На правах рукописи

Кузнецова Оксана Игоревна

КОНСТРУИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНО МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Тула — 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Тульский государственный университет»

Научный руководитель: БУРКИН Игорь Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: КРЫСЬКО Антон Вадимович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», профессор

ХАРЛАМОВА Анастасия Олеговна, кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина», доцент

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург

Защита состоится «27» марта 2024 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.417.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92, (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92 и на сайте https://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-212-271-05/Kuznetsova_OI_/

Автореферат разослан «01» февраля 2024 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Соколова Марина Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Разрушение традиционного взгляда на то, что хаос вреден, и не поддается контролю, породило интерес к исследованию систем с хаотическим поведением. Оказалось, что такие системы могут иметь различное число и геометрические формы состояний равновесия; могут обладать одновременно несколькими аттракторами со своими областями притяжения, характеризующимися различными начальными условиями, то есть быть мультистабильными, или экстремально мультистабильными, обладающими бесконечным числом сосуществующих аттракторов (C. Li, J.C. Sprott, X. Zhang, G. Chen, Y. Xu, Y. Mei, S. Jafari, J.M.K. Abdul, T. Kapitaniak, T. Lu, И.М. Буркин).

Знаковым событием в теории динамического хаоса стало открытие так называемых скрытых аттракторов[1] (*hidden attractors*). После этого усилия многих авторов были направлены на разработку различных методов обнаружения скрытых аттракторов (Г.А. Леонов, Н.В. Кузнецов, В.И. Вагайцев, Б.Р. Андриевский, В.О. Брагин, Р.Н. Мокаев, Т.Н. Мокаев, И.М. Буркин, Н.Н. Хиен). Открытие скрытых аттракторов в динамических системах породило волну публикаций исследователей по всему миру[2]. В работах S. Jafari, A. Akgul, K. Rajagopal, A. Karthikeyan, P. Duraisamy, I. Koyuncu, V.T. Pham, S.T. Kingni, X. Wang, E. Mliki были рассмотрены "системы-хамелеоны", которые при различных значениях, входящих в них параметров могут обладать как самовозбуждающимися, так и скрытыми аттракторами. К категории скрытых аттракторов относятся также аттракторы систем без состояний равновесия (S. Jafari, J.C. Sprott, S. Golpayegani, V-T. Pham, C. Volos, Z. Wei, И.М. Буркин).

В последние годы многие исследователи сосредоточились на вопросах конструирования новых хаотических систем, востребованных в приложениях. Для этого было разработано несколько различных подходов. Например, рассмотреть существующую хаотическую систему и изменить ее, добавив дополнительные члены в дифференциальные уравнения, описывающие систему, или модифицировать существующий член, или добавить новые состояния в систему и изменить её порядок, добавив в систему мемристор.

Одним из наиболее перспективных методов генерирования хаотических систем, востребованных в приложениях, оказался приём, получивший название *offset boosting* (усиление смещения). Дело в том, что для хаотических сигналов, используемых в информационной инженерии, важны такие характеристики как масштаб и смещение. Усиление смещения означает, что аттрактор перемещается в фазовом пространстве в любом направлении, то есть среднее значение соответствующей переменной необходимым образом масштабируется. Последнее обстоятельство дает инженеру прямой способ преобразовать биполярный хаотический сигнал в униполярный. Более того, использование процедуры усиления смещения позволяет получить такие эффекты, как самовоспроизводящиеся аттракторы (J.C. Sprott, C. Li, W. Hu, W.J.-C. Thio, Y. Xu), удвоение числа аттракторов (C. Li, T. Lu, G. Chen, H. Xing), условно симметричные аттракторы (J.C. Sprott, C. Li, J. Sun, T. Lei). Таким образом, использование усиления смещения позволяет, опираясь на известные простые

---

[1] Bragin V.O., Vagaitsev V.I., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua’s circuits // J. Comput.Syst. Sci. Int. 2011. Vol. 50. №4. P. 511-543.

[2] Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports.2016.Vol. 637. P. 1-50.

хаотические системы, генерировать достаточно сложные (мультистабильные), в том числе системы со скрытыми аттракторами. Такие системы могут быть использованы, например, для маскировки информации и организации безопасной связи (A.N. Pisarchik, J. Nuñez-Perez, C. Li, C. Volos, A. Akgul, V.-T. Pham, S. Wang, И.В. Пономаренко, А.С. Караваев, В.Г. Рыбин, Т.И. Каримов).

В диссертации предложены новые аналитико-численные методы конструирования систем-хамелеонов и мегастабильных хаотических систем на основе многомерных систем в форме Лурье, обладающих самовозбуждающимися или скрытыми хаотическими аттракторами. Сгенерированные мегастабильные системы, обладающие хаотическими аттракторами, используются для обеспечения безопасной связи.

Целью работы является разработка аналитико-численных методов конструирования мегастабильных хаотических систем, которые могут быть использованы для защиты информации в системах коммуникации.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать метод конструирования однопараметрических систем-хамелеонов.
2. Разработать методы конструирования n-мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих 1-D, (n-1)-D решеткой аттракторов.
3. Разработать методы конструирования n-мерных мегастабильных систем, обладающих n-D решеткой аттракторов.
4. Разработать метод генерирования мегастабильных систем без состояний равновесия.
5. Разработать и реализовать алгоритмы для преобразования информации, передаваемой по каналам связи, на основе сконструированных мегастабильных систем, обладающих хаотическими аттракторами, в виде комплекса программ.

Методы исследования. При выполнении диссертационного исследования использовались методы теории матриц, теории устойчивости, обобщенный принцип Пуанкаре-Бендиксона, метод продолжения по параметру, частотные методы, методы вычисления показателей Ляпунова и размерности Каплана-Йорке аттракторов; при разработке вычислительных алгоритмов использовались MATLAB, Mathcad.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод конструирования однопараметрических систем-хамелеонов в форме Лурье, использующий прием продолжения по параметру.
2. Методы конструирования n-мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих 1-D, (n-1)-D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье.
3. Метод конструирования n-мерных мегастабильных систем, обладающих n-D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье.
4. Метод генерирования мегастабильных систем без состояний равновесия, обладающих аналитическими решениями.
5. Алгоритм и его программная реализация для преобразования информации, передаваемой по каналам связи, на основе сконструированных мегастабильных систем, обладающих хаотическими аттракторами в виде комплекса программ в пакете вычислений MATLAB.

Научная новизна. Все пункты, перечисленные в положениях, выносимых на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы представляют собой вклад в разработку новых аналитико-численных методов конструирования однопараметрических систем-хамелеонов, а также мегастабильных хаотических систем, допускающих потенциальное использование в маскировке информации, представленной в виде текста, изображений, аудио и видеоинформации, или создании сигналов нужной полярности.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим использованием математического аппарата и подтверждается сравнением с ранее известными результатами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на конференциях: Международные научно-технические конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, Воронежский государственный университет, 2017, 2022); XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2018); Международные научные конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Москва, ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2018, 2020); the 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018) (Irkutsk, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, 2018); Международная конференция, посвященная 70-летию С.Л. Атанасяна, 70-летию И.С. Красильщика, 70-летию А.М. Самохина, 80-летию В.Т. Фоменко (Рязань, Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина. 2018); V Международная конференция и молодежная школа «Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2019)» (Самара, Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева, 2019); Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование (СТММ 2020)», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Удмуртский государственный университет, 2020); XVI Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2023**).**

Публикации. По теме диссертации опубликована 21 работа, в том числе: 2 в журналах [1, 2], индексируемых в базе Scopus, 5 публикаций в изданиях, индексируемых в базе Scopus и рекомендованных Высшей аттестационной комиссией [3-7], 2 публикации, в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией [8, 9].

Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [8, 9].

Работа поддержана грантом №2017-49 Публ. Тульского государственного университета в 2017 году.

В работах [1, 5] диссертанту принадлежит численное моделирование, соавтору принадлежат постановка задачи и остальные результаты. В работах [2-4] диссертанту принадлежат численное моделирование и метод конструирования систем, обладающих 1-D, (n-1)-D решеткой аттракторов, соавтору принадлежит постановка задачи. В работе [6] диссертанту принадлежат метод генерирования трехмерных систем без состояний равновесия, содержащих 2-D полосу скрытых хаотических аттракторов размерности "почти 3" и численное моделирование, соавтору принадлежит постановка задачи. Во всех работах обработка и интерпретация полученных результатов выполнена лично диссертантом.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и 2 приложений. Полный объем диссертации составляет 124 страницы со 105 рисунками и 6 таблицами. Список литературы содержит 124 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приведён обзор научной литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель, поставлены задачи работы, показана научная новизна и практическая значимость работы.

В **первой главе** диссертации излагаются основные понятия и математический аппарат, используемые в её последующих главах. Приведен обзор известных подходов к поиску срытых аттракторов динамических систем, основанных на использовании метода продолжения по параметру.

Основным результатом, представленным в первой главе, является метод конструирования однопараметрических систем-хамелеонов в форме Лурье, использующий метод продолжения по параметру. Рассматривается однопараметрическое семейство систем

$$\dot{x} = Ax + bf(\sigma,\varepsilon),\ \sigma = c^T x, \tag{1}$$

где A – $n\times n$-матрица, b и c – n-векторы, $f(\cdot,\cdot)$ – скалярная функция, $\varepsilon\in[0,1]$ – параметр. Систему (1) называют системой-хамелеоном, если при одних значениях ε она имеет самовозбуждающиеся аттракторы, бассейны притяжения которых пересекаются со сколь угодно малой окрестностью ее состояний равновесия, а при других - скрытые, бассейны притяжения которых не содержат малых окрестностей положений равновесия системы.

Предлагаемый метод основан на использовании следующей теоремы:

Теорема 1. Пусть передаточная функция $\chi(p) = c^T(A-pI)^{-1}b = \dfrac{m(p)}{n(p)}$ системы (1) невырожденная (то есть полином $n(p)$ имеет степень n, и дробь $\dfrac{m(p)}{n(p)}$ несократима), при некотором значении ε функция $f(\sigma,\varepsilon)$ в системе (1) непрерывна, кусочно-дифференцируема и выполнены следующие условия:

1) График функции $f(\sigma,\varepsilon)$ имеет единственную точку пересечения $\sigma=0$ с прямой $\sigma+\chi(0)f=0$ (или с прямой $f=0$, если матрица A особая);
2) Существуют такие числа μ_1 и μ_2, что во всех точках дифференцируемости функции $f(\sigma,\varepsilon)$ выполнены условия $\mu_1 \le f'(\sigma,\varepsilon)\le\mu_2$;
3) Существует число $\lambda>0$ такое, что при всех $\omega\in[0,\infty)$ справедливо неравенство $\Pi(\omega)=1+(\mu_1+\mu_2)\operatorname{Re}\chi(i\omega-\lambda)+\mu_1\mu_2|\chi(i\omega-\lambda)|^2>0$;
4) Существует $f'(0,\varepsilon)$ и матрица $A+f'(0,\varepsilon)bc^T$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda\le\operatorname{Re}p\le 0$;

5) Для некоторого $h \in (\mu_1, \mu_2)$ матрица $A + hbc^T$ является гурвицевой и $| f(\sigma,\varepsilon) - h\sigma | < \gamma < \infty$.

Тогда система (1) имеет, по крайней мере, один цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$ системы.

Сформулированная теорема гарантирует существование у системы (1), например, при $\varepsilon = 0$ самовозбуждающегося из окрестности состояния равновесия $x = 0$ аттрактора (цикла). Пусть $x_0 \neq 0$ – произвольная точка из окрестности состояния равновесия $x = 0$. Численно найдем решение $x_0(t)$ системы (1) с начальным условием $x_0(0) = x_0$ на промежутке $[0, T]$, где T достаточно велико. Значение $x_0(T)$ будет достаточно близко к циклу. Рассмотрим теперь, семейство систем (1) с нелинейностями $f(\sigma, \varepsilon_j)$, где $\varepsilon_j = 0.1j,\ j = 0,1\ldots,10$. Решения этих систем обозначим $x_j(t)$. При численном интегрировании каждой из систем семейства в качестве начального условия $x_j(0)$ возьмем $x_{j-1}(T)$. Предположим, что при всех значениях j решения $x_j(t)$ "выходят" на аттрактор системы (1). Пусть при $j > j_0$ матрицы $A + f'(0, \varepsilon_j)bc^T$ гурвицевы, тогда все найденные аттракторы системы (1) при $\varepsilon > \varepsilon_{j_0}$ скрытые.

Приведем пример, сконструированной в диссертации системы-хамелеон.

Пример 1. Построена система (1) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f(\sigma,\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot \mathrm{arctg}(4\sigma) e^{\frac{\sigma}{3}} + (1-\varepsilon)\frac{4(\sigma^3 + 3\sigma)}{\sigma^2 + 4}.$$

Система имеет самовозбуждающиеся при $\varepsilon \in \left[0, \dfrac{1}{15}\right)$ и скрытые при $\varepsilon \in \left(\dfrac{1}{15}, 1\right]$ аттракторы. На рис. 1 и 2. представлены проекции скрытых хаотических аттракторов системы на плоскость (x_1, x_4). Для этих аттракторов вычислены показатели Ляпунова и размерности Каплана-Йорке, приведенные в табл. 1.

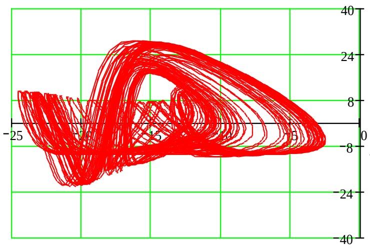

Рис. 1. $\varepsilon = 0.88$

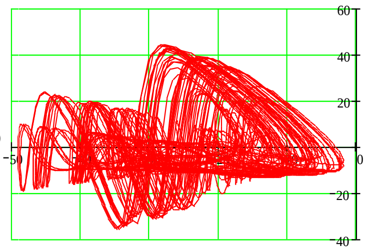

Рис. 2. $\varepsilon = 1$

Таблица 1

ε	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	D_{KY}
0.88	0,1045429	-0,0290923	-0,2226633	-0,8609476	2,3755037
1	0,0611581	-0,013220	-0,1323177	-0,9156204	2,3622955

Вторая глава посвящена разработке методов конструирования n-мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих 1-D, (n-1)-D решеткой аттракторов, на основе систем в форме Лурье.

Первый метод, заключается в замене нелинейности на периодическую функцию, что, по сути дела, является преобразованием исходной системы в систему с угловой координатой. Этот метод позволяет строить системы с 1-D решеткой аттракторов (как самовозбуждающихся, так и скрытых).

В диссертации доказана следующая теорема:

Теорема 2. Пусть передаточная функция системы (1) невырожденная, $\varphi(0)=0$, $\chi(0)\neq 0$, и матрица $A-\chi(0)^{-1}bc^T$ имеет нулевое собственное значение. Пусть система (1) имеет нетривиальный аттрактор Ω такой, что для любого $x_0\in\Omega$ справедливо соотношение $|c^T x(t,x_0)|<\Delta<\infty$ при $t\geq 0$. Тогда функцию $\varphi(\sigma)$ в системе (1) можно заменить на 2Δ-периодическую функции $\psi(\sigma)$ таким образом, чтобы новая система имела бесконечное число состояний равновесия и 1-D решетку идентичных аттракторов-клонов.

Описанный выше алгоритм применяется для генерирования системы с 1-D решеткой аттракторов на основе обобщенной системы Чуа.

Пример 2. Рассмотрим обобщенную систему Чуа, то есть систему (1) с

$$A=\begin{pmatrix}-\alpha & \alpha & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -\beta & -\gamma\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}-\alpha\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$f(\sigma)=m_1\sigma+0.5(m_0-m_1)(|\sigma+1|-|\sigma-1|)+0.5(s-m_0)(|\sigma+\delta|-|\sigma-\delta|).$$

Система имеет три состояния равновесия: $(0,0,0)$, $(\mp(\gamma+\beta)\rho,\mp\gamma\rho,\pm\beta\rho)$, где $\rho=[m_0-m_1+(s-m_0)\delta]\cdot[\beta+m_1(\gamma+\beta)]^{-1}$. При $k=-\beta(\gamma+\beta)^{-1}$ функция $g(\sigma)=\varphi(\sigma)-k\sigma$ имеет три нуля: $\sigma=0,\ \sigma=\pm(\gamma+\beta)\rho$, а матрица $A_1=A+kbc^T$ имеет однократное нулевое собственное значение. Если $\alpha=8.4562$, $\beta=12.0732$, $\gamma=0.0052$, $s=-0.9668$, $\delta=0.2$, тогда $-(\gamma+\beta)\rho=7.236543046$ и система имеет три скрытых аттрактора: цикл и два хаотических аттрактора-близнеца, расположенных в полосе $|x|<2$. Эти аттракторы могут быть обнаружены численным интегрированием с начальными условиями $x_1=(-0.458,-0.107,2.522)$ и $x_{2,3}=(\pm1.360,\pm1.633,\pm1.631)$.

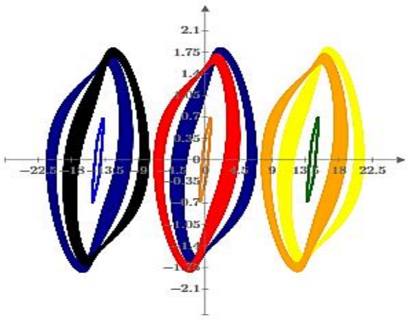

Рис. 3. 1-D решетка аттракторов системы с периодической нелинейностью

Заменим функцию $\varphi(\sigma)$ в системе на периодическую периода $\Delta=-2(\gamma+\beta)\rho$, совпадающую с $\varphi(\sigma)$ на $[(\gamma+\beta)\rho,-(\gamma+\beta)\rho]$. Тогда новая система, которая является системой с угловой координатой, будет иметь 1-D решетку идентичных скрытых аттракторов, представленных на рис. 3, которые имеют показатели Ляпунова (0.121,0,-1.13) и размерность Каплана-Йорке 2.107.

Для отыскания этих аттракторов можно применить следующую процедуру: если x_0 – точка, принадлежащая какому-либо аттрактору системы, d – собственный вектор матрицы A_1, $q=\Delta d(c^T d)^{-1}$, тогда точки $x_0+jq,\ j=0,\pm1,\pm2,\ldots$ принадлежат аттракторам 1-D решетки.

Второй метод использует возможность преобразования системы в форме Лурье (1) в систему каскадного типа (3) и опирается на следующую теорему[3]:

Теорема 3. Система (1) с невырожденной передаточной функцией $\chi(p)$

[3] Леонов Г.А. Теория управления. СПб.: СПбГУ. 2006. 233 с.

неособым линейным преобразованием $y = Mx$ всегда может быть приведена к системе каскадного типа (3)

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dots,\ \dot{x}_{n-1} = x_n,\ \dot{x}_n = f(\dot{x}_2, \dot{x}_3, \dots, x_1). \qquad (3)$$

Основная идея конструирования самовоспроизводящихся систем, обладающих бесконечной (n-1)-D решеткой аттракторов, состоит в следующем: поскольку система (3) допускает смещение фазового потока по переменным $x_2, x_3, \dots, x_n$, то можно попытаться заменить эти переменные периодическими функциями. Если после такой замены новая система имеет хаотический аттрактор, то она имеет бесконечную (n-1)-D решетку идентичных аттракторов. Справедлива следующая теорема[4]:

Теорема 4. Если функции $F_1(x_2),\ F_2(x_3),\ \dots,\ F_{n-1}(x_n)$ являются периодическими и система

$$\dot{x}_1 = F_1(x_2),\ \dot{x}_2 = F_2(x_3),\ \dots,\ \dot{x}_{n-1} = F_{n-1}(x_n),\ \dot{x}_n = f(F_1(x_2), F_2(x_3), \dots, F_{n-1}(x_n), x_1) \qquad (4)$$

имеет ограниченное решение (аттрактор) на периоде, то n-мерная система, смещаемая по переменным, построенная из системы каскадного типа (3) допускает построение $(n-1)$-D решетки, содержащей бесконечно много идентичных аттракторов,

Во второй главе диссертации рассмотрен ряд примеров реализации описанной идеи. Приведем здесь некоторые из них.

Пример 3. Рассмотрим обобщенную систему Чуа из примера 2. Неособым преобразованием с матрицей M перейдем к системе каскадного типа

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = y,\\
&\dot{y} = z,\\
&\dot{z} = 15.037737580544x - 2.374374715168y + 0.23617016z + f(\sigma),\\
&\sigma = -102.13736608x - 8.50017224y - 8.4562z.
\end{aligned}$$

Определим точки, принадлежащие скрытым аттракторам преобразованной системы: $M^{-1}x_1 = (0.0247, 0.0126, -0.2569)$, $M^{-1}x_{2,3} = (\pm 0.0160, \mp 0.1933, \mp 0.1595)$. Заменим в системе переменные y и z на π-периодические функции $y \to 0.64\sin(2y),\ z \to 0.542\sin(2z)$.

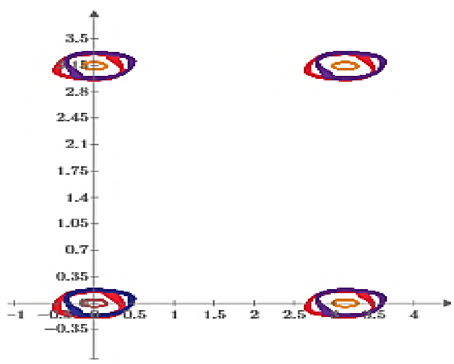

Рис. 4. Фрагмент 2-D решетки скрытых аттракторов системы

Полученная система имеет 2-D решетку скрытых аттракторов, которые могут быть обнаружены численным интегрированием с начальными условиями $(0.006, 0.043 \pm \pi k, -0.062 \pm \pi m)$ и $(\pm 0.047, \mp 0.135 \pm \pi k, \mp 0.255 \pm \pi m)$, $k, m \in N$. Фрагмент 2-D решетки аттракторов (проекция на плоскость (y, z)) представлен на рисунке 4. Все идентичные хаотические аттракторы системы имеют показатели Ляпунова $(0.126, 0, -0.986)$ и размерность Каплана-Йорке 2.138.

Пример 4. Рассмотрена система (1) с

[4] Li C., Sprott J.C., Kapitaniak T., Lu T. Infinite lattice of hyperchaotic strange attractors // Chaos, Solitons and Fractals. 2018. Vol. 109. P. 76-82.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -0.26\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1.64 & -0.7264\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, f(\sigma)=\sigma^2.$$

Для этой системы известен факт существования хаотического аттрактора[5], который может быть визуализирован численно при старте из точки $q=\mathrm{col}(\text{-}0.1,0,\text{-}0.25)$. Здесь $\chi(p)=(1-\mathrm{p}^2)(p^3-0.7264p^2+0.64p-0.3)^{-1}$.

Поэтому неособым линейным преобразованием эта система может быть приведена к системе каскадного типа:

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=z,\ \dot{z}=0.3x-0.64y-0.7264z+(z-x)^2.$$

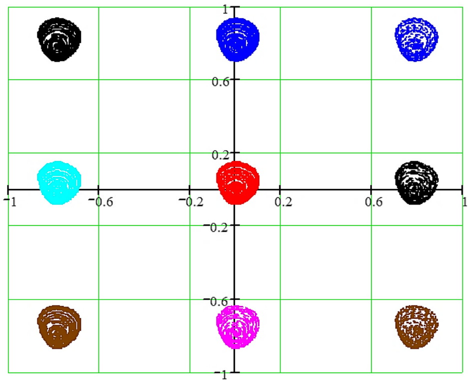

Рис. 5. 2-D решетка хаотических аттракторов

Заменим y и z на периодические функции: $y\to 0.125\sin(8y)$, $\mathrm{z}\to 0.125\sin(8z)$.

Построенная система имеет бесконечную 2-D решетку идентичных аттракторов-клонов. Проекция фрагмента решетки новой системы на плоскость (y,z) представлена на рис. 5.

В **третьей главе** диссертации предложен метод конструирования n-мерных мегастабильных систем на основе систем в форме Лурье, обладающих n-D решеткой хаотических аттракторов, с помощью синтеза подходов, изложенных во второй главе диссертации.

Мегастабильные системы, содержащие 1-D решетку хаотических аттракторов, удается получить, используя теорему 2, заменяя нелинейность в исходной системе на периодическую функцию. Далее, заменяя некоторые переменные на периодические функции этих переменных (согласно теореме 4), удается построить мегастабильную систему, содержащую n-D решетку хаотических аттракторов. В качестве одного из примеров в диссертации впервые построена система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов.

Пример 5. Рассмотрена система (1) с

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}-c_0\\-c_1\\-c_2\\-c_3\end{pmatrix},$$

где a_i, $i=1,2,3$ и c_j, $j=1,\ldots,4$ – положительные числа. Тогда

$$\det(A+kbc^T-pI)=p^4+(a_3+c_4k)p^3+(a_2+c_3k)p^2+(a_1+c_2k)p+c_1k.$$

Коэффициенты полинома подберем так, чтобы при $k<0$ он имел один положительный корень и 3 корня с отрицательными вещественными частями, а при малых $k>0$ все его корни располагались в левой открытой полуплоскости. Положим $a_1=a_2=1,\ a_3=3,\ c_1=1,\ c_2=2,\ c_3=1,\ c_4=1.6$.

При выбранных значениях параметров системы плоскость (σ,f)

[5] Li C., Sprott J.C., Mei Y. An infinite 2-D lattice of strange attractors // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 89. №4. P. 2629-2639.

разбивается на 4 сектора: $(-\infty, 0)$ – сектор неустойчивости степени 1, $(0, 0.53759)$ – сектор гурвицевости, $(0.537592, 5)$ – сектор неустойчивости степени 2, $(5, \infty)$ – сектор гурвицевости. Теперь подберем нечетную 2π - периодическую функцию $f(\sigma)$, имеющую 2 нуля на периоде такую, чтобы ее график на периоде попеременно пребывал в секторе линейной неустойчивости степени 2, секторе гурвицевости и секторе линейной неустойчивости степени 1.

Путем целенаправленного компьютерного поиска удается выбрать $f(\sigma) = 1.8\sin\sigma$. При таком выборе из окрестности нулевого состояния равновесия возбуждаются два симметричных хаотических аттрактора. "Размах" аттракторов по координатам x_2, x_3, x_4 не превышает 2π, поэтому можно попытаться заменить каждую из переменных x_2, x_3, x_4 в полученной системе на некоторую 2π - периодическую функцию так, чтобы новая система имела пару симметричных хаотических аттракторов. Тогда такая система будет иметь 4-D решетку хаотических аттракторов-клонов.

Заменим: $x_2 = 1.82\sin x_2,\ x_3 = 1.29\sin x_3,\ x_4 = -1.42\,\mathrm{tg}\dfrac{x_4}{2}$, тогда

$$\dot{x}_1 = 1.82\sin x_2,\ \dot{x}_2 = 1.29\sin x_3,\ \dot{x}_3 = -1.42\,\mathrm{tg}\frac{x_4}{2},$$

$$\dot{x}_4 = -1.82\sin x_2 - 1.29\sin x_3 + 4.26\,\mathrm{tg}\frac{x_4}{2} + 1.8\sin\left[-x_1 - 3.64\sin x_2 - 1.29\sin x_3 - 2.272\,\mathrm{tg}\frac{x_4}{2}\right].$$

На рис. 6-9 представлены проекции 4-D решетки аттракторов системы. Все аттракторы 4-D решетки имеют показатели Ляпунова $\Lambda_1 = 0.054$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = -0.206$, $\Lambda_4 = -3.004$, размерность Каплана-Йорке $D_{KY} = 2.262$.

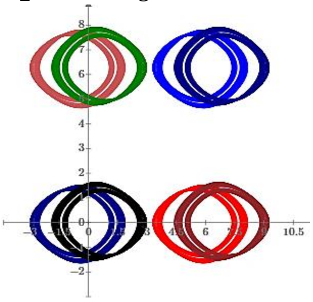

Рис. 6. Проекция на плоскость (x_1, x_2)

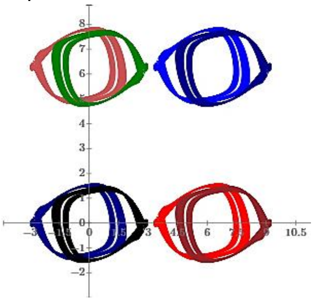

Рис. 7. Проекция на плоскость (x_1, x_4)

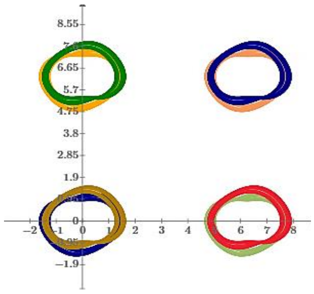

Рис. 8. Проекция на плоскость (x_2, x_3)

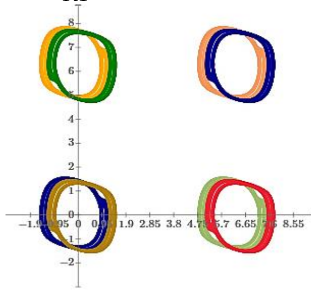

Рис. 9. Проекция на плоскость (x_3, x_4)

В работе[6] J.C. Sprott рассмотрел систему с разрывной нелинейностью, являющуюся модификацией системы Носе-Хувера. При этом он написал: "Why is this system interesting? It's time-reversible and dissipative with a strange multifractal attractor that is hidden but whose basin includes the whole of the three-dimensional space so that every initial condition goes to the attractor[7]". Аттрактор, рассмотренной J.C. Sprott системы, имеет показатели Ляпунова (0.228,0,-0.248) и размерность Каплана-Йорке 2.9194, что резко отличает ее от большинства трехмерных систем. J.C. Sprott заключает свою работу призывом: "I look forward

[6] Sprott J.C. Do We Need More Chaos Examples // Chaos Theory and Applications. 2020. Vol. 2. № 2. P. 1-3.

[7] Чем интересна эта система? Она обратима во времени и диссипативна со странным мультифрактальным аттрактором, который скрыт, но его бассейн притяжения включает в себя все трехмерное пространство, так что каждое начальное условие относится к аттрактору.

to additional, truly novel examples of chaotic systems[8]".

Пример 6. В диссертации построена гладкая система

$$\dot{x} = y,\ \ \dot{y} = -x - y\,\mathrm{arctg}(50z),\ \ \dot{z} = y^4 - \frac{a}{1+x^8}, a > 0,$$

которая имеет аналитическое решение $x(t) \equiv y(t) \equiv 0, z(t) = z(0) - at$.

Численное интегрирование системы с $a = 2$ и начальными условиями (0,2,0) визуализирует хаотический аттрактор. Эта система является смещаемой по переменной y, что позволяет сконструировать самовоспроизводящуюся систему, обладающую 1-D полосой аттракторов, путем замены переменной y на периодическую функцию этой переменной.

Произведя замену $y \to \mathrm{tg}y$, получим самовоспроизводящуюся систему:

$$\dot{x} = \mathrm{tg}y,\ \ \dot{y} = -x - \mathrm{arctg}(50z)\mathrm{tg}y,\ \ \dot{z} = (\mathrm{tg}y)^4 - \frac{a}{1+x^8}.$$

Эта система обладает 1-D полосой хаотических аттракторов.

В диссертации использованы некоторые идеи C. Li использования функции sign и функции абсолютного значения для удвоения сосуществующих аттракторов системы. С помощью этого подхода удается сконструировать систему с 2-D полосой скрытых аттракторов без состояний равновесия.

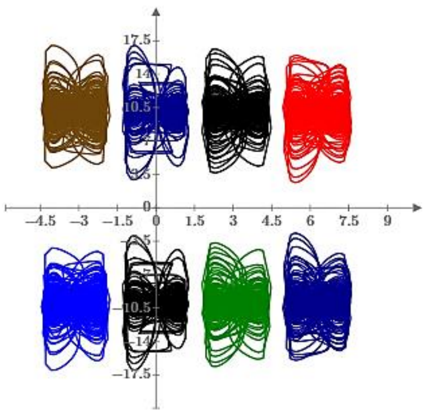

Рис. 10. 2-D полоса аттракторов системы (проекция на плоскость (y,z))

Для решений $(x(t), y(t), z(t))$ самовоспроизводящейся системы при $a = 2$, принадлежащим любому аттрактору, справедлива оценка $|z(t)| < 10$. Поэтому можно выполнить преобразование этой системы, которое одновременно сдвигает все ее аттракторы в полуплоскость $\{x, y, z : z > 0\}$ и генерирует их копию, симметричную относительно плоскости $\{x, y, z : z = 0\}$. Получим систему

$$\dot{x} = \mathrm{tg}y,\ \dot{y} = -x - \mathrm{arctg}(|50z| - 10)\mathrm{tg}y,\ \dot{z} = \left((\mathrm{tg}y)^4 - \frac{2}{1+x^8}\right)\mathrm{sign}(z).$$

Фрагмент 2-D полосы аттракторов этой системы представлен на рис. 10. Аттракторы имеют показатели Ляпунова (1.326,0,-1.329) и размерность Каплана-Йорке 2.998.

В **четвертой главе** мегастабильные хаотические системы, построенные автором в третьей главе диссертации, применяются для обеспечения безопасной связи на основе адаптивной синхронизации между парой идентичных систем.

Использована улучшенная схема адаптивной синхронизации (5) (рис. 11), связывающая линейные и нелинейные члены в динамической системе[9]

$$\dot{x} = F(x) + G(x)A + H(x)B \tag{5}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n$, $F(x) : R^n \to R^n$ – вектор нелинейной функции,

[8] Я с нетерпением жду дополнительных, по-настоящему новых примеров хаотических систем.

[9] Shoreh A.A.-H., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. New adaptive synchronization algorithm for a general class of complex hyperchaotic systems with unknown parameters and its application to secure communication // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2021. DOI:10.1016/j.physa.2021.126466.

$G(x): R^n \to R^{n\times m}$ – линейная матрица-функция, $H(x): R^n \to R^{n\times m}$ – нелинейная матрица-функция, $A=(A_1, A_2, \ldots, A_m)^T$, $\mathrm{B}=(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_m)^T \in R^m$ – постоянные векторы параметров модели, которые ассоциируются с линейными и нелинейными членами, соответственно.

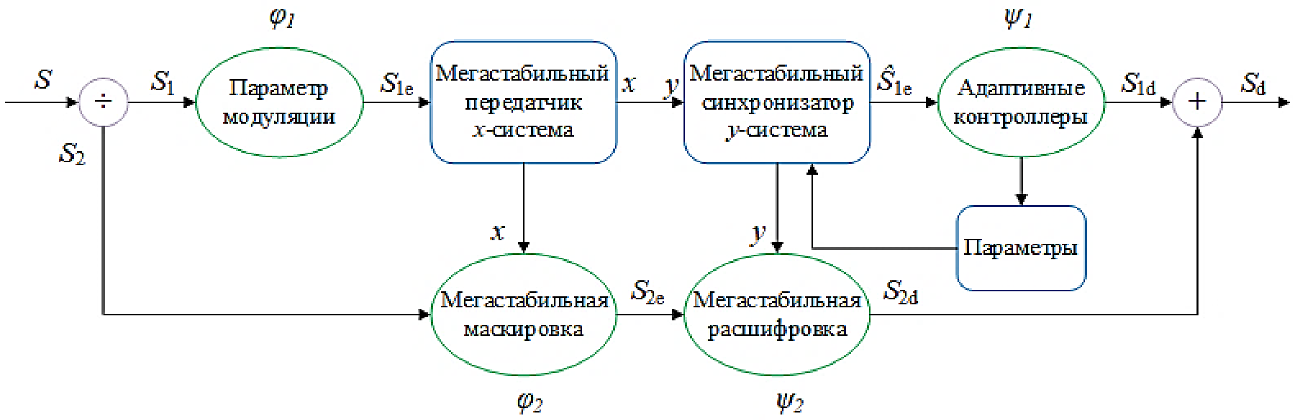

Рис. 11. Хаотическая мегастабильная схема безопасной связи

Схема включает следующие компоненты:

Системы передатчика и приемника: мегастабильная хаотическая система, которая генерирует переменные состояния $x(t) \in \mathrm{R}^n$ для передатчика и $y(t) \in \mathrm{R}^n$ для приемника.

Блок разделения: информационное сообщение $S(t)$ делится на два вектора битов S_1 и S_2, чтобы распределить его по двум каналам.

Блок модуляции параметров: первая часть сообщения S_1 непрерывной инвертируемой функцией φ_1 модулируется в параметры передатчика.

Мегастабильный хаотический маскирующий блок: вторая часть сообщения S_2 кодируется путем введения в нелинейную функцию φ_2: $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, которая для $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n$ непрерывна и имеет ассоциированную непрерывную функцию ψ_2 для $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n$: $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, такую, что $\psi_2(\mathrm{x}, \varphi_2(\mathrm{x}, S_2)) = S_2$. Функция φ_2 строится на основе хаотических состояний. В результате генерируется сигнал S_{2e}, который несет часть сообщения.

Каналы: хаотические состояния, содержащие параметры модуляции и закодированную информационную часть S_{2e}, передаются по двум каналам.

Блок синхронизации: на стороне приемника реализован блок синхронизации для получения сигналов состояния хаоса и предоставления необходимой информации для декодирования.

Блок адаптивных контроллеров: на стороне приемника строятся адаптивные контроллеры для отслеживания параметров системы передатчика. После синхронизации функция ψ_1 может быть использована для восстановления первой части переданного сообщения S_{1d}.

Блок мегастабильного хаотического декодирования: маскированная информация $S_{2e}(t)$ декодируется функцией $S_{2d}(t) = \psi_2(\mathrm{y}(t), S_{1e}(t))$.

Блок сбора: объединив два информационных сигнала S_{1d} и S_{2d}, получаем полное восстановленое сообщение S_d.

Используя схему адаптивной синхронизации (5) между парой идентичных мегастабильных систем, обладающих 4-D решеткой хаотических аттракторов из примера 5, удалось маскировать текст и изображение. Ведущая $x(t)$ и ведомая $y(t)$ системы с индексами d и r соответственно.

$$\dot{x}_{1d} = 1.82\sin x_{2d},\ \dot{x}_{2d} = 1.29\sin x_{3d},\ \dot{x}_{3d} = -1.42\mathrm{tg}\frac{x_{4d}}{2},$$

$$\dot{x}_{4d} = -1.82\sin x_{2d} - 1.29\sin x_{3d} + 4.26\mathrm{tg}\frac{x_{4d}}{2} + 1.8\sin\left[-x_{1d} - 3.64\sin x_{2d} - 1.29\sin x_{3d} - 2.272\mathrm{tg}\frac{x_{4d}}{2}\right].$$

$$\dot{x}_{1r} = 1.82\sin x_{2r} + \theta_1,\ \dot{x}_{2r} = 1.29\sin x_{3r} + \theta_2,\ \dot{x}_{3r} = -1.42\mathrm{tg}\frac{x_{4r}}{2} + \theta_3,$$

$$\dot{x}_{4r} = -1.82\sin x_{2r} - 1.29\sin x_{3r} + 4.26\mathrm{tg}\frac{x_{4r}}{2} + 1.8\sin\left[-x_{1r} - 3.64\sin x_{2r} - 1.29\sin x_{3r} - 2.272\mathrm{tg}\frac{x_{4r}}{2}\right] + \theta_4.$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$ – вектор-функция управления.

Пример 7. Рассмотрим сообщение $S(t)$ в виде изображения в градациях серого (рис. 12) размером 256 × 256. Это изображение может быть преобразовано в матрицу пикселей размером $m \times n$ следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mn} \end{pmatrix}$$

где $s(k,l)$ обозначает значение яркости изображения в диапазоне от 0 до 255 в пикселе в позиции (k,l), где k = 1,2,...,m, l = 1,2,...,n. Матрица пикселей преобразуется в одномерный вектор целых чисел. Пусть S = $[s_{11}, s_{21}, ..., s_{m1}, s_{12}, ..., s_{m2}, ..., s_{1n}, .., s_{mn}]$ = $[s_1, s_2, ..., s_{mn}]$. Последний вектор делится на два вектора $S_1 = [s_1, s_2, ..., s_k]$ и $S_2 = [s_{k+1}, s_{k+2}, ..., s_{mn}]$. Первый вектор вводится в параметры передающей системы, а второй - в ее хаотические состояния.

Для демонстрации эффективности предложенной схемы маскировки информации, было проведено численное моделирование с использованием среды MATLAB & Simulink. Переданные и восстановленные серые изображения показаны на рис. 12 и 14. На рис. 13 показано маскированное изображение.

В диссертации продемонстрирована надежность используемой стратегии безопасной связи при наличии добавляемого аддитивного белого гауссовского шума к градациям серого изображения.

Рис. 12. Оригинальное изображение

Рис. 13. Маскированное изображение

Рис. 14. Восстановленное изображение

Другой пример использования схемы адаптивной синхронизации между двумя идентичными хаотическими системами с 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов из примера 6, позволил маскировать аудиосигнал и видеосигнал. Ведущая и ведомая системы выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x_d} &= \mathrm{tg}y_d & \dot{x_r} &= \mathrm{tg}y_r + \theta_1 \\ \dot{y_d} &= -x_d - \mathrm{arctg}(|50z_d| - 10)\mathrm{tg}y_d & \dot{y_r} &= -x_r - \mathrm{arctg}(|50z_r| - 10)\mathrm{tg}y_r + \theta_2 \\ \dot{z_d} &= \left(\mathrm{tg}^4 y_d - \frac{2}{1+x_d^8}\right)\mathrm{sign}(z_d) & \dot{z_r} &= \left(\mathrm{tg}^4 y_r - \frac{2}{1+x_r^8}\right)\mathrm{sign}(z_r) + \theta_3 \end{aligned}$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ – вектор-функция управления.

Пример 8. Рассмотрим сообщения $S(t)$ являющееся аудиосигналом, который находится во временном интервале [0, 33], представленным на рис. 15. Для преобразования этого звукового сообщения в вектор чисел, как и в предыдущем примере, используется инструмент MATLAB "double". Первый вектор S_1 вводится в параметры передатчика. Второй часть сообщения, S_2 вставляется в хаотические состояния передатчика. Маскированное сообщение показано на рис. 16.

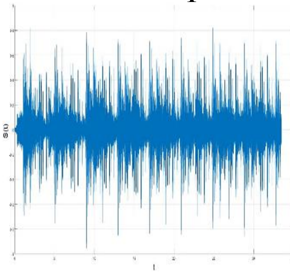

Рис. 15. Исходный сигнал $S(t)$

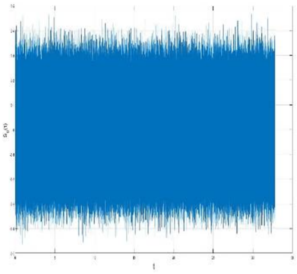

Рис. 16. Маскированный сигнал $S(t)$

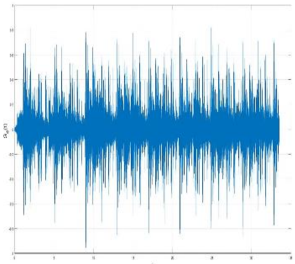

Рис. 17. Восстановленный сигнал $S(t)$

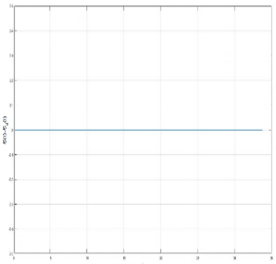

Рис. 18. Ошибка $S(t)$-$S_d(t)$

Собрав оба вектора S_{1d} и S_{2d}, мы получим весь восстановленный информационный сигнал S_d. Приемник может преобразовать этот вектор чисел обратно в текст, используя инструмент MATLAB ”char”. Восстановленное сообщение показано на рис. 17. Ошибка $S(t)$-$S_d(t)$ между переданным звуковым сигналом и восстановленным сигналом показана на рис. 18, как видно, исходный волновой сигнал точно восстановлен.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Предложен метод конструирования однопараметрических систем-хамелеонов в форме Лурье, то есть систем, которые обладают самовозбуждающимися или скрытыми аттракторами в зависимости от значений, принимаемых параметром. Приведены примеры сконструированных систем-хамелеонов.
2. Разработан метод конструирования n-мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих 1-D решеткой аттракторов (самовозбуждающихся или скрытых) на основе систем в форме Лурье, заключающийся в замене нелинейности на периодическую функцию. Такой подход, по сути дела, является преобразованием исходной системы в систему с угловой координатой. Продемонстрирована возможность построения мегастабильных систем с 1-D решеткой аттракторов, основываясь на многочисленных известных результатах для систем в форме Лурье с одной нелинейностью.
3. Предложен метод конструирования n-мерных мегастабильных хаотических систем, обладающих (n-1)-D решеткой аттракторов на основе систем в форме Лурье. Предложенный метод использует возможность преобразования системы в форме Лурье в систему каскадного типа, которая является смещаемой по переменным (*offset boostable*). При помощи замены некоторых переменных в такой системе на периодические функции этих переменных строятся системы с многомерной решеткой хаотических аттракторов-клонов.
4. С использованием синтеза подходов, предложенных во второй главе диссертации разработан метод конструирования n-мерных мегастабильных систем, обладающих n-D решеткой хаотических аттракторов. В диссертации впервые построена система четвертого порядка с 4-D решеткой хаотических аттракторов.

5. Разработан метод генерирования систем без состояний равновесия, содержащих 2-D полосу скрытых хаотических аттракторов размерности "почти 3", и обладающих аналитическими решениями на основе операции удвоения аттракторов (*attractor doubling operation*), предложенной C. Li.
6. Разработан и реализован в виде комплекса программ в пакете вычислений MATLAB алгоритм преобразования информации, передаваемой по каналам связи, на основе сконструированных в диссертации мегастабильных систем, обладающих хаотическими аттракторами, с помощью которого маскируются такие виды информации как текст, изображение в градациях серого, цветное изображение, аудиоинформацияия и видеоинформация.

Публикации автора по теме диссертации

1. Burkin I.M., Kuznetsova O.I. On some dynamical chameleon systems // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 973(1):012052. DOI:10.1088/1742-6596/973/1/01
2. Burkin I.M., Kuznetsova O.I. On some methods for generating extremely multistable systems // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 1368(4):042050 DOI:10.1088/1742-6596/1368/4/042050
3. Burkin I.M., Kuznetsova O.I. An Approach to Generating Extremely Multistable Chaotic Systems // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 262. №6. P. 779-789. DOI:10.1007/s10958-022-05856-2
4. Буркин И.М., Кузнецова О.И. Генерирование экстремально мультистабильных систем на основе систем в форме Лурье // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6(64). Вып. 4. С. 555-564. DOI:10.21638/11701/spbu01.2019.403
5. Буркин И. М., Кузнецова О. И. Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 105-117. DOI:10.22405/2226-8383-2021-22-1-105-117
6. Буркин И. М., Кузнецова О. И. Новая мегастабильная система с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 4. С. 360-368. DOI:10.22405/2226-8383-2021-22-4-361- 369
7. Кузнецова О. И. Применение мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов для обеспечения безопасной связи // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. Вып. 1. С. 89-103. DOI:10.22405/2226-8383-2023-24-1-89-103
8. Кузнецова О.И. Программа для шифрования информации с использованием мегастабильной системы с 4-D решеткой хаотических аттракторов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022665247, 30.08.22, 1 с.
9. Кузнецова О.И. Программа для шифрования информации с использованием мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых аттракторов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022666310, 30.08.22, 1 с.

Авторское редактирование

Подписано в печать 24.01.2024

Формат бумаги 70x100 1/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,3. Тираж 100 экз. Заказ 008к

Отпечатано в Издательстве ТулГУ. 300012, г. Тула, просп. Ленина, 95