

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тульский государственный университет»**

На правах рукописи

ФЕКЛИН Артём Александрович



**РАЗРАБОТКА МЕТОДА РАСЧЕТА ОБДЕЛОК ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ  
ТОННЕЛЕЙ, СООРУЖАЕМЫХ ВБЛИЗИ НАКЛОННОЙ ЗЕМНОЙ  
ПОВЕРХНОСТИ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОДАХ**

*Специальность: 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная  
аэрогазодинамика и горная теплофизика*

**диссертация  
на соискание ученой степени кандидата технических наук**

**Научный руководитель –  
д-р техн. наук, доцент  
Анциферов Сергей Владимирович**

Тула – 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ	14
1.1 Трещиноватость породного массива как причина его технологической неоднородности	14
1.2 Специальные способы строительства подземных сооружений как причина образования зон технологически неоднородных пород	15
1.2.1 Тампонаж и инъекционное укрепление пород	15
1.2.2 Цементация пород	17
1.2.3 Укрепление пород методами смолизации или силикатизации	28
1.2.4 Искусственное замораживание горных пород	30
1.3. Натурные и лабораторные исследования напряженно-деформированного состояния конструкций подземных сооружений, возведенных в технологически неоднородных породах	31
1.4 Аналитические методы расчета обделок тоннелей, сооруженных в технологически неоднородных породах	33
1.4.1 Методы расчета крепи вертикальных стволов и обделок тоннелей глубокого заложения, учитывающие наличие зон технологически неоднородных пород	35
1.4.2 Аналитические методы расчета обделок тоннелей мелкого заложения, сооружаемых в технологически неоднородных породах	43
1.5 Численные исследования напряженно-деформированного состояния подземных конструкций	47
Выводы по главе 1	55
2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	57
2.1 Основные теоретические положения, принятые при математическом моделировании взаимодействия элементов геомеханической системы.	
Описание расчетной схемы	57

2.2 Постановка плоской задачи теории упругости. Граничные условия	60
Выводы по главе 2	63
<b>3 РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО</b>	<b>64</b>
3.1 Граничные условия краевой задачи ТФКП	64
3.2 Определение функций $f_m(t_{1,m})$ и главных векторов усилий, действующих на контурах $L_{1,m}$	66
3.3 Представления комплексных потенциалов и преобразованные граничные условия	68
3.4 Аналитическое продолжение потенциалов $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$ , $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ через границу полуплоскости	71
3.5 Преобразование граничных условий	75
3.6 Получение соотношений, связывающих коэффициенты разложений комплексных потенциалов в смежных областях	81
3.7 Соотношения, связывающие коэффициенты разложений потенциалов в областях $S_{2,m}$ ( $m = 1, \dots, N$ ) и в среде $S_0$	89
3.8 Формирование и решение систем линейных алгебраических уравнений	91
3.9 Итерационный процесс решения задачи	94
3.10 Вычисление напряжений	96
Выводы по главе 3	100
<b>4 АЛГОРИТМ И ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА</b>	<b>102</b>
4.1 Алгоритм расчёта	102
4.2 Проверка точности удовлетворения граничных условий	116
4.3 Примеры расчёта с использованием разработанной программы	117
4.3.1 Расчёты обделок параллельных тоннелей, иллюстрирующие влияние на их напряженное состояние угла наклона земной поверхности, взаимного расположения тоннелей и зон укрепленных пород	117

4.3.2 Расчёты обделок двух параллельных автодорожных тоннелей	122
Выводы по главе 4	153
<b>5 ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ОБДЕЛОК ТОННЕЛЕЙ, СООРУЖЕННЫХ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОДАХ</b>	<b>155</b>
5.1 Общие положения	155
5.2 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от величины модуля деформации пород	158
5.3 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от величины коэффициента бокового давления пород	164
5.4 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от расстояния между центрами поперечных сечений тоннелей	166
5.5 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от ширины породного целика	168
5.6 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от угла наклона земной поверхности	170
Выводы по главе 5	172
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>175</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b>	<b>178</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Сооружение закрытым способом комплексов подземных сооружений в непосредственной близости к земной поверхности в районах, отличающихся сложным рельефом, в ряде случаев требует применения специальных способов строительства. Как правило, использование специальных способов строительства приводит к изменению физико-механических свойств пород в областях вокруг каждого из тоннелей, приводя к возникновению зон технологически неоднородных пород.

Результаты натурных исследований и лабораторных испытаний, полученные различными авторами, позволили сделать вывод о существенном влиянии наклонной земной поверхности, компактного расположения тоннелей, наличия вокруг выработок зон технологически неоднородных пород на формирование напряженно-деформированного состояния массива пород и конструкций подземных сооружений. Основные влияющие факторы приводят к перераспределению напряжений, включающему, в том числе, изменение величин максимальных напряжений во вмещающем массиве пород и в обделках тоннелей, влияющих на их прочность и несущую способность.

При сооружении автомобильных и железнодорожных магистралей, линий метрополитена могут возникать геомеханические процессы, обусловленные близко расположенной наклонной земной поверхностью, особенностями физико-механических свойств пород и взаимным расположением тоннелей, приводящие к потере устойчивости склона, вмещающего выработки, а так же повреждениям обделок тоннелей и потере их несущей способности.

Следствием недостаточного объёма имеющихся теоретических и экспериментальных данных о геомеханических процессах, происходящих в массивах пород, в том числе технологически неоднородных, отсутствия установленных закономерностей влияния наклонной земной поверхности на напряженно-деформированное состояние компактно расположенных подземных сооружений является использование при расчётах на этапе проектирования

необоснованных коэффициентов надежности по нагрузке и материалу, по условиям работы конструкций, а так же коэффициентов надежности по ответственности сооружений.

Очевидно, что проектирование комплексов подземных сооружений, близко расположенных к наклонной земной поверхности, связано с необходимостью выполнения оценки несущей способности и устойчивости как вмещающего массива пород, включая возникающие зоны технологически неоднородных пород, так и прочности подземных конструкций. В актуальных нормативно-технических документах, регламентирующих проектирование и строительство подземных сооружений, рекомендации по учету влияния перечисленных выше факторов отсутствуют.

Ввиду сложности задач, возникаемых в геомеханике и механике подземных сооружений, невозможности их строгого аналитического решения в общем случае, для расчёта подземных конструкций используются пакеты специализированных компьютерных программ, реализующих численные методы получения решений соответствующих задач геомеханики. Наибольшее распространение при проектировании подземных сооружений получили программные комплексы, в основу которых положен метод конечных элементов, обладающие определенной универсальностью и общностью, позволяющие достаточно эффективно выполнять моделирование напряжённо-деформированного состояния подземных конструкций и массива пород как в плоской, так и в пространственной постановках.

Следует отметить, что данные расчётов, полученные с помощью численных методов, в силу известных причин требуют дополнительной проверки, оценки их адекватности путем сравнения с результатами решения задач механики сплошных сред строгими аналитическими методами в частных случаях.

До настоящего времени аналитических методов расчёта обделок параллельных тоннелей, сооружаемых вблизи склона, с учётом наличия вокруг выработок зон технологической неоднородности, не имелось, поскольку от-

существовали необходимые для их разработки решения соответствующих задач геомеханики и механики подземных сооружений.

Современный уровень развития теории аналитических методов расчета подземных конструкций, базирующейся на математическом моделировании взаимодействия обделок протяжённых параллельных тоннелей и окружающего массива пород с использованием математического аппарата теории функций комплексного переменного (ТФКП), позволяет получить новое строгое решение плоской задачи теории упругости о равновесии весомой линейно деформируемой полуплоскости с наклонной границей, ослабленной конечным числом подкреплённых круговых отверстий, вокруг которых выделены концентрические зоны из материалов с отличающимися деформационными характеристиками. Полученное решение положено в основу разработанного аналитического метода расчета обделок параллельных тоннелей, сооружённых вблизи наклонной земной поверхности в технологически неоднородных породах.

Разработка указанного метода расчёта является актуальной задачей, обладающей научной новизной и практической ценностью, поскольку, в конечном итоге, использование метода позволит получить новые данные о закономерностях формирования напряжённого состояния элементов исследуемой геомеханической системы.

**Целью работы** является разработка аналитического метода расчета обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооружённых вблизи наклонной земной поверхности в технологически неоднородных породах, при действии гравитационных сил. В основу метода положены результаты математического моделирования взаимодействия элементов единой деформируемой геомеханической системы "массив пород с наклонной земной поверхностью - зоны технологически неоднородных пород - обделки параллельных тоннелей".

**Идея работы** заключается в математическом моделировании процессов взаимодействия конструкций подземных сооружений и окружающего их

породного массива при наличии зон пород с отличающимися деформационными характеристиками, включающее решение соответствующей задачи геомеханики, позволяющем определить напряженное состояние неоднородного массива пород и подземных конструкций.

Метод расчета позволяет учитывать основные факторы, оказывающие существенное влияние на формирование напряжённо-деформированного состояния элементов геомеханической системы:

- преобладающий угол наклона земной поверхности к горизонту;
- физико-механические и деформационные характеристики массива пород в естественном состоянии и в зонах технологически неоднородных пород;
- неравнокомпонентное поле начальных напряжений в массиве пород, обусловленных гравитационными силами;
- количество взаимовлияющих параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, центры которых произвольным образом расположены относительно поверхности;
- размеры поперечных сечений выработок и зон технологически неоднородных пород вокруг них;
- размеры поперечных сечений обделок тоннелей и деформационные характеристики материалов обделок;
- последовательность проходки тоннелей по отношению к возникновению зон технологически неоднородных пород (предварительное или последующее укрепление пород) и отставание возведения обделок от забоя выработки;
- реологические свойства массива пород в рамках теории линейной наследственной ползучести.

Применение разработанного метода расчета в практике проектирования будет способствовать научно обоснованному выбору технологий возведения тоннелей; определению параметров зон укрепленных пород, конструкций, вида и материала применяемых обделок; сравнительному анализу влия-

ния последовательности проходки выработок на формирование напряжённого состояния обделок; обеспечению допустимых расстояний между тоннелями при компактном расположении тоннелей.

При разработке математической модели формирования напряженно-деформированного состояния элементов геомеханической системы "массив пород с наклонной земной поверхностью - зоны технологически неоднородных пород - обделки параллельных тоннелей" выполнено обоснование применяемой расчетной схемы задачи теории упругости, позволяющей учесть различные технологические этапы сооружения тоннелей; выполнена постановка и сформулированы граничные условия плоской задачи теории упругости; решение задачи теории упругости после перехода к соответствующей краевой задаче ТФКП получено с применением соответствующего математического аппарата, предусматривающего использование комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили. Полученные результаты позволили разработать соответствующий метод расчёта; составлены алгоритм и программа расчёта, предназначенная для применения при практическом проектировании и в научно-исследовательских целях.

Использованные **методы исследования** включают анализ научных публикаций, посвященных применению технологий строительства подземных сооружений, приводящих к возникновению зон технологически неоднородных пород, и расчету подземных конструкций, расположенных вблизи земной поверхности; математическое моделирование взаимодействия элементов геомеханической системы "массив пород с наклонной земной поверхностью - зоны технологически неоднородных пород - обделки параллельных тоннелей", постановку и решение соответствующей задачи теории упругости; использование для решения задачи теории комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили и функций комплексного переменного (ТФКП); компьютерное моделирование на основе разработанного программного обеспечения; анализ и сравнение результатов с данными, полученными другими авторами в частных случаях.

Сформулированы следующие **основные научные положения**, выносимые на защиту:

- математическая модель взаимодействия обделок параллельных тоннелей, сооружаемых вблизи склона, с массивом пород, включающем зоны технологической неоднородности вокруг выработок, базирующаяся на аналитическом решении соответствующей задачи теории упругости, позволяет определять напряжённо-деформированное состояние элементов рассматриваемой геомеханической системы с учётом наличия зон технологически неоднородных пород, наклонной земной поверхности и взаимного влияния тоннелей;

- наличие вокруг выработок, пройденных вблизи склона, зон технологически неоднородных пород оказывает существенное влияние на формирование напряжённого состояния массива пород с наклонной земной поверхностью и конструкций подземных сооружений;

- установление закономерностей формирования напряженного состояния обделок параллельных тоннелей, сооружаемых вблизи склона, с учётом зон технологически неоднородных пород возможно на основе применения разработанного метода расчёта, комплексно учитывающего влияние основных факторов - рельеф земной поверхности, компоновку тоннелей, наличие вокруг выработок зон технологически неоднородных пород, физико-механические свойства материалов;

- зоны пород, подверженных инъекционному укреплению, вокруг выработок, не испытывающих значительного влияния земной поверхности или соседних подземных сооружений, приводят, как правило, к снижению напряжений, возникающих в обделке. Появление таких зон при компактном расположении тоннелей вблизи наклонной земной поверхности может приводить к увеличению значений максимальных напряжений в обделке.

**Новизна основных научных и практических результатов** представленного диссертационного исследования заключается в следующем:

- разработанная математическая модель, использующая основные положения геомеханики и механики подземных сооружений, адекватно описывающая взаимодействие элементов геомеханической системы "массив пород с наклонной земной поверхностью - зоны технологически неоднородных пород - обделки параллельных тоннелей";

- постановка соответствующей задачи теории упругости для весомой полубесконечной среды с наклонной границей, ослабленной произвольно расположенными подкрепленными круговыми отверстиями, вокруг которых располагаются зоны технологически неоднородных пород с граничными условиями, отражающими совместное деформирование элементов системы и наличие в среде неравнокомпонентного поля начальных напряжений;

- строгое решение поставленной задачи теории упругости, полученное с использованием математического аппарата ТФКП - функций Колосова-Мухелишвили, аналитического продолжения потенциалов через границу полуплоскости, свойств рядов Лорана;

- аналитический метод расчета обделок комплекса параллельных тоннелей, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности в технологически неоднородных породах, позволяющий учесть основные факторы, влияющие на напряженное состояние подземных конструкций;

- закономерности формирования напряженного состояния обделок и массива пород с учётом влияния угла наклона земной поверхности; размеров поперечных сечений зон технологически неоднородных пород и обделок тоннелей; соотношений деформационных характеристик пород в естественном и технологически изменённом состояниях и материалов обделок; различного взаимного расположения параллельных тоннелей вблизи склона.

Полученные научные результаты соответствуют паспорту специальности 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэродинамика и горная теплофизика (п.п. 1, 2, 4, 5, 11, 13).

**Практическое значение работы** определяется:

- составленным алгоритмом расчета обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом в технологически неоднородных породах вблизи наклонной земной поверхности;
- разработанным программным обеспечением, позволяющим на этапе проектирования подземных сооружений оценить несущую способность массива пород в естественном и изменённом состояниях, а так же прочность обделок тоннелей;
- установленными закономерностями формирования напряженного состояния массива пород и обделок тоннелей при различных сочетаниях основных влияющих факторов.

**Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций** подтверждается корректной постановкой задачи исследования; использованием фундаментальных теоретических положений механики сплошной среды, геомеханики и механики подземных сооружений; применением адекватной математической модели, включающей постановки и решения соответствующих задач теории упругости; использованием апробированного математического аппарата ТФКП; достижением высокой точности выполнения граничных условий решенной задачи теории упругости; практически полным совпадением результатов с данными аналитических решений частных задач и удовлетворительным качественным и количественным согласованием результатов с известными решениями аналогичных задач численными методами, а так же результатами натурных исследований и лабораторных испытаний, полученными другими авторами.

**Личный вклад автора** заключается в разработке математической модели взаимодействия обделок параллельных тоннелей, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности в технологически неоднородном массиве пород; в постановке и решении соответствующей задачи теории упругости; в составлении алгоритма и программного обеспечения разработанного метода расчета; в установлении на основе результатов ком-

пьютерного моделирования новых закономерностей формирования напряженного состояния обделок тоннелей и окружающего их массива пород.

**Апробация работы** выполнялась путём изложения и обсуждения ее основных положений на научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава ТулГУ (Тула, 2020 - 2023); Межрегиональных научных сессиях молодых исследователей: "Промышленная революция 4.0: взгляд молодежи" (Тула, 2020 - 2022); Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики "Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики" (Тула, 2021 - 2023); Международном научном симпозиуме «Неделя Горняка» (Москва, 2021 - 2023); Китайско-Российском форуме молодых исследователей в области геотехники и подземных сооружений (Москва, 2022); Всероссийской научной конференции с международным участием "Геодинамика и напряженное состояние недр земли" (Новосибирск, 2021, 2023); XII Всероссийской конференции "Молодежная наука в развитии регионов" (Березники, 2022, 2023); XVI Всероссийской молодежной научно-практической конференции "Проблемы недропользования" (Екатеринбург, 2022).

**Публикации.** По теме научно-квалификационной работы опубликовано 15 печатных работ, из них 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК, и 12 в рецензируемых изданиях.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа изложена на 198 страницах машинописного текста, состоит из введения, 5 разделов, содержащих 35 рисунков и 18 таблиц, заключения и списка литературы.

## 1 АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Опыт проектирования, сооружения и эксплуатации объектов подземной инфраструктуры различного назначения в сложных горно-геологических свидетельствует о том, что обеспечение надежного и безопасного их функционирования возможно с применением специальных мероприятий, повышающих устойчивость массива пород и несущую способность обделок [90, 158, 161].

### 1.1 Трещиноватость породного массива как причина его технологической неоднородности

Возникновение технологически неоднородных пород вокруг тоннелей, влияющих на напряженно-деформированное состояние массива и обделок подземных сооружений влияние оказывают особенности рельефа земной поверхности; физико-механические свойства пород; глубина заложения тоннелей; применяемые технологии - буровзрывной (БВР) или щитовой способ проходки; использование тоннелепроходческих механизированных комплексов (ТПМК); компоновка выработок в комплексе тоннелей; тампонажные работы, конструкции и материалы используемых обделок и т.д.

Например, при проходке горных выработок с использованием БВР [63, 57] возникают зоны интенсивной трещиноватости размером до 0,3...1,5 м вглубь массива. Разрыхление пород уменьшает устойчивость обнажений, способствует значительным деформациям земной поверхности и выработок. Породы в такой зоне практически теряют сцепление и работают вместе с крепью за счет сил трения, изменяя характер и величину внешних нагрузок на обделку.

В работе [119] приведены результаты исследования влияния технологической трещиноватости массива на напряженно-деформированное состояние пород и обделок тоннелей - в предположении о радиальном направлении

трещин, исходящих от контура выработки; установлено, что на контуре выработки каждая трещина скачкообразно снижает величину напряжений.

Баклашовым И.В. и Картозией Б.А. [20] предложен учёт влияния технологической трещиноватости массива пород на устойчивость выработок введением переменного модуля деформации для каждого слоя пород, образующих зону, выполнена численная оценка смещений контура выработки.

## 1.2 Специальные способы строительства подземных сооружений

как причина образования зон технологически неоднородных пород

Для сохранения целостности окружающего массива пород при проходке тоннелей в малосвязных неустойчивых или в крепких трещиноватых и обводненных породах [154] и уменьшения негативного воздействия на близко расположенные наземные и подземные коммуникации применяются специальные способы строительства подземных сооружений.

Специальные способы строительства (тампонаж, инъекционное укрепление, искусственное замораживание пород и т.д.) приводят к локальным изменениям физико-механических свойств вмещающих пород на время выполнения работ по строительству и эксплуатации объекта, оказывающим существенное влияние на процесс формирования напряженно-деформированного состояния породного массива и подземных конструкций, а также способствующим водоподавлению в обводнённых породах (грунтах).

### 1.2.1 Тампонаж и инъекционное укрепление пород

Инъекционные растворы на основе различных вяжущих, обладающие свойствами однородности, нерасслаиваемости, достаточной проникающей способностью, незначительной усадкой тампонажного камня, коррозионной стойкостью к подземным водам, твердеют после введения в грунт, обеспечивая прочность грунтоцемента. В зависимости от используемых растворов методы укрепления разделяют на цементацию, силикатизацию, смолизацию; по

методу введения в грунт – обычную инъекцию и струйную. Рекомендуемые растворы и области их применения приведены в таблице 1.1 [130].

Таблица 1.1 - Инъекционные растворы и области их применения

Основа растворов	Растворы	Область применения
Цементы и глины	Цементно-глинистые, цементно-песчаные, цементно-песчано-глинистые	Сильно трещиноватые породы с шириной раскрытия трещин 10 мм и более
	Цементно-коллоидные	Тонкотрещиноватые породы с незначительным (менее 0,3 мм) раскрытием трещин и большими скоростями фильтрации
Силикаты	Цементно-силикатные	Породы со средней и мелкой трещиноватостью обводнённые
	Водный силиката натрия	Породы с микропроницаемостью, тонкотрещиноватые
	Щавелево-алюмосиликатные	Тонкотрещиноватые карбонатные породы
	Силикатно-фтористокислые	Средне- и тонкотрещиноватые породы со значительными скоростями фильтрации
	Кремнефтористоводородные	Зоны дробления с карбонатным заполнителем
	Силикатно-органические	Трещиноватые породы с песчаным или песчано-глинистым заполнителем трещин
Смолы	Карбамидные смолы	То же
	Акриловые смолы, полиуретан	Средне- и тонкотрещиноватые породы обводнённые
	Акриловые смолы, полиизоцианатно-силикатные	Водонасыщенные зоны разлома, заполненные древесно-песчаным заполнителем с глинистыми включениями

Нагнетание тампонажных растворов в водонасыщенные грунты с естественной трещиноватостью приводит к заполнению трещин и пор, способствующему предотвращению попадания воды в выработку, при этом на грунт воздействует дополнительный гидростатический напор [62, 65, 66].

Глинизация, используемая преимущественно для гидроизоляции выработок, как причина возникновения технологической неоднородности грунта, в дальнейшем рассматриваться не будет.

### 1.2.2 Цементация пород

Наибольший вклад в развитие метода цементации грунтов внесли Аллас Э.Э. [1], Безрук В.М. [25, 92], Бройд И.И. [31], Заславский Ю.З. [63], Ибрагимов М.Н. [62], Камбефор А. [65], Насонов И.Д. [90], Ребиндер П.А. [99], Щуплик М.Н. [161] и др.

При цементации грунта применяются растворы на основе цементных вяжущих. Укрепление в зависимости от протяженности зон неустойчивых грунтов выполняют либо с дневной поверхности, либо из забоя выработки в один или несколько этапов, фазы укрепления и проходки чередуются.

Цементация по характеру воздействия на грунт разделяется на заполнительную при достаточно больших зазорах между обделкой и породой и укрепительную [122, 133], необходимость которой определяется размером трещин и свойствами пород, окружающих тоннель.

Заполнительная цементация выполняется для заполнения зазоров между обделкой и породой до 0,5 м, заполнения и закрепления природных трещин глубиной до 0,3...0,4 м, пустот или карстовых полостей, обеспечивая тем самым совместную работу обделки с массивом. Материал заполнительной цементации имеет модуль деформации не ниже модуля деформации пород.

При выполнении укрепительной цементации глубина скважин, их расположение и направление назначаются в зависимости от формы сечения тоннеля, конструкции возводимой обделки, внутреннего напора, давления подземных вод и физико-механических свойств пород - трещиноватость; направление напластований и наличие трещин; водоносность пород.

Глубина инъекционных скважин в напорных туннелях составляет 0,6...0,8 от его диаметра, но не менее глубины зоны разуплотнения пород. Направление скважин, как правило, перпендикулярно к контуру обделки.

Укрепительная цементация окружающих тоннель пород производится после окончания работ по заполнительной цементации.

При цементации вокруг обделки образуются кольцевые зоны грунта с различающимися деформационными характеристиками [38, 39, 63, 67, 69, 84, 92 - 95, 120]:

- зона из материала дополнительной цементации преимущественно в сводовой части туннеля (заполнены переборы грунта), внутренний радиус которой совпадает с внешним радиусом обделки;
- зона разуплотненного или ослабленного грунта (при БВР), т.е. зона грунта с ухудшенными деформационными характеристиками;
- зона грунта, подверженного укрепительной цементации, т.е. с улучшенными деформационными характеристиками;
- зона грунта в естественном ненарушенном состоянии.

При обычной инъекции происходит заполнение трещин и пустот под действием силы тяжести укрепительного раствора.

Современная технология струйной цементации грунтов появилась практически одновременно в Японии, Италии и Англии, распространившись повсеместно, в том числе - в отечественном тоннелестроении. Она предусматривает укрепление грунта в результате его разрушения струей и интенсивного перемешивания с инъекционным раствором под высоким давлением.

Инъекционные работы выполняются с учетом конкретных физико-механических характеристик пород, определяемых натурными или лабораторными способами - плотности и гранулометрического состава, трещиноватости и пористости, фильтрационных свойств грунта и гидростатического давления. Это позволяет выбрать материалы для инъекционного раствора, обеспечивающего проектные физико-механические свойства укрепленного грунта. Границы применения инъекционной и струйной цементации грунтов, следуя [130], приведены в таблице 1.2.

Глубина нарушенной зоны (зоны разуплотнения) скальных грунтов вокруг выработки, возникающей вследствие проходки туннеля, устанавливается по данным натурных наблюдений или аналогам, при их отсутствии для грунтов с коэффициентом крепости по Протождяконову  $f < 4$  по формуле

$$h_1 = \frac{b + 2h \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)}{2f}, \quad (1.1)$$

где  $h$  - высота выработки, м;  $b$  - пролет выработки, м;  $\varphi$  - угол внутреннего трения  $\varphi = \operatorname{arctg}(f)$  [38, 39].

Таблица 1.2 - Границы применения цементации грунтов

Способы укрепления грунтов	Характеристики закрепляемого грунта		Рекомендуемый тип и вид инъекционного раствора		Назначение растворов
	Тип грунтов	Коэффициент фильтрации грунта, м/сут			
Обычная инъекция	Скальные, полускальные, дисперсные, крупнообломочные, крупно- и среднезернистые пески	От 50 до 100	Цементные	Цементные, с инертными и химическими добавками разного назначения, пенорастворы, растворы на основе тонкодисперсных цементов	Повышение прочности, устойчивости и водонепроницаемости грунта
			Цементно-глинистые	Цементоглинистые с добавками разного назначения	
	Грунты любые, преимущественно мелкозернистые и пылеватые пески, супеси	От 0,3 и выше	Растворы на основе тонкодисперсных минеральных вяжущих (типа Микродур)	На основе тонкодисперсных цементов с пластификатором и ускорителем схватывания	Повышение прочности, устойчивости водонепроницаемости грунта
	Грунты связные суглинки, глины супеси	От 0,3 и выше	Цементно-глинистые	Растворы на основе цемента с добавками минеральных материалов	Восстановление потерь объема грунта при просадках
Струйная цементация	Несвязные грунты (гравий, песок и т.п.) и связные грунты (суглинки и глины)	Не регламентируется	Цементные	Цементные, цементно-бentonитовые, с силикатом натрия и химическими добавками	Повышение прочности, устойчивости и водонепроницаемости грунта

В грунтах с коэффициентом крепости  $f \geq 4$  глубина нарушенной области вычисляется по формуле

$$h_1 = k_a b, \quad (1.2)$$

где коэффициент  $k_a$  определяется по таблице 1.3.

Проникающая способность тампонажных цементных растворов зависит от крупности частиц твердой фазы, водоцементного соотношения, применения пластифицирующих добавок, концентрации нагнетаемых растворов, способа и давления нагнетания. В [93] определено предельное значение глу-

бины проникновения растворов, превышение которой не влияет на изменение несущей способности зон технологически неоднородного грунта.

Таблица 1.3 - Зависимость  $k_a$  от коэффициента крепости  $f$  грунтов

Коэффициент крепости грунта $f$	Коэффициент $k_a$ для грунтов		
	очень слаботрещиноватых	слаботрещиноватых	средне- и сильно трещиноватых
4	0,2	0,25	0,3
от 5 до 8	0,1	0,2	0,25
10 и более	0,05	0,1	0,15

В работах [21, 65 - 67, 83 - 85, 87, 105 - 107, 122] рассматриваются вопросы, связанные с особенностями упрочнения грунтов (пород) в зависимости от степени их трещиноватости. Отмечается, что для повышения устойчивости выработок, сооружаемых с применением БВР в неустойчивых грунтах, обладающих естественной трещиноватостью, необходимо заполнение дополнительных трещин размером в десятки миллиметров в приконтурной части массива. Инъекционные растворы омоноличивают разрушенные породы приконтурной зоны, обеспечивая плотный контакт грунта с возводимой обделкой, в результате чего обделка и вмещающий массив грунта формируют единую деформируемую систему. Нагнетание раствора позволяет не только скрепить между собой отдельные области грунта разрушенной зоны, но и предохранить их от дальнейшего разрыхления и воздействия грунтовых вод.

Для упрочнения грунтов чаще всего используются цементно-песчаные растворы, имеющие высокую адгезию с окружающими грунтами и создающие плотные грунтоцементные зоны. При давлении нагнетания 0,2...0,3 МПа эти растворы способны проникать и заполнять трещины приконтурного массива с раскрытием более 3...5 мм. Нагнетаемый в заобделочное пространство цементнопесчаный раствор проникает вглубь массива на расстояние до 0,6...1,0 м от контура выработки. В тоннелях большого сечения цементация

выполняется с повышенным давлением нагнетания через инъекционные скважины глубиной до 6 м, обеспечивая проникновение цементного раствора на расстояние до 1,5...3 м от скважины вглубь массива [133].

Отставание цементационных работ от забоя туннеля при монолитных обделках не превышает 50...60 м, а при сборных конструкциях крепи - не более чем на 3...5 колец тоннельной обделки. При прохождении туннеля вблизи дневной поверхности мероприятия по цементации должны быть усилены.

Выполнение опытного укрепления пород, производимое непосредственно на строительной площадке, позволяет определить фактический радиус и физико-механические характеристики материала образующихся зон пород.

В [154, 161] отмечается, что сооружение тоннелей в слабоустойчивых и неустойчивых грунтах без применения специальных способов, а также строительство тоннелей мелкого заложения в городских условиях [36, 104] при наличии многочисленных подземных коммуникаций весьма затруднительны. Это замедляет темпы строительства, приводит к его удорожанию; ухудшает экологическую обстановку вблизи площадки строительства.

В таких условиях весьма эффективной является технология струйной цементации, использующая энергию высоконапорной струи либо воды, либо цементного или цементно-бentonитового раствора, выполняемая из забоя выработки и имеющая целый ряд преимуществ. Технология струйной цементации предусматривает бурение с определенным интервалом скважин по контуру будущего туннеля, погружение в них мониторов с насадками, через которые под давлением подаются вода и цементный раствор. Под воздействием струи грунты размельчаются и смешиваются с нагнетаемым раствором, образуя достаточно плотный, прочный и водонепроницаемый монолит, позволяя укреплять практически любые грунты - от гравийных отложений до мелкодисперсных глин и илов. После твердения образуется грунтоцемент, обладающий повышенными физико-механическими и противofильтрационными свойствами. Этот способ, как правило, не влечет за собой деформаций

земной поверхности, обычных при водопонижении и замораживании грунтов. Глубина закрепления грунтов достигает 40 и более метров.

В зависимости от физико-механических характеристик грунтов и требований к параметрам укрепления применяются методы струйной цементации [31, 166] - одно- («Jet-1») для крупно- и среднезернистых песков, двух-компонентные («Jet-2») для мелкозернистых песков, связных и других видов грунтов и трехкомпонентный («Jet-3»), предусматривающий размыв грунта водовоздушной струей под высоким давлением.

Эффективность инъекционных работ, конфигурация, размеры зон укрепления, прочностные и фильтрационные свойства материалов устанавливаются с использованием нормативных документов [38, 39, 96, 105 - 109, 123 - 130] в зависимости от применяемых технологий, проникающей способности нагнетаемых растворов, размеров трещин и пор, степени их заполнения.

После выполнения работ по инъекционному укреплению определяют физико-механические и фильтрационные свойства грунта - модуль деформации, коэффициент бокового давления, предел прочности, угол внутреннего трения, коэффициенты сдвига, фильтрации и т.д.

Данные о прочностных и деформационных характеристиках укрепленного грунта в зависимости от его вида приведены в таблице 1.4 [130].

Таблица 1.4 – Характеристики метода струйной цементации грунтов

Группа грунтов	Вид укрепляемого грунта по ГОСТ 25100	Характеристики укрепленного грунта	
		Прочность на сжатие, МПа	Модуль деформации, МПа
Связные и несвязные грунты	Глина	0,3 – 0,5	60 – 450
	Суглинок	1,5 – 5,0	500 – 2000
	Супесь, песок пылеватый и мелкий	5 – 10	2000 – 5000
	Песок крупный и средней крупности	5 – 15	3000 – 10000
	Песок гравелистый	5 – 20	4000 – 20000

В работах [59, 60] приведены результаты лабораторного определения механических и прочностных характеристик грунтоцемента, полученные для грунтов, наиболее распространенных в геологическом строении г. Москвы. Результаты выполненных исследований приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5 - Характеристики грунтоцемента

Тип грунта	Модуль деформации грунтоцемента E, МПа	Предел прочности грунтоцемента R <sub>b</sub> , МПа
Глина	500	2,0
Суглинок	1000	6,0
Супесь	2000	10,0
Песок	3500	14,0
Гравий	5500	19,0

В таблице 1.6 приведены результаты исследования, выполненного итальянской фирмой «Родио» [83], по определению пределов прочности на сжатие и модулей деформации укрепленных грунтов.

Таблица 1.6 - Механические характеристики укрепленных грунтов

Тип грунта	Прочность на сжатие, МПа	Модуль деформации, МПа
Глинистый ил	0,3-0,5	60-450
Песчаный ил	1,5-5,0	500-2000
Илистый песок	5-10	2000-5000
Песок с гравием	5-15	3000-10000
Гравий с песком	5-20	4000-20000

Упрочнение песчаных грунтов происходит за счет уплотнения, поэтому основными факторами, влияющими на его результат являются форма частиц и гранулометрический состав грунта, наличие пылевато-глинистых частиц, а глинистых грунтов - за счет изменения структурных связей, уменьшения пористости, отжатия из пор воды и воздуха.

Укрепительная цементация способствует консолидации грунта и уменьшению его анизотропии; повышению прочностных и деформационных характеристик; снижению гидростатического давления подземных вод на обделку тоннеля и их агрессивного воздействия; уменьшению фильтрационных потерь воды через обделки гидротехнических тоннелей в окружающие породы; обоснованному снижению толщины применяемых обделок.

В [3, 155 - 157] приведены результаты выполнения цементационных работ на строительстве деривационного тоннеля Ингурской ГЭС длиной 16,5 км с внутренним диаметром 9,5 м. Тоннель пройден в известняках с коэффициентом крепости  $f = 6...8$  по Протодяконову. Гидростатическое давление воды в тоннеле 1,65 МПа. Обделка выполнялась в виде выравнивающей бетонной облицовки толщиной 0,5 м с цементацией пород на глубину до 6 м.

В работе [84] описано применение струйной цементации грунтов при реконструкции шахты «Заполярная» в Воркуте, которая предусматривала строительство наклонного ствола (угол наклона составляет  $12^\circ$  с горизонтом), соединяющего горные транспортные выработки с расположенной на поверхности обогатительной фабрикой «Печорская». Геологические условия осложнены вечномерзлыми грунтами, которые до глубин 35...40 м представлены талыми, в песчано-гравийной толще наблюдается наличие без- или слабо-напорных грунтовых вод. До глубины 70...80 м массив представлен песками от пылеватых до гравелистых с прослоями супесей, суглинков и гравия. Ниже песков залегают глины от мягко- до тугопластичной консистенции.

До глубины 6,0 м ствол был построен открытым способом, дальнейшее строительство выполнялось с применением струйной цементации грунтов через скважины, пробуренные с земной поверхности. Участок строительства наклонного ствола длиной 65 м был разделен на 7 заходов, для каждой из которых на основе анализа напряженно-деформированного состояния грунтобетонного ограждения с использованием программного комплекса «ALTERRA» [190], реализующего метод конечных элементов (МКЭ). Анализ напряженного состояния выполнялся с использованием коэффициент запаса

$$k = \frac{C + \sigma_0 \operatorname{tg} \varphi}{\tau}, \quad (1.3)$$

вычисляемого с применением критерия Мизеса-Шлейхера-Боткина [65]. В формуле (1.3):  $\sigma_0$  - нормальное,  $\tau$  - касательное напряжения на октаэдрической площадке;  $C$ ,  $\varphi$  - соответственно сцепление и угол внутреннего трения грунтоцемента, определяемые с использованием пределов прочности грунтоцемента при сжатии  $\sigma_{сж}$  и растяжении  $\sigma_p$  по формулам

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{\sigma_{сж} - \sigma_p}{\sigma_{сж} + \sigma_p}, \quad C = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{сж} - \sigma_p}{\sigma_{сж} + \sigma_p}. \quad (1.4)$$

Предел прочности грунтоцемента при сжатии в песчаных грунтах принят равным 10,0 МПа, в гравийных грунтах – 12,0 МПа, для предела прочности при растяжении принято эмпирическое соотношение  $\sigma_p = 0,1\sigma_{сж}$ .

Распределение коэффициента запаса для четверти расчетной области в силу осевой симметрии задачи в одном из сечений ограждающей конструкции показано на рисунке 1.1, из которого следует, что наиболее опасное напряженное состояние (с наименьшим значением коэффициента  $k$ ) наблюдается вблизи внутреннего контура ограждения.

Толщина зоны укрепления обеспечивала заданный коэффициент запаса прочности  $k$  не менее 1,5.

В [84] приведены результаты, полученные при проходке перегонных тоннелей на участке от ст. «Бажовская» до ст. «Геологическая» метрополитена в г. Екатеринбург. При строительстве левого тоннеля в неустойчивых пластичных глинах наблюдался аварийный выпуск грунта в забой, приведший к оседанию земной поверхности. Трасса правого тоннеля располагается под городской магистралью и пересекает подходную выработку, пройденную в пластичных глинах. Для укрепления грунтов и минимизации возможных деформаций была применена струйная цементация путём создания экранов из пересекающихся грунтоцементных колонн.

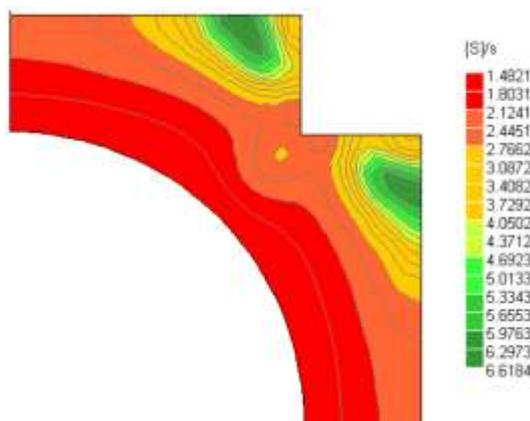


Рисунок 1.1 - Распределение значений коэффициента запаса прочности  $k$  в поперечном сечении зоны технологически неоднородного грунта

В работе [183] проанализированы проблемы, возникшие при проектировании и строительстве на автомагистрали Эгнатия Одос в Греции 73 участков двух сближенных тоннелей общей протяженностью 100 км. Породы горных склонов, через которые проходили трассы тоннелей, частично находились в неустойчивом состоянии. Авторами приведены результаты инженерно-геологических изысканий, выполненных до начала строительства. Были установлены физико-механические характеристики грунта, определено напряженно-деформированное состояние массива в естественном состоянии.

В процессе строительства параллельных тоннелей Sigma 3, сооружаемых в скальном грунте вблизи склона, произошёл оползень, приведший к перемещению тоннелей вниз по склону, хотя результаты исследований трассы, выполненные до начала работ, не выявили признаков нестабильности грунтового массива в естественном состоянии. Длина тоннелей 230 м; ширина каждого - 12 м, расстояние между продольными осями - 30 м. Для предотвращения распространения оползня выше по склону из забоя тоннелей были выполнены укрепительная цементация в сочетании с дополнительным анкерным креплением, а так же закрепленная анкерами свайная стена. Эти мероприятия привели к повышению устойчивости склона.

На рисунке 1.2 дано изображение порталов тоннелей (рисунок 1.2 а) и поперечное сечение тоннелей (рисунок 1.2 б)

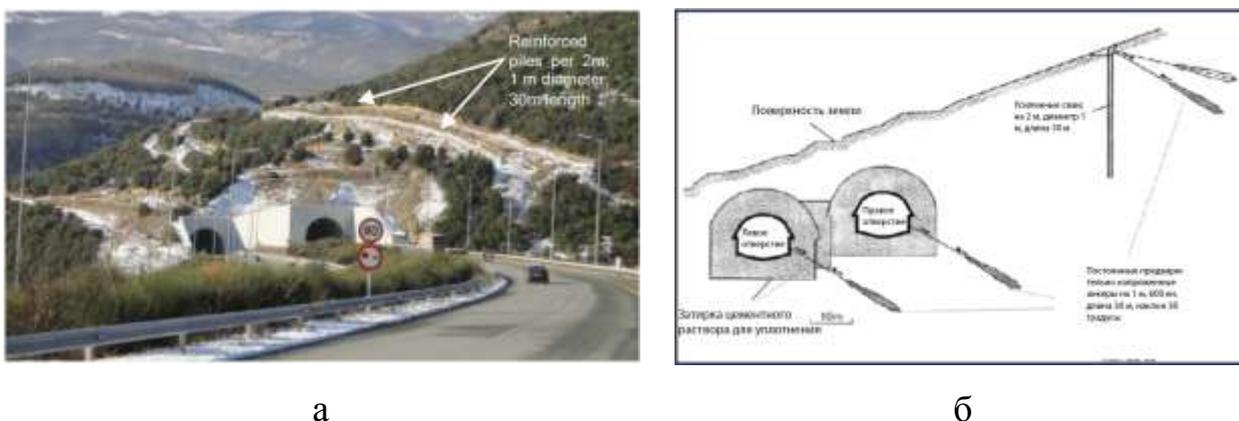


Рисунок 1.2 - Тоннели Sigma 3: а - порталы; б - поперечное сечение склона

Чтобы остановить оползневые процессы и стабилизировать склон, выполнены мероприятия по закреплению массива грунта выше по склону и его укреплению вокруг тоннелей. Была возведена подпорная стена выше по склону, прианкеренная к горному массиву, а так же выполнено инъекционное укрепление пород вокруг обделок тоннелей. Данные действия способствовали изменению деформационных характеристик массива пород и повысили его несущую способность и коэффициент устойчивости склона.

Выполненные авторами исследования включали серию параметрических численных анализов неустойчивости склона в плоской постановке. Как отмечают авторы использование трехмерных исследований существенно ограничено высокой стоимостью проведения расчетов.

Широкому внедрению струйной цементации, особенно для глинистых грунтов, мешает недостаточная изученность сопровождающих ее физических процессов. Отсутствуют так же методики, позволяющие определять технологические параметры укрепления в конкретных условиях. Выбор параметров технологического процесса струйной цементации осуществляется эмпирическим путем по аналогии с выполненными ранее работами на сходных объектах, что приводит к определенной непредсказуемости результатов цементации.

ции для конкретных горно-геологических условий; в ряде случаев - к некачественному выполнению работ; необходимости выполнения мероприятий по поддержанию и ремонту созданной грунтоцементной области; невозможности достижения проектных характеристик прочности и водонепроницаемости грунтоцемента.

Очевидно, что в квазиоднородных грунтах упрочнение происходит в цилиндрических зонах, в то время как в неоднородных грунтах форма уплотняемого объема грунта может отличаться от круговой. Фактический диаметр зоны изменяется в зависимости от типа грунта, величины давления подачи инъекционного раствора при различной влажности и плотности.

Следует отметить, что в настоящее время практически отсутствуют научно-обоснованные методики и специализированные программные продукты для проектирования подземных конструкций, возводимых с применением струйной цементации грунтов.

### 1.2.3 Укрепление пород методами смолизации или силикатизации

В ряде случаев для повышения устойчивости выработок на грунты воздействуют с помощью инъекций специальных химических растворов (смолизация или силикатизация), которые при взаимодействии реагентов между собой и с химически активной частью грунтов приводят к необратимому и долговечному изменению их физико-механических свойств [96]. Эти методы особенно эффективны в слабых водоносных грунтах ненарушенной структуры, характеризующихся относительно высокой водопроницаемостью с коэффициентами фильтрации 0,3...10 м/сут., они так же применяется для песчаных, крупнообломочных, трещиноватых скальных и полускальных грунтов [38, 39]. Исключение составляют пески, содержащие более 3...4% глинистых частиц или карбонатов [49, 121].

Смолизация выполняется фенольными, мочевино-формальдегидными, фурановыми или акриловыми растворами с соответствующими отвердителя-

ми. Силикатизация, как метод укрепления песчаных грунтов, предусматривает использование растворов силиката натрия и соответствующих кислот.

В настоящее время созданы композиционные материалы, имеющие органическую, органоминеральную или полимерную основы, в том числе - вспененные, обладающие широким диапазоном реологических и физико-механических характеристик, эффективно выполняющие укрепление грунтов при различных инженерно-геологических условиях [96]. Для достижения необходимого эффекта укрепления грунтов опытным путем устанавливаются составы растворов, различающиеся соотношением компонентов, минеральных и химических добавок, и последовательность их нагнетания в грунт. Состав рекомендуемых растворов в зависимости от способа закрепления и характеристик грунта приведены в таблице 1.7 [100, 109, 121, 154].

Таблица 1.7 - Виды применяемых химических растворов

Способы укрепления грунтов	Характеристики закрепляемого грунта		Рекомендуемый тип и вид инъекционного раствора		Назначение растворов
	Тип грунтов	Коэффициент фильтрации грунта, м/сут			
Смолизация	Любые грунты (мелкозернистые, пылеватые пески, супеси)	От 0,3 и выше	Растворы смол	Карбамидные и полимерные смолы, полимерные вспенивающиеся	Повышение прочности, устойчивости, водонепроницаемости грунта
Силикатизация	Скальные трещиноватые, крупнообломочные, среднезернистые и крупнозернистые, мелкозернистые пески, лессы	От 5 до 80	Двух-растворная силикатизация	Силикат натрия, хлористый кальций	Повышение водонепроницаемости и прочности трещиноватых дисперсных грунтов
	Грунты любые, преимущественно среднезернистые и мелкозернистые, пылеватые пески, лессы	От 0,5 до 20	Одно-растворная силикатизация	Растворы силиката натрия с отвердителями (растворами кислот и щелочей)	

Экологические требования к применяемым технологиям строительства существенно ограничивает применение полимерных смол.

Применение цементных растворов с силикатом натрия, бентонитовой глиной или гелями с отвердителями обеспечивают достижение высоких прочностных характеристик укрепленных пород [129]. Например, использование силикатных растворов с различными отвердителями увеличивает предел прочности пород от 0,3 до 1,0 МПа; применение двухрастворной силикатизации и однорастворной рецептуры с отвердителем кремнефтористоводородной кислотой [130] позволяет достичь еще более высоких прочностных характеристик грунта - от 2,0 МПа и выше.

В условиях повышенной сейсмичности, а также при больших притоках агрессивных грунтовых вод используются растворы на основе битумов, отличающиеся дешевизной используемого материала и возможностью механизации, однако они обладают меньшей проникающей способностью.

#### 1.2.4 Искусственное замораживание горных пород

Одна из причин возникновения зон технологически неоднородных пород вокруг выработок - искусственное замораживание грунтового массива вокруг подземного сооружения, получившее распространение в России и за рубежом [161] и выполняемое как до начала, так и в процессе проходческих работ, а так же при эксплуатации тоннелей. При замораживании грунтов из-за возникающих отрицательных температур в массиве создается водонепроницаемое ледопородное ограждение, противостоящее давлению грунта и подземных вод. Материал ограждения имеет существенно отличающиеся физико-механические свойства. Искусственное замораживание применяется в водопроницаемых грунтах с коэффициентами фильтрации не более 10 м/сут., а также в трещиноватых скальных породах с притоком вод более 50 м<sup>3</sup>/ч.

Создание ледопородного ограждения вокруг тоннеля предусматривает бурение скважин до начала проходческих работ с интервалом от 0,8 до 2 м по периметру контура выработки, в которых размещаются замораживающие колонки для подачи хладоносителя.

Проектирование процесса замораживания грунтов предусматривает определение размера поперечного сечения ледопородного ограждения; оценку его физико-механических характеристик; выполнение корректировки параметров обделок и используемых материалов.

Имеющиеся результаты теоретических и экспериментальных исследований позволяют методу замораживания выступать в роли надежного и универсального метода, обеспечивающего выполнение работ как в условиях плотной городской застройки, так и на горнорудных предприятиях. Однако, как отмечается в [161], за последние годы объёмы строительства подземных сооружений с применением способа замораживания резко сократились.

### 1.3. Натурные и лабораторные исследования напряженно-деформированного состояния конструкций подземных сооружений, возведенных в технологически неоднородных породах

Натурные исследования, применяемые для оценки напряженно-деформированного состояния массива пород и обделок тоннелей, включают как механические [3, 23, 24, 37, 42, 68, 89, 157, 163, 165], так и геофизические методы [21, 40, 41, 79, 80, 176] требуют выполнения большого объема предварительных работ. Измерения производятся систематически в течение длительных периодов времени в отдельных точках поверхности обделок или массива пород. Полученная информация о деформациях и напряжениях в конструкциях может иметь случайный характер, поэтому для её обработки используются различные статистические методы.

Экспериментальные исследования методами, использующими оптически активные [43, 46, 58, 86, 101 - 103, 131, 153] или эквивалентные материалы [27 - 29, 43, 45, 81, 82], имеют большое значение, т.к. в ряде случаев являются единственным способом получения информации о характере поведения подземных объектов в реальных условиях. Они используются также

для оценки достоверности результатов, получаемых теоретическими методами, что служит совершенствованию последних [33].

Достоинством метода фотоупругости является возможность выполнения многократных испытаний на одной модели с изменением интенсивности нагрузок, если она не доведена до разрушения; использование принципа суперпозиции; определённая наглядность получаемых результатов.

Для применения этого метода требуется специальное оборудование и оптически чувствительные материалы, из которых изготавливается модель. Проведение экспериментов при моделировании различных компоновочных решений и действующих нагрузок связано с большой длительностью и высокой стоимостью работ. Применение метода фотоупругости ограничено реальным диапазоном изменения механических характеристик оптически активных материалов [139, 153]. Результаты, получаемые в результате исследования, требуют дополнительной обработки и интерпретации.

В настоящее время для исследования поведения обделок тоннелей и окружающего породного массива используются пространственные модели подземных сооружений, выполненные в определённом масштабе из специально подобранных эквивалентных материалов. Применение к используемым материалам и объектам положений теории подобия позволяет получить как визуальную, так и количественную оценку моделируемых процессов [27 - 29, 81, 82]. Построенные модели в процессе эксперимента можно довести до разрушения, что позволяет получить информацию об особенностях работы реальной конструкции, в том числе - определить сочетания и оценить величины разрушающих нагрузок. Для моделирования комплексов параллельных подкрепленных выработок в зоне технологически неоднородного грунта вблизи склона применение этого метода значительно усложняется.

При моделировании сложных подземных конструкций возможно применение комбинированных методов моделирования [162, 163], использующих преимущества различных лабораторных методов. Например, поляризационно-оптическим методом исследуется напряжённое состояние моде-

ли обделки, изготовленной из оптически чувствительного материала, помещенной в эквивалентный материал, моделирующий массив пород.

#### 1.4 Аналитические методы расчета обделок тоннелей, сооруженных в технологически неоднородных породах

До 80-х годов прошлого века отечественный опыт проектирования конструкций подземных сооружений, в том числе - мелкого заложения, предусматривал применение метода расчета [30], известного под названием "метод Метрогипротранса", и его модификаций [19, 44]. В основу метода были положены подходы строительной механики и механики грунтов. В расчетной схеме обделки рассматривались как статически неопределимые шарнирные стержневые системы или рамы вне массива грунта, нагруженные априори известными внешними силами. Расчет состоял из трёх этапов - априорное задание внешних нагрузок на стержневую систему, исходя из различных гипотез; определение внутренних усилий (продольных и поперечных сил, изгибающих моментов) классическими методами сопротивления материалов и строительной механики; оценка несущей способности конструкции. При определении несущей способности массива пород обделка рассматривается как балка на упругом основании, испытывающая действие внешних "активных" нагрузок и упругого "пассивного" отпора со стороны основания. Подобные расчёты обеспечивали завышенные запасы прочности конструкций, что приводило к перерасходу материалов.

Развитие теории методов расчета конструкций подземных сооружений, внедрение в практику их проектирования компьютерных технологий позволили использовать методы расчета обделок тоннелей, основанные на аналитических или численных решениях задач механики подземных сооружений, в первую очередь - в линейной постановке, о совместной работе подземной конструкции с массивом пород как элементов единой деформируемой системы. Применение этих методов регламентировано [125 - 127, 107].

Достоинствами аналитических методов расчетов являются:

- использование теоретических положений геомеханики, механики подземных сооружений и механики сплошных сред;
- применение математических моделей взаимодействия конструкций подземных сооружений и окружающего массива пород, относительно адекватно учитывающих влияние основных факторов;
- строгие математические решения соответствующих задач;
- возможность алгоритмизации процесса расчёта и компьютерной реализации разработанных методов в виде программ для ЭВМ;
- простота процесса подготовки и ввода исходных данных, по сравнению с применением специализированных пакетов программ, реализующих численные методы;
- возможность эффективного выполнения многовариантных расчетов с обеспечением любой достаточно высокой точности результатов;
- удовлетворительное согласование с результатами натурных и лабораторных исследований.

К недостаткам аналитических методов следует отнести:

- необходимость получения новых решений задач механики сплошных сред для конкретных геомеханических ситуаций;
- использование достаточно сложного математического аппарата;
- как следствие, получение решений для отдельных задач механики подземных сооружений, расчетные схемы которых удовлетворяют первым двум условиям;
- обусловленная этим "узкая" направленность разработанных аналитических методов.

В настоящее время, в связи с интенсивным развитием теории методов расчёта, наличием современных средств вычислительной техники и их внедрением в проектную деятельность, внимание к аналитическим методам расчета усиливается, что продиктовано, в первую очередь, необходимостью верификации и валидации результатов, получаемых численными методами.

Значительный вклад в развитие теории аналитических методов расчета конструкций подземных сооружений различного поперечного сечения, мелкого и глубокого заложения, возводимых в технологически неоднородных грунтах, внесла группа специалистов, длительное время возглавляемая проф. Фотиевой Н.Н.

В качестве единой методологической основы разработанных методов были использованы теоретические положения геомеханики [18 - 20, 33, 35, 40, 41, 132], механики подземных сооружений [19, 33, 159] и механики сплошных сред [4, 88, 110]. Они позволили разработать для каждого рассматриваемого случая адекватную математическую модель, базирующуюся на рассмотрении конструкций подземных сооружений и окружающего массива грунта как элементов единой деформируемой геомеханической системы с учетом индивидуальных особенностей взаимодействия и формирования граничных условий на линии контакта сред с различными деформационными характеристиками при действии статических нагрузок и сейсмических воздействиях землетрясений.

Результаты разработки соответствующих методов расчета представлены в публикациях Фотиевой Н.Н., Булычева Н.С., Савина Н.И., Саммаля А.С., Анциферова С.В., Климова Ю.И., Латышева В.А., Капуновой Н.А., Анциферовой Л.Н., Гоманчука О.Г., Князевой С.В., Деева П.В., Грибанова В.Б. и др.

#### 1.4.1 Методы расчета крепи вертикальных стволов и обделок тоннелей глубокого заложения, учитывающие наличие зон технологически неоднородных пород

Одной из первых работ, посвящённых методам расчёта многослойной крепи горных выработок (обделок тоннелей) круглого поперечного сечения, можно считать [34], в которой представлен оригинальный метод Булычёва Н.С., основанный на использовании коэффициентов передачи нагрузок, и по-

зволяющий учесть наличие зон технологически неоднородного грунта. Метод расчёта реализован в виде компьютерной программы РК1, получившей широкое признание среди проектировщиков подземных сооружений. Упомянутый метод был включён в ряд ведомственных нормативных документов и используется до настоящего времени [33, 107, 108].

Результаты разработки методики расчета крепи стволов, сооружаемых с применением комплексного метода тампонажа трещиноватых горных пород, выполненных Савиным Н.И. под руководством Фотиевой Н.Н., приведены в [149]. Авторами предложена математическая модель, учитывающая образование зоны затампонируемых пород эллиптической формы поперечного сечения вследствие направленной трещиноватости массива пород в естественном состоянии. Расчетная схема поставленной задачи теории упругости представлена на рисунке 1.3. Она содержит бесконечную весомую линейно-деформируемую среду с эллиптическим включением из материала с отличающимися деформационными характеристиками, ослабленным круговым отверстием, в свою очередь, подкрепленным концентрическим кольцом.

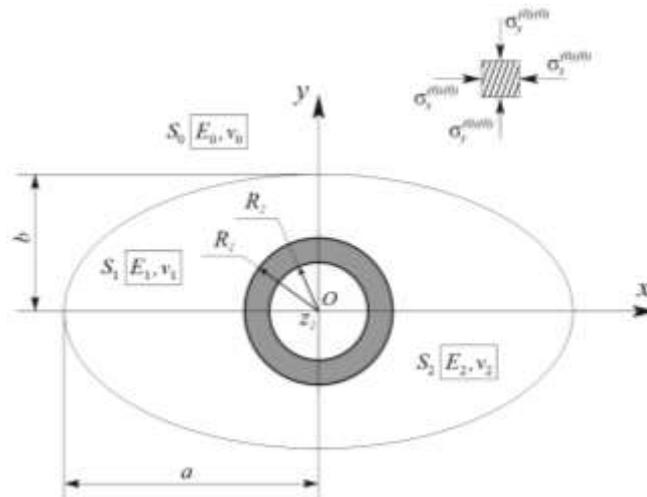


Рисунок 1.3 - Расчетная схема задачи Фотиевой Н.Н., Савина Н.И. [149]

Центр отверстия расположен на пересечении осей эллипса. В бесконечной среде, моделирующей массив пород с удельным весом  $\gamma$ , на расстоя-

нии  $H$  от земной поверхности (глубина расчетного сечения ствола достаточно большая настолько, что влиянием поверхности на напряженное состояние кольца, моделирующего крепь, можно пренебречь) существует равнокомпонентное поле начальных напряжений, отвечающих за действие собственного веса пород, а также давления подземных вод.

С использованием комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили получено строгое аналитическое решение плоской задачи теории упругости для кусочно-однородной среды, составленной из трех областей, моделирующих крепь, эллиптическую в поперечном сечении укрепленную зону и массив пород, материалы которых обладают различными деформационными и фильтрационными характеристиками.

В процессе решения краевой задачи ТФКП использовано конформное отображение, свойства интегралов типа Коши и комплексных степенных рядов [76, 88]. В результате сформирована система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений комплексных потенциалов, отвечающих за напряженно-деформированное состояние среды, моделирующей массив пород в естественном состоянии. Найденные коэффициенты разложений комплексных потенциалов в смежных областях позволяют вычислить компоненты напряженного состояния материалов рассматриваемых областей - крепи, зоны затампонированных пород и пород в естественном состоянии.

Методика позволяет производить расчет на действие давления подземных вод с учётом возможной фильтрации воды через завесу и крепь. Авторами на основе анализа решения задачи для случая круговой формы поперечного сечения завесы выявлены условия существования экстремального характера зависимости напряжений в крепи от степени упрочнения пород. Для случаев водонепроницаемой завесы или крепи исследованы зависимости напряженного состояния конструкции от относительной толщины завесы при разной степени упрочнения пород и разных отношениях модулей сдвига пород в естественном состоянии и материала крепи. Установлены также зави-

симости предельной относительной толщины завесы, дальнейшее увеличение которой практически не влияет на напряжённое состояние крепи. Результаты численного эксперимента позволили получить приближенные формулы для определения максимальных значений напряжений на внутреннем контуре поперечного сечения крепи для оценки прочности конструкций, не прибегая к расчетам на ЭВМ.

Удовлетворительное согласование с результатами решений частных задач, лабораторных и натурных измерений дало возможность применения методики для расчета крепи различных стволов, сооружаемых с использованием тампонирования пород, а также при проектировании крепи стволов зон закрепления тектонических разломов Северо-Муйского тоннеля БАМ.

В [112, 113, 118, 150, 151, 172, 181] представлен метод расчета обделок тоннелей и крепи горных выработок произвольного поперечного сечения (с одной осью симметрии), разработанный Саммалем А.С. и Фотиевой Н.Н. Расчетная схема приведена на рисунке 1.4.

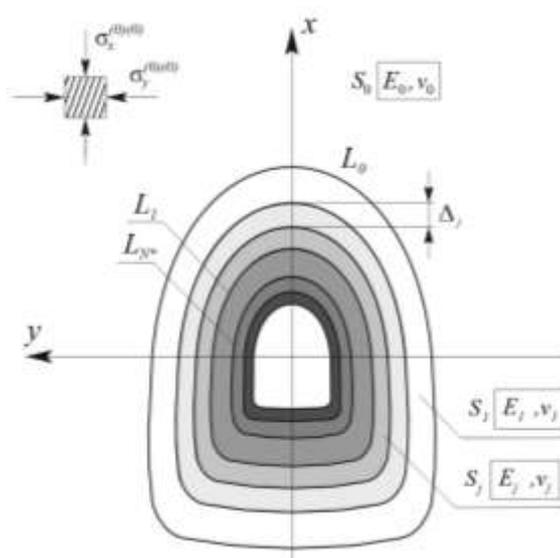


Рисунок 1.4 - Расчётная схема задачи для выработки произвольного поперечного сечения

В основу метода было положено решение задачи теории упругости с приведенной выше расчетной схемой. Оно получено с использованием функ-

ций Колосова-Мухелишвили, теории конформных отображений и рядов Лорана. Метод позволяет выполнять расчеты конструкций на действие внешнего давления подземных вод с учетом фильтрации воды через укрепленную зону и обделку. Авторами установлены закономерности формирования напряжённого состояния обделок транспортных тоннелей - железобетонной, металлобетонной и набрызгбетонной в сочетании с анкерами, сооруженных с применением укрепительной цементации пород или ослабленных в результате применения БВР.

Этот метод получил развитие в работах [174, 71], в которых опубликованы решения плоских квазистатических задач теории упругости при граничных условиях, отражающих действие длинных продольных  $p$ - и поперечных  $s$ - сейсмических волн, а также тектонические воздействия на обделку тоннеля некругового поперечного сечения, сооруженного в зоне предварительно укрепленных пород.

При нагнетании упрочняющего раствора в массив грунта через пробуренные в обделке тоннеля скважины возникает локальное давление на обделку, приводящее к появлению дополнительных напряжений и усилий в конструкциях, уменьшая их несущую способность, а в ряде случаев приводя к частичному разрушению. В работах [77, 78, 148, 173] приведена математическая модель взаимодействия обделок тоннелей с массивом пород при нагнетании в массив упрочняющего раствора, позволяющая свести решение пространственной задачи к решению задачи, использующей эквивалентную плоскую расчётную схему (рисунок 1.5).

Метод расчёта использован при проектировании обделок ряда автодорожных тоннелей и деривационных тоннелей.

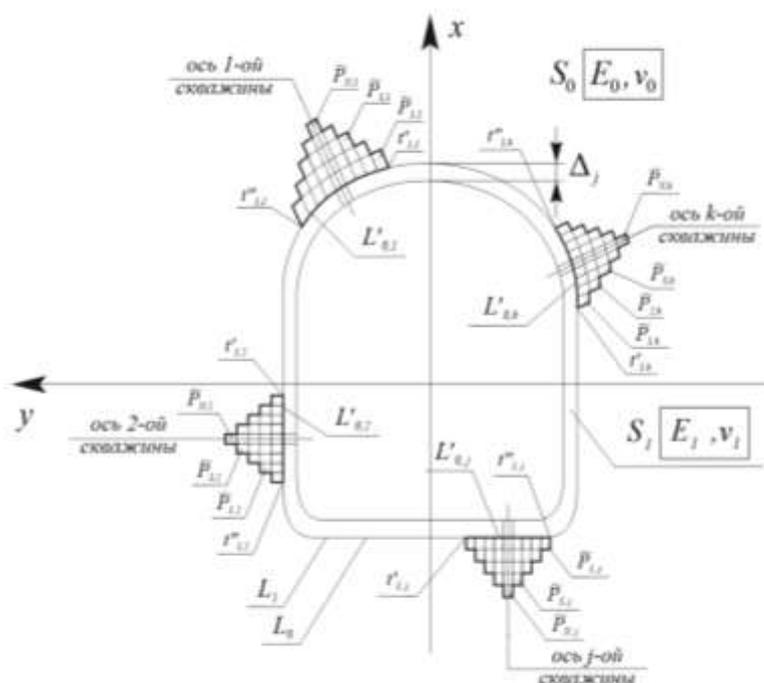


Рисунок 1.5 - Расчётная схема задачи об учёте локального давления укреплённого раствора на обделку

В работе [147] приведено описание математической модели формирования напряженного состояния многослойных обделок комплекса взаимодействующих параллельных тоннелей глубокого заложения кругового поперечного сечения, на основе которой разработан метод, позволяющий выполнять расчёты обделок тоннелей, сооружаемых с применением укрепительной цементации при статических нагрузках и сейсмических воздействиях землетрясений. Расчетная схема задач о действии статических нагрузок приведена на рисунке 1.6.

Получены строгие аналитические решения соответствующих краевых задач ТФКП о равновесии бесконечной многосвязной линейно-деформируемой кусочно-однородной области, содержащей произвольное число круговых отверстий, подкрепленных многослойными кольцами из материалов, имеющих различные деформационные характеристики. Предложенная расчетная схема применима для участков комплексов достаточно протяженных параллельных тоннелей глубокого заложения (расстояние от

продольной оси поперечного сечения наибольшего в сечении тоннеля до земной поверхности не менее чем в 3 раза превышает его диаметр).

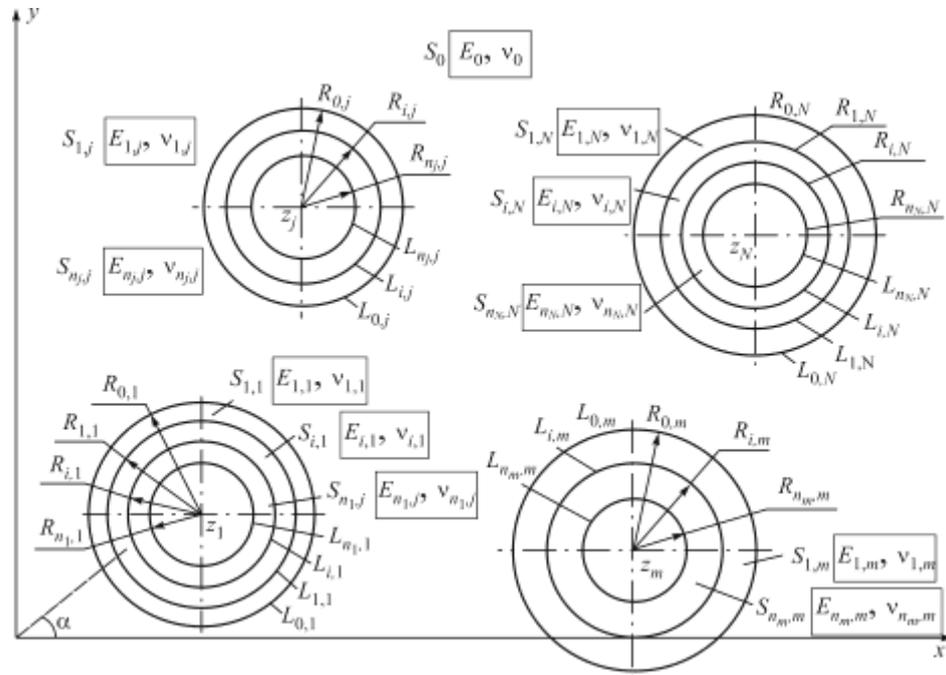


Рисунок 1.6 - Расчетная схема для многослойных обделок тоннелей глубокого заложения

При расчёте учитываются основные факторы, оказывающие влияние на напряженное состояние обделок - число тоннелей; их взаимное расположение; глубина заложения и размеры поперечных сечений каждого из тоннелей; количество и толщины слоев, выделяемых в обделках; деформационные характеристики материалов слоев обделок; характеристики начальных полей напряжений в массиве, обусловленных собственным весом грунта, давлением грунтовых вод, тектоническими процессами в грунтовом массиве; реологические свойства грунтов; очередность проходки тоннелей и отставание возведения слоев обделок в каждом из тоннелей.

Для решения задач был применен модифицированный Фотиевой Н.Н. и Анциферовым С.В. метод Шермана Д.И. [160]. Достоверность результатов подтверждается точностью выполнения граничных условий, удовлетворительным совпадением результатов с данными, полученными другими авто-

рами в частных случаях, согласованием результатов с данными натурных наблюдений и моделирования методом фотоупругости. Метод расчета, реализованный в виде комплекса компьютерных программ, использован при выполнении многовариантных расчетов на этапе проектирования тоннелей станции "Спортивная" Ленинградского метрополитена и турбинных водоводов Рогунской ГЭС.

В работах [116, 11, 51] установлены закономерности формирования напряженного состояния массива пород вокруг двух параллельных неподкреплённых или подкреплённых выработок глубокого заложения, сооружаемых в общей зоне укрепленного грунта. Расчётная схема задачи приведена на рисунке 1.7. Сформулированы граничные условия задачи теории упругости для бесконечной весомой линейно-деформируемой области, ослабленной двумя круговыми отверстиями, подкреплёнными концентрическими кольцами, вокруг которых имеется зона из материала с отличающимися деформационными характеристиками. Поперечное сечение зоны укреплённых грунтов имеют круговые очертания. Действие собственного веса массива грунта в естественном и укрепленном состояниях моделируется полями начальных напряжений. Собственным весом обделок тоннелей пренебрегалось.

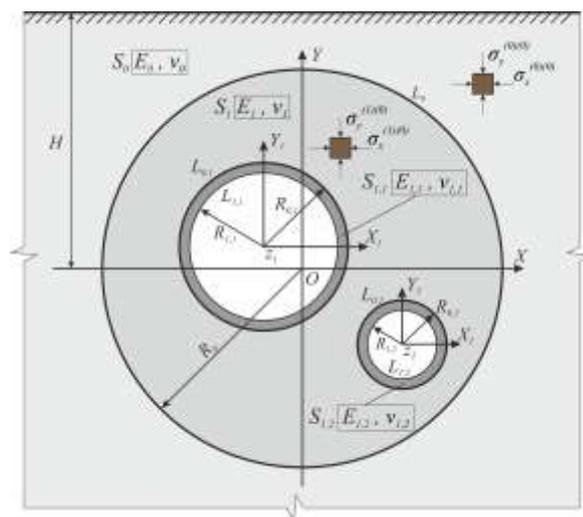


Рисунок 1.7 – Расчетная схема

Предложен итерационный процесс, на каждом шаге которого из решения системы уравнений, свободные члены которой уточняются по установленному алгоритму, определяются неизвестные коэффициенты разложения комплексных потенциалов в ряды, позволяющие установить напряженное состояние областей при различных сочетаниях влияющих факторов: глубины заложения тоннелей; размеров их поперечных сечений; расстояния между продольными осями тоннелей; соотношения деформационных характеристик грунта в естественном и укрепленном состояниях, а также материала обделок; размера зоны укрепленного грунта; толщины обделок; коэффициента бокового давления в ненарушенном массиве грунта.

Следует отметить работы [47, 48, 70], посвященные разработке математической модели взаимодействия круговых обделок тоннелей с массивом анизотропных пород, укрепленных цементацией, и разработке соответствующих аналитических методов расчёта. Достаточно подробный обзор методов расчёта приведён в [114, 115].

#### 1.4.2 Аналитические методы расчета обделок тоннелей мелкого заложения, сооружаемых в технологически неоднородных породах

Опыт строительства тоннелей мелкого заложения с применением специальных способов проходки свидетельствует о том, что влияние близко расположенной поверхности, в том числе наклонной, наличие зон технологически неоднородных пород оказывают существенное влияние на состояние подземных конструкций и массива пород [6 - 10, 12 - 14, 16, 54 - 56, 117, 167 - 171 и др.].

В настоящее время наиболее эффективным направлением совершенствования и разработки новых методов расчёта обделок тоннелей мелкого заложения [8, 146, 171] является использование метода Шермана Д.И. [160]. Согласно этому методу решение двусвязной задачи о равновесии полуплоскости, ослабленной отверстием, сводится к нахождению вспомогательной

функции на прямолинейной границе полуплоскости и удовлетворяющей уравнению Фредгольма в односвязной области.

Впервые решения задач для линейно деформируемой полуплоскости, ослабленной подкреплённым круговым отверстием, получены Арамановичем И.Г. [17] на основе метода Шермана Д.И. На основе аналитического продолжения комплексных потенциалов, регулярных в полуплоскости вне отверстия, в верхнюю полуплоскость, исходные задачи сводились к задачам для кольца, подкрепляющего отверстие в полной плоскости, при наличии в граничных условиях на линии контакта дополнительных членов в виде рядов Лорана. Данный способ позволил получить решение задач о взаимодействии обделки, в том числе многослойной, одиночного тоннеля с породами, сооруженного вблизи горизонтальной (рисунок 1.8 а) и наклонной (рисунок 1.8 б) земной поверхности, позволяющие учесть, в том числе, наличие зон упрочнённых или ослабленных пород [72, 73, 145, 152, 168 - 172].

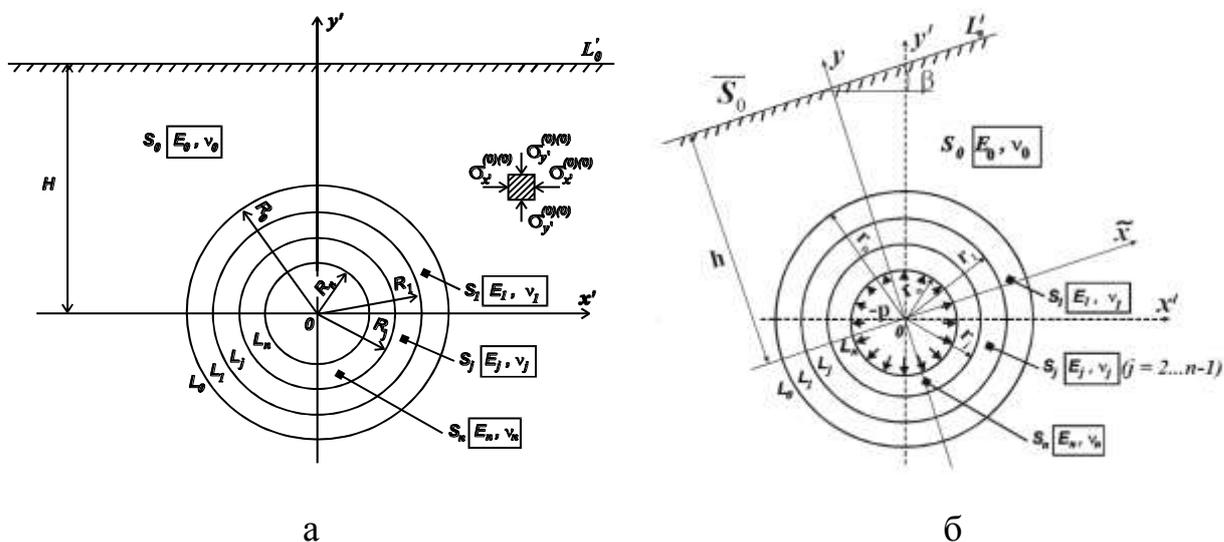


Рисунок 1.8 - Расчётные схемы задач для многослойных обделок тоннелей мелкого заложения

Граничные условия рассмотренных задач учитывают наличие нагрузок на поверхности; полный контакт на границах раздела областей с различными деформационными характеристиками, моделирующих слои обделок

или зоны технологически неоднородных пород, а так же наличие нормально-го давления на внутреннем контуре обделки. Методами ТФКП с использованием аналитического продолжения комплексных потенциалов через прямолинейную границу, получены строгие решения поставленных задач теории упругости. Для решения задач был предложен итерационный процесс, на каждом шаге которого рассматриваются задачи для многослойного кольца, подкрепляющего отверстие в полной плоскости. Граничные условия этих задач содержат неизвестные члены в виде рядов Лорана, отвечающие за влияние поверхности, уточняемые на каждом шаге итераций на основе полученных рекуррентных соотношений, связывающих коэффициенты разложений в ряды комплексных потенциалов, регулярных в смежных областях. Напряжения в этих областях определяются по формулам Колосова-Мухелишвили и Арамановича И.Г. [88, 17].

Полученные решения были положены в основу разработанных аналитических методов расчета обделок одиночных круговых тоннелей, сооружаемых вблизи склонов в технологически неоднородных породах.

Применительно к расчёту обделок комплексов параллельных близко расположенных тоннелей, в том числе - сооруженных с применением укрепительной цементации, указанный подход получил дальнейшее развитие в работах Анциферова С.В. [6 - 14, 140 - 143].

В основу метода расчета многослойных обделок взаимовлияющих параллельных круговых тоннелей мелкого заложения, сооружаемых, в том числе – с применением инъекционного укрепления пород, положена математическая модель совместной работы обделок тоннелей мелкого заложения и породного массива как элементов единой деформируемой системы.

Модель, общая расчётная схема которой приведена на рисунке 1.9, позволяет учитывать основные факторы, оказывающие существенное влияние на формирование напряженного состояния обделок и массива при действии собственного веса пород, давления грунтовых вод, внутреннего напора и веса объектов на поверхности.

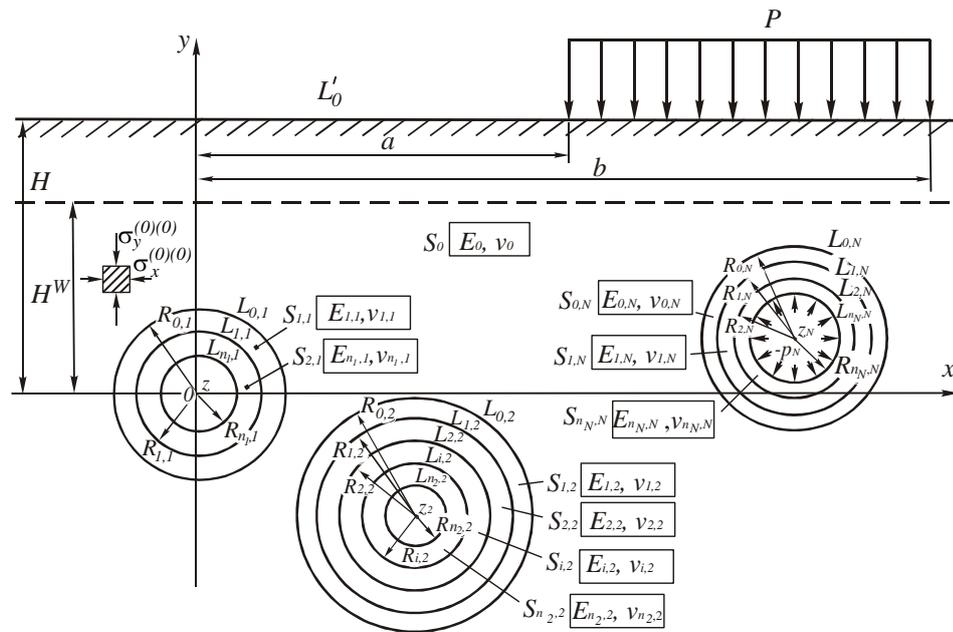


Рисунок 1.9 - Общая расчётная схема [8]

В результате с использованием метода Арамановича И.Г. получены решения задач теории упругости для многосвязной весомой линейно-деформируемой полубесконечной среды, моделирующей массив пород, ослабленной вблизи границы конечным числом произвольно расположенных круговых отверстий, подкрепленных многослойными кольцами, при соответствующих граничных условиях, отражающих действие собственного веса пород, давления грунтовых вод, внутреннего напора для гидротехнических тоннелей; разработаны алгоритмы расчета обделок взаимовлияющих параллельных круговых тоннелей мелкого заложения, в том числе – сооружаемых с применением инъекционного укрепления пород; программное обеспечение для ПЭВМ, позволяющее производить многовариантные расчеты обделок тоннелей мелкого заложения при проектировании.

В работах [14, 64, 141 - 143] представлен метод расчета обделок параллельных тоннелей, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности, базирующийся на результатах математического моделирования напряженного состояния элементов системы «массив грунта - на-

клонная земная поверхность - обделки параллельных тоннелей» при действии собственного веса грунта и нагрузок от веса объектов на поверхности.

В работах приведены математические модели формирования напряженно-деформированного состояния элементов исследуемых геомеханических систем, включающие постановку и решения соответствующих задач теории упругости. Достоверность полученных результатов подтверждается использованием теоретических положений механики сплошной среды, геомеханики и механики подземных сооружений; корректной постановкой задач исследования; применением адекватной математической модели; использованием апробированного математического аппарата ТФКП; высокой точностью удовлетворения граничных условий; согласованием результатов с данными, полученными другими авторами при решении частных задач численными методами, при натурных и лабораторных испытаниях. Разработанные методы реализованы в виде компьютерных программ.

В работах [54 - 56] приведены результаты разработки аналитического метода расчёта обделок тоннелей мелкого заложения некругового поперечного сечения, сооружаемых, в том числе, с применением инъекционного закрепления грунта.

Результаты численных экспериментов позволили установить закономерности формирования напряженного состояния обделок при различных углах наклона земной поверхности, взаимном расположении параллельных тоннелей, различных соотношениях деформационных характеристик массива грунта и материалов обделок. Подтверждено, что напряженное состояние обделок существенно зависит от этих факторов и их конкретных сочетаний.

### 1.5 Численные исследования напряженно-деформированного состояния подземных конструкций

Для расчета уникальных подземных сооружений, когда использование аналитических методов расчета невозможно, нормативные документы [107,

125 - 128] рекомендуют использование численных методов. Применению в практике проектирования подземных сооружений специализированного программного обеспечения способствуют в настоящее время интенсивное развитие численных методов решения задач линейной и нелинейной механики сплошных сред [5, 22, 50, 61, 134], улучшение технических характеристик и графических возможностей компьютеров. Наибольшее распространение получили такие программные комплексы, как ANSYS, SIMULIA Abaqus, PLAXIS, MIDAS, ЛИРА и др.

Среди упоминаемых программных комплексов следует отметить постоянно развивающуюся универсальную конечно-элементную программную систему ANSYS [192], позволяющую получать решения сложных линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных пространственных задач механики деформируемого твёрдого тела.

Новая универсальная среда моделирования, реализованная в SIMULIA Abaqus [191], является мощным средством прочностного и деформационного анализа конструкций в рамках линейных и нелинейных инженерных задач, выполняемых на этапе проектирования. SIMULIA позволяет выполнять 3D-моделирование конструкций, учитывая технологические особенности сооружения подземных объектов, позволяя улучшать качество создаваемого проекта, уменьшая число необходимых натуральных экспериментов. SIMULIA Abaqus позволяет точно прогнозировать деформации грунта и взаимодействие грунта и конструкции подземного сооружения, в том числе - во времени. Анализ может быть выполнен с использованием широкого диапазона геотехнических моделей материала (линейный и нелинейный; изотропный и ортотропный; пористый; поврежденный) и условий нагрузки, а процессы строительства и выемки грунта моделируется путем добавления или удаления соответствующих элементов. При геомеханическом моделировании возможен учёт связи между напряжениями в грунте и диффузией жидкости в порах; анизотропия и коэффициент фильтрации грунта; возможность уплотнения

грунта; слоистость горных пород; встраиваемые элементы для моделирования арматуры.

Широко используется в инженерной геотехнике и при проектировании подземных сооружений сертифицированный конечно-элементный программный комплекс PLAXIS, который в результате постоянной модернизации - первоначально от двухмерного конечно-элементного расчёта деформаций и напряжений и в итоге до возможности проведения трёхмерного конечно-элементного расчёта (PLAXIS 3D Tunnel) - стал способен решать большинство задач, возникающих в инженерной геомеханике [194]. С использованием PLAXIS, отличающегося относительно простым интерфейсом, возможно решение фильтрационных, температурных, динамических задач геомеханики в двухмерной и трёхмерной постановках; определение напряжений и деформации в грунте; оценка устойчивости склонов; определение несущей способности фундаментов, конструкций зданий и сооружений в горном деле, транспортном и гидротехническом строительстве.

ПК ЛИРА, представленная в настоящее время двумя программными комплексами «ЛИРА 10» [188] и «Ли́ра-СА́ПР» [193] - многофункциональный программный комплекс, используемый, в том числе, при проектировании и расчёте строительных конструкций различного назначения. Программа позволяет выполнять подбор и проверку сечений стальных, железобетонных и сталежелезобетонных конструкций, их армирование; моделировать работу массива грунта, а так же сооружений в процессе монтажа; исследовать поведение конструкций при динамических воздействиях.

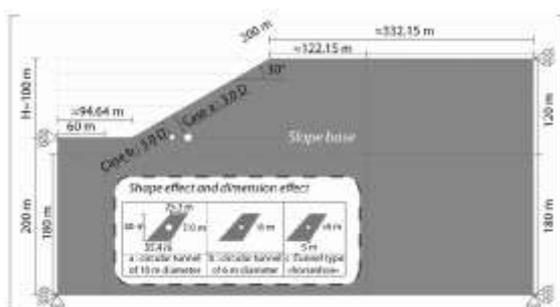
Современный Midas GTS NX [190] представляет собой полностью интегрированную систему в виде единого конечно-элементного программного комплекса, предназначенного для выполнения комплексных геотехнических расчетов. GTS NX обладает развитым, интуитивно-понятным интерфейсом, а также мощным и быстрым блоком выполнения расчётов (Solver) с поддержкой 64-битных систем и графического процессора. С применением GTS NX максимально быстро выполняются моделирование, проектирование, расчет-

ный анализ и оценка несущей способности различных строительных конструкций, в том числе - подземных сооружений.

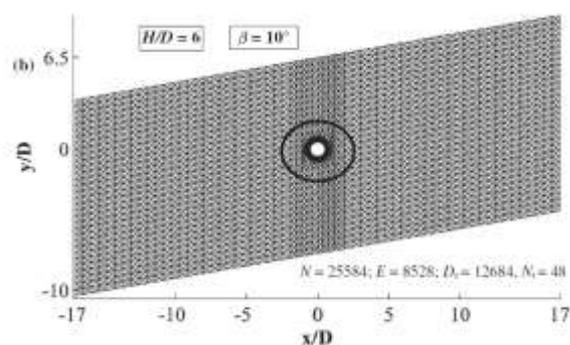
Особенностью применения этих программных комплексов является возможность учитывать на этапе формирования расчетных схем решаемых как плоских, так и объемных задач, неоднородное строение массива пород и различие их физико-механических свойств; возможные локальные нарушения; формы, размеры и конструктивные особенности проектируемых подземных сооружений; деформационные характеристики материалов подземных конструкций. Численные решения задач могут быть получены как в линейной, так и нелинейной постановках, т.е. с учетом реологических свойств грунтов, ползучести и старения бетона и т.д.

В публикациях [2, 26, 29, 52, 74, 84, 97, 98, 111, 164, 175 - 180, 182 - 184] приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния крепи (обделок) различных тоннелей, сооруженных вблизи земной поверхности, полученные с использованием комплексов программ, реализующих численные методы решения задач механики сплошных сред. Расчетные схемы представлены на рисунке 1.10.

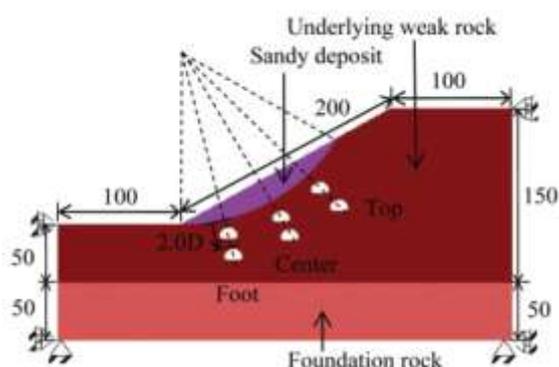
Из представленного в работах материала следует, используемые численные модели позволили учесть технологические особенности строительства тоннелей - использование поэтапного (уступного) способа проходки и крепления забоя, обеспечивающего устойчивость породных обнажений; влияние такого способа сооружения тоннелей на напряженно-деформированное состояние временной рамной и постоянной монолитной железобетонной крепи [89]; особенности взаимного влияния проходки нового тоннеля на напряженное состояние существующего [97]; формирование напряженно-деформированного состояния конструкций в комплексе подземных сооружений транспортного узла - сервисно-технологических штольнях, камеры тоннельного узла, автодорожного и железнодорожного тоннелей, монтажной камеры, отличающихся сложным пространственным расположением [98] и т.д.



а



б



в

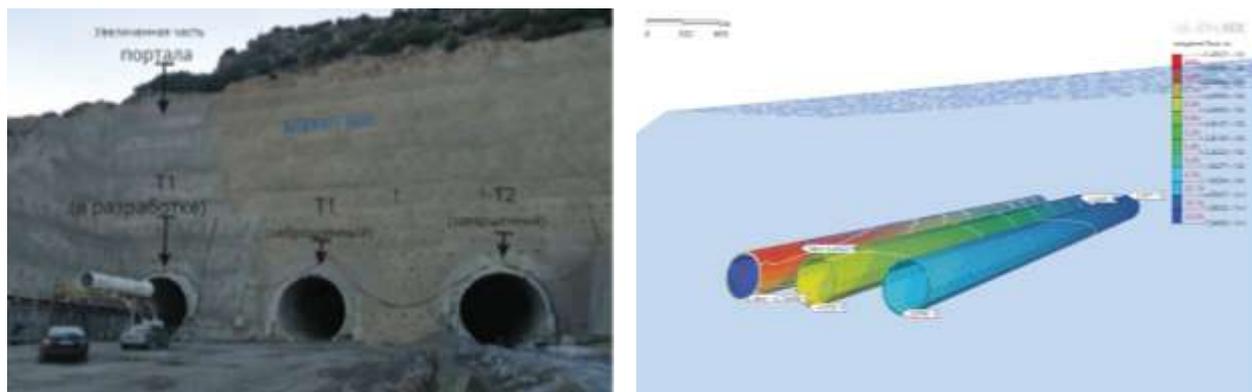


г

Рисунок 1.10 - Расчетные схемы: а – тоннели в неустойчивом склоне [177];  
 б – к определению нормального давления на обделку тоннеля [182];  
 в - расчётная схема комплекса тоннелей при прогнозировании оползня [184];  
 г - моделирование взаимодействия выработок транспортного узла [98]

В работе [164] приведены результаты объёмного моделирования с использованием Midas GTS NX 3D напряженно-деформированного состояния обделок комплекса параллельных транспортных тоннелей длиной 10 км, расположенных на юго-востоке Турции. Изначально проект предусматривал проходку тоннелей новоавстрийским методом (НАТМ) вкrest склона в слоистых раздробленных слабых водонасыщенных породах (рисунок 1.11).

С помощью компьютерного моделирования были проанализированы различные варианты восстановления тоннеля Т1, в котором произошло аварийное заклинивание проходческого комбайна.



а

б

Рисунок 1.11 - Тоннели Бахче-Нурдаг: а - вид порталов; б - результаты анализа

Восстановление аварийного тоннеля из-за проблем обеспечения безопасности проведения работ и их экономической эффективности было признано не целесообразным. По результатам численного исследования обоснована оптимальность строительства нового тоннеля при наличии двух ранее пройденных близко расположенных параллельных тоннелей.

Опубликованных работ, содержащих результаты численных исследований поведения обделок параллельных тоннелей, сооружённых, например, с применением предварительного инъекционного укрепления грунта вблизи наклонной земной поверхности, за исключением [183], не обнаружено. Результаты сравнения с опубликованными данными представлены в разделе 4.

Применяемые при исследованиях конечно-элементные схемы требуют достаточно подробного разбиения относительно большой области, моделирующей массив грунта, и сравнительно малых по размеру областей, моделирующих конструкции подземных сооружений, а так же зон технологически неоднородного грунта, что затрудняет применение этого метода в практических многовариантных расчетах комплексов подземных сооружений. На конечный результат определения напряженно-деформированного состояния элементов геомеханической системы [111, 159] существенное влияние оказывают размеры моделируемых областей, плотность разбиения на сетки ко-

нечных элементов и необходимость задания достаточно умозрительных граничных условий [111], обеспечивающих равновесие моделируемой системы. Следует отметить, что учет неоднородности грунта, в том числе - технологической, ввиду невозможности получения на стадии проектирования детальной геологической информации о вмещающем подземное сооружение грунтовом массиве, не реализуется при численном моделировании в полной мере.

Использование геотехнических программ, реализующих МКЭ, при расчете больших комплексов подземных сооружений ограничивается сложностью формирования расчетных плоской или пространственной конечно-элементных схем, требуемым большим объемом памяти и быстродействием ЭВМ, сложностью интерпретации полученных результатов [183].

В нормативном документе [128], устанавливающем основные геотехнические требования при проектировании новых и реконструкции подземных сооружений, отмечается, что наибольшие трудности возникают при верификации сложных численных моделей, реализуемых, например, методом конечных элементов, подземных сооружений в их взаимодействии с окружающим массивом грунта (пород). Необходимо отметить, что для каждой из таких моделей, являющейся, как правило, уникальной, отсутствует сопоставимый опыт, поэтому должны быть верифицированы как само программного обеспечения, с помощью которого создается модель, так и сама численная модель. Верификация программного обеспечения выполняется на основе сравнения результатов расчетов с данными тестовых моделей, для которых известны аналитические решения или имеются сопоставимые данные натурных наблюдений или экспериментальных измерений. Верификация численной модели, как правило, включает проверки исходных данных на формальное соответствие условиям задачи; корректности граничных условий; выполнения условия общего равновесия системы для всех сочетаний нагрузок и воздействий; локального равновесия для всех подсистем модели; анализ соответствия характера полученных значений перемещений и деформаций гра-

ничным условиям, а так же согласованность внутренних усилий в конструкциях сооружения с установленными деформациями и т.д.

Как известно, упоминаемые выше программные комплексы представляют собой закрытые для пользователя системы, чаще зарубежные. Хотя они и нашли достаточно широкое распространение, их успешному применению в ближайшем будущем будет препятствовать зависимость проектных организаций от получения лицензий, сервисной поддержки, обновлений и др.

Таким образом, разработанные к настоящему времени методы позволяют выполнять расчет обделок тоннелей произвольного поперечного сечения как глубокого, так и мелкого заложения, в том числе – многослойных или комбинированных. В качестве внешних нагрузок выступают постоянные и временные воздействия - статические, тектонические или сейсмические.

На основе современных представлений геомеханики о взаимодействии подземной конструкции и массива грунта как элементов единой деформируемой системы разработаны также методы расчёта монолитных обделок круговых тоннелей, сооружаемых вблизи склонов, на действие собственного веса пород, веса объектов на поверхности. Строгих аналитических методов расчета подземных конструкций, сооружаемых вблизи склонов, реализующих модель взаимодействия обделок тоннелей с массивом пород, включающую зоны технологически неоднородных пород, до настоящего времени не имелось. Отдельные результаты, полученные на основе численного решения задачи геомеханики, нельзя расценивать как решение указанной проблемы в целом. Это объясняется тем, что рассмотрение большого количества тонких слоев из разных материалов, моделирующих конструкций обделок комплекса тоннелей и зон технологически неоднородных пород вокруг выработок, вносит дополнительные трудности: необходимость разработки конечно-элементной расчётной схемы, реализация которой требует высоких вычислительных способностей компьютеров (производительность и объём памяти); возникают проблемы с достижением необходимой точности получаемых результатов расчета и их достоверностью.

В связи с этим поставлены и решена актуальная научная задача - разработка аналитического метода расчета обделок круговых тоннелей, сооружаемых закрытым способом в технологически неоднородных породах вблизи склонов, при действии гравитационных сил в массиве, использование которого на этапе проектирования подземных сооружений или при возникновении соответствующих ситуаций будет способствовать повышению надежности подземных сооружений, а в ряде случаев – обоснованному снижению материалоемкости и стоимости их строительства.

### **Выводы по главе 1**

1. В результате применения различных специальных способов строительства тоннелей вокруг них образуются зоны технологически неоднородного грунта с отличающимися физико-механическими свойствами.

2. Зоны технологически неоднородного грунта оказывают существенное влияние на формирование напряженно-деформированного состояния массива грунта и обделок тоннелей.

3. Поперечные размеры зон технологически неоднородного (укрепленного или ослабленного) грунта определяются глубиной существовавших или появившихся дополнительно вследствие проведения проходческих работ трещин; интенсивностью разрыхления пород в окрестности выработки.

4. При использовании тампонажа размер зон технологически неоднородного грунта и изменение деформационных характеристик материала зависит от технологии работ, инъекционного раствора, давления нагнетания, количества, частоты расположения и глубины инъекционных скважин.

5. Для оценки напряженно-деформированного состояния массива грунта и конструкций подземных сооружений используются методы натурных и лабораторных испытаний, а также расчётные методы, в основу которых положены строгие аналитические или численные решения задач механики сплошных сред в линейной или нелинейной постановках.

6. Аналитических методов расчёта обделок параллельных тоннелей, сооружаемых закрытым способом с учётом наличия вокруг тоннелей зон технологически неоднородных пород, базирующихся на строгих решениях соответствующих задач теории упругости, в настоящее время не имеется.

7. Состояние современной теории применения строгих решений соответствующих задач геомеханики и механики подземных сооружений позволяет достичь поставленную цель диссертационной работы - разработать аналитический метод расчета обделок параллельных тоннелей, сооружаемых закрытым способом в технологически неоднородных породах вблизи наклонной земной поверхности, необходимый для уточнения известных и установления новых закономерностей формирования напряженного состояния массива пород и подземных конструкций.

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

### 2.1 Основные теоретические положения, принятые при математическом моделировании взаимодействия элементов геомеханической системы.

#### Описание расчетной схемы

Опыт разработки аналитических методов расчёта конструкций подземных сооружений [8, 33, 147] показывает, что решения плоских задач теории упругости могут быть использованы для исследования напряженного состояния достаточно протяженных участков параллельных тоннелей.

В математической модели формирования напряженного состояния массива пород в естественном состоянии, зон технологически неоднородного грунта вокруг выработок и обделок комплекса тоннелей, сооружаемых вблизи склона, реализовано представление о взаимодействии подземных конструкций и окружающего массива пород как элементов единой деформируемой системы [34]. Оно позволило выполнить постановку соответствующей плоской задачи теории упругости и получить её строгое аналитическое решение. Расчетная схема задачи теории упругости включает концентрические круговые области вокруг подкреплённых кольцами отверстий. Материалы этих колец, моделирующих зоны технологически неоднородных пород вокруг выработок, имеют отличающиеся деформационные характеристики.

Предлагаемая математическая модель позволяет учитывать следующие основные факторы, оказывающие существенное влияние на напряженное состояние обделок тоннелей и массива пород, включая зоны неоднородности:

- рельеф земной поверхности, характеризующийся преобладающим углом её наклона к горизонту;
- количество тоннелей в комплексе;

- глубину заложения каждого из тоннелей относительно наклонной земной поверхности;
- размеры поперечных сечений выработок и применяемых обделок;
- наличие зон технологически неоднородных пород вокруг тоннелей и размеры их поперечных сечений;
- физико-механические и деформационные характеристики массива пород в естественном состоянии и технологически неоднородных пород;
- деформационные характеристики материалов обделок;
- наличие полей начальных напряжений, обусловленных гравитационными силами, в массиве пород в естественном состоянии и в зонах, моделирующих породы с измененными свойствами;
- очередность (последовательность) сооружения тоннелей и отставание возведения обделок от забоя в каждом из тоннелей с использованием корректирующих множителей по методике, изложенной в [147, 8];
- реологические свойства пород в рамках теории линейной наследственной ползучести с использованием метода переменных модулей [4, 8], в которой деформационные характеристики пород - модуль деформации и коэффициент Пуассона - представляются как функции времени.

Расчетная схема задачи теории упругости о равновесии весомой однородной линейно-деформируемой полубесконечной среды, ослабленной конечным числом подкреплённых круговых отверстий, вокруг которых имеются концентрические области из материала с отличающимися деформационными характеристиками, приведена на рисунке 2.1.

На схеме полубесконечная среда  $S_0$ , моделирующая породный массив, ограничена прямой  $L_0'$ , образующей угол  $\beta$  с горизонталью.

Среда характеризуется удельным весом  $\gamma$ ; коэффициентом бокового давления  $\lambda$ , определяемым экспериментально или с использованием гипотезы Динника [33]; модулем деформации  $E_0$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_0$ .

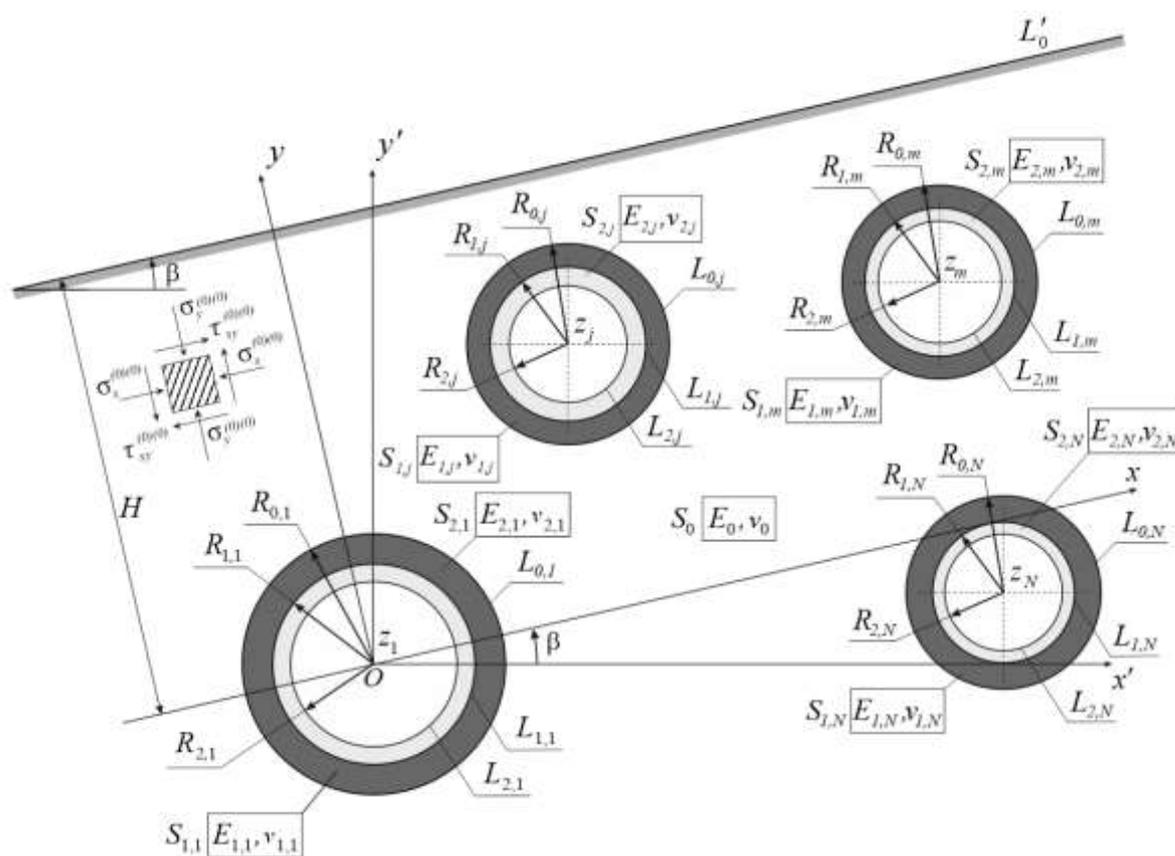


Рисунок 2.1 - Расчетная схема плоской задачи теории упругости

Среда  $S_0$  ослаблена произвольным конечным числом  $N$  круговых отверстий с контурами  $L_{1,m}$  радиусами  $R_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ), моделирующие поперечные сечения выработок. Центры отверстий расположены в точках с координатами  $(x'_m; y'_m)$  ( $m=1, \dots, N$ ) в прямоугольной системе координат  $x'Oy'$ , начало которой совмещено с центром первого отверстия, ось  $Ox'$  является горизонтальной. Оси  $Ox$ ,  $Oy$  наклонной системы координат  $xOy$  образуют угол  $\beta$  с соответствующими осями  $Ox'$ ,  $Oy'$ .

Вокруг отверстий с контурами  $L_{1,m}$  радиусами  $R_{1,m}$  выделены концентрические области  $S_{1,m}$  с наружными контурами  $L_{0,m}$  радиусами  $R_{0,m}$ , моделирующие зоны технологически неоднородных пород. Материалы этих областей характеризуются модулями деформации  $E_{1,m}$  и коэффициентами

Пуассона  $\nu_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ), в общем случае отличающимися от соответствующих деформационных характеристик среды  $S_0$ ; удельный вес  $\gamma$  и коэффициенты бокового давления  $\lambda$  в областях  $S_{1,m}$  принимаются равными соответствующим величинам для среды  $S_0$ .

Отверстия подкреплены концентрическими кольцами  $S_{2,m}$  с внутренними контурами  $L_{2,m}$  и радиусами  $R_{2,m}$ , моделирующими обделки тоннелей ( $m = 1, \dots, N$ ). Материалы колец  $S_{2,m}$  имеют деформационные характеристики  $E_{2,m}$ ,  $\nu_{2,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ). Весом обделок тоннелей пренебрегаем.

Расчетная схема допускает отсутствие вокруг отдельных тоннелей зон технологически неоднородных пород - при отсутствии такой зоны вокруг выработки с номером  $l$  в расчетной схеме достаточно принять  $R_{1,l} = R_{0,l}$ ,  $E_{1,l} = E_0$ ,  $\nu_{1,l} = \nu_0$ ; а также наличие неподкрепленных выработок - для неподкрепленной выработки, например, с номером  $l$  в расчетной схеме принимается  $R_{2,l} = R_{1,l}$ ,  $E_{2,l} = E_{1,l}$ ,  $\nu_{2,l} = \nu_{1,l}$ .

## 2.2 Постановка плоской задачи теории упругости. Формулирование граничных условий

Среда  $S_0$  и шайбы  $S_{1,m}$ , шайбы  $S_{1,m}$  и кольца  $S_{2,m}$  деформируются совместно, т.е. на линиях их контакта  $L_{0,m}$ ,  $L_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) выполняются условия непрерывности векторов полных напряжений и смещений.

Наклонная граница  $L_0$  полуплоскости  $S_0$  и внутренние контуры  $L_{2,m}$  колец  $S_{2,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) свободны от действия внешних сил.

В среде  $S_0$  и шайбах  $S_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ), моделирующих массив пород в естественном и изменённом состояниях, заданы поля начальных напряжений, отвечающие за действие гравитационных сил. Компоненты  $\sigma_x^{(0)(0)}$ ,

$\sigma_y^{(0)(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)(0)}$  этого поля в среде  $S_0$ , а так же компоненты  $\sigma_x^{(1,m)(0)}$ ,  $\sigma_y^{(1,m)(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(1,m)(0)}$  в шайбах  $S_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ) в наклонной декартовой системе координат определяются из решения системы дифференциальных уравнений равновесия весомой полуплоскости с наклонной границей [14]:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)(0)} &= \sigma_x^{(1,m)(0)} = -\lambda\gamma(H-y)\cos\beta; \\ \sigma_y^{(0)(0)} &= \sigma_y^{(1,m)(0)} = -\gamma(H-y)\cos\beta; \\ \tau_{xy}^{(0)(0)} &= \tau_{xy}^{(1,m)(0)} = -\gamma(H-y)\sin\beta.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Полные напряжения  $\sigma_x^{(0)*}$ ,  $\sigma_y^{(0)*}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)*}$  в среде  $S_0$  представляются в виде сумм искомым дополнительных напряжений  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  и начальных напряжений  $\sigma_x^{(0)(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)(0)}$ , задаваемых формулами (2.1):

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)*} &= \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(0)(0)}; \\ \sigma_y^{(0)*} &= \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(0)(0)}; \\ \tau_{xy}^{(0)*} &= \tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(0)(0)};\end{aligned}\tag{2.2}$$

полные напряжения  $\sigma_x^{(1,m)*}$ ,  $\sigma_y^{(1,m)*}$ ,  $\tau_{xy}^{(1,m)*}$  в областях  $S_{1,m}$  в виде сумм дополнительных напряжений  $\sigma_x^{(1,m)}$ ,  $\sigma_y^{(1,m)}$ ,  $\tau_{xy}^{(1,m)}$  в областях  $S_{1,m}$  и начальных напряжений  $\sigma_x^{(1,m)(0)}$ ,  $\sigma_y^{(1,m)(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(1,m)(0)}$  ( $m=1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1,m)*} &= \sigma_x^{(1,m)} + \sigma_x^{(1,m)(0)}; \\ \sigma_y^{(1,m)*} &= \sigma_y^{(1,m)} + \sigma_y^{(1,m)(0)}; \\ \tau_{xy}^{(1,m)*} &= \tau_{xy}^{(1,m)} + \tau_{xy}^{(1,m)(0)}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Поскольку весом обделок по сравнению с весом окружающего массива грунта пренебрегаем, начальные напряжения в кольцах  $S_{2,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ), моделирующих обделки тоннелей, полагаются равными нулю, т.е. в кольцах  $S_{2,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ) искомые дополнительные напряжения являются полными.

Смещения во всех областях рассматриваются только дополнительные.

Граничные условия задачи в полных напряжениях примут вид:

- на прямолинейной границе  $L_0$

$$\sigma_y^{(0)*} = 0, \tau_{xy}^{(0)*} = 0; \quad (2.4)$$

- на контурах  $L_{0,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ )

$$\sigma_r^{(1,m)*} = \sigma_r^{(0)*}, \tau_{r\theta}^{(1,m)*} = \tau_{r\theta}^{(0)*}, \quad (2.5)$$

$$u^{(1,m)} = u^{(0)}, v^{(1,m)} = v^{(0)}; \quad (2.6)$$

- на контурах  $L_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ )

$$\sigma_r^{(2,m)*} = \sigma_r^{(1,m)*}, \tau_{r\theta}^{(2,m)*} = \tau_{r\theta}^{(1,m)*}, \quad (2.7)$$

$$u^{(2,m)} = u^{(1,m)}, v^{(2,m)} = v^{(1,m)}; \quad (2.8)$$

- на внутренних контурах  $L_{2,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ )

$$\sigma_r^{(2,m)*} = 0, \tau_{r\theta}^{(2,m)*} = 0, \quad (2.9)$$

где  $\sigma_r^{(l,m)*}$ ,  $\tau_{r\theta}^{(l,m)*}$  - полные радиальные и касательные напряжения,  $u^{(l,m)}$ ,  $v^{(l,m)}$  - дополнительные радиальные и окружные смещения в точках областей  $S_{l,m}$  ( $l = 0, 1, 2; m = 1, \dots, N$ ) в полярных системах координат, начала которых совпадают с центрами поперечных сечений отверстий.

Решение задачи получено с использованием апробированного математического аппарата ТФКП, предусматривающего применение потенциалов Колосова-Мусхелишвили [88, 76], метода Арамановича И.Г. [17], модифицированного в работах [8, 56, 114, 115] и теории рядов комплексного переменного [76]. Таким образом, основой разработанной математической модели является решение соответствующей краевой задачи ТФКП для кусочно-однородной многосвязной области.

Особенностью решения поставленной задачи является использование сходящегося итерационного процесса, на каждом шаге которого последовательно рассматриваются задачи о напряженном состоянии каждого из двухслойных концентрических колец в полной плоскости. Решения этих задач по-

зволяют уточнять граничные условия, содержащие дополнительные члены в виде рядов Лорана с коэффициентами, отвечающими за влияние наклонной границы и соседних подкрепленных кольцами отверстий с имеющимися вокруг них концентрическими зонами из материалов с отличающимися деформационными характеристиками.

## **Выводы по главе 2**

1. Существующий уровень развития теории аналитических методов расчёта делает возможным разработку математической модели, положенной в основу нового метода расчёта обделок тоннелей, сооружаемых вблизи наклонной земной поверхности в зонах технологически неоднородных пород.

2. Обосновано применение расчетной схемы плоской задачи теории упругости для протяженных участков параллельных тоннелей, сооруженных в технологически неоднородных породах вблизи склона.

3. Определены основные факторы, оказывающие существенное влияние на напряженное состояние массива пород склона и обделок тоннелей, сооружённых в зонах технологически неоднородных пород, учитываемые при разработке математической модели.

4. Выполнена постановка плоской задачи теории упругости о равновесии полубесконечной линейно деформируемой однородной весомой среды с наклонной границей, ослабленной произвольным числом подкрепленных круговых отверстий, вокруг которых выделены концентрические зоны из материалов с отличающимися деформационными характеристиками.

5. Сформулированы граничные условия задачи теории упругости на линиях контакта областей с различными деформационными характеристиками, отражающие равенство векторов полных напряжений и дополнительных смещений, которые соответствуют предположению о совместной работе обделок тоннелей, зон неоднородных пород и пород в естественном состоянии как элементов единой деформируемой геомеханической системы.

### 3 РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Разрабатываемый метод расчета базируется на решении задачи теории упругости, постановка которой приведена в разделе 2. Для решения задач используется математический аппарат комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [88], предусматривающий переход от исходной задачи теории упругости к соответствующей краевой задаче ТФКП.

#### 3.1 Граничные условия краевой задачи ТФКП

Расчетная схема плоской задачи теории упругости о равновесии весомой полубесконечной среды с наклонной границей, ослабленной произвольным числом подкрепленных круговых отверстий, вокруг которых выделены концентрические зоны с отличающимися деформационными характеристиками, приведена на рисунке 2.3.

Для описания напряженно-деформированного состояния областей, представленных на расчетной схеме, в рассмотрение вводятся пары соответствующих комплексных потенциалов:

- в области  $S_0$ , моделирующей массив пород, -  $\tilde{\varphi}_0(z)$ ,  $\tilde{\psi}_0(z)$ ;
- в концентрических шайбах  $S_{1,m}$ , моделирующих зоны технологически неоднородных пород вокруг каждого из тоннелей, -  $\tilde{\varphi}_{1,m}(z)$ ,  $\tilde{\psi}_{1,m}(z)$  ( $m = 1, \dots, N$ );
- в концентрических кольцах  $S_{2,m}$ , моделирующих монолитные обделки тоннелей, -  $\tilde{\varphi}_{2,m}(z)$ ,  $\tilde{\psi}_{2,m}(z)$  ( $m = 1, \dots, N$ ).

Данные функции связаны с напряжениями и смещениями в точках областей известными формулами Колосова - Мусхелишвили [88].

Следуя [8], граничные условия соответствующей краевой задачи ТФКП имеют вид ( $m = 1, \dots, N$ ):

$$\overline{\tilde{\varphi}_0(t_0)} + t_0 \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_0)} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_0)} = 0 \text{ на } L'_0; \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\tilde{\varphi}_{1,m}(t_{0,m})} + t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}'_{1,m}(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_{1,m}(t_{0,m})} = \\ \qquad \qquad \qquad = \overline{\tilde{\varphi}_0(t_{0,m})} + t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})}, \\ \overline{\mathfrak{a}_{1,m} \tilde{\varphi}_{1,m}(t_{0,m})} - t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}'_{1,m}(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_{1,m}(t_{0,m})} = \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \left[ \overline{\mathfrak{a}_0 \tilde{\varphi}_0(t_{0,m})} - t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})} \right] \end{array} \right. \text{ на } L_{0,m}; \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\tilde{\varphi}_{2,m}(t_{1,m})} + t_{1,m} \overline{\tilde{\varphi}'_{2,m}(t_{1,m})} + \overline{\tilde{\psi}_{2,m}(t_{1,m})} = \\ \qquad \qquad \qquad = \overline{\tilde{\varphi}_{1,m}(t_{1,m})} + t_{1,m} \overline{\tilde{\varphi}'_{1,m}(t_{1,m})} + \overline{\tilde{\psi}_{1,m}(t_{1,m})} + f_m(t_{1,m}), \\ \overline{\mathfrak{a}_{2,m} \tilde{\varphi}_{2,m}(t_{1,m})} - t_{1,m} \overline{\tilde{\varphi}'_{2,m}(t_{1,m})} - \overline{\tilde{\psi}_{2,m}(t_{1,m})} = \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{\mu_{2,m}}{\mu_{1,m}} \left[ \overline{\mathfrak{a}_{1,m} \tilde{\varphi}_{1,m}(t_{1,m})} - t_{1,m} \overline{\tilde{\varphi}'_{1,m}(t_{1,m})} - \overline{\tilde{\psi}_{1,m}(t_{1,m})} \right] \end{array} \right. \text{ на } L_{1,m}; \quad (3.3)$$

$$\overline{\tilde{\varphi}_{2,m}(t_{2,m})} + t_{2,m} \overline{\tilde{\varphi}'_{2,m}(t_{2,m})} + \overline{\tilde{\psi}_{2,m}(t_{2,m})} = 0 \text{ на } L_{2,m}, \quad (3.4)$$

где

$$\mathfrak{a}_0 = 3 - 4\nu_0, \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}, \quad \mathfrak{a}_{l,m} = 3 - 4\nu_{l,m}, \quad \mu_{l,m} = \frac{E_{l,m}}{2(1+\nu_{l,m})} \quad (l=1,2); \quad (3.5)$$

$$t_0 = x + iH; \quad t_{l,m} = z_m + R_{l,m} e^{i\theta} = R_{l,m} \sigma \quad (l=0,1,2; m=1,\dots,N), \quad \sigma = e^{i\theta}; \quad (3.6)$$

$\theta$  - полярный угол, отсчитываемый от положительного направления оси  $Ox$  против хода часовой стрелки.

Условие (3.1) отражает отсутствие внешних нагрузок на линии  $L'_0$ .

Условия (3.2) определяют непрерывность векторов полных напряжений (первое уравнение) и дополнительных смещений (второе уравнение) на контурах  $L_{0,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ) с учетом наличия в областях  $S_0$  и  $S_{1,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ) полей начальных напряжений, определяемых (2.1).

Условия (3.3) определяют непрерывность векторов полных напряжений (первое уравнение) и дополнительных смещений (второе уравнение) на контурах  $L_{1,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ) с учетом отсутствия в областях  $S_{2,m}$  ( $m=1,\dots,N$ )

полей начальных напряжений, которыми можно пренебречь ввиду малости веса обделок по сравнению с весом окружающего массива.

Условие (3.4) свидетельствуют об отсутствии внешних нагрузок на контурах  $L_{2,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ).

Функции  $f_m(z)$  на контурах  $L_{1,m}$  обусловлены наличием в зонах  $S_{1,m}$  полей начальных напряжений и, соответственно, главных векторов внешних усилий  $X^{(1,m)(0)}$ ,  $Y^{(1,m)(0)}$  ( $m=1,\dots,N$ ), действующих на этих контурах.

### 3.2 Определение функций $f_m(t_{1,m})$ и главных векторов усилий,

действующих на контурах  $L_{1,m}$

Функции  $f_m(z)$  при  $z = t_{1,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ) задаются соотношениями [8]:

$$f_m(t_{1,m}) = i \int_0^{t_{1,m}} (X_n^{(1,m)(0)} + iY_n^{(1,m)(0)}) ds_{1,m}, \quad (3.7)$$

в которых компоненты  $X_n^{(1,m)(0)}$ ,  $Y_n^{(1,m)(0)}$ , как и в работе определяются формулами ( $m=1,\dots,N$ ):

$$X_n^{(1,m)(0)} ds_{1,m} = -\gamma R_{1,m}^2 \left( \frac{H_m}{R_{1,m}} - \frac{y - y_m}{R_{1,m}} \right) \times \\ \times \left[ \lambda \cos \beta \cdot d \left( \frac{y - y_m}{R_{1,m}} \right) - \sin \beta \cdot d \left( \frac{x - x_m}{R_{1,m}} \right) \right]; \quad (3.8)$$

$$Y_n^{(1,m)(0)} ds_{1,m} = -\gamma R_{1,m}^2 \left( \frac{H_m}{R_{1,m}} - \frac{y - y_m}{R_{1,m}} \right) \times \\ \times \left[ \sin \beta \cdot d \left( \frac{y - y_m}{R_{1,m}} \right) - \cos \beta \cdot d \left( \frac{x - x_m}{R_{1,m}} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Тогда функции  $f_m(t_{1,m})$  ( $m=1,\dots,N$ ) примут вид

$$f_m(t_{1,m}) = -\frac{\gamma R_{1,m}^2}{4} \left[ -\left( i \cdot \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + \frac{4H_m}{R_{1,m}} \left( \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{4H_m}{R_{1,m}} \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \cdot \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 - 2ie^{-i\beta} \ln \sigma \right]. \quad (3.10)$$

Главные векторы усилий на контурах  $L_{1,j}$  ( $j=1, \dots, N$ ) определяются известными соотношениями [8]

$$X^{(1,j)(0)} + iY^{(1,j)(0)} = \oint_{L_{1,j}} \left( X_n^{(1,j)(0)} + iY_n^{(1,j)(0)} \right) ds_{1,j}. \quad (3.11)$$

Тогда с учетом  $t_{1,j} = z_j + R_{1,j}\sigma$  ( $j=1, \dots, N$ ) получим

$$\int_0^{t_{1,j}} \left( X_n^{(1,j)(0)} + iY_n^{(1,j)(0)} \right) ds_{1,j} = \\ = i \frac{\gamma R_{1,j}^2}{4} \left[ -\left( i \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + \frac{4H_j}{R_{1,j}} \left( \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{4H_j}{R_{1,j}} \cdot \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 - 2ie^{-i\beta} \ln \sigma \right]. \quad (3.12)$$

Интегралы по замкнутому контуру от аналитических функций  $\sigma^{-2}$ ,  $\sigma^{-1}$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^2$ , входящих в (3.12), равны нулю; а интегралы от функции  $\ln \sigma$  при принятом обходе контуров  $L_{1,j}$  приобретают приращения  $2\pi i$  [88].

Тогда главные векторы усилий на контурах  $L_{1,j}$  ( $j=1, \dots, N$ ) равны

$$X^{(1,j)(0)} + iY^{(1,j)(0)} = 2\pi i K_j, \quad (3.13)$$

где

$$K_j = \frac{\gamma R_{1,j}^2}{2} e^{-i\beta}. \quad (3.14)$$

### 3.3 Представления комплексных потенциалов и преобразованные граничные условия

Потенциалы  $\tilde{\varphi}_0(z)$ ,  $\tilde{\psi}_0(z)$ , регулярные в области  $S_0$  вне контуров  $L_{0,j}$  ( $j=1,\dots,N$ ) с учетом неинвариантности функции  $\tilde{\psi}_0(z)$  при переносе начала координат, представляются в виде сумм [8]

$$\tilde{\varphi}_0(z) = \sum_{j=1}^N \tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j), \quad \tilde{\psi}_0(z) = \sum_{j=1}^N \left[ \tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j) - \overline{z_j} \tilde{\varphi}'_{0,j}(z - z_j) \right], \quad (3.15)$$

где  $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$ ,  $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$  - функции, регулярные в области  $S_0$  вне каждого из контуров  $L_{0,j}$  ( $j=1,\dots,N$ ).

Потенциалы  $\tilde{\varphi}_{1,m}(z)$ ,  $\tilde{\psi}_{1,m}(z)$ , регулярные в шайбах  $S_{1,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ), с учетом неинвариантности функции  $\tilde{\psi}_{1,m}(z)$  при переносе начала координат представляются в виде

$$\tilde{\varphi}_{1,m}(z) = \varphi_{1,m}^*(z - z_m), \quad \tilde{\psi}_{1,m}(z) = \psi_{1,m}^*(z - z_m) - \overline{z_m} \varphi_{1,m}^{*'}(z - z_m), \quad (3.16)$$

где функции  $\varphi_{1,m}^*(z - z_m)$ ,  $\psi_{1,m}^*(z - z_m)$  являются регулярными в областях  $S_{1,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ).

Потенциалы  $\tilde{\varphi}_{2,m}(z)$ ,  $\tilde{\psi}_{2,m}(z)$ , регулярные в кольцах  $S_{2,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ), представляются в виде

$$\tilde{\varphi}_{2,m}(z) = \varphi_{2,m}(z - z_m), \quad \tilde{\psi}_{2,m}(z) = \psi_{2,m}(z - z_m) - \overline{z_m} \varphi_{2,m}'(z - z_m), \quad (3.17)$$

где функции  $\varphi_{2,m}(z - z_m)$ ,  $\psi_{2,m}(z - z_m)$  регулярны в кольцах  $S_{2,m}$ .

Тогда с учетом (3.15) - (3.16) граничные условия (3.1) - (3.4) приобретают вид ( $m=1,\dots,N$ ):

- на линии  $L_0$  ( $t_0 = x + iH$ )

$$\sum_{j=1}^N \left[ \tilde{\varphi}_{0,j}(t_0 - z_j) + \overline{(t_0 - z_j)} \tilde{\varphi}'_{0,j}(t_0 - z_j) + \tilde{\psi}_{0,j}(t_0 - z_j) \right] = 0; \quad (3.18)$$

- на контурах  $L_{0,m}$  ( $t_{0,m} = z_m + R_{0,m}\sigma$ )

$$\begin{aligned} & \varphi_{1,m}^*(t_{0,m} - z_m) + \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi_{1,m}^*(t_{0,m} - z_m)} + \overline{\psi_{1,m}^*(t_{0,m} - z_m)} = \\ & = \sum_{j=1}^N \left[ \tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) + \overline{(t_{0,m} - z_j) \tilde{\varphi}'_{0,j}(t_{0,m} - z_j)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)} \right]; \quad (3.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,m} \varphi_{1,m}^*(t_{0,m} - z_m) - \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi_{1,m}^*(t_{0,m} - z_m)} - \overline{\psi_{1,m}^*(t_{0,m} - z_m)} = \\ & = \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left[ \alpha_0 \tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) - \overline{(t_{0,m} - z_j) \tilde{\varphi}'_{0,j}(t_{0,m} - z_j)} - \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)} \right], \quad (3.20) \end{aligned}$$

- на контурах  $L_{1,m}$  ( $t_{1,m} = z_m + R_{1,m}\sigma$ )

$$\begin{aligned} & \varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) + \overline{(t_{1,m} - z_m) \varphi'_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} + \overline{\psi_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} = \\ & = \varphi_{1,m}^*(t_{1,m} - z_m) + \overline{(t_{1,m} - z_m) \varphi_{1,m}^*(t_{1,m} - z_m)} + \overline{\psi_{1,m}^*(t_{1,m} - z_m)} - \\ & - \frac{\gamma R_{1,m}^2}{4} \left[ - \left( i \cdot \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + \frac{4H_m}{R_{1,m}} \left( \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + \right. \\ & \left. + \frac{4H_m}{R_{1,m}} \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \cdot \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 - 2ie^{-i\beta} \ln \sigma \right]; \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{2,m} \varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) - \overline{(t_{1,m} - z_m) \varphi'_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} - \overline{\psi_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} = \\ & = \frac{\mu_{2,m}}{\mu_{1,m}} \left[ \alpha_{1,m} \varphi_{1,m}^*(t_{1,m} - z_m) - \overline{(t_{1,m} - z_m) \varphi_{1,m}^*(t_{1,m} - z_m)} - \overline{\psi_{1,m}^*(t_{1,m} - z_m)} \right]; \quad (3.22) \end{aligned}$$

- на контурах  $L_{2,m}$  ( $t_{2,m} = z_m + R_{2,m}\sigma$ )

$$\varphi_{2,m}(t_{2,m} - z_m) + \overline{(t_{2,m} - z_m) \varphi'_{2,m}(t_{2,m} - z_m)} + \overline{\psi_{2,m}(t_{2,m} - z_m)} = 0. \quad (3.23)$$

Функции  $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$ ,  $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ , регулярные в полуплоскости вне каждого из контуров  $L_{0,j}$  ( $j=1, \dots, N$ ), с учетом наличия на этих контурах отличных от нуля главных векторов внешних усилий (3.13), представляются в виде [8]

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j) = \varphi_{0,j}^*(z-z_j) - \frac{X^{(1,j)(0)} + iY^{(1,j)(0)}}{2\pi(1+\alpha_0)} \left[ \ln(z-z_j) + \alpha_0 \ln(z-z_j - 2iH_j) \right]; \quad (3.24)$$

$$\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j) = \psi_{0,j}^*(z-z_j) + \frac{X^{(0,j)(0)} - iY^{(0,j)(0)}}{2\pi(1+\alpha_0)} \left[ \alpha_0 \ln(z-z_j) + \ln(z-z_j - 2iH_j) \right],$$

где  $\varphi_{0,j}^*(z-z_j)$ ,  $\psi_{0,j}^*(z-z_j)$  - функции, регулярные в области  $S_0$  вне контуров  $L_{0,j}$  ( $j=1, \dots, N$ ), включая бесконечно удаленную точку.

С учетом (3.13) функции  $\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j)$ ,  $\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j)$  примут вид

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j) = \varphi_{0,j}^*(z-z_j) - \frac{iK_j}{1+\alpha_0} \left[ \ln(z-z_j) + \alpha_0 \ln(z-z_j - 2iH_j) \right]; \quad (3.25)$$

$$\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j) = \psi_{0,j}^*(z-z_j) - \frac{\overline{iK_j}}{1+\alpha_0} \left[ \alpha_0 \ln(z-z_j) + \ln(z-z_j - 2iH_j) \right]. \quad (3.26)$$

Функции  $\varphi_{1,m}^*(z-z_m)$ ,  $\psi_{1,m}^*(z-z_m)$  с учетом наличия на контурах  $L_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ) главных векторов усилий отыскиваются в виде

$$\varphi_{1,m}^*(z-z_m) = \varphi_{1,m}(z-z_m) - \frac{X^{(1,m)(0)} + iY^{(1,m)(0)}}{2\pi(1+\alpha_{1,m})} \ln(z-z_m); \quad (3.27)$$

$$\psi_{1,m}^*(z-z_m) = \psi_{1,m}(z-z_m) + \frac{X^{(1,m)(0)} - iY^{(1,m)(0)}}{2\pi(1+\alpha_{1,m})} \alpha_{1,m} \ln(z-z_m). \quad (3.28)$$

Соотношения (3.27), (3.28) с учетом (3.13) примут вид

$$\varphi_{1,m}^*(z-z_m) = \varphi_{1,m}(z-z_m) - \frac{iK_m}{1+\alpha_{1,m}} \ln \frac{z-z_m}{R_{1,m}}; \quad (3.29)$$

$$\psi_{1,m}^*(z-z_m) = \psi_{1,m}(z-z_m) - \frac{\overline{iK_m}}{1+\alpha_{1,m}} \alpha_{1,m} \ln \frac{z-z_m}{R_{1,m}}. \quad (3.30)$$

Функции  $\varphi_{1,m}(z-z_m)$ ,  $\psi_{1,m}(z-z_m)$ , регулярные внутри шайб  $S_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ), раскладываются в ряды Лорана с неизвестными коэффициентами  $c_k^{(l)(1,m)}$  ( $l=1, \dots, 4$ ):

$$\varphi_{1,m}(z-z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(3)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^k; \quad (3.31)$$

$$\psi_{1,m}(z-z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(4)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^k. \quad (3.32)$$

Комплексные потенциалы  $\varphi_{2,m}(z-z_m)$ ,  $\psi_{2,m}(z-z_m)$ , регулярные в кольцах  $S_{2,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ) представляются также в виде рядов Лорана также с неизвестными коэффициентами  $c_k^{(l)(2,m)}$  ( $l=1,\dots,4$ ):

$$\varphi_{2,m}(z-z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(2,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{2,m}} \right)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(3)(2,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{2,m}} \right)^k, \quad (3.33)$$

$$\psi_{2,m}(z-z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)(2,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{2,m}} \right)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(4)(2,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{2,m}} \right)^k. \quad (3.34)$$

3.4 Аналитическое продолжение потенциалов  $\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j)$ ,  $\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j)$  через границу полуплоскости

Следуя работе [8], ниже приведены результаты аналитического продолжения функций  $\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j)$ ,  $\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j)$  через прямолинейную границу  $L'_0$  в верхнюю полуплоскость  $\hat{S}$ , дополняющую область  $S_0$  до полной плоскости  $S_0 + \hat{S}$ .

В рассмотрение вводятся комплексные потенциалы  $\varphi_{0,j}(z-z_j)$ ,  $\psi_{0,j}(z-z_j)$ , регулярные в полной плоскости вне  $j$ -того отверстия и представляемые в виде

$$\varphi_{0,j}(z-z_j) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k}; \quad (3.35)$$

$$\psi_{0,j}(z-z_j) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k}. \quad (3.36)$$

Воспользовавшись теоремой Сохоцкого-Племеля, формулой Коши, свойствами аналитических функций и интегралов типа Коши [88], функции  $\varphi_{0,j}^*(z-z_j)$ ,  $\psi_{0,j}^*(z-z_j)$  ( $j=1, \dots, N$ ) аналитически продлеваются в верхнюю полуплоскость  $\hat{S}$ , в результате чего функции  $\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j)$ ,  $\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j)$  ( $j=1, \dots, N$ ), определяемые (3.25), (3.26), принимают вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j) = & \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{k c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \frac{2\overline{K_j} h_j}{1 + \alpha_0} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} - \\ & - \frac{iK_j}{1 + \alpha_0} \left[ \ln \frac{z-z_j}{R_{0,j}} + \alpha_0 \ln \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right) \right]; \quad (3.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j) = & \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{k c_k^{(2)(0,j)}} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \frac{2\overline{K_j}}{1 + \alpha_0} \cdot \frac{H_j}{R_{0,j}} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} - \\ & - \frac{i\overline{K_j}}{1 + \alpha_0} \left[ \alpha_0 \ln \frac{z-z_j}{R_{0,j}} + \ln \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right) \right]. \quad (3.38) \end{aligned}$$

В (3.37), (3.38) опущены константы, не участвующие в определении напряжений.

На контурах  $L_{0,m}$ , т.е. при  $z = t_{0,m} = z_m + R_{0,m}\sigma$  ( $m = 1, \dots, N$ ), используя соотношения (3.37), (3.38), имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) &= \lambda_{j,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + (1 - \lambda_{j,m}) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \frac{2\overline{K_j}}{1 + \mathfrak{a}_0} \cdot \frac{H_j}{R_{0,j}} \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} - \\ &- \frac{i\overline{K_j}}{1 + \mathfrak{a}_0} \left[ \ln \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} + \mathfrak{a}_0 \ln \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right) \right]; \quad (3.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) &= \lambda_{j,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,m)} \sigma^{-k} + (1 - \lambda_{j,m}) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \frac{2\overline{K_j}}{1 + \mathfrak{a}_0} \cdot \frac{H_j}{R_{0,j}} \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} - \\ &- \frac{i\overline{K_j}}{1 + \mathfrak{a}_0} \left[ \mathfrak{a}_0 \ln \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} + \ln \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right) \right]. \quad (3.40) \end{aligned}$$

Здесь и далее используется символ Кронекера:

$$\lambda_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases} \quad (3.41)$$

Для дальнейшего преобразования представлений (3.39), (3.40) используются соотношения ( $j=1, \dots, N; m=1, \dots, N$ ) [32, 53, 8]:

$$\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} = \delta_{m,j}^{(0)} \cdot (\sigma + (\varepsilon_{m,j})^{-1}), \quad (3.42)$$

$$\left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,k}^{(m,j)} \sigma^n, \quad I_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \delta_{m,j}^{(0) -k} \varepsilon_{m,j}^{n+k}, \quad (3.43)$$

где

$$C_{-k}^n = (-1)^n \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!n!}; \quad \varepsilon_{m,j} = \frac{R_{0,m}}{z_m - z_j} \text{ при } j \neq m, \quad \delta_{m,j}^{(0)} = \frac{R_{0,m}}{R_{0,j}}; \quad (3.44)$$

$$\left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} \sigma^n, \quad \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \delta_{m,j}^{(0) -k} \cdot (\varepsilon'_{m,j})^{n+k}, \quad (3.45)$$

где

$$\varepsilon'_{m,j} = \left( \frac{z_m - z_j}{R_{0,m}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \delta_{m,j}^{(0) -1} \right)^{-1}; \quad (3.46)$$

$$\ln \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (\varepsilon_{m,j})^k \sigma^k; \quad (3.47)$$

$$\ln \left( \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (\varepsilon'_{m,j})^k \sigma^k. \quad (3.48)$$

Используя (3.36), (3.43), (3.45), (3.47), (3.48), для функций  $\tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)$ ,  $\tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)$  получим ( $j=1, \dots, N; m=1, \dots, N$ ):

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) = \lambda_{j,m} \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(3)(m,j)} \sigma^k - \lambda_{j,m} \frac{iK_m}{1 + \varkappa_0} \ln \sigma; \quad (3.49)$$

$$\tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) = \lambda_{j,m} \psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(4)(m,j)} \sigma^k - \lambda_{j,m} \frac{i\overline{K}_m}{1 + \varkappa_0} \varkappa_0 \ln \sigma. \quad (3.50)$$

В (3.49), (3.50) введены следующие соотношения

$$C_k^{(3)(m,j)} = c_k^{(3)(m,j)} + \tilde{c}_k^{(3)(m,j)}; \quad C_k^{(4)(m,j)} = c_k^{(4)(m,j)} + \tilde{c}_k^{(4)(m,j)}; \quad (3.51)$$

$$c_k^{(3)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(1)(0,j)} + \right. \\ \left. + n \delta_{m,j}^{(0)} \left( \tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + (\varepsilon_{m,j})^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right]; \quad (3.52)$$

$$\tilde{c}_k^{(3)(m,j)} = \frac{1}{1 + \varkappa_0} \left\{ 2 \overline{K_j} \frac{H_j}{R_{0,j}} \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + \right. \\ \left. + i K_j \frac{(-1)^k}{k} \left[ (1 - \lambda_{m,j}) (\varepsilon_{m,j})^k + \varkappa_0 (\varepsilon_{m,j}')^k \right] \right\}; \quad (3.53)$$

$$c_k^{(4)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(2)(0,j)} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \left( (n+1) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} + n \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right) + \right. \\ \left. + n(n+1) \delta_{m,j}^{(0)} \left( \tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + \varepsilon_{m,j}^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} \right]; \quad (3.54)$$

$$\tilde{c}_k^{(4)(m,j)} = \frac{\overline{K_j}}{1 + \varkappa_0} \left\{ 2 \frac{H_j}{R_{0,j}} \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i \frac{(-1)^k}{k} \left[ (1 - \lambda_{m,j}) \varkappa_0 (\varepsilon_{m,j})^k + (\varepsilon_{m,j}')^k \right] \right\}. \quad (3.55)$$

### 3.5 Преобразование граничных условий

Для функций  $\varphi_{1,m}^*(z - z_m)$ ,  $\psi_{1,m}^*(z - z_m)$  на контурах  $L_{0,m}$ , т.е. при  $z = t_{0,m} = z_m + R_{0,m}\sigma$ , используя представления (3.29), (3.30) и пренебрегая константами, имеем ( $m = 1, \dots, N$ ):

$$\varphi_{1,m}^*(t_{0,m} - z_m) = \varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m) - \frac{iK_m}{1 + \varkappa_{1,m}} \ln \sigma; \quad (3.56)$$

$$\psi_{1,m}^*(t_{0,m} - z_m) = \psi_{1,m}(t_{0,m} - z_m) - \frac{i\overline{K_m}}{1 + \varkappa_{1,m}} \varkappa_{1,m} \ln \sigma; \quad (3.57)$$

$$\varphi_{1,m}^{*\prime}(z - z_m) = \overline{\varphi_{1,m}^{\prime}(z - z_m)} - \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \cdot \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{R_{1,m}}; \quad (3.58)$$

$$\varphi_{1,m}^{*\prime}(t_{0,m} - z_m) = \overline{\varphi_{1,m}^{\prime}(t_{0,m} - z_m)} - \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \sigma^{-1}; \quad (3.59)$$

$$\overline{\varphi_{1,m}^{*\prime}(t_{0,m} - z_m)} = \overline{\varphi_{1,m}^{\prime}(t_{0,m} - z_m)} + \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \sigma; \quad (3.60)$$

$$(t_{0,m} - z_m) \overline{\varphi_{1,m}^{*\prime}(t_{0,m} - z_m)} = R_{0,m} \sigma \overline{\varphi_{1,m}^{\prime}(t_{0,m} - z_m)} + \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \sigma^2; \quad (3.61)$$

$$\overline{\psi_{1,m}^*(t_{0,m} - z_m)} = \overline{\psi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} - \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \mathfrak{a}_{1,m} \ln \sigma; \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}^{\prime}(t_{0,m} - z_j) &= \lambda_{j,m} \overline{\varphi_{0,m}^{\prime}(t_{0,m} - z_m)} + \frac{1}{R_{0,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k C_k^{(3)(m,j)} \sigma^{k-1} - \\ &\quad - \lambda_{j,m} \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_0} \sigma^{-1}; \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}^{\prime}(t_{0,m} - z_j) &= \lambda_{j,m} \overline{\varphi_{0,m}^{\prime}(t_{0,m} - z_m)} + \frac{1}{R_{0,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k C_k^{(3)(m,j)} \sigma^{-(k-1)} + \\ &\quad + \lambda_{j,m} \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_0} \sigma; \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} (t_{0,m} - z_j) \overline{\tilde{\varphi}_{0,j}^{\prime}(t_{0,m} - z_j)} &= \\ &= \lambda_{j,m} (t_{0,m} - z_j) \overline{\varphi_{0,m}^{\prime}(t_{0,m} - z_m)} + C_1^{(3)(m,j)} \sigma + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) C_{k+2}^{(3)(m,j)} \sigma^{-k} + \\ &\quad + (\varepsilon_{m,j})^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) C_{k+1}^{(3)(m,j)} \sigma^{-k} + \lambda_{j,m} \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_0} \sigma^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)} = \lambda_{j,m} \overline{\psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(4)(m,j)} \sigma^{-k} - \lambda_{j,m} \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_0} \mathfrak{a}_0 \ln \sigma. \quad (3.66)$$

В (3.65), как и ранее, опущены константы, не влияющие на определение напряжений. С учетом выражений (3.56), (3.61), (3.62), (3.49), (3.65), (3.66) граничные условия (3.19), (3.20) примут вид

$$\begin{aligned}
& \varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m) + R_{0,m} \overline{\sigma \varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} + \overline{\psi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} - iK_m \ln \sigma + \frac{i\overline{K_m}}{1 + \overline{\mathfrak{a}}_{1,m}} \sigma^2 = \\
& = \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + R_{0,m} \overline{\sigma \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \overline{\psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + (k+1) (\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] \sigma^{-k} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \overline{C_k^{(3)(m,j)}} + \lambda_{k,1} \delta_{m,j}^{(0)} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) \sigma^k - iK_m \ln \sigma + \frac{i\overline{K_m}}{1 + \overline{\mathfrak{a}}_0} \sigma^2 \right\}; \quad (3.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\mathfrak{a}}_{1,m} \varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m) - R_{0,m} \overline{\sigma \varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} - \overline{\psi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} = \\
& = \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \left[ \overline{\mathfrak{a}}_0 \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) - R_{0,m} \overline{\sigma \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} - \overline{\psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} \right] + \\
& \quad + \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left[ \overline{\mathfrak{a}}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \sigma^k - \overline{C_1^{(3)(m,j)}} \sigma - \right. \\
& \quad - \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} \sigma^{-k} - (\varepsilon_{m,j})^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} \sigma^{-k} - \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \sigma^{-k} \right] + \frac{i\overline{K_m}}{1 + \overline{\mathfrak{a}}_{1,m}} \sigma^2 - \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \frac{i\overline{K_m}}{1 + \overline{\mathfrak{a}}_0} \sigma^2. \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Выражения (3.67), (3.68) примут вид ( $m = 1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned}
& \varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m) + R_{0,m} \overline{\sigma \varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} + \overline{\psi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} = \\
& = \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + R_{0,m} \overline{\sigma \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \overline{\psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(3)(0,m)} \sigma^k; \quad (3.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\mathfrak{a}}_{1,m} \varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m) - R_{0,m} \overline{\sigma \varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} - \overline{\psi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} = \\
& = \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \left[ \overline{\mathfrak{a}}_0 \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) - R_{0,m} \overline{\sigma \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} - \overline{\psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} \right] + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(2)(0,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(4)(0,m)} \sigma^k; \quad (3.70)
\end{aligned}$$

в котором введены следующие обозначения ( $k = 1, \dots, \infty$ )

$$L_k^{(1)(0,m)} = \sum_{j=1}^N \left[ (k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right], \quad (3.71)$$

$$L_k^{(2)(0,m)} = \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left[ -(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} - (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} - \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right]; \quad (3.72)$$

$$L_k^{(3)(0,m)} = \sum_{j=1}^N \left( \overline{C_k^{(3)(m,j)}} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) + \lambda_{k,2} i \overline{K_m} \left( \frac{1}{1 + \mathfrak{a}_0} - \frac{1}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \right); \quad (3.73)$$

$$L_k^{(4)(0,m)} = \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left( \mathfrak{a}_0 \overline{C_k^{(3)(m,j)}} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) + \lambda_{k,2} i \overline{K_m} \left( \frac{1}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} - \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \cdot \frac{1}{1 + \mathfrak{a}_0} \right). \quad (3.74)$$

Далее преобразуем граничные условия (3.21), (3.22). Для этого из соотношений (3.29), (3.30), пренебрегая константами, имеем на контурах  $L_{1,m}$ , т.е. при  $z = t_{1,m} = z_m + R_{1,m}\sigma$  ( $m = 1, \dots, N$ ):

$$\overline{\varphi_{1,m}^*(t_{1,m} - z_m)} = \overline{\varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} - \frac{i \overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \ln \sigma; \quad (3.75)$$

$$\overline{\varphi_{1,m}^{*'}(t_{1,m} - z_m)} = \overline{\varphi_{1,m}'(t_{1,m} - z_m)} - \frac{i \overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{1,m}} \cdot \sigma^{-1}; \quad (3.76)$$

$$\overline{\varphi_{1,m}^{*''}(t_{1,m} - z_m)} = \overline{\varphi_{1,m}''(t_{1,m} - z_m)} + \frac{i \overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{1,m}} \cdot \sigma; \quad (3.77)$$

$$\overline{(t_{1,m} - z_m) \varphi_{1,m}^{*'''}(t_{1,m} - z_m)} = \overline{R_{1,m} \sigma \varphi_{1,m}'''(t_{1,m} - z_m)} + \frac{i \overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \sigma^2; \quad (3.78)$$

$$\overline{\psi_{1,m}^*(t_{1,m} - z_m)} = \overline{\psi_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} - \frac{i \overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \mathfrak{a}_{1,m} \ln \sigma; \quad (3.79)$$

$$\overline{\psi_{1,m}^{*'}(t_{1,m} - z_m)} = \overline{\psi_{1,m}'(t_{1,m} - z_m)} - \frac{i \overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \mathfrak{a}_{1,m} \ln \sigma; \quad (3.80)$$

Используя (3.82), (3.85) и (3.87) запишем (3.21), (3.22) в виде

$$\begin{aligned} & \varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) + \overline{(t_{1,m} - z_m)\varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) + \psi_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} = \\ & = \varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) + R_{1,m}\sigma\overline{\varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) + \psi_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} + \\ & \quad + \frac{i\overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}}\sigma^2 - \frac{\gamma R_{1,m}^2}{4} \left[ - \left( i \cdot \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4H_m}{R_{1,m}} \left( \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + \frac{4H_m}{R_{1,m}} \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \cdot \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 \right]; \quad (3.81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{a}_{2,m}\overline{\varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) - (t_{1,m} - z_m)\varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) - \psi_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} = \\ & = \frac{\mu_{2,m}}{\mu_{1,m}} \left[ \mathfrak{a}_{1,m}\overline{\varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) - R_{1,m}\sigma\overline{\varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) - \psi_{1,m}(t_{1,m} - z_m)}} \right] - \\ & \quad - \frac{\mu_{2,m}}{\mu_{1,m}} \frac{i\overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \sigma^2. \quad (3.82) \end{aligned}$$

Выражения (3.81), (3.82) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) + \overline{(t_{1,m} - z_m)\varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) + \psi_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} = \\ & = \varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) + R_{1,m}\sigma\overline{\varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) + \psi_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} + \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(3)(1,m)} \sigma^k; \quad (3.83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{a}_{2,m}\overline{\varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) - (t_{1,m} - z_m)\varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) - \psi_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} = \\ & = \frac{\mu_{2,m}}{\mu_{1,m}} \left[ \mathfrak{a}_{1,m}\overline{\varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) - R_{1,m}\sigma\overline{\varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) - \psi_{1,m}(t_{1,m} - z_m)}} \right] + \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(2)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(4)(1,m)} \sigma^k, \quad (3.84) \end{aligned}$$

где

$$L_k^{(1)(1,m)} = \frac{\gamma R_{1,m}^2}{4} \left[ \lambda_{k,2} \left( i \cdot \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) - 4\lambda_{k,1} \frac{H_m}{R_{1,m}} \left( \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \right]; \quad (3.85)$$

$$L_k^{(2)(1,m)} = 0; \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned}
L_k^{(3)(1,m)} &= \lambda_{k,2} \frac{\overline{iK_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} - \frac{\gamma \mathcal{R}_{1,m}^2}{4} \left[ 4\lambda_{k,1} \frac{H_m}{R_{1,m}} \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta + i\lambda_{k,2} \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \right] = \\
&= \frac{\lambda_{k,2} \cdot i}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \cdot \frac{\gamma \mathcal{R}_{1,m}^2}{2} e^{i\beta} - \frac{\gamma \mathcal{R}_{1,m}^2}{4} \left[ 4\lambda_{k,1} \frac{H_m}{R_{1,m}} \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta + i\lambda_{k,2} \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \right]; \quad (3.87)
\end{aligned}$$

$$L_k^{(4)(1,m)} = -\lambda_{k,2} \frac{\mu_{2,m}}{\mu_{1,m}} \frac{\overline{iK_m}}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} = -\lambda_{k,2} \frac{\mu_{2,m}}{\mu_{1,m}} \cdot \frac{i}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \cdot \frac{\gamma \mathcal{R}_{1,m}^2}{2} e^{i\beta}. \quad (3.88)$$

Для удобства дальнейших преобразований введем следующие функции ( $p = 0, 1, 2$ ;  $m = 1, \dots, m$ )

$$G_{p,m}(z - z_m) = \overline{(z - z_m) \varphi_{p,m}(z - z_m)} + \psi_{p,m}(z - z_m). \quad (3.89)$$

С учетом обозначения  $\mu_{0,m} = \mu_0$  и введенных соотношений (3.89) запишем (3.69), (3.70), (3.83), (3.84) в виде ( $i = 0, 1$ )

$$\begin{aligned}
\varphi_{i+1,m}(t_{i,m} - z_m) + \overline{G_{i+1,m}(t_{i,m} - z_m)} &= \varphi_{i,m}(t_{i,m} - z_m) + \overline{G_{i,m}(t_{i,m} - z_m)} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1)(i,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(3)(i,m)} \sigma^k; \quad (3.90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{i+1,m} \varphi_{i+1,m}(t_{i,m} - z_m) - \overline{G_{i+1,m}(t_{i,m} - z_m)} &= \\
&= \frac{\mu_{i+1,m}}{\mu_{i,m}} \left[ \mathfrak{a}_{i,m} \varphi_{i,m}(t_{i,m} - z_m) - \overline{G_{i,m}(t_{i,m} - z_m)} \right] + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(2)(i,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(4)(i,m)} \sigma^k. \quad (3.91)
\end{aligned}$$

В результате линейных комбинаций (3.90) и (3.91) на контурах  $L_{i,m}$  ( $i = 0, 1$ ;  $m = 1, \dots, N$ ) имеем:

$$\begin{aligned}
\varphi_{i+1,m}(t_{i,m} - z_m) &= r_{i,m} \varphi_{i,m}(t_{i,m} - z_m) + d_{i,m} \overline{G_{i,m}(t_{i,m} - z_m)} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(i,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(i,m)} \sigma^k, \quad (3.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{G_{i+1,m}(t_{i,m} - z_m)} &= s_{i,m} \varphi_{i,m}(t_{i,m} - z_m) + l_{i,m} \overline{G_{i,m}(t_{i,m} - z_m)} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(i,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(i,m)} \sigma^k, \quad (3.93)
\end{aligned}$$

где

$$r_{i,m} = \frac{1 + \mathfrak{a}_i \frac{\mu_{i+1,m}}{\mu_{i,m}}}{1 + \mathfrak{a}_{i+1,m}}, \quad d_{i,m} = \frac{1 - \frac{\mu_{i+1,m}}{\mu_{i,m}}}{1 + \mathfrak{a}_{i+1,m}}; \quad s_{i,m} = 1 - r_{i,m}, \quad l_{i,m} = 1 - d_{i,m}; \quad (3.94)$$

здесь для обеспечения единообразия формул принято  $\mu_{0,m} = \mu_0$ ;

$$M_k^{(1)(i,m)} = \frac{L_k^{(1)(i,m)} + L_k^{(2)(i,m)}}{1 + \mathfrak{a}_{i+1,m}}; \quad M_k^{(2)(i,m)} = \frac{\mathfrak{a}_{i+1,m} L_k^{(1)(i,m)} - L_k^{(2)(i,m)}}{1 + \mathfrak{a}_{i+1,m}}; \quad (3.95)$$

$$M_k^{(3)(i,m)} = \frac{L_k^{(3)(i,m)} + L_k^{(4)(i,m)}}{1 + \mathfrak{a}_{i+1,m}}; \quad M_k^{(4)(i,m)} = \frac{\mathfrak{a}_{i+1,m} L_k^{(3)(i,m)} - L_k^{(4)(i,m)}}{1 + \mathfrak{a}_{i+1,m}}.$$

### 3.6 Получение соотношений, связывающих коэффициенты разложений комплексных потенциалов в смежных областях

С этой целью, используя (3.35), (3.36), (3.89), (3.31) - (3.34) и пренебрегая константами, получим следующие соотношения

$$\varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k}; \quad (3.96)$$

$$\dot{\varphi}_{0,m}(t_{0,m} - z_m) = -\frac{1}{R_{0,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-(k+1)}; \quad (3.97)$$

$$\overline{\dot{\varphi}_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} = -\frac{1}{R_{0,m}} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{k c_k^{(1)(0,m)}} \sigma^{k+1}; \quad (3.98)$$

$$(t_{0,m} - z_m) \overline{\dot{\varphi}_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} \sigma^k; \quad (3.99)$$

$$\overline{\psi_{0,j}(t_{0,m} - z_m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \sigma^k; \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \overline{G_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} &= \overline{(t_{0,m} - z_m) \dot{\varphi}_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \overline{\psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \right] \sigma^k; \quad (3.101) \end{aligned}$$

$$\varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{1,0}^{(m)k} c_k^{(1)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{1,0}^{(m)-k} c_k^{(3)(1,m)} \sigma^k; \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{1,m}(t_{0,m} - z_m) = \frac{1}{R_{1,m}} \left( - \sum_{k=1}^{\infty} k \delta_{1,0}^{(m)k+1} c_k^{(1)(1,m)} \sigma^{-(k+1)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} k \delta_{1,0}^{(m)-(k-1)} c_k^{(3)(1,m)} \sigma^{k-1} \right); \quad (3.103) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\dot{\varphi}_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} = \frac{1}{R_{1,m}} \left( - \sum_{k=1}^{\infty} k \delta_{1,0}^{(m)k+1} \overline{c_k^{(1)(1,m)}} \sigma^{k+1} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} k \delta_{1,0}^{(m)-(k-1)} \overline{c_k^{(3)(1,m)}} \sigma^{-(k-1)} \right); \quad (3.104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(t_{0,m} - z_m) \dot{\varphi}_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\delta_{2,k} (k-2) \delta_{1,0}^{(m)k-2} \overline{c_{k-2}^{(1)(1,m)}} + \lambda_{k,1} \delta_{1,0}^{(m)-k} \overline{c_k^{(3)(1,m)}} \right] \sigma^k + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \delta_{1,0}^{(m)-(k+2)} \overline{c_{k+2}^{(3)(1,m)}} \sigma^{-k}; \quad (3.105) \end{aligned}$$

$$\overline{\psi_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{1,0}^{(m)k} \overline{c_k^{(2)(1,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{1,0}^{(m)-k} \overline{c_k^{(4)(1,m)}} \sigma^{-k}; \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \overline{G_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\delta_{2,k} (k-2) \delta_{1,0}^{(m)k-2} \overline{c_{k-2}^{(1)(1,m)}} + \lambda_{k,1} \delta_{1,0}^{(m)-k} \overline{c_k^{(3)(1,m)}} + \right. \\ \left. + \delta_{1,0}^{(m)k} \overline{c_k^{(2)(1,m)}} \right] \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+2) \delta_{1,0}^{(m)-(k+2)} \overline{c_{k+2}^{(3)(1,m)}} + \delta_{1,0}^{(m)-k} \overline{c_k^{(4)(1,m)}} \right] \sigma^{-k}; \quad (3.107) \end{aligned}$$

$$\varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(3)(1,m)} \sigma^k; \quad (3.108)$$

$$\dot{\varphi}_{1,m}(t_{1,m} - z_m) = \frac{1}{R_{1,m}} \left( - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(1)(1,m)} \sigma^{-(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(3)(1,m)} \sigma^{k-1} \right); \quad (3.109)$$

$$\overline{\dot{\varphi}_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} = \frac{1}{R_{1,m}} \left( - \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(1,m)}} \sigma^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(3)(1,m)}} \sigma^{-(k-1)} \right); \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \overline{(t_{1,m} - z_m) \dot{\varphi}_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(1,m)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_{k,1} \overline{c_1^{(3)(1,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(1,m)}} \right] \sigma^k; \quad (3.111) \end{aligned}$$

$$\psi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(4)(1,m)} \sigma^k; \quad (3.112)$$

$$\overline{\psi_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(1,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(1,m)}} \sigma^{-k}; \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \overline{G_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(1,m)}} \sigma^{-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_{k,1} \overline{c_1^{(3)(1,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(1,m)}} \right] \sigma^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(1,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(1,m)}} \sigma^{-k}; \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)k} c_k^{(1)(2,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{1,2}^{(m)-k} c_k^{(3)(2,m)} \sigma^k; \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{2,m}(t_{1,m} - z_m) &= \frac{1}{R_{2,m}} \left[ - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)k+1} k c_k^{(1)(2,m)} \sigma^{-(k+1)} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)-(k-1)} k c_k^{(3)(2,m)} \sigma^{k-1} \right]; \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \overline{\dot{\varphi}_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} &= \frac{1}{R_{2,m}} \left[ - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)k+1} \overline{k c_k^{(1)(2,m)}} \sigma^{k+1} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)-(k-1)} \overline{k c_k^{(3)(2,m)}} \sigma^{-(k-1)} \right]; \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} \overline{(t_{1,m} - z_m) \dot{\varphi}_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} &= \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)k} \overline{k c_k^{(1)(2,m)}} \sigma^{k+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)-k} \overline{k c_k^{(3)(2,m)}} \sigma^{-(k-2)}; \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\psi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)k} c_k^{(2)(2,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)-k} c_k^{(4)(2,m)} \sigma^k; \quad (3.119)$$

$$\overline{\psi_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)k} \overline{c_k^{(2)(2,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)-k} \overline{c_k^{(4)(2,m)}} \sigma^{-k}; \quad (3.120)$$

$$\overline{G_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,k} \delta_{2,1}^{(m)k-2} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(2,m)}} \sigma^k + \delta_{2,1}^{(m)-1} \overline{c_1^{(3)(2,m)}} \sigma +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)-(k+2)} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(2,m)}} \sigma^{-k} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)k} \overline{c_k^{(2)(2,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)-k} \overline{c_k^{(4)(2,m)}} \sigma^{-k}. \quad (3.121)
\end{aligned}$$

В приведенных выше выражениях и далее по тексту используется обозначение

$$\delta_{p+1,p}^{(m)} = \frac{R_{p+1,m}}{R_{p,m}} \quad (p=0,1); \quad \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } n > k; \\ 0 & \text{при } n \leq k. \end{cases} \quad (3.122)$$

Соотношения, связывающие коэффициенты разложений потенциалов в шайбах  $S_{1,m}$  и среде  $S_0$ , получим из граничных условий (3.92), (3.93) при  $i=0$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,m}(t_{0,m} - z_m) = r_{0,m} \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + d_{0,m} \overline{G_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(0,m)} \sigma^k, \quad (3.123)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{G_{1,m}(t_{0,m} - z_m)} = s_{0,m} \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + l_{0,m} \overline{G_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(0,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(0,m)} \sigma^k. \quad (3.124)
\end{aligned}$$

Подставляя в условия (3.123), (3.124) выражения (3.102), (3.96), (3.101), (3.107), получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{1,0}^{(m)k} \overline{c_k^{(1)(1,m)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{1,0}^{(m)-k} \overline{c_k^{(3)(1,m)}} \sigma^k = r_{0,m} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(1)(0,m)}} \sigma^{-k} + \\
& + d_{0,m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \right] \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(0,m)} \sigma^k; \quad (3.125) \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\delta_{2,k} (k-2) \delta_{1,0}^{(m)k-2} \overline{c_{k-2}^{(1)(1,m)}} + \lambda_{k,1} \delta_{1,0}^{(m)-k} \overline{c_k^{(3)(1,m)}} + \delta_{1,0}^{(m)k} \overline{c_k^{(2)(1,m)}} \right] \sigma^k + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+2) \delta_{1,0}^{(m)-(k+2)} \overline{c_{k+2}^{(3)(1,m)}} + \delta_{1,0}^{(m)-k} \overline{c_k^{(4)(1,m)}} \right] \sigma^{-k} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s_{0,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + l_{0,m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \right] \sigma^k + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(0,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(0,m)} \sigma^k. \quad (3.126)
\end{aligned}$$

После приравнивания в левых и правых частях выражений (3.125), (3.126) коэффициентов при одинаковых отрицательных и положительных степенях переменной  $\sigma$ , имеем ( $m = 1, \dots, N$ ;  $k = 1, \dots, \infty$ )

$$c_k^{(1)(1,m)} = \delta_{1,0}^{(m)-k} \left( r_{0,m} c_k^{(1)(0,m)} + M_k^{(1)(0,m)} \right); \quad (3.127)$$

$$c_k^{(3)(1,m)} = \delta_{1,0}^{(m)k} \left\{ d_{0,m} \left[ -\delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \right] + M_k^{(3)(0,m)} \right\}; \quad (3.128)$$

$$(k+2) \delta_{1,0}^{(m)-(k+2)} \overline{c_{k+2}^{(3)(1,m)}} + \delta_{1,0}^{(m)-k} \overline{c_k^{(4)(1,m)}} = s_{0,m} c_k^{(1)(0,m)} + M_k^{(2)(0,m)}; \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned}
&-\delta_{2,k} (k-2) \delta_{1,0}^{(m)k-2} \overline{c_{k-2}^{(1)(1,m)}} + \lambda_{k,1} \delta_{1,0}^{(m)-k} \overline{c_k^{(3)(1,m)}} + \delta_{1,0}^{(m)k} \overline{c_k^{(2)(1,m)}} = \\
&= l_{0,m} \left[ -\delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \right] + M_k^{(4)(0,m)}. \quad (3.130)
\end{aligned}$$

Из (3.129), (3.130) получим

$$\begin{aligned}
c_k^{(4)(1,m)} = \delta_{1,0}^{(m)k} \left[ (s_{0,m} + k(k+2)d_{0,m}) \overline{c_k^{(1)(0,m)}} - (k+2)d_{0,m} \overline{c_{k+2}^{(2)(0,m)}} + \right. \\
\left. + \overline{M_k^{(2)(0,m)}} - (k+2) \overline{M_{k+2}^{(3)(0,m)}} \right]. \quad (3.131)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_k^{(2)(1,m)} = \delta_{1,0}^{(m)-k} \left[ \delta_{2,k} (k-2) (r_{0,m} - l_{0,m}) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + l_{0,m} \overline{c_k^{(2)(0,m)}} - \right. \\
\left. - \lambda_{k,1} d_{0,m} \overline{c_k^{(2)(0,m)}} + \delta_{2,k} (k-2) \overline{M_{k-2}^{(1)(0,m)}} - \lambda_{k,1} \overline{M_k^{(3)(0,m)}} + \overline{M_k^{(4)(0,m)}} \right]. \quad (3.132)
\end{aligned}$$

Полученные соотношения (3.127), (3.128), (3.131), (3.132) запишем в общем виде ( $l = 1, \dots, 4$ ;  $k = 1, \dots, \infty$ ;  $m = 1, \dots, N$ ):

$$c_k^{(l)(1,m)} = \delta_{1,0}^{(m)e^{(l,k)}} \left[ \sum_{p=1}^2 \sum_{v=1}^{\infty} \left( P_{k,v}^{(p,l)(0,m)} \overline{c_v^{(p)(0,m)}} + Q_{k,v}^{(p,l)(0,m)} \overline{c_v^{(p)(0,m)}} \right) + N_k^{(l)(0,m)} \right], \quad (3.133)$$

где

$$e(l, k) = \begin{cases} -k & \text{при } l = 1, 2, \\ k & \text{при } l = 3, 4; \end{cases} \quad (3.134)$$

$$\begin{aligned} P_{k,\nu}^{(1,1)(0,m)} &= \lambda_{k,\nu} r_{0,m}, \quad P_{k,\nu}^{(2,1)(0,m)} = 0, \\ Q_{k,\nu}^{(1,1)(0,m)} &= Q_{k,\nu}^{(2,1)(0,m)} = 0, \quad N_k^{(1)(0,m)} = M_k^{(1)(0,m)}; \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} P_{k,\nu}^{(1,2)(0,m)} &= \lambda_{k-2,\nu} (k-2) (r_{0,m} - l_{0,m}), \quad P_{k,\nu}^{(2,2)(0,m)} = \lambda_{k,\nu} l_{0,m}, \\ Q_{k,\nu}^{(1,2)(0,m)} &= 0, \quad Q_{k,\nu}^{(2,2)(0,m)} = -\lambda_{k,1} \lambda_{k,\nu} d_{0,m}, \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} N_k^{(2)(0,m)} &= \delta_{2,k} (k-2) M_{k-2}^{(1)(0,m)} - \lambda_{k,1} M_k^{(3)(0,m)} + \overline{M_k^{(4)(0,m)}}; \\ P_{k,\nu}^{(1,3)(0,m)} &= P_{k,\nu}^{(2,3)(0,m)} = 0, \quad Q_{k,\nu}^{(1,3)(0,m)} = -\lambda_{k-2,\nu} (k-2) d_{0,m}; \\ Q_{k,\nu}^{(2,3)(0,m)} &= \lambda_{k,\nu} d_{0,m}, \quad N_k^{(3)(0,m)} = M_k^{(3)(0,m)}; \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} P_{k,\nu}^{(1,4)(0,m)} &= P_{k,\nu}^{(2,4)(0,m)} = 0, \quad Q_{k,\nu}^{(1,4)(0,m)} = \lambda_{k,\nu} [s_{0,m} + k(k+2) d_{0,m}], \\ Q_{k,\nu}^{(2,4)(0,m)} &= -\lambda_{k+2,\nu} (k+2) d_{0,m}, \quad N_k^{(4)(0,m)} = \overline{M_k^{(2)(0,m)}} - (k+2) M_{k+2}^{(3)(0,m)}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Для получения соотношений, связывающих коэффициенты разложений потенциалов в областях  $S_{2,m}$  и  $S_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ), преобразуем уравнения (3.92), (3.93). Запишем эти уравнения на контурах  $L_{1,m}$ , т.е. при  $z = t_{1,m} = z_m + R_{1,m} \sigma$  ( $m = 1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_{2,m}(t_{1,m} - z_m) &= r_{1,m} \varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) + d_{1,m} \overline{G_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(1,m)} \sigma^k, \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} \overline{G_{2,m}(t_{1,m} - z_m)} &= s_{1,m} \varphi_{1,m}(t_{1,m} - z_m) + l_{1,m} \overline{G_{1,m}(t_{1,m} - z_m)} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(1,m)} \sigma^k. \end{aligned} \quad (3.140)$$

После подстановки (3.115), (3.108), (3.114), (3.121) в (3.139), (3.140) получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)k} c_k^{(1)(2,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{1,2}^{(m)-k} c_k^{(3)(2,m)} \sigma^k = \\
& = r_{1,m} \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(3)(1,m)} \sigma^k \right) + \\
& + d_{1,m} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(1,m)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_{k,1} \overline{c_1^{(3)(1,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(1,m)}} \right] \sigma^k + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(1,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(1,m)}} \sigma^{-k} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(1,m)} \sigma^k, \quad (3.141)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{2,1}^{(m)-1} \overline{c_1^{(3)(2,m)}} \sigma - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,k} \delta_{2,1}^{(m)k-2} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(2,m)}} \sigma^k + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)-(k+2)} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(2,m)}} \sigma^{-k} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)k} \overline{c_k^{(2)(2,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)-k} \overline{c_k^{(4)(2,m)}} \sigma^{-k} = \\
& = s_{1,m} \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(3)(1,m)} \sigma^k \right) + \\
& + l_{1,m} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(1,m)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_{k,1} \overline{c_1^{(3)(1,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(1,m)}} \right] \sigma^k + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(1,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(1,m)}} \sigma^{-k} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(1,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(1,m)} \sigma^k. \quad (3.142)
\end{aligned}$$

После приравнивания в левой и правой частях выражений (3.141), (3.142) коэффициентов при одинаковых отрицательных и положительных степенях переменных  $\sigma$ , имеем ( $m=1, \dots, N$ ;  $k=1, \dots, \infty$ ):

$$\begin{aligned}
c_k^{(1)(2,m)} = \delta_{2,1}^{(m)-k} \left( r_{1,m} c_k^{(1)(1,m)} + d_{1,m} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(1,m)}} + \right. \\
\left. + d_{1,m} \overline{c_k^{(4)(1,m)}} + M_k^{(1)(1,m)} \right); \quad (3.143)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_k^{(3)(2,m)} = \delta_{2,1}^{(m)k} \left[ r_{1,m} c_k^{(3)(1,m)} + d_{1,m} \left( \lambda_{k,1} \overline{c_1^{(3)(1,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(1,m)}} \right) + \right. \\
\left. + d_{1,m} \overline{c_k^{(2)(1,m)}} + M_k^{(3)(1,m)} \right]; \quad (3.144)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_k^{(2)(2,m)} = \delta_{2,1}^{(m)k} & \left\{ \lambda_{k,1}(l_{1,m} - r_{1,m})c_1^{(3)(1,m)} + \delta_{2,k}(k-2)(r_{1,m} - l_{1,m})c_{k-2}^{(1)(1,m)} + \right. \\
& + l_{1,m}c_k^{(2)(1,m)} - \lambda_{k,1}d_{1,m}\overline{c_1^{(2)(1,m)}} + \\
& + \left[ \delta_{2,k}k(k-2)d_{1,m} + s_{1,m} - \lambda_{k,1}d_{1,m} \right] \overline{c_k^{(3)(1,m)}} + \delta_{2,k}(k-2)d_{1,m}\overline{c_{k-2}^{(4)(1,m)}} + \\
& \left. + \delta_{2,k}(k-2)M_{k-2}^{(1)(1,m)} - \lambda_{k,1}M_1^{(3)(1,m)} + \overline{M_k^{(4)(1,m)}} \right\}. \quad (3.145)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_k^{(4)(2,m)} = \delta_{2,1}^{(m)k} & \left[ s_{1,m}\overline{c_k^{(1)(1,m)}} + (k+2)l_{1,m}c_{k+2}^{(3)(1,m)} + l_{1,m}c_k^{(4)(1,m)} - \right. \\
& - (k+2)r_{1,m}c_{k+2}^{(3)(1,m)} + k(k+2)d_{1,m}\overline{c_k^{(1)(1,m)}} - (k+2)d_{1,m}\overline{c_{k+2}^{(2)(1,m)}} + \\
& \left. + \overline{M_k^{(2)(1,m)}} - (k+2)M_{k+2}^{(3)(1,m)} \right]. \quad (3.146)
\end{aligned}$$

Полученные соотношения (3.143) - (3.146) запишем в виде ( $l = 1, \dots, 4; k = 1, \dots, \infty; m = 1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned}
c_k^{(l)(2,m)} = \delta_{2,1}^{(m)k} & \left[ \sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{\infty} \left( P_{k,v}^{(p,l)(1,m)} c_v^{(p)(1,m)} + Q_{k,v}^{(p,l)(1,m)} \overline{c_v^{(p)(1,m)}} \right) + \right. \\
& \left. + N_k^{(l)(1,m)} \right], \quad (3.147)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{k,v}^{(1,1)(1,m)} = \lambda_{k,v}r_{1,m}, \quad P_{k,v}^{(2,1)(1,m)} = P_{k,v}^{(3,1)(1,m)} = P_{k,v}^{(4,1)(1,m)} = 0, \\
Q_{k,v}^{(1,1)(1,m)} = Q_{k,v}^{(2,1)(1,m)} = 0, \quad Q_{k,v}^{(3,1)(1,m)} = \lambda_{v,k+2}d_{1,m}(k+2), \quad (3.148)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{k,v}^{(4,1)(1,m)} = \lambda_{v,k}d_{1,m}, \quad N_k^{(1)(1,m)} = M_k^{(1)(1,m)}; \\
P_{k,v}^{(1,2)(1,m)} = \lambda_{v,k-2}(k-2)(r_{1,m} - l_{1,m}), \quad P_{k,v}^{(2,2)(1,m)} = \lambda_{v,k}l_{1,m}, \\
P_{k,v}^{(3,2)(1,m)} = \lambda_{k,1}\lambda_{v,k}(l_{1,m} - r_{1,m}), \quad P_{k,v}^{(4,2)(1,m)} = 0, \\
Q_{k,v}^{(1,2)(1,m)} = 0, \quad Q_{k,v}^{(2,2)(1,m)} = -\lambda_{k,1}\lambda_{v,k}d_{1,m}, \quad (3.149)
\end{aligned}$$

$$Q_{k,v}^{(3,2)(1,m)} = \lambda_{v,k}[\delta_{2,k}k(k-2)d_{1,m} + s_{1,m} - \lambda_{k,1}d_{1,m}],$$

$$Q_{k,v}^{(4,2)(1,m)} = \lambda_{v,k-2}(k-2)d_{1,m},$$

$$N_k^{(2)(1,m)} = \delta_{2,k}(k-2)M_{k-2}^{(1)(1,m)} - \lambda_{k,1}M_k^{(3)(1,m)} + \overline{M_k^{(4)(1,m)}};$$

$$\begin{aligned}
P_{k,\nu}^{(1,3)(1,m)} &= P_{k,\nu}^{(2,3)(1,m)} = P_{k,\nu}^{(4,3)(1,m)} = 0, \quad P_{k,\nu}^{(3,3)(1,m)} = \lambda_{k,\nu} r_{1,m}, \\
Q_{k,\nu}^{(1,3)(1,m)} &= -\lambda_{k-2,\nu} (k-2) d_{1,m}; \quad Q_{k,\nu}^{(2,3)(1,m)} = \lambda_{k,\nu} d_{1,m}, \\
Q_{k,\nu}^{(3,3)(1,m)} &= \lambda_{k,1} \lambda_{\nu,k} d_{1,m}, \quad Q_{k,\nu}^{(4,3)(1,m)} = 0, \quad N_k^{(3)(1,m)} = M_k^{(3)(1,m)},
\end{aligned} \tag{3.150}$$

$$\begin{aligned}
P_{k,\nu}^{(1,4)(1,m)} &= P_{k,\nu}^{(2,4)(1,m)} = 0, \quad P_{k,\nu}^{(3,4)(1,m)} = \lambda_{k+2,\nu} (k+2) (l_{1,m} - r_{1,m}), \\
P_{k,\nu}^{(4,4)(1,m)} &= \lambda_{k,\nu} l_{1,m}, \quad Q_{k,\nu}^{(1,4)(0,m)} = \lambda_{k,\nu} [s_{1,m} + k(k+2) d_{1,m}], \\
Q_{k,\nu}^{(2,4)(1,m)} &= -\lambda_{k+2,\nu} (k+2) d_{1,m}, \quad Q_{k,\nu}^{(3,4)(1,m)} = 0, \\
N_k^{(4)(1,m)} &= \overline{M_k^{(2)(1,m)}} - (k+2) M_{k+2}^{(3)(1,m)}.
\end{aligned} \tag{3.151}$$

3.7 Соотношения, связывающие коэффициенты разложений потенциалов в областях  $S_{2,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ) и в среде  $S_0$

Установим соотношения между коэффициентами  $c_k^{(l)(2,m)}$  ( $l=1, \dots, 4$ ;  $k=1, \dots, \infty$ ) разложений в ряды комплексных потенциалов  $\varphi_{2,m}(z-z_m)$ ,  $\psi_{2,m}(z-z_m)$  и коэффициентами  $c_k^{(l)(0,m)}$  ( $l=1, 2$ ;  $k=1, \dots, \infty$ ) разложений в ряды комплексных потенциалов  $\varphi_{0,m}(z-z_m)$ ,  $\psi_{0,m}(z-z_m)$  ( $m=1, \dots, N$ ).

На основании соотношения (3.133) запишем ( $p=1, \dots, 4$ ;  $\nu=1, \dots, \infty$ ;  $m=1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned}
c_\nu^{(p)(1,m)} &= \delta_{1,0}^{(m)} e^{(p,\nu)} \left[ \sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( P_{\nu,\mu}^{(s,p)(0,m)} c_\mu^{(s)(0,m)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(0,m)} \overline{c_\mu^{(p)(0,m)}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + N_\nu^{(p)(0,m)} \right], \tag{3.152}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{c_\nu^{(p)(1,m)}} &= \delta_{1,0}^{(m)} e^{(p,\nu)} \left[ \sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( P_{\nu,\mu}^{(s,p)(0,m)} \overline{c_\mu^{(s)(0,m)}} + Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(0,m)} c_\mu^{(p)(0,m)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \overline{N_\nu^{(p)(0,m)}} \right]. \tag{3.153}
\end{aligned}$$

Подставляя (3.152), (3.153) в (3.147), имеем

$$c_k^{(l)(2,m)} = \delta_{2,1}^{(m)} e^{(l,k)} \left[ \sum_{p=1}^2 \sum_{v=1}^{\infty} \left( V_{k,v}^{(p,l)(m)} c_v^{(p)(0,m)} + \right. \right. \\ \left. \left. + W_{k,v}^{(p,l)(m)} \overline{c_v^{(p)(0,m)}} \right) + X_k^{(l)(m)} \right], \quad (3.154)$$

где введены следующие обозначения

$$V_{k,v}^{(p,l)(m)} = \sum_{s=1}^4 \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta_{1,0}^{(m)} e^{(s,\mu)} \left( P_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} P_{\mu,v}^{(p,s)(0,m)} + \right. \\ \left. + Q_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} Q_{\mu,v}^{(p,s)(0,m)} \right); \quad (3.155)$$

$$W_{k,v}^{(p,l)(m)} = \sum_{s=1}^4 \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta_{1,0}^{(m)} e^{(s,\mu)} \left( P_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} Q_{\mu,v}^{(p,s)(0,m)} + \right. \\ \left. + Q_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} P_{\mu,v}^{(p,s)(0,m)} \right); \quad (3.156)$$

$$X_k^{(l)(m)} = N_k^{(l)(1,m)} + \sum_{s=1}^4 \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta_{1,0}^{(m)} e^{(s,\mu)} \left( P_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} N_{\mu}^{(s)(0,m)} + \right. \\ \left. + Q_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} \overline{N_{\mu}^{(s)(0,m)}} \right). \quad (3.157)$$

Разделяя в (3.154) действительные и мнимые части комплексных величин, запишем результат в виде ( $l = 1, \dots, 4$ ;  $m = 1, \dots, N$ ;  $k = 1, \dots, \infty$ ):

$$c_v^{(p)(2,m)*} = \delta_{2,1}^{(m)} e^{(p,v)} \left[ \sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( V_{v,\mu}^{(s,p)(m)} + W_{v,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)*} + \right. \\ \left. + X_v^{(p)(m)*} \right]; \quad (3.158)$$

$$c_v^{(p)(2,m)**} = \delta_{2,1}^{(m)} e^{(p,v)} \left[ \sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( V_{v,\mu}^{(s,p)(m)} - W_{v,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)**} + \right. \\ \left. + X_v^{(p)(m)**} \right]. \quad (3.159)$$

Знаками «\*» и «\*\*» здесь и далее обозначены действительные и мнимые части комплексных величин.

### 3.8 Формирование и решение систем линейных алгебраических уравнений

Для получения разрешающих систем линейных алгебраических уравнений относительно действительных и мнимых частей неизвестных комплексных коэффициентов  $c_v^{(p)(0,m)}$  ( $p = 1, 2$ ;  $m = 1, \dots, N$ ;  $v = 1, \dots, \infty$ ) воспользуемся соотношениями (3.23).

Запишем представления (3.33) и (3.34) на контурах  $L_{2,m}$ , т.е. при  $z = t_{2,m} = z_m + R_{2,m}\sigma$  ( $m = 1, \dots, N$ ). Пренебрегая константами, имеем:

$$\varphi_{2,m}(t_{2,m} - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(2,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(3)(2,m)} \sigma^k; \quad (3.160)$$

$$\dot{\varphi}_{2,m}(t_{2,m} - z_m) = -\frac{1}{R_{2,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(1)(2,m)} \sigma^{-(k+1)} + \frac{1}{R_{2,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(3)(2,m)} \sigma^{k-1}, \quad (3.161)$$

$$\overline{\dot{\varphi}_{2,m}(t_{2,m} - z_m)} = -\frac{1}{R_{2,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(2,m)}} \sigma^{k+1} + \frac{1}{R_{2,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(3)(2,m)}} \sigma^{-(k-1)}, \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} \overline{(t_{2,m} - z_m) \dot{\varphi}_{2,m}(t_{2,m} - z_m)} &= -\sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(2,m)}} \sigma^{k+2} + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(3)(2,m)}} \sigma^{-(k-2)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(2,m)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_{k,1} \overline{c_1^{(3)(2,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(2,m)}} \right] \sigma^k, \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\overline{\psi_{2,m}(t_{2,m} - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(2,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(2,m)}} \sigma^{-k}. \quad (3.164)$$

Подставляя в (3.23) представления (3.160), (3.163) и (3.164), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(2,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(3)(2,m)} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(2,m)}} \sigma^{-k} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_{k,1} \overline{c_1^{(3)(2,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(2,m)}} \right] \sigma^k + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(2,m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(2,m)}} \sigma^{-k} = 0. \end{aligned} \quad (3.165)$$

После приравнивания в (3.165) коэффициентов при одинаковых степенях переменной  $\sigma$  имеем ( $m = 1, \dots, N$ ;  $k = 1, \dots, \infty$ ):

- при положительных степенях

$$c_k^{(3)(2,m)} + \lambda_{k,1} \overline{c_1^{(3)(2,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(2,m)}} + \overline{c_k^{(2)(2,m)}} = 0; \quad (3.166)$$

- при отрицательных степенях

$$c_k^{(1)(2,m)} + (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(2,m)}} + \overline{c_k^{(4)(2,m)}} = 0. \quad (3.167)$$

После разделения действительных и мнимых частей комплексных величин в (3.166), (3.167) получим:

$$c_k^{(3)(2,m)*} + \lambda_{k,1} c_k^{(3)(2,m)*} - \delta_{2,k} (k-2) c_{k-2}^{(1)(2,m)*} + c_k^{(2)(2,m)*} = 0; \quad (3.168)$$

$$c_k^{(3)(2,m)**} - \lambda_{k,1} c_k^{(3)(2,m)**} + \delta_{2,k} (k-2) c_{k-2}^{(1)(2,m)**} - c_k^{(2)(2,m)**} = 0; \quad (3.169)$$

$$c_k^{(1)(2,m)*} + (k+2) c_{k+2}^{(3)(2,m)*} + c_k^{(4)(2,m)*} = 0; \quad (3.170)$$

$$c_k^{(1)(2,m)**} - (k+2) c_{k+2}^{(3)(2,m)**} - c_k^{(4)(2,m)**} = 0. \quad (3.171)$$

Полученные уравнения (3.168) - (3.171) запишем в виде ( $m=1, \dots, N$ ;

$k=1, \dots, \infty$ ):

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,1)} c_{\nu}^{(p)(2,m)*} = 0; \quad (3.172)$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,2)} c_{\nu}^{(p)(2,m)**} = 0; \quad (3.173)$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,3)} c_{\nu}^{(p)(2,m)*} = 0; \quad (3.174)$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,4)} c_{\nu}^{(p)(2,m)**} = 0; \quad (3.175)$$

где

$$T_{k,\nu}^{(1,1)} = -\lambda_{\nu,k-2\nu}, T_{k,\nu}^{(2,1)} = \lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(3,1)} = \lambda_{\nu,k} (1 + \lambda_{k,1}), T_{k,\nu}^{(4,1)} = 0;$$

$$T_{k,\nu}^{(1,2)} = \lambda_{\nu,k-2\nu}, T_{k,\nu}^{(2,2)} = -\lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(3,2)} = \lambda_{\nu,k} (1 - \lambda_{k,1}), T_{k,\nu}^{(4,2)} = 0;$$

$$T_{k,\nu}^{(1,3)} = \lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(2,3)} = 0, T_{k,\nu}^{(3,3)} = \lambda_{\nu,k+2\nu}, T_{k,\nu}^{(4,3)} = \lambda_{\nu,k}; \quad (3.176)$$

$$T_{k,\nu}^{(1,4)} = \lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(2,4)} = 0, T_{k,\nu}^{(3,4)} = -\lambda_{\nu,k+2\nu}, T_{k,\nu}^{(4,4)} = -\lambda_{\nu,k}.$$

Подставляя выражения (3.158), (3.159) в уравнения (3.172) - (3.175), получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно соответственно действительных  $c_{\mu}^{(s)(0,m)*}$  и мнимых  $c_{\mu}^{(s)(0,m)**}$  частей коэффициентов  $c_{\mu}^{(s)(0,m)}$  ( $s = 1, 2; \mu = 1, \dots, \infty; m = 1, \dots, N$ ):

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{\infty} T_{k,v}^{(p,1)} \delta_{2,1}^{(m) e(p,v)} \left[ \sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( V_{v,\mu}^{(s,p)(m)} + W_{v,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)*} + \right. \\ \left. + X_v^{(p)(m)*} \right] = 0, \quad (3.177)$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{\infty} T_{k,v}^{(p,2)} \delta_{2,1}^{(m) e(p,v)} \left[ \sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( V_{v,\mu}^{(s,p)(m)} - W_{v,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)**} + \right. \\ \left. + X_v^{(p)(m)**} \right] = 0, \quad (3.178)$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{\infty} T_{k,v}^{(p,3)} \delta_{2,1}^{(m) e(p,v)} \left[ \sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( V_{v,\mu}^{(s,p)(m)} + W_{v,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)*} + \right. \\ \left. + X_v^{(p)(m)*} \right] = 0, \quad (3.179)$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{\infty} T_{k,v}^{(p,4)} \delta_{2,1}^{(m) e(p,v)} \left[ \sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( V_{v,\mu}^{(s,p)(m)} - W_{v,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)**} + \right. \\ \left. + X_v^{(p)(m)**} \right] = 0. \quad (3.180)$$

Соотношения (3.177) - (3.180) можно привести к виду ( $k = 1, \dots, \infty; m = 1, \dots, N$ )

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} U_{k,\mu}^{(s,q)(m)'} c_{\mu}^{(s)(0,m)*} = Y_k^{(q)(m)'}, \quad q = 1, 2; \quad (3.181)$$

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} U_{k,\mu}^{(s,q)(m)''} c_{\mu}^{(s)(0,m)**} = Y_k^{(q)(m)''}, \quad q = 1, 2; \quad (3.182)$$

где

$$U_{k,\mu}^{(s,1)(m)'} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,1)} \left( V_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + W_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right); \quad (3.183)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)(m)'} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,3)} \left( V_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + W_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right); \quad (3.184)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,1)(m)''} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,2)} \left( V_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - W_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right); \quad (3.185)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)(m)''} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,4)} \left( V_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - W_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right); \quad (3.186)$$

$$Y_k^{(1)(m)'} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,1)} X_{\nu}^{(p)(m)*}; \quad (3.187)$$

$$Y_k^{(2)(m)'} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,3)} X_{\nu}^{(p)(m)*}; \quad (3.188)$$

$$Y_k^{(1)(m)''} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,2)} X_{\nu}^{(p)(m)**}; \quad (3.189)$$

$$Y_k^{(2)(m)''} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,4)} X_{\nu}^{(p)(m)**}. \quad (3.190)$$

### 3.9 Итерационный процесс решения задачи

Для решения задачи в целом используется апробированный сходящийся итерационный метод [8].

В представлениях (3.35), (3.36) будем ограничиваться конечным числом членов  $c_{\mu}^{(1)(0,m)}$ , равным  $n$ , и  $c_{\mu}^{(2)(0,m)}$ , равным  $n+2$ .

На каждом шаге итерационного процесса находятся решения двух полученных выше бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (3.181), (3.182) для  $m$ -того отверстия ( $m=1, \dots, N$ ), соответственным образом укороченных, число которых в каждой из систем составляет  $2n+2$ .

В нулевом приближении коэффициенты  $c_{\mu}^{(1)(0,m)}$  и  $c_{\mu}^{(2)(0,m)}$  ( $m=1,\dots,N$ ) полагаются равными нулю, т.е.

$$c_{\mu}^{(1)(0,m)} = 0 \quad (\mu=1,\dots,n); \quad c_{\mu}^{(2)(0,m)} = 0 \quad (\mu=1,\dots,n+2). \quad (3.191)$$

С их использованием по формулам (3.52), (3.54) находятся  $c_k^{(3)(m,j)}$ ,  $c_k^{(4)(m,j)}$ , по формулам (3.51) определяются величины  $C_k^{(3)(m,j)}$ ,  $C_k^{(4)(m,j)}$  ( $j=1,\dots,N$ ). Затем определяются следующие величины:  $L_k^{(p)(0,m)}$  ( $p=1,\dots,4$ ) по формулам (3.71) - (3.74);  $M_k^{(p)(0,m)}$  ( $p=1,\dots,4$ ) по формулам (3.95);  $N_k^{(p)(0,m)}$  ( $p=1,\dots,4$ ) по формулам из (3.135) - (3.138);  $L_k^{(p)(1,m)}$  ( $p=1,\dots,4$ ) по формулам (3.85) - (3.88);  $M_k^{(p)(1,m)}$  ( $p=1,\dots,4$ ) по формулам (3.95);  $N_k^{(p)(1,m)}$  ( $p=1,\dots,4$ ) по формулам из (3.148) - (3.151). В конечном итоге с использованием соотношений (3.187) - (3.190) вычисляются коэффициенты  $Y_k^{(1)(m)'}$ ,  $Y_k^{(1)(m)''}$  столбцов свободных членов обеих систем.

Из решения систем уравнений (3.181), (3.182) на каждом шаге итерационного процесса определяются текущие значения действительных и мнимых частей коэффициентов  $c_{\mu}^{(1)(0,m)}$  ( $\mu=1,\dots,n$ ) и  $c_{\mu}^{(2)(0,m)}$  ( $\mu=1,\dots,n+2$ ).

С их использованием выполняется очередной шаг итерационного процесса, включающий обновление столбцов свободных членов систем уравнений.

Процесс вычислений продолжается до тех пор, пока абсолютные значения разности коэффициентов  $c_{\mu}^{(1)(0)}$  ( $\mu=1,\dots,n$ ) и  $c_{\mu}^{(2)(0)}$  ( $\mu=1,\dots,n+2$ ) в двух последовательных итерациях будут различаться на заранее заданную достаточно малую величину, например,  $10^{-6}$ .

С использованием найденных коэффициентов  $c_{\mu}^{(1)(0,m)}$  ( $\mu=1,\dots,n; m=1,\dots,N$ ) и  $c_{\mu}^{(2)(0,m)}$  ( $\mu=1,\dots,n+2; m=1,\dots,N$ ) по формулам

(3.133), (3.147) определяются коэффициенты  $c_k^{(l)(i,m)}$  ( $l=1,4$ ;  $k=1,\dots,n$ ;  $i=1,2$ ;  $m=1,\dots,N$ ),  $c_k^{(l)(i,m)}$  ( $l=2,3$ ;  $k=1,\dots,n+2$ ;  $i=1,2$ ;  $m=1,\dots,N$ ) разложений комплексных потенциалов  $\varphi_{i,m}(z-z_m)$ ,  $\psi_{i,m}(z-z_m)$  ( $i=1,2$ ;  $m=1,\dots,N$ ), характеризующих напряженное состояние областей  $S_{i,m}$  ( $i=1,2$ ;  $m=1,\dots,N$ ), моделирующих слои технологически неоднородного грунта и обделок.

### 3.10 Вычисление напряжений

Дополнительные напряжения в области  $S_0$ , моделирующей массив грунта, определяются на основе формул Колосова - Мусхелишвили [88], которые принимают вид:

- в декартовой системе координат  $xOy$  ( $z = x + iy$ )

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left[ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) - \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) - \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right]; \\ \sigma_y^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left[ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) + \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right]; \\ \tau_{xy}^{(0)} &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^N \left[ \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right];\end{aligned}\quad (3.192)$$

- в системе координат  $rO\theta$  на контурах  $L_{0,m}$  ( $z = z_m + R_{0,m}e^{i\theta}$ ,  $m=1,\dots,N$ )

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(0,m)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left\{ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) - \left[ \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}; \\ \sigma_\theta^{(0,m)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left\{ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) + \left[ \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}; \\ \tau_{r\theta}^{(0,m)} &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^N \left\{ \left[ \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}.\end{aligned}\quad (3.193)$$

Полярный угол  $\theta$  отсчитывается от положительного направления оси  $Ox$  против хода часовой стрелки.

Из формул (3.37) и (3.38) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) = & -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} \right. \\ & \times \left. \left\{ \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left[ 1 - (k+1) \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] + c_k^{(2)(0,j)} \right\} \right\rangle - \frac{1}{R_{0,j}} \cdot \frac{1}{1+\alpha_0} \times \\ & \times \left\{ 2\overline{K_j} h_j \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} + iK_j \left[ \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} + \alpha_0 \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (3.194)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ & + \left. \left\{ (k+2) \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right) \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - 2 \right\} \overline{c_k^{(1)(0,j)}} - \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\rangle \times \\ & \times \left\langle \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right\rangle + \frac{4\overline{K_j} h_j}{(1+\alpha_0)R_{0,j}^2} \cdot \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-3} + \\ & + \frac{iK_j}{(1+\alpha_0)R_{0,j}^2} \left[ \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-2} + \alpha_0 \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} \right]; \end{aligned} \quad (3.195)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -kc_k^{(2)(0,j)} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} + k \left( 2(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} + kc_k^{(2)(0,j)} \right) \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - k(k+1)^2 \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2\overline{K_j} h_j}{1+\alpha_0} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} - \frac{i\overline{K_j}}{1+\alpha_0} \left[ \alpha_0 \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} + \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Для вычисления полных напряжений в точках области  $S_0$  к найденным дополнительным напряжениям прибавляются соответствующие начальные напряжения, определяемые из соотношений (2.1).

Формулы для дополнительных напряжений, возникающих в точках колец  $S_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ), моделирующих слои технологически неоднородных пород, в полярной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1,m)} + \sigma_\theta^{(1,m)} &= 4 \operatorname{Re} \varphi_{1,m}^{*'}(z - z_m), \\ \sigma_\theta^{(1,m)} - \sigma_r^{(1,m)} + 2i \tau_{r\theta}^{(1,m)} &= 2 \left[ \overline{(z - z_m)} \varphi_{1,m}^{*''}(z - z_m) + \psi_{1,m}^{*'}(z - z_m) \right] e^{2i\theta}, \end{aligned} \quad (3.197)$$

откуда несложно получить

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1,m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2 \varphi_{1,m}^{*'}(z - z_m) - \left[ \overline{(z - z_m)} \varphi_{1,m}^{*''}(z - z_m) + \psi_{1,m}^{*'}(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \sigma_\theta^{(1,m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2 \varphi_{1,m}^{*'}(z - z_m) + \left[ \overline{(z - z_m)} \varphi_{1,m}^{*''}(z - z_m) + \psi_{1,m}^{*'}(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \tau_{r\theta}^{(1,m)} &= \operatorname{Im} \left\{ \left[ \overline{(z - z_m)} \varphi_{1,m}^{*''}(z - z_m) + \psi_{1,m}^{*'}(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.198)$$

Для определения напряжений в точках контуров  $L_{0,m}$  и  $L_{1,m}$ , ограничивающих области  $S_{1,m}$ , найдем необходимые производные от функций  $\varphi_{1,m}^{*'}(z - z_m)$ ,  $\varphi_{1,m}^{*''}(z - z_m)$  ( $m=1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_{1,m}^{*'}(z - z_m) &= \frac{1}{R_{1,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ -c_k^{(1)(1,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(3)(1,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-1} \right] - \\ &\quad - \frac{iK_m}{1 + \alpha_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{1,m}} \cdot \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.199)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,m}^{*''}(z - z_m) &= \frac{1}{R_{1,m}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ (k+1) c_k^{(1)(1,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ &\quad \left. + (k-1) c_k^{(3)(1,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-2} \right] + \frac{iK_m}{1 + \alpha_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{1,m}^2} \cdot \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-2}, \end{aligned} \quad (3.200)$$

$$\begin{aligned} \psi_{1,m}^{*'}(z - z_m) &= \frac{1}{R_{1,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ -c_k^{(2)(1,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(4)(1,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-1} \right] - \\ &\quad - \frac{i \alpha_{1,m} \overline{K_m}}{1 + \alpha_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{1,m}} \cdot \left( \frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.201)$$

где

$$z = \begin{cases} z_m + R_{0,m} e^{i\theta} & \text{на внешнем контуре } L_{0,m} \text{ области } S_{1,m}; \\ z_m + R_{1,m} e^{i\theta} & \text{на внутреннем контуре } L_{1,m} \text{ области } S_{1,m}. \end{cases} \quad (3.202)$$

Подстановка выражений (3.199) - (3.201) в формулы (3.198) позволяет получить компоненты дополнительных напряжений в точках соответствующих контуров в полярной системе координат.

Для вычисления полных напряжений в точках областей  $S_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ) к найденным дополнительным напряжениям прибавляются соответствующие начальные напряжения, определяемые соотношениями (2.1).

Формулы для напряжений, возникающих в точках колец  $S_{2,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ), моделирующих обделки тоннелей, в полярной системе координат имеют вид, аналогичный (3.198):

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2,m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi'_{2,m}(z-z_m) - \left[ \overline{(z-z_m)} \varphi''_{2,m}(z-z_m) + \psi'_{2,m}(z-z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \sigma_\theta^{(2,m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi'_{2,m}(z-z_m) + \left[ \overline{(z-z_m)} \varphi''_{2,m}(z-z_m) + \psi'_{2,m}(z-z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \tau_{r\theta}^{(2,m)} &= \operatorname{Im} \left\{ \left[ \overline{(z-z_m)} \varphi''_{2,m}(z-z_m) + \psi'_{2,m}(z-z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.203)$$

Для определения напряжений в точках контуров  $L_{1,m}$  и  $L_{2,m}$ , ограничивающих области  $S_{2,m}$ , найдем соответствующие производные от функций  $\varphi_{2,m}(z-z_m)$ ,  $\psi_{2,m}(z-z_m)$  ( $m=1, \dots, N$ ), определяемых (3.33), (3.34):

$$\varphi'_{2,m}(z-z_m) = \frac{1}{R_{2,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ -c_k^{(1)(2,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{2,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(3)(2,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{2,m}} \right)^{k-1} \right]; \quad (3.204)$$

$$\begin{aligned} \varphi''_{2,m}(z-z_m) &= \frac{1}{R_{2,m}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ (k+1)c_k^{(1)(2,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{2,m}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ &\quad \left. + (k-1)c_k^{(3)(2,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{2,m}} \right)^{k-2} \right]; \quad (3.205) \end{aligned}$$

$$\psi'_{2,m}(z - z_m) = \frac{1}{R_{2,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ -c_k^{(2)(2,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{2,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(4)(2,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{2,m}} \right)^{k-1} \right], \quad (3.206)$$

где

$$z = \begin{cases} z_m + R_{1,m} e^{i\theta} & \text{на внешнем контуре } L_{1,m} \text{ области } S_{2,m}; \\ z_m + R_{2,m} e^{i\theta} & \text{на внутреннем контуре } L_{2,m} \text{ области } S_{2,m}. \end{cases} \quad (3.207)$$

Подстановка выражений (3.204) - (3.206) в формулы (3.203) позволяет получить компоненты напряжений в точках соответствующих контуров областей  $S_{2,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) в полярной системе координат.

Приведенное решение составляет основу метода расчета обделок взаимодействующих параллельных круговых тоннелей, пройденных закрытым способом в технологически неоднородных грунтах вблизи наклонной земной поверхности, на действие гравитационных сил [15, 91, 135 - 138].

### Выводы по главе 3

1. Обосновано применение для решения поставленной в разделе 2 задачи теории упругости математического аппарата ТФКП, предусматривающего использование потенциалов Колосова-Мусхелишвили.

2. Приведены граничные условия краевой задачи ТФКП; введены необходимые представления комплексных потенциалов, характеризующих напряжённо-деформированное состояние рассматриваемых областей.

3. Получено строгое аналитическое решение краевой задачи на основе теории аналитического продолжения комплексных потенциалов через границу полуплоскости, свойств интегралов типа Коши и рядов Лорана.

4. Решение поставленной задачи теории упругости о равновесии весомой линейно-деформируемой полуплоскости с наклонной границей, ослабленной конечным числом круговых отверстий, подкреплённых кольцами, вокруг которых выделены концентрические области из материала с отличающимися деформационными характеристиками, сведено к сходящемуся

итерационному процессу, на каждом шаге которого решается задача о напряженном состоянии двухслойного кольца в линейно-деформируемой плоскости при граничных условиях, содержащих дополнительные члены в виде рядов Лорана, отвечающие за влияние наклонной границы и соседних отверстий.

## 4 АЛГОРИТМ И ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА

Определение напряжённого состояния массива пород и обделок параллельных тоннелей, сооружённых вблизи наклонной поверхности в технологически неоднородных породах, базируется на полученном в разделе 3 решении задачи теории упругости о равновесии весомой полуплоскости с наклонной границей, ослабленной конечным числом круговых отверстий, подкреплённых кольцами, вокруг которых выделены концентрические области из материала с отличающимися деформационными характеристиками.

### 4.1 Алгоритм расчёта

Общими исходными данными для расчёта являются:

$\beta$  - угол наклона земной поверхности, градусы;

$N$  - количество параллельных тоннелей;

$H'$  - расстояние от центра поперечного сечения тоннеля, с которым совмещено начало системы координат  $X'OY'$ , по вертикали до земной поверхности, м (рис. 2.3);

$E_0$ , МПа - модуль деформации пород;

$\nu_0$  - коэффициент Пуассона пород;

$\lambda$  - коэффициент бокового давления в ненарушенном массиве пород;

$\gamma$ , МН/м<sup>3</sup> - удельный вес пород;

$\Delta\theta$  - приращение угла  $\theta$ , определяющего положение радиального сечения, в точках которого вычисляются напряжения. Угол отсчитывается от положительного направления оси  $OX$  против хода часовой стрелки.

$\varepsilon$  - величина погрешности, определяющая прекращение итерационного процесса решения задачи ( $\varepsilon < 10^{-6}$ );

$K_c$  - число удерживаемых членов разложений в ряды используемых комплексных потенциалов, обеспечивающее достижение точности удовлетворения граничных условий;

$I_{\max}$  - максимальное число выполняемых шагов итерационного процесса, при котором ожидается достижение точности результатов расчетов, задаваемой величиной погрешности  $\varepsilon$ .

Для каждого из тоннелей с номером  $j$  ( $j=1, \dots, N$ ) задаются

$x'_j, y'_j, m$  - координаты центра поперечного сечения в системе  $X'OY'$ ;

$R_{0,j}, m$  - наружный радиус поперечного сечения зоны технологически неоднородных пород вокруг обделки  $j$  - того тоннеля;

$R_{1,j}, m$  - внутренний радиус поперечного сечения зоны технологически неоднородных пород вокруг обделки  $j$  - того тоннеля;

$R_{2,j}, m$  - внутренний радиус поперечного сечения обделки  $j$  - того тоннеля;

$E_{1,j}, \text{МПа}$  - модуль деформации материала зоны технологически неоднородных пород вокруг обделки  $j$  - того тоннеля;

$\nu_{1,j}$  - коэффициент Пуассона материала зоны технологически неоднородных пород вокруг обделки  $j$  - того тоннеля;

$E_{2,j}, \text{МПа}$  - модуль деформации материала обделки  $j$  - того тоннеля;

$\nu_{2,j}$  - коэффициент Пуассона материала обделки  $j$  - того тоннеля.

Алгоритм предусматривает выполнение следующих операций.

1. Определение количества уравнений в разрешающих системах:

$$K_u = 2 \cdot K_c + 2. \quad (4.1)$$

2. Координаты центров поперечных сечений тоннелей в комплексном виде и геометрические параметры

$$z_j = x_j + iy_j; \quad H_j = H' \cos \beta - y_j; \quad h_j = \frac{H_j}{R_{0,j}} \quad (j=1, \dots, N), \quad (4.2)$$

где  $i$  - мнимая единица ( $i^2 = -1$ ).

3. Главные векторы усилий, действующих на контурах  $L_{1,j}$ :

$$K_j = \frac{\gamma R_{1,j}^2}{2} e^{-i\beta} \quad (j=1, \dots, N). \quad (4.3)$$

4. Деформационные характеристики массива пород:

$$\alpha_0 = 3 - 4\nu_0; \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}; \quad \mu_{0,m} = \mu_0 \quad (m=1, \dots, N). \quad (4.4)$$

5. Деформационные характеристики для материалов зон технологически неоднородных пород ( $p=0$ ) и обделок ( $p=1$ ) тоннелей ( $m=1, \dots, N$ ):

$$r_{p,m} = \frac{1 + \alpha_p \frac{\mu_{p+1,m}}{\mu_{p,m}}}{1 + \alpha_{p+1,m}}, \quad d_{p,m} = \frac{1 - \frac{\mu_{p+1,m}}{\mu_{p,m}}}{1 + \alpha_{p+1,m}}; \quad s_{p,m} = 1 - r_{p,m}, \quad l_{p,m} = 1 - d_{p,m}. \quad (4.5)$$

6. Для  $m=1, \dots, N$  и  $j=1, \dots, N$  определяются величины

$$\varepsilon_{m,j}' = \left( \frac{z_m - z_j}{R_{0,m}} - 2i \frac{H_j}{R_{0,j}} \delta_{m,j}^{(0)-1} \right)^{-1}; \quad \delta_{m,j}^{(0)} = \frac{R_{0,m}}{R_{0,j}}; \quad \varepsilon_{m,j} = \frac{R_{0,m}}{z_m - z_j} \quad (j \neq m). \quad (4.6)$$

7. Определяются массивы чисел ( $k=1, \dots, K_c + 4$ ,  $n=0, 1, \dots, K_c + 3$ ) с использованием рекуррентных соотношений:

$$C_{-k}^0 = 1; \quad C_{-k}^{n+1} = -\frac{k+n}{n+1} C_{-k}^n. \quad (4.7)$$

8. Вычисляются массивы чисел ( $m=1, \dots, N$ ;  $j=1, \dots, N$ ;  $k=1, \dots, K_c + 2$ ;  $n=1, \dots, K_c + 2$ ):

$$I_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \delta_{m,j}^{(0)-k} \varepsilon_{m,j}^{n+k}; \quad \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \delta_{m,j}^{(0)-k} \cdot (\varepsilon_{m,j}')^{n+k}. \quad (4.8)$$

9. Далее используются следующие коэффициенты

$$\lambda_{m,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = j, \\ 0, & \text{если } m \neq j. \end{cases} \quad (4.9)$$

10. Определяются величины ( $m=1, \dots, N$ ;  $j=1, \dots, N$ ;  $k=1, \dots, K_c + 2$ ):

$$\tilde{c}_k^{(3)(m,j)} = \frac{1}{1 + \mathfrak{a}_0} \left\{ 2\overline{K}_j \frac{H_j}{R_{0,j}} \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + \right. \\ \left. + iK_j \frac{(-1)^k}{k} \left[ (1 - \lambda_{m,j})(\varepsilon_{m,j})^k + \mathfrak{a}_0(\varepsilon'_{m,j})^k \right] \right\}; \quad (4.10)$$

$$\tilde{c}_k^{(4)(m,j)} = \frac{\overline{K}_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \left\{ 2 \frac{H_j}{R_{0,j}} \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i \frac{(-1)^k}{k} \left[ (1 - \lambda_{m,j}) \mathfrak{a}_0 (\varepsilon_{m,j})^k + (\varepsilon'_{m,j})^k \right] \right\}. \quad (4.11)$$

11. Вычисляются коэффициенты  $P_{k,n}^{(p,l)(0,m)}$ ,  $Q_{k,n}^{(p,l)(0,m)}$

( $m = 1, \dots, N$ ;  $p = 1, 2$ ;  $l = 1, \dots, 4$ ;  $k = 1, \dots, K_c + 2$ ;  $\nu = 1, \dots, K_c + 2$ ):

$$P_{k,\nu}^{(1,1)(0,m)} = \lambda_{k,\nu} r_{0,m}, \quad P_{k,\nu}^{(2,1)(0,m)} = 0, \quad (4.12)$$

$$Q_{k,\nu}^{(1,1)(0,m)} = Q_{k,\nu}^{(2,1)(0,m)} = 0;$$

$$P_{k,\nu}^{(1,2)(0,m)} = \lambda_{k-2,\nu} (k-2)(r_{0,m} - l_{0,m}), \quad P_{k,\nu}^{(2,2)(0,m)} = \lambda_{k,\nu} l_{0,m}, \quad (4.13)$$

$$Q_{k,\nu}^{(1,2)(0,m)} = 0, \quad Q_{k,\nu}^{(2,2)(0,m)} = -\lambda_{k,1} \lambda_{k,\nu} d_{0,m};$$

$$P_{k,\nu}^{(1,3)(0,m)} = P_{k,\nu}^{(2,3)(0,m)} = 0, \quad Q_{k,\nu}^{(1,3)(0,m)} = -\lambda_{k-2,\nu} (k-2) d_{0,m}; \quad (4.14)$$

$$Q_{k,\nu}^{(2,3)(0,m)} = \lambda_{k,\nu} d_{0,m};$$

$$P_{k,\nu}^{(1,4)(0,m)} = P_{k,\nu}^{(2,4)(0,m)} = 0, \quad Q_{k,\nu}^{(1,4)(0,m)} = \lambda_{k,\nu} [s_{0,m} + k(k+2)d_{0,m}], \quad (4.15)$$

$$Q_{k,\nu}^{(2,4)(0,m)} = -\lambda_{k+2,\nu} (k+2) d_{0,m}.$$

12. Вычисляются коэффициенты  $P_{k,n}^{(p,l)(1,m)}$ ,  $Q_{k,n}^{(p,l)(1,m)}$

( $m = 1, \dots, N$ ;  $p = 1, \dots, 4$ ;  $l = 1, \dots, 4$ ;  $k = 1, \dots, K_c + 2$ ;  $\nu = 1, \dots, K_c + 2$ ):

$$P_{k,\nu}^{(1,1)(1,m)} = \lambda_{k,\nu} r_{1,m}, \quad P_{k,\nu}^{(2,1)(1,m)} = P_{k,\nu}^{(3,1)(1,m)} = P_{k,\nu}^{(4,1)(1,m)} = 0, \quad (4.16)$$

$$Q_{k,\nu}^{(1,1)(1,m)} = Q_{k,\nu}^{(2,1)(1,m)} = 0, \quad Q_{k,\nu}^{(3,1)(1,m)} = \lambda_{\nu,k+2} d_{1,m} (k+2),$$

$$Q_{k,\nu}^{(4,1)(1,m)} = \lambda_{\nu,k} d_{1,m};$$

$$\begin{aligned}
P_{k,\nu}^{(1,2)(1,m)} &= \lambda_{\nu,k-2}(k-2)(r_{1,m} - l_{1,m}), P_{k,\nu}^{(2,2)(1,m)} = \lambda_{\nu,k}l_{1,m}, \\
P_{k,\nu}^{(3,2)(1,m)} &= \lambda_{k,1}\lambda_{\nu,k}(l_{1,m} - r_{1,m}), P_{k,\nu}^{(4,2)(1,m)} = 0, \\
Q_{k,\nu}^{(1,2)(1,m)} &= 0, Q_{k,\nu}^{(2,2)(1,m)} = -\lambda_{k,1}\lambda_{\nu,k}d_{1,m},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
Q_{k,\nu}^{(3,2)(1,m)} &= \lambda_{\nu,k}[\delta_{2,k}k(k-2)d_{1,m} + s_{1,m} - \lambda_{k,1}d_{1,m}], \\
Q_{k,\nu}^{(4,2)(1,m)} &= \lambda_{\nu,k-2}(k-2)d_{1,m};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{k,\nu}^{(1,3)(1,m)} &= P_{k,\nu}^{(2,3)(1,m)} = P_{k,\nu}^{(4,3)(1,m)} = 0, P_{k,\nu}^{(3,3)(1,m)} = \lambda_{k,\nu}r_{1,m}, \\
Q_{k,\nu}^{(1,3)(1,m)} &= -\lambda_{k-2,\nu}(k-2)d_{1,m}; Q_{k,\nu}^{(2,3)(1,m)} = \lambda_{k,\nu}d_{1,m}, \\
Q_{k,\nu}^{(3,3)(1,m)} &= \lambda_{k,1}\lambda_{\nu,k}d_{1,m}, Q_{k,\nu}^{(4,3)(1,m)} = 0;
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
P_{k,\nu}^{(1,4)(1,m)} &= P_{k,\nu}^{(2,4)(1,m)} = 0, P_{k,\nu}^{(3,4)(1,m)} = \lambda_{k+2,\nu}(k+2)(l_{1,m} - r_{1,m}), \\
P_{k,\nu}^{(4,4)(1,m)} &= \lambda_{k,\nu}l_{1,m}, Q_{k,\nu}^{(1,4)(0,m)} = \lambda_{k,\nu}[s_{1,m} + k(k+2)d_{1,m}], \\
Q_{k,\nu}^{(2,4)(1,m)} &= -\lambda_{k+2,\nu}(k+2)d_{1,m}, Q_{k,\nu}^{(3,4)(1,m)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

13. Вычисляются коэффициенты  $T_{k,\nu}^{(p,q)}$  ( $p=1,\dots,4$ ;  $q=1,\dots,4$ ;

$k=1,\dots,K_C+2$ ;  $\nu=1,\dots,K_C+2$ ):

$$\begin{aligned}
T_{k,\nu}^{(1,1)} &= -\lambda_{\nu,k-2}\nu, T_{k,\nu}^{(2,1)} = \lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(3,1)} = \lambda_{\nu,k}(1 + \lambda_{k,1}), T_{k,\nu}^{(4,1)} = 0; \\
T_{k,\nu}^{(1,2)} &= \lambda_{\nu,k-2}\nu, T_{k,\nu}^{(2,2)} = -\lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(3,2)} = \lambda_{\nu,k}(1 - \lambda_{k,1}), T_{k,\nu}^{(4,2)} = 0; \\
T_{k,\nu}^{(1,3)} &= \lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(2,3)} = 0, T_{k,\nu}^{(3,3)} = \lambda_{\nu,k+2}\nu, T_{k,\nu}^{(4,3)} = \lambda_{\nu,k}; \\
T_{k,\nu}^{(1,4)} &= \lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(2,4)} = 0, T_{k,\nu}^{(3,4)} = -\lambda_{\nu,k+2}\nu, T_{k,\nu}^{(4,4)} = -\lambda_{\nu,k}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

14. Вычисляются коэффициенты ( $m=1,\dots,N$ ;  $p=1,2$ ;  $l=1,\dots,4$ ;

$k=1,\dots,K_C+2$ ;  $\nu=1,\dots,K_C+2$ ):

$$V_{k,\nu}^{(p,l)(m)} = \sum_{s=1}^4 \sum_{\mu=1}^{K_C+2} \delta_{1,0}^{(m)} e^{(s,\mu)} \left( P_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} P_{\mu,\nu}^{(p,s)(0,m)} + Q_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} Q_{\mu,\nu}^{(p,s)(0,m)} \right); \tag{4.21}$$

$$W_{k,\nu}^{(p,l)(m)} = \sum_{s=1}^4 \sum_{\mu=1}^{K_C+2} \delta_{1,0}^{(m)} e^{(s,\mu)} \left( P_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} Q_{\mu,\nu}^{(p,s)(0,m)} + Q_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} P_{\mu,\nu}^{(p,s)(0,m)} \right). \tag{4.22}$$

15. Вычисляются элементы матриц двух систем из  $K_\mu$  линейных алгебраических уравнений относительно искомым действительных  $c_\mu^{(s)(0,m)*}$  и мнимых  $c_\mu^{(s)(0,m)**}$  ( $s=1,2$ ) частей комплексных коэффициентов разложений  $c_\mu^{(1)(0,m)}$  ( $\mu=1,\dots,K_c$ ) и  $c_\mu^{(2)(0,m)}$  ( $\mu=1,\dots,K_c+2$ ):

$$U_{k,\mu}^{(s,1)(m)'} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,1)} \left( V_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + W_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right), \quad k=1,\dots,K_c+2; \quad (4.23)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)(m)'} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,3)} \left( V_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + W_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right), \quad k=1,\dots,K_c; \quad (4.24)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,1)(m)''} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,2)} \left( V_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - W_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right), \quad k=1,\dots,K_c+2; \quad (4.25)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)(m)''} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{2,1}^{(m)e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,4)} \left( V_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - W_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right), \quad k=1,\dots,K_c, \quad (4.26)$$

где

$$\delta_{2,1}^{(m)} = \frac{R_{2,m}}{R_{1,m}}; \quad (4.27)$$

$$e(p,\nu) = \begin{cases} -\nu & \text{при } p=1,2; \\ \nu & \text{при } p=3,4. \end{cases} \quad (4.28)$$

На каждом шаге итерационного процесса осуществляется формирование столбцов свободных членов обеих систем уравнений и их решение.

16. На первом шаге процесса полагается ( $j=1,\dots,N$ ):

$$c_n^{(p)(0,j)} = 0 \quad (p=1,2; \quad n=1,\dots,K_c+2). \quad (4.29)$$

17. Вычисляются коэффициенты ( $m=1,\dots,N; \quad j=1,\dots,N; \quad k=1,\dots,K_c+2$ ):

$$c_k^{(3)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (1-\lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(1)(0,j)} + \right. \\ \left. + n \delta_{m,j}^{(0)} \left( \tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + (\varepsilon_{m,j})^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right]; \quad (4.30)$$

$$c_k^{(4)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(2)(0,j)} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \left( (n+1) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} + n \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right) + \right. \\ \left. + n(n+1) \delta_{m,j}^{(0)} \left( \tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + \varepsilon_{m,j}^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} \right]. \quad (4.31)$$

18. Вычисляются коэффициенты:

$$C_k^{(p)(m,j)} = c_k^{(p)(m,j)} + \tilde{c}_k^{(p)(m,j)} \quad (p=3,4; m, j=1, \dots, N; k=1, \dots, K_c + 2). \quad (4.32)$$

19. Вычисляются коэффициенты  $L_k^{(l)(0,m)}$  ( $l=1, \dots, 4; m=1, \dots, N;$

$k=1, \dots, K_c + 2$ ):

$$L_k^{(1)(0,m)} = \sum_{j=1}^N \left[ (k+1) (\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right], \quad (4.33)$$

$$L_k^{(2)(0,m)} = \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left[ -(k+1) (\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} - (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} - \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right]; \quad (4.34)$$

$$L_k^{(3)(0,m)} = \sum_{j=1}^N \left( C_k^{(3)(m,j)} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) + \lambda_{k,2} i \overline{K_m} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon_0} - \frac{1}{1 + \varepsilon_{1,m}} \right); \quad (4.35)$$

$$L_k^{(4)(0,m)} = \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left( \varepsilon_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) + \\ + \lambda_{k,2} i \overline{K_m} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon_{1,m}} - \frac{\mu_{1,m}}{\mu_0} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \right). \quad (4.36)$$

20. Вычисляются коэффициенты  $L_k^{(l)(1,m)}$  ( $l=1, \dots, 4; m=1, \dots, N;$

$k=1, \dots, K_c + 2$ ):

$$L_k^{(1)(1,m)} = \frac{\gamma R_{1,m}^2}{4} \left[ \lambda_{k,2} \left( i \cdot \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) - \right. \\ \left. - 4 \lambda_{k,1} \frac{H_m}{R_{1,m}} \left( \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \right]; \quad (4.37)$$

$$L_k^{(2)(1,m)} = 0; \quad (4.38)$$

$$L_k^{(3)(1,m)} = \frac{\gamma R_{1,m}^2}{2} \left[ \frac{i \lambda_{k,2}}{1 + \varepsilon_{1,m}} \cdot e^{i\beta} - 2 \lambda_{k,1} \frac{H_m}{R_{1,m}} \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta - i \lambda_{k,2} \frac{1+\lambda}{4} \cos \beta \right]; \quad (4.39)$$

$$L_k^{(4)(1,m)} = -\lambda_{k,2} \frac{\mu_{2,m}}{\mu_{1,m}} \cdot \frac{i}{1 + \mathfrak{a}_{1,m}} \cdot \frac{\gamma R_{1,m}^2}{2} e^{i\beta}. \quad (4.40)$$

21. Определяются величины ( $p = 0,1; k = 1, \dots, K_c + 2; m = 1, \dots, N$ ):

$$M_k^{(1)(p,m)} = \frac{L_k^{(1)(p,m)} + L_k^{(2)(p,m)}}{1 + \mathfrak{a}_{p,m}}; \quad M_k^{(2)(p,m)} = \frac{\mathfrak{a}_{p,m} L_k^{(1)(p,m)} - L_k^{(2)(p,m)}}{1 + \mathfrak{a}_{i,m}}; \quad (4.41)$$

$$M_k^{(3)(p,m)} = \frac{L_k^{(3)(p,m)} + L_k^{(4)(p,m)}}{1 + \mathfrak{a}_{p,m}}; \quad M_k^{(4)(p,m)} = \frac{\mathfrak{a}_p L_k^{(3)(p,m)} - L_k^{(4)(p,m)}}{1 + \mathfrak{a}_{p,m}}.$$

22. Определяются коэффициенты ( $p = 0,1; m = 1, \dots, N; k = 1, \dots, K_c + 2$ )

$$N_k^{(1)(p,m)} = M_k^{(1)(p,m)};$$

$$N_k^{(2)(p,m)} = \delta_{2,k}(k-2)M_{k-2}^{(1)(p,m)} - \lambda_{k,1}M_k^{(3)(p,m)} + \overline{M_k^{(4)(p,m)}}; \quad (4.42)$$

$$N_k^{(3)(p,m)} = M_k^{(3)(p,m)}; \quad N_k^{(4)(p,m)} = \overline{M_k^{(2)(p,m)}} - (k+2)M_{k+2}^{(3)(p,m)}.$$

23. Определяются действительные и мнимые части комплексных коэффициентов ( $m = 1, \dots, N; k = 1, \dots, K_c + 2$ )

$$X_k^{(l)(m)*} = N_k^{(l)(1,m)*} + \sum_{s=1}^4 \sum_{\mu=1}^{K_c+2} \delta_{1,0}^{(m)} e^{(s,\mu)} \left( P_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} + Q_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} \right) N_{\mu}^{(s)(0,m)*}; \quad (4.43)$$

$$X_k^{(l)(m)**} = N_k^{(l)(1,m)**} + \sum_{s=1}^4 \sum_{\mu=1}^{K_c+2} \delta_{1,0}^{(m)} e^{(s,\mu)} \left( P_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} - Q_{k,\mu}^{(s,l)(1,m)} \right) N_{\mu}^{(s)(0,m)**}. \quad (4.44)$$

24. Вычисляем элементы столбцов свободных членов систем уравнений ( $m = 1, \dots, N$ ):

$$Y_k^{(1)(m)'} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{K_c+2} \delta_{2,1}^{(m)} e^{(p,v)} T_{k,v}^{(p,1)} X_v^{(p)(m)*}, \quad k = 1, \dots, K_c + 2; \quad (4.45)$$

$$Y_k^{(2)(m)'} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{K_c+2} \delta_{2,1}^{(m)} e^{(p,v)} T_{k,v}^{(p,3)} X_v^{(p)(m)*}, \quad k = 1, \dots, K_c;$$

$$Y_k^{(1)(m)''} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{K_c+2} \delta_{2,1}^{(m)} e^{(p,v)} T_{k,v}^{(p,2)} X_v^{(p)(m)**}, \quad k = 1, \dots, K_c + 2; \quad (4.46)$$

$$Y_k^{(2)(m)''} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{K_c+2} \delta_{2,1}^{(m)} e^{(p,v)} T_{k,v}^{(p,4)} X_v^{(p)(m)**}, \quad k = 1, \dots, K_c.$$

25. Полученные системы уравнений решаются методом Гаусса относительно неизвестных действительных  $c_{\mu}^{(s)(0,m)*}$  и мнимых  $c_{\mu}^{(s)(0,m)**}$  частей комплексных коэффициентов  $c_{\mu}^{(s)(0,m)}$  ( $s=1,2$ ;  $\mu=1,\dots,N_s$ ), где

$$K_s = \begin{cases} K_c & \text{при } s = 1; \\ K_c + 2 & \text{при } s = 2. \end{cases} \quad (4.47)$$

26. На основе вычисленных действительных  $c_{\mu}^{(s)(0,m)*}$  и мнимых  $c_{\mu}^{(s)(0,m)**}$  частей формируются комплексные значения коэффициентов  $c_{\mu}^{(s)(0,m)}$  ( $s=1,2$ ;  $\mu=1,\dots,N_s$ ):

$$c_{\mu}^{(s)(0,m)} = c_{\mu}^{(s)(0,m)*} + i c_{\mu}^{(s)(0,m)**}. \quad (4.48)$$

27. Определяются разности между коэффициентами  $c_{\mu}^{(s)(0,m)*}$ ,  $c_{\mu}^{(s)(0,m)**}$  ( $s=1,2$ ;  $\mu=1,\dots,N_s$ ), полученными в двух последовательных приближениях. Вычисления повторяются вновь, начиная с п. 17, до тех пор, пока величины абсолютные значения разностей не станут меньше заданной величины  $\varepsilon$  (например,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ). Если заданная точность достигнута, вычисления продолжают далее с п. 28. Если число выполняемых шагов итерационного процесса превысит  $I_{\max}$ , то вычислительный процесс прекращается.

28. Определяются коэффициенты  $c_k^{(l)(1,m)}$  ( $m=1,\dots,N$ ;  $l=1,\dots,4$ ;  $k=1,\dots,N_l$ ):

$$c_k^{(l)(1,m)} = \delta_{1,0}^{(m)} e^{(l,k)} \left[ \sum_{p=1}^2 \sum_{v=1}^{K_p} \left( P_{k,v}^{(p,l)(0,m)} c_v^{(p)(0,m)} + Q_{k,v}^{(p,l)(0,m)} \overline{c_v^{(p)(0,m)}} \right) + N_k^{(l)(0,m)} \right], \quad (4.49)$$

$$K_p = \begin{cases} K_c & \text{при } p = 1; \\ K_c + 2 & \text{при } p = 2. \end{cases} \quad (4.50)$$

29. Определяются коэффициенты  $c_k^{(l)(2,m)}$  ( $m = 1, \dots, N; l = 1, \dots, 4; k = 1, \dots, N_l$ ):

$$c_k^{(l)(2,m)} = \delta_{2,1}^{(m)} e^{(l,k)} \left[ \sum_{p=1}^4 \sum_{v=1}^{K_p} \left( P_{k,v}^{(p,l)(1,m)} c_v^{(p)(1,m)} + Q_{k,v}^{(p,l)(1,m)} \overline{c_v^{(p)(1,m)}} \right) + N_k^{(l)(1,m)} \right], \quad (4.51)$$

$$K_p = \begin{cases} K_c & \text{при } p = 1, 4; \\ K_c + 2 & \text{при } p = 2, 3. \end{cases} \quad (4.52)$$

30. Для вычисления напряжений в точках  $L_{0,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) задаётся значение угла  $\theta$  от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  с шагом  $\Delta\theta$  и определяются координаты точек соответствующих контуров в комплексном виде, а так же координата  $y$

$$z = z_m + R_{0,m} e^{i\theta}, \quad y = \text{Im} z. \quad (4.53)$$

31. Начальные напряжения в полярной системе координат, полюс которой совпадает с центром  $m$ -того отверстия вычисляются в точках  $z$  на контурах  $L_{0,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0,m)(0)} &= -\gamma(H_m - y) \left( \lambda \cos \beta \cos^2 \theta + \cos \beta \sin^2 \theta + 2 \sin \beta \sin \theta \cos \theta \right); \\ \sigma_\theta^{(0,m)(0)} &= -\gamma(H_m - y) \left( \lambda \cos \beta \sin^2 \theta + \cos \beta \cos^2 \theta - 2 \sin \beta \sin \theta \cos \theta \right); \\ \tau_{r\theta}^{(0,m)(0)} &= -\gamma(H_m - y) \left( (1 - \lambda) \cos \beta \sin \theta \cos \theta + \sin \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

32. В точках с координатами  $z$  определяются величины ( $j = 1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'_{0,j}(z - z_j) &= -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=1}^{K_c+2} k \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left( \frac{z - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} \left\{ c_k^{(1)(0,j)} \left[ 1 - (k+1) \frac{z - z_j}{R_{0,j}} \cdot \left( \frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] + \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \right\rangle - \\ &\quad - \frac{1}{R_{0,j}} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_0} \cdot \left\{ 2K_j h_j \left( \frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ iK_j \left[ \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} + \mathfrak{a}_0 \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \}. \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}''(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}^2} \sum_{k=1}^{K_c+2} k(k+1) \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ & + \left. \left\{ (k+2) \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right) \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - 2 \right\} \overline{c_k^{(1)(0,j)} - c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \times \\ & \times \left\langle \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right\rangle + \frac{4\overline{K}jh_j}{(1+\mathfrak{a}_0)R_{0,j}^2} \cdot \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-3} + \\ & + \frac{iK_j}{(1+\mathfrak{a}_0)R_{0,j}^2} \left[ \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-2} + \mathfrak{a}_0 \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} \right]; \quad (4.56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{0,j}'(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}} \left\{ \sum_{k=1}^{K_c+2} \left[ -kc_k^{(2)(0,j)} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} + \right. \right. \\ & + k \left( 2(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} + kc_k^{(2)(0,j)} \right) \times \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\ & \left. \left. - k(k+1)^2 \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2\overline{K}jh_j}{1+\mathfrak{a}_0} \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} - \frac{iK_j}{1+\mathfrak{a}_0} \left[ \mathfrak{a}_0 \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} + \left( \frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\}; \quad (4.57) \end{aligned}$$

33. Дополнительные радиальные  $\sigma_r^{(0,m)}$ , нормальные тангенциальные  $\sigma_\theta^{(0,m)}$  и касательные  $\tau_{r\theta}^{(0,m)}$  напряжения в точках контуров  $L_{0,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ) в области  $S_0$  (массив пород) определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(0,m)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left[ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) - \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) - \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right]; \\
\sigma_y^{(0,m)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left[ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) + \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right]; \\
\tau_{xy}^{(0,m)} &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^N \left[ \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right].
\end{aligned} \tag{4.58}$$

34. Полные напряжения в точках контуров  $L_{0,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ) со стороны массива пород вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_r^{(0,m)} &= \sigma_r^{(0,m)} + \sigma_r^{(0,m)(0)}; \quad \tilde{\sigma}_\theta^{(0,m)} = \sigma_\theta^{(0,m)} + \sigma_\theta^{(0,m)(0)}; \\
\tilde{\tau}_{r\theta}^{(0,m)} &= \tau_{r\theta}^{(0,m)} + \tau_{r\theta}^{(0,m)(0)}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

35. Для определения напряжений в точках контуров  $L_{0,m}$ ,  $L_{1,m}$ , ограничивающих зоны  $S_{1,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ), моделирующих области технологически неоднородного пород вокруг обделки  $m$ -того тоннеля, определяются координаты соответствующих точек по формуле:

$$z = \begin{cases} z_m + R_{0,m}e^{i\theta} & \text{на внешнем контуре } L_{0,m} \text{ области } S_{1,m}; \\ z_m + R_{1,m}e^{i\theta} & \text{на внутреннем контуре } L_{1,m} \text{ области } S_{1,m}; \end{cases} \quad y = \operatorname{Im} z. \tag{4.60}$$

36. Начальные радиальные  $\sigma_r^{(1,m)(0)}$ , нормальные тангенциальные  $\sigma_\theta^{(1,m)(0)}$  и касательные  $\tau_{r\theta}^{(1,m)(0)}$  напряжения в полярной системе координат, полюс которой совпадает с центром  $m$ -того отверстия вычисляются в точках  $z$  на контурах  $L_{0,m}$ ,  $L_{1,m}$  ( $m=1,\dots,N$ ) по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(0,m)(0)} &= -\gamma(H_m - y) \left( \lambda \cos \beta \cos^2 \theta + \cos \beta \sin^2 \theta + 2 \sin \beta \sin \theta \cos \theta \right); \\
\sigma_\theta^{(0,m)(0)} &= -\gamma(H_m - y) \left( \lambda \cos \beta \sin^2 \theta + \cos \beta \cos^2 \theta - 2 \sin \beta \sin \theta \cos \theta \right); \\
\tau_{r\theta}^{(0,m)(0)} &= -\gamma(H_m - y) \left( (1 - \lambda) \cos \beta \sin \theta \cos \theta + \sin \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right).
\end{aligned} \tag{4.61}$$

37. В точках с координатами  $z$  определяются величины ( $m=1,\dots,N$ ):

$$\varphi_{1,m}^{*'}(z-z_m) = \frac{1}{R_{1,m}} \sum_{k=1}^{K_c+2} k \left[ -c_k^{(1)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(3)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-1} \right] - \frac{iK_m}{1+\alpha_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{1,m}} \cdot \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{-1}, \quad (4.62)$$

$$\varphi_{1,m}^{*''}(z-z_m) = \frac{1}{R_{1,m}^2} \sum_{k=1}^{K_c+2} k \left[ (k+1)c_k^{(1)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+2)} + (k-1)c_k^{(3)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-2} \right] + \frac{iK_m}{1+\alpha_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{1,m}^2} \cdot \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{-2}, \quad (4.63)$$

$$\psi_{1,m}^{*'}(z-z_m) = \frac{1}{R_{1,m}} \sum_{k=1}^{K_c+2} k \left[ -c_k^{(2)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(4)(1,m)} \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-1} \right] - \frac{i\alpha_{1,m}\overline{K_m}}{1+\alpha_{1,m}} \cdot \frac{1}{R_{1,m}} \cdot \left( \frac{z-z_m}{R_{1,m}} \right)^{-1}. \quad (4.64)$$

38. Дополнительные радиальные  $\sigma_r^{(1,m)}$ , нормальные тангенциальные  $\sigma_\theta^{(1,m)}$  и касательные  $\tau_{r\theta}^{(1,m)}$  напряжения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1,m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi_{1,m}^{*'}(z-z_m) - \left[ \overline{(z-z_m)\varphi_{1,m}^{*''}(z-z_m)} + \psi_{1,m}^{*'}(z-z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \sigma_\theta^{(1,m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi_{1,m}^{*'}(z-z_m) + \left[ \overline{(z-z_m)\varphi_{1,m}^{*''}(z-z_m)} + \psi_{1,m}^{*'}(z-z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \tau_{r\theta}^{(1,m)} &= \operatorname{Im} \left\{ \left[ \overline{(z-z_m)\varphi_{1,m}^{*''}(z-z_m)} + \psi_{1,m}^{*'}(z-z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

39. Полные напряжения в точках контуров  $L_{0,m}$ ,  $L_{1,m}$  в областях  $S_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r^{(1,m)} &= \sigma_r^{(1,m)} + \sigma_r^{(1,m)(0)}; \quad \tilde{\sigma}_\theta^{(1,m)} = \sigma_\theta^{(1,m)} + \sigma_\theta^{(1,m)(0)}; \\ \tilde{\tau}_{r\theta}^{(1,m)} &= \tau_{r\theta}^{(1,m)} + \tau_{r\theta}^{(1,m)(0)}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

40. Для определения напряжений в точках контуров  $L_{1,m}$ ,  $L_{2,m}$ , ограничивающих кольца  $S_{2,m}$ , моделирующих области технологически неоднородного пород вокруг обделки  $m$ -того тоннеля ( $m=1, \dots, N$ ), определяются координаты соответствующих точек по формуле:

$$z = \begin{cases} z_m + R_{1,m} e^{i\theta} & \text{на контуре } L_{1,m} \text{ кольца } S_{2,m}; \\ z_m + R_{2,m} e^{i\theta} & \text{на контуре } L_{2,m} \text{ кольца } S_{2,m}. \end{cases} \quad (4.67)$$

41. В точках с координатами  $z$  определяются величины ( $m=1, \dots, N$ ):

$$\varphi'_{2,m}(z - z_m) = \frac{1}{R_{2,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ -c_k^{(1)(2,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{2,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(3)(2,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{2,m}} \right)^{k-1} \right]; \quad (4.68)$$

$$\varphi''_{2,m}(z - z_m) = \frac{1}{R_{2,m}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ (k+1) c_k^{(1)(2,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{2,m}} \right)^{-(k+2)} + (k-1) c_k^{(3)(2,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{2,m}} \right)^{k-2} \right]; \quad (4.69)$$

$$\psi'_{2,m}(z - z_m) = \frac{1}{R_{2,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ -c_k^{(2)(2,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{2,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(4)(2,m)} \left( \frac{z - z_m}{R_{2,m}} \right)^{k-1} \right]. \quad (4.70)$$

42. Дополнительные радиальные  $\sigma_r^{(2,m)}$ , нормальные тангенциальные  $\sigma_\theta^{(2,m)}$  и касательные  $\tau_{r\theta}^{(2,m)}$

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2,m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi'_{2,m}(z - z_m) - \left[ \overline{(z - z_m)} \varphi''_{2,m}(z - z_m) + \psi'_{2,m}(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \sigma_\theta^{(2,m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi'_{2,m}(z - z_m) + \left[ \overline{(z - z_m)} \varphi''_{2,m}(z - z_m) + \psi'_{2,m}(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \tau_{r\theta}^{(2,m)} &= \operatorname{Im} \left\{ \left[ \overline{(z - z_m)} \varphi''_{2,m}(z - z_m) + \psi'_{2,m}(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Приведенный алгоритм положен в основу компьютерной программы, реализующей разработанный аналитический метод расчета обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных вблизи

склона в технологически неоднородных породах закрытым способом на действие собственного веса грунта. Программа составлена на языке программирования FORTRAN в среде WIN32 для компьютеров стандарта IBM PC.

#### 4.2 Проверка точности удовлетворения граничных условий

Решение задачи теории упругости получено с использованием математического аппарата теории функции комплексного переменного, предусматривающего нахождение комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили, характеризующих напряженно-деформированное состояние рассматриваемых областей, и представляемых в виде бесконечных рядов Лорана. Точность полученного решения существенно зависит от количества удерживаемых членов в этих рядах. С использованием разработанной программы были выполнены многовариантные расчеты для весомой полуплоскости, ослабленной различным подкрепленными круговыми отверстиями, при различных углах наклона границы полуплоскости и сочетаниях деформационных и геометрических характеристик элементов рассматриваемой геомеханической системы при фиксированном количестве удерживаемых в бесконечных рядах членов. Результаты этих расчётов позволили установить минимальное число  $K_c$ , необходимое для достижения достаточно высокой точности расчета.

Проверка удовлетворения граничных условий позволила установить:

- равенство нулю нормальных  $\sigma_y$  и касательных  $\tau_{xy}$  напряжений на наклонной прямолинейной границе;
- на контурах, разделяющих области, моделирующие среду в естественном и упрочнённом состояниях, - равенство радиальных  $\sigma_r$  и касательных  $\tau_{r\theta}$  напряжений в смежных точках рассматриваемых областей;
- на контурах, разделяющих области, моделирующие среду в упрочнённом состоянии и кольцами, моделирующими обделки тоннелей, - равен-

ство радиальных  $\sigma_r$  и касательных  $\tau_{r\theta}$  напряжений в смежных точках рассматриваемых областей;

- на внутренних контурах колец, моделирующих обделки тоннелей, - равенство нулю радиальных  $\sigma_r$  и касательных  $\tau_{r\theta}$  напряжений.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что с увеличением числа удерживаемых членов рядов точность удовлетворения граничных условий монотонно возрастает. При взаимном расположении отверстий, моделирующих выработки тоннелей, соответствующем реальным проектам, размерам зон среды с изменёнными деформационными характеристиками и колец, моделирующих обделки, на всех рассматриваемых контурах погрешность удовлетворения граничных условий не превышает 2...3% при числе удерживаемых членов не менее  $K_c = 20$ .

#### 4.3 Примеры расчёта с использованием разработанной программы

С использованием компьютерной программы, реализующей разработанный метод, были выполнены многовариантные расчеты, позволившие установить особенности и закономерности формирования напряженного состояния массива пород и обделок параллельных тоннелей, сооружённых в технологически неоднородных породах, при изменении сочетаний основных влияющих факторов.

##### 4.3.1 Расчёты обделок параллельных тоннелей, иллюстрирующие влияние на их напряженное состояние угла наклона земной поверхности, взаимного расположения тоннелей и зон укрепленных пород

Ниже приведены результаты расчетов монолитных бетонных обделок двух параллельных тоннелей, пройденных вблизи наклонной земной поверхности. На рисунке 4.1 приведена расчетная схема сечения тоннелей и исход-

ные данные, использованные при компьютерном моделировании. Центры поперечных сечений расположены на вертикальной линии. Массив грунта, вмещающий тоннели, предварительно укреплен. Поперечные сечения зон укрепленного грунта моделируются концентрическими шайбами.

Наружные радиусы сечения выработок  $R$ ; глубина заложения верхнего тоннеля  $H_1 = 2R$ , нижнего –  $H_2 = 5R$ ; толщины зон укрепленного грунта –  $\delta_1 = 0,3R$ ; обделок –  $\delta_k = 0,1R$ ; удельный вес грунта  $\gamma = 0,022 \text{ МН/м}^3$ ; коэффициент бокового давления  $\lambda = 0,5$ ; деформационные характеристики грунта в естественном состоянии  $E_0 = 100 \text{ МПа}$ ;  $\nu_0 = 0,3$ ; упрочнённого грунта -  $E_1 = 300 \text{ МПа}$ ;  $\nu_1 = 0,3$ ; деформационные характеристики материала обделки  $E_2 = 27000 \text{ МПа}$ ;  $\nu_2 = 0,2$ .

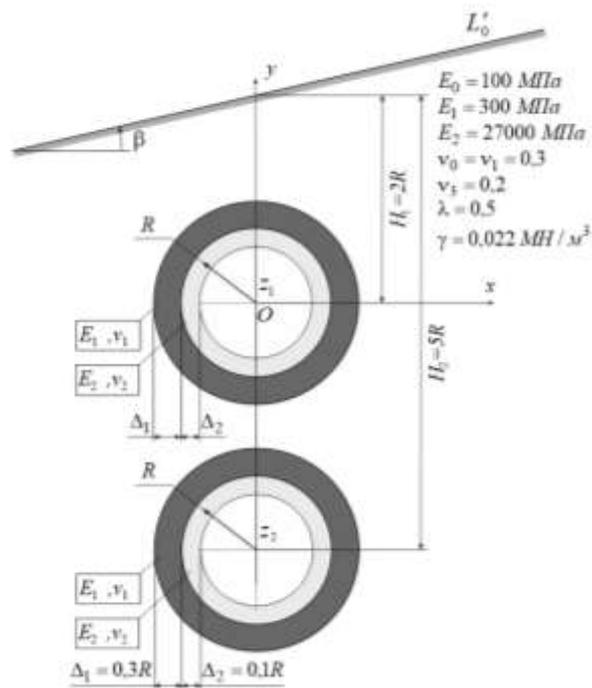


Рисунок 4.1 - Расчетная схема

На рисунке 4.2 представлены эпюры расчётных нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа, возникающих на наружном (слева) и внутреннем (справа) контурах поперечных сечений обделок верхнего (а) и нижнего (б) тоннелей, при горизонтальной земной поверхности и отсутствии зон укреплённых пород, полученные с использованием компьютерной програм-

мы, реализующей метод [14]. Здесь и далее растягивающие напряжения считаются положительными, а сжимающие - отрицательными.

Как следует из полученных результатов, эпюры симметричны относительно вертикали. Максимальные растягивающие напряжения на наружных контурах сечения обделок обоих тоннелей возникают в точках вблизи горизонтального диаметра и составляют  $+0,29 \text{ МПа}$  для верхнего и  $+0,66 \text{ МПа}$  для нижнего тоннелей; максимальные сжимающие напряжения на наружных контурах сечения - возникают в точках вертикального диаметра и составляют  $-0,97 \text{ МПа}$  для верхнего и  $-2,33 \text{ МПа}$  для нижнего тоннелей.

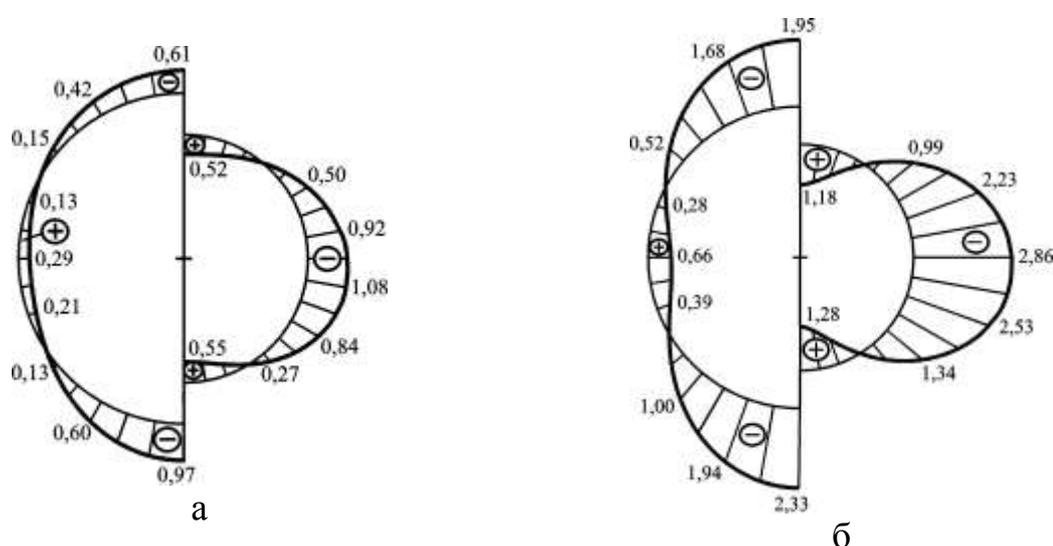


Рисунок 4.2 - Расчётные эпюры напряжений для обделок тоннелей:  
а - верхнего; б - нижнего

Максимальные растягивающие напряжения на внутренних контурах сечения обделок обоих тоннелей возникают в точках вертикального диаметра и составляют  $+0,55 \text{ МПа}$  для верхнего и  $+1,28 \text{ МПа}$  для нижнего тоннелей; максимальные сжимающие напряжения на внутренних контурах сечения возникают вблизи точек горизонтального диаметра -  $-1,08 \text{ МПа}$  для верхнего и  $-2,86 \text{ МПа}$  для нижнего тоннелей.

Расчёты показывают, что влияние земной поверхности приводит к «разгрузке» точек наружного контура свода обделки по сравнению с лотком обоих тоннелей: сжимающие напряжения в своде верхнего тоннеля умень-

шаются в 1,59, а в своде нижнего - в 1,19 раз. Наблюдается снижение в 1,06...1,08 раз растягивающих напряжений на внутренних контурах сечения обделок в своде по сравнению с лотком для обеих тоннелей.

На рисунке 4.3 приведены эпюры напряжений для обделок тоннелей той же компоновки, сооруженных вблизи склона без применения специальных способов (отсутствуют зоны технологически неоднородного грунта), угол наклона земной поверхности составляет  $45^\circ$ . На рисунке 4.3 пунктирными линиями показаны эпюры напряжений, возникающих в точках контуров сечения одиночных тоннелей, расположенных на тех же глубинах.

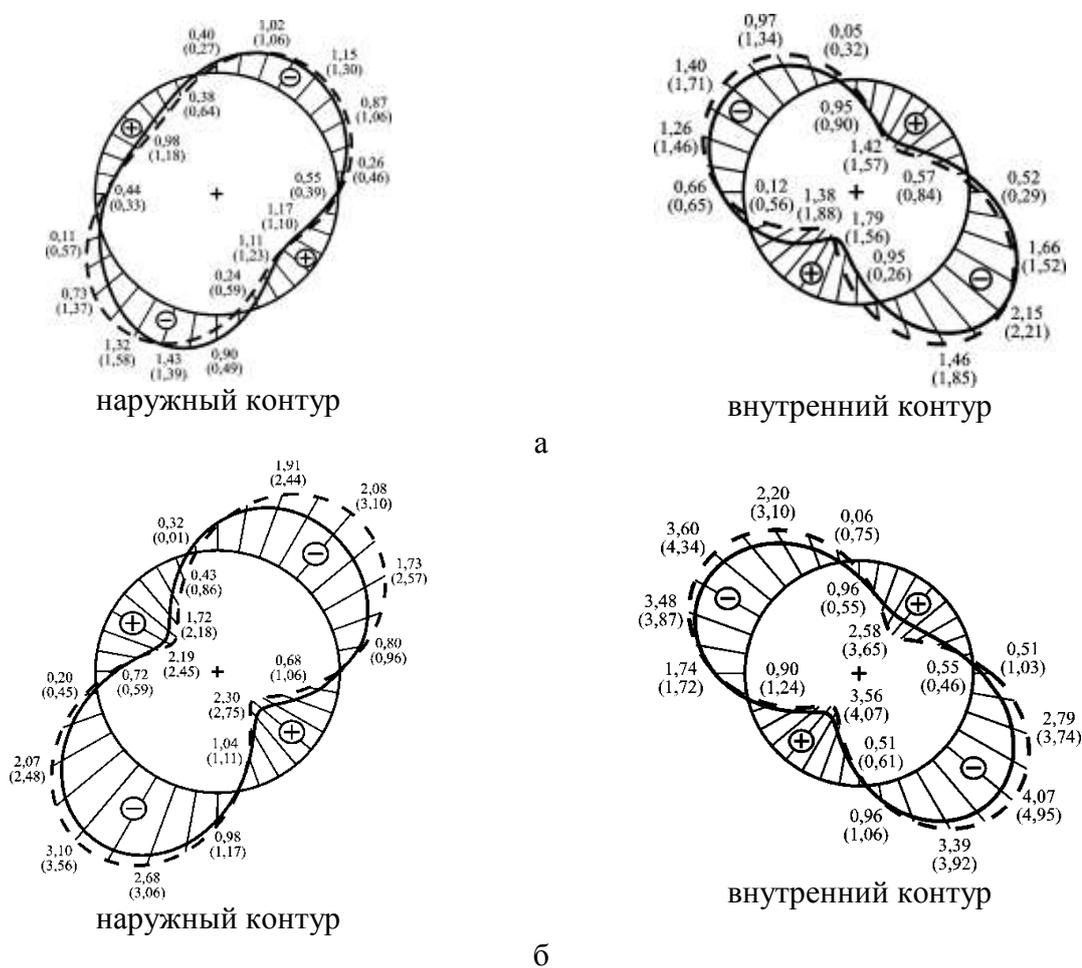


Рисунок 4.3 - Расчётные эпюры напряжений для обделок тоннелей:

а - верхнего; б - нижнего

Как следует из приведённых эпюр, наличие наклонной земной поверхности изменяет напряжённое состояние обделок. Во-первых, происходит

существенное перераспределение напряжений; во-вторых, исчезает вертикальная симметрия эпюр; в-третьих, - значительно увеличиваются значения максимальных растягивающих (в 3 раза) и сжимающих (в 2 раза) напряжений для верхнего и, соответственно, в 2,78 раза сжимающих и в 1,42 раза растягивающих напряжений в обделке нижнего тоннеля.

На рисунке 4.4 приведены результаты расчётов обделок тех же тоннелей, но с учётом наличия зон грунта, подверженного инъекционному укреплению. Приведённые результаты свидетельствуют об уменьшении значений максимальных сжимающих и растягивающих напряжений в обделке верхнего тоннеля на 10%, а в обделке нижнего – до 20%.

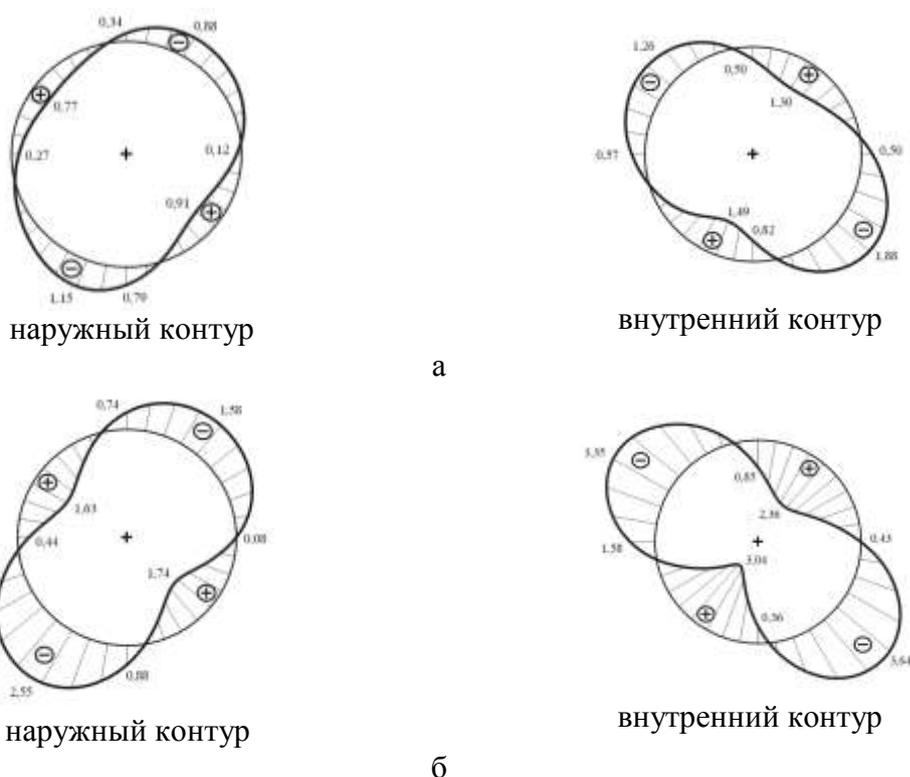


Рисунок 4.4 - Расчётные эпюры напряжений для обделок тоннелей с учётом укрепительной цементации: а - верхнего; б - нижнего

Следует отметить, что результаты, приведённые на рисунках 4.2 - 4.4, соответствуют случаю мгновенного помещения колец в отверстия и одновременного появления зон среды с изменёнными деформационными характеристиками. Таким образом, эти результаты являются, по сути, завышенными.

ми по отношению к напряжениям, реально возникающих в конструкциях обделок тоннелей и массиве грунта, с учётом последовательности сооружения тоннелей и отставания возведения обделок от забоя, но дают представление о степени влияния наклонной земной поверхности, взаимного расположения тоннелей, наличия зон технологически неоднородных грунтов.

#### 4.3.2 Расчёты обделок двух параллельных автодорожных тоннелей

В работе [183] приведены результаты численного моделирования с использованием метода конечных элементов напряженного состояния обделок двух параллельных автодорожных тоннелей Sigma 3, трассы которых расположены в горном районе. Массив пород площадки строительства, расположенной в западной Греции, представлен флишами - мягкими пластичными известняками и морскими обломочными отложениями, являющимися слабо связными породами с малой несущей способностью.

Ширина поперечных сечений тоннелей (рисунок 4.5) составляла 12 м; расстояние между продольными осями - 30 м. Установленные физико-механические характеристики пород и напряженно-деформированное состояние массива пород в естественном состоянии свидетельствовали о вполне устойчивом их состоянии (см. раздел 1).

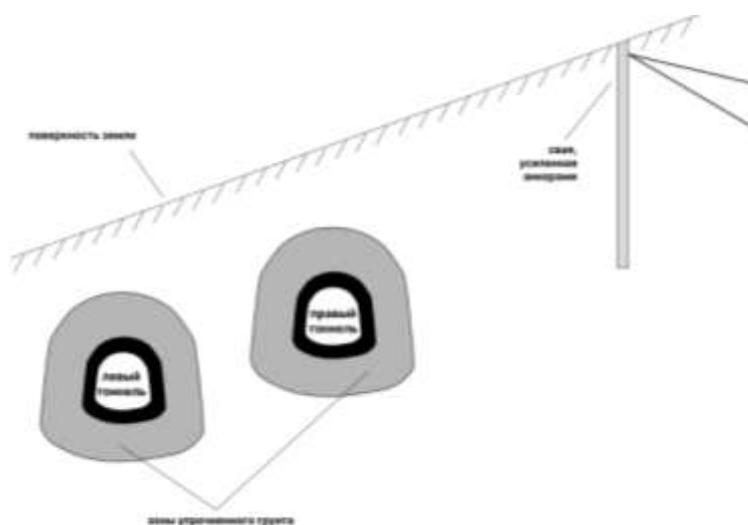


Рисунок 4.5 - Расположение поперечных сечений тоннелей

После сооружения тоннелей в обделке левого появилась трещина длиной около 60 м, а так же произошло смещение тоннелей от проектного положения на 270 мм ниже по склону. Для предотвращения развития этих процессов использованы дополнительные технологические мероприятия - вокруг каждого из тоннелей путем инъекционного упрочнения созданы зоны пород с более высоким модулем деформации; выше по склону сооружена подпорная железобетонная стена, усиленная анкерами.

С использованием разработанного аналитического метода расчёта было определено напряжённое состояние массива пород и обделок тоннелей с учетом очередности проходки тоннелей, отставания возведения обделок от забоя, наличия вокруг тоннелей зон укреплённых пород. При расчётах использованы приведённые на рисунке 4.6 схемы горизонтального (а) и вертикального (б) расположения поперечных сечений тоннелей.

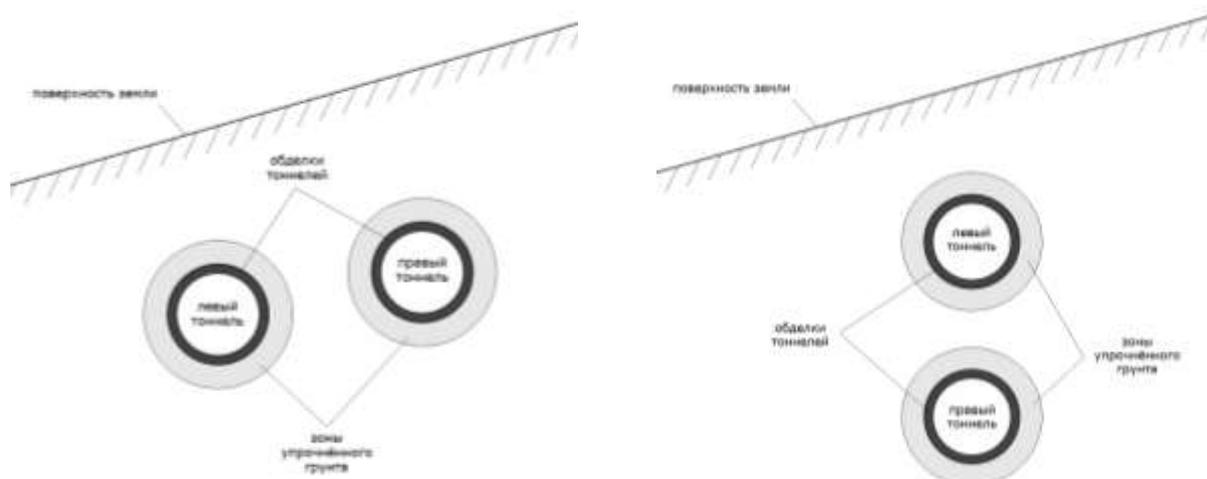


Рисунок 4.6 - Схемы расположения тоннелей: а - проектное; б - вертикальное

Поперечные сечения тоннелей принимались круговыми; области укреплённых пород - концентрическими круговыми зонами.

Для учёта последовательности проходки тоннелей и отставания возведения обделок от забоя в каждом из тоннелей использована методика [8], предполагающая последовательное решение ряда задач, принципиальные

расчётные схемы которых для проектного расположения тоннелей приведены в таблицах 4.1, 4.2.

Левый тоннель проходится первым, затем с отставанием, величина которого определялась технологией проходки и крепления, возводилась обделка. После проходки на всю длину и закрепления первого тоннеля проводилась проходка правого с тем же отставанием возведения обделки.

При проектном расположении тоннелей центр поперечного сечения левого тоннеля располагается на глубине 17 м по вертикали от наклонной земной поверхности.

Угол наклона дневной поверхности равен  $20^\circ$ . Расстояние между центрами поперечных сечений тоннелей по горизонтали - 30 м, центр правого тоннеля смещён вверх по склону на 11 м. Диаметры выработок составляют 12 м; толщина обделок - 0,7 м; толщина зон укреплённых пород - 6,5 м. Массив пород склона имеет следующие характеристики: модуль деформации - 20 МПа, коэффициент Пуассона - 0,2; коэффициент бокового давления - 0,1; удельный вес -  $0,026 \text{ МН/м}^3$ . Модуль деформации материала обделок тоннелей - 27000 МПа, коэффициент Пуассона - 0,2; материала зон технологически неоднородных пород - соответственно 60 МПа и 0,2.

В таблице 4.3 приведены расчётные значения нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta, \text{МПа}$ , возникающих в точках соответствующих контуров, разделяющих области с различными деформационными характеристиками в задаче 1.6 (таблица 4.2) теории упругости о двух подкреплённых круговых отверстиях в весомой среде с наклонной границей, вокруг которых выделены концентрические зоны материала с отличающимися деформационными характеристиками. Эти результаты соответствуют одновременной установке подкрепляющих колец в оба отверстия, равно как и одновременному появлению концентрических зон среды с изменёнными модулями деформации вокруг них. Угол  $\theta$  отсчитывается от положительного направления горизонтальных осей каждого из отверстий против хода часовой стрелки.

Таблица 4.1 - Расчётные схемы задач, учитывающие отставание возведения обделки от забоя первого тоннеля и проходку второго

Задача	Расчётная схема
1.1	<p>Diagram 1.1 shows a cross-section of a tunnel in a half-space. The tunnel is a circle of radius <math>R_{1,1}</math> centered at <math>z_1</math>. The surface is at a height <math>H'</math> from the center. The surface is inclined at an angle <math>\beta</math>. Material properties are <math>S_0 [E_0, \nu_0]</math>. The tunnel length is <math>L_{1,1}</math>.</p>
1.2	<p>Diagram 1.2 shows a cross-section of a tunnel in a half-space. The tunnel is a double-layered circle with inner radius <math>R_{1,1}</math> and outer radius <math>R_{2,1}</math>. The center is at <math>z_1</math>. The surface is at a height <math>H'</math> from the center. The surface is inclined at an angle <math>\beta</math>. Material properties are <math>S_{1,1} [E_{1,1}, \nu_{1,1}]</math>. The tunnel lengths are <math>L_{1,1}</math> and <math>L_{2,1}</math>.</p>
1.3	<p>Diagram 1.3 shows a cross-section of two tunnels in a half-space. The first tunnel is a double-layered circle with inner radius <math>R_{1,1}</math> and outer radius <math>R_{2,1}</math>, centered at <math>z_1</math>. The second tunnel is a single-layered circle of radius <math>R_{1,2}</math> centered at <math>z_2</math>. The surface is at a height <math>H'</math> from the center <math>z_2</math>. The surface is inclined at an angle <math>\beta</math>. Material properties are <math>S_{1,1} [E_{1,1}, \nu_{1,1}]</math>. The tunnel lengths are <math>L_{1,1}</math>, <math>L_{2,1}</math>, and <math>L_{1,2}</math>. The distance between centers is <math>B'</math>.</p>

Таблица 4.2 - Расчётные схемы задач, учитывающие отставание возведения обделки от забоя второго тоннеля и укрепление пород вокруг тоннелей

Задача	Расчётная схема
1.4	
1.5	
1.6	

Таблица 4.3 - Напряжения  $\sigma_\theta, МПа$  в точках контуров между областями с различными деформационными характеристиками

Угол $\theta$ , град.	левое отверстие					правое отверстие				
	среда	зона		кольцо		среда	зона		кольцо	
	контур					контур				
	$L_{0,1}$	$L_{0,1}$	$L_{1,1}$	$L_{1,1}$	$L_{2,1}$	$L_{0,2}$	$L_{0,2}$	$L_{1,2}$	$L_{1,2}$	$L_{2,2}$
0	-0.37	-0.31	-0.38	14.15	-21.21	-0.38	-0.33	-0.39	12.46	-19.49
10	-0.27	-0.22	-0.30	9.09	-14.35	-0.28	-0.22	-0.31	6.68	-11.67
20	-0.18	-0.14	-0.21	3.01	-6.16	-0.18	-0.13	-0.23	0.16	-2.89
30	-0.10	-0.06	-0.13	-3.36	2.37	-0.11	-0.06	-0.15	-6.30	5.79
40	-0.05	-0.01	-0.07	-9.29	10.32	-0.05	-0.01	-0.08	-11.99	13.43
50	-0.01	0.03	-0.02	-14.16	16.83	-0.02	0.02	-0.03	-16.31	19.24
60	0.00	0.05	0.01	-17.46	21.26	-0.00	0.04	0.00	-18.85	22.69
70	0.01	0.06	0.02	-18.87	23.18	0.00	0.05	0.01	-19.38	23.48
80	0.01	0.07	0.01	-18.26	22.43	0.00	0.05	0.00	-17.87	21.58
90	0.00	0.07	-0.02	-15.72	19.10	-0.00	0.06	-0.02	-14.51	17.21
100	-0.01	0.07	-0.06	-11.51	13.55	-0.01	0.06	-0.06	-9.63	10.81
110	-0.02	0.05	-0.11	-6.07	6.36	-0.03	0.04	-0.10	-3.74	3.05
120	-0.06	0.02	-0.16	0.02	-1.74	-0.06	0.01	-0.16	2.55	-5.29
130	-0.10	-0.03	-0.23	6.12	-9.89	-0.10	-0.04	-0.22	8.55	-13.30
140	-0.16	-0.10	-0.29	11.55	-17.20	-0.16	-0.11	-0.28	13.60	-20.09
150	-0.23	-0.17	-0.34	15.67	-22.83	-0.23	-0.19	-0.34	17.07	-24.87
160	-0.29	-0.25	-0.38	17.95	-26.08	-0.30	-0.26	-0.38	18.50	-26.98
170	-0.34	-0.31	-0.39	18.02	-26.44	-0.34	-0.31	-0.39	17.60	-26.07
180	-0.36	-0.35	-0.38	15.76	-23.76	-0.36	-0.34	-0.38	14.39	-22.13
190	-0.35	-0.36	-0.33	11.33	-18.21	-0.35	-0.34	-0.34	9.15	-15.52
200	-0.31	-0.34	-0.27	5.17	-10.38	-0.30	-0.31	-0.28	2.45	-6.98
210	-0.23	-0.28	-0.19	-1.99	-1.20	-0.23	-0.25	-0.20	-4.92	2.46
220	-0.14	-0.21	-0.10	-9.26	8.16	-0.14	-0.19	-0.11	-12.03	11.60
230	-0.06	-0.14	-0.02	-15.68	16.45	-0.05	-0.12	-0.03	-17.96	19.22
240	0.01	-0.08	0.03	-20.36	22.50	0.01	-0.07	0.02	-21.89	24.25
250	0.03	-0.06	0.05	-22.65	25.45	0.03	-0.06	0.05	-23.26	25.95
260	0.01	-0.07	0.03	-22.20	24.85	0.01	-0.08	0.03	-21.83	24.02
270	-0.05	-0.12	-0.02	-19.06	20.74	-0.06	-0.14	-0.02	-17.78	18.69
280	-0.15	-0.20	-0.11	-13.65	13.70	-0.16	-0.23	-0.11	-11.63	10.65
290	-0.27	-0.30	-0.21	-6.71	4.70	-0.28	-0.34	-0.21	-4.23	1.01
300	-0.39	-0.40	-0.31	0.80	-5.02	-0.40	-0.44	-0.31	3.43	-8.94
310	-0.49	-0.47	-0.41	7.89	-14.15	-0.50	-0.52	-0.40	10.32	-17.83
320	-0.55	-0.51	-0.47	13.64	-21.49	-0.56	-0.56	-0.47	15.56	-24.52
330	-0.56	-0.51	-0.50	17.36	-26.15	-0.57	-0.55	-0.50	18.51	-28.17
340	-0.53	-0.47	-0.49	18.67	-27.63	-0.54	-0.50	-0.50	18.88	-28.42
350	-0.46	-0.40	-0.45	17.51	-25.87	-0.47	-0.42	-0.46	16.73	-25.35
360	-0.37	-0.31	-0.38	14.15	-21.21	-0.38	-0.33	-0.39	12.46	-19.49

Результаты, представленные в таблице 4.2, свидетельствуют об отсутствии симметрии расчётных значений напряжений в точках соответствующих контуров относительно горизонтали и вертикали. Причиной этого является наличие наклонной границы полуплоскости и принятое расположение тоннелей. Выявлено незначительное взаимное влияние достаточно близко расположенных подкреплённых отверстий, объясняемое малой величиной модуля деформации среды; наличием в точках всех рассматриваемых контуров как сжимающих (отрицательных), так и растягивающих (положительных) нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta$ .

В среде максимальные значения сжимающих напряжений на контуре  $L_{0,1}$  составляют  $-0,56 \text{ МПа}$ , на контуре  $L_{0,2}$  -  $-0,57 \text{ МПа}$  при  $\theta = 330^\circ$ , максимальные значения растягивающих напряжений на контурах  $L_{0,1}$  и  $L_{0,2}$  -  $+0,03 \text{ МПа}$  при  $\theta = 250^\circ$  для обоих отверстий.

В зонах среды с увеличенным модулем деформации максимальные значения сжимающих напряжений на контуре  $L_{0,1}$  составляют  $-0,51 \text{ МПа}$  ( $\theta = 320^\circ \dots 330^\circ$ ), на контуре  $L_{0,2}$  -  $-0,56 \text{ МПа}$  ( $\theta = 320^\circ$ ), максимальные значения растягивающих напряжений на контуре  $L_{0,1}$  -  $+0,07 \text{ МПа}$  ( $\theta = 80^\circ \dots 100^\circ$ ), на  $L_{0,2}$  -  $+0,06 \text{ МПа}$  ( $\theta = 90^\circ \dots 100^\circ$ ). На внутренних контурах  $L_{1,1}$  и  $L_{1,2}$  максимальные значения сжимающих напряжений составляют  $-0,50 \text{ МПа}$  ( $\theta = 330^\circ$ ), максимальные значения растягивающих напряжений -  $+0,05 \text{ МПа}$  ( $\theta = 250^\circ$ ).

В кольцах на контурах  $L_{1,1}$  и  $L_{1,2}$  максимальные значения сжимающих напряжений на контуре  $L_{1,1}$  не превышают  $-22,7 \text{ МПа}$  ( $\theta = 250^\circ$ ), а на  $L_{1,2}$  -  $-23,3 \text{ МПа}$  ( $\theta = 250^\circ$ ), максимальные значения растягивающих напряжений на контуре  $L_{1,1}$  -  $+18,7 \text{ МПа}$  ( $\theta = 340^\circ$ ), на  $L_{1,2}$  -  $+18,9 \text{ МПа}$  ( $\theta = 340^\circ$ ); в кольцах на контурах  $L_{2,1}$  и  $L_{2,2}$  максимальные значения сжимающих напряжений составляют на контуре  $L_{2,1}$  -  $-27,6 \text{ МПа}$  ( $\theta = 340^\circ$ ), на  $L_{2,2}$  -  $-28,4 \text{ МПа}$  ( $\theta = 340^\circ$ ),

максимальные значения растягивающих напряжений на контуре  $L_{2,1}$  -  $+25,5 \text{ МПа}$  ( $\theta = 250^\circ$ ), на  $L_{2,2}$  -  $+25,9 \text{ МПа}$  ( $\theta = 250^\circ$ ).

Далее приведены результаты расчетов с учётом очередности проходки тоннелей и отставания возведения обделок от забоя, полученные на основе решений задач, расчетные схемы которых приведены в таблицах 4.1, 4.2.

На рисунке 4.7 приведены эпюры нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta$ ,  $\text{МПа}$ , возникающих в массиве пород в точках контура выработки левого тоннеля (задача 1.1).

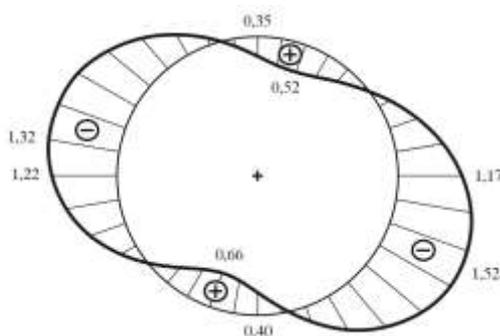


Рисунок 4.7 - Эпюры  $\sigma_\theta$ ,  $\text{МПа}$  в среде на контуре выработки левого тоннеля

Как следует из представленных результатов, максимальные сжимающие напряжения, равные  $-1,52 \text{ МПа}$ , возникают при  $\theta = 330^\circ \dots 340^\circ$ , т.е. в области, противоположной нагорной стороне склона. В точках поверхности выработки с нагорной стороны при  $\theta = 160^\circ \dots 170^\circ$  возникают сжимающие напряжения, равные  $-1,32 \text{ МПа}$ . Максимальные растягивающие напряжения, равные  $+0,66 \text{ МПа}$ , возникают при  $\theta = 250^\circ$ ; в точках поверхности выработки при  $\theta = 70^\circ$  возникают напряжения, равные  $+0,52 \text{ МПа}$ .

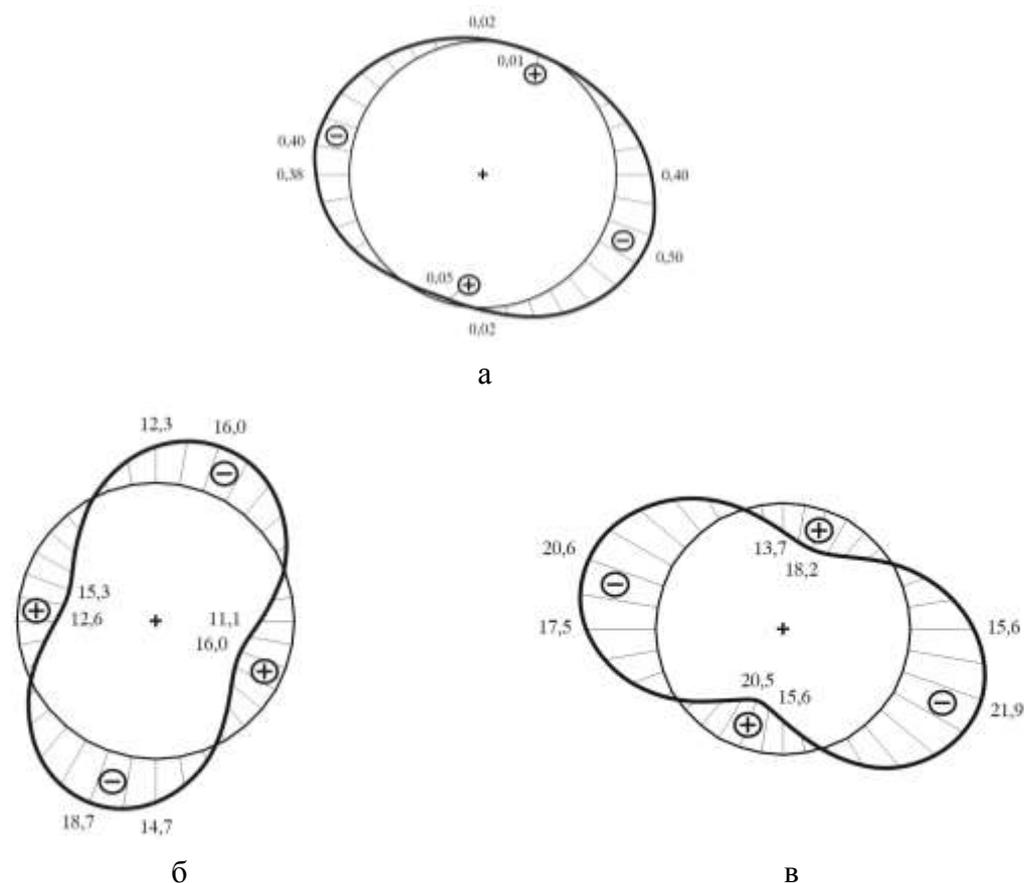


Рисунок 4.8 - Эпюры нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа в первом тоннеле: а - в среде на контуре выработки после возведения обделки; б, в - на наружном и внутреннем контурах сечения обделки

На рисунке 4.8 приведены результаты определения напряжённого состояния массива пород на линии контакта с обделкой (рисунок 4.8 а), а также материала обделки, установленной с отставанием от забоя, - нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_\theta$ , МПа, возникающие на наружном (рисунок 4.8 б) и внутреннем (рисунок 4.8 в) контурах сечения обделки (задача 1.2). При расчётах напряжений в обделке использован коэффициент  $\alpha^* = 0,6$ , учитывающий смещение контура выработки на незакреплённом участке.

Из сопоставления расчётных эпюр напряжений в массиве пород на контуре выработки до возведения обделки (рисунок 4.7) и после возведения обделки (рисунок 4.8 а) следует, что сооружение обделки с отставанием, ха-

рактизирующимся при расчётах коэффициентом  $\alpha^* = 0,6$ , приводит к значительному уменьшению как сжимающих, так и растягивающих нормальных тангенциальных напряжений.

Максимальные значения сжимающих напряжений снизились не менее чем в 3 раза и составляют  $-0,50 \text{ МПа}$ ; растягивающие напряжения практически исчезли - максимальные значения равны  $+0,05 \text{ МПа}$ . Характер эпюры остался прежним: максимальные сжимающие напряжения возникают при  $\theta = 330^\circ \dots 340^\circ$ ; незначительные растягивающие напряжения - в радиальных сечениях при  $\theta = 70^\circ$  и  $\theta = 250^\circ$ .

На наружном контуре поперечного сечения обделки расчётные максимальные значения сжимающих напряжений с учётом  $\alpha^* = 0,6$  составляют  $-18,7 \text{ МПа}$  при  $\theta = 250^\circ$ ; максимальные растягивающие -  $+16,0 \text{ МПа}$  при  $\theta = 340^\circ$ . На внутреннем контуре сечения обделки максимальные значения сжимающих напряжений составляют  $-21,9 \text{ МПа}$  при  $\theta = 340^\circ$ ; максимальные растягивающие -  $+20,5 \text{ МПа}$  при  $\theta = 250^\circ$ .

Из данных результатов следует, что в радиальных сечениях внутреннего контура обделки возникают как растягивающие, так и сжимающие напряжения, максимальные величины которых кратно превосходят возможные значения расчётных сопротивлений бетона на растяжение и на сжатие. Учитывая, что на внутреннем контуре касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$  отсутствуют, установленные максимальные значения растягивающих и сжимающих нормальных тангенциальных напряжений являются главными напряжениями. Превышение максимальными значениями напряжений соответствующих расчётных сопротивлений бетона свидетельствует о нарушениях условий прочности бетона, приводящих к возможному образованию трещин.

Далее, следуя алгоритму учёта последовательности проходки тоннелей и отставания возведения их обделок от забоя [8], решена задача 1.3, расчётная схема которой приведена в таблице 4.1.

Результаты расчётов показали, что проходка второй выработки выше по склону после завершения сооружения обделки первого (нижележащего) тоннеля в рассматриваемых условиях приводит к "разгрузке" обделки первого тоннеля - наблюдается снижение величин нормальных тангенциальных напряжений, возникающих в обделке первого тоннеля, по абсолютной величине. Максимальное снижение расчётных сжимающих напряжений на внутреннем контуре сечения обделки не превышает 8 % ; растягивающих напряжений - 4 % . Установлено незначительное увеличение напряжений в областях вблизи радиальных сечений обделки - таблица 4.4.

На рисунке 4.9 а, б, в представлены расчётные эпюры нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа, возникающих в среде в точках наружного контура выработки (рисунок 4.9 а), в точках наружного (рисунок 4.9 б) и внутреннего (рисунок 4.9 в) контуров поперечного сечения обделки второго тоннеля с учетом корректирующего множителя  $\alpha^* = 0,6$  (задача 1.4).

Из рисунка 4.9 а следует, что возведение бетонной обделки приводит к существенному изменению напряжённого состояния массива пород вблизи контура выработки: максимальные сжимающие нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_\theta$  снижаются практически в три раза с  $-1,31$  МПа до  $-0,39$  МПа с нагорной ( $\theta = 160^\circ$ ) и с  $-1,50$  МПа до  $-0,50$  МПа с противоположной стороны ( $\theta = 330^\circ$ ); максимальные растягивающие нормальные тангенциальные напряжения в момент проходки второго тоннеля составляли  $+0,67$  МПа при  $\theta = 250^\circ$ , после возведения обделки растягивающие напряжения практически исчезли - их значения не превышают  $+0,05$  МПа .

Таблица 4.4 - Радиальные сечения обделки первого тоннеля, в которых установлено увеличение напряжений после проходки второго тоннеля

Напряжения $\sigma_\theta$ , МПа					
Угол $\theta$ , град.	Наружный контур		Угол $\theta$ , град.	Внутренний контур	
	До проходки второго	После проходки второго		До проходки второго	После проходки второго
30	-4,67	-4,98	30	4,12	4,62
190	8,56	8,64	110	3,14	3,24
200	3,28	3,46	230	14,58	14,61
300	2,83	3,41	240	18,87	18,96
310	8,61	9,18	250	20,60	20,73
320	13,03	13,46	260	19,48	19,60
330	15,53	15,68	270	15,61	15,65
			300	-5,83	-6,22
			310	-12,93	-13,35
			320	-18,32	-18,6

На рисунке 4.9 а пунктирной линией приведены эпюры напряжений в среде на контуре выработки до возведения обделки. Из анализа напряжённого состояния обделки второго тоннеля с учётом отставания её возведения следует, что в бетоне возникают растягивающие и сжимающие нормальные тангенциальные напряжения.

Максимальные значения возникают в точках внутреннего контура сечения обделки и составляют для сжимающих напряжений – 20,8 МПа с нагорной ( $\theta = 160^\circ$ ) и – 22,0 МПа с противоположной ( $\theta = 340^\circ$ ) сторон; для растягивающих - +18,5 МПа при  $\theta = 70^\circ$  и – 20,7 МПа при  $\theta = 250^\circ$ .

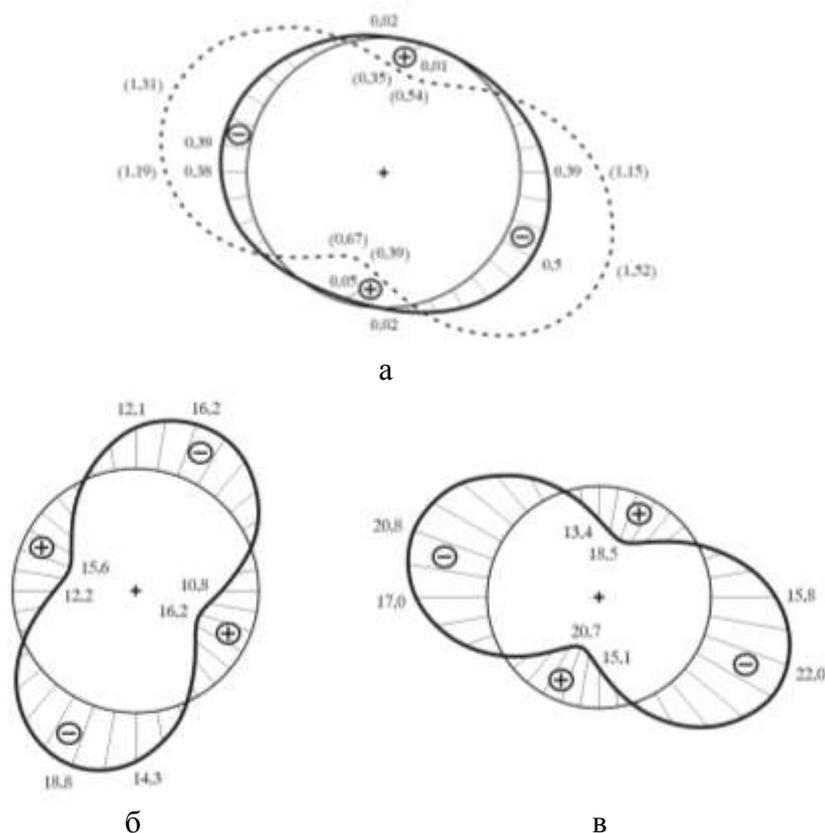


Рисунок 4.9 - Эпюры напряжений  $\sigma_{\theta}$ , МПа для второго тоннеля после возведения обделки: а - в среде на контуре выработки; б, в - на наружном и внутреннем контуре обделки

Полученные значения экстремальных напряжений на контурах поперечных сечений тоннелей даже с учётом развития смещений поверхности выработок до возведения обделок соизмеримы, а в ряде случаев могут превышать расчётные сопротивления пород и бетона сжатию и растяжению.

При проходке тоннелей в слабых породах не обеспечиваются условия устойчивости обнажений, что может приводить к значительным деформациям в массиве пород и возникновению оползней; наличие растягивающих напряжений в обделках свидетельствует о необходимости их армирования.

Для улучшения геомеханического состояния сооружённого комплекса тоннелей применяется укрепительная цементация пород вокруг тоннелей.

Ниже приведены результаты определения напряжённого состояния обделок тоннелей и массива пород отдельно для каждого из них после возникновения зон технологически неоднородных пород. С этой целью были

решены задачи 1.5 и 1.6, расчётные схемы которых приведены в таблице 4.2. При расчётах вокруг обделок тоннелей выделены концентрические зоны пород, подверженных инъекционному укреплению, и, следовательно, с изменёнными физико-механическими и деформационными характеристиками.

На рисунке 4.10 приведены расчётные эпюры нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа, возникающих в точках границы между массивом пород в естественном и упрочнённом состояниях (рисунок 4.10 а); в точках наружного (рисунок 4.10 б) и внутреннего (рисунок 4.10 в) контуров сечения зоны упрочнённых пород; в точках наружного (рисунок 4.10 г) и внутреннего (рисунок 4.10 д) контуров поперечного сечения обделки первого тоннеля после укрепления пород вокруг его обделки с учетом корректирующего множителя. На рисунке 4.10 а дополнительно пунктирной линией приведена эпюра напряжений, возникающих в среде на будущей границе пород в естественном и укреплённом состояниях, т.е. на контуре окружности  $R_{0,1} = 12,5$  м (до возведения обделки во втором тоннеле). Следуя рекомендациям проф. Фотиевой Н.Н. [35], для оценки напряжённого состояния обделок тоннелей, существующих в течение достаточно протяжённого периода времени и прошедших период релаксации и стабилизации, необходимо использовать расчётные значения напряжений, полученных из решения соответствующих задач теории упругости с учётом коэффициента  $\alpha^*$ , не меньшего 0,15. На рисунке 4.10 г, д приведены эпюры напряжений, полученные с учётом корректирующего множителя  $\alpha^* = 0,2$ .

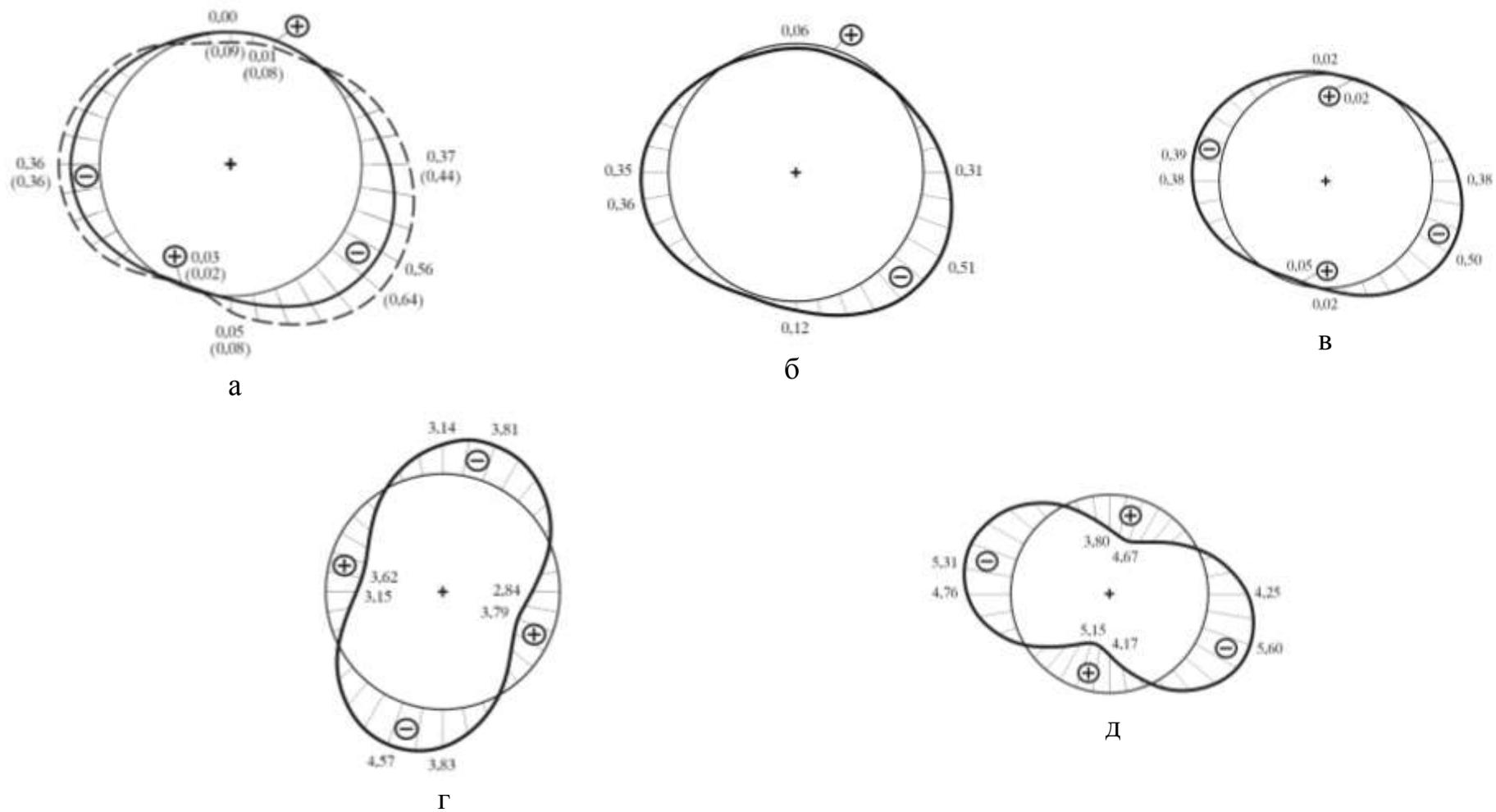


Рисунок 4.10 - Эпюры напряжений  $\sigma_{\theta}$ , МПа для первого тоннеля после укрепления пород: а - в среде на границе массива пород в естественном и упрочнённом состояниях; б, в - на наружном и внутреннем контурах упрочнённого слоя; г, д - на наружном и внутреннем контурах обделки

Из рисунка 4.10 а следует, что появление зоны укрепленных пород вокруг обделки первого тоннеля приводит к изменению напряжённого состояния массива пород на границе пород в естественном и укрепленном состояниях, которое проявляется в практически полном исчезновении растягивающих нормальных тангенциальных напряжений в радиальных сечениях при  $\theta = 50^\circ \dots 110^\circ$ , растягивающие напряжения не более  $+0,03 \text{ МПа}$  возникают в сечениях при  $\theta = 240^\circ \dots 260^\circ$ ; сжимающие напряжения в массиве пород в естественном состоянии на рассматриваемом контуре снизились на величину от 7% ( $\theta = 160^\circ$ ) до 20% ( $\theta = 10^\circ$ ). Из рисунка 4.10 б следует, что в упрочненном массиве пород на контуре при  $R_{0,1} = 12,5 \text{ м}$  значительно увеличилась зона действия растягивающих напряжений. Она ограничена радиальными сечениями  $\theta$  от  $50^\circ$  до  $130^\circ$ ; величина растягивающих напряжений не превышает  $+0,06 \text{ МПа}$ , сжимающих - не более  $-0,51 \text{ МПа}$ .

На внутреннем контуре сечения зоны упрочненных пород (рисунок 4.10 в) при  $R_{1,1} = 6,0 \text{ м}$  в зоне, ограниченной радиальными сечениями  $\theta$  от  $50^\circ$  до  $80^\circ$ , величина растягивающих напряжений не превышает  $+0,02 \text{ МПа}$ , а между сечениями от  $230^\circ$  до  $270^\circ$  -  $+0,05 \text{ МПа}$ . Максимальные значения сжимающих напряжений не превышают  $-0,50 \text{ МПа}$ .

Полученные из решения задач 1.3 - 1.5 расчётные значения нормальных тангенциальных напряжений на наружном и внутреннем контурах поперечного сечения кольца, моделирующего обделку тоннеля, позволяют уточнить закономерности формирования напряжённого состояния обделки этого тоннеля. Экстремальные значения соответствующих напряжений практически не изменяются, при этом для большинства радиальных сечений наружного и внутреннего контуров обделки установлено максимальное увеличение сжимающих напряжений на наружном контуре сечения обделки первого тоннеля (задача 1.3) после закрепления второго (задача 1.4) составляет соответственно не более 4%, растягивающих - не более 2,4%; максимальное уве-

личение сжимающих и растягивающих напряжений на внутреннем контуре сечения обделки первого тоннеля после закрепления второго не более 1,5%.

На рисунке 4.11 приведены расчётные эпюры напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа, возникающих в точках границы между массивом пород в естественном и упрочнённом состояниях (рисунок 4.11 а); в точках наружного (рисунок 4.11 б) и внутреннего (рисунок 4.11 в) контуров сечения зоны упрочнённых пород; в точках наружного (рисунок 4.11 г) и внутреннего (рисунок 4.11 д) контуров поперечного сечения обделки второго тоннеля после укрепления пород вокруг его обделки с учетом корректирующего множителя  $\alpha^* = 0,2$ .

Из представленных на рисунках 4.11 а, б результатов следует, что в упрочнённом массиве пород при  $R_{0,1} = 12,5$  м (рисунок 4.11 б) значительно увеличилась зона, в которой действуют растягивающие нормальные тангенциальные напряжения - она ограничена радиальными сечениями  $\theta$  от  $50^\circ$  до  $120^\circ$ ; величина растягивающих напряжений не превышает  $+0,06$  МПа. Максимальные значения сжимающих напряжений не превышают  $-0,56$  МПа.

На внутреннем контуре сечения зоны упрочнённых пород (рисунок 4.11 в) при  $R_{1,1} = 6,0$  м в зоне, ограниченной радиальными сечениями  $\theta$  от  $60^\circ$  до  $80^\circ$ , величины растягивающих напряжений не превышают  $+0,02$  МПа, а между сечениями от  $240^\circ$  до  $260^\circ$  -  $+0,05$  МПа. Максимальные значения сжимающих напряжений составляют  $-0,50$  МПа.

Эпюры расчётных значений нормальных тангенциальных напряжений для наружного и внутреннего контуров поперечного сечения обделки второго тоннеля (рисунок 4.11 г, д) по характеру практически совпадают с соответствующими эпюрами для первого тоннеля (рисунок 4.10 г, д), экстремальные значения напряжений в обделке второго тоннеля превышают соответствующие напряжения в обделке первого не более чем на 2 - 3 %.

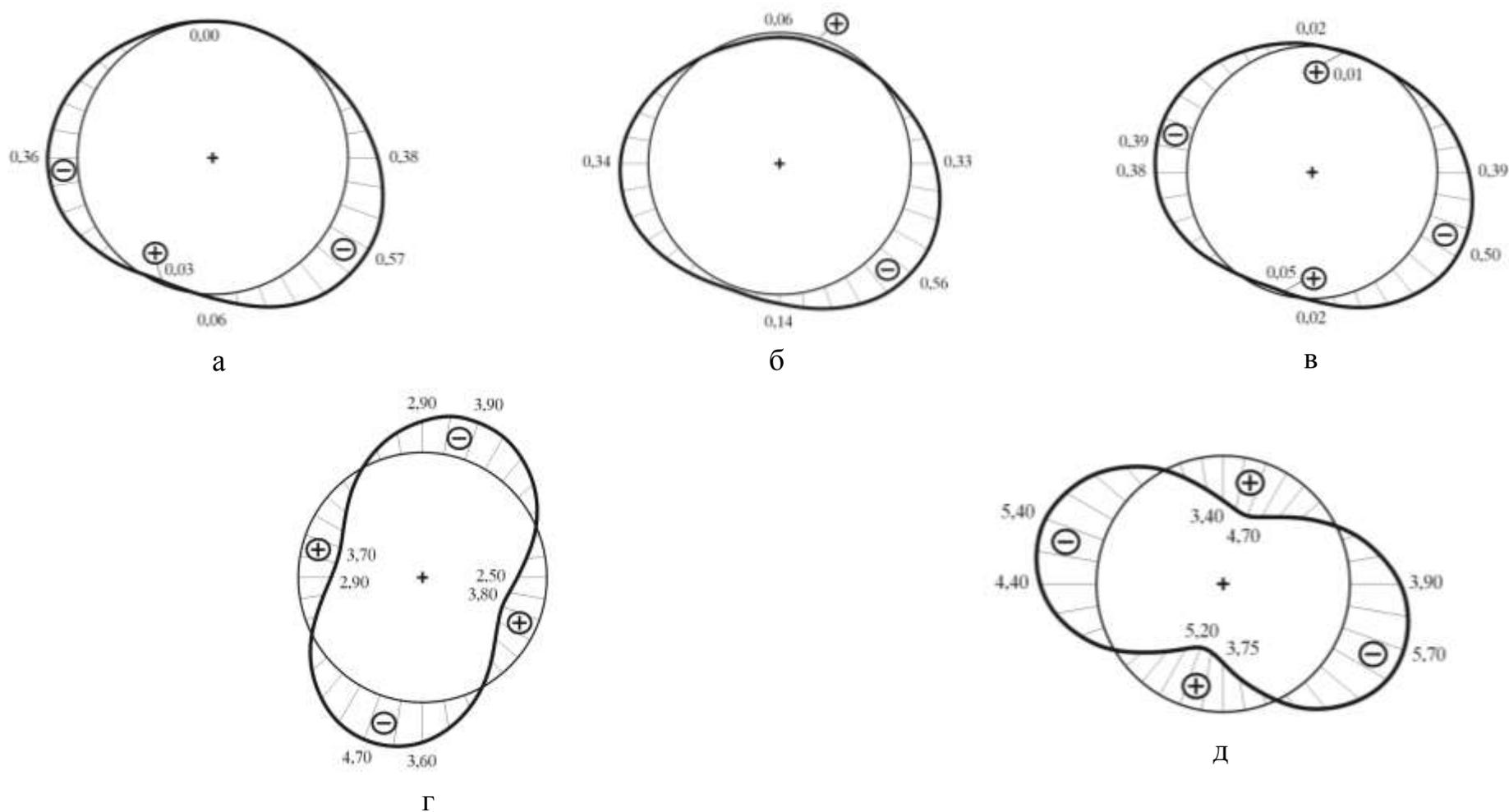


Рисунок 4.11 - Эпюры напряжений  $\sigma_{\theta}$ , МПа после укрепления пород вокруг обделки второго тоннеля:

а - в среде на границе массива пород в естественном и упрочнённом состояниях; б, в - на наружном и внутреннем контурах упрочнённого слоя; г, д - на наружном и внутреннем контурах обделки

Создание зон упрочнённых пород вокруг существующих тоннелей (задачи 1.5, 1.6) приводит к существенному снижению как сжимающих, так и растягивающих расчётных значений напряжений в их обделках. Результаты снижения максимальных значений напряжений приведены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 - Снижение экстремальных значений напряжений

Растягивающие напряжения				Сжимающие напряжения			
левый тоннель		правый тоннель		левый тоннель		правый тоннель	
наружный контур	внутренний контур	наружный контур	внутренний контур	наружный контур	внутренний контур	наружный контур	внутренний контур
43%	34%	43%	33%	35%	31%	35%	29%

Последовательное появление зон укреплённых пород вокруг обделок каждого из тоннелей приводит к незначительному увеличению напряжений в обделке соседнего тоннеля (в среднем не более чем на 1,5 - 2%).

Укрепительная цементация пород после сооружения тоннелей приводит к значительному уменьшению, вплоть до исчезновения, растягивающих напряжений в массиве пород вблизи контура выработки; максимальные сжимающие напряжения в породах практически не изменяются.

Поскольку после строительства тоннелей произошло перемещение тоннелей вниз по склону, интерес представляли расчётные значения максимальных напряжений, возникающих в точках поперечных сечений областей, моделирующих склон, а так же зоны укреплённых пород и сечения обделок.

Ниже приведены результаты определения напряжений в точках целиков между наклонной дневной поверхностью и сечениями тоннелей при отсутствии зон укреплённых пород вокруг тоннелей.

Установлено, что в точках земной поверхности вблизи целиков для левого и правого тоннелей возникают максимальные значения растягивающих нормальных тангенциальных напряжений: для левого тоннеля -  $+0,08$  МПа; для правого -  $+0,07$  МПа. В точках целиков породы вблизи сечения

обделок обоих тоннелей возникают сжимающие нормальные тангенциальные напряжения величиной  $-0,11 \text{ МПа}$ . Максимальные значения напряжений в массиве пород для обоих тоннелей составляют  $-0,50 \text{ МПа}$ .

Наличие растягивающих напряжений в массиве пород свидетельствует о том, что высока вероятность возникновения трещин, которые снизят устойчивость склона. Для сравнения выполнены расчёты с учётом наличия зон укрепленных пород. Полученные результаты свидетельствуют о том, что в точках земной поверхности вблизи целика для обоих тоннелей растягивающие нормальные тангенциальные напряжения снизились до  $+0,05 \text{ МПа}$ , а в точке целика вблизи наружных контуров колец, моделирующих обе обделки, сжимающие напряжения практически не изменились. Максимальные значения напряжений в массиве пород вблизи обоих тоннелей так же не изменились и не превышают  $-0,50 \text{ МПа}$ .

Далее приведены результаты численного эксперимента при расположении центров поперечных сечений на вертикальной прямой с учетом очередности проходки тоннелей и отставания возведения обделок от забоя выработок, позволяющие установить особенности формирования напряженного состояния массива пород и обделок тоннелей.

Выработка верхнего тоннеля проходила первой, затем в ней с определенным отставанием возводилась обделка. После проходки на всю длину и закрепления первого тоннеля проводилась проходка нижнего тоннеля и с тем же отставанием сооружалась обделка.

Центр поперечного сечения верхнего тоннеля располагается на глубине 17 м по вертикали от наклонной земной поверхности. Преобладающий угол наклона дневной поверхности составляет  $20^\circ$ . Расстояние по вертикали между центрами поперечных сечений тоннелей - 30 м. Диаметры выработок, как и ранее, приняты равными 12 м. Толщина бетонных обделок тоннелей - 0,7 м; концентрических зон укрепленных пород вокруг выработок - 6,5 м.

Физико-механические характеристики массива пород склона в естественном и укрепленном состояниях, а также материала обделок приняты такими же, как и при горизонтальном расположении тоннелей.

Учёт последовательности проходки тоннелей и отставания возведения обделок от забоя в каждом из тоннелей выполнен, как и ранее, на основе результатов последовательного решения задач, расчётные схемы которых приведены в таблицах 4.6, 4.7.

В таблице 4.8 приведены расчётные значения напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа в точках контуров, разделяющих области с различными деформационными характеристиками в задаче 2.6 (таблица 4.7), которые возникли бы при "мгновенной" при одновременном образовании отверстий, установке колец и возникновении концентрических зон среды с отличающимися модулями деформации. Сравнение результатов расчетов, представленных в таблицах 4.3 и 4.8, позволяют сделать выводы об особенностях формирования напряженного состояния элементов исследуемой геомеханической системы.

Далее приведено сопоставление результатов при различных компоновках тоннелей. Признано логичным сравнение напряженного состояния кольца, подкрепляющего верхнее отверстие, и зоны вокруг него при вертикальном расположении отверстий, с напряженным состоянием кольца, подкрепляющего правое отверстие, и зоны вокруг него при горизонтальном расположении. Кольцо, подкрепляющее нижнее отверстие, и зона вокруг него, при вертикальном расположении сравниваются с левым отверстием при горизонтальном расположении.

Установлено, что напряжения на контурах  $L_{0,1}$  в среде в естественном и упрочнённом состояниях, на контурах  $L_{1,1}$ , а также в кольце на контурах  $L_{1,1}$  и  $L_{2,1}$  для верхнего отверстия при вертикальном расположении практически совпадают с напряжениями на соответствующих контурах для правого отверстия при горизонтальном расположении, максимальные отличия не превышают 1% для растягивающих и 1,5% для сжимающих напряжений.

Таблица 4.6 - Расчётные схемы задач, учитывающие отставание возведения  
 обделки от забоя первого тоннеля и проходку второго тоннеля

	Задачи		
	2.1	2.2	2.3
Расчётные схемы			

Таблица 4.7 - Расчётные схемы задач, учитывающие отставание возведения обделки от забоя второго тоннеля и укрепление пород вокруг тоннелей

	Задача		
	2.4	2.5	2.6
Расчётная схема			

Таблица 4.8 - Напряжения  $\sigma_\theta, МПа$  в точках контуров между областями с различными деформационными характеристиками

Угол $\theta$ , град.	верхнее отверстие					нижнее отверстие				
	среда	зона		кольцо		среда	зона		кольцо	
	контур					контур				
	$L_{0,1}$	$L_{0,1}$	$L_{1,1}$	$L_{1,1}$	$L_{2,1}$	$L_{0,2}$	$L_{0,2}$	$L_{1,2}$	$L_{1,2}$	$L_{2,2}$
0	-0.38	-0.34	-0.39	13.56	-20.82	-1.05	-0.93	-1.10	33.79	-54.41
10	-0.28	-0.23	-0.31	8.02	-13.31	-0.84	-0.73	-0.91	19.90	-35.92
20	-0.18	-0.13	-0.22	1.59	-4.63	-0.62	-0.53	-0.69	3.41	-14.05
30	-0.10	-0.06	-0.14	-4.96	4.17	-0.41	-0.34	-0.46	-13.65	8.53
40	-0.05	-0.00	-0.07	-10.87	12.11	-0.23	-0.19	-0.25	-29.29	29.20
50	-0.01	0.03	-0.03	-15.52	18.37	-0.09	-0.09	-0.09	-41.74	45.67
60	0.00	0.05	0.00	-18.45	22.34	-0.01	-0.03	0.02	-49.68	56.18
70	0.01	0.06	0.01	-19.39	23.67	0.02	-0.01	0.06	-52.32	59.71
80	0.01	0.07	0.01	-18.28	22.28	-0.00	-0.03	0.03	-49.43	55.95
90	0.00	0.07	-0.02	-15.25	18.35	-0.07	-0.07	-0.07	-41.36	45.37
100	-0.01	0.07	-0.06	-10.62	12.27	-0.19	-0.15	-0.22	-28.97	29.10
110	-0.02	0.05	-0.10	-4.87	4.68	-0.33	-0.27	-0.41	-13.63	8.90
120	-0.06	0.02	-0.16	1.41	-3.64	-0.50	-0.41	-0.61	3.00	-13.02
130	-0.10	-0.03	-0.22	7.53	-11.80	-0.67	-0.56	-0.82	19.03	-34.21
140	-0.16	-0.10	-0.29	12.81	-18.91	-0.84	-0.71	-0.99	32.59	-52.21
150	-0.23	-0.18	-0.34	16.61	-24.13	-0.97	-0.85	-1.12	42.04	-64.85
160	-0.30	-0.26	-0.38	18.44	-26.77	-1.06	-0.95	-1.18	46.13	-70.49
170	-0.34	-0.32	-0.39	17.97	-26.42	-1.09	-0.99	-1.17	44.23	-68.29
180	-0.37	-0.35	-0.38	15.15	-22.99	-1.04	-0.98	-1.09	36.41	-58.32
190	-0.35	-0.35	-0.34	10.23	-16.80	-0.93	-0.91	-0.94	23.46	-41.63
200	-0.30	-0.32	-0.27	3.75	-8.53	-0.76	-0.78	-0.74	6.87	-20.14
210	-0.23	-0.25	-0.19	-3.53	0.80	-0.55	-0.61	-0.51	-11.38	3.55
220	-0.14	-0.17	-0.10	-10.69	10.01	-0.34	-0.43	-0.29	-29.01	26.48
230	-0.05	-0.11	-0.03	-16.81	17.88	-0.15	-0.28	-0.10	-43.79	45.71
240	0.01	-0.07	0.03	-21.08	23.36	-0.02	-0.17	0.03	-53.80	58.71
250	0.04	-0.06	0.05	-22.93	25.69	0.03	-0.12	0.08	-57.69	63.74
260	0.02	-0.07	0.03	-22.07	24.51	-0.01	-0.16	0.04	-54.92	60.08
270	-0.05	-0.11	-0.02	-18.58	19.92	-0.14	-0.27	-0.08	-45.81	48.15
280	-0.16	-0.20	-0.11	-12.90	12.49	-0.34	-0.45	-0.28	-31.53	29.49
290	-0.28	-0.31	-0.21	-5.76	3.17	-0.59	-0.66	-0.51	-13.92	6.50
300	-0.40	-0.43	-0.32	1.88	-6.76	-0.84	-0.87	-0.76	4.75	-17.84
310	-0.50	-0.51	-0.41	9.00	-15.97	-1.06	-1.05	-0.99	22.09	-40.40
320	-0.56	-0.56	-0.47	14.65	-23.22	-1.23	-1.17	-1.17	35.94	-58.34
330	-0.58	-0.56	-0.50	18.13	-27.58	-1.31	-1.22	-1.27	44.61	-69.45
340	-0.54	-0.52	-0.50	19.07	-28.56	-1.30	-1.19	-1.30	47.12	-72.46
350	-0.47	-0.44	-0.46	17.43	-26.16	-1.21	-1.09	-1.24	43.30	-67.17
360	-0.38	-0.34	-0.39	13.56	-20.82	-1.05	-0.93	-1.10	33.79	-54.41

Значения максимальных напряжений в радиальных сечениях всех контуров для нижнего отверстия при вертикальном расположении значительно превышают соответствующие напряжения в радиальных сечениях контуров для левого отверстия при горизонтальном расположении - растягивающие в 1,5 раза, а сжимающие - не менее чем в 1,6.

Ниже приведено сравнение напряжённого состояния обделок и массива пород в естественном и упрочнённом состояниях при вертикальном расположении тоннелей с учётом последовательности проходки выработок и отставания возведения обделок от забоя.

В задачах 2.1, 2.2 эпюры нормальных тангенциальных напряжений совпадают с эпюрами на рисунках 4.7, 4.8 для задач 1.1, 1.2. На рисунках 4.12 - 4.15 приведены эпюры  $\sigma_\theta, МПа$ , построенные по результатам решения задач 2.3 - 2.6. На рисунке 4.12 представлены результаты расчётов, иллюстрирующие влияние проходки нижней выработки на напряжённое состояние обделки верхнего тоннеля (задача 2.3).

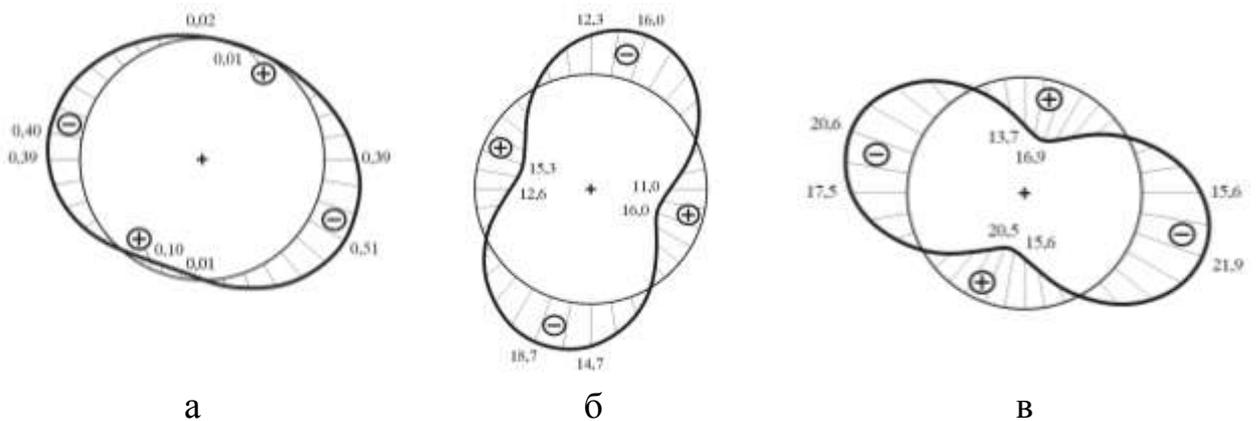


Рисунок 4.12 - Эпюры напряжений  $\sigma_\theta, МПа$  для верхнего тоннеля (с учетом отставания возведения обделки от забоя) после проходки нижнего:

а - на  $L_{0,1}$  в массиве пород; б, в - соответственно на  $L_{0,1}$  и  $L_{1,1}$  в обделке

Полученные результаты (рисунок 4.12 а, б, в) свидетельствуют о том, что, во-первых, проходка нижнего тоннеля практически не влияет на значе-

ния напряжений в массиве пород на контуре выработки верхнего тоннеля; во-вторых, в обделке верхнего тоннеля после проходки нижнего наблюдается уменьшение как растягивающих, так и сжимающих напряжений за исключением отдельных сечений, приведённых в таблице 4.9.

Таблица 4.9 - Радиальные сечения обделки верхнего тоннеля, в которых установлено увеличение напряжений после проходки нижнего тоннеля

Напряжения $\sigma_\theta$ , МПа					
Угол $\theta$ , град.	Наружный контур		Угол $\theta$ , град.	Внутренний контур	
	До проходки нижнего	После проходки нижнего		До проходки нижнего	После проходки нижнего
10	6,36	6,40	20	-2,96	-5,59
20	0,95	3,25	290	2,17	5,33
110	-3,67	-3,68			
290	-3,84	-5,29			

Данные из таблиц 4.4, 4.9, свидетельствуют о том, что при любой компоновке тоннелей мелкого заложения проходка соседнего тоннеля приводит к "разгрузке" обделки уже существующего тоннеля.

На рисунке 4.13 а, б, в представлены расчётные эпюры нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа, возникающих в массиве пород в точках наружного контура выработки (рисунок 4.13 а), в точках наружного (рисунок 4.13 б) и внутреннего (рисунок 4.13 в) контуров поперечного сечения обделки нижнего тоннеля с учетом корректирующего множителя  $\alpha^* = 0,6$  (задача 2.4). На рисунке 4.13 а дополнительно пунктирной линией приведены эпюры напряжений, возникающих в породах на контуре выработки нижнего тоннеля до возведения обделки, из которых следует, что в массиве пород на контуре выработки нижнего тоннеля возникают как растягивающие так и сжимающие напряжения, максимальные значения которых достигают +1,41 МПа при  $\theta = 250^\circ$  и -3,70 МПа при  $\theta = 340^\circ$ .

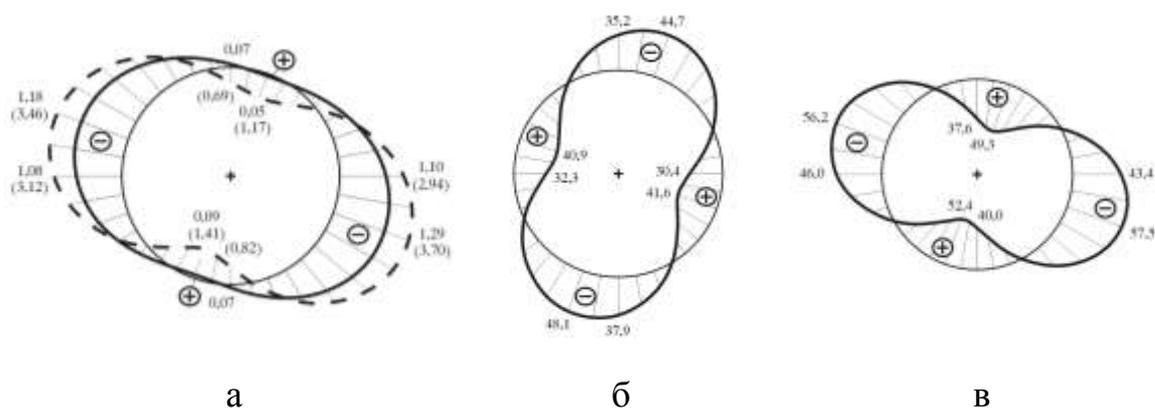


Рисунок 4.13 - Эпюры напряжений  $\sigma_{\theta}$ , МПа для нижнего тоннеля после возведения обделки: а - в среде на контуре выработки; б, в - на наружном и внутреннем контуре обделки

Возведение обделки в нижнем тоннеле приводит к уменьшению размеров областей в среде, в которых возникают растягивающие напряжения, а так же наблюдается кратное снижение как сжимающих, так и растягивающих нормальных тангенциальных напряжений: максимальные сжимающие напряжения снижаются с  $-3,70$  МПа до  $-1,29$  МПа при  $\theta = 340^\circ$ ; максимальные растягивающие - с  $+1,41$  МПа до  $+0,09$  МПа при  $\theta = 250^\circ$ .

Анализ расчетного напряжённого состояния обделки нижнего тоннеля с учётом отставания её возведения позволяет утверждать, что в ней возникают как растягивающие, так и сжимающие нормальные тангенциальные напряжения: максимальные значения на наружном контуре поперечного сечения обделки составляют для сжимающих напряжений  $-48,1$  МПа при  $\theta = 250^\circ$ , а для растягивающих -  $+41,6$  МПа при  $\theta = 340^\circ$ ; максимальные значения на внутреннем контуре - для сжимающих напряжений  $-57,5$  МПа при  $\theta = 340^\circ$ , для растягивающих напряжений -  $+52,4$  МПа при  $\theta = 250^\circ \dots 260^\circ$ .

Ниже приведены результаты определения напряжённого состояния обделок тоннелей и массива пород отдельно для каждого из тоннелей после создания вокруг них зон технологически неоднородных пород - задачи 2.5, 2.6, расчётные схемы которых приведены в таблице 4.7.

На рисунке 4.14 приведены эпюры напряжений  $\sigma_\theta$ , МПа, возникающих в точках границы между массивом пород в естественном и упрочнённом состояниях вокруг верхнего тоннеля (рисунок 4.14 а); в точках наружного (рисунок 4.14 б) и внутреннего (рисунок 4.14 в) контуров сечения зоны упрочнённых пород; в точках наружного (рисунок 4.14 г) и внутреннего (рисунок 4.14 д) контуров поперечного сечения обделки верхнего тоннеля после укрепления пород вокруг его обделки с учетом корректирующего множителя. Так же как и ранее, при оценке напряжённого состояния обделок тоннелей, существующих в течение достаточно протяжённого периода времени и в которых завершился период стабилизации напряжений, использован корректирующий множитель  $\alpha^* = 0,2$ .

На рисунке 4.15 приведены аналогичные эпюры напряжений, возникающих на соответствующих контурах для нижнего тоннеля после создания вокруг него зоны упрочнённых пород.

Как следует из сравнения эпюр расчетных напряжений на наружном и внутреннем контурах обделки верхнего тоннеля, представленных на рисунках 4.12 б, в и 4.14 г, д, появление зоны укреплённых пород вокруг тоннеля приводит к существенному изменению напряжённого состояния обделки - максимальные растягивающие (радиальное сечение  $\theta = 340^\circ$ ) и сжимающие (радиальное сечение  $\theta = 250^\circ$ ) нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре обделки уменьшаются не менее чем в 3,9...4,1 раза; на внутреннем контуре обделки максимальные растягивающие (радиальное сечение  $\theta = 70^\circ$ ) и сжимающие (радиальное сечение  $\theta = 340^\circ$ ) нормальные тангенциальные напряжения уменьшаются не менее чем в 3,5...3,6 раза.

Сравнивая эпюры напряжений на наружном и внутреннем контурах обделки нижнего тоннеля, приведённые на рисунках 4.13 б, в и 4.15 г, д, можно сделать вывод о том, что максимальные растягивающие (радиальное сечение  $\theta = 340^\circ$ ) и сжимающие (радиальное сечение  $\theta = 250^\circ$ ) напряжения

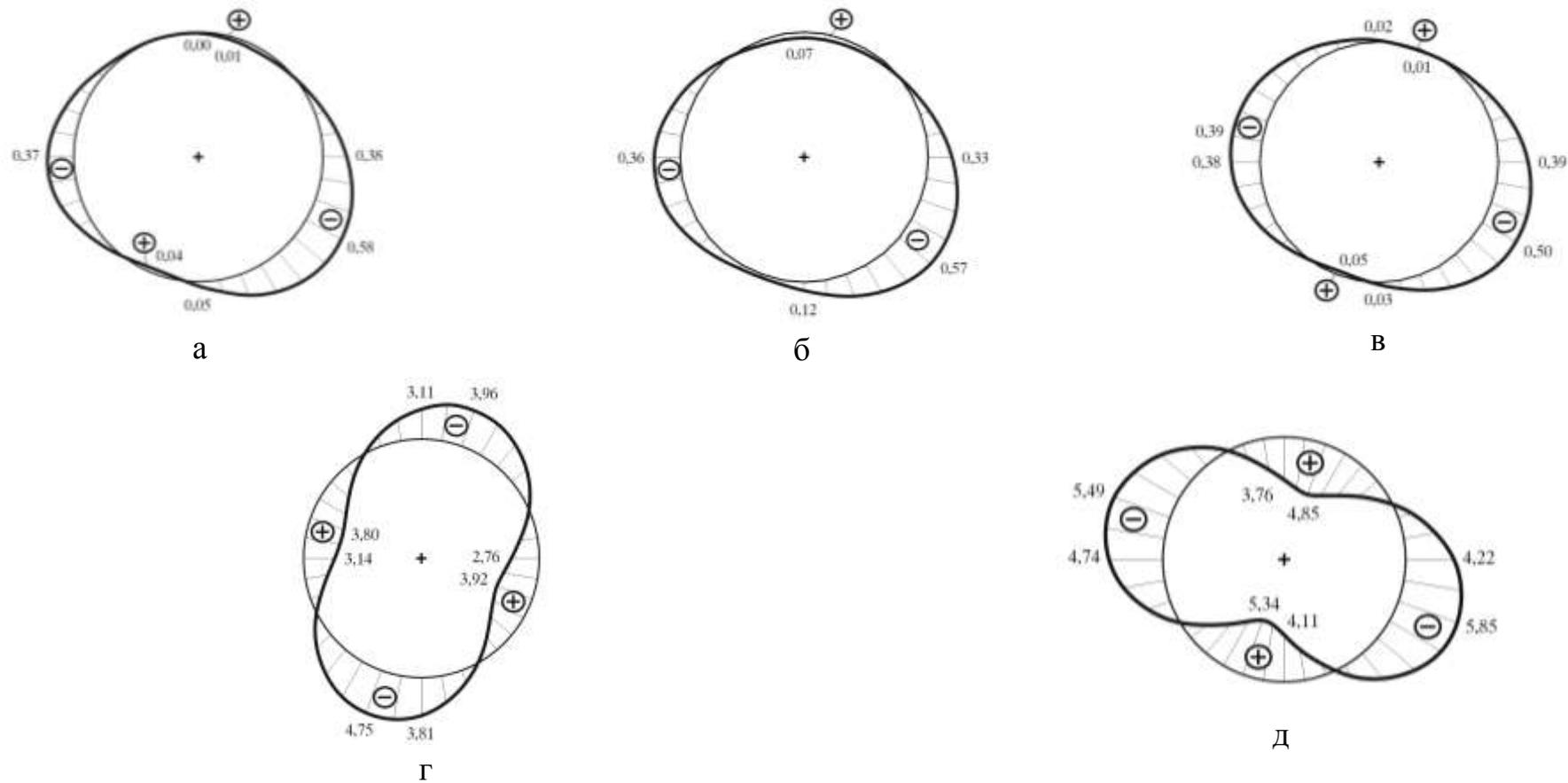


Рисунок 4.14 - Эпюры напряжений  $\sigma_{\theta}$ , МПа для верхнего тоннеля после упрочнения пород:

а - в среде на границе массива пород в естественном и упрочнённом состояниях; б, в - на наружном и внутреннем контурах упрочнённого слоя; г, д - на наружном и внутреннем контурах обделки

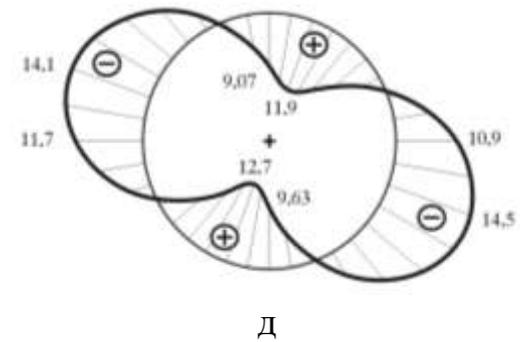
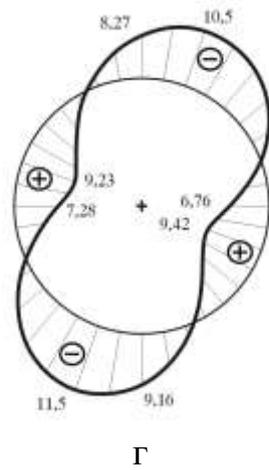
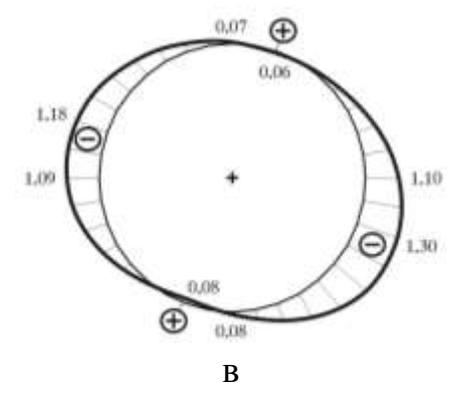
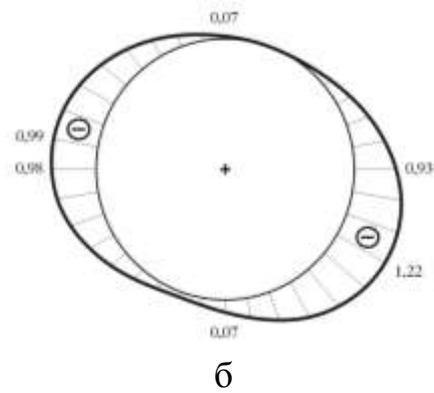
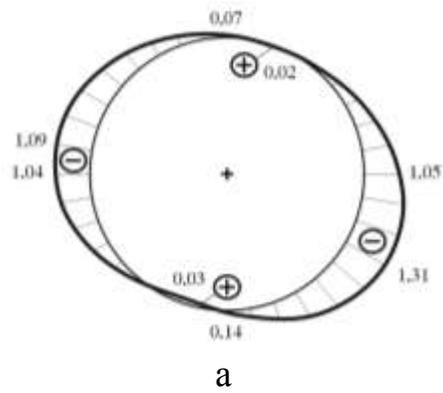


Рисунок 4.15 - Эпюры напряжений  $\sigma_{\theta}$ , МПа для нижнего тоннеля после упрочнения пород:

а - в среде на границе массива пород в естественном и упрочнённом состояниях;

б, в - на наружном и внутреннем контурах упрочнённого слоя; г, д - на наружном и внутреннем контурах обделки

$\sigma_\theta$  на наружном контуре обделки уменьшаются не менее чем в 4,2...4,4 раза; на внутреннем контуре обделки максимальные растягивающие (радиальное сечение  $\theta = 70^\circ$ ) и сжимающие (радиальное сечение  $\theta = 340^\circ$ ) - уменьшаются не менее чем в 4,0...4,1 раза.

Полученные из решения задач 2.3 - 2.5 расчётные значения нормальных тангенциальных напряжений на наружном и внутреннем контурах поперечного сечения кольца, моделирующего обделку тоннеля, позволяют уточнить закономерности формирования напряжённого состояния обделки этого тоннеля. Экстремальные значения соответствующих напряжений практически не изменяются, при этом для большинства радиальных сечений наружного и внутреннего контуров обделки установлено:

- максимальное увеличение сжимающих напряжений на наружном контуре сечения обделки верхнего тоннеля (задача 2.3) после закрепления нижнего (задача 2.4) составляет не более 4%;

- максимальное увеличение растягивающих напряжений на наружном контуре сечения первого обделки тоннеля (задача 2.3) после закрепления второго (задача 2.4) составляет не более 2,4%;

- максимальное увеличение сжимающих и растягивающих напряжений на внутреннем контуре сечения обделки первого тоннеля после закрепления второго не превышает 1,5%.

Создание зон упрочнённых пород вокруг уже существующих тоннелей (задачи 2.5, 2.6) приводит к снижению расчётных значений напряжений в обделках обоих тоннелей. Величины снижения максимальных значений напряжений приведены в таблице 4.10.

Выполненные расчёты подтверждают сделанный ранее вывод о том, что последовательное появление зон укреплённых пород вокруг каждого из тоннелей приводит к незначительному увеличению и растягивающих, и сжимающих напряжений в обделках соседних тоннелей (в среднем не более чем на 1,5 - 2%).

Таблица 4.10 - Снижение экстремальных значений напряжений

Растягивающие напряжения				Сжимающие напряжения			
верхний тоннель		нижний тоннель		верхний тоннель		нижний тоннель	
наружный контур	внутренний контур	наружный контур	внутренний контур	наружный контур	внутренний контур	наружный контур	внутренний контур
48%	35%	47%	37%	37%	34%	39%	32%

Это можно объяснить усилением взаимного влияния тоннелей как элементов рассматриваемой геомеханической системы вследствие изменения её геометрических параметров (появления зон укрепленных пород).

#### Выводы по главе 4

1. Составлен полный алгоритм расчета, реализованный в виде компьютерной программы, позволяющей определять напряженное состояние массива пород, в том числе - технологически неоднородного, и обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности.

2. С использованием разработанной программы определено минимальное число удерживаемых членов в используемых при получении решения задачи теории упругости рядах Лорана, обеспечивающее удовлетворение граничных условий с погрешностью, не превышающей 2...3% .

3. На основе многовариантных расчетов для двух тоннелей различной компоновки установлено, что наличие наклонной земной поверхности существенно изменяет напряжённое состояние обделок, заключающееся в кратном увеличении максимальных растягивающих и сжимающих напряжений.

4. Проходка нового тоннеля выше по склону при принятых физико-механических характеристиках пород и материала обделок приводит к перераспределению напряжений - установлено снижение максимальных сжимающих и растягивающих напряжений, в том числе - в массиве пород на контуре выработки существующего тоннеля. Закрепление нового тоннеля

приводит к незначительному росту растягивающих и сжимающих напряжений в обделке существующего тоннеля.

5. При сооружении тоннелей в слабых породах не обеспечивается устойчивость обнажений, что приводит к значительным деформациям массива пород и возникновению оползней; наличие значительных растягивающих напряжений в обделках, превышающих расчетное сопротивление растяжению, свидетельствует о возможности образования трещин.

6. Исследование напряженного состояния обделок тоннелей с учётом наличия зон грунта, подверженного инъекционному укреплению, позволяет утверждать о различной степени влияния этих зон на напряжения, возникающие в обделках верхнего и нижнего тоннелей, при этом более значительное снижение наблюдается в обделке нижнего тоннеля.

7. Расчеты с учётом отставания возведения обделок от забоя и последовательности проходки тоннелей в слабых породах позволили установить весьма незначительное взаимное влияние тоннелей при выбранных компоновках, объясняемое достаточно большим расстоянием между осями тоннелей и малой величиной модуля деформации пород.

8. Возведение обделки с отставанием приводит к снижению максимальных сжимающих нормальных тангенциальных напряжений в породе на контуре выработки; растягивающие напряжения - практически исчезают.

9. Для тоннелей мелкого заложения строительство параллельного тоннеля приводит к "разгрузке" обделки уже существующего, за исключением отдельных установленных радиальных сечений.

12. Применение укрепительной цементации пород вокруг существующих тоннелей приводит к значительному уменьшению, вплоть до исчезновения, растягивающих напряжений в массиве пород вблизи контура выработки; максимальные сжимающие напряжения в слабых породах практически не изменяются. Появление зон укрепленных пород вокруг обделки одного из тоннелей приводит к незначительному увеличению максимальных растягивающих и сжимающих напряжений в обделке соседнего тоннеля.

## **5 ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ОБДЕЛОК ТОННЕЛЕЙ, СООРУЖЕННЫХ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОДАХ**

Для уточнения известных и установления новых закономерностей формирования напряженного состояния обделок тоннелей как элементов единой геомеханической системы "массив пород с наклонной земной поверхностью - зоны технологически неоднородных пород - обделки параллельных тоннелей" при конкретных компоновке и геомеханических условиях были выполнены многовариантные расчеты для двух одинаковых в поперечном сечении параллельных тоннелей, сооруженных закрытым способом, с использованием разработанного программного обеспечения.

Расчеты позволили выявить особенности формирования напряженного состояния обделок тоннелей при различных сочетаниях основных влияющих факторов для наиболее неблагоприятного случая, обусловленным одновременным появлением подкрепленных отверстий в технологически неоднородной среде, что соответствует одновременной проходке выработок и их креплению непосредственно в забое. Под технологически неоднородным массивом пород вокруг тоннелей при выполнении исследований понимается зона пород, подверженная, как правило, инъекционному упрочнению.

### **5.1 Общие положения**

В качестве основных влияющих факторов использованы:

- угол наклона земной поверхности к горизонту;
- соотношение деформационных характеристик массива пород в естественном и технологически неоднородном состояниях;
- соотношение деформационных характеристик материала обделок тоннелей и вмещающего массива пород;
- коэффициент Пуассона массива пород;

- соотношение глубины заложения тоннелей и геометрических размеров поперечного сечения обделок тоннелей, а также зон технологически неоднородного массива пород;

- относительная толщина обделок тоннелей;

- коэффициент бокового давления в массиве пород.

С целью возможности использования полученных данных при различных сочетаниях глубины заложения тоннелей, геометрических размеров поперечного сечения тоннелей и толщин их обделок, а также расстояниях между продольными осями тоннелей расчеты выполнены и представлены в долях радиуса выработки тоннеля. Расчетная схема приведена на рисунке 5.1.

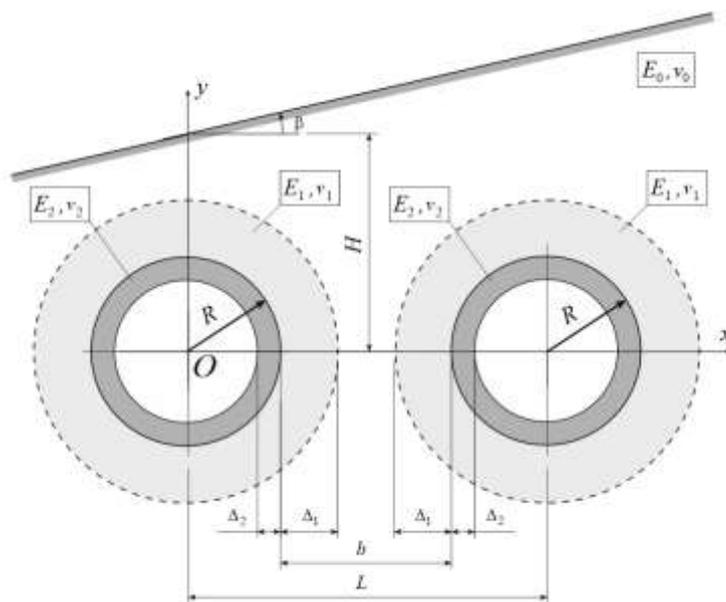


Рисунок 5.1 - Расчетная схема

Объемный вес пород в естественном и упрочненном состояниях  $\gamma = 0,022 \text{ МН} / \text{м}^3$ . В качестве параметра при задании величин геометрических характеристик комплекса тоннелей используется радиус  $R$  выработки тоннеля. Угол наклона  $\beta$  изменяется от  $0^\circ$  (горизонтальная земная поверхность) до предельного значения, зависящего от соотношения глубины заложения

жения  $H$ , размеров зоны укрепленных пород и радиуса выработки  $R$ . Центры сечений выработок расположены на горизонтальной прямой.

Количественные оценки диапазонов изменения основных влияющих факторов, принятых при исследовании, приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 - Диапазоны изменения влияющих факторов

Влияющий фактор	Диапазон изменения
глубина заложения левого тоннеля по вертикали $H$	$5R$
угол наклона земной поверхности $\beta$ , град.	$0 \dots 60$
расстояние между центрами поперечных сечений выработок $L$	$5R \dots 10R$
модуль деформации пород в естественном состоянии $E_0$ , МПа	$20 \dots 1000$
коэффициент бокового давления $\lambda$	$0 \dots 1,0$
толщина зоны укрепленных пород $\Delta_1$	$0 \dots 3R$
модуль деформации укрепленных пород $E_1$	$(1 \dots 3)E_0$
коэффициент Пуассона пород в естественном и укрепленном состоянии $\nu_0 = \nu_1$	$0,35$
толщина обделки $\Delta_2$	$0,04R \dots 0,1R$
модуль деформации $E_2$ бетона обделки, $1 \cdot 10^{-3}$ , МПа	$23 \dots 40$
коэффициент Пуассона бетона обделки $\nu_2$	$0,2$

Результаты расчётов с использованием приведённых выше исходных данных позволили установить закономерности формирования напряжённого состояния обделок тоннелей. Далее приведены соответствующие зависимости для экстремальных значений нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta$  при определённых сочетаниях основных влияющих факторов.

Из полученных результатов следует, что максимальные растягивающие (положительные) и сжимающие (отрицательные) нормальные тангенци-

альные напряжения  $\sigma_\theta$  возникают, как правило, в точках внутренних контуров поперечных сечений обделок. Данные напряжения являются главными, т.к. касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$  в точках этих контуров отсутствуют.

Зависимости максимальных растягивающих и сжимающих напряжений  $\sigma_\theta$  в точках внутренних контуров поперечного сечения обделок тоннелей при различных сочетаниях влияющих факторов, представленные в графическом виде, приведены ниже на рисунках 5.2 - 5.8.

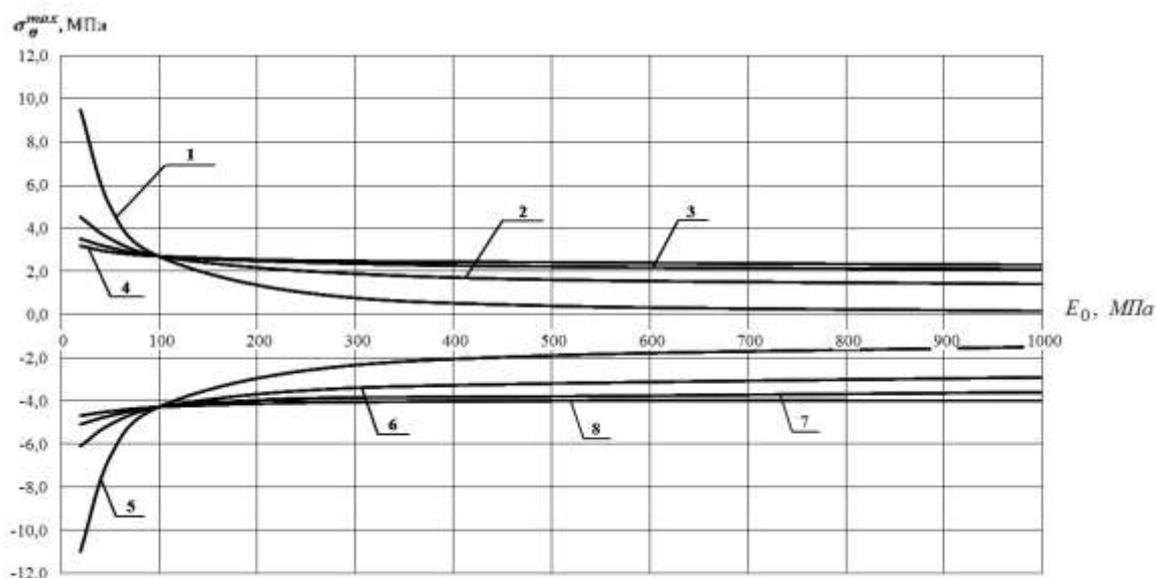
## 5.2 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от величины модуля деформации пород

При исследовании влияния величины модуля деформации  $E_0$  массива пород в естественном состоянии на значения максимальных напряжений в обделке тоннелей параметром исследования является величина  $\Delta_1$  - толщина зоны технологически неоднородных пород. Расчеты выполнены при  $\lambda = 0,54$  для фиксированных значений толщины зон технологически неоднородных пород:  $\Delta_1 = 0$ ;  $\Delta_1 = R$ ;  $\Delta_1 = 2R$ ;  $\Delta_1 = 3R$ . Угол наклона земной поверхности принят равным  $\beta = 30^\circ$ ; глубина заложения левого тоннеля -  $H = 5R$ ; расстояние между продольными осями тоннелей -  $B = 10R$ ; модуль деформации технологически неоднородных пород  $E_1 = 100 \text{ МПа}$ ; модуль деформации материала обделки  $E_2 = 27000 \text{ МПа}$ ; толщина обделок тоннелей -  $\Delta_2 = 0,08R$ .

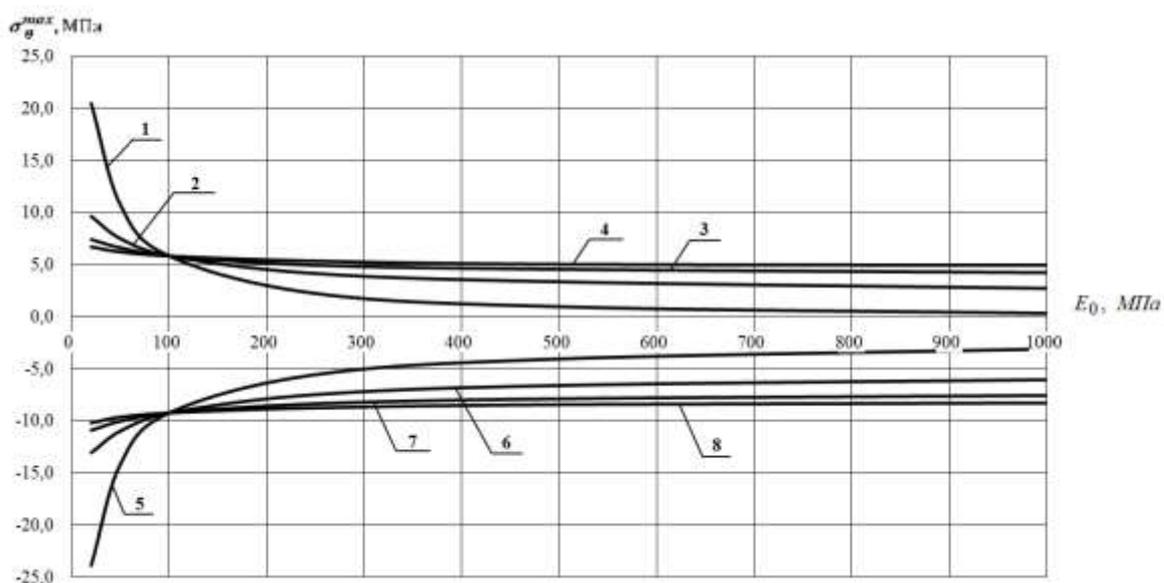
При изменении  $E_0$  от  $20 \text{ МПа}$  до  $100 \text{ МПа}$  зона технологически неоднородных пород является, по сути, зоной упрочнённых пород, а при  $E_0$  выше  $100 \text{ МПа}$  - зоной ослабленных пород.

Зависимости максимальных растягивающих (положительных) и сжимающих (отрицательных) нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_\theta^{max}$ , возникающих в точках внутренних контуров поперечных сечений обделок левого и правого тоннелей от величины  $E_0$  при различных величинах  $\Delta_1$  по-

казаны на рисунке 5.2 а, б. Линии 1, 5 соответствуют  $\Delta_1 = 0$ ; линии 2, 6 -  $\Delta_1 = R$ ; 3, 7 -  $\Delta_1 = 2R$ ; линии 4, 8 -  $\Delta_1 = 3R$ .



а



б

Рисунок 5.2 - Зависимости напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  от величины  $E_0$

при различных  $\Delta_1$  для тоннелей: а - левого; б - правого

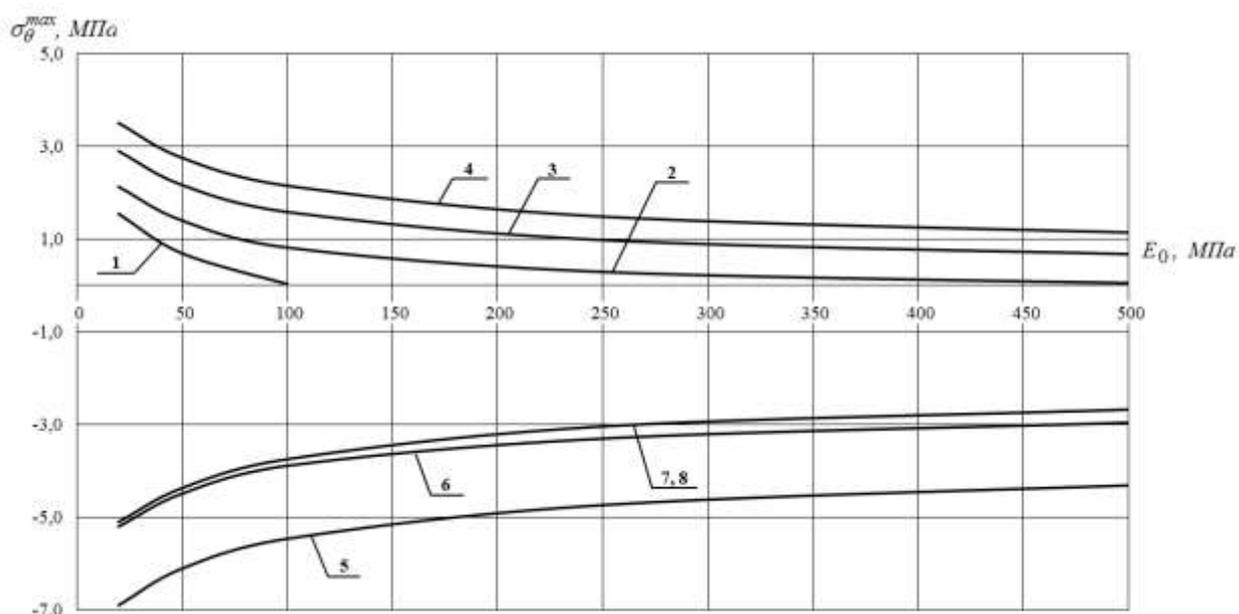
Общим для представленных зависимостей является уменьшение по абсолютной величине значений и растягивающих, и сжимающих напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  с увеличением значения модуля деформации  $E_0$  пород в естественном

состоянии. Влияние роста величины модуля деформации пород  $E_0$  на напряжённое состояние обделок в наибольшей степени проявляется при отсутствии вокруг тоннелей зон технологически неоднородных пород (линии 1, 5) - многократному уменьшению максимальных растягивающих напряжений в обделках обоих тоннелей (от  $+9,5 \text{ МПа}$  до  $+0,4 \text{ МПа}$  в левом; от  $+20,5 \text{ МПа}$  до  $+0,9 \text{ МПа}$  в правом тоннеле), т.е. практически до исчезновения. Максимальные сжимающие напряжения также уменьшаются с  $-11,0 \text{ МПа}$  до  $-1,9 \text{ МПа}$  в левом; с  $-23,9 \text{ МПа}$  до  $-4,1 \text{ МПа}$  в правом тоннеле.

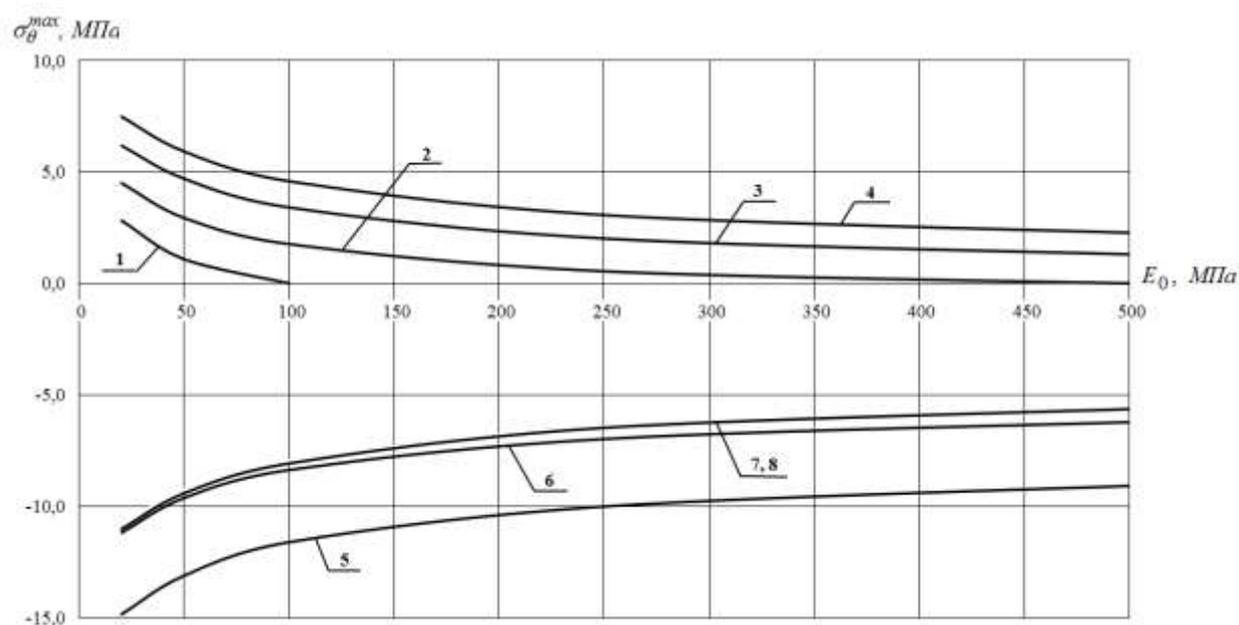
Наличие зон технологически неоднородных пород и увеличение их толщины приводит к уменьшению значений экстремальных напряжений, возникающих на внутренних контурах обделок тоннелей. Наиболее интенсивно это происходит при изменении модуля деформации пород от  $20 \text{ МПа}$  до  $100 \text{ МПа}$  (линии 2, 6 на рисунке 5.2 а, б). При значениях  $E_0$ , превышающих  $100 \text{ МПа}$ , влияние толщины зоны ослабленных пород на величины экстремальных напряжений весьма незначительно.

На рисунке 5.3 а, б приведены зависимости максимальных растягивающих и сжимающих напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$ , возникающих в точках внутренних контуров поперечных сечений обделок обоих тоннелей от величины  $E_0$  при различных толщинах обделок  $\Delta_2$  при поперечном размере зон технологически неоднородных пород  $\Delta_1 = R$ . Линии 1, 5 соответствуют  $\Delta_2 = 0,02R$ ; линии 2, 6 -  $\Delta_2 = 0,04R$ ; линии 3, 7 -  $\Delta_2 = 0,06R$ ; линии 4, 8 -  $\Delta_2 = 0,08R$ .

Из представленных графиков следует, что с увеличением толщины обделок тоннелей и ростом модуля деформации пород  $E_0$  в естественном состоянии и в принятом диапазоне наблюдается уменьшение значений максимальных сжимающих и растягивающих напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$ , вплоть до полного исчезновения последних при  $E_0 = 100 \text{ МПа}$ .



а



б

Рисунок 5.3 - Зависимости напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  от величины  $E_0$  при различных величинах  $\Delta_2$  для тоннелей: а - левого; б - правого

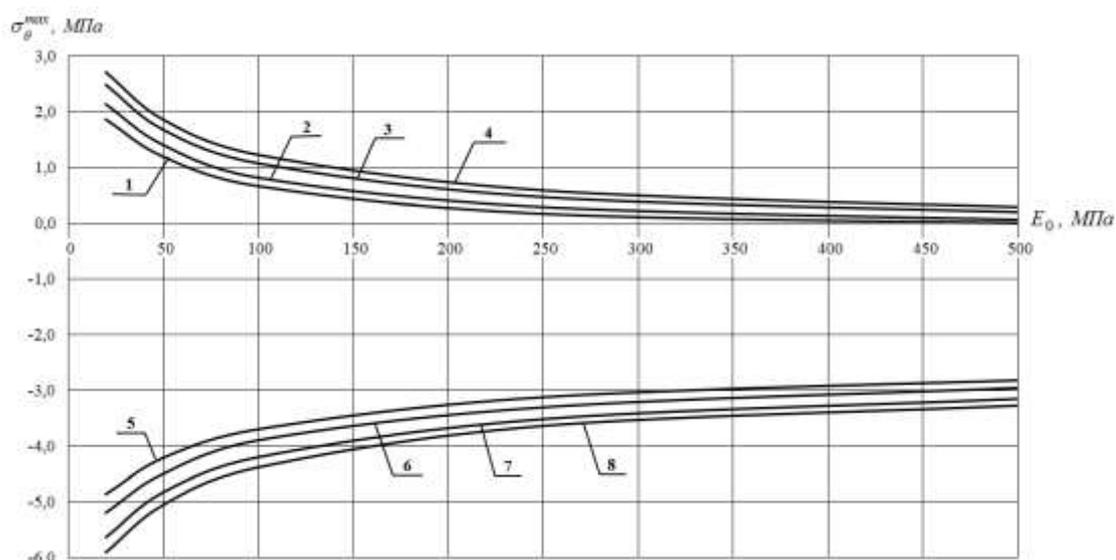
Наибольшее влияние толщины обделок на их напряжённое состояние наблюдается в диапазоне изменения модуля деформации пород  $E_0$  от 20 МПа до 300 МПа, т.е. в слабых и средней прочности породах. Установле-

но, что увеличение толщины обделок с  $\Delta_2 = 0,04R$  до  $\Delta_2 = 0,08R$  приводит к весьма незначительному снижению сжимающих напряжений в обделках обоих тоннелей с ростом модуля деформации  $E_0$  пород в естественном состоянии. Так, например, линии 7 и 8 на рисунке 5.3 а, б, соответствующие толщинам  $\Delta_2 = 0,06R$  и  $\Delta_2 = 0,08R$ , практически совпадают.

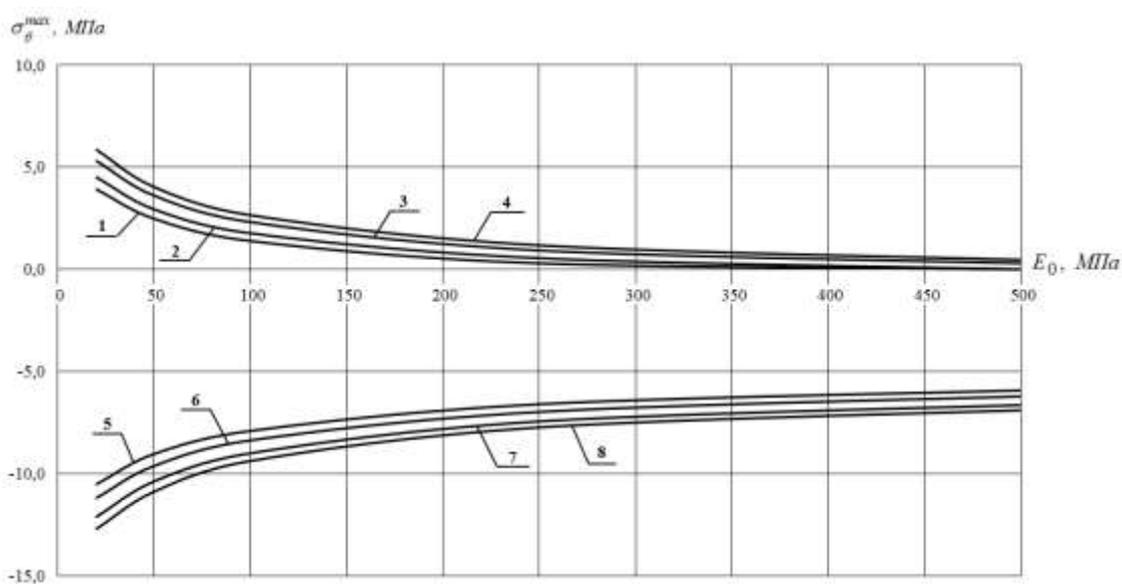
На рисунке 5.4 а, б приведены зависимости максимальных напряжений  $\sigma_\theta^{max}$ , возникающих в точках внутренних контуров поперечных сечений обделок обоих тоннелей от величины  $E_0$  при различных модулях деформации  $E_2$  материала обделок при поперечном размере зон технологически неоднородных пород  $\Delta_1 = R$ ; модуле деформации материала зон технологически неоднородных пород  $E_1 = 150 \text{ МПа}$ ; толщине обделок -  $\Delta_2 = 0,04R$ . Линии 1, 5 соответствуют  $E_2 = 23000 \text{ МПа}$ ; линии 2, 6 -  $E_2 = 27000 \text{ МПа}$ ; линии 3, 7 -  $E_2 = 32500 \text{ МПа}$ ; линии 4, 8 -  $E_2 = 36000 \text{ МПа}$ .

Из представленных результатов следует, что с ростом в принятом диапазоне модуля деформации пород  $E_0$  в естественном состоянии значения экстремальных напряжений, возникающих в обделках тоннелей, монотонно убывают по абсолютной величине. В первом тоннеле (рисунок 5.4 а) растягивающие напряжения - от  $+2,71 \text{ МПа}$  при  $E_0 = 20 \text{ МПа}$  и  $E_1 = 36000 \text{ МПа}$  до полного исчезновения при  $E_0 = 500 \text{ МПа}$  и  $E_1 = 23000 \text{ МПа}$ , сжимающие - от  $-5,91 \text{ МПа}$  при  $E_0 = 20 \text{ МПа}$  и  $E_1 = 36000 \text{ МПа}$  до  $-2,82 \text{ МПа}$  при  $E_0 = 500 \text{ МПа}$  и  $E_1 = 23000 \text{ МПа}$ .

Во втором тоннеле (более глубокого заложения) - растягивающие напряжения снижаются от  $+5,84 \text{ МПа}$  при  $E_0 = 20 \text{ МПа}$  и  $E_1 = 36000 \text{ МПа}$  до полного исчезновения при  $E_0 = 500 \text{ МПа}$ ,  $E_1 = 23000 \text{ МПа}$  и  $E_1 = 27000 \text{ МПа}$ ; сжимающие - от  $-12,7 \text{ МПа}$  при  $E_0 = 20 \text{ МПа}$  и  $E_1 = 36000 \text{ МПа}$  до  $-5,92 \text{ МПа}$  при  $E_0 = 500 \text{ МПа}$  и  $E_1 = 23000 \text{ МПа}$ .



а



б

Рисунок 5.4 - Зависимости напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  от величины  $E_0$  при различных величинах  $E_2$  для тоннелей: а - левого; б - правого

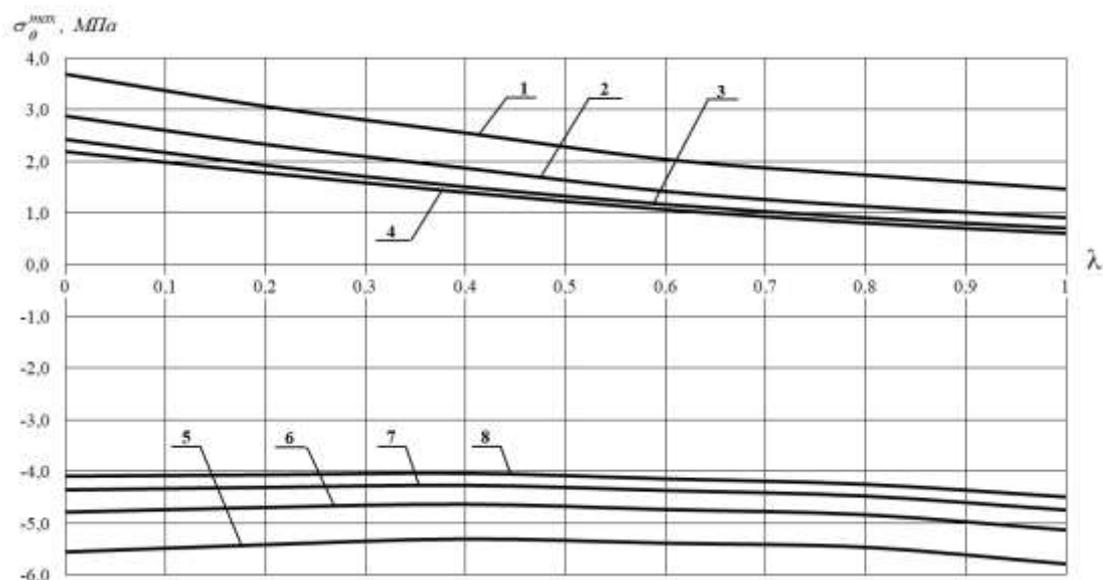
Результаты расчётов показывают, что наиболее эффективно применение обделок из бетона более высоких марок в слабых породах с модулем деформации  $E_0$  от 20 МПа до 150 МПа.

### 5.3 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от величины коэффициента бокового давления пород

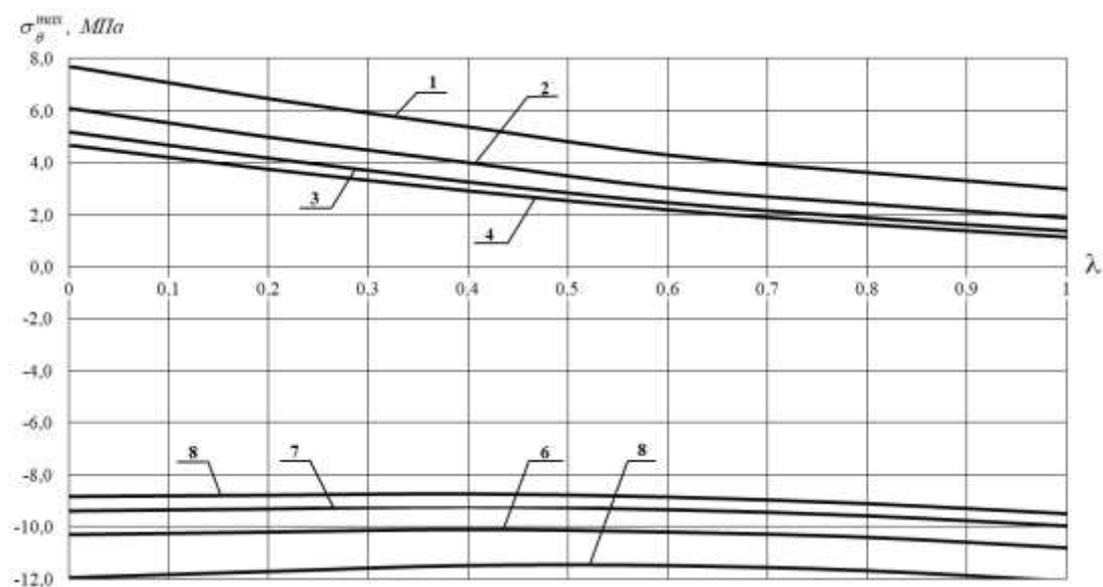
Для исследования изменения величины максимальных нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  от коэффициента бокового давления пород  $\lambda$  при различных модулях деформации материала зон технологически неоднородных пород выполнены расчёты при модуле деформации пород в естественном состоянии  $E_0 = 60 \text{ МПа}$ ; толщине зоны неоднородных пород -  $\Delta_1 = R$ ; толщине обделок тоннелей -  $\Delta_2 = 0,04R$ ; модуле деформации материала обделок  $E_2 = 27000 \text{ МПа}$ . Результаты расчётов представлены на рисунке 5.5 а, б, на которых линии 1, 5 соответствуют случаю отсутствия зоны технологически неоднородных пород; линии 2, 6 -  $E_1 = 100 \text{ МПа}$ ; линии 3, 7 -  $E_1 = 150 \text{ МПа}$ ; линии 4, 8 -  $E_1 = 200 \text{ МПа}$ .

Из представленных на рисунке 5.5 результатов следует, что увеличение модуля деформации пород в укрепленном состоянии вызывает снижение максимальных растягивающих и сжимающих напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  в обделках обоих тоннелей при любом значении  $\lambda$  в диапазоне от 0 до 1,0. Так, например, при отсутствии зон укрепленных пород увеличение  $\lambda$  приводит к снижению растягивающих напряжений с  $3,68 \text{ МПа}$  до  $1,47 \text{ МПа}$  для левого тоннеля, с  $7,69 \text{ МПа}$  до  $2,99 \text{ МПа}$  для правого тоннеля, т.е. практически в 2,5 раза. С ростом коэффициента бокового давления максимальные растягивающие напряжения монотонно убывают.

Максимальные сжимающие напряжения, возникающие на внутреннем контуре обделок обоих тоннелей, с увеличением коэффициента бокового давления  $\lambda$  изменяются в достаточно узком диапазоне. Представленные линии имеют слабо выраженный экстремальный характер - при  $\lambda = 0,4$  наблюдаются наименьшие значения максимальных сжимающих напряжений для всех рассмотренных вариантов сочетания основных влияющих факторов.



а



б

Рисунок 5.5 - Зависимости напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  от величины  $\lambda$  при различных величинах  $E_1$  для тоннелей: а - левого; б - правого

Из полученных результатов следует, что наличие вокруг тоннелей зон укрепленных пород приводит к значительному уменьшению растягивающих и стабилизации сжимающих напряжений в обделках обоих тоннелей.

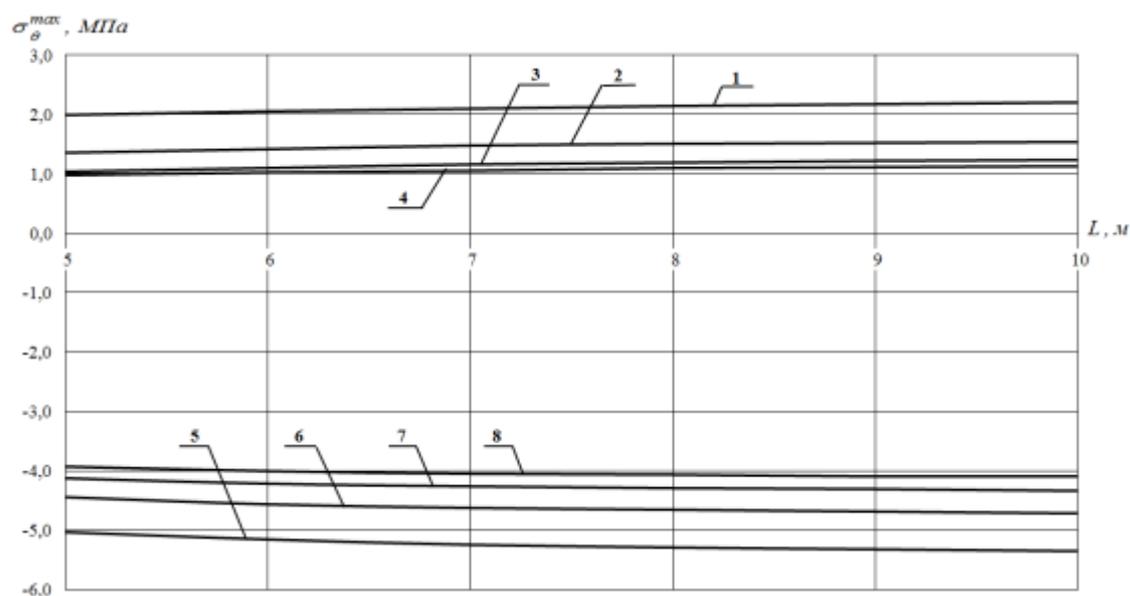
#### 5.4 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от расстояния между центрами поперечных сечений тоннелей

Для изучения характера изменения напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  от расстояния  $L$  между центрами поперечных сечений тоннелей при фиксированных модулях деформации  $E_1$  материала зон технологически неоднородных пород выполнены расчёты при следующих исходных данных:  $E_0 = 60 \text{ МПа}$ ;  $\lambda = 0,54$ ;  $\Delta_1 = R$ ;  $\Delta_2 = 0,04R$ ;  $E_2 = 27000 \text{ МПа}$ . Полученные зависимости представлены на рисунке 5.6 а, б.

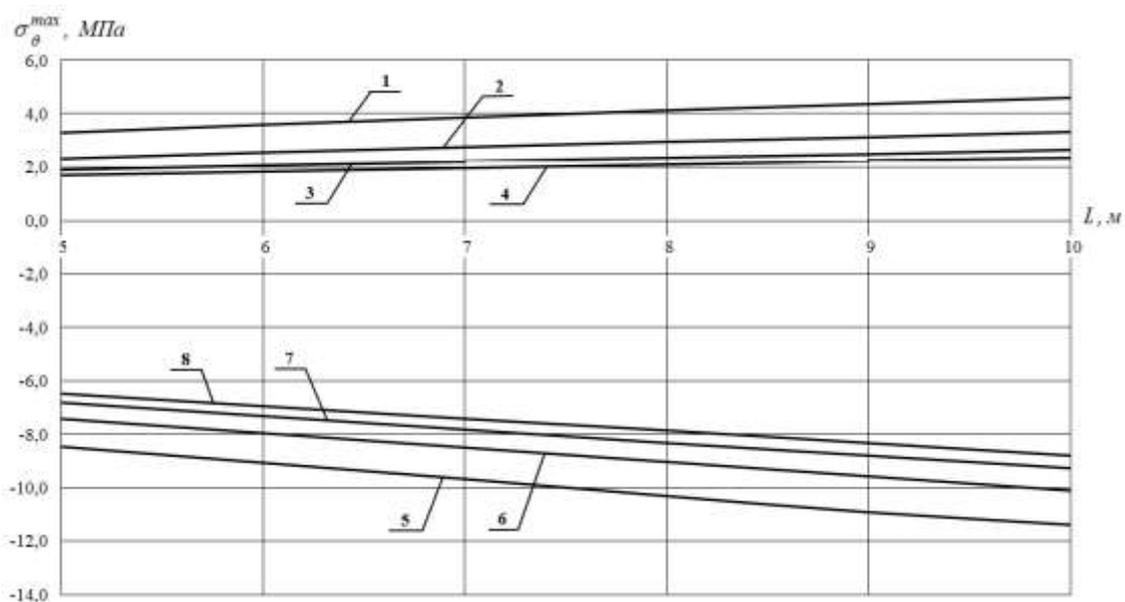
Линии 1, 5 соответствуют случаю отсутствия зоны технологически неоднородных пород; линии 2, 6 -  $E_1 = 100 \text{ МПа}$ ; линии 3, 7 -  $E_1 = 150 \text{ МПа}$ ; линии 4, 8 -  $E_1 = 200 \text{ МПа}$ .

Зависимости, представленные на рисунке 5.6, являются близкими к линейным. Они подтверждают наличие установленного ранее "эффекта разгрузки" для близко расположенных тоннелей мелкого заложения. В данном случае наблюдается монотонный рост значений максимальных растягивающих и сжимающих напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  в обделках обоих тоннелей при увеличении расстояния между центрами поперечных сечений тоннелей. Численно проверено, что представленные графики асимптотически стремятся к соответствующим значениям напряжений, возникающих в одиночных тоннелях, расположенных на соответствующих глубинах под наклонной поверхностью.

При увеличении расстояния между тоннелями от  $5R$  до  $10R$  при толщине зоны укрепленных пород  $\Delta_1 = R$  рост составляет не более 11% для растягивающих и не более 6,4% для сжимающих напряжений в обделке левого тоннеля; не более 40% для растягивающих и не более 30% для сжимающих напряжений в обделке правого тоннеля (более заглубленного).



а



б

Рисунок 5.6 - Зависимости напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  от величины  $L$  при различных  $E_1$  для тоннелей: а - левого; б - правого

Из полученных результатов следует, что сближение параллельных тоннелей приводит к снижению растягивающих и сжимающих напряжений в обделках обоих тоннелей.

## 5.5 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от ширины породного целика

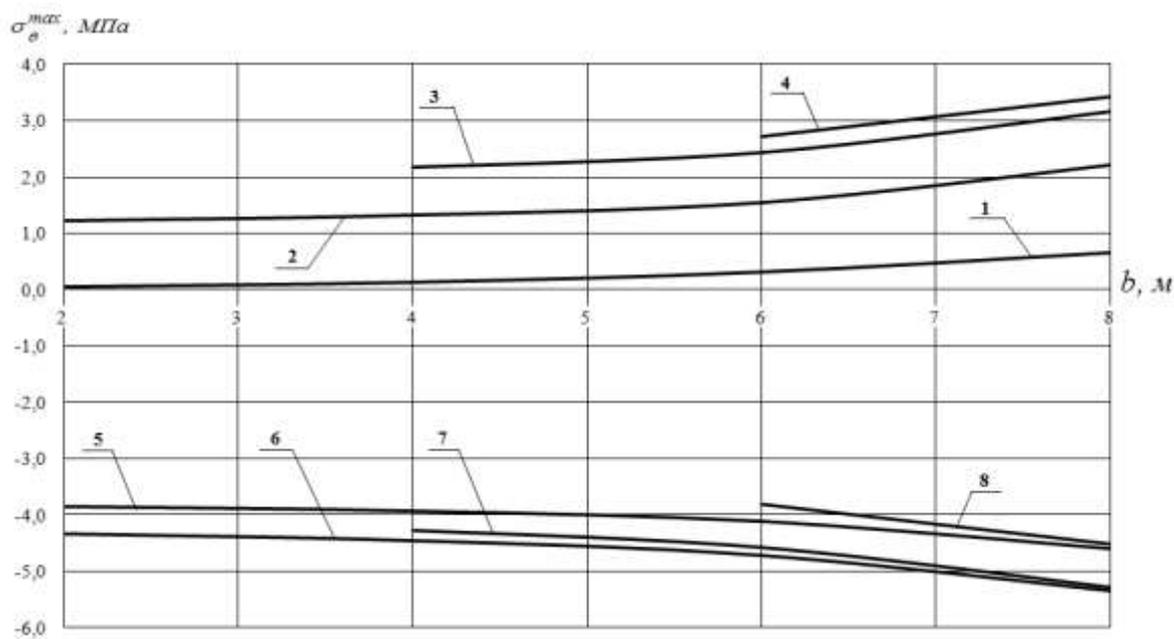
Зависимости максимальных растягивающих и сжимающих нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$ , возникающих в точках внутренних контуров поперечных сечений обделок левого и правого тоннелей от ширины  $b$  породного целика при различных углах  $\beta$  наклона земной поверхности показаны на рисунке 5.7 а, б. Под шириной  $b$  целика понимается расстояние между точками контуров выработок тоннелей по линии, соединяющей центры поперечных сечений тоннелей.

Расчёты выполнены при  $E_0 = 60 \text{ МПа}$ ;  $\lambda = 0,54$ ;  $\Delta_1 = R$ ;  $E_1 = 100 \text{ МПа}$ ;  $\Delta_2 = 0,04R$ ;  $E_2 = 27000 \text{ МПа}$ . Линии 1, 5 соответствуют углам наклона:  $\beta = 15^\circ$ ; линии 2, 6 -  $\beta = 30^\circ$ ; 3, 7 -  $\beta = 45^\circ$ ; линии 4, 8 -  $\beta = 60^\circ$ . Принятые расчетные углы наклона земной поверхности накладывают определённые ограничения на компоновку тоннелей с учётом наличия зон технологически неоднородных пород - линия, моделирующая земную поверхность, не должна пересекать области среды или кольца, моделирующие соответственно зоны технологически неоднородных пород или обделки тоннелей.

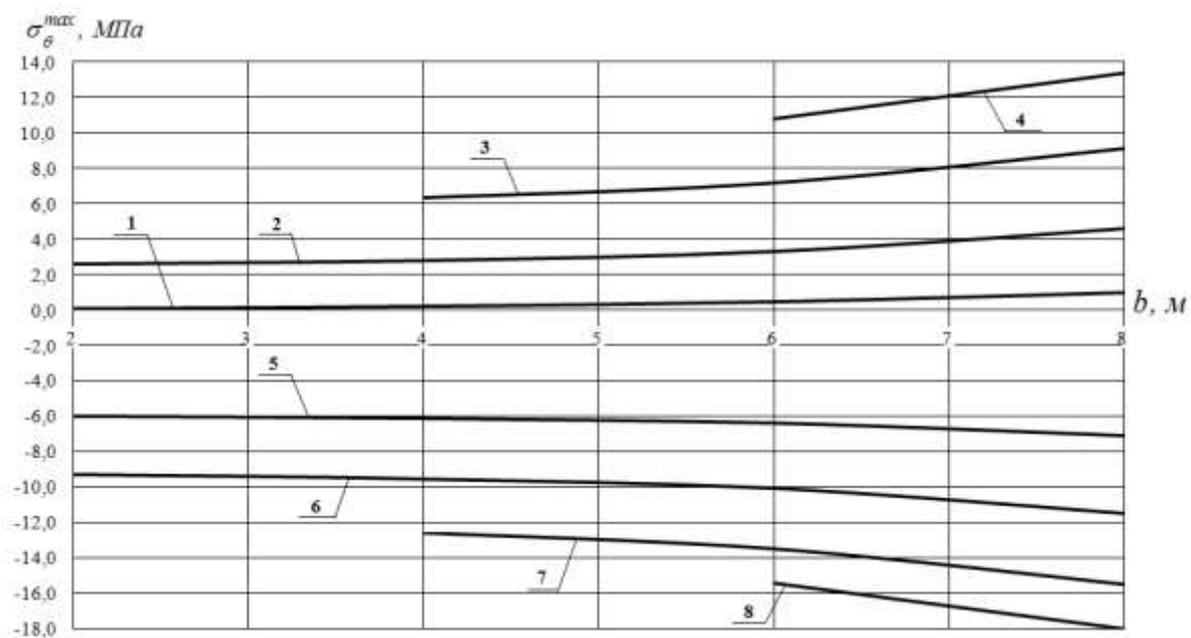
Из представленных зависимостей следует, что с ростом  $b$  характер изменения максимальных напряжений в обделках тоннелей, расположенных на разной глубине вблизи земной поверхности, различный: для правого тоннеля, расположенного на большей глубине, выявлена тенденция к увеличению максимальных растягивающих и сжимающих напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  в обделке с ростом угла  $\beta$  (линии 1 - 4, 5 - 8 на рисунке 5.7 б).

В обделке левого тоннеля, для которого с увеличением угла  $\beta$  расстояние между контуром выработки и границей земной поверхности существенно уменьшается, характер изменения максимальных растягивающих и сжимающих напряжений различный. Максимальные растягивающие напряжения с ростом  $\beta$  увеличиваются (линии 1 - 4 на рисунке 5.7 а); максималь-

ные сжимающие напряжения увеличиваются по абсолютной величине при изменении  $\beta$  приблизительно до  $35^\circ$  (линии 5, 6 на рисунке 5.7 а), после чего наблюдается снижение максимальных значений сжимающих напряжений (линии 7, 8 на рисунке 5.7 а).



а



б

Рисунок 5.7 - Зависимости напряжений  $\sigma_\theta^{max}$  от ширины целика  $b$  при различных величинах  $\beta$  для тоннелей: а - левого; б - правого

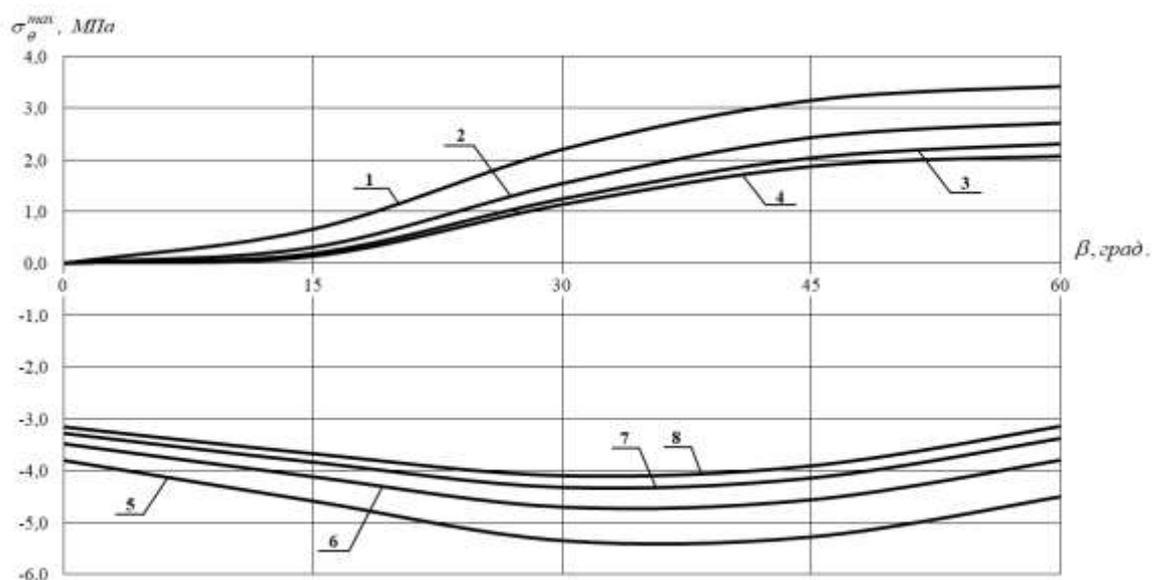
Общим для представленных на рисунках 5.7 а, б является увеличение экстремальных значений напряжений с ростом ширины целика, чем подтверждается эффект "разгрузки" для близко расположенных тоннелей мелко-го заложения. Из графиков, представленных на рисунке 5.7 а следует, что с увеличением угла наклона земной поверхности её влияние на рост нормальных тангенциальных напряжений снижается (линии 3, 4). Например, при  $b = 9$  м, различия между максимальными напряжениями растягивающими напряжениями при увеличении угла от  $\beta = 30^\circ$  до  $\beta = 45^\circ$  составляют порядка 48%, а при изменении от  $\beta = 45^\circ$  до  $\beta = 60^\circ$  - не более 11%.

#### 5.6 Зависимости максимальных напряжений в обделках тоннелей от угла наклона земной поверхности

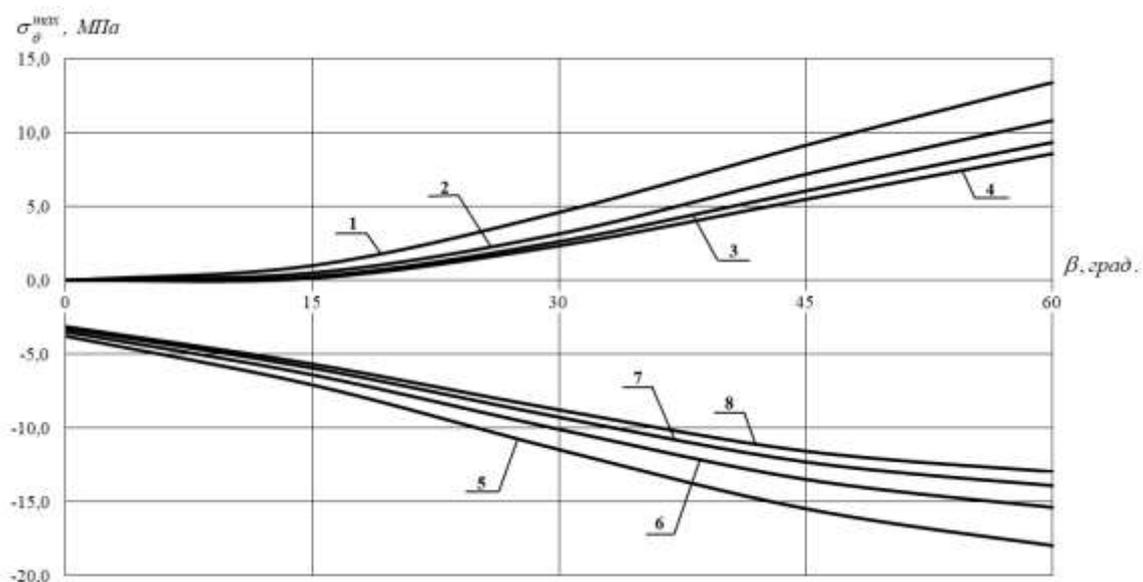
Расчёты выполнены при следующих исходных данных:  $\lambda = 0,54$ ;  $\Delta_1 = R$ ;  $E_0 = 60$  МПа;  $\Delta_2 = 0,04R$ ;  $E_2 = 27000$  МПа. Линии 1, 5 соответствуют  $E_1 = 60$  МПа; 2, 6 -  $E_1 = 100$  МПа; 3, 7 -  $E_1 = 150$  МПа; 4, 8 -  $E_1 = 200$  МПа.

На рисунке 5.8 а, б приведены зависимости изменения напряжений  $\sigma_\theta^{max}$  в обделках тоннелей от величины угла наклона дневной поверхности  $\beta$  при различных модулях деформации материала зон технологически неоднородных пород  $E_1$ .

Зависимости максимальных напряжений  $\sigma_\theta^{max}$  от  $\beta$  имеют различный характер для обделок каждого из тоннелей. Максимальные растягивающие напряжения в обделке левого, а также максимальные растягивающие и сжимающие напряжения в обделке правого тоннеля с ростом угла наклона имеют тенденцию к монотонному увеличению. Графики для максимальных сжимающих напряжений в обделке левого тоннеля имеют выраженный экстремальный характер - наблюдается максимум по абсолютной величине напряжений при угле наклона  $\beta$  около  $35^\circ$  (линии 5 - 8 на рисунке 5.8 а).



а



б

Рисунок 5.8 - Зависимости напряжений  $\sigma_{\theta}^{max}$  от величины  $\beta$  при различных величинах  $E_1$  для тоннелей: а - левого; б - правого

Появление зон упрочненных пород приводит к существенному снижению значений максимальных напряжений, возникающих в обделках обоих тоннелей. Так, например, при  $\beta = 30^\circ$  и модуле деформации  $E_1 = 100 \text{ МПа}$  в обделке левого тоннеля уменьшение напряжений составляет для максимальных растягивающих около 45% (линии 1, 2 на рисунке 5.8 а), максимальных

сжимающих не более 13% (линии 5, 6 на рисунке 5.8 а) по сравнению с напряжениями в обделке без зоны укрепленных пород; дальнейшее увеличение модуля деформации  $E_1$  зоны упрочненных пород оказывает меньшее влияние на изменение максимальных растягивающих и сжимающих напряжений (соответственно линии 3, 4 и 7, 8 на рисунке 5.8 а). В обделке правого тоннеля, расположенного на бóльшей глубине, с увеличением угла  $\beta$  максимальные растягивающие и сжимающие напряжения монотонно возрастают (рисунок 5.8 б). Появление зоны технологически неоднородных пород, по сравнению с её отсутствием, так же приводит к снижению максимальных напряжений, например, при  $\beta = 30^\circ$  и модуле деформации  $E_1 = 100 \text{ МПа}$  для растягивающих на 65%, сжимающих - на 30%.

Приведенные в данном разделе результаты исследования напряженно-го состояния обделок параллельных тоннелей, сооружаемых в технологически неоднородных породах вблизи склона, не охватывают всего многообразия сочетаний основных влияющих факторов, тем не менее, они позволяют уточнить известные представления, а также установить новые зависимости возникающих в обделках тоннелей напряжений.

Полученные с использованием нового аналитического метода расчета результаты могут быть полезными при выполнении практического проектирования подземных сооружений в процессе научного обоснования принимаемых технических и технологических решений, а также в научных целях.

## **Выводы по главе 5**

1. Исследование напряженного состояния монолитных бетонных обделок двух параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом в технологически неоднородных породах вблизи наклонной земной поверхности, при различных сочетаниях основных

влияющих факторов, позволило уточнить известные и установить новые закономерности его формирования.

2. Выполненные исследования подтверждают, что максимальные значения сжимающих и растягивающих нормальных тангенциальных напряжений возникают, как правило, в точках внутренних контуров поперечных сечений обделок.

3. С увеличением модуля деформации массива пород максимальные растягивающие и сжимающие напряжения уменьшаются по абсолютной величине. Наличие зон технологически неоднородных пород вокруг тоннелей оказывает существенное влияние на значения экстремальных напряжений в обделке. Увеличение толщин зон упрочненных пород приводит к наиболее интенсивному уменьшению значений напряжений в слабых породах.

4. Увеличение толщины обделок тоннелей в принятом диапазоне приводит к снижению значений максимальных сжимающих и растягивающих напряжений, вплоть до полного исчезновения последних. Наибольшее влияние толщины обделок на их напряжённое состояние наблюдается в слабых и средней прочности породах.

5. Применение обделок, выполненных из бетонов высокого класса, обладающих большими модулями деформации, приводит к увеличению расчетных значений возникающих экстремальных напряжений. Результаты расчётов показывают, что наиболее эффективно применение обделок из бетона более высоких марок в слабых породах.

6. С ростом коэффициента бокового давления в массиве пород наблюдается существенное снижение максимальных растягивающих напряжений в обделках обеих тоннелей. Установлен слабо выраженный экстремальный характер изменения максимальных сжимающих напряжений: с увеличением коэффициента бокового давления от нуля до 0,4...0,5 наблюдается снижение, а при дальнейшем увеличении данного коэффициента - их увеличение. Наличие вокруг тоннелей зон укреплённых пород приводит к значительному

уменьшению растягивающих и стабилизации сжимающих напряжений в обделках обоих тоннелей.

7. Увеличение расстояния между центрами поперечных сечений тоннелей при фиксированных модулях деформации материала зон технологически неоднородных пород приводит к росту значений максимальных растягивающих и сжимающих напряжений в обделках тоннелей, расположенных вблизи наклонной земной поверхности. Очевидно, что сближение параллельных тоннелей приведет к снижению растягивающих и сжимающих напряжений в обделках обоих тоннелей.

8. С ростом расстояния между границами зон технологически неоднородных пород выявлен различный характер изменения максимальных напряжений в обделках тоннелей, расположенных на разной глубине. В тоннеле, расположенном на бóльшей глубине, с ростом расстояния экстремальные напряжения увеличиваются. В обделке тоннеля, расположенного ближе к склону, с увеличением угла наклона земной поверхности максимальные растягивающие напряжения увеличиваются, а изменение максимальных сжимающих в зависимости от угла наклона земной поверхности не имеет монотонного характера.

9. Исследование влияния угла наклона земной поверхности на максимальные напряжения в обделках тоннелей позволило установить монотонный характер изменения растягивающих напряжений в обделке тоннеля, расположенного на меньшей глубине, а также максимальных растягивающих и сжимающих напряжений в обделке более заглубленного тоннеля. Зависимости для максимальных сжимающих напряжений в обделке менее заглубленного тоннеля имеют экстремальный характер - максимум напряжений по абсолютной величине при угле наклона земной поверхности около  $35^\circ$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В научно-квалификационной работе выполнено решение актуальной научной задачи, заключающейся в разработке на основе современных теоретических положений геомеханики и механики подземных сооружений нового аналитического метода расчета обделок параллельных тоннелей, сооруженных в технологически неоднородных породах вблизи наклонной земной поверхности, с целью установления новых и уточнения известных закономерностей формирования напряженного состояния массива пород и обделок, что будет способствовать принятию научно обоснованных рациональных конструктивных и технологических решений, обеспечивающих прочность и устойчивость горных выработок и подземных сооружений, предотвращение проявлений опасных горно-геологических явлений. Применение разработанного метода делает возможным прогнозирование и изучение геомеханических процессов в массивах горных пород и грунтов, сопровождающих строительство различных подземных сооружений в сложных горно-геологических условиях.

Основные научные и практические результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Разработана математическая модель взаимодействия обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом в технологически неоднородных породах вблизи наклонной земной поверхности, базирующаяся на теоретических положениях геомеханики и механики подземных сооружений о совместной работе элементов единой деформируемой геомеханической системы "массив пород с наклонной земной поверхностью - зоны технологически неоднородных пород - обделки тоннелей".

2. Обоснована и поставлена соответствующая задача геомеханики для комплекса параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона, учитывающая наличие вокруг выработок зон технологически неоднородных пород;

сформулированы граничные условия задачи при действии гравитационных сил в массиве пород, обусловленных их собственным весом.

3. Выполнен переход от поставленной плоской задачи теории упругости для весомой линейно-деформируемой полубесконечной среды с произвольно расположенными вблизи наклонной границы подкрепленными круговыми отверстиями, вокруг которых выделены концентрические зоны среды с отличающимися деформационными характеристиками, к соответствующей краевой задаче теории функций комплексного переменного о равновесии полубесконечной квазиоднородной линейно-деформируемой многосвязной среды.

4. С применением математического аппарата теории функций комплексного переменного, базирующегося на использовании потенциалов Колосова-Мусхелишвили, и рядов Лорана с использованием апробированного ранее итерационного подхода получено аналитическое решение поставленной плоской задачи теории упругости, позволяющее определять компоненты напряженного состояния элементов рассматриваемой геомеханической системы.

5. Полученное строгое аналитическое решение отличает возможность удовлетворения поставленных граничных условий с необходимой достаточно высокой заданной точностью; при практических расчетах погрешность не превышает 3 %.

6. Разработан аналитический метод расчета обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом в технологически неоднородных породах вблизи наклонной земной поверхности, позволяющий, в том числе, определять напряженное состояние массива пород в естественном и технологически измененном состояниях в связи с проведением горных выработок и строительством подземных сооружений с целью обеспечения их устойчивости и предотвращения проявлений опасных горно-геологических явлений.

7. Составлен алгоритм и разработано компьютерное программное обеспечение, реализующее разработанный метод расчета. Программное обеспечение, проходящее государственную регистрацию в Федеральном институте промышленной собственности (Роспатент), позволяет эффективно выполнять многовариантные расчеты конструкций и определять напряженное состояние окружающего комплекс подземных сооружений массива пород при практическом проектировании и научных исследованиях.

8. Выполнено сравнение, позволившее установить удовлетворительное согласование результатов расчетов по разработанному методу с данными, полученными другими авторами в частных случаях. Проведены расчеты комплексов подземных сооружений различных компоновок, иллюстрирующие возможности разработанного метода.

9. На основе компьютерного моделирования с использованием разработанного программного обеспечения уточнены известные и установлены новые закономерности формирования напряженного состояния массива пород и обделок тоннелей, сооруженных в технологически неоднородных породах вблизи склона, при действии гравитационных сил в массиве пород при различных сочетаниях основных влияющих факторов.

Численное моделирование возможных геомеханических ситуаций на основе применения разработанного метода позволяет установить закономерности, способствующие созданию новых и совершенствованию существующих способов и средств освоения подземного пространства при разработке месторождений полезных ископаемых, строительстве и эксплуатации подземных сооружений различного назначения, располагающихся в районах со сложным рельефом.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллас Э.Э., Мещеряков А.Н. Цементация в гидротехническом строительстве/ Под ред. И.И. Кандалова. -М. -Л.: Госэнергоиздат, 1952. - 80 с.
2. Аманалиев А.А. Численное моделирование напряженного состояния массива пород вокруг подземных выработок// Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск 11. - Институт геомеханики и освоения недр НАН Кыргызской Республики. - Бишкек. - 2010. - С. 45 -52.
3. Амиридзе Н.В. Новая интерпретация результатов исследования укрепительной цементации породы в опытном штреке Олори Ингурской ГЭС// Сб. научн. тр. Гидропроекта. – 1989. – Вып. 137. – С. 102 - 111.
4. Амусин Б.З., Линьков А.М. Об использовании метода переменных модулей для решения одного класса задач линейной наследственной ползучести. - Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1974. - №6. - С.162 -166.
5. Амусин Б.З., Фадеев А.Б. Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики. - М.: Недра. - 1975. - 144 с.
6. Анциферов С.В. Исследование напряженного состояния обделок параллельных тоннелей мелкого заложения, сооруженных с применением укрепительной цементации, на действие собственного веса грунта// ГИАБ. – № 12. – М.: Изд. МГГУ. – 2004. – С. 217 - 222.
7. Анциферов С.В. Исследование напряженного состояния обделок тоннелей ливневой канализации, сооруженных с использованием предварительной цементации грунта// Изв. ТулГУ. Серия Экология и рациональное природопользование. Вып. 2. – Изд. ТулГУ. - Москва -Тула. –2004.– С. 246 - 253.
8. Анциферов С.В. Метод расчета многослойных обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения мелкого заложения: монография. - Тула: Изд. ТулГУ. – 2014. – 298 с.
9. Анциферов С.В. Напряженное состояние бетонных обделок двух параллельных круговых тоннелей, пройденных вблизи здания с использова-

нием упрочнения грунта// Проектирование, строительство и эксплуатация комплексов подземных сооружений. Труды Междунар. конф. 18-20 мая 2004 г. Екатеринбург. - 2004. – С. 137 – 141.

10. Анциферов С.В., Анциферова Л.Н., Афанасова О.В., Капунова Н.А. Программное обеспечение метода расчета обделок параллельных взаимовлияющих тоннелей мелкого заложения, сооружаемых с применением инъекционного укрепления грунта// Известия ТулГУ. Серия «Геомеханика. Механика подземных сооружений». Вып. 4. – Тула. - 2006 г. – С. 248 – 257.

11. Анциферов С.В., Булычев Н.С., Фотиева Н.Н., Грибанов В.Б. О расчете обделок тоннелей, сооружаемых в массиве грунта, подверженного предварительному укреплению// Известия ТулГУ. Науки о Земле. Вып. 3. - Тула: Изд. ТулГУ. - 2015. – С. 98 - 107.

12. Анциферов С.В., Логунов В.М. Напряженное состояние обделок параллельных тоннелей, сооружаемых с применением инъекционного укрепления, при действии собственного веса грунта// Известия ТулГУ. Серия "Геомеханика. Механика подземных сооружений". Вып. 3. – Тула: Изд. ТулГУ. – 2005. – С. 5 – 12.

13. Анциферов, С. В. Влияние укрепительной цементации грунта и очередности проходки тоннелей на напряженное состояние их обделок / С. В. Анциферов, Л. Н. Анциферова, С. О. Золотарев, В. Г. Дворянкин // Перспективы развития строительного комплекса. – 2013. – Т. 2. – С. 21 - 29.

14. Анциферов, С. В. Исследование напряженного состояния обделок тоннелей, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности / С. В. Анциферов, А. В. Фомин, А. А. Феклин // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2021. – № 3. – С. 244-257. – DOI 10.46689/2218-5194-2021-3-1-237-250.

15. Анциферов, С. В. Математическая модель определения напряженного состояния обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности, с учетом технологической неоднородности грунта вокруг выработок / С. В. Анциферов, К. Е. Залесский, А. А. Феклин //

Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики : Материалы конференции, Тула, 01–03 ноября 2021 года. – Тула: Тульский государственный университет, 2021. – С. 582-590.

16. Анциферов, С. В. Напряженное состояние массива грунта вокруг тоннеля, расположенного вблизи склона / С. В. Анциферов, М. А. Кудрявцев, А. А. Феклин // 58-я Научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава ТулГУ с всероссийским участием: Сборник докладов в 2-х частях, Тула, 08–11 февраля 2022 года. Часть 1. – Тула: ТулГУ, 2022. – С. 179 - 189.

17. Араманович И.Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием// Докл. АН СССР. - М. - 1955. Т. 104. - №3. - С. 372 - 375.

18. Баклашов И.В. Геомеханика: Учебник для вузов. - М.: Издательство МГГУ, 2004. - Т.1. Основы геомеханики. - 208 с.

19. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика подземных сооружений и конструкций крепей. - М. - Недра.- 1992. - 200 с.

20. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Оценка устойчивости горных выработок // Шахтное строительство. - 1978. - №2. - С. 13 - 16.

21. Баславский И.А. Влияние сильной неоднородности горных пород на напряженно-деформированное состояние обделки напорного тоннеля кругового сечения// Труды Гидропроекта. - 1974. - № 40. - С. 138 - 146.

22. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат. - 1982. - 442 с.

23. Безродный К.П., Крюковский Ю.А., Покрывалов М.Л., Салан А.И. Результаты геотехнического мониторинга при проходке первого тоннеля в «размыве»// Известия ТулГУ. Сер. «Геомеханика. Механика подземных сооружений». Вып. 1. – Тула: Изд. ТулГУ. – 2003. – С. 39 – 46.

24. Безродный К.П., Лебедев М.О. Формирование напряженного состояния временной крепи при строительстве транспортного тоннеля СКЖД

вблизи склона// Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). - М.: ООО "Горная книга". - 2012. - № 6. - С. 237 - 244.

25. Безрук В.М. Теоретические основы укрепления грунтов цементом. М.: Автостройиздат, 1956.

26. Беляков Н.А. Геомеханическое обоснование параметров крепления железнодорожных тоннелей в условиях Северного Кавказа// Записки горного института. - Санкт-Петербург. - 2010. - Т.186. - С. 99 - 103.

27. Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., Пристансков А.А. Распределение напряжений в однородном изотропном откосе, ослабленном горизонтальной круглой выработкой, расположенной на уровне его подошвы// Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. - 2017. - Т. 8. - № 2. - С. 15 - 26.

28. Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., Пристансков А.А., Ермаков О.В. Влияние горизонтальной подземной выработки, ориентированной параллельно фронту однородного откоса, на его устойчивость// Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. - 2018. - № 1. - С. 82 - 92.

29. Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., Пристансков А.А., Ермаков О.В. Численные и модельные эксперименты по определению устойчивости однородного откоса, подработанного горизонтальной выработкой// Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура.- 2018.- № 1.- С. 30 - 41.

30. Бодров Б.П., Матэри Б.Ф. Кольцо в упругой среде// Метропроект/ Отдел типового проектирования. - 1936. - Бюл. №24.

31. Бройд И.И. Струйная технология. Учебное пособие. М. Издательство «Ассоциация строительных вузов». 2004 г.

32. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. - М.: Наука. - 1986. - 544 с.

33. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений: учебник для вузов. - М.: Недра. – 1994. - 382 с.

34. Булычев Н.С. Расчет многослойных круговых обделок гидротехнических туннелей на статические и сейсмические воздействия// Сб. Научн.

Тр. Гидропроекта. Совершенствование проектирования и строительства подземных гидротехнических сооружений. - М.: Гидропроект. - 1979. - С. 17-23.

35. Булычев Н. С., Фотиева Н. Н., Стрельцов Е. В. Проектирование и расчёт крепи капитальных выработок. - М.: Недра, 1986, 288 с.

36. Васильев С.Г. Подземное строительство неглубокого заложения. - Львов: Вища школа. - 1980. - 144 с.

37. Виноградов Б.Н. Опыт измерения давления горных пород на тоннельные обделки мессдозами// Сб. ЦНИИС. - М. - 1959. - №31. - С. 1 - 47.

38. ВСН 34 - 83. Цементация скальных оснований гидротехнических сооружений. - Л.: ВНИИГ. - 1984. - 56 с.

39. ВСН 34 23.056-90 Проектирование цементации в гидротехнических туннелях/ Минэнерго СССР. - М. - Информэнерго. 1991. - 54 с.

40. Геомеханика: Учеб. пособие/Э.В. Каспарьян, А.А. Козырев, М.А. Иофис, А.Б. Макаров. - М.: Высш. шк., 2006. - 503 с.

41. Геомеханика: Учебник для вузов/И.В. Баклашов, Б.А. Картозия, А.Н. Шашенко, В.Н. Борисов. - М.: Издательство МГГУ, 2004. - Т.2. Геомеханические процессы. - 249 с.

42. Геотехнический мониторинг транспортных тоннелей трассы «Адлер - Красная Поляна» / М. О. Лебедев, А. Д. Басов, С. А. Шляев, К. В. Романевич // ГЕОСОЧИ-2022. Тематическая сессия: "Современное состояние и перспективы развития инженерной геофизики": Материалы международной научно-практической конференции, Сочи, 27–29 апреля 2022 года. – Тверь: ПолиПРЕСС, 2022. – С. 62-65.

43. Глушихин Ф.П., Кузнецов Г.Н. и др. Моделирование в геомеханике. - М. - Недра. - 1991. - 240 с.

44. Голицынский Д.М., Фролов Ю.С. и др. Строительство тоннелей и метрополитенов.- М. - Транспорт. - 1989.- 319 с.

45. Голицынский Д.М., Фролов Ю.С., Кавказский В.Н., Укшебаев М.Т., Кульбаев М.Н. Исследование методом моделирования напряженно-деформированного состояния обделки тоннелей станции метро «Жибек Жо-

лы» г. Алматы// Метро и тоннели. Науч.-техн. и инф. изд. - М. - №1. – 2006. – С. 44 – 45.

46. Гольдберг А.М. Исследование напряжений вблизи металлической облицовки Красноярской ГЭС// В кн. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. - Л. - 1960. - С. 390 - 405.

47. Гоманчук О.Г. Метод расчета обделок круговых тоннелей, сооружаемых с применением укрепительной цементации в анизотропном массиве пород//Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. девятой науч. межвуз. конф. 25 – 27 мая 1999 г. Ч. 1. – Самара. - 1999. – С. 54 – 57.

48. Гоманчук О.Г., Залесский К.Е. Расчет обделок туннелей, сооружаемых с применением предварительной цементации, окружающих анизотропных грунта// Математическое моделирование и краевые задачи. Труды 8-й межвузовской конференции 26 - 28 мая 1998 г. Ч.1. - Самара. - С. 44 – 46.

49. Гончарова Л.В. Основы искусственного улучшения грунтов (техническая мелиорация грунтов). - М.: Изд-во МГУ, 1973. - 376 с.

50. Городецкий А.С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. - М.: Транспорт. - 1981. - 233 с.

51. Грибанов В.Б., Анциферов С.В., Саммаль А.С., Фотиева Н.Н. Расчет обделок параллельных тоннелей, сооруженных в грунте, подверженном укрепительной цементации// Proceedings of the VII international geomechanics conference 27 June - 01 July 2016, Varna, Bulgaria. 2016. С.167-174.

52. Гуджабидзе И.К. Расчет подземных сооружений в условиях влияния рельефа поверхности земли// Известия вузов. Горный журнал. - 1992. - № 6. - С. 52-57.

53. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: "Наука". – 1973. – 228 с.

54. Деев П.В. Математическое моделирование взаимодействия обделок параллельных тоннелей произвольного поперечного сечения с массивом грунта// Известия ТулГУ. Естественные науки. - Вып. 1. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2011. - С. 291 - 300.

55. Деев П.В. Оценка влияния инъекционного укрепления пород на напряженное состояние обделки некругового тоннеля, сооружаемого под застроенной территорией// ГИАБ. № 3. – М.: Изд. МГГУ. - 2008. – С. 299 - 303.
56. Деев П.В. Расчет некруговых обделок тоннелей мелкого заложения, сооружаемых с применением инъекционного укрепления пород// ГИАБ. № 9, 2004. – М.: Изд. МГГУ, 2004. – С. 293 - 297.
57. Дружко Е.Б., Заславский Ю.З., Перепичка Ф.И. Устойчивость основных горных выработок. Донецк, Донбасс. - 1975.
58. Дюрелли А., Райли У. Введение в фотомеханику (поляризационно-оптический метод). Пер. С англ. - М.: Мир. - 1970. - 430 с.
59. Засорин М.С. Исследование влияния физико-механических свойств глинистых грунтов на прочностные свойства грунтобетона// ГИАБ. - 2011. - №5. - С. 245 - 253.
60. Засорин М.С. Исследование технологических параметров струйной цементации глинистых грунтов// Горный журнал. - 2011. - №8. - С. 80 - 82.
61. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошной среды. - М.: Мир. - 1974. - 239 с.
62. Ибрагимов М.Н. Закрепление грунтов цементными растворами // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 2005. - №2. - С.24 - 28.
63. Инъекционное упрочнение горных пород/ Ю.З. Заславский и др. М.: Недра. - 1984. - 176 с.
64. Исследование напряженного состояния массива пород и обделок параллельных тоннелей, сооружаемых вблизи горного склона/ С. В. Анциферов, А. В. Фомин, А. А. Феклин, М. А. Кудрявцев// Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. ИГД СО РАН. – 2021. – Т. 8, № 1. – С. 20 - 26.
65. Камбефор А. Инъекция грунтов. - М.: Энергия. - 1971. - 334 с.
66. Кассирова Н.А. Влияние противифльтрационной цементации на статическую работу обделки туннеля под давлением подземных вод// Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. - Л.: Энергия. - 1979. - Т. 130. - С. 45 - 51.

67. Кассирова Н.А., Артемьева Е.Б. Расчет обделок туннелей на внутреннее давление воды с учетом зон разуплотнения и цементации окружающего горного массива// Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. - Л.: Энергия. - 1980. - Т. 137. - С. 30 - 32.

68. Кассирова Н.А., Скворцова А.Е., Татарникова Е.Г. Метод натуральных наблюдений за работой подземных сооружений// Гидротехническое строительство. - 1996. - №1. - С. 10 - 15.

69. Кипко Э.Я., Полозов Ю.А., Лушникова О.Ю. и др. Комплексный метод тампонажа при строительстве шахт. - М.: Недра. - 1984. - 280 с.

70. Киреева Г.Б., Залесский К.Е., Климов К.В. Математическая модель взаимодействия круговых обделок напорных туннелей с массивом анизотропных пород, укрепленных цементацией// Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. VII межвуз. конф. 28 - 30 мая 1997 г. – Ч. 1. - Самара: СамГТУ. – 1997. - С. 47-50.

71. Климов Ю.И. Расчет подземных сооружений с учетом инъекционного упрочнения на тектонические воздействия// Подземное и шахтное строительство. №1. - 1993. - С. 37 - 39.

72. Князева С.В. Математическое моделирование напряженного состояния многослойной обделки тоннеля, сооружаемого вблизи склона// Проектирование, строительство и эксплуатация комплексов подземных сооружений. Труды международной конференции, Екатеринбург 18 - 20 мая 2004. – Екатеринбург, Изд. УГГГА, 2004. - С. 169 – 172.

73. Князева С.В. Расчет многослойной обделки напорного тоннеля, сооружаемого вблизи склона с применением инъекционного укрепления пород // ГИАБ. - М.: изд-во МГГУ. – 2008. – № 5. – С. 282 - 287.

74. Ковальский Е.Р., Мозер С.П., Медведсков М.А. Оценка параметров напряженно-деформированного состояния массива в окрестности транспортной выработки// Записки Горного института. - Санкт-Петербург. - Т. 206. - 2013. - С. 78 - 80.

75. Корнеева Н.Н. Расчет обделок тоннелей, сооружаемых вблизи склонов, на действие собственного веса пород// ГИАБ. – М.: Изд-во МГГУ. - 2000. - №10. - С. 106 - 109.

76. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука. - 1973. - 736 с.

77. Латышев В.А., Капунова Н.А. Расчет обделок тоннелей произвольного поперечного сечения на давление раствора, нагнетаемого за обделку при цементации пород// Механика подземных сооружений. - Тула: ТулГУ. - 1994. - С. 5 - 15.

78. Латышев В.А., Капунова Н.А. Расчёт обделок туннелей на нагрузки, действующие на части внешнего контура поперечного сечения // Механика подземных сооружений.- Тула. - 1993. – С. 84 - 89.

79. Лебедев, М. О. Инженерно-геофизические исследования при реконструкции подземных сооружений/ М. О. Лебедев, К. В. Романевич // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2019. – № 5. – С. 97-110. – DOI 10.25018/0236-1493-2019-05-0-97-110.

80. Лебедев, М. О. Оценка и прогнозирование технического состояния обделки при эксплуатации транспортных тоннелей / М. О. Лебедев, К. П. Безродный, С. А. Шляев// Путь и путевое хозяйство.– 2019. – № 7. – С. 20-25.

81. Лиманов Ю.А. Метрополитены. - М.: Транспорт. - 1971. - 359 с.

82. Лиманов Ю.А. Моделирование статической работы туннельных обделок методом эквивалентных материалов// Труды Гидропроекта. Сб. 18. - 1979. - С. 46 - 54.

83. Маковский Л.В., Меркин В.Е. Струйная цементация грунтов при строительстве транспортных тоннелей и метрополитенов// Приложение к журналу Подземное пространство мира "Новое в отечественном и зарубежном подземном строительстве", ТИМР, 1994, №1, 44 с.

84. Малинин, А. Г. Струйная цементация грунтов / А. Г. Малинин. - М.: ОАО «Издательство «Стройиздат», 2010. – 226 с.

85. Мацегора А.Г., Безродный К.П., Саммаль А.С., Фотиева Н.Н. Проектирование и технология инъекционного закрепления грунтов при строительстве транспортных тоннелей. М.: АО “Ленметрогипротранс”, 1997. - 91 с.
86. Метод фотоупругости. Т. 1. Решение задач статики сооружений. Метод оптически чувствительных покрытий. Оптически чувствительные материалы. Под ред. Хесина Г.Л. - М.: Стройиздат. - 1975. - 460 с.
87. Методические рекомендации по расчету крепи горных выработок в упрочненном массиве. - Минуглепром СССР: Центр. бюро науч.- техн. информации. - Донецк. - 1989. - 25 с.
88. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. – 707 с.
89. Надежность тоннельных конструкций при эксплуатации Северомуйского тоннеля / М. О. Лебедев, Ю. С. Исаев, А. Д. Басов [и др.] // Метро и тоннели. – 2019. – № 3. – С. 22-25.
90. Насонов И.Д., Ресин В.И., Щуплик М.Н., Федюкин В.А. Технология строительства подземных сооружений: Специальные способы строительства. – М.: Недра. - 1998. – 375 с.
91. Определение напряженного состояния обделок тоннелей, сооружаемых с применением укрепительной цементации вблизи склона / С. В. Анциферов, А. А. Феклин, М. А. Кудрявцев, А. В. Фомин // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2022. – № 4. – С. 392 - 407.
92. Основные принципы укрепления грунтов / В. М. Безрук. - М.: Транспорт, 1987. - 32 с.
93. Пониматкин П.У. Об эффективной глубине цементации в напорных гидротехнических туннелях// Гидротехническое строительство. - 1969. - № 4. - С. 42 - 43.
94. Пониматкин П.У. Расчет круговой обделки туннеля с учетом фильтрации через обделку и зону укрепительной цементации// Гидротехническое строительство. - 1972. - № 3. - С. 35 - 38.

95. Пониматкин П.У. Расчет напорных туннелей с бетонной обделкой и укрепительной цементацией с учетом образования трещин в обделке и породе// Гидротехническое строительство. - 1977. - № 3. - С. 29 - 35.

96. Пособие по химическому закреплению грунтов инъекцией в промышленном и гражданском строительстве (к СНиП 3.02.01-83). - М.: Стройиздат, 1986. <http://aquagroup.ru/normdocs/14354>.

97. Протосеня А.Г., Беляков Н.А. Метод прогноза напряженно-деформированного состояния обделок двух взаимовлияющих тоннелей с учетом технологии строительства// Записки Горного института. Т. 199. Санкт-Петербург. - 2012. - С. 128 - 133.

98. Протосеня А.Г., Беляков Н.А., Куранов А.Д. Метод прогноза напряженного состояния комплекса тоннельных выработок сложной пространственной конфигурации с учетом взаимного влияния и последовательности строительства// Записки Горного института. Т.199. Санкт-Петербург. - 2012. - С. 17 - 24.

99. Ребиндер П.А. Придание грунтам водонепроницаемости и механической прочности. Под ред. П.А. Ребиндера, А.Ф. Николаева. - М. - Л.: Изд. Академии Наук СССР, 1942. - 376 с.

100. Ржаницын Б. А. Химическое закрепление грунтов в строительстве. - М.: Стройиздат, 1986. - 264 с.

101. Розанов М.С., Кассирова Н.А., Судакова В.Н. Определение напряжений в бетонной обделке тоннеля от давления грунтовых вод методом фотоупругости// Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. – Т. 75. – 1964. – С. 103 - 122.

102. Розанов Н.С., Новикова О.В. Исследование напряженного состояния напорных гидротехнических туннелей. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений// Тр. 5-й Всесоюзн. конф. 23-27 июля 1964 г. – Изд. ЛГУ. - 1966.

103. Розанов Н.С., Новикова О.В. Исследование напряженного состояния напорных круглых туннелей Асуанской ГЭС под действием равно-

мерного давления воды// Изв. ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева. - Т.75. - 1964. - С. 103 - 122.

104. Руководство по комплексному освоению подземного пространства крупных городов/ Российская академия архитектуры и строительных наук. - М. - 2004. - 205 с.

105. Руководство по применению крепей, использующих несущую способность упрочненного массива. Макеевка: МакИСИ. - 1984. - 70 с.

106. Руководство по проектированию гидротехнических туннелей// Гидропроект им. С.Я. Жука - М.: Стройиздат. - 1982. - 287 с.

107. Руководство по проектированию подземных горных выработок и расчету крепи. - М. - Стройиздат. - 1983. - 273 с.

108. Руководство по проектированию подземных сооружений в сейсмических районах// Дорман И.Я., Кузьмин А.В., Фотиева Н.Н. и др. - М.: ТИМР. - 1996. - 80 с.

109. Руководство по физико-химическому укреплению грунтов при строительстве Северо-Муйского железнодорожного тоннеля. М.: ЦНИИС. - 1989.

110. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. - Киев: Наукова думка. - 1968. - 887 с.

111. Савицкий В.В., Шейнин В.И. Назначение граничных условий и порядок расчета МКЭ мелкозаглубленных сооружений// Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1996. - №6. - С. 14 - 17.

112. Саммаль А.С. Взаимодействие крепи подземных сооружений с упрочненным массивом пород// Механика подземных сооружений. - Тула: ТулПИ. - 1986. - С. 72 - 80.

113. Саммаль А.С. Расчет многослойных подземных конструкций произвольного поперечного сечения, сооружаемых в сложных гидрогеологических условиях// Освоение месторождений минеральных ресурсов и подземное строительство в сложных гидрогеологических условиях. Матер. 3-го

Международ. симп. - Сб. «Вопросы осушения и экология, специальные горные работы». - Белгород, 23 - 27 мая 1995 г. - Белгород. - 1995. - С. 233 - 238.

114. Саммаль А.С., Анциферов С.В., Деев П.В. Аналитические методы расчета подземных сооружений: монография. – Тула: Изд. ТулГУ. – 2013. – 111 с.

115. Саммаль А.С., Анциферов С.В., Деев П.В. и др. Расчет многослойных обделок подземных сооружений: монография. – Тула: Изд. ТулГУ. – 2022. – 256 с.

116. Саммаль А.С., Грибанов В.Б., Капунова Н.А. Оценка напряженного состояния массива пород в окрестности двух параллельных круговых выработок, сооружаемых в общей зоне укрепления// Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 3. – Тула: изд. ТулГУ. – 2013. – С. 323 - 332.

117. Саммаль А.С., Князева С.В. Расчет многослойной обделки тоннеля, сооружаемого вблизи склона на действие собственного веса пород// Известия ТулГУ. Серия: Геомеханика. Механика подземных сооружений. Вып.2. – Тула: Изд-во ТулГУ. - 2004. - С. 240 – 246.

118. Саммаль А.С., Яковлева О.В. Расчет крепи горных выработок с предварительным упрочнением пород// Механика подземных сооружений. Тула: ТулПИ. - 1998. - С. 65-73.

119. Сапегин Д.Д. Влияние цементации на деформационные свойства трещиноватых горных пород// Гидротехническое строительство. - 1965. - № 5. - С. 26 - 30.

120. Сапегин Д.Д., Ногин В.А., Карпов Н.Н. Полевые методы и результаты определения характеристик деформируемости пород, окружающих подземную выработку// Совершенствование проектирования и строительства гидротехнических сооружений. - М.: Гидропроект. - 1979. - С. 65 - 72.

121. Сафрыкин Ю.С., Борейко В.Н., Травнина Л.И. и др. Применение тампонажных растворов с использованием синтетических веществ для гидроизоляции и укрепления горных пород. Обзорная инф. - М. - 1986. - 20 с.

122. Сенцов П.И. К вопросу влияния трещин на напряжённое состояние законтурного массива горной выработки// Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. - 1976, №3. - С.6 - 8.

123. СП 22.13330.2016 Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83\*. - М.: Минрегион России. - 2016. – 220 с.

124. СП 23.13330.2011 Основания гидротехнических сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.02-85. – М.: Минрегион России. – 2011. – 115 с.

125. СП 102.13330.2012 Туннели гидротехнические. Актуализированная редакция СНиП 2.06.09-84. – М.: Минрегион России. – 2012. - 48 с.

126. СП 120.13330.2012 Метрополитены. Актуализированная редакция СНиП 32-02-2003 (с Изменением №1). –М.: Минрегион России. – 2012. - 269 с.

127. СП 122.13330.2012 Тоннели железнодорожные и автодорожные. Актуализированная редакция СНиП 32-04-97. – М.: Минрегион России. – 2012. - 132 с.

128. СП 248.1325800.2016 Сооружения подземные. Правила проектирования. Официальное издание. – М. – Стандартинформ. – 2017. – 83 с.

129. Стандарт организации ООО «ГОРГЕОСТРОЙ» СТО 86494684-001-2010 Инъекционное закрепление грунтов с применением особо тонкодисперсного минерального вяжущего (ОТДВ) «Микродур». Правила проектирования и производства работ.

130. СТО НОСТРОЙ 2.3.18-2011 Укрепление грунтов инъекционными методами в строительстве. М. - 2012. - 64 с.

131. Трумбачев В.Ф., Славин О.К. Методика моделирования горных пород методами фотомеханики. - М.: Наука. - 1974. - 99 с.

132. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. - Л.: Недра, - 1977.

133. Указания по проектированию цементации в гидротехнических туннелях. ВСН 03-74. Минэнерго СССР. Изд-во «ЭНЕРГИЯ» Ленинградское отделение. - 1975. - 32 с.

134. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. - М. - Недра. - 1987. - 221 с.

135. Феклин, А. А. Математическое моделирование геомеханической системы «массив пород с наклонной поверхностью - зоны технологически неоднородных пород - обделки параллельных тоннелей» / А. А. Феклин, С. В. Анциферов, Я. К. Исаева // Промышленная революция 4.0: взгляд молодежи : сборник материалов Межрегиональной научной сессии молодых исследователей, Тула, 01–03 декабря 2021 года / Тульский государственный университет. – Тула: Тульский государственный университет, 2021. – С. 180-181.

136. Феклин, А. А. Метод расчета обделок тоннелей, сооруженных в технологически неоднородных грунтах вблизи наклонной земной поверхности / А. А. Феклин, С. В. Анциферов // Промышленная революция 4.0: взгляд молодежи: Тезисы докладов Межрегиональной научной сессии молодых исследователей, Тула, 28–29 ноября 2022 года. – Тула: Тульский государственный университет, 2022. – С. 150-151.

137. Феклин, А. А. Определение напряженного состояния обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона, с учетом технологической неоднородности грунтов / А. А. Феклин, Я. К. Исаева, А. А. Трещева // . – 2022. – Т. 1. – С. 185-190.

138. Феклин, А. А. Разработка математической модели формирования напряженного состояния крепи параллельных горных выработок, сооружаемых в зонах технологически неоднородных пород / А. А. Феклин // Проблемы недропользования. – 2022. – № 2(33). – С. 83-90. – DOI 10.25635/2313-1586.2022.02.083.

139. Филатов Н.А., Беляков В.Д., Иевлев Г.А. Фотоупругость в горной геомеханике. - М. - Недра. - 1975. - 184 с.

140. Фомин А.В., Андреюк Л.С. Напряженное состояние грунта вокруг неподкрепленных выработок вблизи склона// Опыт прошлого - взгляд будущего. Материалы 6-ой международной научно-практической конференции молодых ученых и студентов. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2016. - С. 215 - 220.

141. Фомин А.В., Анциферов С.В. Определение напряженного состояния обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона// Научные исследования в области технических и технологических систем. Сборник статей Международной научно-практической конференции. - Уфа: "ОМЕГА САЙНС". - 2018. - С. 104 - 109.

142. Фомин А.В., Анциферов С.В., Анциферова Л.Н. Метод расчета обделок тоннелей, сооружаемых вблизи наклонной земной поверхности// Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике. Материалы 17-ой Международной молодежной научно-практической конференции. - 2018. - С. 224 - 231.

143. Фомин А.В., Анциферов С.В., Анциферова Л.Н. Разработка математической модели формирования напряженного состояния обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона// Социально-экономические и экономические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики. Материалы 13-ой Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2017. - С. 272 - 278.

144. Фомин, А. В. Разработка математической модели формирования напряженного состояния обделок параллельных тоннелей в технологически неоднородных грунтах вблизи наклонной земной поверхности / А. В. Фомин, А. А. Феклин, М. А. Кудрявцев // Промышленная революция 4.0: взгляд молодежи: Тезисы докладов II Межрегиональной научной конференции, Тула, 05–06 ноября 2020 года. – Тула: ТулГУ, 2020. – С. 57-58.

145. Фотиева Н.Н., Анциферова Л.Н. Расчет многослойных обделок тоннелей мелкого заложения// Механика подземных сооружений. Сб. научн. трудов. ТулГУ. - Тула. - 1997. - С. 9 - 25.

146. Фотиева Н.Н., Анциферова Л.Н., Булычев Н.С. Расчет обделок тоннелей мелкого заложения, сооружаемых с применением укрепительной цементации пород// Междунар. конф. «Подземный город: геотехнология и архитектура». Россия. – С. - Петербург. – 8 - 10 сентября 1998. - С. 253 - 258.

147. Фотиева Н.Н., Козлов А.Н. Расчет крепи параллельных выработок в сейсмических районах. - М. - Недра. - 1992. - 231 с.

148. Фотиева Н.Н., Латышев В.А., Капунова Н.А. Расчет обделок тоннелей произвольного поперечного сечения на давление раствора при цементации пород// Сб. научн. стат. Материалы международного симпозиума. Освоение месторождений минеральных ресурсов и подземное строительство в сложных гидрогеологических условиях. Вопросы осушения и экология. Специальные горные работы и геомеханика. ВИОГЕМ, Белгород, 23-27 мая 1995.

149. Фотиева Н.Н., Савин Н.И. Расчет крепи стволов, сооружаемых с применением комплексного метода тампонажа трещиноватых горных пород// Механика подземных сооружений. Тула: ТулПИ, 1985. - С. 6 - 16.

150. Фотиева Н.Н., Саммаль А.С. Расчет крепи горных выработок, сооружаемых с применением инъекционного упрочнения пород// Изв. вузов. Горный журнал. - 1988. - № 10. - С. 32 - 37.

151. Фотиева Н.Н., Саммаль А.С. Расчет обделок напорных тоннелей с учетом укрепительной цементации пород// Гидротехническое строительство. - 1987. - № 1. - С. 17 - 19.

152. Фотиева Н.Н., Саммаль А.С., Деев П.В. Расчет обделок тоннелей мелкого заложения, в том числе – сооружаемых с учетом инъекционного укрепления грунта, в сложных гидрогеологических условиях/ Матер. 8-го Симпозиума «Освоение месторождений минеральных ресурсов и подземное строительство в сложных гидрогеологических условиях». Часть 2. – Белгород: Изд. БелГУ. - 2005. – С. 73 - 81.

153. Хесин Г.Л., Дмоховский А.В. Исследование методом фотоупругости напряженного состояния подземных сооружений в условиях первой и

второй смешанной задачи теории упругости// Труды Гидропроекта. М.: Недр. - 1970. - № 18. - С. 103 - 120.

154. Хямяляйнен В.А. Физико-химическое укрепление пород при сооружении выработок. М.: Недра, 1996. - 352 с.

155. Чумбуридзе Г.К. Деформативные свойства горных пород напорного деривационного туннеля Ингурской ГЭС// Гидротехническое строительство. - 1990. - №4. - С. 20 - 26.

156. Чумбуридзе Г.К. К вопросу об учете анизотропных свойств слоистых пород при проектировании трещиностойких обделок напорных туннелей// Гидротехническое строительство. - 1990. - № 4. - С. 26 - 31.

157. Чумбуридзе Г.К. Натурные наблюдения за поведением скальной среды, окружающей высоконапорный турбинный водовод// Сб. науч. тр. Гидропроекта. - Вып. 137. - С. 111 - 118.

158. Шахтное и подземное строительство: Учеб. для вузов. В 2 т. / Б.А. Картозия, Б.И. Федунец, М.Н. Щуплик и др. - М.: Изд-во Академии горных наук, 2001. - Т. 2. - 582 с.

159. Шейнин В.И. Геомеханика в расчетах и проектировании малозаглубленных подземных сооружений (особенности и проблемы)// Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1992. - №3.

160. Шерман Д.И. Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы// Докл. АН СССР. - 1961. - Т.27. - С. 527 - 563.

161. Щуплик М. Н. Специальные способы строительства подземных сооружений// ГИАБ. – 2013. – № 1. – С. 595 - 625.

162. Эрстов В.С. Расчет обделок напорных туннелей в анизотропных породах// Гидротехническое строительство. – 1979. - №7 – С. 6 - 12.

163. Эрстов В.С. Экспериментальные исследования обделок напорных туннелей в анизотропных породах// Гидротехническое строительство. - 1967. - № 2.

164. Can Asli, Baskose Yasin, Gokceoglu Candan. Stability assessments of a triple-tunnel portal with numerical analysis (south of Turkey) // *Geotechnical Research*. - 2022. - 9:2. PP. 116 - 128.

165. Canetta G., Cavagna B., Nova R. Experimental and Numerical Tests on the Excavation of a Railway Tunnel in Grouted Soil in Milan// *Proc. Int. Symp. Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground*, London, 1996. – PP. 479 - 484.

166. Fang Yung-Show. Mechanical properties of jet grouted soilcrete// *Tnt. J. Rock Mech. and Mining Sc. and Geomech. Abstr.* - 1995. - 32., Jfa 2. - P. 257 -265.

167. Fotieva N., Anziferov S., Korneeva N. Designing tunnel linings located near slopes// *GEOTECHNICS 99 “The base of the modern technologies of constructions”*. Ostrava/ Czech republic/ 21 - 22 September. - 1999. - PP. 88 - 90.

168. Fotieva N.N., Bulychev N.S., Antsiferov S.V. Designing multiple tunnel linings constructed with the application of grouting// *Proc. Of the XIIIth European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Prague, Czech Republic, 25-28th August 2003 «Geotechnical Problems with Man-made and Man Influenced Grounds»*. – Vol. 2. - PP. 259-264.

169. Fotieva N.N., Bulychev N.S., Antsiferov S.V., Deev P.V. Influence of soil grouting on the shallow tunnel linings stress state in urban areas// *Proceedings of the 33rd ITAAITES World Tunnel Congress “Underground Spase – the 4th Dimensions of Metropolises”*, Prague, Czech Republic 5 - 10 May 2007, Taylor&Fransis. – PP. 439 - 443.

170. Fotieva N.N., Bulychev N.S., Antziferova L.N. Designing multi-layer lining of shallow tunnels. *Proceedings of the World Tunnel Congress’98 on Tunnels and Metropolises Sao Paulo/Brazil /25-30 April, 1998, A.A.Balkema/ Rotterdam/Brookfield/1998*. - PP. 293 - 298.

171. Fotieva N.N., Bulychev N.S., Sammal A.S. Design of shallow tunnel linings/ *Prediction and Performance in Rock Mechanics and Rock Engineering. EUROCK’96/Torino/Italy.-A.A.Balkema, Rotterdam, Brookfield*. - PP. 677 - 680.

172. Fotieva N.N., Bulychev N.S., Sammal A.S. Design of tunnel linings, constructed in weak water bearing rocks improved by cement grouting /Proc. of Int. Symp. under the auspices of the Int. Soc. for soil mechanics and foundation Eng. (JSSMFE), the Int. Association of Eng. Geology (IAEG) and the Int. Soc. for rock mechanics (ISRM) /ATHENS (Greece)/20-23 September 1993. "Geotechnical Engineering of Hard Soils-Soft Rock", A.A. Balkema /Rotterdam /Brookfield /1993. – PP. 1439 - 1444.

173. Fotieva N.N., Latyshev V.A., Kapunova N.A. Designing tunnel linings upon the pressure of solution at the cement grouting of rock // Prace Naukowe Instytutu Geotechniki i Hidrotechniki Politechniki Wrocławskiej. Nr:69. Konferencje, Nr36.- 1995. - PP. 99-103.

174. Fotieva N.N., Sammal A.S., Klimov Y.I., Bulychev N.S. The influence of the soil strengthening on the tunnel lining stress state// Proceedings of the fourteenth international conference of soil mechanics and foundation engineering. Hamburg, 1997, September 6 - 12. – Balkema, 1997. – PP. 299 - 302.

175. Guangshang Zeng, Huaning Wang, Mingjing Jiang. Analytical study of ground responses induced by the excavation of quasirectangular tunnels at shallow depths. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. July 2019 DOI:10.1002/nag.2980

176. J. Niu, X. Jiang, F. Wang. Stability Analysis of Rock Slope with Small Spacing Tunnel under Earthquakes and Influence of Ground Motion Parameters// Geotech Geol Eng. doi: 10.1007/s1070601804751

177. Lionel Causse, Roger Cojean, Jean-Alain Fleurisson. Interactions Between Tunnels and Unstable Slopes: Role of Excavation. XII IAEG Congr\_es, Sep 2014, Turin, Italy. PP. 237 – 242.

178. M. Ashtiani, M. Palassi & A. Ahmadi. Effect of excavation of tunnels in the convex slopes using distinct element method. Rock Mechanics in Civil and Environmental Engineering – Zhao, Labiouse, Dudd & Mathier (eds). Taylor & Francis Group, 15–18 June 2010, Lausanne, Switzerland. PP. 391 – 394. ISBN 978-0-415-58654-2.

179. Pierpaolo Oreste. The Convergence-Confinement Method: Roles and Limits in Modern Geomechanical Tunnel Design. American Journal of Applied Sciences 6 (4): PP. 757 - 771, 2009 ISSN 1546-9239

180. Potts D.M., Zdravkovic L. Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Theory. – Thomas Telford Limited. – 1999. – 440 p.

181. Sammal A.S. Designing multilayer underground structures of an arbitrary cross-section// Studia Geotechnica et Mechanica. - Poland. - Vol. XVII. - № 3 - 4. - 1995. - PP. 55 - 60.

182. Sounik K. Banerjee & Debarghya Chakraborty (2018) Stability of long circular tunnels in sloping ground, Geomechanics and Geoengineering, 13:2, 104-114, DOI:10.1080/17486025.2017.1400116.

183. Vlachopoulos, Nicholas & Vazaios, Ioannis. (2015). Case Study: The Influence of Tunnelling on Slope Stability. [https://www.researchgate.net/publication/282914071\\_Case\\_Study\\_The\\_Influence\\_of\\_Tunnelling\\_on\\_Slope\\_Stability.29](https://www.researchgate.net/publication/282914071_Case_Study_The_Influence_of_Tunnelling_on_Slope_Stability.29)

184. Yu Koizumi, J. Lee, Kensuke Date, Yasuhiro Yokota, T. Yamamoto, Kazunori Fujisawa. Numerical analysis of landslide behavior induced by tunnel excavation. Rock Mechanics in Civil and Environmental Engineering – Zhao, Labiouse, Dudt & Mathier (eds). Taylor & Francis Group, 15–18 June 2010, Lausanne, Switzerland. PP. 555 – 558.

Электронные ресурсы:

185. <https://cyberleninka.ru/>

186. <https://docs.cntd.ru/>

187. <https://elibrary.ru/>

188. <https://lira-soft.com/>

189. <https://malininsoft.ru/Alterra>.

190. <https://midasoft.ru/>

191. <https://www.3ds.com/ru/produkty-i-uslugi/simulia/produkty/abaqus/>

192. <https://www.ansys.com/>

193. <https://www.lirasapr.com/>

194. <https://www.plaxis.ru/>