асимптотически устойчивых цикла. Для этого на полупериоде $[0, \Delta]$ зададим функцию $\varphi(\sigma)$ следующим образом:

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 6\sigma, & 0 \leq \sigma \leq 0.01 \\ 0.06, & 0.01 \leq \sigma \leq 0.02 \\ 0.06e^{200\sigma-4}, & 0.02 \leq \sigma \leq 0.038 \\ 0.06e^{11.2-200\sigma}, & 0.038 \leq \sigma \leq 0.05 \\ 0.06e^{1.2}, & 0.05 \leq \sigma \leq 0.08 \\ 0.06e^{200\sigma-14.8}, & 0.08 \leq \sigma \leq 0.1 \\ 0.06e^{25.2-200\sigma}, & 0.1 \leq \sigma \leq 0.12 \\ 0.06e^{1.2} - \sigma + 0.12, & 0.12 \leq \sigma \leq 0.06e^{1.2} + 0.12 \end{cases}$$

На рисунке 2.2.4.1 представлен график функции $\varphi(\sigma)$ на полупериоде. На рисунке 2.2.4.2 представлены проекции на плоскость (x_1, x_2) траекторий системы (1.2.1) со сдвигом на период. Из каждой тройки циклов "средний" цикл является скрытым.

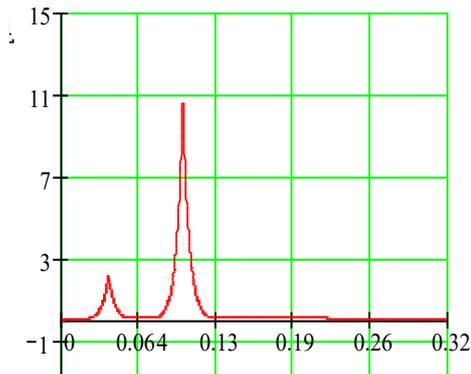


Рис.2.2.4.1. График функции $\varphi(\sigma)$ на полупериоде

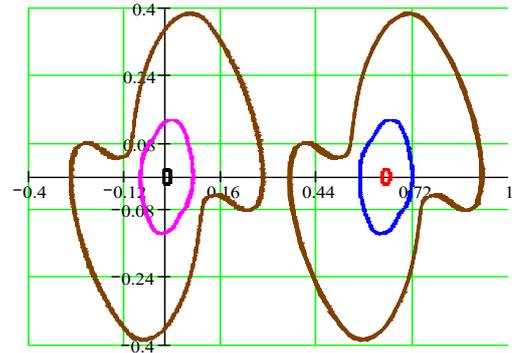


Рис.2.2.4.2. Проекция на плоскость (x_1, x_2) фрагмента 1-D решетки аттракторов

2.2.5 Мегастабильная система с 1-D решеткой скрытых хаотических аттракторов-близнецов

Рассмотрим систему в форме Лурье (1.2.1) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -19 \\ -3.5 \\ -3.2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.5.1)$$

Для этой системы сектор $(-\infty, 0)$ – сектор неустойчивости степени 1, сектор $(0, 0.08842)$ – сектор линейной устойчивости, сектор $(0.08843, 1.00979)$ – сектор неустойчивости степени 2, наконец, сектор $(1.0098, +\infty)$ – сектор

линейной устойчивости. В качестве нелинейности выберем функцию $\varphi(\sigma) = 1.5 \arctg(\sigma) - 0.28\sigma$. Оказывается, что в рассматриваемом случае система (1.2.1) имеет пару скрытых хаотических аттракторов-близнецов, которые были обнаружены с помощью процедуры поиска скрытых аттракторов, предложенной в работе [20] и представлены на рис. 2.2.5.1. Эти аттракторы могут быть обнаружены с помощью численного интегрирования системы с начальными условиями $(\pm 0.177, \pm 0.512, \mp 0.445)$. Заменяем в системе (2.2.6) нелинейность $g(\sigma)$ на периодическую функцию периода $\Delta = 15.4522$. Графики функций $\varphi(\sigma)$ и $g(\sigma)$ приведены на рисунке 2.2.5.2.

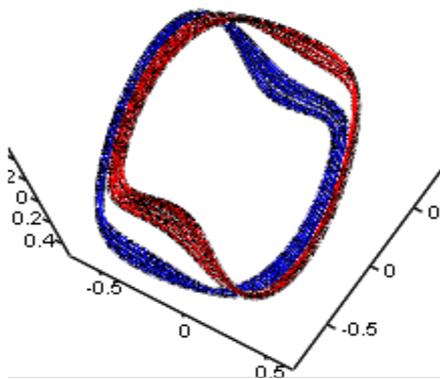


Рис.2.2.5.1. Скрытые хаотические аттракторы-близнецы системы (2.2.6)-(2.2.5.1)

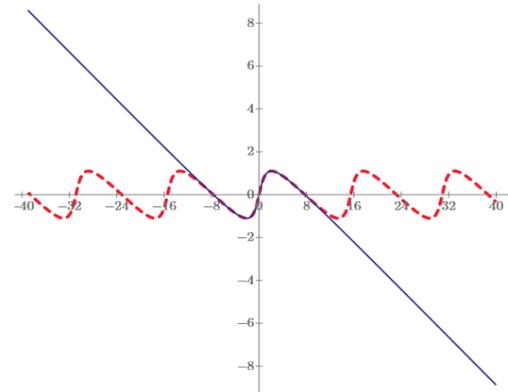


Рис.2.2.5.2. Графики функций $\varphi(\sigma)$ (сплошная линия) и $g(\sigma)$ (пунктирная линия)

Проекция на плоскость (x_1, x_2) фрагмента 1-D решетки скрытых хаотических аттракторов новой системы представлена рис. 2.2.5.2.

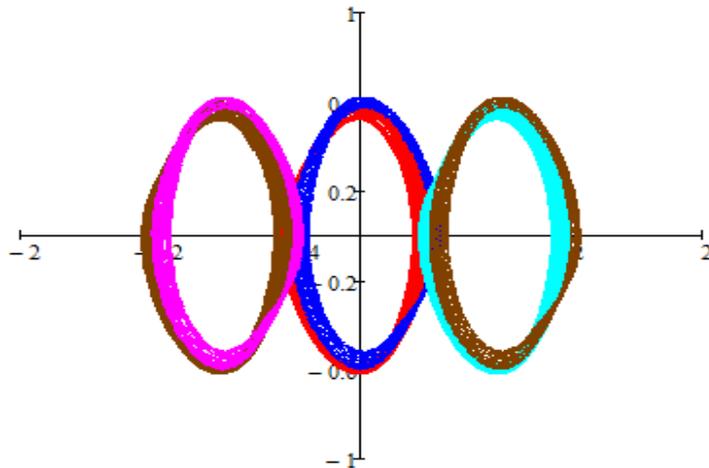


Рис.2.2.5.3. Проекция на плоскость (x_1, x_2) фрагмента 1-D решетки скрытых хаотических аттракторов-близнецов системы (2.2.6)-(2.2.5.1)

Точки, принадлежащие скрытым аттракторам 1-D решетки, представленной на рис. 2.2.5.3, были найдены так же, как это описано в подразделе 2.2.3. Все аттракторы 1-D решетки имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.094$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -1.015$ и размерность Ляпунова, вычисленную по формуле Каплана-Йорке, равную $D_{KY} = 2.093$.

Ясно, что изложенный в данном разделе метод не позволяет генерировать системы, содержащие решетки аттракторов размерности, большей, чем 1. В следующем разделе мы воспользуемся тем известным фактом, что многомерная система в форме Лурье вида (1.2.1) всегда может быть приведена к системе каскадного типа (1.2.2) с помощью неособого линейного преобразования, описанного подробно в разделе 1.2.

2.3 Генерирование мегастабильных систем с $(n-1)$ -D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье

Как уже упоминалось в разделе 2.1 диссертации, сдвиг по переменным y, z, \dots, u в системе (1.2.2) может быть осуществлен путем введения дополнительных констант в её первые $n-1$ уравнений. Легко видеть, что такое преобразование системы осуществляет смещение фазового потока системы (1.2.2) по переменным y, z, \dots, u , оставляя неизменной динамику переменной $\tilde{x} = x$, поскольку динамика этой переменной подчиняется тому же самому уравнению.

В настоящей работе методы генерирования мегастабильных систем существенно опираются на тот факт, что система в форме Лурье (1.2.1) неособым линейным преобразованием всегда может быть приведена к системе каскадного типа (1.2.2), что подробно описано в разделе 1.2. Если такая система имела аттрактор, то его можно клонировать в $(n-1)$ -D решетку. Для этого необходимо сначала оценить размах аттрактора по осям, затем заменить переменные на периодические функции этих переменных, период которых будет не меньше, чем размах аттрактора по соответствующим осям.

Реализацию предложенного метода генерирования мегастабильных систем с $(n-1)$ -D решеткой хаотических аттракторов проиллюстрируем на конкретных примерах. В подразделе 2.3.1. строится мегастабильная система с 2-D решеткой хаотических аттракторов на основе обобщенной системы Чуа, треть из аттракторов решетки являются скрытыми. В подразделах 2.3.2 и 2.3.3 строятся системы, содержащие 2-D решетки самовозбуждающихся хаотических аттракторов, на основе систем Спротта. В подразделах 2.3.4 и 2.3.5 на основе системы гипертолчка, обладающей самовозбуждающимся аттрактором, сконструированы мегастабильные системы с 2-D и 3-D решеткой скрытых хаотических аттракторов. В подразделе 2.3.6 построена система с 2-D решеткой скрытых хаотических аттракторов-близнецов.

2.3.1. Мегастабильная система с 2-D решеткой хаотических аттракторов на основе обобщенной системы Чуа

Вернемся к рассмотренной в подразделе 2.2.3 обобщенной системе Чуа вида (1.1.2):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x) - \alpha\varphi(\sigma), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z,\end{aligned}$$

с нелинейностью $\varphi(\sigma)$ вида (1.1.4):

$$\varphi(\sigma) = m_1\sigma + 0.5(m_0 - m_1)(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|) + 0.5(s - m_0)(|\sigma + \delta| - |\sigma - \delta|),$$

при значениях параметров $\alpha = 8.4562$, $\beta = 12.0732$, $\gamma = 0.0052$, $\delta = 0.2$, $s = -0.9668$, $m_0 = 0.14$, $m_1 = -1.1468$. Эта система, как было сказано ранее, имеет три скрытых аттрактора: цикл и два хаотических аттрактора-близнеца, расположенных в полосе $|x| \leq x_0 < 2$ и визуализируемых численным интегрированием с начальными условиями $x_0 = (-0.458, -0.107, 2.522)$ и $x_{1,2} = (\pm 1.360, \pm 1.633, \pm 1.631)$ (рисунок 1.1.3).

Рассматриваемая система является системой в форме Лурье (1.2.1) с матрицей A и векторами b и c вида (2.2.1.1):

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и значит, она может быть приведена к системе каскадного типа (1.2.2).

Дальше будем рассуждать так же, как это было сделано в подразделе 2.2.3: положим $k = -\beta(\gamma + \beta)^{-1}$, $A_1 = A + kbc^T$, $\varphi(\sigma) = g(\sigma) - k\sigma$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ и перепишем рассматриваемую систему в форме Лурье

$$\dot{x} = A_1 x + b_1 \varphi(\sigma), \quad \sigma = c_1^T x \quad (2.3.1.1)$$

Найдя передаточную функцию системы (2.3.1.1) и применяя теорему 1.1, перепишем систему (2.3.1.1) в виде системы каскадного типа

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -a_0 x - a_1 y - a_2 z + \varphi(\sigma), \\ \sigma &= -r_0 x - r_1 y - r_2 z, \end{aligned} \quad (2.3.1.2)$$

где $a_0 = \alpha[\beta(m_1 + 1) + \gamma m_1]$, $a_1 = \gamma + \beta + \alpha\gamma(m_1 + 1) + \alpha m_1$, $a_2 = \gamma + \alpha(m_1 + 1) + 1$, $r_0 = \alpha(\beta + \gamma)$, $r_1 = \alpha(1 + \gamma)$, $r_2 = \alpha$.

Для выбранных значений параметров система (2.3.1.2) выглядит так:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 15.037737580544x - 2.374374715168y + 0.23617016z + \varphi(\sigma), \\ \sigma &= -102.13736608x - 8.50017224y - 8.4562z. \end{aligned} \quad (2.3.1.3)$$

При этом матрица M преобразования, определяемая из нижеследующих соотношений (1.2.5)

$$A_1 M = M A_2, \quad b_1 = M b_2, \quad c_2 = M^T c_1,$$

где

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \text{col}(0, 0, 1), \quad c_2 = \text{col}(-r_0, -r_1, -r_2),$$

будет иметь вид:

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha(\beta + \gamma) & -\alpha(1 + \gamma) & -\alpha \\ -\alpha\gamma & -\alpha & 0 \\ \alpha\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.1.4)$$

Зная $M^{-1}x_0 = (0.0247, 0.0126, -0.2569)$, $M^{-1}x_{1,2} = (\pm 0.0160, \mp 0.1933, \mp 0.1595)$ – точки принадлежащие скрытым хаотическим аттракторам преобразованной системы, можем вычислить их показатели Ляпунова и размерность по формуле Каплана-Йорке. Как и ожидалось, они совпадают с характеристиками аттракторов, представленных на рисунке 2.3.1.1.

Заменим в системе (2.3.1.3) переменные y и z на π -периодические функции $y \rightarrow 0.64\sin(2y)$, $z \rightarrow 0.542\sin(2z)$. Новая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0.64\sin(2y), \\ \dot{y} &= 0.542\sin(2z), \\ \dot{z} &= 15.037737580544x - 1.519599817708\sin(2y) + 0.12800422672\sin(2z) + \varphi(\sigma), \\ \sigma &= -102.13736608x - 5.4401102336\sin(2y) - 4.5832604\sin(2z). \end{aligned} \quad (2.3.1.5)$$

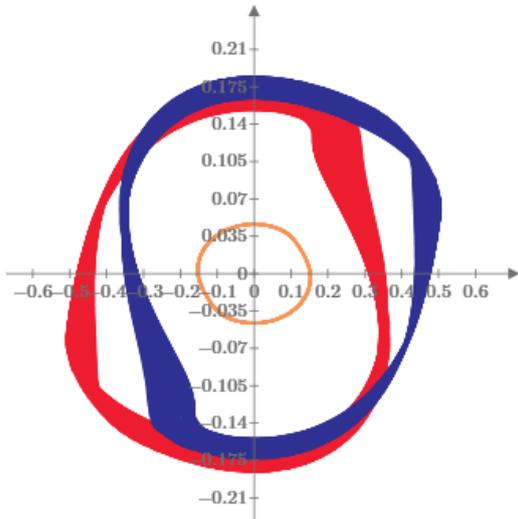


Рис.2.3.1.1. Скрытые аттракторы системы (2.3.1.2) в окрестности точки $(0,0,0)$

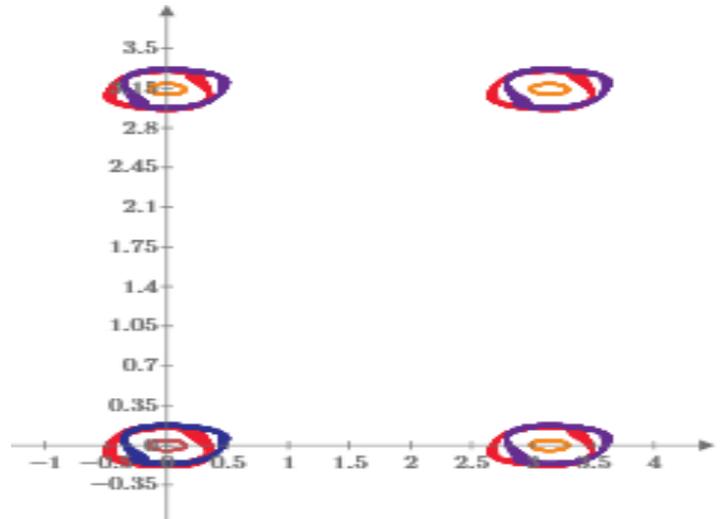


Рис.2.3.1.2. Фрагмент 2-D решетки скрытых аттракторов системы (2.3.1.2)

Система (2.3.1.5) имеет 2-D решетку идентичных скрытых аттракторов-клонов, которые могут быть обнаружены численным интегрированием с начальными условиями $(0.006, 0.043 \pm \pi k, -0.062 \pm \pi m)$ и $(\pm 0.047, \mp 0.135 \pm \pi k, \mp 0.255 \pm \pi m)$, $k, m \in N$. Тройка скрытых аттракторов этой

решетки, а также фрагмент 2-D решетки аттракторов системы (2.3.1.5) (проекция на плоскость (y, z)) представлены на рисунках 2.3.1.1 и 2.3.1.2. Все хаотические аттракторы системы (2.3.1.5) имеют показатели Ляпунова $(0.126, 0, -0.986)$ и размерность Ляпунова, вычисленную по формуле Каплана-Йорке, равную 2.138

2.3.2. Мегастабильная система с 2-D решеткой самовозбуждающихся хаотических аттракторов на основе системы Спротта

Обратимся теперь к системе, рассмотренной в работе [86]. Запишем эту систему в удобной для нас форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -z, \\ \dot{y} &= -y - (x - 1)^2, \\ \dot{z} &= 1.7x + y. \end{aligned} \quad (2.3.2.1)$$

Система (2.3.2.1) имеет 2 состояния равновесия $(0.5(3.7 \pm \sqrt{9.69}); -1.7(3.7 \pm \sqrt{9.69}); 0)$. При этом из окрестности одного из них, а именно, из точки $(3.4, -5.78, 0)$, возбуждается хаотический аттрактор с показателями Ляпунова $(0.044, 0, -1.044)$ и размерностью по формуле Каплана-Йорке 2.042. Проекция этого аттрактора на плоскость (y, z) представлена на рисунке 2.3.2.1.

Очевидно, что система (2.3.2.1) является смещаемой по переменной z , что позволяет воспользоваться изложенным в разделе 2.2 приемом для генерирования на основе системы (2.3.2.1) новой системы, обладающей 2-D решеткой хаотических аттракторов заменяя в системе (2.3.2.2) переменную z периодическими функциями вида $m \sin(nz)$ и $m \cos(nz)$. Передаточная функция системы (2.3.2.1) имеет вид $\chi(p) = (p^3 + p^2 + 1.7p + 1.7)^{-1}$. Поэтому после соответствующего линейного преобразования $x \rightarrow x, y \rightarrow -1.7x - z, z \rightarrow -y$ получим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -1.7x - 1.7y - z + (x-1)^2.\end{aligned}\tag{2.3.2.2}$$

Аттрактор системы (2.3.2.2) визуализируется при численном интегрировании с начальным условием (3.4,0,0) и его проекция на плоскость (y, z) представлена на рисунке 2.3.2.2.

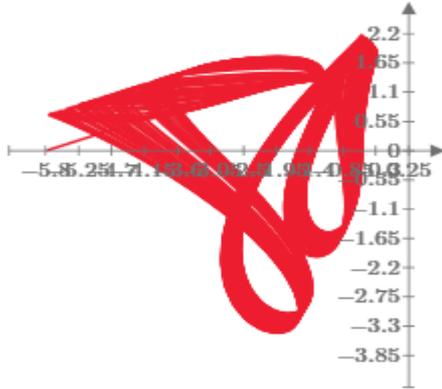


Рис. 2.3.2.1. Самовозбуждающийся аттрактор системы (2.3.2.1)

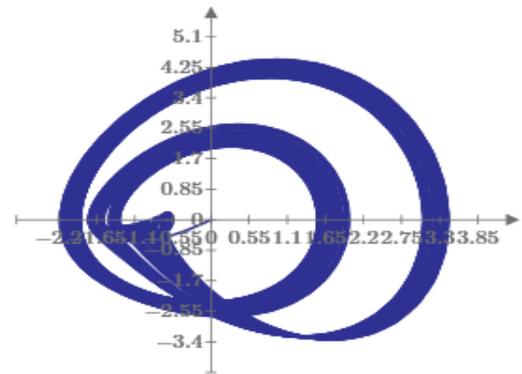


Рис. 2.3.2.2. Самовозбуждающийся аттрактор системы (2.3.2.2)

Заменяем переменные y и z в системе (2.3.2.2) на периодические функции, для этого сначала необходимо оценить размах аттрактора, изображенного на рисунке 2.3.2.2 по соответствующим осям координат. Легко заметить, что по оси y размах не превосходит 4π , по оси z - 6π . Следовательно замена переменных будет выглядеть следующим образом:

$y \rightarrow 3.1 \sin\left(\frac{y}{2}\right)$, $z \rightarrow 3.406 \sin\left(\frac{z}{3}\right)$. Получим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3.1 \sin\left(\frac{y}{2}\right), \\ \dot{y} &= 3.406 \sin\left(\frac{z}{3}\right), \\ \dot{z} &= -1.7x - 5.27 \sin\left(\frac{y}{2}\right) - 3.406 \sin\left(\frac{z}{3}\right) + (x-1)^2.\end{aligned}\tag{2.3.2.3}$$

Система (2.3.2.3) имеет 2-D решетку идентичных самовозбуждающихся хаотических аттракторов, фрагмент которой представлен на рисунке 2.3.2.3. Все аттракторы этой решетки имеют

показатели Ляпунова $(0.099, 0, -1.011)$ и размерность Ляпунова, вычисленную по формуле Каплана-Йорке, равную 2.098.

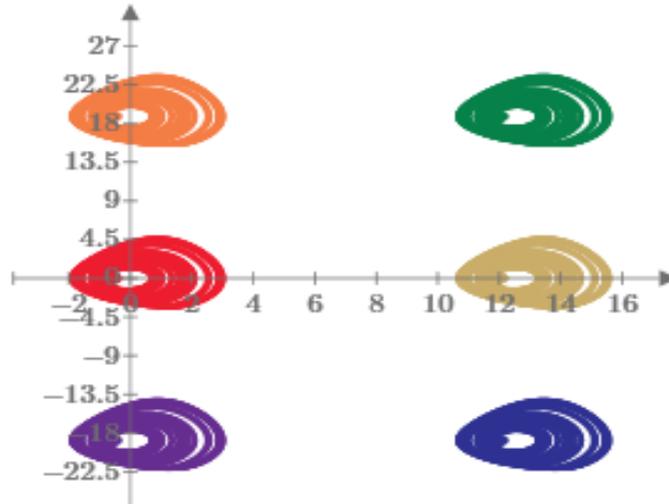


Рис. 2.3.2.3. Фрагмент 2-D решетки аттракторов системы (2.3.2.3)

2.3.3 Мегастабильная система с 2-D решеткой хаотических аттракторов на основе системы Спротта

Рассмотрим систему, для которой известен факт существования хаотического аттрактора [83]. Речь идет о системе вида (1.2.1) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -0.26 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1.64 & -0.7264 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\sigma) = \sigma^2. \quad (2.3.3.1)$$

В работе [83] указано, что рассматриваемая система имеет хаотический аттрактор, который может быть визуализирован численно при старте вычислительной процедуры из точки $q = \text{col}(-0.1, 0, -0.25)$. Здесь $\chi(p) = (1 - p^2)(p^3 - 0.7264p^2 + 0.64p - 0.3)^{-1}$. Поэтому неособым линейным преобразованием эта система может быть приведена к следующему виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 0.3x - 0.64y - 0.7264z + (z - x)^2 \end{aligned} \quad (2.3.3.2)$$

Найдя матрицу M из соотношений (1.2.5) и умножив матрицу M^{-1} на вектор q , находим точку $q_1 = \text{col}(0.10725011, -0.02788503, 0.14274989)$,

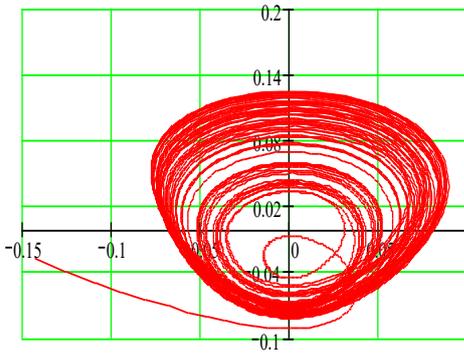


Рис.2.3.3.1. Аттрактор системы (2.3.3.2)

стартуя из которой, вычислительная процедура выходит на странный аттрактор системы (2.3.3.2), проекция которого на плоскость (y,z) представлена на рисунке 2.3.3.1. Заменяем теперь переменные y и z в системе (2.3.3.2) на периодические функции: $y \rightarrow 0.125 \sin(8y)$, $z \rightarrow 0.125 \sin(8z)$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0.125 \sin(8y), \\ \dot{y} &= 0.125 \sin(8z), \\ \dot{z} &= 0.3x - 0.08 \sin(8y) - 0.0904 \sin(8z) + (0.125 \sin(8z) - x)^2. \end{aligned} \quad (2.3.3.3)$$

Если полученная таким образом система (2.3.3.2) имеет хаотический аттрактор, то, как было сказано выше, она имеет бесконечную 2-D решетку идентичных аттракторов-клонов. Численный эксперимент показывает, что описанный сценарий в данном случае реализуется. Проекция фрагмента 2-D решетки аттракторов системы (2.3.3.2) на плоскость (y,z) представлена на рисунке 2.3.3.2.

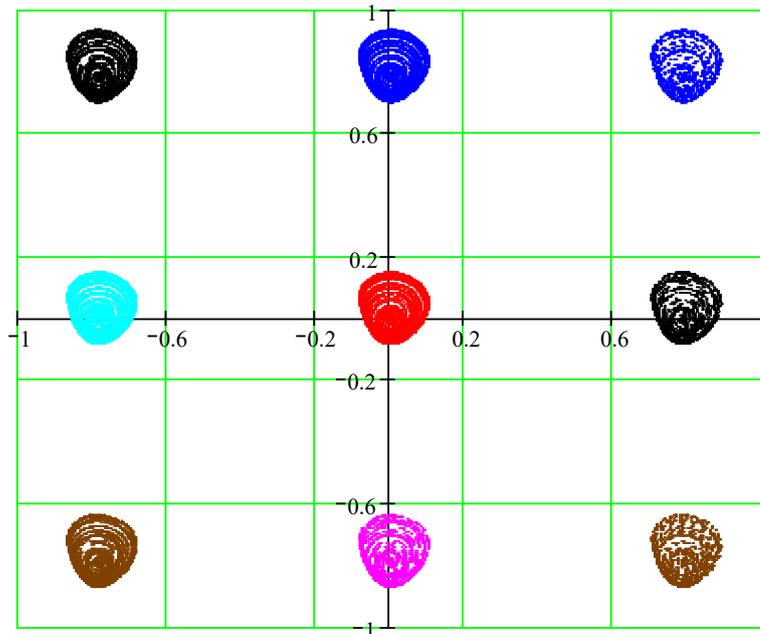


Рис. 2.3.3.2. 2-D решетка хаотических аттракторов системы (2.3.3.2) после введения периодических функций

2.3.4 Мегастабильная система с 2-D решеткой скрытых хаотических аттракторов на основе системы гипертолчка

В качестве примера рассмотрим систему гипертолчка четвертого порядка следующего вида:

$$\ddot{x} = -\ddot{x} - 3\dot{x} - x - e^{\dot{x}} - 2\dot{x}e^{-(\dot{x})^2} + 1, \quad (2.3.4.1)$$

для которой соответствующая система каскадного типа имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= u, \\ \dot{u} &= -x - 3y - u - e^z - 2ze^{-z^2} + 1. \end{aligned} \quad (2.3.4.2)$$

Эта система имеет единственное неустойчивое состояние равновесия $(0,0,0,0)$ типа седло-фокус с собственными значениями матрицы линеаризации $(-0.515 \pm 2.365i, 0.015 \pm 0.413i)$ и самовозбуждающийся из окрестности состояния равновесия аттрактор, представленный на рисунке 2.3.4.1. Ниже будет продемонстрировано, каким образом путем введения в систему (2.3.4.2) периодических функций может быть построена динамическая система, обладающая 2-D решеткой скрытых хаотических аттракторов-клонов.

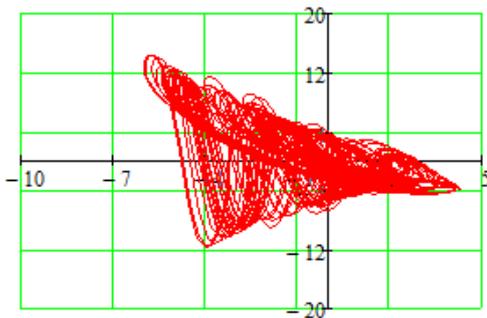


Рис. 2.3.4.1. Проекция на плоскость (y, u) самовозбуждающегося аттрактора системы (2.3.4.2)

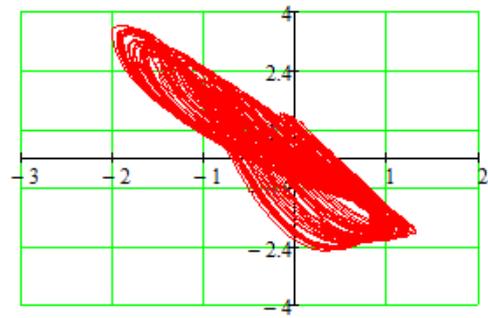


Рис. 2.3.4.2. Проекция на плоскость (y, u) скрытого аттрактора системы (2.3.4.4)

Заменим в системе (2.3.4.2) переменные y, u на периодические функции $F(y) = a \sin(by)$, $G(u) = c \sin(mu)$ и подберем значения параметров a, b, c, m так, чтобы новая система имела устойчивое в малом состояние

равновесия $(0,0,0,0)$ и хаотический аттрактор, который, очевидно, будет скрытым. Характеристический полином матрицы Якоби новой системы в точке $(0,0,0,0)$ имеет вид

$$r(p) = p^4 + ctp^3 + 3ctp^2 + 3abctp + abct. \quad (2.3.4.3)$$

Полином $r(p)$ будет полиномом Гурвица, например, при $a = 2.1, b = 0.5, c = 5, m = \frac{1}{3}$. Тогда (2.3.4.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2.1 \sin\left(\frac{y}{2}\right), \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= 5 \sin\left(\frac{u}{3}\right), \\ \dot{u} &= -x - 6.3 \sin\left(\frac{y}{2}\right) - 5 \sin\left(\frac{u}{3}\right) - e^z - 2ze^{-z^2} + 1. \end{aligned} \quad (2.3.4.4)$$

При этом система (2.3.4.4) имеет скрытый хаотический аттрактор, с показателями Ляпунова $\Lambda_1 = 0.018, \Lambda_2 = 0.000, \Lambda_3 = -0.055, \Lambda_4 = -1.354$ и размерностью по формуле Каплана-Йорке $D_{KY} = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) |\Lambda_3|^{-1} = 2.296$. Проекция этого аттрактора на плоскость (y, u) представлена на рис. 2.3.4.2.

Замена в системе (2.3.4.3) переменных y, u на периодические функции обеспечивает существование в фазовом пространстве системы (2.3.4.4) бесконечной 2-D решетки скрытых хаотических аттракторов-клонов с идентичными характеристиками – показателями Ляпунова $\Lambda_1 = 0.018, \Lambda_2 = 0.000, \Lambda_3 = -0.055, \Lambda_4 = -1.354$ и размерностью Ляпунова, рассчитанной по формуле Каплана-Йорке, равной $D_{KY} = 2.296$. Шесть аттракторов-клонов, полученные сдвигом аттрактора, представленного на рисунке 2.3.4.2 на периоды $\pm 4\pi$ и $\pm 6\pi$ по осям Oy и Ou соответственно, представлены на рисунке 2.3.4.3.

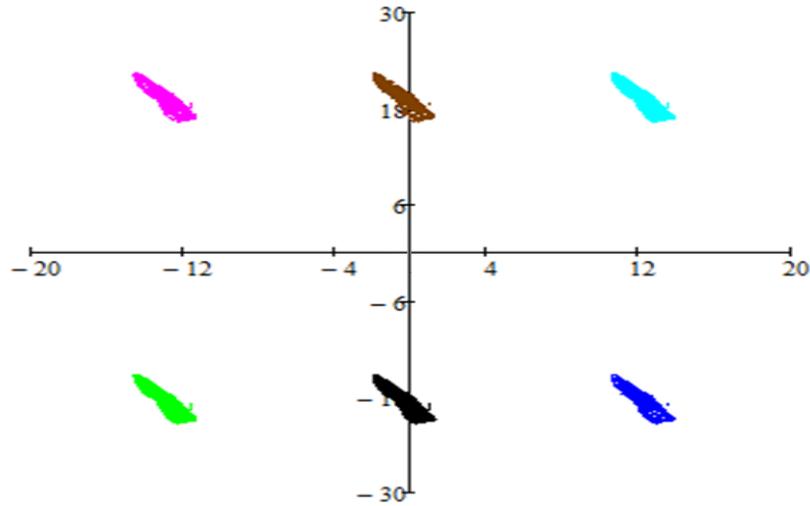


Рис. 2.3.4.3. 2-D решетка скрытых аттракторов системы (2.3.4.4)

2.3.5 Мегастабильная система с 3-D решеткой скрытых хаотических аттракторов на основе системы гипертолчка

Вновь рассмотрим систему гипертолчка вида (2.3.4.2). Так как система (2.3.4.2) допускает смещение фазового потока по переменным y , z и u , то можно попытаться заменить эти переменные на функции, периодические по переменным y , z и u так, чтобы новая система имела бесконечную 3-D решетку идентичных скрытых аттракторов.

Путем целенаправленного компьютерного поиска реализовать описанный сценарий удалось в виде системы (2.3.5.1) со следующей заменой переменных $x \rightarrow \text{tg}(y)$, $y \rightarrow \text{tg}(z)$, $z \rightarrow 1.15\text{tg}(u)$:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \text{tg}(y), \\
 \dot{y} &= \text{tg}(z), \\
 \dot{z} &= 1.15\text{tg}(u), \\
 \dot{u} &= -x - 3\text{tg}(y) - 1.15\text{tg}(u) - e^{\text{tg}(z)} - 2\text{tg}(z)e^{-\text{tg}^2(z)} + 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.3.5.1}$$

Матрица линеаризации системы (2.3.5.1) в состоянии равновесия $(0,0,0,0)$ имеет собственные значения $(-0.011 \pm 1.746i, -0.564 \pm 0.242i)$, поэтому все ее состояния равновесия асимптотически устойчивы в малом. Решение с начальным условием $(-0.1, 0.6, 0, -0.1)$ находится в области притяжения скрытого хаотического аттрактора с показателями Ляпунова

$\Lambda_1 = 0.164$, $\Lambda_2 = -0.139$, $\Lambda_3 = -0.229$, $\Lambda_4 = -2.944$ и размерностью по формуле Каплана-Йорке $D_{KY} = 2.107$. Проекции этого аттрактора на плоскости (z, u) и (y, z) представлены на рисунках 2.3.5.1 и 2.3.5.2.

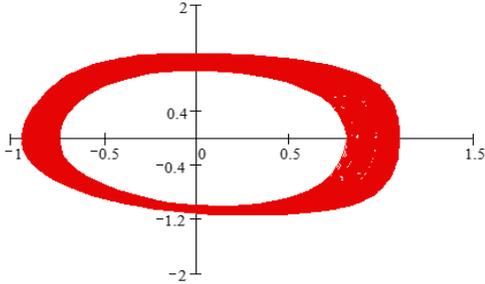


Рис. 2.3.5.1. Проекция аттрактора на плоскость (z, u)

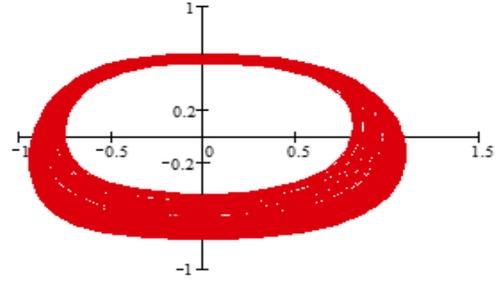


Рис. 2.3.5.2. Проекция аттрактора на плоскость (y, z)

На рисунках 2.3.5.3-2.3.5.4 представлены аттракторы-клоны, полученные сдвигом на периоды $\pm\pi$ по осям Oy и Ou и Oy и Oz .

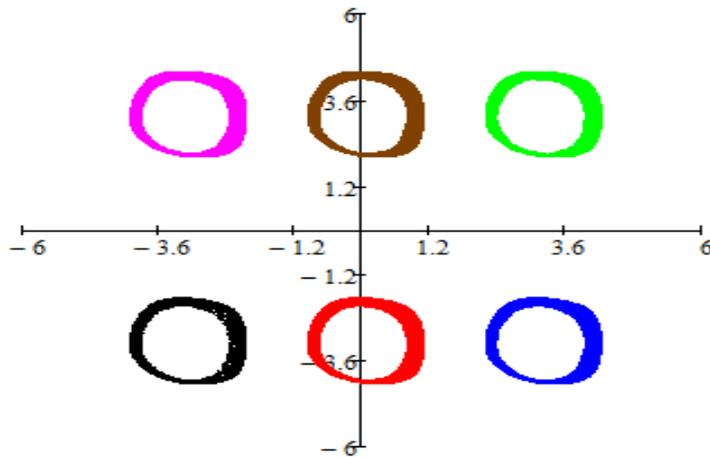


Рис. 2.3.5.3. Проекции аттракторов-клонов на плоскость (z, u)

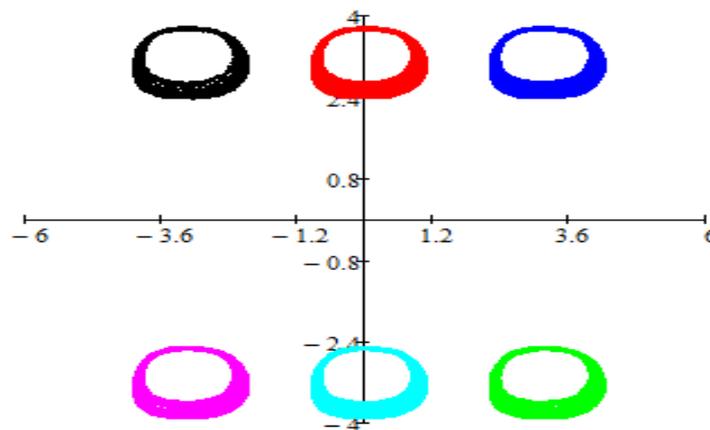


Рис. 2.3.5.4. Проекции аттракторов-клонов на плоскость (y, z)

2.3.6 Мегастабильная система с 2-D решеткой скрытых хаотических аттракторов-близнецов

Вновь рассмотрим систему (2.2.5.1):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -19 \\ -3.5 \\ -3.2 \end{pmatrix}.$$

Эта система обладает парой скрытых хаотических аттракторов-близнецов, представленных на рис. 2.3.6.1.

Система (2.2.5.1) является системой каскадного типа, поэтому можно попытаться заменить две переменные в этой системе на периодические функции так, чтобы новая система обладала 2-D решеткой скрытых хаотических аттракторов. После замены $x_2 \rightarrow \sin(0.5x_2)$, $x_3 \rightarrow \sin x_3$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin(0.5x_2), \\ \dot{x}_2 &= \sin x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\sin(0.5x_2) - \sin x_3 + \varphi(-19x_1 - 3.5 \sin(0.5x_2) - 3.2 \sin x_3). \end{aligned} \tag{2.3.6.1}$$

Система (2.3.6.1) имеет бесконечное число устойчивых состояний равновесия вида $(0, 4\pi k, 2\pi m)$, $k, m \in Z$ с собственными значениями матрицы Якоби $(-0.0254 \pm 1.5452i, -4.8531)$, а также бесконечное число состояний равновесия вида $(\pm x_1, 4\pi k, 2\pi m)$, $k, m \in Z$ с собственными значениями матрицы Якоби $(1.2726, -0.7278 \pm 1.173i)$. Здесь x_1 – решение уравнения $1.5 \operatorname{arctg}(19x_1) = 5.32x_1$. Система (2.3.6.1) также имеет 2-D решетку скрытых хаотических аттракторов с одинаковыми показателями Ляпунова $\Lambda_1 = 0.082$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -0.888$ и размерностью по формуле Каплана Йорке $D_{KY} = 2.092$. Фрагмент этой решетки (проекция на плоскость (x_2, x_3)) представлен на рис. 2.3.6.2.

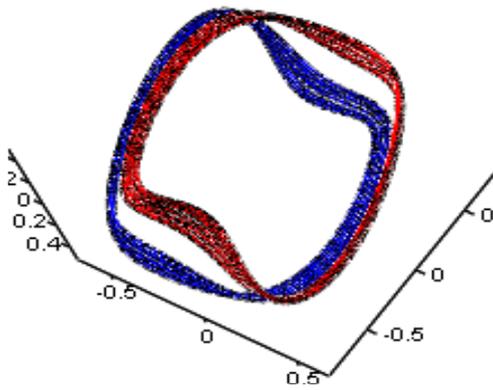


Рис.2.2.5.1. Скрытые хаотические аттракторы-близнецы системы (2.2.6)-(2.2.5.1)

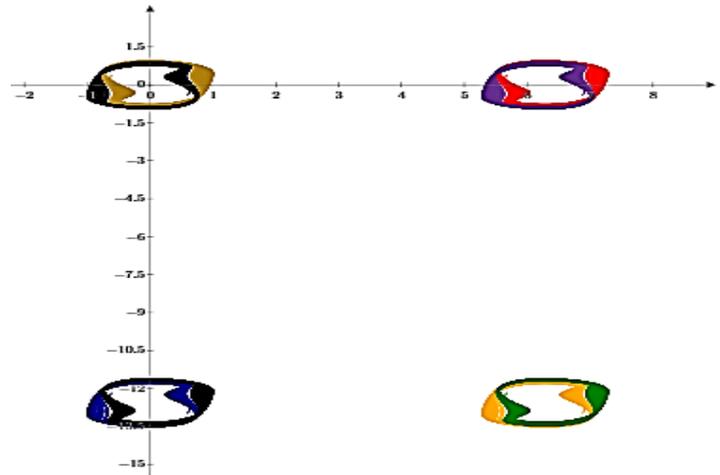


Рис.2.3.6.2. Фрагмент 2-D решетки хаотических аттракторов системы (2.3.6.1)

2.4 Выводы по главе 2

В этой главе было предложено два подхода к конструированию n -мерных мегастабильных систем, содержащих 1-D и $(n-1)$ -D решетки аттракторов.

Первый подход выделяет класс систем в форме Лурье, в которых замена нелинейности на периодическую функцию позволяет получить систему, содержащую 1-D решетку (полосу) аттракторов-клонов (как самовозбуждающихся, так и скрытых).

Второй подход опирается на возможность приведения с помощью невырожденного преобразования системы в форме Лурье со скалярной нелинейностью и невырожденной передаточной функцией к системе каскадного типа. Замена в новой системе определенным образом некоторых переменных на периодические функции этих переменных позволяет строить динамические системы с $(n-1)$ -D решеткой аттракторов.

Приведены многочисленные примеры хаотических систем, построенных автором диссертации, обладающих 1-D и $(n-1)$ -D решетками скрытых аттракторов.

Глава 3

Новые подходы к генерированию мегастабильных систем

Очевидно, для систем порядка n невозможно построить n -D решетку аттракторов способами, описанными в предыдущей главе. Однако, сочетание двух этих изложенных подходов позволяет генерировать системы, обладающие n -D решеткой аттракторов, что будет продемонстрировано далее.

Также, используя приемы, изложенные ранее и идеи С. Ли из [78] удалось сконструировать систему с 2-D полосой скрытых аттракторов без состояний равновесия.

Содержание этой главы существенным образом опирается на работы [11-13].

3.1 Конструирование мегастабильных систем с n -D решеткой хаотических аттракторов

В данном разделе предлагаются методы синтеза мегастабильных систем с n -D решеткой хаотических аттракторов на основе систем в форме Лурье, обладающих хаотическими аттракторами. Мегастабильные системы, содержащие 1-D решетку хаотических аттракторов, удастся получить, используя соображения, описанные в разделе 2.2 диссертации. Исходная система путем замены нелинейности на подобранную подходящим образом периодическую функцию преобразуется в систему в форме Лурье с угловой координатой, содержащую 1-D решетку хаотических аттракторов-клонов. Далее используется тот факт, что система в форме Лурье неособым линейным преобразованием всегда приводится к системе каскадного типа. Полученная система каскадного типа также содержит 1-D решетку хаотических аттракторов, и в то же время является смещаемой по $n-1$ переменным (*variable-boostable system*). Путем замены этих переменных на периодические функции удастся построить мегастабильную систему, содержащую n -D решетку хаотических аттракторов.

В подразделах 3.1.1 и 3.1.2 построены мегастабильные системы с 3-D решеткой хаотических аттракторов на основе классической системы Чуа с различными значениями параметров. Кроме того, в качестве одного из примеров в диссертации впервые построена система четвертого порядка с 4-D решеткой самовозбуждающихся хаотических аттракторов (подраздел 3.1.3).

3.1.1 Мегастабильная система с 3-D решеткой хаотических аттракторов на основе классической системы Чуа с парой скрытых аттракторов-близнецов

Вновь рассмотрим классическую систему Чуа в виде (1.1.2)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x) - \alpha\varphi(\sigma), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z.\end{aligned}$$

со скалярной нелинейностью $\varphi(\sigma)$ вида (1.1.3)

$$\varphi(\sigma) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|\sigma + 1| - |\sigma - 1|).$$

и параметрами $m_1 = -1.1468$, $m_0 = -0.1768$, $\alpha = 8.4562$, $\beta = 12.0732$, $\gamma = 0.0052$.

Для построения мегастабильной системы, содержащей 3-D решетку аттракторов, сначала повторим рассуждения, позволившие построить систему с 1-D решеткой аттракторов в подразделе 2.2.1.

Положим $k = -\beta(\gamma + \beta)^{-1}$, $f(\sigma) = \varphi(\sigma) - k\sigma$. Тогда матрица $A + kbc^T$ будет особой, а функция $f(\sigma)$ будет иметь три нуля $\sigma = 0, \sigma = \pm(\gamma + \beta)\rho$, где $\rho = (m_0 - m_1) \cdot [\beta + m_1(\gamma + \beta)]^{-1}$. Заменяем функцию $f(\sigma)$ на периодическую функцию $g(\sigma)$ периода $\Delta = -2(\gamma + \beta)\rho$, совпадающую с функцией $f(\sigma)$ на $[(\gamma + \beta)\rho, -(\gamma + \beta)\rho]$. После этого заменим в исходной системе $\varphi(\sigma)$ на $g(\sigma) + k\sigma$. Таким образом получается система вида (2.2.1.1)

$$\dot{x} = Ax + b(g(\sigma) + k\sigma), \quad \sigma = c^T x,$$

которая является системой с угловой координатой и имеет 1-D решетку идентичных аттракторов-клонов (рисунки 2.2.1.1 и 2.2.1.2). Все эти аттракторы могут быть получены численным интегрированием системы

(2.2.1.1) с начальными условиями $x_0 + jd, j \in Z$, где $d = 2\text{col}(-(\gamma + \beta)\rho, -\gamma\rho, \beta\rho)$ – собственный вектор матрицы $A + kbc^T$, соответствующий нулевому собственному значению.

Система с угловой координатой (2.2.1.1) неособым линейным преобразованием $x = My$ с матрицей вида (2.3.1.4)

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha(\beta + \gamma) & -\alpha(1 + \gamma) & -\alpha \\ -\alpha\gamma & -\alpha & 0 \\ \alpha\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

приводится к системе каскадного типа

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_2 y_3 + (g(\sigma) + k\sigma), \\ \dot{\sigma} &= -r_0 y_1 - r_1 y_2 - r_2 y_3, \end{aligned} \tag{3.1.1.1}$$

где $a_0 = \alpha(\beta + \gamma)$, $a_1 = (\gamma + \beta + \alpha\gamma)$, $a_2 = \gamma + \alpha + 1$, $c_0 = \alpha(\beta + \gamma)$, $c_1 = \alpha(1 + \gamma)$, $c_2 = \alpha$. Система (3.1.1.1) также имеет 1-D решетку идентичных хаотических аттракторов.

Заменяем теперь переменные y_2, y_3 в системе (3.1.1.1) на периодические функции $y_2 \rightarrow 0.49\sin(2y_2)$, $y_3 \rightarrow 0.51\sin(2y_3)$. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0.49\sin(2y_2), \\ \dot{y}_2 &= 0.51\sin(2y_3), \\ \dot{y}_3 &= -a_0 y_1 - 1.49a_1 \sin(2y_2) - 0.51a_2 \sin(2y_3) + (g(\sigma) + k\sigma), \\ \dot{\sigma} &= -r_0 y_1 - 0.49r_1 \sin(2y_2) - 0.51r_2 \sin(2y_3). \end{aligned} \tag{3.1.1.2}$$

Система (3.1.1.2) будет иметь 3-D решетку самовозбуждающихся хаотических аттракторов, проекции фрагментов которой на координатные плоскости приведены на рисунках 3.1.1.1-3.1.1.3.

Все аттракторы 3-D решетки имеют показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.293$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -1.200$ и размерность по формуле Каплана-Йорке равную $D_{KY} = 2.244$.

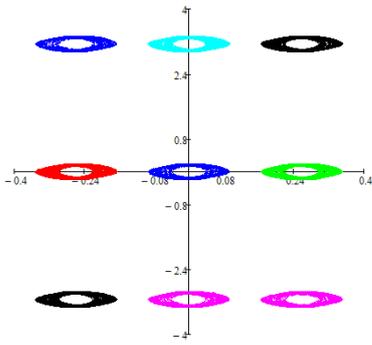


Рис.3.1.1.1 Проекция на плоскость (x, y)

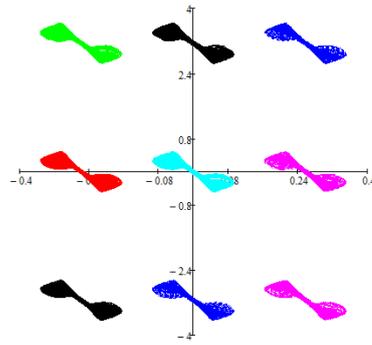


Рис.3.1.1.2 Проекция на плоскость (x, z)

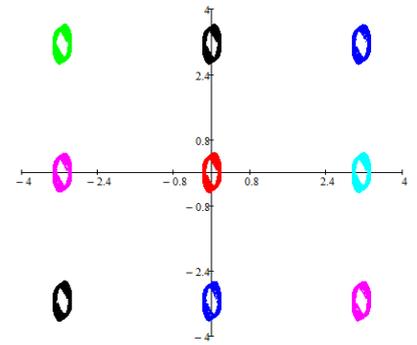


Рис.3.1.1.3 Проекция на плоскость (y, z)

3.1.2 Мегастабильная система с 3-D решеткой хаотических аттракторов на основе классической системы Чуа с double-scroll аттрактором

Вновь рассмотрим классическую систему Чуа записанную в виде (1.1.2)-(1.1.3), с $m_1 = -0.7143$, $m_0 = -1.099$, $\alpha = 9.8$, $\beta = 13.37$, $\gamma = 0$. В подразделе 2.2.2 диссертации была построена система с 1-D решеткой идентичных хаотических аттракторов на основе этой системы. Теперь продемонстрируем алгоритм построения 3-D решетки на основе этой же системы.

Сначала строим систему с угловой координатой, содержащую 1-D решеткой аттракторов. Для этого положим $k = -1$, $f(\sigma) = \varphi(\sigma) + \sigma$. Тогда матрица $A - bc^T$ будет особой, а функция $f(\sigma)$ будет иметь три нуля: $\sigma = 0$, $\sigma = \pm\sigma_0$, $\sigma_0 = (m_1 - m_0)(m_1 + 1)^{-1}$. Заменяем функцию $f(\sigma)$ на $4.4\sigma_0$ -периодическую функцию $g(\sigma)$, совпадающую с $f(\sigma)$ на $[-1.6\sigma_0, 1.6\sigma_0]$. В результате получим систему с угловой координатой, которая имеет 1-D решетку идентичных аттракторов-клонов.

Затем неособым линейным преобразованием $x = My$ с матрицей (2.2.1.1) приведем систему к виду (3.1.1.1). Заменяем переменные y_2, y_3 в полученной системе на периодические функции $y_2 \rightarrow 0.0625 \operatorname{tg}(16y_2)$, $y_3 \rightarrow 0.125 \operatorname{tg}(8y_3)$. Получим систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0.0625 \operatorname{tg}(16y_2), \\ \dot{y}_2 &= 0.125 \operatorname{tg}(8y_3), \\ \dot{y}_3 &= -a_0 y_1 - 0.0625 a_1 \operatorname{tg}(16y_2) - 0.125 a_2 \operatorname{tg}(8y_3) + (g(\sigma) + k\sigma), \\ \dot{\sigma} &= -r_0 y_1 - 0.0625 r_1 \operatorname{tg}(16y_2) - 0.125 r_2 \operatorname{tg}(8y_3). \end{aligned} \quad (3.1.2.1)$$

Система (3.1.2.1) имеет 3-D решетку самовозбуждающихся хаотических аттракторов, проекции фрагментов которой на координатные плоскости приведены на рисунках 3.1.2.1-3.1.2.3.

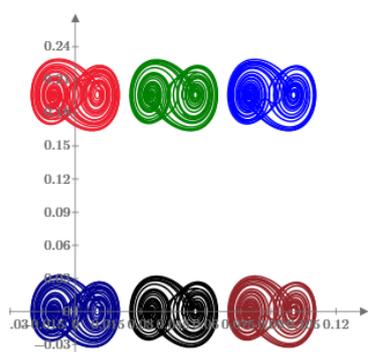


Рис.3.1.2.1 Проекция на плоскость (x, y)

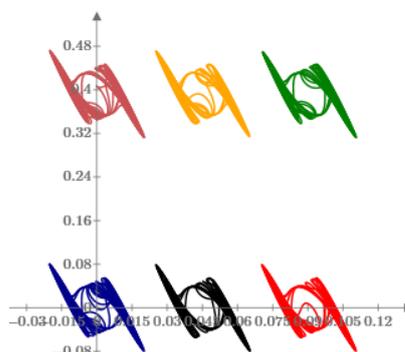


Рис.3.1.2.2 Проекция на плоскость (x, z)

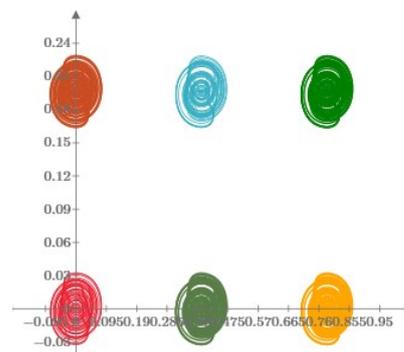


Рис.3.1.2.3 Проекция на плоскость (y, z)

Все аттракторы 3-D решетки имеют одинаковые показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.3098$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -3.3132$ и размерность по формуле Каплана-Йорке равную $D_{KY} = 2.093$.

3.1.3 Система четвертого порядка с 4-D решеткой самовозбуждающихся хаотических аттракторов

Процедуру конструирования системы с 4-D решеткой хаотических аттракторов начнем с построения системы вида (1.2.2) с угловой координатой, содержащей 1-D решетку хаотических аттракторов. Матрицу A и векторы b , c будем искать в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -c_0 \\ -c_1 \\ -c_2 \\ -c_3 \end{pmatrix},$$

где $a_i, i=1,2,3$ и $c_j, j=1,\dots,4$ – положительные числа. Тогда

$$\det(A + kbc^T - pI) = p^4 + (a_3 + c_4k)p^3 + (a_2 + c_3k)p^2 + (a_1 + c_2k)p + c_1k. \quad (3.1.3.1)$$

Коэффициенты полинома (3.1.3.1) подберем так, чтобы при $k < 0$ он имел один положительный корень и 3 корня с отрицательными вещественными частями, а при малых $k > 0$ все его корни располагались в левой открытой полуплоскости. Для этого достаточно потребовать выполнение условия $a_3a_2 > a_1$.

Положим $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 3$. При выбранных значениях элементов матрицы A условия гурвицевости полинома (3.1.3.1) примут вид

$$c_3c_4k^2 + (3c_3 - c_2 + c_4)k + 2 > 0, \quad (3.1.3.2)$$

$$(c_2k + 1)[c_3c_4k^2 + (3c_3 - c_2 + c_4)k + 2] - c_1k(c_4k + 3)^2 > 0. \quad (3.1.3.3)$$

Коэффициенты c_j подберем так, чтобы условие (3.1.3.2) выполнялось при всех $k > 0$, а условие (3.1.3.3) нарушалось при некотором значении $k_0 > 0$. Тогда на некотором интервале (k_0, k_1) полином (3.1.3.1) будет иметь 2 отрицательных вещественных корня и два корня с положительными вещественными частями. Все перечисленные условия будут выполняться, если положить, например, $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 1, c_4 = 1.6$. При этом условия (3.1.3.2) и (3.1.3.3) выполнены при $k \in (0, 0.537591)$ и $k \in (5, +\infty)$.

При выбранных значениях параметров системы (1.2.2) плоскость (σ, f) разбивается на 4 сектора линейной устойчивости и неустойчивости: сектор $(-\infty, 0)$ – сектор неустойчивости степени 1, сектор $(0, 0.53759)$ – сектор гурвицевости, сектор $(0.537592, 5)$ – сектор неустойчивости степени 2, сектор $(5, +\infty)$ – сектор гурвицевости. Теперь подберем нечетную 2π -периодическую функцию $f(\sigma)$, имеющую 2 нуля на периоде такую, чтобы ее график на периоде попеременно пребывал в секторе линейной неустойчивости степени 2, секторе гурвицевости и секторе линейной неустойчивости степени 1. Если пребывание графика $f(\sigma)$ в каждом из секторов будет "достаточно

длительным", то система с такой нелинейностью будет иметь либо устойчивый цикл, либо хаотический аттрактор, расположенный в полосе $\Pi = \{x: -\pi < c^T x < \pi\}$ [4]. Поскольку все состояния равновесия системы будут неустойчивыми, то бассейн притяжения аттрактора будет содержать сколь угодно малую окрестность одного из состояний равновесия. Поэтому такой аттрактор может быть визуализирован путем численного интегрирования с начальным условием из малой окрестности некоторого состояния равновесия системы на периоде.

Путем целенаправленного компьютерного поиска удается выбрать $f(\sigma) = 1.8 \sin \sigma$. При таком выборе из окрестности нулевого состояния равновесия возбуждаются два симметричных хаотических аттрактора, проекции которых на плоскости $(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_4)$ представлены на рисунках 3.1.3.1-3.1.3.4.

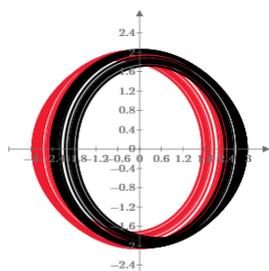


Рис.3.1.3.1
Проекция на
плоскость (x_1, x_2)

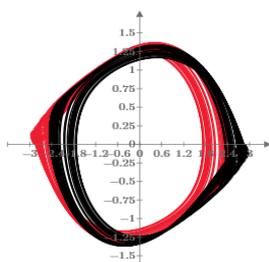


Рис.3.1.3.2
Проекция на
плоскость (x_1, x_4)

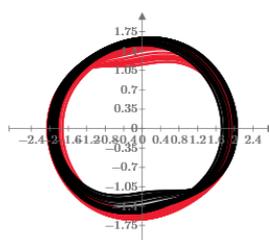


Рис.3.1.3.3
Проекция на
плоскость (x_2, x_3)

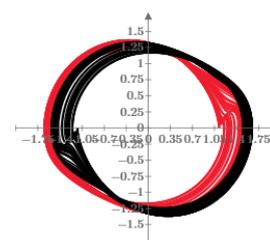


Рис.3.1.3.4
Проекция на
плоскость (x_3, x_4)

Из рисунков 3.1.3.1-3.1.3.4 видно, что "размах" аттракторов по координатам x_2, x_3, x_4 не превышает 2π , поэтому можно попытаться заменить каждую из переменных x_2, x_3, x_4 в полученной системе на некоторую 2π -периодическую функцию так, чтобы новая система имела пару симметричных хаотических аттракторов. Тогда такая система будет иметь 4-D решетку хаотических аттракторов-клонов.

Выполним замену: $x_2 \rightarrow 1.82 \sin x_2, x_3 \rightarrow 1.29 \sin x_3, x_4 \rightarrow 1.42 \operatorname{tg}(0.5x_4)$.

Получим систему

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 1.82 \sin x_2, \\
 \dot{x}_2 &= 1.29 \sin x_3, \\
 \dot{x}_3 &= 1.42 \operatorname{tg}(0.5x_4), \\
 \dot{x}_4 &= -1.82 \sin x_2 - 1.29 \sin x_3 - 4.26 \operatorname{tg}(0.5x_4) + \\
 &+ 1.8 \sin[-x_1 - 3.64 \sin x_2 - 1.29 \sin x_3 - 2.272 \operatorname{tg}(0.5x_4)].
 \end{aligned}
 \tag{3.1.3.4}$$

Фрагменты проекций 4-D решетки аттракторов системы (3.1.3.4) на координатные плоскости представлены на рисунках 3.1.3.5 – 3.1.3.8.

Все аттракторы 4-D решетки имеют показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.054$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -0.206$, $\Lambda_4 = -3.004$ и размерность по формуле Каплана-Йорке $D_{KY} = 2.262$.

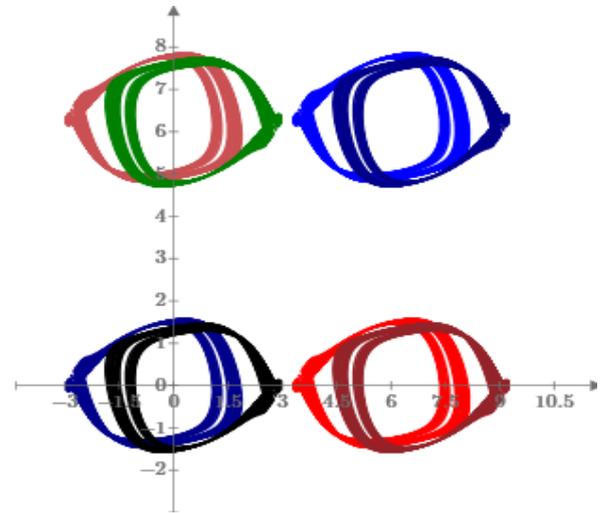
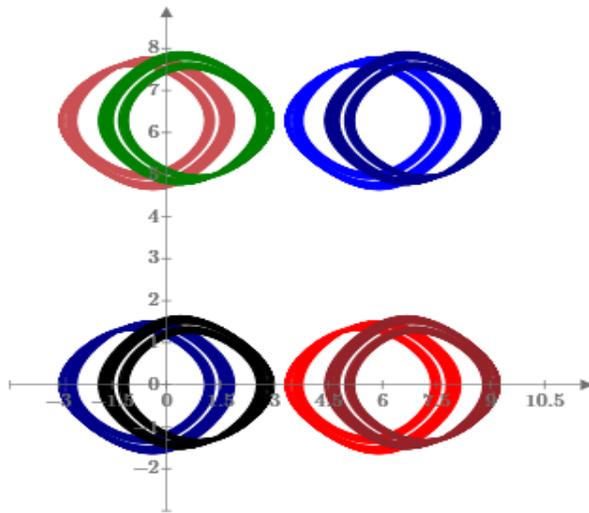


Рис.3.1.3.5 Проекция на плоскость (x_1, x_2)

Рис.3.1.3.6 Проекция на плоскость (x_1, x_4)

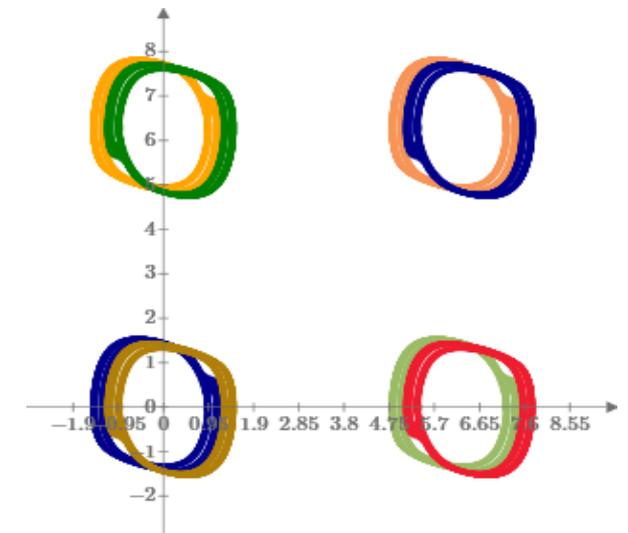
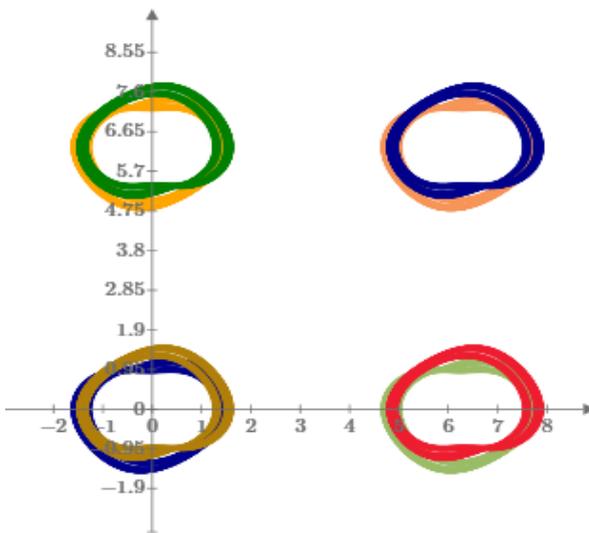


Рис.3.1.3.7 Проекция на плоскость (x_2, x_3)

Рис.3.1.3.8 Проекция на плоскость (x_3, x_4)

3.2 Другие методы генерирования мегастабильных систем. Мегастабильная система без состояний равновесия с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями

Помимо методов, которые использовались ранее в диссертации для конструирования мегастабильных систем, существуют и другие подходы, например, предложенный С. Li, в работе [78]. Используя приемы, изложенные ранее и идеи из [78] удалось сконструировать мегастабильную систему с 2-D полосой скрытых аттракторов без состояний равновесия (подраздел 3.2.1).

В [78] предложен новый подход, основанный на использовании sign-функции и методе усиления смещения для удвоения сосуществующих аттракторов системы. На основе этого подхода создаются симметричные пары сосуществующих аттракторов, расположенные на желаемом расстоянии [77]. Чтобы гарантировать условную симметрию, предлагаемый метод преобразует систему так, чтобы она обладала симметрией, и удваивала число сосуществующих аттракторов. В частности, когда операция удвоения вводится в самовоспроизводящуюся систему, может быть сгенерирована решетка сосуществующих аттракторов, где расстояния между любыми двумя аттракторами определяются периодами и заданными смещениями. Нелинейные системы с сосуществующими симметричными аттракторами, или решеткой аттракторов, обладают большей скрытностью поскольку различные начальные условия могут генерировать фазовые траектории одинаковой формы или даже с одинаковыми показателями Ляпунова. Кроме того, этот новый подход к удвоению сосуществующих аттракторов также может быть применен к другим типам аттракторов, таким как точки, предельные циклы и хаотические аттракторы, независимо от того, сколько их.

В своей недавней работе [109] J.C. Sprott рассмотрел следующую систему с разрывной нелинейностью, являющуюся модификацией известной системы Носе-Хувера [111]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y \cdot \text{sign}(z), \\ \dot{z} &= y^2 - e^{-x^2}.\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

При этом J.C. Sprott написал: "Why is this system interesting and worth publishing? It's because it is time-reversible and dissipative with a strange multifractal attractor that is hidden but whose basin includes the whole of the three-dimensional space so that every initial condition goes to the attractor. Even more remarkably, every initial condition apparently lies on the attractor, which fills all of space with a highly nonuniform measure and a capacity dimension of 3.0, and it is just one member in a large family of systems with those properties. It violates every expectation that most of us have developed over the years about respectable chaotic attractors.¹"

Аттрактор системы (3.2.1) имеет показатели Ляпунова (0.2280, 0, -0.2480) и размерность Ляпунова, вычисленную по формуле Каплана-Йорке, равную 2.9194, что резко отличает ее от подавляющего большинства трехмерных систем, у которых ляпуновская размерность аттрактора лишь немного больше 2.0. J.C. Sprott заключает свою работу следующим призывом: "In the near-term, I look forward to additional, truly novel examples of chaotic systems in this and other similar journals²".

Система (3.2.1) содержит разрывную нелинейность. Рассмотрим здесь гладкую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y \cdot \arctg(50z), \\ \dot{z} &= y^4 - \frac{a}{1+x^8},\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

¹ Почему эта система интересна и заслуживает публикации? Потому, что она обратима во времени и диссипативна со странным мультифрактальным аттрактором, который скрыт, но его бассейн включает в себя все трехмерное пространство, так что каждое начальное условие относится к аттрактору. Еще более примечательно, что каждое начальное условие, по-видимому, зависит от аттрактора, который заполняет все пространство с сильно неоднородной мерой и размерностью 3.0, и это всего лишь один представитель в большом семействе систем с такими свойствами. Это противоречит всем ожиданиям, которые у большинства из нас сложились за долгие годы относительно хаотических аттракторов.

² В ближайшей перспективе я с нетерпением жду появления других, по-настоящему новых примеров хаотических систем в этом и других подобных журналах.

где $a > 0$, которая, так же как система (3.2.1) является обратимой. Эта система без состояний равновесия и она имеет аналитическое решение $x(t) \equiv y(t) \equiv 0, z(t) = z(0) - at$.

Проанализируем поведение решений системы (3.2.2), опираясь на рассуждения, приведенные Г.А. Леоновым в работе [29] при исследовании системы Носе-Хувера. Очевидно, что решение $(x(t), y(t), z(t))$ системы (3.2.1.2) удовлетворяет следующему соотношению

$$\ddot{x}(t) + \alpha(t)\dot{x} + x(t) = 0, \quad \alpha(t) = \operatorname{arctg}(50z(t)). \quad (3.2.3)$$

Если $z(t) < 0$ при всех $t \geq 0$, то, согласно [29], выполнено одно из следующих соотношений:

$$1) \lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{x}(t)]^2 = \infty,$$

$$2) \lim_{t \rightarrow \infty} ([\dot{x}(t)]^2 + x(t)^2) = \infty,$$

3) существует последовательность $t_k \rightarrow \infty$ такая, что для нее выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ([\dot{x}(t)]^2 + x(t)^2) = C < \infty.$$

В случае 3) система (3.2.2) имеет периодическое решение. Но из (3.2.1.3) следует, что для этого периодического решения выполнено либо 1), либо 2). Значит, случай 3) невозможен. Из третьего уравнения системы (3.2.1.2) и предположения $z(t) < 0$ при $t \geq 0$ также следует, что случаи 1) и 2) невозможны. Поэтому существует число $T > 0$ такое, что $z(T) = 0$.

Пусть теперь $z(t) > 0$ при всех $t \geq 0$. Тогда из (3.2.3) следует [29], что $\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{x}(t)]^2 = 0$. Тогда из третьего уравнения системы (3.2.2) вытекает существование $T > 0$, для которого $z(T) = 0$.

Из приведенных рассуждений следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.1. Для любого решения $(x(t), y(t), z(t))$ системы (3.2.2), отличного от её аналитического решения, функция $z(t)$ бесконечное число раз меняет знак при $t \rightarrow +\infty$.

С использованием леммы 3.1 в работе [29] для системы Носе-Хувера доказана теорема, утверждение которой, как можно убедиться, остается справедливым и для системы (3.2.1.2).

Теорема 3.1. Для системы (3.2.2) существует число $r(a)$ такое, что любая её траектория с начальными данными $x(0)^2 + y(0)^2 > 0$ имеет предельную точку в множестве $\{x, y, z : z = 0, x^2 + y^2 \leq r(a)\}$.

Так как система (3.2.2) не имеет состояний равновесия, то из приведенных рассуждений вытекает, что в поглощающем множестве $\Omega = \{x, y, z : x^2 + y^2 \leq r(a)\}$ может содержаться аттрактор этой системы, заведомо отличный от ее аналитического решения. Бассейном притяжения этого аттрактора являются почти всё пространство R^3 . Действительно, численное интегрирование системы (3.2.2) с $a = 2$ и начальными условиями $(0, 2, 0)$ визуализирует хаотический аттрактор, представленный на рис. 3.2.1.

Показатели Ляпунова этого аттрактора принимают значения: $\Lambda_1 = 0.3270$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -0.3580$ а его фрактальная размерность, вычисленная по формуле Каплана-Йорке, равна $D_{KY} = 2 + \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{|\Lambda_3|} = 2.9134$.

Заметим, что система (3.2.2) является смещаемой по переменной y (*variable-boostable system* [80]). Последнее обстоятельство позволяет сконструировать самовоспроизводящуюся систему, обладающую 1-D решеткой идентичных аттракторов, путем подходящей замены переменной y на периодическую функцию этой переменной [8, 13, 43, 45, 79].

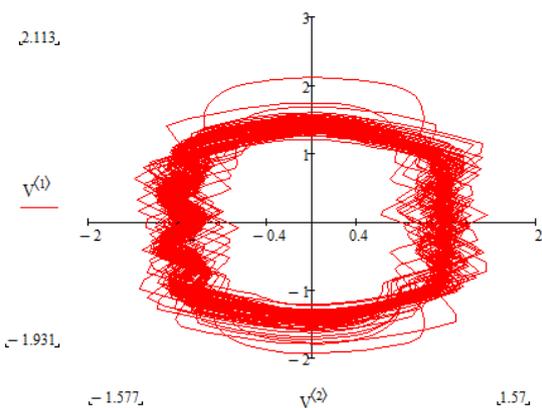


Рис.3.2.1 Проекция аттрактора системы (3.2.2) на плоскость (x, y)

Произведем в системе (3.2.2) замену $y \rightarrow \operatorname{tgy}$, тогда новая система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \operatorname{tgy}, \\ \dot{y} &= -x - \operatorname{arctg}(50z)\operatorname{tgy}, \\ \dot{z} &= (\operatorname{tgy})^4 - \frac{a}{1+x^8} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

обладает 1-D полосой хаотических аттракторов, фрагмент которой представлен на рисунке 3.2.2 (при $a = 2$). Аттракторы на рисунке 3.2.2 имеют показатели Ляпунова $(1.326, 0, -1.329)$ и размерность по формуле Каплана-Йорке равна 2.998.

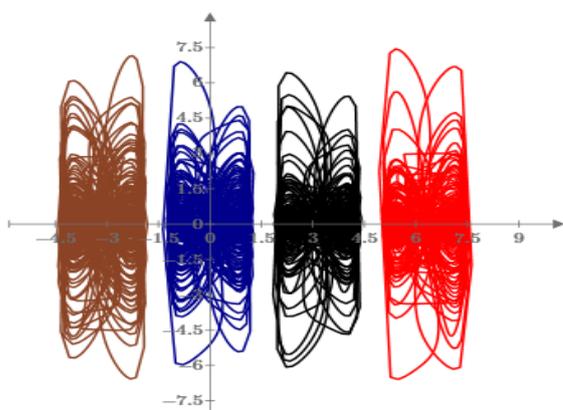


Рис.3.2.2 1-D полоса аттракторов системы (3.2.4) (проекция на плоскость (y, z))

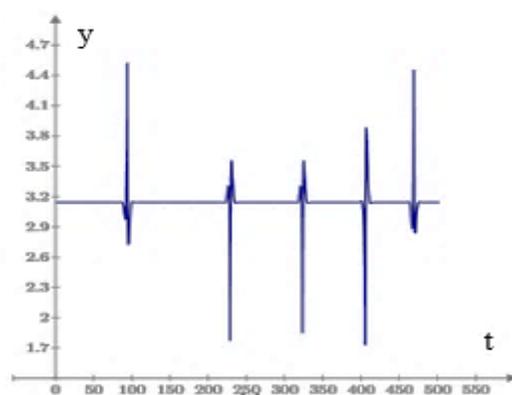


Рис.3.2.3 График переходного процесса при численном интегрировании системы (3.2.4) начальным условием $(0, \pi, 2)$

Любая точка пространства R^3 , кроме точек, прямых $L_k = \{x, y: x = 0, y = \pi k, k \in Z\}$, принадлежит бассейну притяжения одного из аттракторов, представленных на рисунке 3.2.2. Заметим, что система (3.2.4) при $a = 2$ имеет бесконечное число аналитических решений вида $x = 0, y = \pi k, z = z(0) - 2t, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Однако, численным интегрированием, например, методом Рунге-Кутты с адаптированным шагом, удастся обнаружить только решение $x = 0, y = 0, z = z(0) - 2t$. При численном интегрировании системы (3.2.4) с начальным условием $(0, \pi, 2)$ вместо решения $x(t) = 0, y(t) = \pi, z(t) = 2 - 2t$ после достаточно длительного переходного процесса визуализируется такой же аттрактор, как и при численном интегрировании с начальными условиями $(-0.87, 2.91, -1.26)$. График переходного процесса при численном интегрировании с начальным

условием $(0, \pi, 2)$ на промежутке $[0, 160\pi]$ представлен на рисунке 3.2.3. Продолжая процесс численного интегрирования, визуализируем странный аттрактор.

Ниже s -D полосой будем называть совокупность из s 1-D решеток. Для построения системы, обладающей 2-D полосой хаотических аттракторов, воспользуемся приемом, предложенным в работе [78].

Для этого заметим, что на решении системы (3.2.4) при $a = 2$, принадлежащем любому аттрактору, справедлива оценка $|z(t)| < 10$. Поэтому можно выполнить такое преобразование системы (3.2.4), которое одновременно сдвигает все ее аттракторы в полуплоскость $\{x, y, z : z > 0\}$, и генерирует их копию, симметричную относительно плоскости $\{x, y, z : z = 0\}$. В результате получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \operatorname{tgy}, \\ \dot{y} &= -x - \operatorname{arctg}(|50z| - 10)\operatorname{tgy}, \\ \dot{z} &= \left((\operatorname{tgy})^4 - \frac{2}{1+x^8} \right) \operatorname{sign}(z). \end{aligned} \quad (3.2.1.5)$$

Фрагмент 2-D полосы аттракторов системы (3.2.1.5) представлен на рисунке 3.2.1.4.

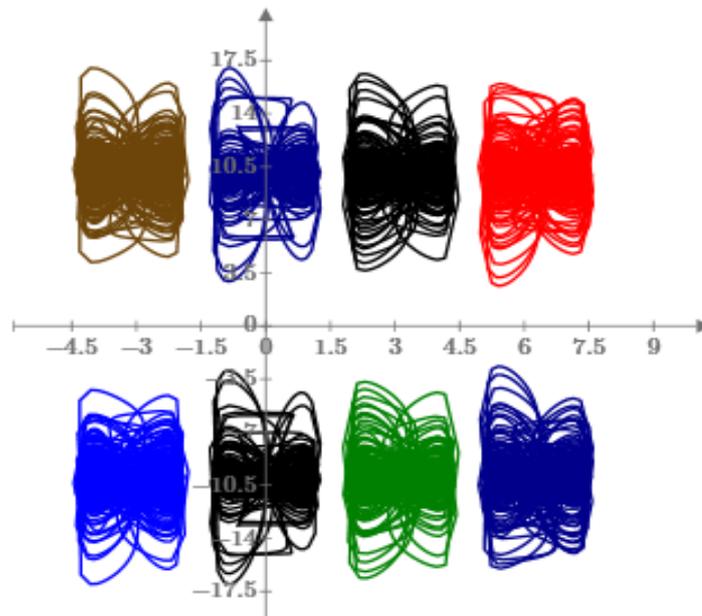


Рис.3.2.1.4 2-D полоса аттракторов системы (3.2.1.5) (проекция на плоскость (y, z))

3.3 Выводы по главе 3

В данной главе предложено использовать композицию методов, развитых в предыдущей главе для конструирования систем, обладающих n -D решеткой хаотических аттракторов.

Процедура конструирования системы с n -D решеткой хаотических аттракторов начинается с построения системы с угловой координатой, содержащей 1-D решетку хаотических аттракторов. Оценивается "размах" найденных аттракторов по координатным осям, после чего можно попытаться заменить каждую из переменных в полученной системе на некоторую периодическую функцию этой переменной такую, которая имеет период не меньше, чем размах по соответствующей координатной оси (в противном случае аттракторы наложатся друг на друга или сольются в один аттрактор). Тогда такая система будет иметь n -D решетку идентичных аттракторов-клонов.

Кроме того, была построена система с 2-D полосой аттракторов без состояний равновесия, которая обладают скрытыми хаотическими аттракторами размерности "почти 3", и одновременно аналитическими решениями.

Глава 4

Применение мегастабильных хаотических систем для обеспечения безопасной связи

Одной из важных инженерных задач управления хаотическими системами является задача синхронизации [95], в которой необходимо обеспечить синхронное поведение двух взаимосвязанных хаотических систем с одинаковыми или разными хаотическими аттракторами: на основе поведения ведущей системы (*drive system*) необходимо так управлять поведением ведомой системы (*response system*), чтобы обеспечить их синхронизацию и робастность к возможному воздействию шумов и возмущений. Для решения задачи синхронизации хаотических систем традиционно применяются методы активного управления [47], адаптивного управления [106], синтеза законов скользящего управления [122] и другие [36, 114]. При проектировании таких систем синхронизации в расчет необходимо также принимать динамические свойства каждой из хаотических систем, связанные с мегастабильностью и числом возможных самовозбуждающихся, а также скрытых аттракторов, сосуществующих в фазовом пространстве.

В этой главе используется стратегия синхронизации, предложенная А.А.-Н. Shoreh, N.V. Kuznetsov, T.N. Mokaev [106] и основанная на теории устойчивости по Ляпунову. На основе этой стратегии в диссертации реализована процедура, связанная с достижением синхронизации между парой идентичных мегастабильных систем, на примере динамической системы с 4-D решеткой скрытых хаотических аттракторов (раздел 4.2) и системы с 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов (раздел 4.3). Хаотические системы обладают сложным динамическим поведением и чувствительны к начальным условиям, поэтому необходимо знать какой именно предельный режим (аттрактор) использовался в качестве основы для организации хаотической маскировки, кроме того, необходимо знать координаты начальной точки, принадлежащей бассейну притяжения некоторого аттрактора. Для данной задачи наличие мегастабильности в

системе и скрытых аттракторов существенно затрудняет процесс декодирования, что играет важную роль для инженерных приложений, например, в системах защищенной связи.

Использование синхронизации в системах связи имеет фундаментальное значение, поскольку она заставляет системы одновременно производить одинаковые выходные данные и, в свою очередь, приводит к точному восстановлению информационных сигналов.

В основе данной главы лежат работы [25-28].

4.1 Метод адаптивной синхронизации для общего класса хаотических вещественных моделей

В работе [106] предложена схема адаптивной синхронизации, которая в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)A + H(x)B \quad (4.1.1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, $F(x) : R^n \rightarrow R^n$ – вектор нелинейной функции, $G(x) : R^n \rightarrow R^{n \times m}$ – линейная матрица-функция, $H(x) : R^n \rightarrow R^{n \times m}$ – нелинейная матрица-функция, $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)^T$, $B = (B_1, B_2, \dots, B_m)^T \in R^m$ – постоянные векторы параметров модели, которые ассоциируются с линейными и нелинейными членами, соответственно.

Ряд хорошо известных хаотических систем, таких как схема Чуа, гиперхаотическая система Лю, обобщенная система Лоренца, имеют вид уравнения (4.1.1).

Пусть ведущая и ведомая системы имеют следующую форму:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)A + H(x)B, \quad (4.1.2)$$

$$\dot{y} = F(y) + G(y)\hat{A} + H(y)\hat{B} + \theta(x, y). \quad (4.1.3)$$

Здесь $x, y \in R^n$ – векторы состояния, $A, B \in R^m$ – постоянные векторы параметры ведущей системы, \hat{A}, \hat{B} – неопределенные постоянные векторы параметров ведомой системы, $\theta : R^n \times R^n \rightarrow R^n$ – вектор функции управления

ведомой системы (4.1.3). Ошибка модуляции параметров \hat{A} , \hat{B} определяются следующим образом: $e_A = \hat{A} - A$, $e_B = \hat{B} - B$. Состояния ошибки могут быть выражены следующим образом:

$$e(t) = y(t) - x(t). \quad (4.1.4)$$

Определение 4.1. Ведущая система (4.1.2) и ведомая система (4.1.3) реализуют адаптивную синхронизацию, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0.$$

Следуя идеям из [52, 89], выведем векторную функцию управления для достижения синхронизации между системами (4.1.2) и (4.1.3).

Теорема 4.1. [106] *Адаптивная синхронизация между ведущей системой (4.1.2) и ведомой системой (4.1.3) будет достигнута, если функция вектора управления построена в следующей форме:*

$$\theta(x, y) = [F(x) - F(y)]A + G(x) - G(y) + [H(x) - H(y)]B - K_1 e - K_2 e_A - K_3 e_B. \quad (4.1.5)$$

Здесь $K_1 = \text{diag}(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1n})$, $K_2 = \text{diag}(k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2n})$, $K_3 = \text{diag}(k_{31}, k_{32}, \dots, k_{3n})$ – положительно определенные вещественные диагональные матрицы, а обновление параметров модуляции выбираются в соответствии со следующими соотношениями:

$$\dot{e}_A = \dot{\hat{A}} = -(F(y))^T e + K_2 e, \quad (4.1.6)$$

$$\dot{e}_B = \dot{\hat{B}} = -(H(y))^T e + K_3 e. \quad (4.1.7)$$

В данной главе описана стратегия безопасной связи, основанная на адаптивной синхронизации хаотических систем, сконструированных в предыдущих главах настоящей диссертационной работы. Схема построена таким образом, чтобы разделить сообщение и распределить его между двумя каналами, что повышает безопасность системы связи и усложняет задачу декодирования злоумышленником. Некоторый бит информационного сигнала вводится в параметры модуляции и передается по одному из двух каналов; тем временем другой бит вводится в состояния передатчика и передается по

второму каналу. На стороне приемника сообщение может быть точно извлечено с помощью адаптивных методов и функции декодирования. Предложенная схема надежна к различным масштабам аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ), что будет продемонстрировано ниже. На рисунке 4.1.1 изображена предложенная схема.

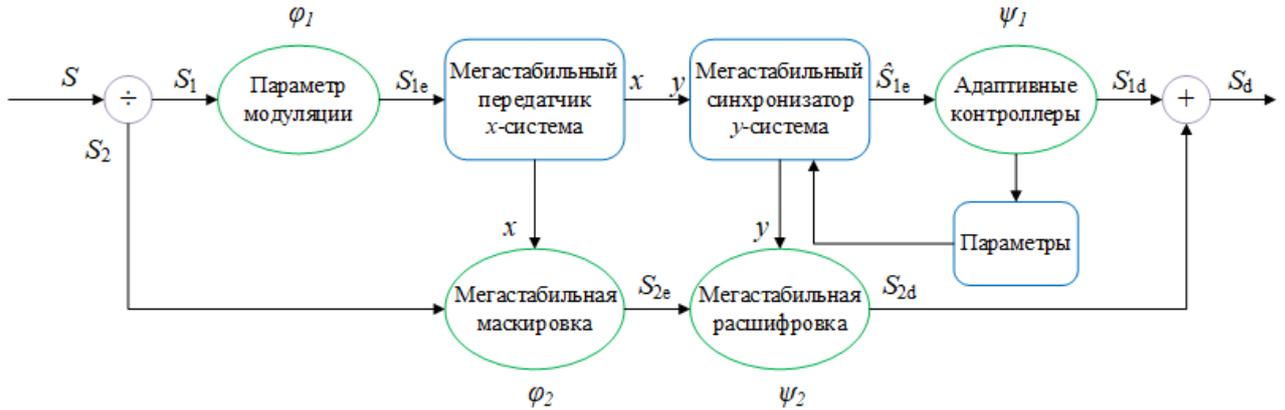


Рис. 4.1.1. Хаотическая мегаустойчивая схема безопасной связи

Схема включает следующие компоненты:

Системы передатчика и приемника: мегаустойчивая хаотическая система, которая генерирует переменные состояния $x(t) \in R^n$ для передатчика и $y(t) \in R^n$ для приемника.

Блок разделения: информационное сообщение $S(t)$ делится на два вектора битов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, чтобы распределить его по двум каналам.

Блок модуляции параметров: первая часть сообщения $S_1(t)$ непрерывной инвертируемой функцией φ_1 модулируется в параметры передатчика.

Мегаустойчивый хаотический маскирующий блок: вторая часть сообщения $S_2(t)$ кодируется путем введения в нелинейную функцию $\varphi_2: R^n \times R \rightarrow R$, которая для $x(t) \in R^n$ непрерывна и имеет ассоциированную непрерывную функцию ψ_2 для $x(t) \in R^n: R^n \times R \rightarrow R$, такую, что $\psi_2(x(t), \varphi_2(x(t), S_2(t))) = S_2(t)$. Маскирующая функция φ_2 строится на основе

хаотических состояний. В результате генерируется сигнал $S_{2e}(t)$, который несет часть сообщения.

Каналы: хаотические состояния, которые содержат параметры модуляции и закодированную информационную часть $S_{2e}(t)$, передаются по двум каналам.

Блок синхронизации: на стороне приемника реализован блок синхронизации для получения сигналов состояния хаоса и предоставления необходимой информации для декодирования.

Блок адаптивных контроллеров: на стороне приемника строятся адаптивные контроллеры для отслеживания параметров системы передатчика. После синхронизации функция декодирования ψ_1 может быть использована для восстановления первой части переданного сообщения $S_{1d}(t)$.

Блок мегастабильного хаотического декодирования: маскированная информация $S_{2e}(t)$ декодируется функцией $S_{2d}(t) = \psi_2(y(t), S_{1e}(t))$.

Блок сбора: объединив два информационных сигнала $S_{1d}(t)$ и $S_{2d}(t)$, получаем полное восстановленное сообщение $S_d(t)$.

4.2 Адаптивная синхронизация для мегастабильной системы с 4-D решеткой скрытых хаотических аттракторов

В данном подразделе применим схему, изображенную рис. 4.1.1, для достижения адаптивной синхронизации, описанной в [106], между двумя идентичными хаотическими системами вида (3.1.3.4) из подраздела 3.1.3 настоящей диссертации. Ведущая (генерирует переменные состояния $x(t)$ для передатчика) и ведомая (генерирует переменные состояния $y(t)$ для приемника) системы с индексами d и r соответственно могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1d} &= 1.82\sin x_{2d}, \\
\dot{x}_{2d} &= 1.29\sin x_{3d}, \\
\dot{x}_{3d} &= -1.42\operatorname{tg}\frac{x_{4d}}{2},
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{4d} &= -1.82\sin x_{2d} - 1.29\sin x_{3d} + 4.26\operatorname{tg}\frac{x_{4d}}{2} + 1.8\sin\left[-x_{1d} - \right. \\
&\quad \left. - 3.64\sin x_{2d} - 1.29\sin x_{3d} - 2.272\operatorname{tg}\frac{x_{4d}}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1r} &= 1.82\sin x_{2r} + \theta_1, \\
\dot{x}_{2r} &= 1.29\sin x_{3r} + \theta_2, \\
\dot{x}_{3r} &= -1.42\operatorname{tg}\frac{x_{4r}}{2} + \theta_3,
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{4r} &= -1.82\sin x_{2r} - 1.29\sin x_{3r} + 4.26\operatorname{tg}\frac{x_{4r}}{2} + 1.8\sin\left[-x_{1r} - \right. \\
&\quad \left. - 3.64\sin x_{2r} - 1.29\sin x_{3r} - 2.272\operatorname{tg}\frac{x_{4r}}{2}\right] + \theta_4.
\end{aligned}$$

Здесь $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$ – вектор-функция управления.

Ведущая система (4.2.1) и ведомая система (4.2.2) решаются численно.

В данном подразделе описана безопасная стратегия связи, основанная на адаптивной синхронизации хаотических систем (4.2.1) и (4.2.2).

4.2.1 Приложение для систем защищенной коммуникации: однопараметрическая модуляция и хаотическая маскировка для маскировки обычного текста

Первый тип сообщения $S(t)$ – это обычный текст, который может содержать буквы алфавита, символы, цифры и пробелы. Для преобразования этого текста в числовой вектор используется инструмент MATLAB "double". Пусть $S = [s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$, согласно предложенной схеме, этот вектор чисел разбивается на два вектора $S_1 = [s_1, s_2, \dots, s_m]$ и $S_2 = [s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$. Первый вектор S_1 вводится в параметры передатчика со следующим параметрам функции модуляции:

$$S_{1e} = \varphi_1(\{A, B\}, S_1) = \frac{S_1}{10d} + a \tag{4.2.1.1}$$

где $d = \max(S(j)) - \min(S(j)), j = 1, 2, \dots, n, a = 1.29$.

Для второй части сообщения, S_2 вставляется в хаотические состояния передатчика с помощью следующей функции:

$$S_{2e} = \varphi_2(x, S_2) = (1 + x_2)^2 + (3 + x_2^2)S_2 \quad (4.2.1.2)$$

Приемник может декодировать сообщение с помощью следующих функций:

$$S_{1d} = \psi_1(\{\hat{A}, \hat{B}\}, \hat{S}_{1e}) = 10(\hat{S}_{1e} - \hat{a})d \quad (4.2.1.3)$$

где $\hat{a} = 1.29$.

$$S_{2d} = \psi_2(y, S_{2e}) = \frac{S_{2e} - (1 + y_2)^2}{3 + y_2^2} \quad (4.2.1.4)$$

Восстановленный информационный сигнал S_d получается, если объединить оба вектора S_{1d} и S_{2d} , Затем, используя инструмент MATLAB "char", приемник может преобразовать этот вектор чисел обратно в текст. Предположим, что мы хотим передать небольшую часть текста, как показано на рис. 4.2.1.1. Преобразованное сообщение показано на рис. 4.2.1.2, и видно, что оно надежно замаскировано. Восстановленное сообщение показано на рис. 4.2.1.3, и оно идентично оригинальному содержимому.

Для того, чтобы прочесть зашифрованную информацию, принимающей стороне необходимы ключ и дешифратор (устройство, реализующее алгоритм расшифровывания). Идея шифрования состоит в том, что злоумышленник, перехватив зашифрованные данные и не имея к ним ключа, не может ни прочесть, ни изменить передаваемую информацию. Кроме того, в современных криптосистемах (с открытым ключом) для шифрования, расшифрования данных могут использоваться разные ключи. Однако, с развитием криптоанализа, появились методики, позволяющие дешифровать закрытый текст без ключа. Они основаны на математическом анализе переданных данных.

Рис. 4.2.1.1. Оригинальный текст

```
sFOE7tiTOu6e74iOMt3EyfSNZbV07ky2h2yCZDqv/7Pq3k+F8vIplGE2GyF6SkBiGBGXu7IE/h
xhIDRA9IZLaARivzta/8ycBOM1M3UBZ7L8PpT54ck4TmnlSLVFMPP5AvNdtwntiaaLT3WmJ
eqZntqziZJyWYSVH3Ec1L6Yr5u/HffHmKyz0vRmO+xoDOKd2AxSLT3E7M1BsesSpFl3xCc98
zP9kSql6tU8+eM4edyN0/g+53VsdjYlfG1OSpfZAYmv6Nr7+0ozeovvFWAfJbfuHM5+XPX+E
tdlbAJ8XlgsFyX23ONEvqbcIHt3KyjbKmyddlyGMaa6AO5IVS/9buKNZfgayY8GZTBOj4EAJeR
nvjN8Ozxmq8uQ7EAwVV+QHjW8julqfVkpF7yqTvtUfK2+kCJC/8opDjKRVEVJsS/0cLiRy4yN
XwgCUO3mAvIIKcJK4tAjM7xfSxKrZGleAuJfIsZOZgiu9GUtlU3oCporR+keHw/tH4RNVBh0e
ygE2AOMDq2cbjcgSxVsMOBXyl29lo3zVcTISsf48WhetWRTAtJnwOoosSqaWtnfJm4FDrg
qPSVaNx7+uhIDw7Fl7tpplCX9YjGpDY=
```

Рис. 2.2.1.2. Маскированный текст

Для того, чтобы прочитать зашифрованную информацию, принимающей стороне необходимы ключ и дешифратор (устройство, реализующее алгоритм расшифровывания). Идея шифрования состоит в том, что злоумышленник, перехватив зашифрованные данные и не имея к ним ключа, не может ни прочитать, ни изменить передаваемую информацию. Кроме того, в современных криптосистемах (с открытым ключом) для шифрования, расшифрования данных могут использоваться разные ключи. Однако, с развитием криптоанализа, появились методики, позволяющие дешифровать закрытый текст без ключа. Они основаны на математическом анализе переданных данных.

Рис. 4.2.1.3. Восстановленный текст

4.2.2 Приложение для систем защищенной коммуникации: однопараметрическая модуляция и хаотическая маскировка для изображения в градациях серого

Теперь рассмотрим второй тип сообщения $S(t)$ в виде изображения в градациях серого (рис. 4.2.2.1) размером 256×256 . Это изображение (City.tiff) может быть преобразовано в матрицу пикселей размером $m \times n$ следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mn} \end{pmatrix} \quad (4.2.2.1)$$

где $s(k,l)$ обозначает значение яркости изображения в диапазоне от 0 до 255 в пикселе в позиции (k,l) , где $k = 1,2,\dots,m$, $l = 1,2,\dots,n$. Матрица пикселей преобразуется в одномерный вектор целых чисел. Пусть $S = [s_{11}, s_{21}, \dots, s_{m1}, s_{12}, \dots, s_{m2}, \dots, s_{1n}, \dots, s_{mn}] = [s_1, s_2, \dots, s_{mn}]$. Последний вектор, в свою очередь, делится на два вектора $S_1 = [s_1, s_2, \dots, s_k]$ и $S_2 = [s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{mn}]$. Первый вектор вводится в параметры передающей системы, а второй – в ее хаотические состояния. Для модуляции параметров, хаотической маскировки и декодирования используются те же функции, что и в случае с текстовым сообщением. Переданные и восстановленные серые изображения показаны на рис. 4.2.2.1 и 4.2.2.5. Гистограммы, показывающие распределение интенсивности для оригинального и восстановленного изображений, приведены на рис. 4.2.2.2 и 4.2.2.6, соответственно. На рис. 4.2.2.3 и 4.2.2.4

показаны маскированное изображение и его гистограмма. На рис. 4.2.2.5 и 4.2.2.6 видно, что оригинальное изображение получено точно.



Рис. 4.2.2.1. Оригинальное изображение

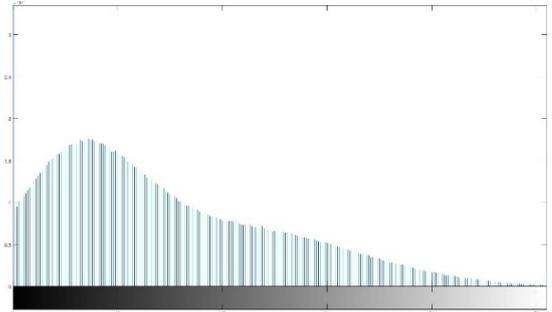


Рис. 4.2.2.2. Гистограмма оригинального изображения

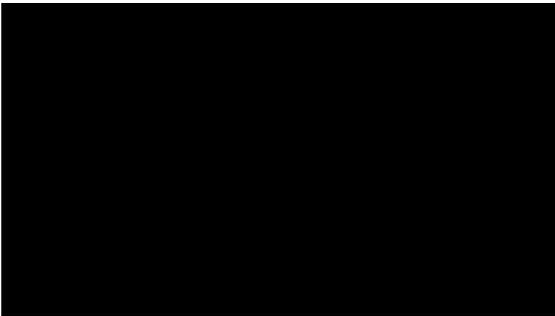


Рис. 4.2.2.3. Маскированное изображение

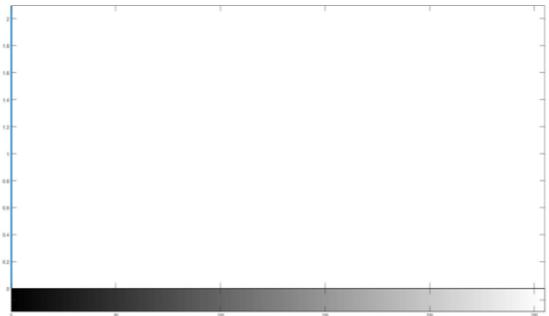


Рис. 4.2.2.4. Гистограмма маскированного изображения



Рис. 4.2.2.5. Восстановленное изображение

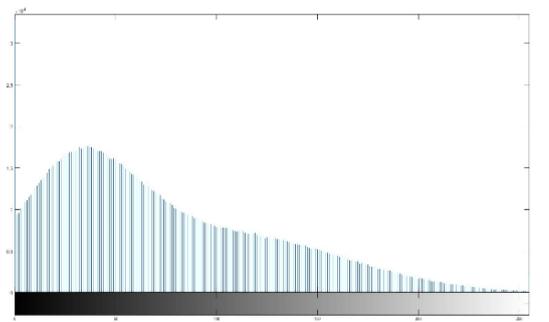


Рис. 4.2.2.6. Гистограмма восстановленного изображения

Чтобы продемонстрировать надежность используемой стратегии безопасной связи для маскировки изображений, к градациям серого изображения добавляется аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ) с различными масштабами, а для измерения качества восстановленного изображения используются пиковое отношение сигнал/шум (PSNR) [89, 117] и индекс структурного сходства изображения (SSIM) [117].

Определение 4.2. [108] Аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ)

– это вид мешающего воздействия в канале передачи информации, представляющий собой стационарный случайный процесс с равномерно распределённой спектральной плотностью мощности, то есть одинаковой на всех частотах, нормально распределёнными временными значениями и аддитивным способом воздействия на сигнал.

Белый шум получил свой название по аналогии со спектром белого света. Как хорошо известно, белый цвет получается в результате сложения всех других цветов видимого диапазона. Если в качестве аналогии и далее использовать видимый диапазон длин волн, то определённым цветом можно обозначить преобладание в спектре сигнала определённых компонент. Если наложить красный светофильтр, то мы пропустим только более длинные волны, или более низкие частоты. Если наложим синий фильтр – получим сигнал с относительно высокими частотами в спектре [37].

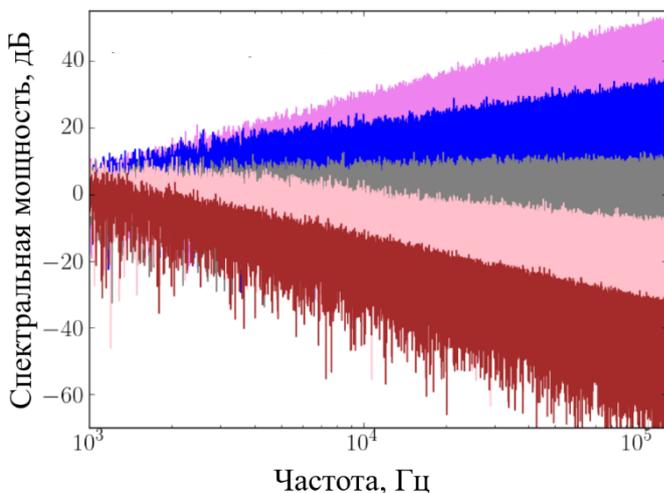


Рис. 4.2.2.7. Нормированные спектральные плотности мощности как функция частоты для различных цветов шума (фиолетовый, синий, розовый, красный)

Цветовое обозначение частотного состава используется для описания так называемых цветных шумов. Они никак не привязаны к какому-либо конкретному частотному диапазону, и различаются только видом их спектральной плотности мощности. Цветные шумы, в том числе и белый шум – это модели шумов,

приближающие некоторые физические явления. К примеру, процессы генерации и рекомбинации носителей заряда в цепях постоянного тока приводят к так называемому фликкер-шуму, который достаточно успешно описывается моделью розового шума. Красный шум описывает броуновское движение, модель серого шума используется в психоакустике [37]. На рисунке

4.2.2.7 представлена гистограмма распределения мощности сигнала по частотам.

На системы беспроводной связи и цифровой обработки сигналов (ЦОС) воздействуют множество разнообразных широкополосных шумов, не связанных друг с другом, таких как тепловые колебания атомов в проводниках (называемые тепловыми шумами или шумом Джонсона–Найквиста), дробовым шумом, излучение черного тела от Земли и других теплых объектов, а также от небесных источников, таких как Солнце. Согласно центральной предельной теореме распределение их суммарного воздействия будет стремиться к нормальному [37].

Именно поэтому модель аддитивного белого гауссовского шума наиболее распространена в системах ЦОС и системах связи, и используется как модель канала передачи данных [105]. Шум в подобных системах, конечно же, является нежелательным явлением.

Анализ пикового соотношения сигнал/шум

Для анализа распределения пикселей восстановленного изображения по отношению к оригинальному применяется пиковое отношение сигнал/шум (PSNR). PSNR можно определить следующим образом [88, 118]

$$PSNR(S, S_d) = 10 \log_{10} \left[\frac{(255)^2}{MSE(S, S_d)} \right]$$

где MSE – средняя квадратическая ошибка, которая определяется следующим образом:

$$MSE(S, S_d) = \frac{1}{m \times n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (s_d(k, l) - s(k, l))^2$$

где S и S_d означают оригинальное и восстановленное изображение, соответственно. Отметим, что высокое значение PSNR означает близкое сходство между восстановленным изображением и оригиналом.

Индекс структурного сходства изображения

Второй тест, используемый для измерения и анализа сходства между оригиналом и найденным изображением, – это индекс структурного сходства

изображения (SSIM), определяемый в следующей форме [118]:

$$SSIM(S, S_d) = \frac{(2\mu_S\mu_{S_d} + C_1)(2\sigma_{SS_d} + C_2)}{(\mu_S^2 + \mu_{S_d}^2 + C_1)(\sigma_S^2 + \sigma_{S_d}^2 + C_2)}$$

где μ_S и μ_{S_d} – среднее значение яркости оригинального изображения S и восстановленного изображения S_d , соответственно; σ_S и σ_{S_d} – стандартные вариации S и S_d , соответственно; σ_{SS_d} – ковариация между S и S_d ; C_1 и C_2 – небольшие фиксированные положительные константы, чтобы знаменатель не был равен нулю. Оценка SSIM всегда находится в интервале $[-1,1]$, и самая сильная оценка, равная 1, реализуется, если $S = S_d$.

На рис. 4.2.2.8-4.2.2.10 представлены оригинальные изображения с различными масштабами АБГШ. Восстановленные изображения приведены на рис. 4.2.2.11-4.2.2.13. Результаты моделирования приведены в табл. 4.2.2.1.



Рис. 4.2.2.8. Оригинальное изображение с АБГШ = 0.05



Рис. 4.2.2.9. Оригинальное изображение с АБГШ = 0.3



Рис. 4.2.2.10. Оригинальное изображение с АБГШ = 0.5



Рис. 4.2.2.11. Восстановленное изображение с АБГШ = 0.05



Рис. 4.2.2.12. Восстановленное изображение с АБГШ = 0.3



Рис. 4.2.2.13. Восстановленное изображение с АБГШ = 0.5

Таблица 4.2.2.1

Оценка PSNR и SSIM для изображения в градациях серого

Цветное изображение	PSNR	SSIM
City	99.94999999999998	0.999999999999876
City АБГШ = 0.05	99.9999999999855	0.999999999993749
City АБГШ = 0.3	98.1087753456345	0.999999999785304
City АБГШ = 0.5	96.7123445452958	0.999999995675675

4.2.3 Приложение для систем защищенной коммуникации: схема маскировки цветного изображения на основе мультипараметрической модуляции

В случае передачи по каналу связи сообщения $S(t)$, представляющего собой цветное изображение, его необходимо разложить по трем компонентам: красному, зеленому и синему каналам (RGB). Параметры b_R, b_G, b_B в ведущей системе (4.2.1) выбираются в качестве носителей сообщения для передачи изображения по RGB каналам с использованием уравнений модуляции, приведенных в виде

$$S_{1e} = \varphi_1(\{A, B\}, S_1) = \frac{S_1}{10d} + b \quad (4.2.3.1)$$

где $S_{1e} = (S_{1e,R}, S_{1e,G}, S_{1e,B})$, $S_1 = (S_{1,R}, S_{1,G}, S_{1,B})$, $d = (d_R, d_G, d_B)$, $b = (b_R, b_G, b_B)$.

Это изображение может быть преобразовано в матрицы пикселей размером $m \times n$ следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1} & \cdots & S_{mn} \end{pmatrix} \quad (4.2.3.2)$$

где $S_{ij} = (s_{ij,R}, s_{ij,G}, s_{ij,B})$, $s(k, l)$ обозначает значение яркости компонент RGB изображения в пикселе от 0 до 255 в позиции (k, l) , где $k = 1, 2, \dots, m$, $l = 1, 2, \dots, n$.

Автором был проведен ряд численных экспериментов с использованием среды MATLAB & Simulink, чтобы продемонстрировать эффективность предложенной схемы маскировки для цветных изображений. Исходное цветное изображение (Kitties.jpg) размером 256×256 показано на рис. 4.2.3.1, а его RGB гистограмма показана на рис. 4.2.3.4. Маскированное изображение представлено на рис. 4.2.3.2, а его гистограмма - на рис. 4.2.3.5. На рис. 4.2.3.3 проиллюстрировано восстановленное изображение и на рис. 4.2.3.6 соответствующая ему RGB гистограмма, полученные после использования предложенной схемы маскировки.



Рис. 4.2.3.1. Оригинальное изображение

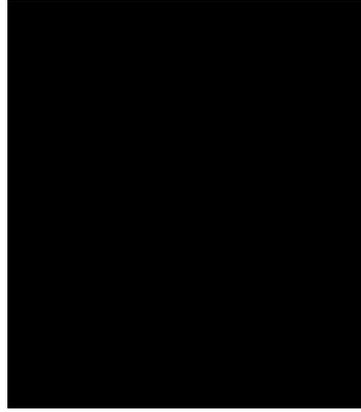


Рис. 4.2.3.2. Маскированное изображение

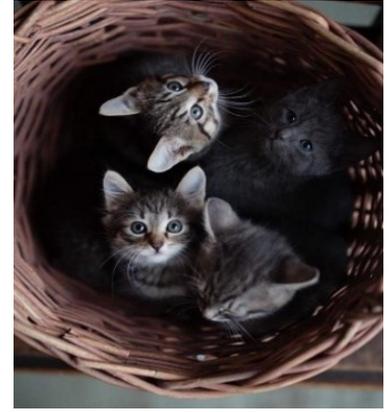


Рис. 4.2.3.3. Восстановленное изображение

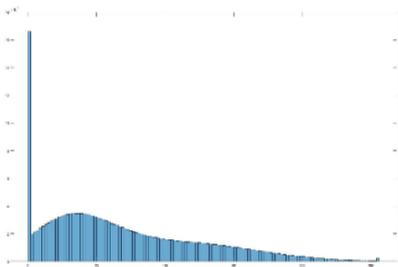


Рис. 4.2.3.4. Гистограмма оригинального изображения

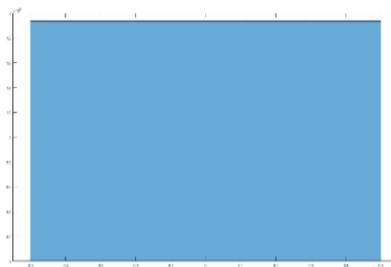


Рис. 4.2.3.5. Гистограмма маскированного изображения

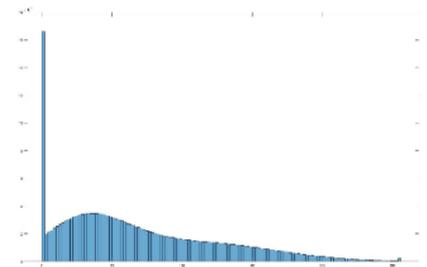


Рис. 4.2.3.6. Гистограмма восстановленного изображения

Из рисунков 4.2.3.1-4.2.3.6 видно, что восстановленное изображение идентично оригинальному.

Для проверки робастности разработанной схемы защищенной связи используются добавки аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ) с различными значениями среднего, а для оценки производительности системы и качества восстановленных цветных изображений, как и в случае с изображениями в градациях серого, измеряются пиковое отношение сигнал/шум (PSNR) [117] и индекс структурного сходства изображения (SSIM) [118]. На рис. 4.2.3.7-4.2.3.9 представлены оригинальные изображения с различными масштабами АБГШ. Восстановленные изображения приведены на рис. 4.2.3.10-4.2.3.12. Результаты моделирования приведены в табл. 4.2.3.1.



Рис. 4.2.3.7. Оригинальное изображение с АБГШ = 0.05



Рис. 4.2.3.8. Оригинальное изображение с АБГШ = 0.2

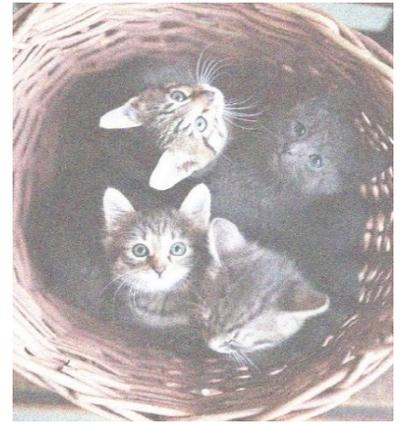


Рис. 4.2.3.9. Оригинальное изображение с АБГШ = 0.5



Рис. 4.2.3.10. Восстановленное изображение с АБГШ = 0.05



Рис. 4.2.3.11. Восстановленное изображение с АБГШ = 0.2

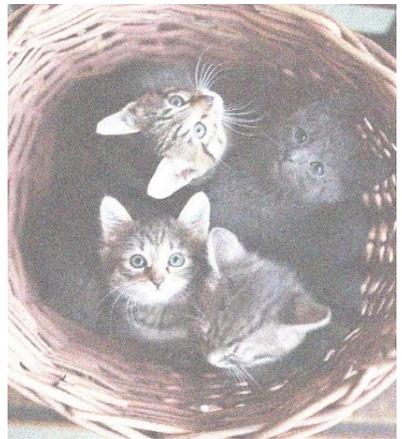


Рис. 4.2.3.12. Восстановленное изображение с АБГШ = 0.5

Таблица 4.2.3.1

Оценка PSNR и SSIM для цветного изображения

Цветное изображение	PSNR	SSIM
Kitties	99.845627	0.999895
Kitties АБГШ = 0.05	99.678451	0.999739
Kitties АБГШ = 0.2	98.037849	0.999421
Kitties АБГШ = 0.5	96.195349	0.989986

4.3 Адаптивная синхронизация для мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых аттракторов

В данном подразделе применим схему для достижения адаптивной синхронизации из [106] между двумя идентичными хаотическими системами вида (3.2.1.4) из раздела 3.2.1 настоящей диссертации. Ведущая (генерирует переменные состояния $x(t)$ для передатчика) и ведомая (генерирует

переменные состояния $y(t)$ для приемника) системы с индексами d и r соответственно могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = \operatorname{tgy}_d \\ \dot{y}_d = -x_d - \operatorname{arctg}(|50z_d| - 10)\operatorname{tgy}_d \\ \dot{z}_d = \left(\operatorname{tg}^4 y_d - \frac{a}{1+x_d^8}\right)\operatorname{sign}z_d \end{cases} \quad (4.3.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_r = \operatorname{tgy}_r + \theta_1 \\ \dot{y}_r = -x_r - \operatorname{arctg}(|50z_r| - 10)\operatorname{tgy}_r + \theta_2 \\ \dot{z}_r = \left(\operatorname{tg}^4 y_r - \frac{a}{1+x_r^8}\right)\operatorname{sign}z_r + \theta_3 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Здесь $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ – вектор-функция управления.

Запишем ведущую систему (4.3.1) в виде (4.3.2):

$$\begin{aligned} x &= (x_d, y_d, z_d)^T, \quad A = (1, 0, 0)^T, \quad B = (0, 0, a)^T, \\ F(x) &= \begin{pmatrix} \operatorname{tgy}_d \\ -\operatorname{arctg}(|50z_d| - 10)\operatorname{tgy}_d \\ \operatorname{tg}^4 y_d \operatorname{sign}z_d \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\operatorname{sign}z_d}{1+x_d^8} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Аналогично можно записать ведомую систему (4.3.2) в виде (4.3.3):

$$\begin{aligned} y &= (x_r, y_r, z_r)^T, \quad A = (1, 0, 0)^T, \quad B = (0, 0, \hat{a})^T, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T, \\ F(x) &= \begin{pmatrix} \operatorname{tgy}_r \\ -\operatorname{arctg}(|50z_r| - 10)\operatorname{tgy}_r \\ \operatorname{tg}^4 y_r \operatorname{sign}z_r \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\operatorname{sign}z_r}{1+x_r^8} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Векторы ошибок, соответствующие состояниям и модуляции параметров, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} e &= (e_1, e_2, e_3)^T \\ e_A &= (e_{A_1}, e_{A_2}, e_{A_3})^T \\ e_B &= (e_{B_1}, e_{B_2}, e_{B_3})^T \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

По теореме 4.1, мы получаем следующие функции управления (4.1.5):

$$\theta =$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{tgy}_d - \operatorname{tgy}_r + \varphi_1 \\ -x_d - \operatorname{arctg}(|50z_d| - 10)\operatorname{tgy}_d + x_r + \operatorname{arctg}(|50z_r| - 10)\operatorname{tgy}_r + \varphi_2 \\ \left(\operatorname{tg}^4 y_d - \frac{a}{1+x_d^8}\right) \operatorname{sign} z_d - \left(\operatorname{tg}^4 y_r - \frac{a}{1+x_r^8}\right) \operatorname{sign} z_r + \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (4.3.8)$$

$$\text{где } \varphi_1 = -k_{11}e_1 - k_{21}e_{A_1} - k_{31}e_{B_1}, \quad \varphi_2 = -k_{12}e_2 - k_{22}e_{A_2} - k_{32}e_{B_2}, \quad \varphi_3 = -k_{13}e_3 - k_{23}e_{A_3} - k_{33}e_{B_3}.$$

Как показано в подразделе 3.2.1, при $a=2$ система (4.3.1) не имеет состояний равновесия и обладает 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов, представленной на рисунке 4.3.1. Ведущая система (4.3.1) и ведомая система (4.3.2) с управлением (4.3.8) решаются численно.

В данном подразделе описана безопасная стратегия связи, основанная на адаптивной синхронизации хаотических систем (4.3.1) и (4.3.2).

4.3.1 Приложение для систем защищенной коммуникации: однопараметрическая модуляция и хаотическая маскировка для аудиосигнала

Первый тип сообщения $S(t)$ - это аудиосигнал, который находится во временном интервале $[0, 33]$. Для преобразования этого звукового сообщения в вектор чисел, как и в предыдущем разделе, используется инструмент MATLAB "double". Пусть $S = [s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$, согласно предложенной схеме, этот вектор чисел, в свою очередь, разбивается на $S_1 = [s_1, s_2, \dots, s_m]$ и $S_2 = [s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$. Первый вектор S_1 вводится в параметры передатчика со следующими параметрами функции модуляции:

$$S_{1e} = \varphi_1(\{A, B\}, S_1) = \frac{S_1}{10d} + a \quad (4.3.1.1)$$

где $d = \max(S(j)) - \min(S(j)), j = 1, 2, \dots, n, a = 2$.

Для второй части сообщения, S_2 вставляется в хаотические состояния передатчика с помощью функции вида:

$$S_{2e} = \varphi_2(x, S_2) = x^2 + (1 + x^2)S_2 \quad (4.3.1.2)$$

Приемник может восстановить сообщение с помощью следующих функций:

$$S_{1d} = \psi_1(\{\hat{A}, \hat{B}\}, \hat{S}_{1e}) = 10(\hat{S}_{1e} - \hat{a})d \quad (4.3.1.3)$$

где $\hat{a} = 2$.

$$S_{2d} = \psi_2(y, S_{2e}) = \frac{S_{2e} - y^2}{1 + y^2} \quad (4.3.1.4)$$

Собрав оба вектора S_{1d} и S_{2d} , мы получим весь восстановленный информационный сигнал S_d . Приемник может преобразовать этот вектор чисел обратно в текст, используя инструмент MATLAB "char". Предположим, что мы хотим передать сообщение, являющееся звуковым сигналом, как показано на рисунке 4.3.1.1. Маскированное сообщение показано на рисунке 4.3.1.2. Восстановленное сообщение показано на рисунке 4.3.1.3. Ошибка $S(t) - S_d(t)$ между переданным звуковым сигналом и восстановленным сигналом показана на рисунке 4.3.1.4. Из рисунка 4.3.1.4 можно наблюдать, что исходный волновой сигнал точно восстановлен.

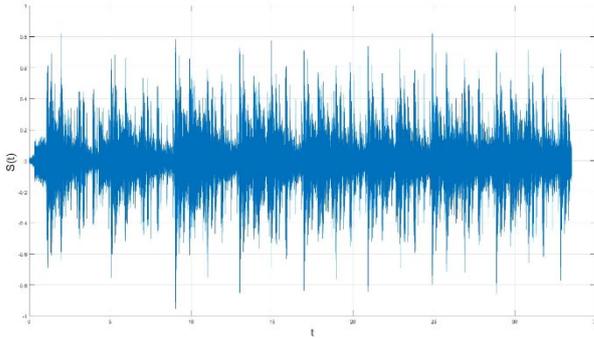


Рис. 4.3.1.1. Исходный сигнал $S(t)$

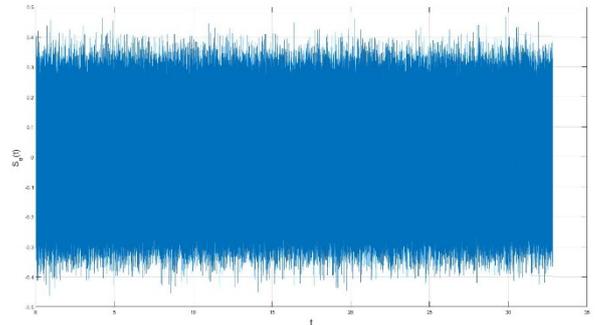


Рис. 4.3.1.2. Маскированный сигнал $S_d(t)$

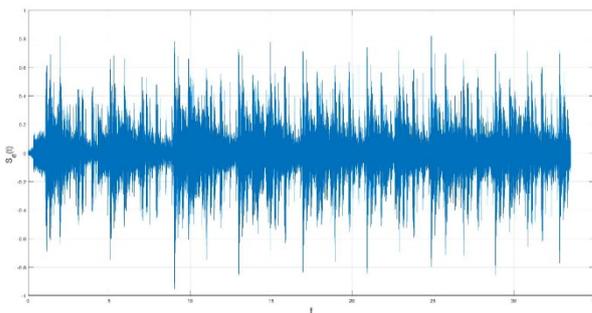


Рис. 4.3.1.3. Восстановленный сигнал $S_e(t)$

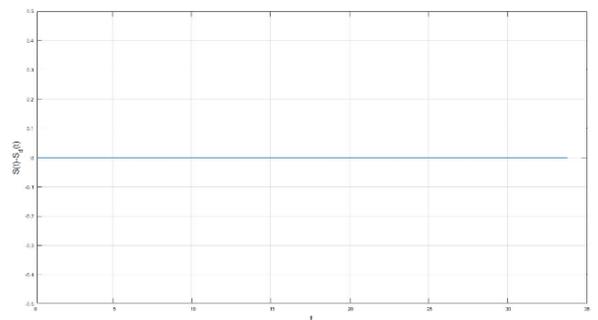


Рис. 4.3.1.4. Ошибка $S(t) - S_d(t)$

4.3.2 Приложение для систем защищенной коммуникации: однопараметрическая модуляция и хаотическая маскировка для видеосигнала

В случае, если передаваемое по каналу связи сообщение $S(t)$, является видеосигналом для его маскировки используется симбиоз техник, описанных в подразделах 4.1.3 и 4.2.2 [25, 26].

Вначале необходимо разделить данные на аудио и визуальную информацию, что происходит на 1 этапе.

На 2 этапе отдельно производится маскировка аудио и визуальной информации, используя представленные ранее алгоритмы.

На 3 этапе происходит перемежение преобразованных данных, для получения маскированного потока данных и затруднения декодирования злоумышленником.

На 4 этапе маскированный битовый поток данных разделяется на два потока, которые представляют собой четные и нечетные биты этого потока данных.

На 5 этапе происходит модуляция маскированного битового потока 1 в модуляторе 1, и маскированного битового потока 2 в модуляторе 2.

На 6 этапе преобразованные данные синхронно передаются на двум различным каналам связи, что так же затрудняет декодирование данных злоумышленником.

На 7 этапе происходит прием и демодуляция маскированных данных.

На 8 этапе данные с выхода демодуляторов 1 и 2 поступают на вход демультимплексора в котором восстанавливается исходный маскированный поток.

На 9 этапе поток данных поступает на вход деперемежителя в котором производится восстановление исходного порядка маскированных данных.

На 10 этапе маскированная аудио и визуальная информация поступает на дешифратор, с выхода которого информация в открытой форме поступает на вход мультимплексора.

На 11 этапе в мультиплексоре производится сборка данных в формате видео, после чего поступает получателю информации, как показано на рисунке 4.3.2.1.

В результате получается видео файл, аналогичный оригинальному. Предложенная схема надежна к различным масштабам аддитивного белого гауссовского шума.

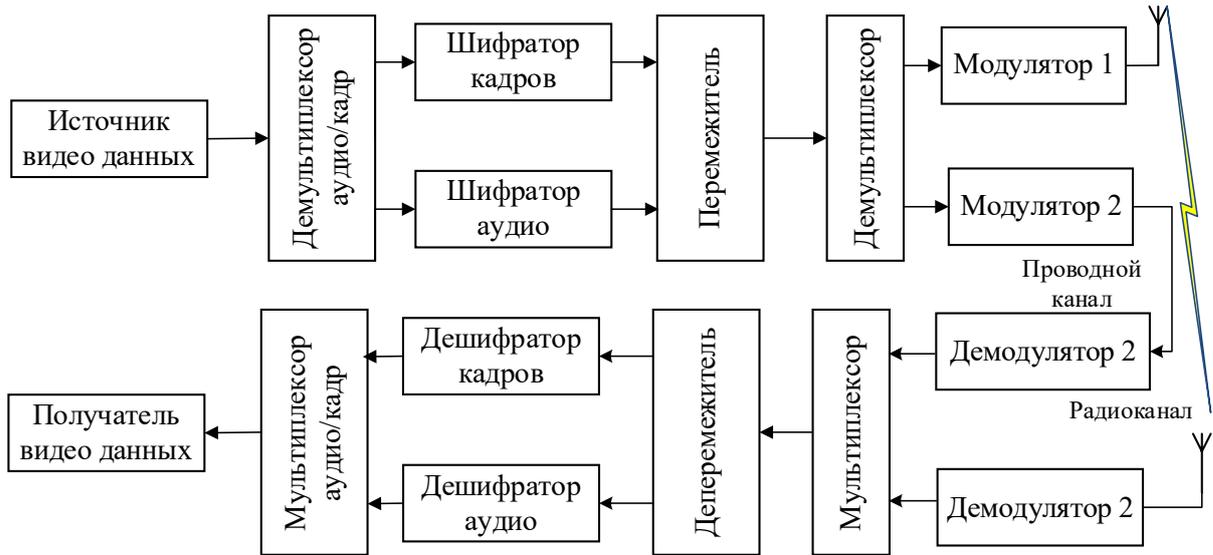


Рис. 4.3.2.1. Схема маскировки видеосигнала

4.4 Выводы по главе 4

В этой главе была предложена схема, обеспечивающая безопасную связь на основе адаптивной синхронизации [106] между парой идентичных мегастабильных систем со скрытыми хаотическими аттракторами. Предложенная схема позволяет надежно маскировать от попыток несанкционированного доступа со стороны злоумышленника различные типы сообщений, такие как: текст, изображение (в градациях серого, цветное), аудиосигнал и видеосигнал. Схема робастна к воздействию шумов, что было продемонстрировано на примере моделирования канала связи с добавлением аддитивного белого гауссовского шума с различными значениями среднего. Вышеописанная модель реализована автором в виде комплекса проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента [26, 27] с использованием среды MATLAB & Simulink.

Заключение

Получен ряд новых результатов, краткое содержание которых излагается ниже.

1. Предложен метод конструирования однопараметрических систем-хамелеонов в форме Лурье, то есть систем, которые обладают самовозбуждающимися или скрытыми аттракторами в зависимости от значений, принимаемых параметром. Приведены примеры сконструированных систем-хамелеонов.
2. Разработан метод конструирования n -мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих 1-D решеткой аттракторов (самовозбуждающихся или скрытых) на основе систем в форме Лурье, заключающийся в замене нелинейности на периодическую функцию. Такой подход, по сути дела, является преобразованием исходной системы в систему с угловой координатой. Продемонстрирована возможность построения мегастабильных систем с 1-D решеткой аттракторов, основываясь на многочисленных известных результатах для систем в форме Лурье с одной нелинейностью.
3. Предложен метод конструирования n -мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих $(n-1)$ -D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье. Предложенный метод использует возможность преобразования системы в форме Лурье в систему каскадного типа, которая является смещаемой по переменным (*offset boostable*). При помощи замены некоторых переменных в такой системе на периодические функции этих переменных строятся системы с многомерной решеткой хаотических аттракторов-клонов.
4. С использованием синтеза подходов, предложенных во второй главе диссертации разработан метод конструирования n -мерных мегастабильных систем, обладающих n -D решеткой хаотических аттракторов. В диссертации впервые построена система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов.

5. Разработан метод генерирования систем без состояний равновесия, содержащих 2-D полосу скрытых хаотических аттракторов размерности "почти 3", и обладающих аналитическими решениями на основе операции удвоения аттракторов (*attractor doubling operation*), предложенной С. Ли.
6. Разработан и реализован в виде комплекса программ в пакете вычислений MATLAB алгоритм преобразования информации, передаваемой по каналам связи, на основе сконструированных в диссертации мегастабильных систем, обладающих хаотическими аттракторами, с помощью которого маскируются такие виды информации как текст, изображение в градациях серого, цветное изображение, аудиоинформация и видеоинформация.

Список литературы

1. Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом" динамических систем // УМН. 1949. Т. 4. Вып. 4. С. 187-188.
2. Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Скрытые колебания и возбуждение интегратора при насыщении в контуре управления летательных аппаратов // Сборник трудов XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XII) (Россия, Москва, ИПУ РАН, 16 июня-19 июня 2014). М.: ИПУ РАН. 2018. С. 482-490.
3. Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах, проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 3-36.
4. Буркин И.М. О явлении буферности в многомерных динамических системах // Дифференциальные уравнения. Т. 38. № 5. 2002. С. 585-595. DOI:10.1023/A:1020250305868
5. Буркин И.М. Скрытые аттракторы некоторых мультистабильных систем с бесконечным числом состояний равновесия // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18. № 2. С.18-33. DOI:10.22405/2226-8383-2017-18-2-18-33
6. Буркин И.М., Буркина Л.И. Колебания с жестким возбуждением в многосвязных регулируемых системах // Вестник ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи". 2012. № 1. С. 3-13.
7. Буркин И.М., Буркина Л.И. Частотный критерий существования циклов у многосвязных систем автоматического регулирования // Вестник ТулГУ. Серия "Дифференциальные уравнения и прикладные задачи". 2010. № 1. С. 3-14.
8. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6(64). № 4. С. 555-564. DOI:10.21638/11701/spbu01.2019.403
9. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Динамические системы с 2-D и 3-D

решеткой скрытых аттракторов // Сборник тезисов Международной конференции, посвященной 70-летию С.Л. Атанасяна, 70-летию И.С. Красильщика, 70-летию А.М. Самохина, 80-летию В.Т. Фоменко «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (Россия, Рязань, РГУ им. С.А. Есенина, 25-28 сентября 2018). Рязань: РГУ им. С.А. Есенина. 2018. С. 8-9.

10. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Конструирование динамических систем с бесконечным числом хаотических аттракторов // Вестник РАЕН. 2019. Т. 19. № 2. С. 39-43.

11. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов // Сборник трудов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. «Теория управления и математическое моделирование» (Россия, Ижевск, УдГУ, 15-19 июня 2020), Ижевск: «Удмуртский университет». 2020. С. 48-50.

12. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 1. С. 105-117. DOI:10.22405/2226-8383-2021-22-1-105-117

13. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Новая мегастабильная система с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 4. С. 360-368. DOI:10.22405/2226-8383-2021-22-4-361-369

14. Буркин И.М., Кузнецова О.И. О некоторых динамических системах-хамелеонах // Сборник трудов Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 18-20 декабря 2017). Воронеж: Научно-исследовательские публикации. 2017. С. 44-50.

15. Буркин И.М., Кузнецова О.И. О некоторых методах генерирования экстремально мультистабильных систем // Сборник трудов «Сборник трудов ИТНТ-2019. Том 3. Математическое моделирование физико-технических

процессов и систем». (Россия, Самара, Самарский университет, 21-24 мая 2019). Самара: ООО «Новая техника». 2019. С. 218-226.

16. Буркин И.М., Кузнецова О.И. О некоторых методах конструирования мегастабильных систем // Сборник трудов XV Международной научной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Россия, Москва, ИПУ РАН, 3-5 июня 2020). М.: ИПУ РАН. 2020. С. 120-123.

17. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Об одном методе конструирования мегастабильных хаотических систем на основе систем в форме Лурье // Сборник трудов XVI Международной Казанской школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Россия, Казань, КФУ, 22-27 августа 2023). Казань: КФУ. 2023. Т. 66. 310 с.

18. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Об одном подходе к генерированию экстремально мультистабильных хаотических систем // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 168. С. 15-25. DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-15-25

19. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Системы-хамелеоны автоматического управления // Сборник трудов XIV Международной научной конференции. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Россия, Москва, ИПУ РАН, 30 мая-1 июня 2018). М.: ИПУ РАН. 2018. С. 94-97.

20. Буркин И.М., Нгуен Нгок Хиен. Аналитико-численные методы поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах. Дифференциальные уравнения и процессы управления. № 2. 2014. С. 34-59.

21. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: «Наука», 1978. 400 с.

22. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: «Физматлит». 2001. 295 с.

23. Кузнецова О.И. Динамические системы-хамелеоны // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018».

(Россия, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 9-13 апреля 2018) [Электронный ресурс] М.: МАКС Пресс. 2018. 1 электрон. опт. диск.

24. Кузнецова О.И. Динамические системы-хамелеоны автоматического управления // Сборник трудов: Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018) (Russia, Irkutsk, ISDCT SB RAS, June 25-30, 2018). ISDCT SB RAS. 2018. С. 86-87.

25. Кузнецова О.И. Применение мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов для обеспечения безопасной связи // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 1. С. 89-103. DOI:10.22405/2226-8383-2023-24-1-89-103

26. Кузнецова О.И. Программа для шифрования информации с использованием мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых аттракторов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022666310, 30.08.22. 1 с.

27. Кузнецова О.И. Программа для шифрования информации с использованием мегастабильной системы с 4-D решеткой хаотических аттракторов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022665247, 30.08.22. 1 с.

28. Кузнецова О.И. Шифрование информации с использованием мегастабильной системы с 4-D решеткой скрытых хаотических аттракторов // Сборник трудов Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 12-14 декабря 2022). Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2023. С. 71-77.

29. Леонов Г.А. Аналитический анализ генератора Носе-Хувера // Доклады Академии наук. 2016. Т. 469. № 1. С. 51-53. DOI:10.7868/S0869565216190129

30. Леонов Г.А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. СПб.: СПбГУ. 2004. 144 с.

31. Леонов Г.А. Теория управления. СПб.: СПбГУ. 2006. 233 с.

32. Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И. Частотные методы в теории колебаний: в 2 ч. Ч.1: Многомерные аналоги уравнения Ван-дер-Поля и динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. СПб.: СПбГУ. 1992. 366 с.
33. Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И. Частотные методы в теории колебаний: в 2 ч. Ч. 2: Проблема Айзермана и частотные оценки хаусдорфовой размерности аттракторов. СПб.: СПбГУ. 1992. 162 с.
34. Леонов Г.А., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В. Алгоритм локализации аттракторов Чуа на основе метода гармонической линеаризации // Доклады Академии наук. 2010. Сер. Теория управления. Т. 433. № 3. С. 323-326. DOI:10.1134/S0869565210210073
35. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // ПММ. 1944. Т. 8. № 3. С. 246-248.
36. Мамонов С.С., Ионова И.В., Харламова А.О. Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 3. С. 333-348. DOI:10.22405/2226-8383-2019-20-3-333-348
37. Цифровая обработка сигналов [Электронный ресурс] // Центр информационных технологий и моделирования «Экспонента». 2019. <https://exponenta.ru/news/cifrovaya-obrabotka-signalov> (дата обр. 17.04.2022).
38. Abarbanel H.D., Brown R., Sidorowich J.J., Tsimring L.S. The analysis of observed chaotic data in physical systems // Reviews of Modern Physics. 1993. Vol. 65. №4. P. 1331-1392. DOI:10.1103/RevModPhys.65.1331
39. Aihara K., Takabe T., Toyoda M. Chaotic neural networks // Physics Letters A. 1990. Vol. 144. P. 333-340. DOI:10.1016/0375-9601(90)90136-C
40. Chaos theory and applications in applied sciences and engineering: An interdisciplinary journal of nonlinear science. Chief Editor Akif Akgul. 2020-2022. Vol. 1-4.
41. Bao B., Zhu Y., Li C., Bao H., Xu Q. Global multistability and analog circuit implementation of an adapting synapse - based neuron model // Nonlinear

- Dynamics. 2020. Vol. 101. P. 1105-1118. DOI:10.1007/s11071-020-05831-z
42. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Pt. I: Theory. Pt. II: Numerical applications // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 9-30. DOI:10.1007/BF02128236
43. Burkin I.M., Kuznetsova O.I. An approach to generating extremely multistable chaotic systems // *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 262. № 6. 2022. P. 779-789. DOI:10.1007/s10958-022-05856-2
44. Burkin I.M., Kuznetsova O.I. On some dynamical chameleon systems // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 973. № 1. 012052. DOI:10.1088/1742-6596/973/1/012052
45. Burkin I.M., Kuznetsova O.I. On some methods for generating extremely multistable systems // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1368. № 4. 042050. DOI:10.1088/1742-6596/1368/4/042050
46. Cheffer A., Savi M.A., Pereira T.L. De Paula A.S. Heart rhythm analysis using a nonlinear dynamics perspective // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 96. P. 152-176. DOI:10.1016/j.apm.2021.03.014
47. Chen H.-K. Global chaos synchronization of new chaotic systems via nonlinear control // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2005. Vol. 23. № 4. P. 1245-1251. DOI:10.1016/j.chaos.2004.06.040
48. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The Double Scroll Family // *IEEE Transactions on Circuits & Systems*. 1986. Vol. CAS-33. № 11. P. 1073-1118. DOI:10.1109/TCS.1986.1085869
49. Chua L.O., Lin G.N. Canonical Realization of Chua's Circuit Family // *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. 1990. Vol. 37. № 4. P. 885-902. DOI:10.1109/31.55064
50. Damghani H., Nazarimehr F., Jafari S., Sprott J.C. Chaotic oscillators with two types of semi-fractal equilibrium points: bifurcations, multistability, and fractal basins of attraction // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2023. Vol. 120. 107143. DOI:10.1016/j.cnsns.2023.107143

51. Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O. Multiple access communication based on control of special chaotic trajectories // Proceedings of 2nd International Conference. Control of Oscillations and Chaos (COC-2000). St. Petersburg, Russia. 2000. P. 518-522.
52. Du H., Zeng Q., Lu N. A general method for modified function projective lag synchronization in chaotic systems // Physics Letters A. 2010. Vol. 374. № 13-14. P. 1493-1496. DOI:10.1016/j.physleta.2010.01.058
53. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports. 2016. Vol. 637. P. 1-50. DOI:10.1016/j.physrep.2016.05.002
54. Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Ciliberto S. Liapunov exponents from time series // Physical Review A. 1986. Vol. 34. № 6. P. 4971-4979. DOI:10.1103/PhysRevA.34.4971
55. Fonkou R.F., Kengne R., Kamgang H.C.F., Talla P.K. Dynamical behavior analysis of the heart system by the bifurcation structures // Heliyon. 2023. Vol. 9. e12887. DOI:10.1016/j.heliyon.2023.e12887
56. Frank M., Stengos T. Chaotic dynamics in economic time-series // Journal of Economic Surveys. 1988. Vol. 2. P. 103-133. DOI:10.1111/j.1467-6419.1988.tb00039.x
57. Goudarzi S., Jafari S., Moradi M.H., Sprott J.C. NARX prediction of some rare chaotic flows: recurrent fuzzy functions approach // Physics Letters A. 2016. Vol. 380. № 5-6. P. 696-706. DOI:10.1016/j.physleta.2015.11.036
58. Gotthans T., Sprott J.C., Petrzela J. Simple chaotic flow with circle and square equilibrium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26. Article ID 1650137. DOI:10.1142/S0218127416501376
59. Guan Z.-H., Huang F., Guan W. Chaos-based image encryption algorithm // Physics Letters A. 2005. Vol. 346. №1-3. P. 153-157. DOI:10.1016/j.physleta.2005.08.006
60. Hilborn R.C. Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. Oxford University Press on Demand. 1994. 672p.

61. Holyst J.A., Hagel T., Haag G., Weidlich W. How to control a chaotic economy? // *Journal of Evolutionary Economics*. 1996. Vol. 6. P. 31-42. DOI:10.1007/BF01202371
62. Jafari M.A., Mliki E., Akgul A., Pham V.-T., Kingni S. T., Wang X., Jafari S. Chameleon: the most hidden chaotic flow nonlinear dynamics. 2017. Vol. 88. № 3. P. 2303-2317. DOI:10.1007/s11071-017-3378-4
63. Jafari S., Pham V.-T., Kapitaniak T. Multiscroll chaotic sea obtained from a simple 3d system without equilibrium // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26. № 2. 1650031. DOI:10.1142/S0218127416500310
64. Jafari S., Sprott J. C., Golpayegani S.M.R.H. Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria // *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377. P. 699-702. DOI:10.1016/J.PHYSLETA.2013.01.009
65. Kalman R.E. Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // *Trans. ASME*. 1957. Vol. 79. № 3. P. 553-566.
66. Kantz H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series // *Physics Letters A*. 1994. Vol. 185. P. 77-87. DOI:10.1016/0375-9601(94)90991-1
67. Kaplan J., Yorke J. Chaotic behavior of multidimensional difference equations // *Functional Differential Equations and the Approximation of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics*. 1979. Vol. 730. P. 204-227. DOI:10.1007/BFb0064319
68. Khalil H.K. *Nonlinear Systems*. 3-rd Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall P T R. NJ 07458. 2002. 929 p.
69. Kutepov I.E., Dobriyan V.V., Zhigalov M.V., Stepanov M.F., Krysko A.V., Yakovleva T.V., Krysko V.A. EEG analysis in patients with schizophrenia based on Lyapunov exponents // *Informatics in Medicine Unlocked*. 2020. Vol. 18. 100289. DOI:10.1016/j.imu.2020.100289
70. Kuznetsov N.V., Mokaev T.N., Kudryashova E.V., Kuznetsova O.A., Mokaev R.N., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. Stability and chaotic attractors of

- memristor-based circuit with a line of equilibria // AETA 2018 - Recent Advances in Electrical Engineering and Related Sciences: Theory and Application. 2020. Vol. 554. P. 639-644. DOI:10.1007/978-3-030-14907-9_62
71. Kuznetsov N.V., Reitmann V. Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation. Springer Cham. 2021. 545 p. DOI:10.1007/978-3-030-50987-3
72. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Papkova I.V., Saltykova O.A., Krysko A.V. Chaotic contact dynamics of two microbeams under various kinematic hypotheses. // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2019. Vol. 20. № 3-4. P. 373-386. DOI:10.1515/ijnsns-2018-0132
73. Lai Q., Chen S. Generating multiple chaotic attractors from Sprott B system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26. 1650177. DOI:10.1142/S0218127416501777
74. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Analytical-numerical methods for hidden attractors localization: The 16th Hilbert problem, Aizerman and Kalman conjectures, and Chua circuit // Numerical Methods for Differential Equations, Optimization, and Technological Problems, Computational Methods in Applied Sciences. 2013. Vol. 27. P. 41-64. DOI: 10.1007/978-94-007-5288-7_3
75. Li C., Jiang Y., Ma X. On offset boosting in chaotic system // Chaos Theory and Applications. 2021. Vol. 3. № 2. P. 47-54. DOI:10.51537/chaos.959841
76. Li C., Hu W., Sprott J.C., Wang X. Multistability in symmetric chaotic systems // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2015. Vol. 224. № 8. P. 1493-1506. DOI:10.1140/epjst/e2015-02475-x
77. Li C., Li Z., Jiang Y., Lei T., Wang X. Symmetric strange attractors: a review of symmetry and conditional symmetry // Symmetry. 2023. Vol. 15. № 1564. DOI:10.3390/sym15081564
78. Li C., Lu T., Chen G., Xing H. Doubling the coexisting attractors // Chaos. 2019. Vol. 29. Art. no. 051102. DOI:10.1063/1.5097998
79. Li C., Sprott J.C. An infinite 3-D quasiperiodic lattice of chaotic attractors // Physics Letters A. 2018. Vol. 382. P. 581-587. DOI:10.1016/j.physleta.2017.12.022

80. Li C., Sprott J.C. Variable-boostable chaotic flows // *Optik*. 2016. Vol. 127. № 22. P. 10389-10398. DOI:10.1016/j.ijleo.2016.08.046
81. Li C., Sprott J.C., Hu W., Xu Y. Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2017. Vol. 27. № 10. 1750160. DOI:10.1142/S0218127417501607
82. Li C., Sprott J.C., Kapitaniak T., Lu T. Infinite lattice of hyperchaotic strange attractors // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2018. Vol. 109. P. 76-82. DOI:10.1016/j.chaos.2018.02.022
83. Li C., Sprott J.C., Mei Y. An infinite 2-D lattice of strange attractors // *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 89. № 4. P. 2629-2639. DOI:10.1007/s11071-017-3612-0
84. Li C., Sprott J.C., Xing H. Constructing chaotic systems with conditional symmetry // *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 87, 1351-1358. DOI:10.1007/s11071-016-3118-1
85. Li C., Sun J., Sprott J.C., Lei T. Hidden attractors with conditional symmetry // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2020. Vol. 30. 2030042. DOI:10.1142/s0218127420300426
86. Li C., Thio W., Sprott J.C., Iu H.H.C., Xu Y. Constructing infinitely many attractors in a programmable chaotic circuit // *IEEE Access*. 2018. Vol. 6. P. 29003-29012. DOI:10.1109/ACCESS.2018.2824984
87. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963. Vol. 20. № 2. P.130-141. DOI:10.1177/0309133308091948
88. Ma T., Mou J., Al-Barakati A.A., Jahanshahi H., Miao M. Hidden dynamics of memristor-coupled neurons with multi-stability and multi-transient hyperchaotic behavior // *Physica Scripta*. 2023. Vol. 98. № 10. 105202. DOI:10.1088/1402-4896/acf24f
89. Mahmoud G.M. Farghaly A., Abed-Elhameed T., Darwish M.M. Adaptive dual synchronization of chaotic (hyperchaotic) complex systems with uncertain parameters and its application in image encryption // *Acta Physica Polonica Series B*. 2018. Vol. 49. № 11. 1923. DOI:10.5506/APhysPolB.49.1923

90. Mahmoud G.M., Mahmoud E.E. Lag synchronization of hyperchaotic complex nonlinear systems // *Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 67. № 2. P. 1613-1622. DOI 10.1007/s11071-011-0091-6
91. Markus L., Yamabe H. Global stability criteria for differential systems // *Osaka Math J*. 1960. Vol. 12. P. 305-317.
92. Mobayen S., Fekih A., Vaidyanathan S., Sambas A. Chameleon chaotic systems with quadratic nonlinearities: an adaptive finite-time sliding mode control approach and circuit simulation // *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 64558-64573. DOI:10.1109/ACCESS.2021.3074518
93. Nakamura Y., Sekiguchi A. The chaotic mobile robot // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 2001. Vol. 17. № 6. P. 898-904. DOI:10.1109/70.976022
94. Patidar V., Sud K.K., Pareek N.K. A pseudo random bit generator based on chaotic logistic map and its statistical testing // *Informatica*. 2009. Vol. 33. № 4. P. 441-452.
95. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // *Physical Review Letters*. 1990. Vol. 64(8). P. 821-824. DOI:10.1103/physrevlett.64.821
96. Pham V.-T., Vaidyanathan S., Volos C., Jafari S., Kingni S.T. A non-equilibrium hyperchaotic system with a cubic nonlinear term // *Optik Int. J. Light Electron Opt*. 2016. Vol. 127. № 6. P. 3259-3265. DOI:10.1016/j.ijleo.2015.12.048
97. Pisarchik A.N., Jaimes-Reátegui R., Rodríguez-Flores C., García-López J.H., Huerta-Cuellar G., Martín-Pasquín F.J. Secure chaotic communication based on extreme multistability // *Journal of the Franklin Institute*. 2021. Vol. 358. P. 2561-2575. DOI:10.1016/j.jfranklin.2021.01.013
98. Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Karavaev A.S., Kulminskiy D.D. Experimental digital communication scheme based on chaotic time-delay systems // *Nonlinear Dynamics*. 2013. Vol. 74. № 4. P. 1013-1020 DOI:10.1007/s11071-013-1019-0
99. Rajagopal K., Akgul A., Jafari S., Karthikeyan A., Koyuncu I. Chaotic chameleon: dynamic analyses, circuit implementation, FPGA design and fractional order form with basic analyses // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2017. Vol.

103. P. 476-487. DOI:10.1016/j.chaos.2017.07.007
100. Ramakrishnan B., Natiq H., Rajagopal K., Jafari S., Nazarimehr F. A novel megastable system: cloud, kite, and arrow-like attractors and their dynamics // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. Vol. 32. № 10. 2250152. DOI:10.1142/S0218127422501528
101. Rosenstein M.T., Collins J., Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 65. № 1-2. P. 117-234. DOI:10.1016/0167-2789(93)90009-P
102. Rybin V., Babkin I., Kvitko D., Karimov T., Nardo L., Nepomuceno E., Butusov D. Estimating optimal synchronization parameters for coherent chaotic communication systems in noisy conditions // Chaos Theory and Applications. 2023. Vol. 5. № 3. P.141-152. DOI:10.51537/chaos.1314803
103. Sato S., Sano M., Sawada Y. Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems // Progress of theoretical physics. 1987. Vol. 77. № 1. P. 1-5. DOI: 10.1143/PTP.77.1
104. Scheffer M. Critical Transitions in Nature and Society. Princeton University Press. 2009. 400 p. DOI:10.1515/9781400833276
105. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication // The Bell System Technical Journal. 1948. Vol. 27. July, October. P. 379-423, 623-656.
106. Shoreh A.-H., Kuznetsov N., Mokaev T. New adaptive synchronization algorithm for a general class of complex hyperchaotic systems with unknown parameters and its application to secure communication // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2021. Vol. 586. 126466.
107. Singh J.P., Roy B. The simplest 4-D chaotic system with line of equilibria, chaotic 2-torus and 3-torus behaviour // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 89. P. 1845-1862. DOI:10.1007/s11071-017-3556-4
108. Sklar B. Digital communications: fundamentals and applications. Second Edition Communications Engineering Services. Upper Saddle River, N.J.: Prentice

Hall P T R. NJ 07458. 2001. 1079 p.

109. Sprott J.C. Do we need more chaos examples // *Chaos Theory and Applications*. 2020. Vol. 2. № 2. P. 1-3.

110. Sprott J.C., Fatma Y.D. Simple chaotic hyperjerk system // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26. № 11. 1650189. DOI:10.1142/S0218127416501893

111. Sprott J.C., Hoover W., Hoover C. Heat conduction, and the lack thereof, in time-reversible dynamical systems: generalized Nos'e-Hoover oscillators with a temperature gradient // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89. 042914. DOI:10.1103/PhysRevE.89.042914

112. Sun J., Li C., Lu T., Akgul A., Min F. A memristive chaotic system with hypermultistability and its application in image encryption // *IEEE Access*. 2020. Digital Object Identifier. DOI:10.1109/ACCESS.2020.3012455

113. Tang W.K., Zhong G., Chen G., Man K. Generation of n-scroll attractors via sine function // *IEEE Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl*. 2001. Vol. 48. № 11 P. 1369-1372. DOI:10.1109/81.964432

114. Vaidyanathan S., Idowu B.A., Azar A.T. Backstepping controller design for the global chaos synchronization of Sprott's jerk systems // *Studies in Computational Intelligence*. 2015. Vol. 581. P. 39-58. DOI:10.1007/978-3-319-13132-0_3

115. Wang S., Hong L., Jiang J. An image encryption scheme using a chaotic neural network and a network with multistable hyperchaos // *Optics*. 2022. Vol. 268. № 1. 169758. DOI:10.1016/j.ijleo.2022.169758

116. Wang X., Kuznetsov N.V., Chen G. *Chaotic Systems with Multistability and Hidden Attractors*. Cham: Springer. 2021. 672 p. DOI:10.1007/978-3-030-75821-9

117. Wang Z., Bovik A.C. A universal image quality index // *IEEE signal processing letters*. 2002. Vol. 9. № 3. P. 81-84. DOI:10.1109/97.995823.

118. Wang Z., Bovik A.C., Sheikh H.R., Simoncelli E.P. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity // *IEEE transactions on image processing*. 2004. Vol. 13. № 4. P. 600-612. DOI:10.1109/TIP.2003.819861

119. Wolf A., Swift J., Swinney H., Vastano J.A. Determining Lyapunov

- exponents from a time series // *Physica D: nonlinear phenomena*. 1985. Vol. 16. № 3. P. 285-317. DOI:10.1016/0167-2789(85)90011-9
120. Wu F., Hayat T., An X., Ma J. Can Hamilton energy feedback suppress the chameleon chaotic flow? // *Nonlin. Dyn.* 2018. Vol. 94. P. 669-677. DOI:10.1007/s11071-018-4384-x
121. Yan S., Song Z., Shi W. Symmetric coexisting attractors in a novel memristors-based Chua's chaotic system // *Journal of Circuits, Systems and Computers*. 2022. Vol. 31. № 7. 2250120. DOI:10.1142/S0218126622501201
122. Yu X., Zhihong M. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. 2002. Vol. 49. № 2. P. 261-264. DOI:10.1109/81.983876
123. Zaher A.A., Abu-Rezq A. On the design of chaos-based secure communication systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011. Vol. 16. № 9. P. 3721-3737. DOI:10.1016/j.cnsns.2010.12.032
124. Zhang X., Sang B., Li B., Liu J., Fan L., Wang N. Hidden chaotic mechanisms for a family of chameleon systems // *Mathematical Modelling and Control*. 2023 Vol. 1. DOI:10.3934/mmc.2023xxx.

Приложение Б.

Программа для шифрования информации с использованием
мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых аттракторов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022666310

**Программа для шифрования информации с
использованием мегастабильной системы с 2-D полосой
скрытых аттракторов**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет» (ТулГУ) (RU)*

Автор(ы): *Кузнецова Оксана Игоревна (RU)*

Заявка № 2022665245

Дата поступления 15 августа 2022 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 30 августа 2022 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов
Исполнительный директор
Федеральной службы по интеллектуальной собственности
Директор Департамента государственной регистрации программ для ЭВМ

Ю.С. Зубов