

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи



Афанасьева Елена Андреевна

**Стохастические модели прогнозирования  
индивидуальных деформационных  
характеристик элементов конструкций  
с неупругими свойствами материала**

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д. ф.-м. н., профессор  
Радченко Владимир Павлович

Самара – 2024

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Глава 1. Аналитический обзор и постановка задачи</b> . . . . .	13
1.1. Состояние проблемы параметрического прогнозирования кинетики диссипативных систем и процессов . . . . .	13
1.2. Прогнозирование неупругой деформации и длительной прочности материалов в условиях ползучести . . . . .	20
1.3. Методы прогнозирования показателей надежности элементов конструкций в условиях реологического деформирования материала . . . . .	35
<b>Глава 2. Численный метод структурной и параметрической идентификации математической модели неполной обратимости деформации ползучести</b> . . . . .	42
2.1. Численный метод параметрической идентификации аппроксимационных зависимостей кривых ползучести при постоянных напряжениях в пределах первых двух стадий . . . . .	44
2.2. Численный метод идентификации параметров математической модели для описания стадии упрочнения . . . . .	58
2.3. Построение стохастических математических моделей ползучести для материалов и элементов конструкций . . . . .	74
2.4. Выводы по главе . . . . .	95
<b>Глава 3. Методы индивидуального прогнозирования деформационных характеристик и разрушения элементов конструкций при ползучести и трении</b> . . . . .	96
3.1. Методы прогнозирования индивидуальных деформационных характеристик стержневых элементов конструкций по изделию-лидеру в пределах первых двух стадий ползучести . . . . .	98

3.2.	Индивидуальное прогнозирование кинетики обобщенных перемещений узлов трения и растягиваемого резьбового соединения по изделию-лидеру . . . . .	108
3.3.	Прогнозирование деформационных характеристик и длительной прочности элементов конструкций по изделию-лидеру в условиях вязкого механизма разрушения материалов . . . . .	116
3.4.	Метод расчета индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций на основании стохастических реологических уравнений состояния при однопараметрическом нагружении	135
3.5.	Выводы по главе . . . . .	148
<b>Глава 4. Программное обеспечение для реализации разработанных методов . . . . .</b>		<b>150</b>
4.1.	Описание основных этапов алгоритма идентификации параметров математической модели ползучести в пределах первых двух стадий . . . . .	150
4.2.	Описание основных элементов и интерфейса программы идентификации параметров математической модели ползучести в пределах первых двух стадий при постоянных напряжениях . . . . .	153
4.3.	Описание основных этапов алгоритма идентификации параметров математической модели ползучести в пределах стадии упрочнения при постоянных напряжениях . . . . .	158
4.4.	Описание основных элементов и интерфейса программы идентификации параметров математической модели ползучести в пределах первых двух стадий . . . . .	161
4.5.	Выводы по главе . . . . .	165
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>166</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>169</b>

Приложение А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024618594 . . . . .	186
Приложение Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024664892 . . . . .	187
Приложение В. Акт о внедрении результатов работы в учебный процесс . . . . .	188
Приложение Г. Акт о внедрении результатов работы на предприятии . . . . .	189

# Введение

**Актуальность темы исследования.** Задача разработки методов индивидуального прогнозирования деформационных характеристик конкретного конструктивного элемента порождается проблемой оценки его индивидуального ресурса с использованием параметрических деформационных и катастрофических критериев отказа. При наличии естественного разброса экспериментальных данных повышение разрешающей способности детерминированных теорий совершенно не оправдано, так как получаемые результаты характеризуют поведение некоторой «осредненной» конструкции по парку однотипных изделий. Очевидно, что такая информация мало что даёт для прогнозирования индивидуального поведения конструкции или механических систем. Поэтому необходима разработка корректно построенных стохастических уравнений состояния и методов индивидуальной параметризации математических моделей применительно к конкретной конструкции на начальном этапе ее эксплуатации с возможностью дальнейшего прогнозирования деформационного поведения этой конструкции уже на основе индивидуализированной модели. Такой подход позволяет более полно использовать ресурс конструкций (систем) по всему парку однотипных изделий. В связи с этим естественным образом возникает необходимость разработки неклассических методов построения индивидуальных стохастических математических моделей и методов их параметрической идентификации, позволяющих прогнозировать деформационное поведение конкретного изделия и оценивать его индивидуальный ресурс (так называемая схема эксплуатации по техническому состоянию), а не ресурс по всему парку однотипных изделий (схема назначенного ресурса), который в подавляющем большинстве случаев существенно ниже, чем ресурс конкретного изделия.

Отдельными математическими задачами являются разработка стохастических моделей материалов и элементов конструкций в условиях неупругого деформирования и методов структурной и параметрической идентификации

этих моделей с использованием для оценок параметров всего массива экспериментальных данных, что позволяет математически строго оценить адекватность оценок, их устойчивость к помехам, несмещенность и другие вероятностные характеристики, поскольку в подавляющем большинстве модели неупругого деформирования, во-первых, являются детерминированными, во-вторых, для идентификации параметров моделей используется дискретный набор небольшого объема эвристически выбранных характерных опытных значений базового эксперимента.

Вышеизложенное и подтверждает актуальность тематики диссертационного исследования.

**Объект научного исследования.** Деформационные процессы в элементах конструкций и механических системах со стохастическими неупругими свойствами материала.

**Предмет научного исследования.** Методы построения математических моделей, алгоритмы и программное обеспечение для решения задач прогнозирования индивидуальных деформационных и прочностных характеристик конструктивных элементов.

**Целью диссертационной работы** является разработка новых методов построения стохастических индивидуальных математических моделей, позволяющих прогнозировать неупругое деформационное поведение и характеристики длительной прочности конкретного конструктивного элемента, алгоритмов и программного обеспечения для реализации математических моделей.

Для достижения цели в диссертационной работе поставлены и решены задачи:

1. Разработать стохастическую математическую модель, позволяющую прогнозировать индивидуальные деформационные характеристики элементов конструкций с неупругими свойствами материала.
2. Разработать численный метод параметрической и структурной идентифи-

кации стохастической математической модели неупругого деформирования на основе нелинейного регрессионного анализа определения оценок случайных параметров.

3. Разработать метод индивидуального прогнозирования деформационных характеристик обобщенного перемещения элементов конструкций по изделию-лидеру в стохастической постановке на стадиях упрочнения, стационарного и ускоренного накопления необратимых повреждений.
4. Исследовать эффективность разработанных методов индивидуального прогнозирования на временные интервалы в сравнении с базовым временем, на котором выполняется структурная и параметрическая идентификация моделей, и выполнить проверку адекватности построенных моделей экспериментальными данными.
5. Разработать новое программное обеспечение для реализации разработанных моделей и методов.

**Научная новизна** работы состоит в следующем:

1. Разработана стохастическая математическая модель, позволяющая, в отличие от существующих моделей, прогнозировать индивидуальные деформационные характеристики элементов конструкций с неупругими свойствами материала при однопараметрическом нагружении, общность которых проиллюстрирована на примере анализа кинетики деформационных характеристик ряда конструктивных элементов в условиях ползучести и износа при трении.
2. Разработан новый численный метод параметрической и структурной идентификации физически и стохастически нелинейной математической модели неупругого деформирования элементов конструкций, позволяющий, в отличие от имеющихся эвристических методов, математически обоснованно свести задачу к нелинейному регрессионному анализу определения

оценок случайных параметров модели на основе временных рядов последовательности результатов наблюдения неупругой деформации при различных постоянных внешних нагрузках.

3. Разработаны методы индивидуального прогнозирования деформационных характеристик обобщенного перемещения элементов конструкций по изделию-лидеру и на основании стохастических уравнений состояния при наличии первой, второй и ускоренной стадий накопления поврежденности в конструктивном элементе, позволяющие осуществлять прогнозирование на два–четыре временных интервала по отношению к базовому времени идентификации случайных параметров моделей.
4. Выполнена проверка адекватности данных расчета по всем разработанным методам и моделям индивидуального прогнозирования обобщенных перемещений элементов конструкций экспериментальным данным в условиях ползучести и износа при трении.
5. Разработано новое математическое программное обеспечение для реализации предложенных моделей и методов.

**Теоретическая значимость** заключается в разработке стохастических моделей и новых методов прогнозирования индивидуальных деформационных характеристик и длительной прочности элементов конструкций с неупругими свойствами материалов, использование которых в механике, энергомашиностроении, трибологии и других научных областях, а также в математической теории надежности, позволяет научно-обоснованно оценивать индивидуальный ресурс конкретного конструктивного элемента и в совокупности повысить длительность эксплуатации по всему парку однотипных изделий, оптимальным образом планировать трудоемкие и затратные экспериментальные исследования при длительных режимах нагружения.

**Практическая значимость.** Разработанные модели, методы и получен-

ные результаты могут быть использованы для прогнозирования индивидуального ресурса элементов машин и конструкций в условиях разброса механических свойств неупругих деформаций при эксплуатации объектов по техническому состоянию по деформационным параметрическим и катастрофическим критериям отказов в энергетическом машиностроении, авиадвигателестроении, авиационной промышленности и других отраслях, а также для прогнозирования разрушения механических деталей в условиях ползучести без дополнительных теоретических исследований. Разработанное проблемно-ориентированное программное обеспечение может быть использовано при автоматизированной обработке экспериментальной информации.

**Соответствие паспорту научной специальности.** Исследование соответствует следующим пунктам области исследований специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

- Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (пункт 2);
- Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (пункт 3);
- Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели (пункт 4).

**Положения, выносимые на защиту:**

- 1) стохастическая математическая модель прогнозирования индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций с неупругими свойствами материала;
- 2) численный метод параметрической и структурной идентификации физически и стохастически нелинейной математической модели неупругого деформирования элементов конструкций;

- 3) методы индивидуального прогнозирования деформационных характеристик обобщенного перемещения элементов конструкций по изделию-лидере и на основании стохастических уравнений состояния при наличии первой, второй и ускоренной стадий накопления поврежденности в конструктивном элементе;
- 4) новые теоретические и экспериментальные результаты исследования эффективности разработанных методов индивидуального прогнозирования на временные интервалы в сравнении с базовым временем, на котором выполнялась структурная и параметрическая идентификация моделей;
- 5) проблемно-ориентированное программное обеспечение для численной реализации разработанных методов.

**Степень достоверности и обоснованности выносимых на защиту положений, выводов и рекомендаций** подтверждается адекватностью модельных представлений реальному физико-механическому поведению элементов конструкций в условиях длительного неупругого деформирования; корректностью использования математического аппарата теории вероятностей, математической статистики, регрессионного анализа, вычислительной математики, дифференциальных уравнений, механики деформируемого твердого тела; сравнением результатов расчетов с известными экспериментальными данными и данными других авторов из независимых источников.

**Основные результаты диссертации представлены** на следующих конференциях: VII Международная научно-практическая конференция (школа – семинар) молодых ученых «Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук», г. Тольятти, 2021 г.; Всероссийская научная конференция (с международным участием) «Математика и математическое моделирование», г. Самара, 2021 г.; XVI Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций», г. Екатеринбург, 2022 г.; Международная научно-технической кон-

ференция имени Н.Д. Кузнецова «Перспективы развития двигателестроения», г. Самара, 2023 г.; IV Международная научная конференция «Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики», г. Нальчик, 2023 г.; Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2024», г. Москва, 2024 г.; Всероссийская конференция «Математические проблемы механики сплошных сред», посвященная 105-летию со дня рождения академика Л.В. Овсянникова, г. Новосибирск, 2024 г.; Летние чтения «Неклассические дифференциальные уравнения и математическое моделирование», г. Самара, 2024 г.; XII Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», г. Самара, 2024 г. Полностью результаты работы докладывались на научном семинаре кафедры «Прикладная математика и информатика» Самарского государственного технического университета (руководитель профессор Радченко В.П., 2023-2024 гг.).

**Работа выполнялась при частичной финансовой поддержке** Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета (тема № FSSE-2023-0003).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 13 печатных работах, из них 4 статьи в журналах из перечня ВАК, индексируемых в Web of Science и Scopus, 1 статья в журнале из перечня Scopus, 6 статей в сборниках трудов конференций и 2 тезисов докладов. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук В. П. Радченко за постановки задач и внимание к работе, доктору технических наук В. Е. Зотееву и кандидату физико-математических наук М. Н. Саушкину за консультации и поддержку работы.

**Внедрение.** Результаты диссертационной работы частично внедрены в

учебный процесс Самарского государственного технического университета в лекционные курсы для студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» по дисциплине «Прикладной регрессионный анализ», для магистрантов направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» по дисциплине «Современные методы параметрической идентификации на основе разностных уравнений», «Непрерывные и дискретные математические модели», «Нелинейное моделирование материалов и механических систем» и аспирантов направления 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» по дисциплине «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а также в расчетную практику профильных отделов ПАО «ОДК-Кузнецов» (г. Самара).

**Личный вклад автора.** Работы [3–7] выполнены автором самостоятельно. Постановка задач, разработка алгоритмов и методов, программная реализация, подготовка, анализ и систематизация результатов к публикации работ [8, 9, 71–74, 77, 101, 102, 109] выполнены совместно с соавторами.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии и четырех приложений. Общий объем диссертации составляет 189 страниц, включая 18 таблиц, 63 рисунка и 4 приложения. Список литературы включает 131 наименование на 17 страницах.

# Аналитический обзор и постановка задачи

## 1.1. Состояние проблемы параметрического прогнозирования кинетики диссипативных систем и процессов

Успешное развитие машиностроения, атомной промышленности, нефтехимии, авиадвигателестроения и других наукоемких отраслей промышленности в современных условиях требует решения комплекса проблем. В частности необходимо реализовать комплекс мер уже на стадиях проектирования, изготовления, монтажа и эксплуатации элементов конструкций. Важное место в решении каждой из проблем играют используемые при проектировании математические модели, методы параметрической идентификации этих моделей, прогнозирование ресурса изделий и принятие решений на всех этапах функционирования механических (и иных) систем и процессов для обеспечения ресурса на основе параметрических критериев отказа. Так, на стадии проектирования — это выбор подходящих и рациональных конструктивных схем и материалов, проведение надлежащего расчета с учетом всех воздействий, которые могут возникнуть в процессе эксплуатации. Стадии изготовления и монтажа характеризуются тщательным контролем материала и комплектующих изделий, организацией и контролем технологического процесса, промежуточными контрольными испытаниями. Устранение скрытых дефектов на стадии обкатки и приработки, система технического обслуживания, включающая комплекс диагностических и планово-профилактических мероприятий, позволяют снизить до минимума вероятность возникновения отказов при эксплуатации [14, стр. 7].

Таким образом, центральной научной проблемой для общего, энергетического, авиационного машиностроения и других отраслей промышленности яв-

ляется проблема прогнозирования ресурса (в том числе — индивидуального) элементов машин и конструкций [14, 16, 17, 62, 85, 97, 107].

Отметим, что как отмечалось в работе [14], понятие ресурса имеет различное истолкование в зависимости от выбранной меры его измерения: это может быть реальное физическое время эксплуатации; налёт в часах, например, для авиационных двигателей; число циклов при оценке усталостной прочности и т.д. В дальнейшем будем различать назначенный ресурс, численные значения которого закладываются на стадии проектирования с учетом имеющихся данных о материале элементов конструкций, условиях эксплуатации, накопленном опыте в конструкторской деятельности, и так называемый остаточный ресурс, оценка которого производится уже на стадии эксплуатации «по техническому состоянию» на данный момент времени, или индивидуальный ресурс конкретного объекта. При оценке назначенного ресурса ориентируются на среднестатистические показатели в области параметрической надежности для серии однотипных элементов конструкций, эксплуатирующихся в «однотипных» внешних условиях. Индивидуальное прогнозирование ресурса сфокусировано на конкретном объекте на стадии его эксплуатации с учетом динамики его параметров, заложенных в соответствующие критерии отказов, к моменту времени контроля текущего «технического состояния» и известной истории нагружения.

Таким образом, отличие прогнозирования по назначенному ресурсу от прогнозирования индивидуального ресурса заключается в том, что в первом случае используется [14, стр. 24]: «... весь объем априорных данных о материалах, элементах, узлах, нагрузках и т.п., т.е. информация, которая лежит в основе прогнозирования ресурса и оценки показателей надежности на стадии проектирования. Эта информация, в принципе, относится к генеральной совокупности объектов, в то время как предметом индивидуального прогнозирования служит вполне определенный представитель из этой совокупности. Однако информация об этом представителе остается неполной или неточной, а значительная ее часть имеет вероятностный характер». Отсюда и возникает задача разработки мето-

дов параметрического прогнозирования на основе стохастических уравнений для соответствующих математических моделей как для описания генеральной совокупности однотипных изделий, так и для описания конкретного индивидуума из этой совокупности.

Рассмотрим некоторые примеры оценки ресурса конкретных изделий при эксплуатации по техническому состоянию (как правило, это не серийные, уникальные объекты или процессы).

Для решения данной задачи используются различные подходы. В случае, если несущие элементы конструкций недоступны для ремонтного обслуживания в силу специфики их эксплуатации, используют усиление отдельных узлов, находящихся в наиболее нагруженном состоянии, которое происходит за счет изменения конструктивной схемы, увеличения размеров геометрического сечения и других мероприятий. Данная методика наиболее распространена в строительной отрасли, при эксплуатации гидротехнических сооружений, в водном транспорте и других отраслях [16, 17, 85, 97]. Однако этот метод не применим для ответственных элементов конструкций авиационного и энергетического оборудования, а также атомной промышленности. В этих областях используются подходы для оценки напряженно-деформируемого состояния, основанные на решении краевых задач, основным элементом для реализации которых являются экспериментальные данные упругопластического или реологического деформирования для используемых материалов с последующей оценкой ресурса по параметрическим критериям отказа на основе стохастических уравнений состояния и методов теории случайных процессов с дополнительным назначением коэффициента запаса [14, 62, 107]. Известно, что опытные данные, такие как показатели деформации и время до разрушения, полученные в условиях ползучести при испытаниях на стандартных образцах, демонстрируют значительный разброс. Этот разброс может составлять от 20% до 50% для ползучести, а для длительной прочности варьироваться в пределах от 30% до 100% [80, 81, 96], для геометрических характеристик, описывающих, например, величину

зазора между сопрягаемыми цилиндрическими деталями в условиях трения, величина разброса может составлять до 100 % [23]. Проанализируем эту ситуацию на примере деформации ползучести, но все изложенное далее справедливо и для процессов трения, условий мало-или многоциклового усталости и других параметров, используемых в теории оценки надежности механических систем.

Причины рассеяния данных по ползучести можно разделить на две группы: свойства материала (анизотропия, неоднородность, колебания химсостава, отклонения в технологиях изготовления и термической обработке) и методика испытаний (погрешности в изготовлении образцов, измерении деформаций, колебания температуры и нагрузки) [81]. Отсюда следует, что там, где вопрос касается надежности изделия, статистическая информация, полученная осреднением экспериментальных данных, не играет решающей роли. В связи с этим классические статистические теории [14, 42, 79, 80, 82, 85, 107] и современные подходы линеаризации нелинейных регрессионных уравнений для идентификации параметров моделей, представленные, например, в работах В. Е. Зотева [33, 35, 124], или алгоритмы, основанные на моделировании деградации материала элементов конструкций и необратимом накоплении поврежденности, ориентированы на генеральную совокупность однотипных изделий с использованием стандартных (и модифицированных) методов обработки статистической информации [19, 22] и дают широкую полосу разброса для математических ожиданий соответствующих выходных деформационных характеристик и времени безопасной эксплуатации по параметрическим критериям отказа.

Так, например, в работах [24, 100] рассматривается прогнозирование остаточного ресурса по статистической информации об отказах, по расчетным моделям накопления повреждений, по результатам диагностирования натуральных конструкции и при непрерывном отслеживании их технического состояния.

Указанные выше подходы характеризуют поведение некоторой осреднённой конструкции и не позволяют прогнозировать поведение конкретного изделия с учётом разброса. Данный факт приводит либо к неиспользованным

резервам прочности, либо к преждевременному их разрушению.

Если рассматривать не только технические объекты, то в некоторых научных областях проблема построения прогнозов тех или иных конкретных («единичных») процессов является более чем актуальной. Особенно это важно в медицине, например, для прогнозирования заболеваний и эпидемий. При этом используют как классические вероятностные подходы, ориентированные на генеральную совокупность «объектов», так и индивидуальные математические модели для диагностики конкретного индивидуума. Так, в статье [48] рассмотрены традиционные методы анализа временных рядов — регрессионные и авторегрессионные модели; подходы, опирающиеся на машинное обучение — байесовские сети и искусственные нейронные сети; рассуждения на основе прецедентов. Перечислены важнейшие направления разработки математических моделей распространения заболевания: классические аналитические модели, детерминированные и стохастические, а также современные имитационные модели, сетевые и агентные. В работе [120] смоделирован прогноз распространения малярии, используя методы классической статистики. В биомеханике для костных тканей при исследовании их напряжённо-деформированного состояния [37, 38, 83] учитываются индивидуальные значения модулей Юнга, численные величины которых определяется по компьютерной томограмме. После определения модуля Юнга его используют в расчётных, как правило, конечно-элементных биомеханических моделях, и далее по полученному напряжённо-деформируемому состоянию специалисты принимают решение о выборе успешного варианта лечения конкретного индивида. В статье [110] показано построение прогноза продолжительности жизни пациента с учетом наследственных заболеваний. В работе [111] построены прогнозы уровня кислорода и сахара в крови, а также показано, как можно скорректировать проводимое лечение на основе анализа отклонений спрогнозированных значений контролируемых индивидуальных показателей от их фактических среднестатистических значений.

Публикация [114] показывает, что актуальной проблемой является прогно-

зирование уникальных геофизических и метеорологических явлений на Земле на примере прогнозирования дождевых систем во время тайфунов. В этом исследовании предлагается новая модель прогнозирования осадков, основанная на характеристиках системы осадков. В качестве основы был взят Грей-метод, затем его скорректировали для получения экспоненциально гладкой последовательности. С помощью этого инструмента прогнозирования дождевых систем во время тайфунов становится более точным, поэтому меры по предотвращению стихийных бедствий могут быть приняты заранее.

В геологии и геофизике актуальна проблема прогнозирования в реальном масштабе времени кинетики движения оползней (опять таки уникального процесса). В статье [108] представлено кинематическое исследование оползня Порталет (Саллент-де-Гальего, Центральные испанские Пиренеи), который был вызван строительством большой парковки у подножия склона. Была разработана математическая модель, которая включает в себя вязкопластическое поведение и напрямую позволяет учитывать известную ежедневную интенсивность осадков и рассеивание избыточного порового флюида с помощью простого уравнения консолидации. Прогноз был сделан в течение длительного периода времени, с мая 2006 г. по июль 2007 г., и сравнивался с измерениями СДК ГНСС (системы дифференциальной коррекции глобальных навигационных спутниковых систем).

В работе [105] рассматривается применение метода Монте-Карло в экологической химии, приводится метод построения прогноза последствий залповых выбросов загрязняющих веществ, их распространения и деградации в окружающей среде.

Отметим, что все приведенные выше примеры относятся к необратимым процессам за счет накопления в них различного рода «дефектов» или необратимых изменений, поэтому в дальнейшем будем использовать термин «диссипативные системы или процессы».

Приведенные выборочные примеры прогнозирования «ресурса» элементов

конструкций в механике и машиностроении, медико-биологических объектов, уникальных в своем роде процессов в геомеханике, метеорологии и других явлений свидетельствует о необходимости развития не только классических методов прогнозирования показателей надежности (ресурса), заложенных в соответствующие математические модели, ориентированных на генеральную совокупность однотипных «изделий», но и разработки неклассических моделей индивидуального прогнозирования уникальных процессов, элементов конструкций, явлений природы и т.д., где необходимой для классических моделей информации просто не имеется и единственные данные для построения индивидуализированных моделей черпаются непосредственно в процессе функционирования (эксплуатации) объекта на начальном этапе.

Ниже решение некоторых задач прогнозирования будем рассматривать на примере элементов конструкций, материал которых находится в условиях ползучести. В отличие от известных в механике упругой деформации и деформации пластичности, для описания которых достаточно иметь тензоры деформаций, напряжений и знать историю нагружения (в пластической области), деформация ползучести развивается в реальном физическом времени даже при постоянных напряжениях. Поэтому уравнения состояния в ползучести связывают напряжения, деформации, время и температуру. Основной задачей здесь является прогнозирование компонент тензора деформаций во времени при заданных напряжениях и температуре, но все изложенное для деформации ползучести можно перенести и на другие процессы, используя концепцию «черного ящика», параметризуя «вход-выход».

## 1.2. Прогнозирование неупругой деформации и длительной прочности материалов в условиях ползучести

В рамках вышеизложенных проблемных задач в теории прогнозирования будем рассматривать элементы конструкций в условиях ползучести материала, анализировать имеющиеся подходы к построению соответствующих математических моделей и методов идентификации параметров. В качестве замечания отметим, что наряду с термином «деформация ползучести» в дальнейшем будем использовать и эквивалентный по смыслу термин «реологическая деформация».

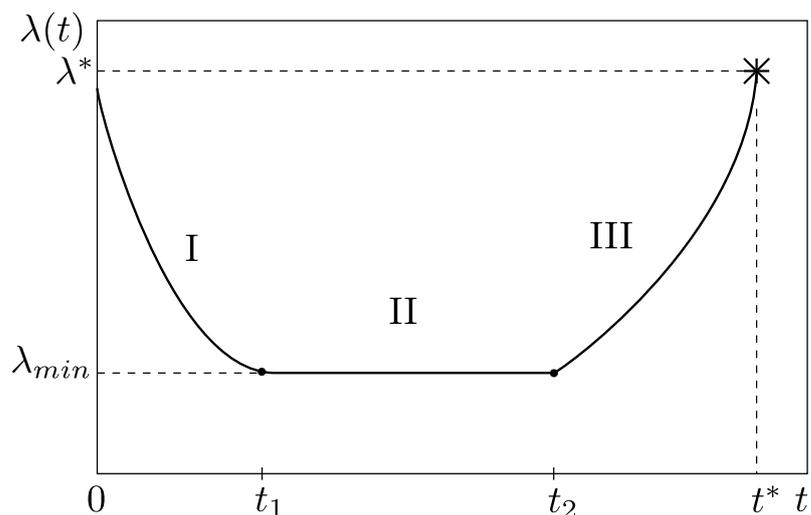
Задача прогнозирования неупругой реологической деформации и длительной прочности (время до разрушения) материалов в условиях ползучести является одной из актуальных задач современного энергетического машиностроения, атомной и нефтехимической промышленности, строительной отрасли и других. Данная проблема возникает при проектировании конструкций, эксплуатируемых при высоких температурах, что отмечается во множестве публикаций и монографий, в частности в [11, 21, 43, 52–55, 60, 61, 66, 69, 76, 98, 117, 125]. Значительная часть исследований направлена на разработку феноменологических моделей поведения материалов — уравнений состояния ползучести и длительной прочности, являющихся основой для решения соответствующих краевых задач. Современное состояние данного научного направления изложено в монографии А. М. Локощенко [53] и его обзоре с соавторами [66]. Феноменологические уравнения состояния реологического деформирования являются основой для решения соответствующих краевых задач, однако построение этих моделей является сложным и трудоемким методом из-за реализации технически сложного эксперимента при высоких температурах и большой длительности испытаний. Это же замечание можно отнести и к парам трения, эксперимен-

тальному исследованию мало-и многоциклового усталости и другим процессам. Поэтому на первый план, во-первых, выходит оптимизация экспериментальных исследований для получения кривых стационарной ползучести при постоянных напряжениях, являющихся основой для множества уже построенных реологических моделей материала. Во-вторых, собственно построение уравнений состояния и разработка методов идентификации их параметров, как правило, в условиях большого разброса экспериментальных данных и наличия трех стадий ползучести: первая описывает участок кривой ползучести, где скорость монотонно падает до минимального возможного значения при фиксированном постоянном напряжении; вторая — стадия установившейся ползучести, где деформирование образца идет с постоянной минимальной скоростью ползучести; третья — стадия разрушения, на которой за счет накопления поврежденности скорость ползучести монотонно возрастает и процесс заканчивается физическим разрушением образца (с точки зрения параметрической надежности — отказ по катастрофическому критерию). Удобство использования характерной кривой ползучести образца состоит в ее полном качественном соответствии с кривой накопления отказов (интенсивности (скорости) отказов) в теории надежности, типичные кривые для которых приведены на рис. 1.1. На рис. 1.1 (а) приведен график интенсивности (скорости) отказов  $\lambda(t)$ , а на рис. 1.1 (б) — график накопления отказов, т.е. величины

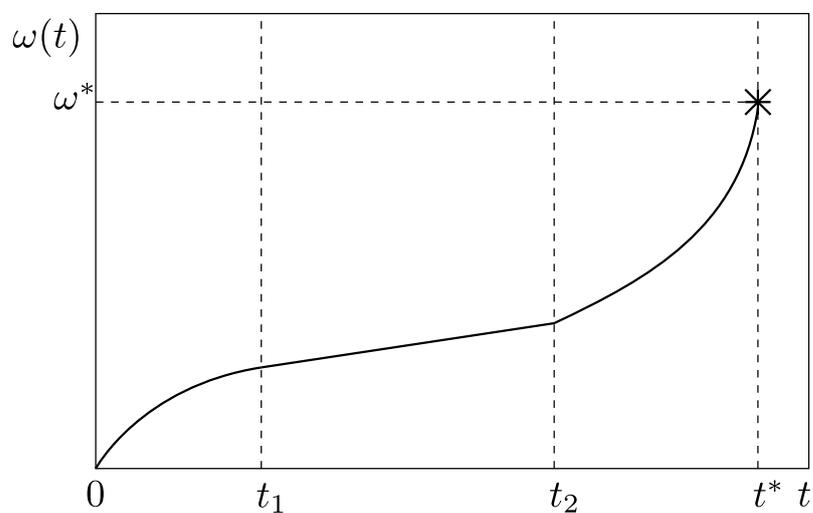
$$\omega(t) = \int_0^t \lambda(\xi) d\xi.$$

На этих графиках четко видно наличие первой стадии (I) (стадии приработки), второй стадии (II), когда интенсивность (скорость) отказов приблизительно постоянна (как правило, вторая стадия — это относительно длительный во времени этап), третьей стадии, когда интенсивность начинает монотонно возрастать за счет изнашивания, старения, накопления поврежденности и других деградационных (диссипативных) процессов. При достижении критиче-

ского значения  $\lambda(t^*) = \lambda^*$  или  $\omega(t^*) = \omega^*$  дальнейшая эксплуатация элемента конструкции нецелесообразна и величину  $t = t^*$  можно принять за ресурс изделия (объекта). Еще раз отметим, что кривая ползучести — зависимость деформации ползучести  $p = p(t)$  при постоянном напряжении — качественно такая же, как на рис. 1.1 (б).



a



б

Рис. 1.1. Схема для описания интенсивности (скорости) отказов  $\lambda(t)$  (а) и накопления отказов  $\omega(t)$  (б)

Отметим теперь основные сложности, которые возникают при построении реологических моделей в теории ползучести (они носят универсальный характер для всех процессов, качественно описываемых зависимостями, представлен-

ными на рис. 1.1:

- 1) проведение серии испытаний на ползучесть при различных значениях напряжений на базе  $10^3 - 10^6$  ч в лабораторных условиях крайне сложно, а зачастую, и невозможно;
- 2) наблюдается большой разброс экспериментальных данных при ползучести, поэтому для получения надежной информации нужно иметь несколько образцов при одном уровне напряжения;
- 3) при построении феноменологических уравнений ползучести материала с учетом накопления поврежденности необходимо учитывать тип механизмов накопления повреждений в зависимости от величины напряжений и уровня температуры.

В настоящее время установлено три типа накопления поврежденности при ползучести в металлах вследствие нагружений [20, 53, 60, 76]:

- 1) внутризеренное накопление повреждений при высоких значениях напряжений и при высокой температуре (в моделях ползучести соответствует схеме вязкого разрушения);
- 2) межзеренное накопление повреждений в виде зарождения, развития и слияния различных дефектов в виде пор, трещин при относительно малых значениях напряжений и умеренных температурах с длительностью до разрушения образца  $10^4 - 10^6$  ч (соответствует схеме хрупкого разрушения);
- 3) межзеренное накопление повреждений в виде образования клиновидных трещин при (условно) средних напряжениях с длительностью до разрушения порядка от нескольких сотен часов до тысяч часов (соответствует схеме смешанного разрушения).

Таким образом, на основе построенных уравнений состояния наиболее надежные экспериментальные и теоретические результаты можно получить в основном, оставаясь в рамках одного механизма разрушения материала. Формальная экстраполяция расчетных данных по модели, построенной для одного типа разрушения, на напряжения, соответствующие другому типу разрушения, даже в условиях изотермической ползучести (ползучести при постоянной температуре), приводит к существенной погрешности.

Перейдем к анализу статистических методов прогнозирования реологической деформации в пределах первой и второй стадии при полном объеме экспериментальных данных.

Для описания развития деформации ползучести во времени в случае одного нагружения используют соотношения вида

$$F(\dot{p}, p, \sigma, T, q_1, \dots, q_n) = 0, \quad (1.1)$$

где  $p = p(t)$  — деформация ползучести,  $\sigma$  — напряжение,  $T$  — температура,  $q_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — структурные параметры или параметры поврежденности. Однако в условиях ползучести на первой и второй стадиях ползучести необходимость в структурных параметрах отпадает и их можно исключить из модели (1.1). Для детализации модели (1.1) необходимо иметь экспериментальные данные стационарных кривых ползучести при различных постоянных напряжениях, которые являются базовой информацией для идентификации параметров и функций при конкретизации вида соотношения (1.1). Как уже отмечалось выше, при ползучести (и других процессах) наблюдается большой разброс экспериментальных данных. Поэтому необходимо строить уравнения (1.1) в стохастическом варианте. Но если и не учитывать разброс экспериментальных данных для деформации ползучести, то решение проблемы идентификации параметров математических моделей даже на основании усредненных (детерминированных) кривых ползучести неминуемо приводит к оценкам параметров моделей

стохастического характера и автоматически уравнения типа (1.1) становятся стохастическими. Проанализируем имеющуюся в научной литературе информацию о построении уравнений типа (1.1) с учетом статистических подходов в пределах первых двух стадий.

Развитие статистических методов характеризуется обобщением детерминированных уравнений, введением в них случайных функций и параметров. Полученные таким образом стохастические соотношения позволяют описать деформационные свойства большой совокупности однотипных изделий для идентичных режимов нагружения.

Так, для стадии установившейся ползучести (второй стадии) часто используется степенная зависимость скорости ползучести  $\dot{\epsilon}$  от напряжения  $\dot{\epsilon} = B\sigma^n$ , где  $B$  и  $n$  — случайные величины. В работах F.A. Cozzarelli и W.N. Huang [130, 131] случайная величина  $B$  определяется случайными возмущениями температуры, а  $n$  — случайностью (микронеоднородности) механических свойств, причем обе величины предполагаются независимыми. Но в работе Н. Broberg [129] на основе многочисленных испытаний при постоянной температуре и напряжении был сделан следующий вывод — форма кривой распределения случайной величины  $\ln \dot{\epsilon}$  не зависит от логарифма уровня напряжения. Таким образом, в приведенном выше соотношении случайным является только величина  $B$ , а показатель  $n$  можно считать постоянным.

В [10] стохастическое уравнение ползучести записано в общем виде

$$\dot{\epsilon} = F(\sigma_0, T, q_1, q_2, \dots, q_s, a_1, a_2, \dots, a_k),$$

где  $\sigma_0$ ,  $T$  — условные напряжение и температура,  $\dot{\epsilon}$  — скорость ползучести,  $q_1, q_2, \dots, q_s$  — структурные параметры (деформация ползучести, параметры поврежденности и т.д.),  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — коэффициенты уравнения состояния, которые в общем случае являются случайными величинами. Для решения задачи прогнозирования ползучести устанавливается функция распределения случайных коэффициентов  $a_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ) на примере уравнения состояния И. И. Труни-

на, которое имеет вид

$$\dot{\varepsilon} = \exp(A) T^{-p} \sigma^m (\varepsilon_0 + \varepsilon)^{-n} \exp\left[-\frac{U_0 - c\sigma - r\varepsilon}{T}\right],$$

где  $A$ ,  $U_0$ ,  $c$ ,  $n$  и  $r$  — случайные величины.

В работе [49] пучок кривых ползучести описывается по формуле

$$p = B \cdot \operatorname{sh} \frac{\sigma}{n} t^m,$$

где  $n$  — случайная величина, распределенная по нормальному закону,  $B$  и  $m$  — детерминированные параметры.

В работе [41] проведен анализ и выявление случайных и детерминированных параметров для теорий старения и вязкоупругости, строится стохастическая модель материала, цель которой — учет неоднородности его свойств:

$$\varepsilon(t) = f(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \sigma_0),$$

где  $\varepsilon(t)$  — случайный процесс;  $\sigma_0$  — напряжение;  $f$  — некоторая функция, соответствующая выбранному варианту теории;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  — совокупность случайных параметров, заданных на бесконечном множестве образцов своей  $p$ -мерной плотностью распределения. В статье рассматриваются два возможных подхода статистического описания случайного процесса: на основе известных вероятностных свойств совокупности  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  и на основе наблюдаемой совокупности реализаций процесса  $\varepsilon(t)$ .

В работе [59] для описания неустановившейся ползучести принимается гипотеза упрочнения

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{B}{m}\right)^m \sigma^{mn} t^m$$

и показывается, что рассеянием параметров  $n$  и  $m$  можно пренебречь, а распределение вероятностей  $\lg B$  подчиняется нормальному закону.

В работе [18] процесс развития неустановившейся деформации ползучести полимерных материалов описывается дифференциальным уравнением

$$nE\dot{\varepsilon} + H\varepsilon = n\dot{\sigma} + \sigma$$

где  $n$  — время релаксации,  $E$  и  $H$  — мгновенный и длительный модули упругости материала соответственно, напряжение  $\sigma$  представляет собой стационарный случайный процесс с известной дробно-рациональной спектральной плотностью. Вычисляются вероятностные характеристики случайной деформации  $\varepsilon$ .

В [39] математическая модель деформирования элементов конструкций типа стержней, пластин и оболочек сведена к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих конечное множество случайных параметров с известной плотностью распределения вероятностей.

В работах [88, 95] в результате анализа экспериментальных данных для деформаций ползучести [87] при постоянных и ступенчатых напряжениях были предложены стохастические уравнения ползучести, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными. Для описания первой и второй стадий ползучести при постоянном напряжении было предложено выражение

$$\varepsilon(t) = A_0 + \sum_{i=1}^s A_i (1 - \exp(-\lambda_i t)) + vt,$$

где  $\lambda_i$  — неслучайные постоянные,  $A_0$ ,  $A_i$  и  $v$  — случайные величины. При переменном напряжении использовался метод разделения деформаций и построены стохастические уравнения для каждой её компоненты. При этом параметры, которые входят в определяющие уравнения, являются случайными функциями напряжения  $\sigma(t)$ . Для замыкания системы стохастических уравнений использовалось выражение вида

$$x(\sigma) = m_x(\sigma) + s_x(\sigma) \cdot U,$$

где  $x(\sigma)$  — любая из определяемых стохастических функций,  $m_x$  — символ математического ожидания,  $s_x$  — символ среднего квадратичного отклонения,

$U$  — нормированная центрированная величина, описывающая изменения механических свойств.

Построение стохастических уравнений ползучести  $p = p(t)$  на основании нелинейной теории вязкоупругости на примере экспериментальных данных для поливинилхлоридного пластика при  $T = 24$  °C и уравнений

$$p(t) = \sum_{k=1}^s \eta_k(t), \quad (1.2)$$

$$\dot{\eta}_k(t) = \lambda_k \left[ A_k(t) \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n - \eta_k(t) \right], \quad (1.3)$$

где  $s$ ,  $\lambda_k$ ,  $n$ ,  $\sigma_*$  — детерминированные постоянные, а коэффициенты  $A_k(t)$  являются случайными функциями времени, приведено в работе [75], при этом полагалось

$$A_k(t) = A_k + B_k(t), \quad \langle A_k \rangle = a_k, \quad \langle B_k(t) \rangle = 0, \quad (1.4)$$

( $\langle . \rangle$  — символ математического ожидания, который в дальнейшем будем использовать наряду с обозначением  $m_x$ ). Такой подход позволяет описать каждую реализацию кривой ползучести при различных постоянных напряжениях набором случайных величин  $A_k$  и реализаций случайных функций  $B_k(t)$ . В этой работе приведена эвристическая методика идентификации случайных и детерминированных параметров модели (1.2)–(1.4), базирующаяся на известном методе последовательного выделения экспоненциальных слагаемых [90] и анализа зависимости

$$p(t) = \sum_{k=1}^s [A_k + B_k(t)] (1 - e^{-\lambda_k t}) \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n, \quad (1.5)$$

которая является решением (1.2)–(1.4) при  $\sigma(t) = \text{const}$ . Однако в полной мере учесть «шумовую» добавку

$$p_1(t) = B_k(t) [1 - e^{-\lambda_k t}] \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n \quad (1.6)$$

не удалось, поскольку происхождение «шума» (1.6) обусловлено не только физическими причинами (например, дискретным характером деформации во времени), но и ошибками эксперимента (случайные колебания температуры или напряжения, неравномерность по длине геометрических параметров, поперечного сечения и т.д.), методическими погрешностями измерительной аппаратуры, погрешностями теории и т.д. В силу малости величины  $p_1(t)$  ее не учитывали и для анализа использовалась «главная» часть деформации

$$p_2(t) = A_k(t) [1 - e^{-\lambda_k t}] \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n, \quad (1.7)$$

позволяющая описать каждую экспериментальную реализацию за счет «идентификации» случайных величин  $A_k$ , получения выборки этих величин и определения их математического ожидания и дисперсии, что позволило построить доверительные интервалы для зависимости деформации ползучести при постоянных и переменных во времени зависимостей для напряжения. Недостатком этого метода построения стохастических уравнений (1.2)–(1.4) является использование лишь характерных точек на кривой ползучести (в соответствии с методом выделения экспоненциальных слагаемых [90]), требование монотонного возрастания экспериментальной зависимости  $p^* = p^*(t)$  и ее выпуклости, что в эксперименте зачастую не выполняется. Эти недостатки привели к тому, что предварительное сглаживание экспериментальных зависимостей по критериям монотонности и выпуклости сказалось на полученных очень широких доверительных интервалах для деформации ползучести, особенно для режимов ступенчатого изменения напряжения  $\sigma = \sigma(t)$ .

Обобщение подхода, развитого в [75], на случай учета всех трех стадий ползучести выполнено в работе [80], где предложена стохастическая модель неизотермической ползучести сплава ЖС6КП в диапазоне изменения температуры  $T \in [900, 1000]$  °С, имеющая следующий вид:

$$\varepsilon(t) = e(t) + p(t), \quad e(t) = \sigma(t)/E, \quad p(t) = u(t) + v(t) + w(t),$$

$$\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{k=1}^s u_k(t), \quad \dot{u}_k(t) = \lambda_k [D_k(t) (\sigma(t)/\sigma_*)^n - u_k(t)] \\
v(t) &= \sum_{k=1}^s v_k(t), \quad \dot{v}_k = \begin{cases} \lambda_k [V_k(t) - v_k(t)], & V_k(t) > v_k(t) \\ 0, & V_k(t) \leq v_k(t), \end{cases} \\
\dot{w}(t) &= c (\sigma(t)/\sigma_*)^m, \\
\sigma(t) &= \sigma_0(t)(1 + \omega(t)), \quad \dot{\omega}(t) = \alpha \sigma(t) \dot{p}(t).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь  $\varepsilon$ ,  $e$  — полная и упругая деформации;  $p$  — деформация ползучести;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие деформации ползучести соответственно;  $E$  — модуль Юнга;  $\sigma_0$ ,  $\sigma$  — номинальное и истинное напряжения соответственно;  $\omega$  — параметр поврежденности, который полагается пропорциональным работе истинного напряжения на деформации ползучести. В этой модели случайными полагались функции

$$D_k(t) = A_1^k e^{\alpha_1 T}, \quad V_k(t) = A_2^k e^{\alpha_2 T} \cdot \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n, \quad c(t) = A_3 e^{\alpha_3 T}, \quad \alpha(t) = A_4 e^{\alpha_4 T} \tag{1.9}$$

где  $A_1^k$ ,  $A_2^k$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  — случайные величины, а остальные величины или функции температуры детерминированные. Для определения конкретных зависимостей (1.9) и детерминированных величин и функции предложена эвристическая многоступенчатая методика обработки экспериментальных зависимостей, при этом часть параметров фактически определялась перебором их значений в предполагаемых областях их изменения. Тем не менее, модель (1.8) с удовлетворительной погрешностью описана по 9 кривым стационарной ползучести (по 3 реализации при трех уровнях напряжений) при каждой из трех температур:  $T = 900^\circ\text{C}$ ,  $T = 950^\circ\text{C}$ ,  $T = 1000^\circ\text{C}$ . А частичная проверка адекватности модели (1.8) в работе [75] выполнена при нестационарных режимах изменения температуры  $T = T(t)$  и напряжения  $\sigma = \sigma(t)$ . Отметим, что в силу существенной стохастической нелинейности модели (1.8), даже после преодоления проблемы идентификации случайных и детерминированных величин (в частности мате-

матических ожиданий и дисперсий случайных величин), решение системы (1.8) можно выполнить только численно методом Монте-Карло.

Аналогичный подход использовался при построении стохастических моделей изотермической ползучести в более ранних работах [70, 81]. Общая проблема при учете третьей стадии заключается в том, что в силу почти асимптотического характера кривой ползучести на развитом (финишном) участке этой кривой минимизировать приходится не зависимость  $p = p(t)$ , а  $t = t(p)$ , получить которую можно лишь апостериорно, поскольку найти обратную зависимость  $t = t(p)$  из соотношений (1.8), (1.9) (или им подобных) аналитически невозможно.

В работах [91, 93] развивается подход для оценки индивидуального прогнозирования ресурса в конструкциях с реологическими свойствами.

Таким образом, из краткого анализа приведенных публикаций можно констатировать, что имея детерминированные уравнения состояния типа (1.1) и используя методики идентификации случайных оценок параметров модели, можно построить стохастический вариант уравнений и использовать его в задачах прогнозирования и расчета ресурса, например, по допустимым значениям накопленной деформации ползучести при заданных режимах нагружения. Для этого необходимо выяснить, какие параметры детерминированных уравнений могут носить случайный характер, затем заменить их случайными величинами или случайными функциями, характеристики которых определяются статистически.

Сделаем здесь важное замечание. Кроме небольшого числа отмеченных выше работ, в которых сделаны попытки построения стохастических уравнений ползучести, в подавляющем числе работ авторы ориентируются на построение детерминированных реологических соотношений, основные варианты которых из различных научных школ приведены, например, в методических рекомендациях [84].

Рассмотрим статистические методы прогнозирования с учетом третьей ста-

дии ползучести при полном объеме статистической информации.

Задача учета индивидуальных деформационных свойств с учетом третьей стадии ползучести является также актуальной, так как известно, что для некоторых материалов она может оказаться довольно продолжительной во времени и составлять до 50 % от начала эксплуатации до момента разрушения [45, 103]. В работе [45] отмечается физическая несостоятельность попыток описать первичные кривые ползучести аналитическими уравнениями с постоянными коэффициентами, так как повреждение материала на каждой стадии имеет различную физическую природу. Для построения адекватных моделей прогнозирования ползучести необходимо уметь однозначно точно определять характерные точки кривой ползучести, такие как начало ускоренной (третьей) стадии и начало лавинной ползучести, что сделать при обработке реальных экспериментальных кривых ползучести строго математически затруднительно и приходится делать это «вручную», приближенно. В работе [40] прогноз поведения кривой ползучести основывается на условии минимума суммы квадратов отклонений прогнозируемых значений деформации от экспериментальных в обучающем эксперименте. Но предложенная модель действует только при постоянном напряжении, линейность оценочной функции относительно измеряемых значений экспериментально не обоснована. Также при данной постановке нет возможности определить статистические оценки параметров модели, что затрудняет оценку надежности исследуемого объекта.

В работах Ю. А. Еремина и соавторов [29–31, 67] предложена методика вычисления случайных величин в стохастических уравнениях ползучести по измеренным на конкретной конструкции значениям деформации ползучести для малых времен на начальном этапе «эксплуатации».

На начальной стадии деформирования проводится конкретизация значений случайных параметров в стохастических уравнениях по натурным экспериментам, после которой появляются «детерминированные» уравнения, с помощью которых можно осуществить прогноз поведения конкретной конструкции.

При наличии возможности сравнивать прогноз с наблюдаемым деформированием конструкции по истечении значительного временного интервала выявляются существенные расхождения между расчетными и наблюдаемыми деформациями. Данная проблема возникает в связи с изменениями механических свойств материала в процессе эксплуатации, как показано в работе В. И. Ковпака [45]. В связи с этим возникает следующая задача — последовательная корректировка уравнений состояния на основе вновь поступающей информации из эксперимента. Следовательно, построение прогноза принимает уже динамический характер.

Задача динамического прогнозирования деформации ползучести при постоянном напряжении рассматривается в работах Ю. П. Самарина [86, 89].

Рассмотренные выше методы индивидуального прогнозирования подразумевают построение стохастических определяющих уравнений, описывающих кривые деформации парка однотипных изделий. Для этого требуется большой объем статистической информации, которая черпается из экспериментов над конструкциями, на что и указывалось в работах [75, 80]. Однако для ряда уникальных и дорогостоящих изделий такую информацию получить практически невозможно. Поэтому в случае построения индивидуального прогноза для ряда уникальных и дорогостоящих изделий, которые промышленность выпускает только несколькими десятками, применяется метод построения прогноза с помощью изделия-прототипа (лидера). Метод прогнозирования по прототипу использовался в работах [31, 72, 84].

Недостаточное количество экспериментальных данных может быть восполнено с помощью метода Монте-Карло и метода бутстрэпа [10, 47, 63—65, 87, 95, 99].

В работе А. Н. Бадаева [10] разработан алгоритм прогнозирования ползучести, включающий в себя метод Монте-Карло [119] случайного нормального вектора параметров стохастического уравнения в соответствии с заданной функцией распределения.

Используя метод Монте-Карло, отпадает необходимость в проведении дополнительных экспериментов с целью построения доверительных интервалов для прогнозируемых характеристик, это и показано в работах [87, 95].

Метод бутстрэпа применен в работе [63], где строится прогноз длительной прочности, в [64] построена модель разрушения материала при высокотемпературной ползучести. В статье [1] показано применение бутстрэп-метода для оценки показателей надежности стареющего оборудования на основе ограниченного набора информации. Идею данного метода впервые предложил Брэдли Эфрон в 1979 году [113]. Идея метода состоит в следующем — пусть имеется  $N$  экспериментальных точек, каждой из которых присваивается номер от 1 до  $N$ . Генерируя случайные числа, которые являются равномерно распределенными целыми числами от 1 до  $N$ , получаем из исходных данных  $M$  выборок длиной  $N$ . Для каждой из выборок делаются расчеты и в итоге получаем  $M$  результатов, которые сортируются в порядке возрастания (или убывания). В полученном вариационном ряде находят медиану и доверительные интервалы искомых характеристик. Однако данный метод обладает существенным недостатком: он сильнее зависит от исходных данных, чем процедуры и методы, использующие информацию о функции распределения и законе изменения дисперсии экспериментальных данных.

В работе [46] описан метод определения остаточного ресурса материалов труб паропроводов после отработки расчетного ресурса эксплуатации. В качестве критериев поврежденности материала выбраны характеристики остаточной деформации ползучести и скорость ползучести. В данном примере показано, что полный ресурс эксплуатации материала в конструкции прогнозируется без использования экспериментальных данных на образцах в лабораторных условиях.

Определение показателей надежности стохастических неоднородных элементов конструкций является заключительным этапом их расчета на ползучесть. Так, в работах [13–15] вводятся понятия показателя надежности как

вероятность безотказной работы в течение всего срока службы и функции надежности, которая характеризует вероятность безотказной работы на отрезке времени  $[0, t]$ , где  $t$ — переменная величина. Конечной целью решения задачи о надежности является установление такого момента  $t$ , который с точки зрения накопленной к данному времени диагностической информации является оптимальным для прекращения эксплуатации.

В исследованиях [50, 87] решалась задача надежности единичного стержня при постоянном напряжении, критерием отказа которого является достижение деформацией заданной величины. В работе [49] рассматривается потеря работоспособности стержня, когда релаксирующее напряжение  $\sigma(t)$  пересекает уровень  $\sigma_0$ . В [51] предложено решение задачи о надежности статически неопределяемых стержневых конструкций, при этом отказ определяется как момент, когда перемещение заданного узла в определенном направлении достигает критической величины. В этих работах получены аналитические выражения для случайного времени безотказной работы и показателей надежности с применением теории вероятностей.

### **1.3. Методы прогнозирования показателей надежности элементов конструкций в условиях реологического деформирования материала**

В пункте 1.2 частично рассмотрено состояние проблемы разработки феноменологических детерминированных и стохастических моделей для материалов. Применять такие модели на практике можно только для одномерных структур, например, растягиваемых или сжимаемых стержней, при оценке их параметрической надежности. Однако для других типов конструктивных элементов, даже достаточно простых, методы, упомянутые в пункте 1.2, сложно применять напрямую. Здесь ряд математических задач порождает проблему

применения реологических моделей деформирования и разрушения материалов для решения стохастических краевых задач и оценки надежности конструктивных элементов в реальных условиях эксплуатации. Например, классические стохастические теории ползучести со случайными параметрами и функциями обеспечивают возможность получения решений, которые позволяют на стадии проектирования оценить показатели надежности, ориентируясь на «генеральную» совокупность однотипных изделий. Таким образом, соответствующие математические ожидания деформаций, напряжений и времени до разрушения имеют широкую полосу естественного разброса. Очевидно, что такая информация предоставляет ограниченные возможности для проектирования индивидуального поведения (ресурса) конкретной конструкции. Это может привести к назначению неоправданно высоких коэффициентов запаса, что, в свою очередь, значительно увеличивает металлоемкость элементов конструкций и отрицательно сказывается на других технико-экономических показателях.

Очевидно, что классические методы решения краевых стохастических задач на основе стохастической реологической модели в значительной степени не подходят для оценки индивидуального ресурса конкретной конструкции. Это связано с тем, что полная стохастическая картина для распределения, например, неупругой деформации в области интегрирования, отсутствует.

Поэтому для решения подобных задач применяются неклассические методы построения индивидуальных стохастических моделей для элементов конструкций. Один из таких подходов представлен и обоснован в работе [76], где развивается метод макромеханики конструкций. В рамках этого подхода доказывается возможность описания ползучести элементов конструкций в терминах «обобщенная нагрузка — обобщенное перемещение».

Суть данного метода заключается в рассмотрении конструктивного элемента как единого целого, подвергающегося воздействию внешних факторов, называемых «обобщенными нагрузками». Реакцией этого объекта будут деформационные (или другие) характеристики — «обобщенные перемещения». В ре-

зультате для конструктивного элемента формулируются уравнения, связывающие «обобщенные нагрузки» и «обобщенные перемещения», что создает обобщенную реологическую модель элемента конструкции. Такой подход позволяет сразу устанавливать зависимости, такие как «изгибающий момент — кривизна», «крутящий момент — угол закручивания», «нагрузка — перемещение характерной точки», «внутреннее давление — радиальное перемещение» и т.д. [81].

Метод основывается на известной аналогии между поведением одноосного образца при растяжении и конструктивного элемента в процессе неупругого реологического деформирования в условиях однопараметрического подхода: одна входная координата («обобщенная нагрузка» и одна выходная — «обобщенное перемещение»). Например, чисто формально диаграмма упругопластического деформирования одноосного образца будет иметь тот же вид, что и элемента конструкции в координатах «обобщенная нагрузка — обобщенное перемещение» («изгибающий момент — кривизна» для балки при чистом изгибе, «крутящий момент — угол закручивания» для вала, «внутреннее давление — радиальное перемещение» для толстостенной трубы и т.д.). Аналогично кривые одноосной ползучести в координатах «деформация ползучести — время» при постоянных напряжениях будут иметь такой же вид, как и кривые ползучести для конструктивного элемента в координатах «обобщенное перемещение — время» при постоянной внешней нагрузке.

Таким образом, указанный подход позволяет сформулировать «одномерные» стохастические уравнения для элементов конструкций в координатах «обобщенная нагрузка — обобщенное перемещение» при исследовании упругопластических задач или «обобщенное перемещение — время» с учетом заданных законов для обобщенных перемещений в условиях ползучести (при однопараметрическом нагружении), что аналогично одноосной модели материала. В этом случае отпадает необходимость в знании случайных пространственных полей деформаций для конкретной конструкции, поскольку вся ее «индивидуальность» описывается интегральными (выходными) деформационными характеристика-

ми (обобщенными перемещениями) [81]. Использование и развитие данного подхода можно найти в работах Ю. П. Самарина [123], Ф. А. Leckie [116], R. Sim [127], R. Sim, R. Penny [126], А. Mackenzie [118], Ю. А. Еремина [27, 28] и в его работах с соавторами [29—31, 76], Е. Е. Елисеевой [26], Я. М. Клебанова с соавторами [44, 94] и многих других авторов.

В качестве примера покажем возможность использования математической модели одноосной ползучести материала в пределах первых двух стадий вида (частный случай модели, приведенной формулами (1.8)) [81]:

$$\begin{aligned}
 & p(t) = u(t) + v(t) + w(t); \\
 & \begin{cases} u(t) = \sum_{k=1}^s u_k(t), \\ \dot{u}_k(t) = \lambda_k [f_1(\sigma) - u_k(t)]; \end{cases} \\
 & \begin{cases} v(t) = \sum_{k=1}^s v_k(t), \\ \dot{v}_k = \begin{cases} \lambda_k [f_2(t) - v_k(t)], & f_2(t) > v_k(t) \\ 0, & f_1(t) \leq v_k(t); \end{cases} \end{cases} \quad (1.10) \\
 & \dot{w}(t) = f_3(\sigma).
 \end{aligned}$$

Для обобщения (1.10) на макромеханику элементов конструкций достаточно  $p(t)$ ,  $u(t)$ ,  $v(t)$  и  $w(t)$  заменить на компоненты обобщенного перемещения  $\Delta_p$ ,  $\Delta_u$ ,  $\Delta_v$  и  $\Delta_w$ , а напряжение  $\sigma$  — на обобщенное перемещение  $Q$ . Тогда однопараметрическая обобщенная модель элемента конструкций принимает вид:

$$\begin{aligned}
\Delta_p^{(t)} &= \Delta_u(t) + \Delta_v(t) + \Delta_w(t); \\
\begin{cases} \Delta_u = \sum_{k=1}^s \Delta_{u_k}, \\ \dot{\Delta}_{u_k} = \lambda_k [f_1(Q) - \Delta_{u_k}(t)]; \end{cases} \\
\begin{cases} \Delta_v = \sum_{k=1}^s \Delta_{v_k}, \\ \dot{\Delta}_{v_k} = \begin{cases} \lambda_k [f_2(t) - v_k(t)], & f_2(Q) > v_k(t) \\ 0, & f_2(Q) \leq v_k(t); \end{cases} \end{cases} & \quad (1.11) \\
\dot{\Delta}_w &= f_3(Q).
\end{aligned}$$

Макромодели конструкций типа (1.11) открывают перспективу прогнозирования их работоспособности при эксплуатации по техническому состоянию. Это означает, что на начальном этапе эксплуатации конкретной конструкции снимаются экспериментальные характеристики, которые позволяют перейти от стохастических уравнений, описывающих поведение группы конструкций, к стохастическим уравнениям с определенными значениями случайных величин, относящимся к данной конструкции. В связи с этим можно разработать индивидуальную модель для прогнозирования поведения определенного конструктивного элемента, достоверность которой достаточно высока, поскольку учитываются индивидуальные деформационные свойства изделия в целом (а не свойства материала, распределенные по объему конструктивного элемента).

Несмотря на то, что в настоящем обзоре упор сделан на модели ползучести, еще раз следует отметить, что фундаментальная проблема индивидуального прогнозирования деформационных свойств и длительной прочности выходит за рамки теории ползучести и является одной из центральных проблем современного машиностроения при оценке остаточного ресурса конструктивных элементов по схеме накапливающихся повреждений. Вопрос оценки предельного (остаточного) ресурса и продления межремонтного периода эксплуатации становится особенно актуальным из-за постоянного роста доли оборудования,

которое уже исчерпало свой расчетный или нормативный срок службы. Основываясь на исследованиях индивидуального прогнозирования при ползучести, можно применять аналогичные подходы к описанию различных процессов, развивающихся во времени, таких как трение в узлах сопряжения, оценка остаточного ресурса при усталости для симметричного цикла нагружения и других процессов.

Из приведенного краткого анализа существующих математических моделей можно сделать общий вывод об отсутствии универсальных методов структурной (величина  $s$  в (1.10) и (1.11)) и параметрической идентификации математических моделей типа (1.10) и (1.11) и других, базирующихся на использовании всего спектра экспериментальных данных, в отличие от имеющихся эвристических методов с использованием лишь некоторых конкретно заданных характерных экспериментальных значений (как правило, от двух до четырех-пяти), что позволит со всей математической строгостью оценить адекватность оценок параметров, их устойчивость к помехам, несмещенность. Несмотря на известную идею индивидуального прогнозирования параметров надежности, возникает необходимость в серьезной модификации подходов для моделей, базирующихся на методиках прогнозирования по изделию-лидеру и на основании стохастических моделей типа (1.10) и (1.11), да и другой структуры.

Вышеизложенный материал позволяет сформулировать основные укрупненные задачи настоящего диссертационного исследования:

- 1) разработка новых методов структурной и параметрической идентификации стохастических математических моделей неупругого деформирования, в отличие от известных отличающихся использованием всего массива экспериментальных данных, а не использованием нескольких характерных значений кривых деформирования;
- 2) разработка на базе обобщенных макромоделей элементов конструкций методов оценки показателей надежности на стадии проектирования (назна-

ченный ресурс) и индивидуального остаточного ресурса по схеме накапливающихся необратимых повреждений при эксплуатации по техническому состоянию на основе параметрических и катастрофических (разрушение) критериев отказа;

- 3) проверка достоверности методов структурной и параметрической идентификации и адекватности построенных на их основе математических моделей экспериментальным данным;
- 4) разработка нового программного обеспечения, вычислительных процедур и алгоритмов для реализации разработанных методов и использования математических моделей в расчетной практике.

## Глава 2

# Численный метод структурной и параметрической идентификации математической модели неполной обратимости деформации ползучести

В главе 1 указано, что с позиции теории надежности зависимость для накопления необратимых повреждений и дефектов в элементах конструкций и других объектах во времени имеет три характерных участка: стадия упрочнения (первая стадия), стадия накопления повреждений (дефектов) с постоянной скоростью (вторая стадия) и стадия ускоренного накопления повреждений с монотонно возрастающей скоростью (третья стадия). Качественно такой же характер имеют и кривые одноосной ползучести материала. Поэтому в этой главе общая концепция диссертации будет продемонстрирована на примере математических моделей ползучести материалов, а полученные результаты будут обладать определенной общностью и справедливыми для пар трения, условий много- и малоциклового усталости и других процессов. Однако нужно учитывать, что для многих ответственных (уникальных) объектов наличие третьей стадии не допускается в силу быстрого (иногда — лавинообразного) нарастания скорости накопления поврежденности. В связи с этим допускается эксплуатация только на первых двух стадиях, при этом для некоторых элементов конструкций и других объектов при полном снятии нагрузки наблюдается частичное «залечивание» дефектов, например, в полимерных деталях из вязкоупругого материала. В теории ползучести Ю. П. Самариным предложена теория неполной обратимости деформации, разработанная для первых двух стадий, позволяющая учитывать обратимую компоненту реологической деформации после разгрузки и в частном случае включающая теории упрочнения, течения, вязкоупругости,

т.е. она имеет достаточную общность [92]. Однако методика построения этой модели носит эвристический характер, для определения параметров используются лишь несколько характерных экспериментальных значений и игнорируется весь их спектр, многие этапы методики реализуются «вручную», в частности, графическое определение второй стадии ползучести. В связи с этим полученная аналитическая аппроксимация фактически не имеет отношения к математическому ожиданию процесса ползучести, параметры модели являются детерминированными и получить их строгие математические оценки с точки зрения математической статистики и теории вероятности невозможно. Поэтому в данной главе ставится задача решения проблемы структурной и параметрической идентификации параметров математической модели неполной обратимости деформации ползучести при наличии первых двух стадий ползучести и на стадии упрочнения (наличие только первой стадии) с последующим обобщением полученных результатов на другие процессы. Задача сводится к нелинейному регрессионному анализу определения оценок случайных параметров на основе временных рядов последовательности результатов наблюдений деформации ползучести при различных постоянных напряжениях с использованием разностных уравнений. Полученные соотношения между коэффициентами разностного уравнения и параметрами нелинейной регрессии позволяет свести задачу к оценке коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели. Разработаны соответствующие итерационные алгоритмы уточнения оценок параметров с любой заданной точностью. Материалы данной главы излагаются в соответствии с публикациями автора данной работы [8, 9, 77].

## 2.1. Численный метод параметрической идентификации аппроксимационных зависимостей кривых ползучести при постоянных напряжениях в пределах первых двух стадий

В соответствии с одномерной теорией неполной обратимости деформации ползучести при переменных напряжениях  $\sigma = \sigma(t) \geq 0$  при наличии первой и второй стадий имеем следующую математическую модель [92] (конкретизация модели (1.10), представленной в главе 1):

$$\begin{aligned}
 p(t) &= u(t) + v(t) + w(t); \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 u(t) = \sum_{i=1}^s u_i(t); \\
 \dot{u}_i(t) = \alpha_i \left[ \beta b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) - u_i(t) \right]; \\
 v(t) = \sum_{i=1}^s v_i(t), \\
 \dot{v}_i(t) = \begin{cases} \alpha_i \left[ (1 - \beta) b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) - v_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) \right]; \\ (1 - \beta) b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) > v_i(t); \\ 0, (1 - \beta) b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) \leq v_i(t); \end{cases} \\
 \dot{w}(t) = f \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right),
 \end{array} \right. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

где  $p(t)$  — деформации ползучести;  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$  — вязкоупругая (обратимая), вязкопластическая и вязкая компоненты  $p(t)$  соответственно;  $u_i(t)$ ,  $v_i(t)$  — компоненты вязкоупругой и вязкопластической компонент соответственно;  $\sigma_*$ ,  $\alpha_i$ ,  $b_i$ ,  $\beta \in [0, 1]$  — параметры модели;  $\varphi_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)$  и  $f \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)$  — функции от безразмерных напряжений.

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (2.1) имеют вид:

$$u(0) = v(0) = w(0) = 0.$$

Из (2.1) следует, что  $u(t) + v(t)$  описывает деформацию, накопленную на первой стадии ползучести при постоянном напряжении, при этом в частных случаях при  $\beta = 1$  эта деформация полностью обратима после разгрузки, а при  $\beta = 0$  — полностью необратима.

Исходной информацией для определения параметров и функций соотношений (2.1) являются экспериментально полученные кривые стационарной ползучести при действии постоянных (но различных) напряжений с последующей разгрузкой, т.е.

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^j, 0 < t \leq T, \\ 0, t > T, j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

$m$  — количество кривых ползучести,  $\sigma^j = \text{const}$ . Величина  $\sigma_*$  в (2.1) полагается равной одному из напряжений  $\sigma^j$ , т.е.,  $\sigma_* = \sigma^r$  ( $1 \leq r \leq m$ ).

Для применения модели (2.1) необходимо принять следующие ограничения: материал является нестареющим; напряжение  $\sigma(t)$  не изменяет знака и не достигает предела текучести; третья стадия отсутствует; температура постоянная.

При постоянном напряжении  $\sigma = \sigma^j = \text{const}$  ( $0 \leq t \leq T$ ) интегрирование (2.1) дает аналитическое выражение для кривой ползучести вида

$$p(t) = \sum_{i=1}^s a_i [1 - \exp(-\alpha_i t)] + ct, \quad (2.2)$$

где  $a_i = b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma^j}{\sigma_*} \right)$ ,  $c = f \left( \frac{\sigma^j}{\sigma_*} \right)$ .

Ставится задача достоверной оценки параметров аппроксимации (2.2) по результатам эксперимента  $p(t_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , где  $N$  — объем выборки результатов наблюдений, полученных в ходе промышленного или научно-техниче-

ского эксперимента. Аппроксимация (2.2) содержит  $2s + 1$  параметров (как правило, количество экспоненциальных составляющих  $s \leq 3$ ), достоверная оценка которых по результатам наблюдений является основной проблемой параметрической идентификации. При этом одновременно решается задача структурной идентификации, под которой понимается оценка числа экспоненциальных составляющих  $s$  в модели (2.2).

Одним из известных методов решения этой задачи является метод, основанный на последовательном выделении экспоненциальных составляющих при аппроксимации кривых ползучести [90]. Однако у этого метода есть ряд значительных недостатков: функциональная зависимость, описывающая экспериментальную кривую ползучести, должна удовлетворять требованиям выпуклости и монотонности, что не всегда выполняется в практике эксперимента. Кроме того, требуется предварительное применение методов непараметрического выравнивания экспериментальных данных и интерполяции к предварительно сглаженным данным, что может существенно исказить оценки параметров экспоненциальных составляющих при наличии случайной помехи в результатах наблюдений. Однако основным недостатком этого метода является детерминированный подход к решению задачи идентификации с использованием некоторого количества характерных точек дискретной экспериментальной зависимости для деформации ползучести [34].

Устранить указанный недостаток можно на основе численных методов нелинейного регрессионного анализа [25, 112]. При использовании данного подхода задача параметрической идентификации решается на основе нелинейной регрессионной зависимости, построенной на основе функциональной зависимости (2.2):

$$y_k = \sum_{i=1}^s a_i (1 - \exp(-\alpha_i t_k)) + ct_k + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (2.3)$$

где  $y_k = p(t_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  — результаты эксперимента объемом  $N$ ;  $\varepsilon_k$  — случайное возмущение в результатах наблюдений, которое считаем нормально

распределенным, значения дисперсии  $\sigma_\varepsilon^2$  в каждый момент времени одинаковы и не коррелированы, математическое ожидание  $M[\varepsilon_k] = 0$ . При этом среднеквадратичные оценки параметров модели (2.3) находятся из условия минимизации величины отклонения построенной модели  $\hat{y}_k = \sum_{i=1}^s \hat{a}_i (1 - \exp(-\hat{a}_i t_k)) + \hat{c} t_k$  от результатов наблюдения  $y_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ :

$$\|y - \hat{y}\|^2 = \|e\|^2 \rightarrow \min. \quad (2.4)$$

Из-за нелинейности регрессионной модели (2.3) возникает основная проблема при оценивании параметров модели — проблема выбора начального приближения вектора оценок, обеспечивающего сходимость итерационной процедуры уточнения среднеквадратичных оценок к параметрам, удовлетворяющим критерию (2.4). Кроме того, большое число идентифицируемых переменных, а также неравномерность вклада различных экспоненциальных составляющих в наблюдаемый выходной сигнал, может привести к решению проблемы вычислительной устойчивости оценок, без решения которой невозможно не только обеспечить достоверность результатов, но даже реализовать необходимые алгоритмы вычислений.

В работах [34, 36] задача параметрической идентификации аппроксимации кривой ползучести с экспоненциальным ядром решается на основе разностных уравнений. При использовании данного метода строится модель временного ряда, описывающая последовательность результатов наблюдений деформации ползучести. Известные соотношения между коэффициентами разностного уравнения и параметрами нелинейной регрессии позволяют свести задачу к оценке коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели [35]. Данный подход позволяет не только решить проблему выбора начального приближения вектора оценок, но и непосредственно находить оценки параметров модели кривой ползучести, а также проводить статистический анализ результатов вычислений.

По сравнению с известным методом [92], построенная на основе разност-

ных уравнений модель более адекватна результатам наблюдений, среднеквадратичные оценки параметров более достоверны и для них могут быть найдены доверительные интервалы, однако, не смотря на это, проблема устойчивости вычисления оценок остается по-прежнему актуальной. Кроме того, метод [34, 36] не позволяет решать задачу структурной идентификации — определить число экспоненциальных составляющих в модели на основе статистических методов обработки результатов наблюдений.

В данной главе рассматривается новый численный метод оценки параметров математической модели ползучести (2.1), в котором учтены основные достоинства обоих известных методов:

- последовательное выделение в соотношении (2.3) каждой экспоненциальной составляющей  $a_i \exp(-\alpha_i t_k)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , как в известном методе [92];
- параметрическая идентификация на основе разностных уравнений каждой отдельной экспоненциальной составляющей, в том числе статистический анализ результатов расчета.

Такой подход позволяет не только существенно повысить устойчивость вычислений, а, следовательно, и эффективность оценок параметров  $a_i$  и  $\alpha_i$ , но также дает возможность определить количество составляющих экспонент, в совокупности обеспечивающих заданную адекватность построенной аппроксимации  $\hat{y}(t)$  результатам эксперимента (например, не менее  $R^2 = 97\%$ , где  $R^2$  — коэффициент детерминации).

Учитывая, что в алгоритме используются разностные уравнения, описывающие экспоненциальные составляющие, то перед его применением следует провести предварительную обработку кривой ползучести, которая заключается в формировании равномерной выборки результатов эксперимента  $y_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$ , с шагом  $\tau$ , равным наименьшему промежутку времени измерений деформации ползучести. Объем выборки  $N$ , сформированной в ре-

зультате предварительной обработки, вычисляется по формуле  $N = \left\lceil \frac{t_{\max}}{\tau} \right\rceil$ , где  $t_{\max}$  — заданное время наблюдений.

На первом этапе разработанного численного метода строится линейная аппроксимация второй стадии ползучести, которая задается соотношением

$$\hat{y}_{lk} = A + ct_k. \quad (2.5)$$

В равенстве (2.5) параметр  $A$  равен сумме коэффициентов в экспоненциальных составляющих:  $A = \sum_{i=1}^s a_i$ . Параметрическая идентификация линейной модели (2.5) проводится на множестве точек  $t_k$ ,  $k = \overline{n_1, N-1}$ , в которых экспоненциальной составляющей можно пренебречь:

$$y_k = A - \sum_{i=1}^s a_i \exp(-\alpha_i t_k) + ct_k + \varepsilon_k \approx A + ct_k + \varepsilon_k, \quad k = \overline{n_1, N-1}. \quad (2.6)$$

Момент времени  $t_k$  ( $k \geq n_1$ ), начиная с которого экспоненциальные составляющие в (2.2) и (2.3) считаются полностью затухающими и не влияют на вторую стадию, определяется из условия:

$$\frac{\Delta y'_k}{\max |y'_k|} \approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{y_1} < 0.001, \quad k = \overline{2, N-1}.$$

Среднеквадратичные оценки параметров линейной регрессии (2.6) находятся из условия  $\|y - \hat{y}_l\|^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} (y_k - \hat{y}_{lk})^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} (y_k - \hat{A} - \hat{c}t_k)^2 \rightarrow \min$  на основе решения нормальной системы уравнений:

$$\begin{cases} \hat{A} \cdot (N - n_1) + \hat{c} \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k = \sum_{k=n_1}^{N-1} y_k; \\ \hat{A} \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k + \hat{c} \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k y_k \end{cases}$$

по формулам

$$\hat{A} = \frac{\sum_{k=n_1}^{N-1} y_k \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 - \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k y_k \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k}{(N - n_1) \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 - \left( \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k \right)^2}, \quad (2.7)$$

$$\hat{c} = \frac{(N - n_1) \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k y_k - \sum_{k=n_1}^{N-1} y_k \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k}{\sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 - \left( \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k \right)^2}. \quad (2.8)$$

Результатом вычислений, выполненных на первом этапе алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация для второй стадии деформации ползучести:

$$\hat{y}_{lk} = \hat{A} + \hat{c}t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (2.9)$$

На втором этапе находятся среднеквадратичные оценки параметров первой экспоненциальной составляющей:

$$f_k = -a_1 \exp[-\alpha_1 \tau(k - 1)], \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.10)$$

Сначала формируется выборка результатов расчета  $y_k^{(1)} = y_k - \hat{y}_{lk}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Среднеквадратичные оценки параметров  $a_1$  и  $\alpha_1$  вычисляются на основе нелинейной регрессии

$$y_k^{(1)} = -a_1 \exp(-\alpha_1 \tau k) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (2.11)$$

из условия  $\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ y_k^{(1)} + \hat{a}_1 \exp(-\hat{\alpha}_1 \tau k) \right]^2 \rightarrow \min$ .

Данная задача в разработанном методе решается с использованием разностного уравнения, построенного на основе дискретной функции (2.10):

$$\begin{cases} f_1 = \lambda_2; \\ f_k = \lambda_1 f_{k-1}, \quad k = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.12)$$

где  $\lambda_1 = \exp(-\alpha_1\tau)$ ,  $\lambda_2 = -a_1$ .

Введем обозначение:  $z_k = y_k^{(1)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда с учетом равенства  $f_{k+1} = z_k - \varepsilon_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , из системы (2.12) получаем:

$$\begin{cases} z_0 = \lambda_2 + \eta_0; \\ z_k = \lambda_1 z_{k-1} + \eta_k, \quad k = \overline{1, N-1}; \\ \eta_0 = \varepsilon_0; \\ \eta_k = \varepsilon_k - \lambda_1 \varepsilon_{k-1}, \quad k = \overline{1, N-1} \end{cases} \quad (2.13)$$

или в матричной форме:

$$z = F\lambda + \eta, \quad (2.14)$$

где  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})^T$ ,  $\eta = (\varepsilon_0, \varepsilon_1 - \lambda_1 \varepsilon_0, \varepsilon_2 - \lambda_1 \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1} - \lambda_1 \varepsilon_{N-2})^T$ ,  
 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ ,  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_0 & z_1 & \dots & z_{N-2} \end{bmatrix}^T$ ,  $T$  — символ транспонирования.

Из условия  $\|\hat{\eta}\|^2 = \|z - F\lambda\|^2 \rightarrow \min$  находятся начальные оценки параметров нелинейной регрессии (2.13) по формуле  $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T z$ , откуда получаем оценки:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} z_k z_{k-1}}{\sum_{k=1}^{N-1} z_{k-1}^2}, \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = z_0. \quad (2.15)$$

Для уточнения среднеквадратичных оценок параметров математической модели (2.13) с учетом выполнения условия  $\|\hat{\varepsilon}\|^2 \rightarrow \min$  рассмотрим нелинейную регрессию относительно коэффициентов разностного уравнения:

$$z_{k-1} = f_k(\lambda_1, \lambda_2) + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.16)$$

где нелинейная дискретная функция  $f_k(\lambda_1, \lambda_2)$  описывается рекуррентной формулой (2.12).

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (2.16) описывается формулой [25, 35, 112]:

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \hat{\lambda}^{(i)} + \left[ \left( W \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) \right)^T W \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) \right]^{-1} \left( W \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) \right)^T \left[ y^{(1)} - f \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) \right],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

где  $W(\lambda_1, \lambda_2)$  — матрица Якоби размера  $[N \times 2]$ , элементы которой имеют вид:

$$w_{1k}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial f_k(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \begin{cases} 0, & k = 1; \\ f_{k-1}(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_1 w_{1,k-1}(\lambda_1, \lambda_2), & k = \overline{2, N}; \end{cases} \quad (2.18)$$

$$w_{2k}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial f_k(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \begin{cases} 0, & k = 1; \\ \lambda_1 w_{2,k-1}(\lambda_1, \lambda_2), & k = \overline{2, N}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Начальное приближение в рекуррентной формуле (2.17) находится по формулам (2.15). Процесс уточнения среднеквадратичных оценок  $\hat{\lambda}^{(i)}$  заканчивается при выполнении условия

$$\|\hat{\lambda}^{(i+1)} - \hat{\lambda}^{(i)}\| < 0.001 \|\hat{\lambda}^{(i)}\|. \quad (2.20)$$

С учетом полученных среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения можно найти оценки параметров первой экспоненциальной составляющей:

$$\hat{a}_1 = -\hat{\lambda}_2^{(i)}, \quad \hat{\alpha}_1 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)} \quad (2.21)$$

и записать ее зависимость в виде:

$$\hat{y}_k^{(1)} = -\hat{a}_1 \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.22)$$

На основе полученных выше результатов можно перейти к решению задачи уточнения среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (2.3) при использовании одной экспоненциальной составляющей.

На этом шаге с учетом найденных на предыдущем шаге оценок коэффициентов разностного уравнения  $\hat{\lambda}_1^{(i)}$  и  $\hat{\lambda}_2^{(i)}$  (формула (2.17)), а также оценки  $\hat{c}$  (формула (2.8)), вычисляется вектор  $\hat{\mu}^{(0)} = \left( \hat{a}_1^{(0)}, \hat{\alpha}_1^{(0)}, \hat{c}^{(0)} \right)^T$  начальных оценок параметров функциональной зависимости:

$$f_k(\mu) = a_1 [1 - \exp(-\alpha_1 t_k)] + ct_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (2.23)$$

по формулам:

$$\hat{a}_1^{(0)} = -\hat{\lambda}_2^{(i)}, \quad \hat{\alpha}_1^{(0)} = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)}, \quad \hat{c}^{(0)} = \hat{c}. \quad (2.24)$$

Находятся элементы матрицы Якоби  $W(\mu)$  размера  $[N \times 3]$ :

$$w_{k1}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_1} = 1 - \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (2.25)$$

$$w_{k2}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_1} = a_1 t_k \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (2.26)$$

$$w_{k3}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial c} = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.27)$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (2.3) при использовании одной экспоненциальной составляющей описывается формулой:

$$\hat{\mu}^{(i+1)} = \hat{\mu}^{(i)} + \left[ \left( W \left( \hat{\mu}^{(i)} \right) \right)^T W \left( \hat{\mu}^{(i)} \right) \right]^{-1} \left( W \left( \hat{\mu}^{(i)} \right) \right)^T \left[ y - f \left( \hat{\mu}^{(i)} \right) \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Процесс уточнения среднеквадратичных оценок  $\hat{\mu}^{(i)}$  заканчивается при выполнении условия

$$\| \hat{\mu}^{(i+1)} - \hat{\mu}^{(i)} \| < 0.001 \| \hat{\mu}^{(i)} \|. \quad (2.29)$$

Результатом расчетов, выполненных на этом шаге алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация кривой ползучести с одной экспоненциальной составляющей:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)] + \hat{c} t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (2.30)$$

в которой оценки параметров соответствуют элементам вектора  $\hat{\mu}^{(i+1)}$ :  $\hat{a}_1 = \hat{\mu}_1^{(i+1)}$ ,  $\hat{\alpha}_1 = \hat{\mu}_2^{(i+1)}$ ,  $\hat{c} = \hat{\mu}_3^{(i+1)}$ .

Для вычисления дисперсий величин  $a_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $c$  находится матрица  $V[\mu] = (W^T W)^{-1} s_{\text{ост}}^2$ , где  $s_{\text{ост}}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 / (N - N_1)$ ,  $N_1 = 3$  — число параметров.

Диагональные элементы  $V_{11}(\mu) = D(a_1)$ ,  $V_{22}(\mu) = D(\alpha_1)$ ,  $V_{33}(\mu) = D(c)$  и задают дисперсию параметров  $a_1$ ,  $\alpha_1$  и  $c$ .

На заключительном шаге второго этапа решается задача проверки адекватности построенной модели результатам наблюдений и делается вывод о целесообразности использования в модели других экспоненциальных составляющих. Для этого могут быть выбраны различные критерии адекватности модели.

Например, можно использовать относительную величину среднеквадратической нормы отклонения аппроксимации (2.30) от данных эксперимента:

$$h, \% = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2}{\sum_{k=0}^{N-1} y_k^2}} \cdot 100\%. \quad (2.31)$$

В качестве другого критерия адекватности модели можно использовать «коэффициент детерминации»  $R^2$ , %, который определяется через выборочный коэффициент множественной корреляции (коэффициент корреляции меж-

ду случайными векторами  $y$  и  $\hat{y}$ ):

$$R = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y}) (\hat{y}_k - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (\hat{y}_k - \bar{\hat{y}})^2}}. \quad (2.32)$$

Условием адекватности построенной модели результатам эксперимента можно считать выполнение одного из неравенств:

$$h, \% \leq 3\%, \quad R^2 \geq 97\%. \quad (2.33)$$

Если условия (2.33) не выполняются, то следует перейти к третьему этапу численного метода — выделению в соотношении для кривой ползучести (2.3) второй экспоненциальной составляющей:  $a_2 [1 - \exp(-\alpha_2 t_k)]$ .

При решении этой задачи используются результаты, полученные на первых двух этапах: построенные аппроксимации второй стадии ползучести (2.9) и первой экспоненциальной составляющей (2.22). На первом шаге этого этапа формируется выборка результатов расчета  $y_k^{(2)} = y_k - \hat{y}_{lk} - \hat{y}_k^{(1)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Для этой выборки рассматривается аппроксимация второй экспоненциальной составляющей вида:

$$f_k = -a_2 \exp[-\alpha_2 \tau(k-1)], \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.34)$$

Среднеквадратичные оценки параметров  $a_2$  и  $\alpha_2$  вычисляются на основе нелинейной регрессии

$$y_k^{(2)} = -a_2 \exp(-\alpha_2 \tau k) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.35)$$

из условия  $\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [y_k^{(2)} + \hat{a}_2 \exp(-\hat{\alpha}_2 \tau k)]^2 \rightarrow \min$ .

Эта задача решается на основе алгоритма, описанного выше на втором этапе численного метода, с использованием формул (2.12)–(2.20) с учетом обозначений  $z_k = y_k^{(2)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\lambda_1 = \exp(-\alpha_2 \tau)$  и  $\lambda_2 = -a_2$ .

С учетом полученных среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения находим оценки параметров второй экспоненциальной составляющей:

$$\hat{a}_2 = -\hat{\lambda}_2^{(i)}, \quad \hat{\alpha}_2 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)}, \quad (2.36)$$

что позволяет записать ее выражение в виде

$$\hat{y}_k^{(2)} = -\hat{a}_2 \exp(-\hat{\alpha}_2 \tau k) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.37)$$

На основе полученных результатов переходим к задаче уточнения среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (2.3) при использовании двух экспоненциальных составляющих.

На этом шаге с учетом найденных выше оценок параметров экспоненциальных составляющих (формулы (2.21) и (2.36)), а также оценки  $\hat{c}$  (2.8), находится вектор начальных оценок  $\hat{\mu}^{(0)} = \left( \hat{a}_1^{(0)}, \hat{\alpha}_1^{(0)}, \hat{a}_2^{(0)}, \hat{\alpha}_2^{(0)}, \hat{c}^{(0)} \right)^T$  параметров функциональной зависимости:

$$f_k(\mu) = a_1 [1 - \exp(-\alpha_1 t_k)] + a_2 [1 - \exp(-\alpha_2 t_k)] + ct_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.38)$$

по формулам:  $\hat{a}_1^{(0)} = \hat{a}_1$ ,  $\hat{\alpha}_1^{(0)} = \hat{\alpha}_1$ ,  $\hat{a}_2^{(0)} = \hat{a}_2$ ,  $\hat{\alpha}_2^{(0)} = \hat{\alpha}_2$ ,  $\hat{c}^{(0)} = \hat{c}$ .

Находятся элементы матрицы Якобы  $W(\mu)$  размера  $[N \times 5]$ :

$$w_{k1}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_1} = 1 - \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.39)$$

$$w_{k2}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_1} = a_1 t_k \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.40)$$

$$w_{k3}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_2} = 1 - \exp(-\alpha_2 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.41)$$

$$w_{k4}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_2} = a_2 t_k \exp(-\alpha_2 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (2.42)$$

$$w_{k5}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial c} = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.43)$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (2.3) при использовании двух экспоненциальных составляющих описывается формулой (2.28). Процесс уточнения среднеквадратичных оценок  $\hat{\mu}^{(i)}$  заканчивается при выполнении условия (2.29). Результатом расчетов, выполненных на этом шаге алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация кривой ползучести с двумя экспоненциальными составляющими:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)] + \hat{a}_2 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_2 t_k)] + \hat{c} t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.44)$$

в которой оценки параметров соответствуют элементам вектора  $\hat{\mu}^{(i+1)}$ :  $\hat{a}_1 = \hat{\mu}_1^{(i+1)}$ ,  $\hat{\alpha}_1 = \hat{\mu}_2^{(i+1)}$ ,  $\hat{a}_2 = \hat{\mu}_3^{(i+1)}$ ,  $\hat{\alpha}_2 = \hat{\mu}_4^{(i+1)}$ ,  $\hat{c} = \hat{\mu}_5^{(i+1)}$ .

Для вычисления дисперсий величин  $a_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha_2$  и  $c$  находится матрица  $V[\mu] = (W^T W)^{-1} s_{\text{ост}}^2$ , где  $N_1=5$  в формуле для вычисления  $s_{\text{ост}}^2$ . Диагональные элементы матрицы  $V(\mu)$ :  $V_{11}(\mu) = D(a_1)$ ,  $V_{22}(\mu) = D(\alpha_1)$ ,  $V_{33}(\mu) = D(a_2)$ ,  $V_{44}(\mu) = D(\alpha_2)$ ,  $V_{55}(\mu) = D(c)$  и задают дисперсию величин  $a_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha_2$  и  $c$ .

На заключительном шаге третьего этапа решается задача проверки адекватности построенной модели результатам наблюдений и делается вывод о целесообразности использования в модели третьей экспоненциальной составляющей. Для этого следует использовать критерии адекватности модели, представленными соотношениями (2.31) или (2.32). Если условия (2.33) не выполняются, то следует перейти к четвертому этапу численного метода — выделению в соотношении для кривой ползучести (2.3) третьей экспоненциальной составляющей:  $a_3 [1 - \exp(-\alpha_3 t_k)]$ .

Процедура вычисления среднеквадратичных оценок параметров третьей экспоненциальной составляющей аналогична алгоритмам, описанным выше на втором и третьем этапах численного метода. В основе этой процедуры лежит выборка результатов расчета:  $y_k^{(3)} = y_k - \hat{y}_{lk} - y_k^{(1)} - y_k^{(2)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . При уточнении среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (2.3) с тремя экспоненциальными составляющими на основе итерационной про-

цедуры (2.28) матрица Якоби  $W(\mu)$  имеет размер  $[N \times 7]$  и содержит уже семь столбцов  $w_{kj}$ ,  $j = \overline{1, 7}$ , первые четыре из которых описываются формулами (2.39)–(2.42), последний седьмой — формулой (2.43), а пятый и шестой — формулами:

$$w_{k5}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_3} = 1 - \exp(-\alpha_3 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (2.45)$$

$$w_{k6}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_3} = a_3 t_k \exp(-\alpha_3 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.46)$$

Далее алгоритм аналогичен случаю построения первых двух экспонент.

## 2.2. Численный метод идентификации параметров математической модели для описания стадии упрочнения

Используя теорию неполной обратимости деформации ползучести при переменных напряжениях  $\sigma = \sigma(t) \geq 0$  при наличии только стадии упрочнения (первой стадии ползучести на кривой ползучести), имеем следующую математическую модель, которая является частным случаем базовой модели (2.1):

$$p(t) = u(t) + v(t),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = \sum_{i=1}^s u_i(t), \\ \dot{u}_i(t) = \alpha_i \left[ \beta b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) - u_i(t) \right], \\ v(t) = \sum_{i=1}^s v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = \begin{cases} \alpha_i \left[ (1 - \beta) b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) - v_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) \right], \\ (1 - \beta) b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) > v_i(t), \\ 0, (1 - \beta) b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) \leq v_i(t). \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Здесь обозначения в (2.47) такие же, как и в базовой модели (2.1)

Из (2.47) получаем, что выражение  $u(t) + v(t)$  описывает деформацию, накопленную на первой стадии ползучести при постоянном напряжении, при  $\beta = 1$  эта деформация полностью обратима после разгрузки, что отмечено ранее, а при  $\beta = 0$  — полностью необратима.

Кривые ползучести, полученные экспериментально при постоянном напряжении с последующей разгрузкой, служат основой для определения параметров модели (2.47):

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^j, 0 < t \leq T, \\ 0, t > T, j = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где (как указывалось выше)  $m$  — количество кривых ползучести,  $\sigma^j = \text{const}$ . Величина  $\sigma_*$  в (2.47) полагается равной одному из напряжений  $\sigma^j$ , т.е.,  $\sigma_* = \sigma^r$  ( $1 \leq r \leq m$ ).

При постоянном напряжении  $\sigma = \sigma^j = \text{const}$  ( $0 \leq t \leq T$ ) интегрирование (2.1) дает аналитическое выражение для кривой ползучести вида

$$p(t) = \sum_{i=1}^s a_i [1 - \exp(-\alpha_i t)], \quad (2.48)$$

где  $a_i = b_i \varphi_i \left( \frac{\sigma^j}{\sigma_*} \right)$ .

Ставится задача достоверной оценки параметров аппроксимации (2.47) по результатам эксперимента  $p(t_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , где  $N$  — объем выборки результатов наблюдений, полученных в ходе промышленного или научно-технического эксперимента. Аппроксимация (2.48) содержит  $2s$  параметров (как правило, при обработке экспериментальных данных для реальных материалов количество экспоненциальных составляющих  $s \leq 3$ ), достоверная оценка которых по результатам наблюдений является основной проблемой параметрической идентификации. При этом одновременно решается задача структурной идентификации, под которой (как отмечено выше) понимается оценка числа

экспоненциальных составляющих  $s$  в модели (2.48).

Разработан численный метод, в котором задача параметрической идентификации решается на основе нелинейной регрессионной зависимости (2.48):

$$y_k = \sum_{i=1}^s a_i (1 - \exp(-\alpha_i t_k)) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (2.49)$$

где  $y_k = p(t_k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ) — результаты эксперимента объемом  $N$ ;  $\varepsilon_k$  — случайное возмущение в результатах наблюдений (как и при анализе соотношения (2.24)). Будем считать, что составляющая  $\varepsilon_k$  нормально распределена, значения дисперсии  $\sigma_\varepsilon^2$  в каждый момент времени одинаковы и не коррелированы, математическое ожидание  $M[\varepsilon_k] = 0$ .

Среднеквадратичные параметры модели (2.49) находятся из условия минимизации величины отклонения построенной модели  $\hat{y}_k = \sum_{i=1}^s \hat{a}_i (1 - \exp(-\hat{\alpha}_i t_k))$  от результатов наблюдения  $y_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ :

$$\|y - \hat{y}\|^2 = \|e\|^2 \rightarrow \min. \quad (2.50)$$

Так как разработанный численный метод основан на разностных уравнениях, которые описывают экспоненциальные составляющие модели, то перед его применением следует провести предварительную обработку кривой ползучести, которая заключается в формировании равномерной выборки результатов эксперимента  $y_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$ , с шагом  $\tau$ , равным наименьшему промежутку времени измерений деформации ползучести. Объем выборки  $N$ , сформированной в результате предварительной обработки, вычисляется по формуле  $N = \left\lceil \frac{t_{\max}}{\tau} \right\rceil$ , где  $t_{\max}$  — заданной время наблюдений. Функциональная зависимость, описывающая экспериментальные данные должна удовлетворять требованиям монотонности и выпуклости.

Рассмотрим основные этапы разработанного численного метода. На первом этапе находим начальные оценки параметров первой экспоненциальной составляющей  $a_1^{(0)}$  и  $\alpha_1^{(0)}$  на основе среднеквадратичной оценки параметра  $a_1$ .

Начальное приближение параметра  $a_1^{(0)}$  имеет вид:

$$a_1^{(0)} = y_{N-1}.$$

Обозначим  $z_k = \exp(-\alpha_1 t_k)$ , из  $y_k = a_1 [1 - \exp(-\alpha_1 t_k)]$  получаем

$$z_k = 1 - \frac{y_k}{a_1^{(0)}} = 1 - \frac{y_k}{y_{N-1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-2. \quad (2.51)$$

Учитывая случайное возмущение в экспериментальных наблюдениях  $\varepsilon_k$ , перепишем  $z_k$ :  $z_k = \exp(-\alpha_1 t_k) + \varepsilon_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-2$ , и разделим левую и правую часть на  $z_k$ :

$$1 - \frac{\varepsilon_k}{z_k} = \frac{\exp(-\alpha_1 t_k)}{z_k};$$

$$\ln z_k = -\alpha_1 t_k - \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_k}{z_k} \right) \approx -\alpha_1 t_k + \frac{\varepsilon_k}{z_k}.$$

Среднеквадратичная оценка параметра  $\alpha_1$  находится из условия минимизации  $\|e\|^2 = \sum_{k=0}^{N-2} e_k^2 \approx \sum_{k=0}^{N-2} (z_k \ln z_k + \alpha_1 t_k z_k)^2 \rightarrow \min$ .

Начальное приближение параметра  $\alpha_1$ :

$$\hat{\alpha}_1^{(0)} = -\frac{\sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 t_k \ln z_k}{\sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 t_k^2}.$$

На следующем этапе численного метода происходит уточнение оценок параметров первой экспоненциальной составляющей по сглаженной кривой на основе регрессионной модели в форме разностных уравнений.

Введем нелинейную функциональную зависимость  $f_k(\lambda) = a_1 [1 - \lambda_1^k]$ , где  $\lambda_1 = \exp(-\alpha\tau)$ , тогда получим:

$$f_k = a_1 [1 - \lambda_1^k] = a_1 - a_1 \lambda_1^k,$$

$$f_{k-1} = a_1 - a_1 \lambda_1^k \lambda_k^{-1}.$$

Выражаем  $a_1 \lambda_1^k = (a_1 - f_{k-1}) \lambda_1$  и получаем:

$$f_k = a_1 - a_1 \lambda_1^k = a_1 - (a_1 - f_{k-1}) \lambda_1, \quad f_k = \lambda_1 f_{k-1} + a_1 (1 - \lambda_1). \quad (2.52)$$

Из (2.52) получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_k = \lambda_1 f_{k-1} + \lambda_2, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \tau), \\ \lambda_2 = a_1 (1 - \lambda_1). \end{cases}$$

Регрессионная модель на основе разностного уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} y_k = f_k(\lambda) + \varepsilon_k, \\ f_0 = 0, \\ f_k = \lambda_1 f_{k-1} + \lambda_2, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T, \\ \lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \tau), \\ \lambda_2 = a_1 (1 - \lambda_1). \end{cases} \quad (2.53)$$

Начальные оценки параметров нелинейной регрессионной модели (2.53) находим с учетом выполнения условия  $\|e\|^2 \rightarrow \min$ .

Начальное приближение вектора оценок параметров модели (2.53) имеет вид:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \exp(-\hat{\alpha}_1^{(0)} \tau), \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = \hat{a}_1^{(0)} (1 - \hat{\lambda}_1^{(0)}). \quad (2.54)$$

Параметрическая линеаризация нелинейной зависимости  $f_k(\lambda)$  имеет вид:

$$f_k(\lambda) = f_k(\hat{\lambda}^{(i)}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_k(\hat{\lambda}^{(i)})}{\partial \lambda_j} \cdot (\lambda_j - \hat{\lambda}_j^{(i)}).$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (аналогично (2.28)) описывается формулой [25, 35, 112]:

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \hat{\lambda}^{(i)} + \left[ \left( W \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) \right)^T W \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) \right]^{-1} \left( W \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) \right)^T \left[ y_k - f_k \left( \hat{\lambda}_j^{(i)} \right) \right],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.55)$$

где  $W(\lambda)$  — матрица Якоби размера  $[N \times 2]$ , элементы которой имеют вид:

$$w_{k+1,1} = \frac{\partial f_k(\lambda)}{\partial \lambda_1} = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ f_{k-1} + \lambda_1 w_{k,1}, & k = \overline{1, N-1}; \end{cases}$$

$$w_{k+1,2} = \frac{\partial f_k(\lambda)}{\partial \lambda_2} = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ 1 + \lambda_1 w_{k,2}, & k = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

Начальное приближение в рекуррентной формуле (2.55) находится по формулам (4.3). Уточнение среднеквадратичных оценок (аналогично (2.29)) заканчивается при выполнении условия

$$\|\hat{\lambda}^{(i+1)} - \hat{\lambda}^{(i)}\| < 0.001 \|\hat{\lambda}^{(i)}\|. \quad (2.56)$$

Результатом расчетов на этом шаге алгоритма является построенная аппроксимация кривой ползучести с одной экспоненциальной составляющей:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)], \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.57)$$

в которой оценки параметров задаются формулами:

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{\lambda}_2^{(i+1)}}{1 - \hat{\lambda}_1^{(i+1)}}, \quad \hat{\alpha}_1 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i+1)}. \quad (2.58)$$

Для вычисления дисперсий величин  $a_1$  и  $\alpha_1$  находится матрица  $V[\lambda] = (W^T W)^{-1} s_{\text{ост}}^2$ , где  $s_{\text{ост}}^2 = \sum_{k=1}^{N-1} (e_k - \bar{e})(e_{k-1} - \bar{e}) / (N-2)$ ,  $e_k = y_k - \hat{y}_k$ ,  $\bar{e} = \sum_{k=0}^{N-1} e_k / N$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ .

Диагональные элементы  $V_{11}(\lambda) = D(a_1)$ ,  $V_{22}(\mu) = D(\alpha_1)$  и задают дисперсию параметров  $a_1$  и  $\alpha_1$ .

На заключительном шаге второго этапа решается задача проверки адекватности построенной модели (аппроксимации) результатам наблюдений, и делается вывод о целесообразности использования в модели других экспоненциальных составляющих. Для этого необходимо провести анализ остатков на предмет выявления корреляции в них.

Вычисляем остатки — отклонение модели  $\hat{y}_k$  от результатов эксперимента  $y_k$ :  $e_k = y_k - \hat{y}_k$ , и их среднее арифметическое —  $\bar{e} = \sum_{k=0}^{N-1} e_k / N$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ .

Например, для оценки адекватности аппроксимации можно использовать критерий Дарбина-Уотсона [25]:

$$dw = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} (e_k - e_{k-1})^2}{\sum_{k=0}^N (e_k - \bar{e})^2}. \quad (2.59)$$

В качестве другого критерия адекватности модели можно использовать коэффициент корреляции между остатками  $r$ , % [25]:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} (e_k - \bar{e})(e_{k-1} - \bar{e})}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (e_k - \bar{e})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} (e_{k-1} - \bar{e})^2}} \cdot 100\%. \quad (2.60)$$

Связь между (2.59) и (2.60) можно записать в виде:

$$dw = 2(1 - r), \quad r = 1 - \frac{dw}{2}.$$

Условием адекватности построенной модели результатам эксперимента можно считать не выполнение одного из неравенств:

$$0 \leq dw \leq 1.6, \quad 2.4 \leq dw \leq 4; \quad (2.61)$$

$$-1 \leq r \leq -0.2, \quad 0.2 \leq r \leq 1. \quad (2.62)$$

Если одно из условий (2.61) и (2.62) выполняется, следовательно, существует корреляция между остатками, т.е. необходимо перейти к третьему этапу численного метода — формирование авторегрессионной модели первого порядка с линейным трендом для описания случайного возмущения в регрессионной модели первой экспоненциальной составляющей. Для решения этой задачи необходимо построить модель авторегрессии первого порядка при ненулевом математическом ожидании случайной величины

$$y_k = f_k(\lambda) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

При корреляции в остатках  $\varepsilon_k$  следует использовать обобщенный метод наименьших квадратов. При нулевом математическом ожидании случайной величины  $\varepsilon_k$ :  $M[\varepsilon_k] = 0$ , можно воспользоваться моделью авторегрессии первого порядка:

$$\varepsilon_k = \lambda_3 \varepsilon_{k-1} + v_k. \quad (2.63)$$

Если среднее арифметическое остатков  $\bar{\varepsilon} \neq 0$ , то выдвигаем гипотезу:  $M[\varepsilon_k] \neq 0$ . Прежде чем воспользоваться моделью авторегрессии первого порядка, необходимо центрировать случайную величину  $\varepsilon_k$ , что приведет к изменению вида модели (2.63), а именно, в ней появится постоянная составляющая  $\lambda_4$ , вид которой будет указан ниже в тексте.

Пусть  $M[\varepsilon_k] = m_\varepsilon$ , центрирование случайной величины имеет вид  $\eta_k = \varepsilon_k - m_\varepsilon$ . При этом  $M[\eta_k] = M[\varepsilon_k] - m_\varepsilon = m_\varepsilon - m_\varepsilon = 0$ . Получаем модель вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_k = f_k(\lambda) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \\ M[\varepsilon_k] = m_{\varepsilon_k}, \quad \eta_k = \varepsilon_k - m_\varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \\ \eta_k = \lambda_3 \eta_{k-1} + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1; \\ \eta_0 = 0. \end{array} \right. \quad (2.64)$$

Первый вариант преобразования регрессионной модели (2.64):

$$y_k = f_k(\lambda) + m_\varepsilon + \varepsilon_k - m_\varepsilon$$

$$\begin{cases} y_k = f_k(\lambda) + m_\varepsilon + \eta_k, k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ \eta_0 = 0; \\ \eta_k = \lambda_3 \eta_{k-1} + v_k, k = \overline{1, N-1}; \\ M[\eta_k] = 0. \end{cases}$$

Из условия минимизации невязки  $\|\eta\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k^2 \rightarrow \min$  получаем регрессионную модель:

$$\begin{cases} y_k = f_k(\lambda) + m_\varepsilon + \lambda_3 \eta_{k-1} + v_k; \\ \eta_{k-1} = y_{k-1} - f_{k-1}(\lambda) - m_\varepsilon, k = 1, 2, \dots, N-1; \end{cases}$$

Подставляя выражение  $\eta_{k-1}$  в  $y_k$ , получаем

$$y_k = f_k(\lambda) + m_\varepsilon + \lambda_3 y_{k-1} - \lambda_3 f_{k-1}(\lambda) - \lambda_3 m_\varepsilon + v_k;$$

$$y_k = f_k(\lambda) + \lambda_3 [y_{k-1} - f_{k-1}(\lambda)] + m_\varepsilon (1 - \lambda_3) + v_k.$$

Обозначая  $\lambda_4 = m_\varepsilon (1 - \lambda_3)$ , получаем модель вида

$$\begin{cases} y_0 = f_0(\lambda) = 0, v_0 = 0; \\ y_k = f_k(\lambda) + \lambda_3 [y_{k-1} - f_{k-1}(\lambda)] + \lambda_4 + v_k, k = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

Второй вариант преобразования регрессионной модели:

$$\varepsilon_k - m_\varepsilon = \lambda_3 (\varepsilon_{k-1} - m_\varepsilon) + v_k, k = \overline{1, N-1},$$

$$\varepsilon_k = \lambda_3 \varepsilon_{k-1} + \lambda_4 + v_k, k = \overline{1, N-1}.$$

После преобразований получаем:

$$\begin{cases} y_k = f_k(\lambda) + \varepsilon_k, k = 0, 1, 2, \dots, N-1; \\ \varepsilon_k = \lambda_3 \varepsilon_{k-1} + \lambda_4 + v_k, k = \overline{1, N-1}; \\ \varepsilon_0 = 0. \end{cases}$$

Из условия минимизации невязки  $\|\eta\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k^2 \rightarrow \min$  получаем регрессионную модель:

$$\begin{cases} y_k = f_k(\lambda) + \lambda_3 \varepsilon_{k-1} + \lambda_4 + v_k; \\ \varepsilon_{k-1} = y_{k-1} - f_{k-1}(\lambda), k = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

Подставляя выражение  $\varepsilon_{k-1}$  в  $y_k$ , находим

$$y_k = f_k(\lambda) + \lambda_3 y_{k-1} - \lambda_3 f_{k-1}(\lambda) + \lambda_4 + v_k.$$

Отсюда получаем модель в форме разностного уравнения

$$\begin{cases} y_0 = f_0(\lambda) = 0; \\ v_0 = 0; \\ y_k = f_k(\lambda) + \lambda_3 [y_{k-1} - f_{k-1}(\lambda)] + \lambda_4 + v_k, k = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (2.65)$$

На четвертом этапе необходимо провести процедуру уточнения первой экспоненциальной составляющей на основе описания случайного возмущения моделью авторегрессии первого порядка с постоянной компонентой.

Регрессионная модель имеет вид:

$$\begin{cases} y_k = u_k(\lambda_1, \lambda_2) + \varepsilon_k; \\ \varepsilon_0 = 0; \\ \varepsilon_k = \lambda_3 \varepsilon_{k-1} + \lambda_4 + v_k, k = \overline{1, N-1}; \\ M[v_k] = 0; \\ V[v] = E\sigma_v^2, \end{cases} \quad (2.66)$$

где  $M[v_k]$  — математическое ожидание случайного возмущения  $v_k$ ,  $V[v]$  — матрица дисперсий-ковариаций случайного возмущения.

Преобразуем регрессионную модель (2.66) в разностное уравнение:

$$\varepsilon_k = y_k - u_k, \varepsilon_{k-1} = y_{k-1} - u_{k-1},$$

$$y_k - u_k = \lambda_3 (y_{k-1} - u_{k-1}) + \lambda_4 + v_k.$$

Введем обозначение  $u_k(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 (1 - \lambda_1^k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \tau); \\ \lambda_2 = a_1. \end{cases} \quad (2.67)$$

Из (2.67) следует, что

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{\tau} \ln \lambda_1; \\ a_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

Модель (2.65) можно представить в виде

$$\begin{cases} f_0 = 0; \\ f_k = u_k + \lambda_3 (y_{k-1} - f_{k-1}) + \lambda_4 + v_k, \quad k = \overline{1, N-1}; \\ u_k(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 (1 - \lambda_1^k); \\ \lambda_1 = \exp(-\alpha \tau); \\ \lambda_2 = a_1. \end{cases} \quad (2.68)$$

Начальные оценки параметров нелинейной регрессионной модели (2.68) находим с учетом выполнения условия  $\|v\|^2 \rightarrow \min$ .

Начальное приближение вектора оценок параметров модели (2.68) задается соотношениями:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \exp(-\hat{\alpha}_1^{(0)} \tau), \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = \hat{a}_1^{(0)}, \quad \hat{\lambda}_3^{(0)} = \hat{\lambda}_4^{(0)} = 0. \quad (2.69)$$

Параметрическая линеаризация нелинейной зависимости  $f_k(\lambda)$  имеет вид:

$$f_k(\lambda) = f_k(\hat{\lambda}^{(i)}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_k(\hat{\lambda}^{(i)})}{\partial \lambda_j} \cdot (\lambda_j - \hat{\lambda}_j^{(i)}).$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелиней-

ной регрессии описывается формулой:

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \hat{\lambda}^{(i)} + \left[ \left( W \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) \right)^T W \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) + \alpha^* E \right]^{-1} \left( W \left( \hat{\lambda}^{(i)} \right) \right)^T \left[ y_k - f_k \left( \hat{\lambda}_j^{(i)} \right) \right],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.70)$$

где  $W(\lambda)$  — матрица Якоби размера  $[N \times 4]$ , элементы которой имеют вид:

$$w_{k+1,1} = \frac{\partial f_k(\lambda)}{\partial \lambda_1} = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \frac{\partial u_k}{\partial \lambda_1} - \lambda_3 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial \lambda_1}, & k = \overline{1, N-1}; \end{cases}$$

$$w_{k+1,2} = \frac{\partial f_k(\lambda)}{\partial \lambda_2} = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \frac{\partial u_k}{\partial \lambda_2} - \lambda_3 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial \lambda_2}, & k = \overline{1, N-1}, \end{cases} \quad (2.71)$$

$$w_{k+1,3} = \frac{\partial f_k(\lambda)}{\partial \lambda_3} = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ y_{k-1} - u_{k-1}, & k = \overline{1, N-1}, \end{cases}$$

$$w_{k+1,4} = \frac{\partial f_k(\lambda)}{\partial \lambda_4} = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ 1, & k = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

Параметр  $\alpha^* = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 / [(N-2)(a_1^2 + \alpha_1^2)]$  в (2.70) — параметр регуляризации.

Введем обозначения

$$v_{k,1} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda_1} = -k \lambda_2 \lambda_1^{k-1}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$v_{k,2} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda_2} = 1 - \lambda_1^k, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$v_{k,3} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda_3} = 0, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$v_{k,4} = \frac{\partial u_k}{\partial \lambda_4} = 0, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (2.72)$$

Учитывая обозначения (2.72), элементы матрицы Якоби (2.70) примут вид

$$w_{k+1,1} = v_{k,1} - \lambda_3 v_{k-1,1} = u_{k-1} + \lambda_1 v_{k-1,1} - \lambda_3 v_{k-1,1} = u_{k-1} + (\lambda_1 - \lambda_3) v_{k-1,1},$$

$$k = \overline{1, N-1},$$

$$w_{k+1,2} = v_{k,2} - \lambda_3 v_{k-1,2} = 1 + \lambda_1 v_{k-1,2} - \lambda_3 v_{k-1,2} = 1 + (\lambda_1 - \lambda_3) v_{k-1,2},$$

$$k = \overline{1, N-1},$$

$$w_{k+1,3} = y_{k-1} - u_{k-1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad (2.73)$$

$$w_{k+1,4} = 1, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$w_{1,1} = w_{1,2} = w_{1,3} = w_{1,4} = 0.$$

Результатом расчетов, выполненных на этом шаге алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация кривой ползучести с одной экспоненциальной составляющей:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

в которой оценки параметров соответствуют элементам вектора  $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ :  
 $\hat{a}_1 = \hat{\lambda}_1^{(i+1)}, \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\lambda}_2^{(i+1)}.$

Далее переходим к пятому этапу численного метода — построение модели второй экспоненциальной составляющей на основе модели авторегрессии первого порядка с постоянной компонентой.

Исходное разностное уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} y_0 = 0; \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2, \quad k = \overline{1, N-1}; \\ \lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \tau); \\ \lambda_2 = a_1 (1 - \lambda_1). \end{cases} \quad (2.74)$$

Выразим  $y_{k+1} = \lambda_1 y_k + \lambda_2$  и применим Z-преобразование:

$$Z\{y_{k+1}\} = \lambda_1 Z\{y_k\} + Z\{\lambda_2\}. \quad (2.75)$$

Так как

$$Z\{y_{k+1}\} = z \cdot Z\{y_k\} - z \cdot y_0 = z \cdot Z\{y_k\}$$

и

$$Z\{\lambda_2\} = \lambda_2 \cdot \frac{z}{z-1},$$

то, учитывая (2.74) и (2.75), имеем

$$z \cdot Z\{y_k\} - \lambda_1 \cdot Z\{y_k\} = \frac{\lambda_2 z}{z-1},$$

$$Z\{y_k\} = \frac{\lambda_2 z}{(z-1)(z-\lambda_1)} = \frac{a_1(1-\lambda_1)z}{(z-1)(z-\lambda_1)}.$$

Используем обратное z-преобразование:

$$\frac{a_1(1-\lambda_1)z}{(z-1)(z-\lambda_1)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z-\lambda_1} = \frac{(A+B)z^2 - (A\lambda_1+B)z}{(z-1)(z-\lambda_1)}.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0; \\ A\lambda_1+B=-a_1(1-\lambda_1), \end{cases}$$

решение которой  $A = a_1$ ,  $B = -a_1$ . Отсюда имеем

$$z\{y_k\} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z-\lambda_1} = a_1 \frac{z}{z-1} - a_1 \frac{z}{z-\lambda_1}$$

и

$$y_k = a_1 - a_1 \lambda_1^k = a_1 (1 - \lambda_1^k).$$

Пусть  $\lambda_1 = \exp(-\alpha\tau)$ , тогда  $y_k = a_1 [1 - \exp(-\alpha_1\tau k)]$ . Добавим в  $y_k$  вторую экспоненциальную составляющую  $a_2 [1 - \exp(-\alpha_2\tau k)]$  и подставим в (2.68).

В итоге получим дискретную модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = 0; \\ f_k = u_k + \lambda_3 (y_{k-1} - f_{k-1}) + \lambda_4 + v_k, \quad k = \overline{1, N-1}; \\ u_k(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 (1 - \lambda_1^k); \\ \lambda_1 = \exp(-\alpha\tau); \\ \lambda_2 = a_1. \end{array} \right. \quad (2.76)$$

Начальные оценки параметров нелинейной регрессионной модели (2.76) находим с учетом выполнения условия  $\|v\|^2 \rightarrow \min$ .

Начальное приближение вектора оценок параметров модели (2.76) имеет вид:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \exp(-\hat{\alpha}_1^{(0)}\tau), \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = \hat{a}_1^{(0)}, \quad \hat{\lambda}_3^{(0)} = \hat{\lambda}_4^{(0)} = 0. \quad (2.77)$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии и элементы матрицы Якоби описываются формулами (2.70)–(2.73). Уточнение среднеквадратичных оценок заканчивается при выполнении условия

$$\|\hat{\lambda}^{(i+1)} - \hat{\lambda}^{(i)}\| < 0.001 \|\hat{\lambda}^{(i)}\|. \quad (2.78)$$

Результатом расчетов на этом шаге алгоритма является построенная аппроксимация кривой ползучести с двумя экспоненциальными составляющими:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)] + \hat{a}_2 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_2 t_k)], \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.79)$$

в которой оценки параметров равны:

$$\hat{a}_1 = \hat{\lambda}_2^{(i+1)}, \quad \hat{\alpha}_1 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i+1)}, \quad \hat{a}_2 = \frac{\hat{\lambda}_4^{(i+1)}}{1 - \hat{\lambda}_3^{(i+1)}}, \quad \hat{\alpha}_2 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_3^{(i+1)}. \quad (2.80)$$

На основе полученных выше результатов можно перейти к решению задачи уточнения среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (2.80) при использовании двух экспоненциальных составляющих.

На этом шаге, с учетом ранее найденных оценок параметров экспоненциальных составляющих (2.80), вычисляется вектор  $\hat{\mu}^{(0)} = (\hat{a}_1^{(0)}, \hat{\alpha}_1^{(0)}, \hat{a}_2^{(0)}, \hat{\alpha}_2^{(0)})$

начальных оценок параметров функциональной зависимости:

$$f_k(\mu) = a_1 [1 - \exp(-\alpha_1 t_k)] + a_2 [1 - \exp(-\alpha_2 t_k)], \quad k = \overline{0, N-1},$$

по формулам  $\hat{a}_1^{(0)} = \hat{a}_1$ ,  $\hat{\alpha}_1^{(0)} = \hat{\alpha}_1$ ,  $\hat{a}_2^{(0)} = \hat{a}_2$  и  $\hat{\alpha}_2^{(0)} = \hat{\alpha}_2$ .

Находятся элементы матрицы Якоби размера  $[N \times 4]$ :

$$w_{k+1,1} = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_1} = 1 - \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = \overline{0, N-1};$$

$$w_{k+1,2} = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_1} = a_1 t_k \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = \overline{0, N-1};$$

$$w_{k+1,3} = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_2} = 1 - \exp(-\alpha_2 t_k), \quad k = \overline{0, N-1};$$

$$w_{k+1,4} = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_2} = a_2 t_k \exp(-\alpha_2 t_k), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (2.49) при использовании двух экспоненциальных составляющих описывается формулой:

$$\hat{\mu}^{(i+1)} = \hat{\mu}^{(i)} + \left[ \left( W(\hat{\mu}^{(i)}) \right)^T W(\hat{\mu}^{(i)}) + \alpha^* E \right]^{-1} \left( W(\hat{\mu}^{(i)}) \right)^T \left[ y_k - f_k(\hat{\mu}_j^{(i)}) \right],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.81)$$

где  $\alpha^* = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 / [(N-4)(a_1^2 + \alpha_1^2 + a_2^2 + \alpha_2^2)]$ .

Процесс уточнения среднеквадратичных оценок  $\hat{\mu}^{(i)}$  заканчивается при выполнении условия

$$\|\hat{\mu}^{(i+1)} - \hat{\mu}^{(i)}\| < 0.001 \|\hat{\mu}^{(i)}\|. \quad (2.82)$$

Результатом расчетов, выполненных на этом шаге алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация кривой ползучести с двумя экспоненциальной составляющими:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)] + \hat{a}_2 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_2 t_k)], \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.83)$$

в которой оценки параметров равны:

$$\hat{a}_1 = \hat{\mu}_1^{(i+1)}, \hat{\alpha}_1 = \hat{\mu}_2^{(i+1)}, \hat{a}_2 = \hat{\mu}_3^{(i+1)}, \hat{\alpha}_2 = \hat{\mu}_4^{(i+1)}.$$

Для вычисления дисперсий величин  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{\alpha}_1$ ,  $\hat{a}_2$  и  $\hat{\alpha}_2$  находится матрица  $V[\mu] = (W^T W)^{-1} s_{\text{ост}}^2$ , где  $s_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} (e_k - \bar{e})(e_{k-1} - \bar{e})}{N-4}$ , где  $e_k$  и  $\bar{e}$  — остатки и их среднее арифметическое.

При необходимости алгоритм продолжается для идентификации следующего экспоненциального слагаемого. Поскольку принципиально он не отличается от изложенной выше методики, то его детальное изложение мы здесь не приводим.

Отметим, что, как показано в работе [77], при построении математических моделей для ряда сталей и сплавов количество экспоненциальных составляющих для описания первой стадии не более двух. Более подробно эта ситуация будет рассмотрена ниже в следующих разделах диссертационной работы.

### 2.3. Построение стохастических математических моделей ползучести для материалов и элементов конструкций

Исходной информацией для идентификации параметров и функций в математических моделях (2.1) и (2.47) является серия кривых стационарной ползучести при постоянных напряжениях  $\sigma(t) = \sigma^j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) при  $t \in [0, T]$  с последующей разгрузкой:  $\sigma(t) = 0$ ,  $t > T$ .

На первом этапе для каждой кривой ползучести при наличии первой и второй стадий при  $\sigma(t) = \sigma^j$ ,  $t \in [0, T]$ , описываемой соотношением (2.2), по изложенному в п. 2.1 методу определяются оценки величин  $\hat{a}_i^j$ ,  $\hat{\alpha}_i^j$ ,  $\hat{c}^j$  ( $i = \overline{1, s}$ ;  $j = \overline{1, m}$ ) и их дисперсии. При наличии только первой стадии ползучести оценки величин  $\hat{a}_i^j$  и  $\hat{\alpha}_i^j$  ( $i = \overline{1, s}$ ;  $j = \overline{1, m}$ ) и их дисперсии находятся по методу, изложенному в п. 2.2. Поскольку стохастически нелинейные определяющие соот-

ношения трудно использовать при решении соответствующих краевых задач (в частности, при построении доверительных интервалов для отклика–деформации ползучести), то величины  $\alpha_i$  в (2.1) и (2.47) будем считать детерминированными и полагаем их значения усредненным значениям  $\alpha_i^j$  при всех уровнях напряжений ( $1 \leq j \leq m$ ): т.е.  $\alpha_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \alpha_i^j$ . Аналогично, по этой же причине, и величину  $\beta$  будем также считать детерминированной (процедура ее вычисления приводится ниже). Тогда уравнения (2.1) и (2.47) будут стохастически линейными, но физически они будут нелинейными в силу степенных зависимостей для входных воздействий (напряжений).

На втором этапе находятся аппроксимационные зависимости для величин  $\hat{\alpha}_i^j$  и  $\hat{c}^j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) вида

$$\hat{\alpha}_i^* = \hat{b}_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i}, \quad \hat{c}^* = \hat{\gamma} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n \quad (2.84)$$

по методу наименьших квадратов, т.е. в (2.1) полагаем

$$\varphi_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right) = \hat{b}_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i}, \quad f \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right) = \hat{\gamma} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n.$$

При наличии только первой стадии ползучести имеем

$$\hat{\alpha}_i^* = \hat{b}_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i}, \quad (2.85)$$

т.е. в (2.47) полагаем

$$\varphi_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right) = \hat{b}_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i},$$

где в (2.84) и (2.85)  $n_i$  и  $n$  — детерминированные параметры.

На третьем этапе в качестве базовой принимается конкретная кривая ползучести при  $\sigma = \sigma_r = \sigma_*$  ( $1 \leq r \leq m$ ). Тогда соотношение типа (2.2) для деформации ползучести этой кривой имеет вид

$$p(t) = \sum_{i=1}^s \hat{b}_i [1 - \exp(-\alpha_i t)] + \hat{\gamma} t, \quad (2.86)$$

где  $\hat{b}_i$  и  $\hat{\gamma}$  определяются из аппроксимации (2.84), а величина  $\hat{\alpha}_i$  находится усреднением величин  $\alpha_i^j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) по всем реализациям. Поскольку величины  $\hat{b}_i$  и  $\hat{\gamma}$  в (2.86) не совпадают с аналогичными значениями  $a_i$  и  $c$  в (2.2), то оценки дисперсий величин  $b_i$  и  $\gamma$  определим, используя дисперсии  $a_i$  и  $c$ , полученные ранее для кривой ползучести при  $\sigma = \sigma_*$  на первом этапе исследований, полагая

$$D[b_i] = \left( \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_i} \right)^2 D[a_i], \quad D[\gamma] = \left( \frac{\hat{\gamma}}{\hat{c}} \right)^2 D[c]. \quad (2.87)$$

Полученным оценкам параметров  $b_i$  и  $\gamma$  придается универсальный характер, т.е. они используются при любых значениях напряжений  $\sigma = \sigma(t)$  в определяющих соотношениях (2.1).

Поскольку оценки математических ожиданий случайных величин  $b_i$  и  $\gamma$  и их дисперсий известны, то это позволяет построить доверительные интервалы для деформации ползучести  $p(t)$  при любых законах  $\sigma = \sigma(t)$  на основании (2.1) и, в частности, для серии кривых ползучести при  $\sigma(t) = \sigma^j$  ( $j = \overline{1, m}$ ), используя стохастически линейную зависимость вида

$$p(t) = \sum_{i=1}^s b_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i} [1 - \exp(-\alpha_i t)] + \gamma \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n t,$$

из которой нетрудно определить дисперсию величины  $p(t)$  в любой момент времени.

Соотношение (2.48) для деформации ползучести при наличии только первой стадии для базовой кривой при  $\sigma = \sigma_r = \sigma_*$  ( $1 \leq r \leq m$ ) имеет вид

$$p(t) = \sum_{i=1}^s \hat{b}_i [1 - \exp(-\alpha_i t)], \quad (2.88)$$

где  $\hat{b}_i$  определяется из аппроксимации (2.85), а величина  $\hat{\alpha}_i$  находится усреднением величин  $\alpha_i^j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) по всем реализациям. Аналогично описанному выше алгоритму оценка дисперсии величины  $b_i$  определим, используя дисперсию  $a_i$ , полученную ранее для кривой ползучести при  $\sigma = \sigma_*$ , полагая

$$D[b_i] = \left( \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_i} \right)^2 D[a_i]. \quad (2.89)$$

Поскольку оценка математического ожидания случайной величины  $b_i$  и ее дисперсия известны, то это позволяет построить доверительные интервалы для деформации ползучести  $p(t)$  при любых законах  $\sigma = \sigma(t)$  на основании (2.47) и, в частности, для серии кривых ползучести при  $\sigma(t) = \sigma^j$  ( $j = \overline{1, m}$ ), используя стохастически линейную зависимость вида

$$p(t) = \sum_{i=1}^s b_i \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i} [1 - \exp(-\alpha_i t)],$$

из которой нетрудно определить дисперсию величины  $p(t)$  в любой момент времени.

На четвертом этапе определяется величина  $\beta$  в соотношениях (2.1) и (2.47), которая задает величину обратимой компоненты деформации ползучести, накопленной на первой стадии ползучести, после полной разгрузки образца. В дальнейшем (как указано выше) для сохранения стохастической линейности (2.1) и (2.47) вводим гипотезу, что величина  $\beta$  также является детерминированной. Если на кривых ползучести при  $\sigma = \sigma^j$  наблюдается ярко выраженная вторая стадия ползучести, т.е. величина  $u^j(t) + v^j(t)$  (накопленная на первой стадии) достигла асимптотического значения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u^j(t) + v^j(t)] = \sum_{i=1}^s b_i \left( \frac{\sigma^j}{\sigma_*} \right)^{n_i},$$

то величина  $\beta^j$  для этой кривой ползучести находится по формуле

$$\beta^j = \frac{p^j(T) - p^j(T + t^*)}{\sum_{i=1}^s b_i \left( \frac{\sigma^j}{\sigma_*} \right)^{n_i}},$$

где  $t^*$  — время окончания наблюдения за деформацией ползучести после разгрузки ( $\sigma^j(t) = 0$ ,  $t \in [T, t^*]$ ).

В случае, если вторая стадия отсутствует, т.е. в наличии только первая стадия, величина  $\beta^j$  находится в соответствии с зависимостью:

$$\beta^j = \frac{p^j(T) - p^j(T + t_1)}{p^j(t_1)},$$

где  $t_1 \in ]0, T[$ .

Далее в качестве величины  $\beta$  принимается усредненное значение

$$\beta = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \beta^j.$$

Последним четвертым этапом завершается построение стохастически линейных уравнений теории неполной обратимости деформации ползучести вида (2.1) и (2.47), при этом в качестве исходной информации используется серия усредненных кривых стационарной ползучести при постоянных напряжениях с последующей разгрузкой.

Применение разработанного метода построения теории неполной обратимости деформации ползучести в пределах первых двух стадий (2.1) реализовано на основе анализа большого объема экспериментальных данных из работ [2, 76]. В качестве примера приведем результаты расчетов для сплавов ВЖ98 при температуре 900 °С, ЭИ437А при температуре 700 °С, стали ЭИ736 при 500 °С из [2] (для данных материалов отсутствует информация о деформации ползучести при полной разгрузке образцов, поэтому полагалось  $\beta = 0$ ) и сплава ЭП693 при температуре 700 °С [76], где имеются кривые обратной ползучести ( $\beta \neq 0$ ).

Применение разработанного метода оценок параметров аппроксимации (2.2), алгоритм которого описан в пункте 2.1, показало, что для всех указанных материалов достаточно одного экспоненциального слагаемого ( $s = 1$ ). В табл. 2.1 приведены первичные оценки основных параметров (2.2) для каждой кривой ползучести при фиксированном напряжении для всех вышеперечисленных сплавов и сталей. На рис. 2.1 и рис. 2.2 в качестве иллюстрации приведены результаты аппроксимации после первичной статистической обработки экспериментальных данных при каждом заданном фиксированном уровне напряжений

на основе функциональной зависимости, задаваемой соотношением (2.2), для четырех материалов: ЭИ736 при температуре 500 °С, ВЖ98 при температуре 900 °С, ЭП693 при температуре 700 °С и ЭИ437А при температуре 700 °С. Исходя из некоррелированности случайных величин  $a_i$  и  $c$ , дисперсия для деформации ползучести  $p(t)$  для каждой кривой в любой момент времени с данными из табл. 2.1 рассчитывалась по формуле

$$D[p(t)] = \sum_{i=1}^s D[a_i](1 - \exp(-\alpha_i t))^2 + D[c]t^2,$$

а затем, используя классическую методику [25], строились 99% доверительные интервалы для математического ожидания деформации  $p(t)$ . Значения математических ожиданий величин  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{c}$  и  $\hat{\alpha}_i$  и дисперсий  $D[a_i]$ ,  $D[c]$  приведены в табл. 2.1.

Затем, в соответствии с методикой, строились степенные аппроксимации (2.84) и определялись  $\hat{b}_i$ ,  $n_1$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $n$ , а для определения дисперсий  $D[b_1]$  и  $D[\gamma]$  пользовались формулой (2.87), где  $\hat{a}_1$  и  $\hat{c}$  соответствуют базовой кривой ползучести при  $\sigma = \sigma_*$ . В табл. 2.2 приведены окончательные оценки всех параметров определяющих уравнений состояния (2.1) для всех исследуемых материалов, а на рис. 2.3 и рис. 2.4 приведены графики степенных аппроксимаций (2.84).

На рис. 2.5 и рис. 2.6 приведены расчетные значения для деформации ползучести по реологической модели (2.1) с параметрами, приведенными в табл. 2.2, для четырех материалов: ЭИ437А (700 °С), ЭИ736 (500 °С), ВЖ98 (900 °С) и ЭП693 (700 °С). На всех рисунках сплошная линия — математическое ожидание, штриховые линии — границы 99 % доверительного интервала, маркеры (точки) — экспериментальные значения деформации ползучести. Для построения доверительных интервалов по модели (2.1) расчет дисперсии для деформации ползучести осуществлялся по формуле (см. формулу (2.89)):

$$D[p(t)] = \sum_{i=1}^s D[b_i] \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i} (1 - \exp(-\alpha_i t)) \right]^2 + D[\gamma] \cdot \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n t \right]^2.$$

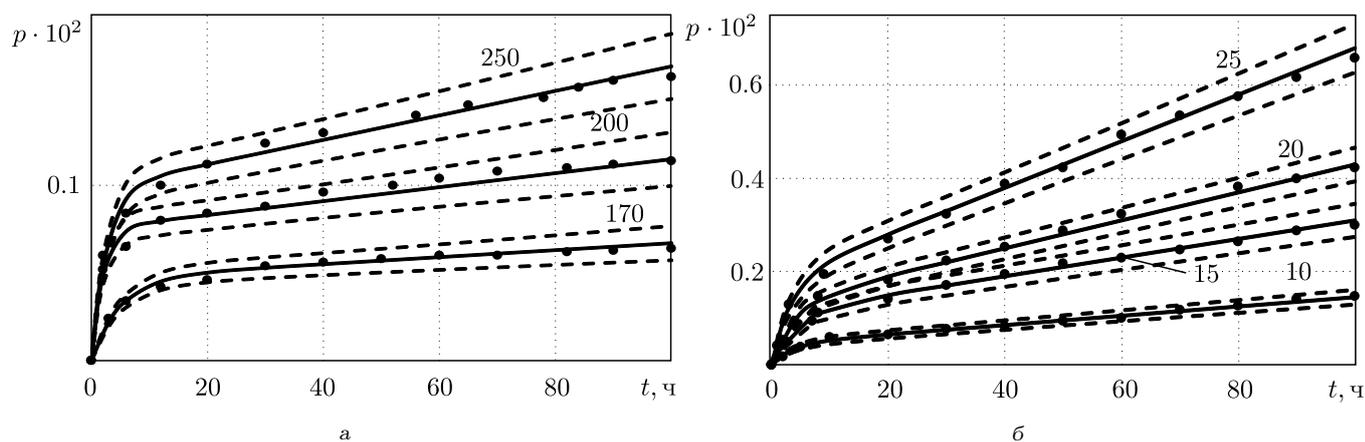


Рис. 2.1. Результаты первичной аппроксимации кривых ползучести ЭИ736 при температуре 500 °С (а), ВЖ98 при температуре 900 °С (б) с данными из табл. 2.1. Цифры — напряжения в МПа, сплошная линия — математическое ожидание; штриховые линии — границы 99%-ых доверительных интервалов, маркеры (точки) — экспериментальные данные для деформации ползучести

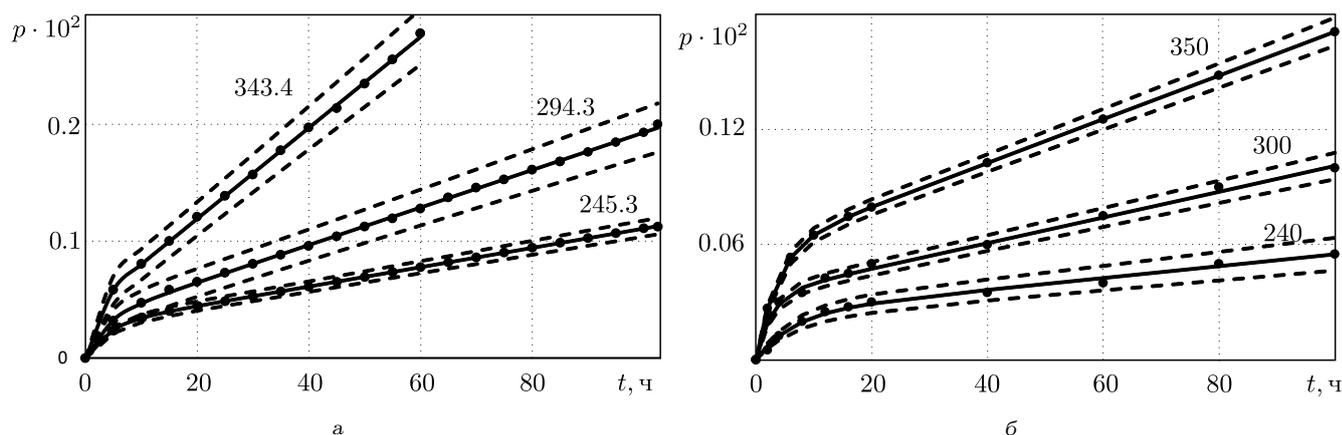


Рис. 2.2. Результаты первичной аппроксимации кривых ползучести ЭП693 при температуре 700 °С (а) и ЭИ437А при температуре 700 °С (б) с данными из табл. 2.1. Цифры — напряжения в МПа, сплошная линия — математическое ожидание; штриховые линии — границы 99%-ых доверительных интервалов, маркеры (точки) — экспериментальные данные для деформации ползучести

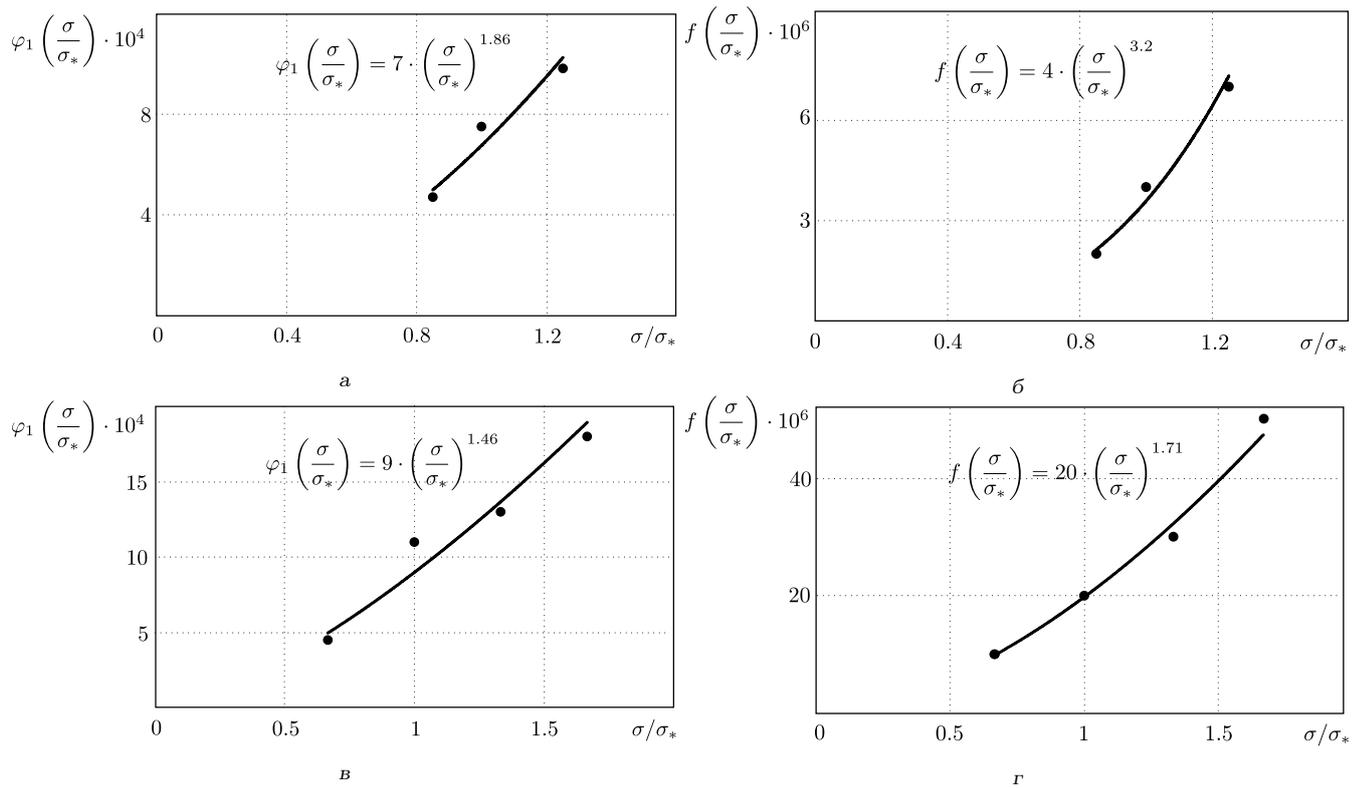


Рис. 2.3. Результаты степенной аппроксимации (2.84) ЭИ736 при температуре 500 °С (а) и (б), ВЖ98 при температуре 900 °С (в) и (г) с данными из табл. 2.2. Сплошная линия — степенная аппроксимация; маркеры (точки) — полученные данные по результатам первичной аппроксимации

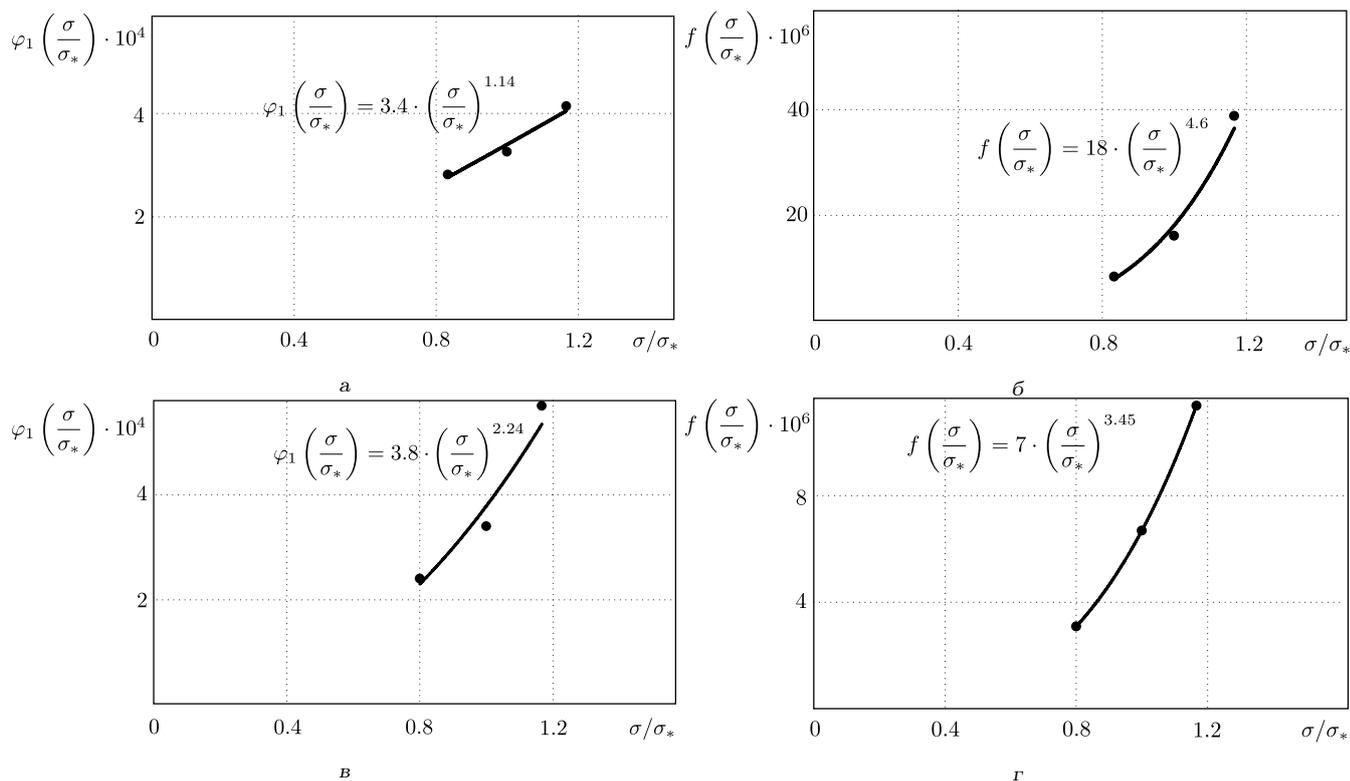


Рис. 2.4. Результаты степенной аппроксимации (2.84) ЭП693 при температуре 700 °С (а) и (б), ЭИ437А при температуре 700 °С (в) и (г) с данными из табл. 2.2. Сплошная линия — степенная аппроксимация; маркеры (точки) — полученные данные по результатам первичной аппроксимации

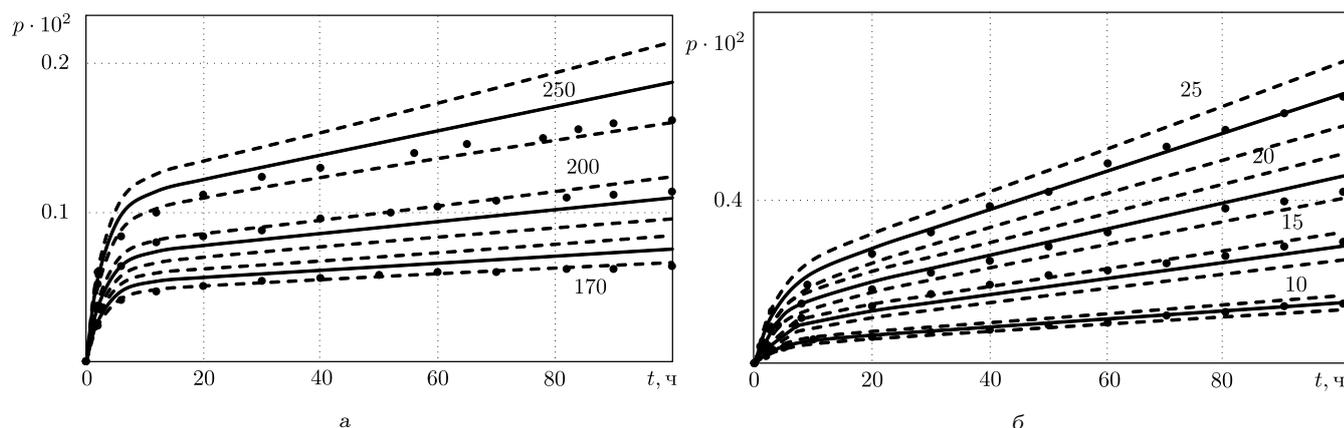


Рис. 2.5. Расчетные данные деформации ползучести по модели (2.1) для стали ЭИ736 (500 °С) (а); сплава ВЖ98 (900 °С) (б): сплошная линия — математическое ожидание; штриховые линии — границы 99%-ных доверительных интервалов, маркеры (точки) — экспериментальные данные, цифры — напряжения в МПа

Таблица 2.1. Расчетные оценки параметров аппроксимаций кривых ползучести для сплавов ВЖ98, ЭИ437А, ЭП693 и стали ЭИ736 при фиксированных напряжениях

$\sigma$ , МПа	$\alpha_1$ , ч <sup>-1</sup>	$\hat{a}_1 \cdot 10^4$	$\hat{c} \cdot 10^6$	$D[a_1] \cdot 10^9$	$D[c] \cdot 10^{13}$	$\sigma_*$ , МПа
Сталь ЭИ736, 500 °С						
170	0.2	4.67	1.9	0.324	0.74	200
200	0.5	7.74	4.36	0.72	1.9	
250	0.38	9.81	6.87	1.14	2.72	
Сплав ЭИ437А, 700 °С						
240	0.16	2.38	3.1	0.25	0.55	300
300	0.37	3.44	6.71	0.124	0.39	
350	0.28	5.71	11.36	0.162	0.44	
Сплав ВЖ98, 900 °С						
10	0.27	4.48	10.2	0.818	1.97	15
15	0.24	11.07	19.5	4.23	9.76	
20	0.25	13.5	30	4.35	10.3	
25	0.3	17.8	49.5	8.9	21.4	
Сплав ЭП693, 700 °С						
245.3	0.25	2.82	8.3	0.163	0.37	294.3
294.3	0.28	3.26	16.1	1.5	3.19	
343.4	0.56	4.15	38.9	1.83	12.2	

Таблица 2.2. Расчетные оценки параметров стохастической модели (2.1)

Материал	$\hat{\alpha}_1$ , ч <sup>-1</sup>	$\hat{b}_1 \cdot 10^4$	$\hat{\gamma} \cdot 10^6$	$D[b_1] \cdot 10^9$	$D[\gamma] \cdot 10^{13}$	$n_1$	$n$	$\beta$
Сплав ВЖ98, 900 °С	0.27	9.0	20.0	2.80	10.0	1.46	1.71	0
Сталь ЭИ736, 500 °С	0.36	7.0	4.0	0.59	1.60	1.86	3.2	0
Сплав ЭИ437А, 700 °С	0.27	3.8	7.0	0.15	0.43	2.24	3.45	0
Сплав ЭП693, 700 °С	0.36	3.4	18	1.63	4.0	1.14	4.6	0.64

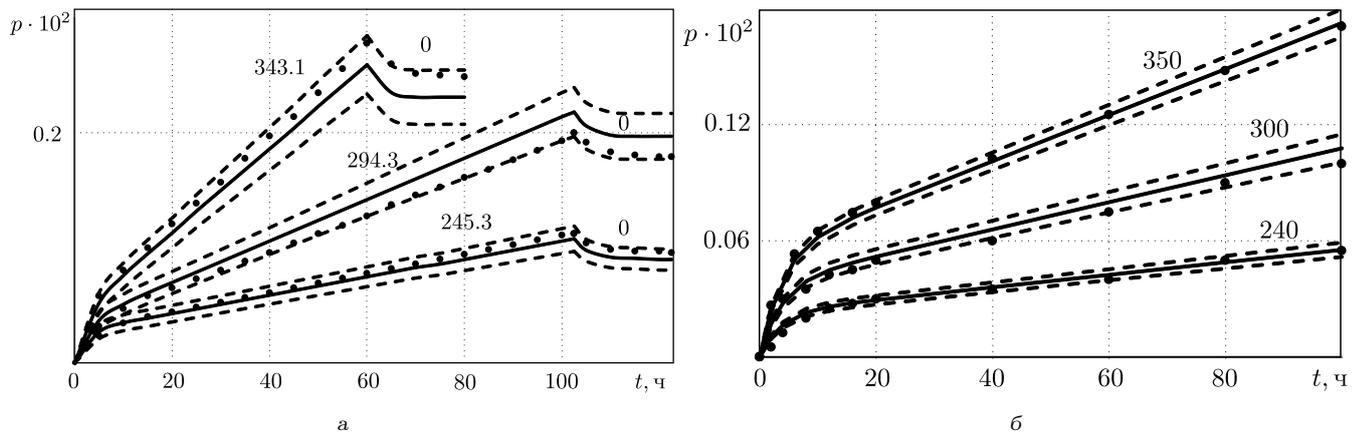


Рис. 2.6. Расчетные данные деформации ползучести по модели (2.1) для сплава ЭП693 (700 °С) (а) и стали ЭИ437А (700 °С) (б): сплошная линия — математическое ожидание; штриховые линии — границы 99%-ных доверительных интервалов, маркеры (точки) — экспериментальные данные, цифры — напряжения в МПа

Для всех приведенных вариантов расчета экспериментальные данные не выходят за пределы соответствующих доверительных интервалов для деформации ползучести, что свидетельствует о достоверности оценок параметров модели (2.1) и ее адекватности.

Проиллюстрируем возможности метода для описания кинетики конструктивных элементов в условиях ползучести на основе макромеханики конструкции при однопараметрическом нагружении с использованием модели (1.11) на примере описания перемещения области свинчивания  $l$  резьбового соединения в условиях ползучести под действием растягивающей нагрузки  $Q$  (рис. 2.7).

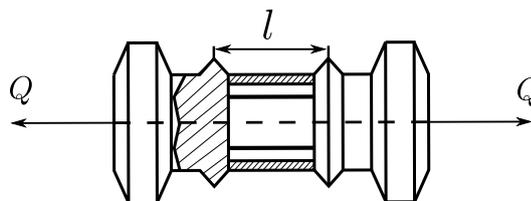


Рис. 2.7. Резьбовое соединение М10 × 1.5 из сплава ЭИ698 под действием растягивающей нагрузки при температуре 700 °С

Для исследования использованы экспериментальные данные для резьбово-

го соединения  $M10 \times 1.5$  из сплава ЭИ698 при температуре  $T = 700^\circ\text{C}$ , приведенные в работе [104]. На рис. 2.8 маркерами (точки) представлены экспериментальные кривые ползучести при трех значениях растягивающей нагрузки при  $t \in [0; 60]$  ч (рис. 2.8, а) и кривые обратной ползучести при полной разгрузке резьбового соединения ( $Q = 0$ ) в течение  $t \in [60; 80]$  ч.

Для построения математической модели ползучести резьбового соединения как целого использована реологическая модель (2.1) с заменой в ней деформаций  $p(t)$ , и ее компонент  $u(t)$ ,  $v(t)$  и  $w(t)$  на обобщенные перемещения — осевые перемещения  $\Delta_p$ ,  $\Delta_u$ ,  $\Delta_v$  и  $\Delta_w$ , а напряжений —  $\sigma$  на обобщенную нагрузку  $Q$ , тем самым конкретизируя соотношения макромеханики конструкций (1.11) для данного конструктивного элемента. Далее, в силу полной аналогии кривых ползучести резьбового соединения и рассмотренных кривых ползучести для материалов формально применяется разработанный метод структурной и параметрической идентификации уже для математической модели резьбового соединения. В табл. 2.3 приведены результаты первичной обработки кривых ползучести резьбового соединения, представленных на рис. 2.8, а, где сплошной линией приведены математические ожидания, а штриховыми — 99%-ные доверительные интервалы для кривых ползучести при трех значениях  $Q$ . На рис. 2.8, б приведены кривые ползучести уже для математической модели резьбового соединения с учетом разгрузки в соответствующих доверительных интервалах с данными для параметров модели, приведенных в табл. 2.4, а на рис. 2.9 проиллюстрированы результаты степенных аппроксимаций для соответствующих функций, входящих в соотношения (2.1), но записанных в терминах «обобщенная нагрузка — обобщенное перемещение». Отметим, что здесь достаточно большое значение  $\beta = 0.57$  для обратимой компоненты обобщенного перемещения.

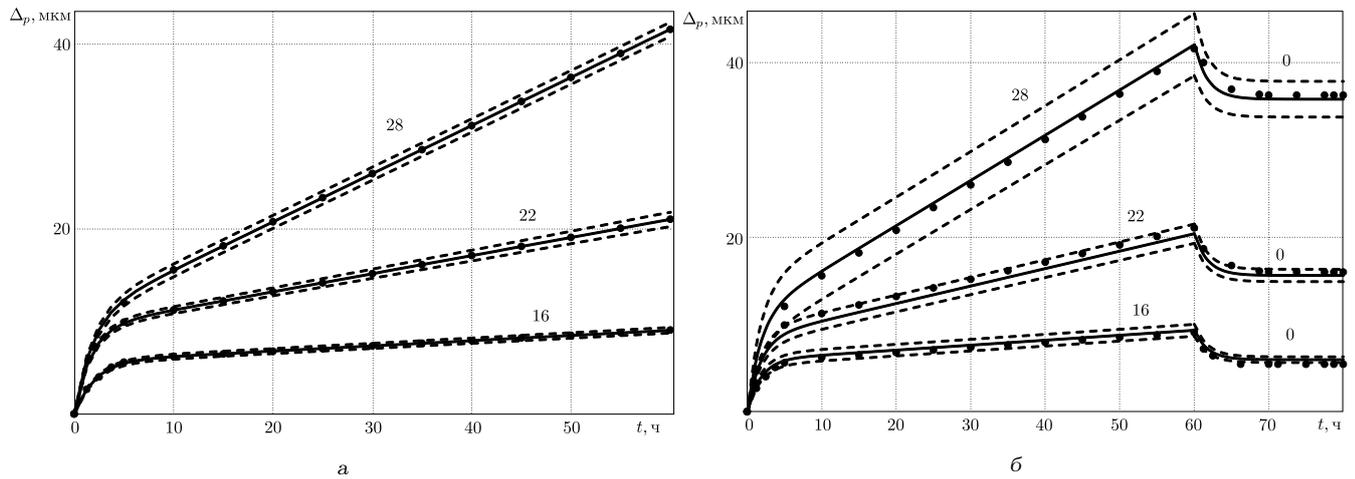


Рис. 2.8. Расчетные данные для первичной аппроксимации осевого перемещения области свинчивания резьбового соединения для сплава ЭИ698 при температуре 700 °С в условиях ползучести с данными из табл. 2.3 (а) и расчетные данные осевого перемещения области свинчивания резьбового соединения по модели (2.1) с данными из табл. 2.4 (б). Сплошная линия — математическое ожидание; штриховая линия — 99% доверительный интервал; маркеры (точки) — экспериментальные данные. Цифры — обобщенная нагрузка  $Q$  в кН

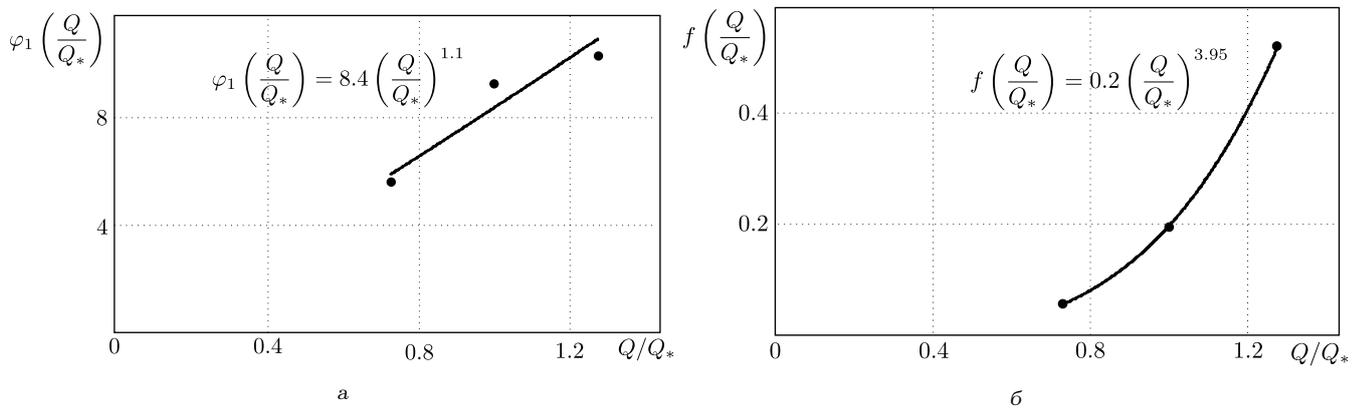


Рис. 2.9. Результаты степенной аппроксимации (2.84) для резьбового соединения из сплава ЭИ698 при температуре 700 °С с данными из табл. 2.4. Сплошная линия — степенная аппроксимация; маркеры (точки) — полученные данные по результатам первичной аппроксимации

Таблица 2.3. Расчетные оценки параметров первичной аппроксимации кривых ползучести для резьбового соединения из сплава ЭИ698 при фиксированных нагрузках

$Q$ , кН	$\alpha_1$ , ч <sup>-1</sup>	$\hat{a}_1$	$\hat{c}$	$D[a_1] \cdot 10^2$	$D[c] \cdot 10^5$	$Q_*$ , кН
Сплав ЭИ698, 700 °С						
16	0.496	5.67	0.056	9	8	22
22	0.603	9.29	0.196	12	100	
28	0.559	10.36	0.521	77	56	

Таблица 2.4. Расчетные оценки параметров стохастической модели (2.1) для резьбового соединения из сплава ЭИ698 при  $T = 700$  °С

Резьбовое соединение	$\hat{\alpha}_1$ , ч <sup>-1</sup>	$\hat{b}_1$	$\hat{\gamma}$	$D[b_1]$	$D[\gamma] \cdot 10^3$	$n_1$	$n$	$\beta$
Сплав ЭИ698, 700 °С	0.553	8.4	0.2	0.098	1.04	1.1	3.95	0.57

Как следует из информации, представленной на рис. 2.8, б, и в этом случае экспериментальные данные попадают в соответствующие доверительные интервалы, что свидетельствует о достоверности полученных оценок параметров и адекватности самой модели.

Применение разработанной методики построения теории неполной обратимости деформации ползучести (2.47) только при наличии первой стадии рассмотрим на примере результатов расчета для поливинилхлоридного пластиката (ПВХП) при температуре 20 °С и 24 °С. Деформация ползучести для данного материала при полной разгрузке образцов полностью обратима, следовательно,  $\beta = 1$ . Поэтому деформация ползучести в (2.1) описывается только компонентой  $u(t)$ , т.е.  $p(t) = u(t)$ .

Применение разработанной методики определения оценок параметров аппроксимации (2.48) показало, что для ПВХП достаточно два экспоненциальных слагаемых ( $s = 2$ ). В табл. 2.5 приведены оценки основных параметров (2.48) для каждой кривой ползучести при фиксированном напряжении. На рис. 2.10 в качестве иллюстрации приведены результаты аппроксимации

после первичной статистической обработки экспериментальных данных на основе функциональной зависимости, задаваемой соотношением (2.48), для ПВХП при температуре 20 °С и 24 °С. Дисперсия деформации ползучести  $p(t)$  для каждой кривой в любой момент времени с данными из табл. 2.5 рассчитывалась по формуле

$$D[p(t)] = \sum_{i=1}^s D[a_i](1 - \exp(-\alpha_i t))^2,$$

а затем, используя классическую методику [25], строились 99% доверительные интервалы для математического ожидания деформации  $p(t)$ . Значения математических ожиданий величин  $\hat{a}_i$  и  $\hat{\alpha}_i$  и дисперсий  $D[a_i]$  приведены в табл. 2.5.

Затем, в соответствии с методикой, строились степенные аппроксимации (2.85) и определялись  $\hat{b}_i$ ,  $n_1$  и  $n_2$ , а для определения дисперсий  $D[b_1]$  и  $D[b_2]$  пользовались формулой (2.89), где  $\hat{a}_1$  и  $\hat{a}_2$  соответствуют базовой кривой ползучести при  $\sigma = \sigma_*$ . В табл. 2.6 приведены окончательные оценки всех параметров определяющих уравнений состояния (2.47) для всех исследуемых материалов, а на рис. 2.11 и 2.14 приведены графики степенных аппроксимаций (2.85).

На рис. 2.12 приведены расчетные значения для деформации ползучести по реологической модели (2.47) с параметрами, приведенными в табл. 2.5, для ПВХП при температуре 20 °С, на рис. 2.15 для ПВХП при температуре 24 °С. Для наглядности, чтобы не загромождать данные рисунки, 99 % доверительные интервалы построены только на отрезке  $t \in [0; 8]$  при нагрузке. На рис. 2.13 приведены расчетные данные для нескольких отдельных образцов с построенными доверительными интервалами для ПВХП при температуре 20 °С не только при нагрузке, но и при разгрузке, а на рис. 2.15 аналогичная информация для ПВХП при температуре 24 °С. На рисунках: сплошная линия — математическое ожидание, штриховые линии — границы 99 % доверительного интервала, маркеры (точки) — экспериментальные значения деформации ползучести. Для построения доверительных интервалов по модели (2.47) расчет дисперсии

для деформации ползучести осуществлялся по формуле (см. формулу (2.89)):

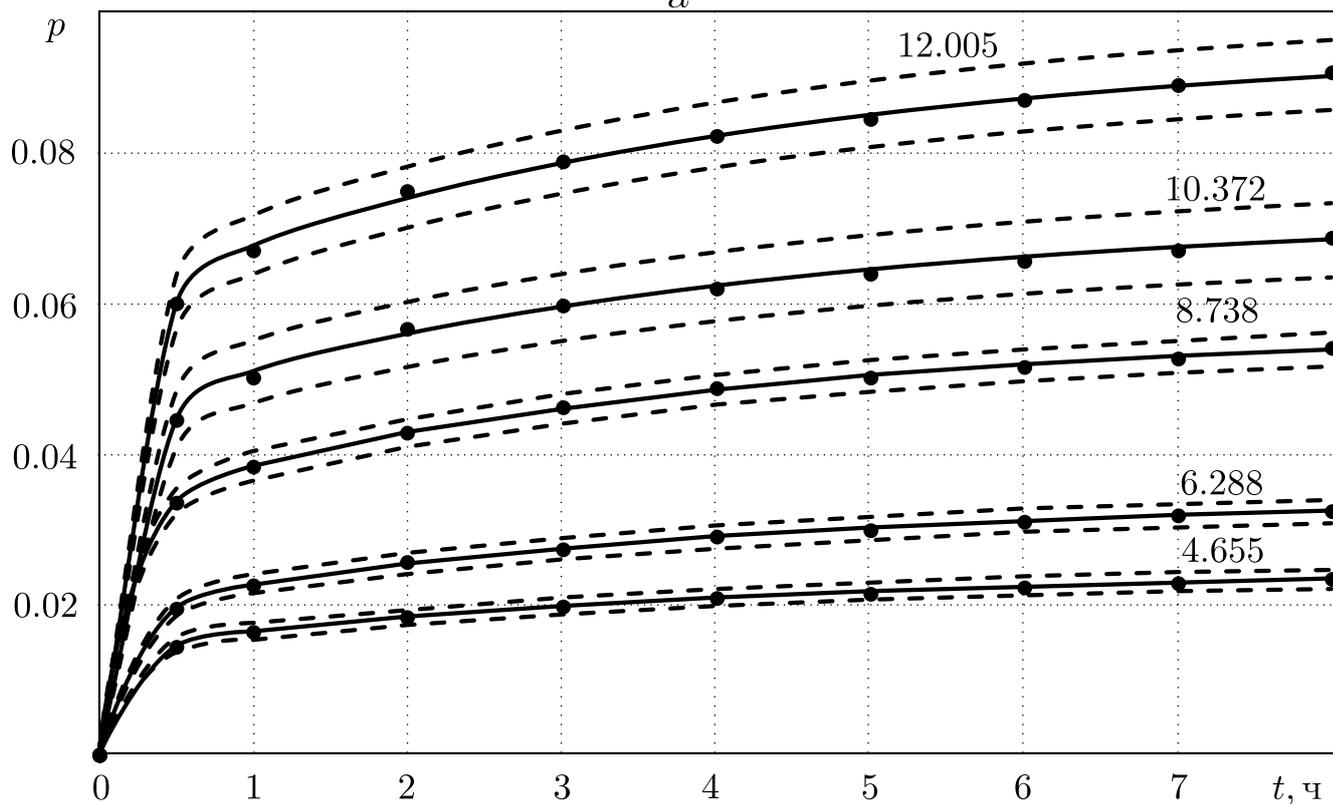
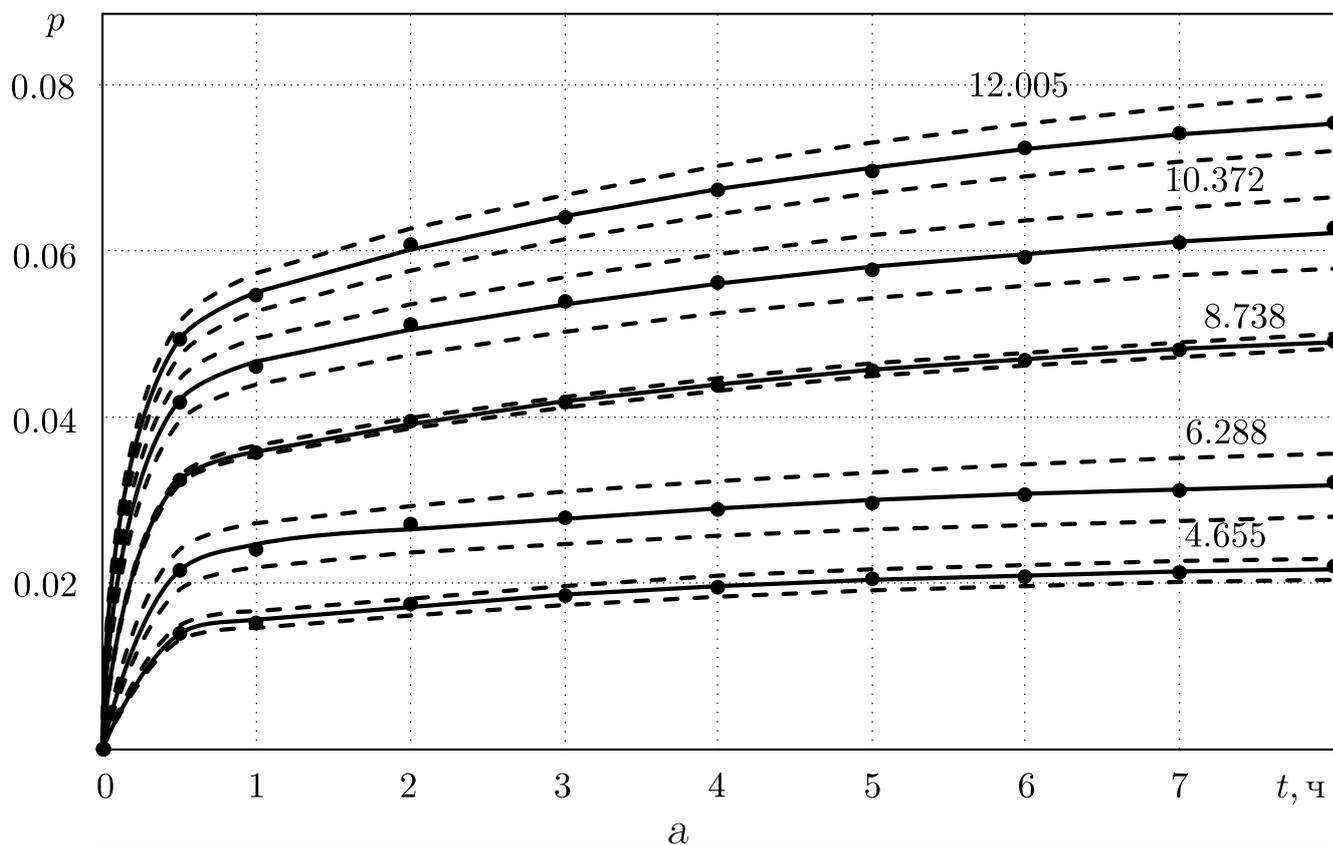
$$D[p(t)] = \sum_{i=1}^s D[b_i] \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i} (1 - \exp(-\alpha_i t)) \right]^2.$$

Таблица 2.5. Расчетные оценки параметров аппроксимаций кривых ползучести для ПВХП при температуре 20°C и 24°C

$\sigma$ , МПа	$\alpha_1$ , ч <sup>-1</sup>	$\alpha_2$ , ч <sup>-1</sup>	$\hat{a}_1 \cdot 10^2$	$\hat{a}_2 \cdot 10^2$	$D[a_1] \cdot 10^7$	$D[a_2] \cdot 10^7$	$\sigma_*$ , МПа
ПВХП, 20°C							
4.655	0.302	8.277	1	1.3	1	1	10.372
6.288	0.193	4.516	1.1	2.3	15	7.6	
8.738	0.211	5.686	2.1	3.2	0.7	0.37	
10.372	0.201	5.351	2.5	4.2	18	8.28	
12.005	0.208	5.558	3.2	4.9	11	5.65	
ПВХП, 24°C							
4.655	0.245	5.703	1.1	1.4	76	74	10.372
6.288	0.259	4.735	1.5	2	97	1.7	
8.738	0.269	5.359	2.4	3.3	1.81	2.75	
10.372	0.251	4.797	2.7	4.5	10	0.16	
12.005	0.253	5.140	3.5	6	9.65	0.14	

Таблица 2.6. Расчетные оценки параметров стохастической модели (2.47) для ПВХП при температуре 20 °C и 24 °C

Материал	$\hat{\alpha}_1$ , ч <sup>-1</sup>	$\hat{\alpha}_2$ , ч <sup>-1</sup>	$\hat{b}_1 \cdot 10^2$	$\hat{b}_2 \cdot 10^2$	$D[b_1] \cdot 10^7$	$D[b_2] \cdot 10^7$	$n_1$	$n_2$	$\beta$
ПВХП, 20°C	0.223	5.876	2.5	4.1	18	7.9	1.3	1.4	1
ПВХП, 24°C	0.255	5.15	2.8	4.5	11	0.16	1.2	1.5	1



б

Рис. 2.10. Результаты первичной аппроксимации (2.48) ПВХП при температуре 20°C (а) и ПВХП при температуре 24°C (б) с данными из табл. 2.5. Сплошная линия — аппроксимация; штриховая линия — 99% доверительный интервал; маркеры (точки) — экспериментальные данные. Цифры — напряжение в МПа

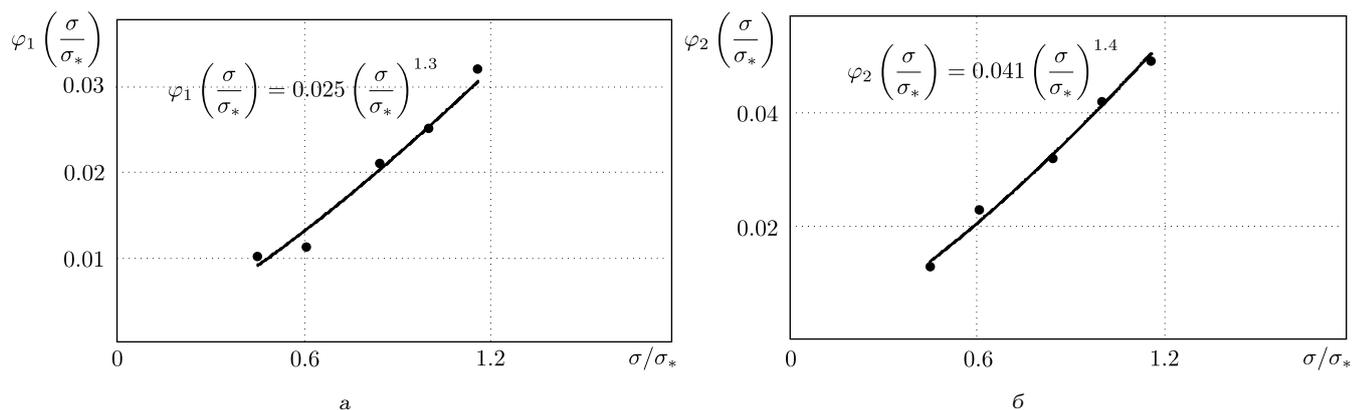


Рис. 2.11. Результаты степенной аппроксимации (2.85) ПВХП при температуре 20 °С (а) и (б). Сплошная линия — степенная аппроксимация; маркеры (точки) — полученные данные по результатам первичной аппроксимации

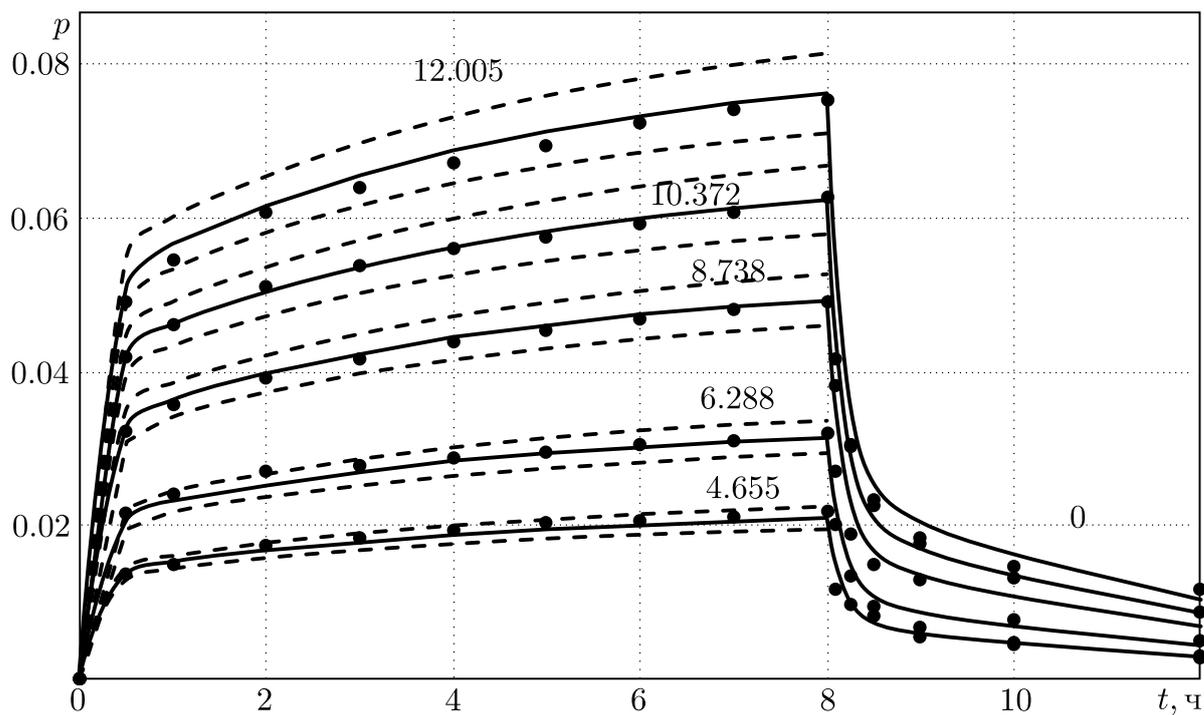


Рис. 2.12. Расчетные данные деформации ползучести по модели (2.47) для ПВХП при температуре 20 °С с данными из табл. 2.6. Сплошная линия — аппроксимация; штриховая линия — 99% доверительный интервал; маркеры (точки) — экспериментальные данные. Цифры — напряжение в МПа

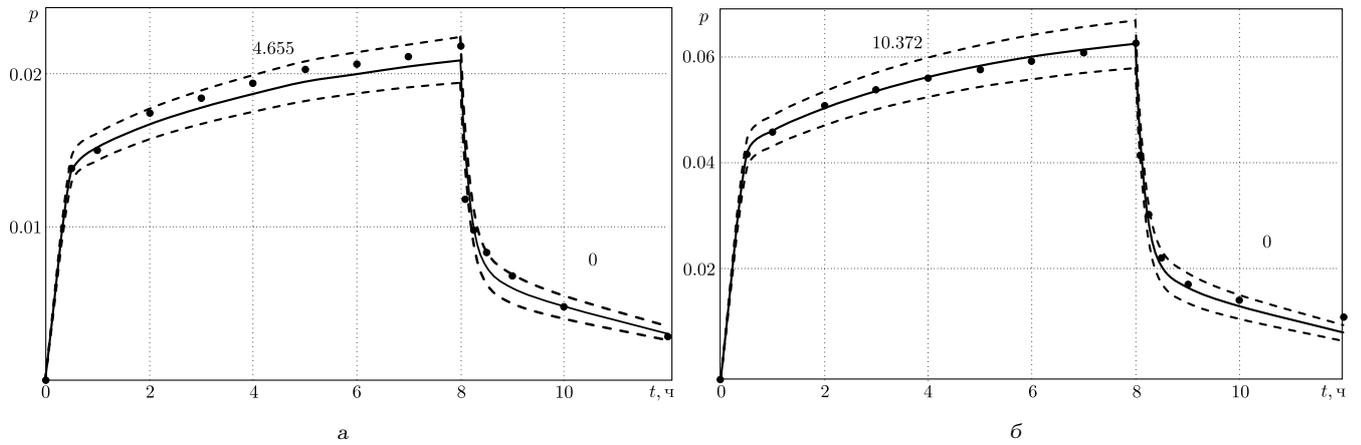


Рис. 2.13. Расчетные данные деформации ползучести по модели (2.47) для образцов из ПВХП при  $\sigma = 4.655$  МПа (а) и  $\sigma = 10.372$  МПа (б) при температуре  $20^\circ\text{C}$  с данными из табл. 2.6. Сплошная линия — аппроксимация; штриховые линии — 99% доверительный интервал; маркеры (точки) — экспериментальные данные. Цифры — напряжение в МПа

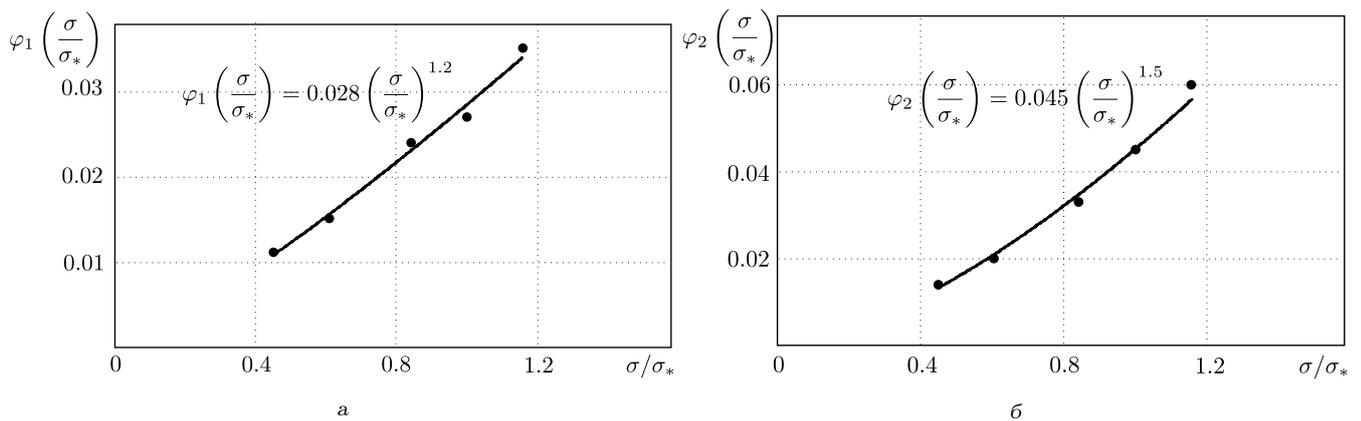


Рис. 2.14. Результаты степенной аппроксимации (2.85) ПВХП при температуре  $24^\circ\text{C}$  (а) и (б). Сплошная линия — степенная аппроксимация; маркеры (точки) — полученные данные по результатам первичной аппроксимации

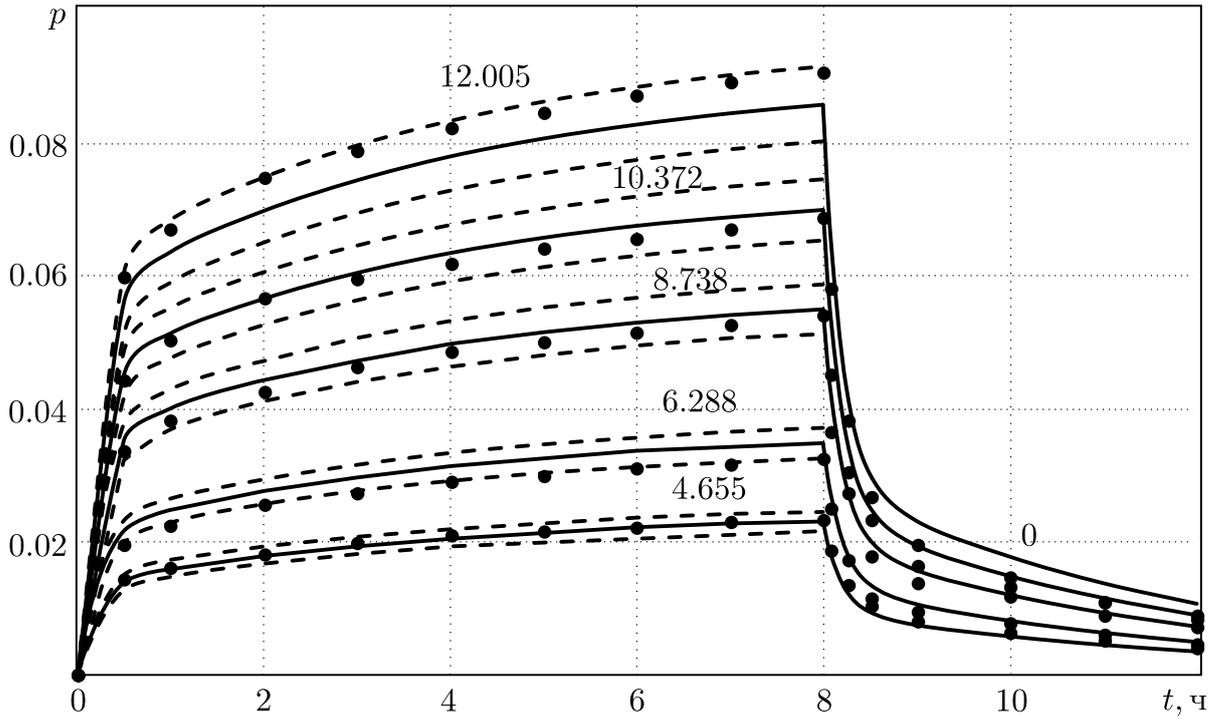


Рис. 2.15. Расчетные данные деформации ползучести по модели (2.47) для ПВХП при температуре 24 °С с данными из табл. 2.6. Сплошная линия — аппроксимация; маркеры (точки) — экспериментальные данные; штриховые линии — 99 % доверительный интервал. Цифры — напряжение в МПа

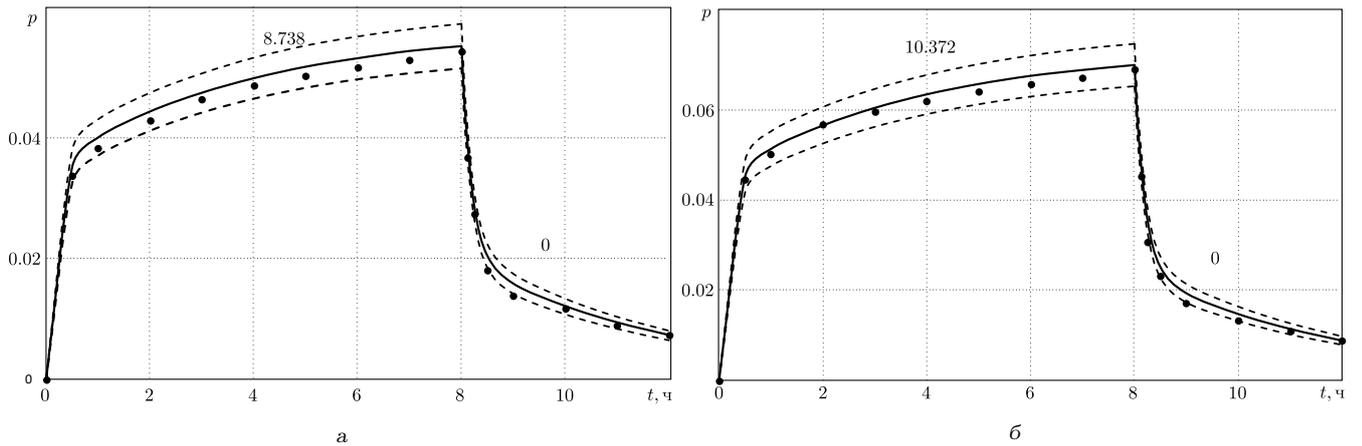


Рис. 2.16. Расчетные данные деформации ползучести по модели (2.47) для образцов из ПВХП при  $\sigma = 8.738$  МПа (а) и  $\sigma = 10.372$  МПа (б) при температуре 24 °С с данными из табл. 2.6. Сплошная линия — аппроксимация; штриховые линии — 99 % доверительные интервалы; маркеры (точки) — экспериментальные данные. Цифры — напряжение в МПа

Для всех приведенных вариантов расчета экспериментальные данные не выходят за пределы соответствующих доверительных интервалов для деформации ползучести, что свидетельствует о достоверности оценок параметров модели (2.47) и ее адекватности.

## 2.4. Выводы по главе

1. Разработан новый численный метод параметрической и структурной идентификации нелинейной теории неполной обратимости деформации ползучести, позволяющий, в отличие от имеющихся эвристических методов, математически обосновано свести задачу к нелинейному регрессионному анализу определения оценок случайных параметров реологической модели на основе временных рядов последовательности результатов наблюдений деформации ползучести при различных постоянных напряжениях.
2. Показано, что при использовании даже осредненных экспериментальных кривых ползучести построенная реологическая модель на их основе является стохастической вследствие процедуры параметрической идентификации нелинейной регрессионной модели и позволяет выполнять прогнозирование кинетики деформации при любых законах изменения напряжений.
3. Выполнена параметрическая и структурная идентификация математической модели на базе теории неполной обратимости деформации ползучести для ряда сталей и сплавов и элементов конструкций (сталь ЭИ736 (500 °С) и сплавы: ЭИ437А (700 °С), ВЖ98 (900 °С), ЭП693 (700 °С), поливинилхлоридный пластикат (20 °С и 24 °С) и резьбовое соединение из сплава ЭИ698 (700 °С)). Получены численные значения оценок параметров моделей для этих материалов.
4. Выполнена проверка адекватности построенных математических моделей. Наблюдается соответствие расчетных и опытных данных. Экспериментальные данные принадлежат соответствующим доверительным интервалам для деформации ползучести, что свидетельствует о достоверности и адекватности полученных оценок параметров модели.

# Методы индивидуального прогнозирования деформационных характеристик и разрушения элементов конструкций при ползучести и трении

Материалы данной главы излагаются в соответствии с публикациями автора данной работы [3–7, 71–74, 109].

Задача разработки методов индивидуального прогнозирования деформационных характеристик конкретного конструктивного элемента порождается проблемой оценки его индивидуального ресурса.

Схема решения задачи прогнозирования остаточного ресурса с классических позиций возникновения параметрических отказов проиллюстрирована на рис. 3.1. Пусть имеется некоторая величина  $y(t)$ , характеризующая работоспособность элемента конструкции, изменяющаяся от нуля до заданного критического значения  $y^*$ , по достижении которого в момент времени  $\tau$  происходит отказ. Поскольку  $\tau$  является случайной величиной, задается степень возникновения риска  $\alpha$  и с помощью плотности распределения  $f(t)$  определяется время эксплуатации  $t^*$ :

$$\int_0^{t^*} f(t) dt = \alpha.$$

Величина  $t^*$  — назначенный ресурс, который рассчитывается на стадии проектирования. При малых значениях  $\alpha$  среднее время безотказной работы  $\langle \tau \rangle$  может оказаться значительно больше  $t^*$ , а это означает, что часть конструкций снимается с эксплуатации, не исчерпав свой ресурс. Очевидно, что такой подход не применим к решению задачи прогнозирования индивидуального ресурса конкретной конструкции. Поэтому и возникает задача разработки методов

индивидуального прогнозирования деформационных характеристик элементов конструкций, являющихся базой для расчета их ресурса. В данной главе работы разработаны методы прогнозирования деформационных характеристик по образцу-лидеру и на основании стохастических уравнений состояния, предложенных в главе 2.

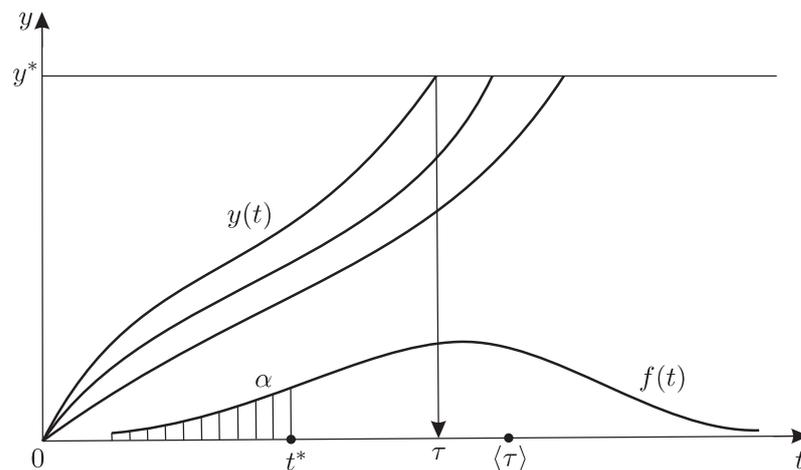


Рис. 3.1. Схема оценки ресурса по параметрическому критерию отказа

Метод индивидуального прогнозирования на основании стохастических уравнений заключается в определении оценок параметров математической модели на базе этих уравнений с использованием экспериментальных данных на начальном этапе эксплуатации конкретного конструктивного элемента, тем самым осуществляется переход от модели, описывающей «генеральную» совокупность однотипных объектов, к стохастической модели конкретного объекта (отдельной реализации). В отличие от этого подхода индивидуальное прогнозирование по изделию-лидеру заключается в следующем.

Пусть имеются два однотипных конструктивных элемента, которые находятся в идентичных условиях внешнего нагружения. Эксплуатация одного из элементов начинается на некоторое время  $\tau$  раньше другого. Данное обстоятельство позволяет осуществление прогноза перемещения «отстающего» элемента, исходя из поведения обобщённого перемещения первого элемента, называемого прототипом (лидером).

Отметим, что первая попытка разработки метода прогнозирования инди-

видуального деформационного ресурса по изделию-лидеру реализована в работе [78] для режимов нагружения (эксплуатации) при фиксированной температуре, однако этот метод и методика идентификации параметров соответствующей модели имеют ряд недостатков, о которых пойдет речь ниже.

В данной главе подход, предложенный в [78], существенно модифицируется (в частности, на режимы при переменном температурно-силовом напряжении) и иллюстрируется на примере растягиваемых стержней из поливинилхлоридного пластика в условиях неизотермической ползучести, осевого растяжения резьбового соединения в условиях ползучести и износа узла трения передней стойки шасси самолета.

### **3.1. Методы прогнозирования индивидуальных деформационных характеристик стержневых элементов конструкций по изделию-лидеру в пределах первых двух стадий ползучести**

Сначала рассмотрим некоторые общие замечания математического характера, которые будут использоваться в дальнейшем исследовании. Отметим, что для цилиндрических образцов, изготовленных из металлов, значения нормированной корреляционной матрицы по временным сечениям по всему объему кривых обобщенного перемещения имеют порядок 0.7–0.9, а для полимерных стержневых конструкций — 0.995–0.999. Учитывая данный факт, вводится предположение, что при одинаковых входных воздействиях кривые обобщенного перемещения для образца-лидера (маркер 1 на рис. 3.2) и эксплуатируемого образца (маркер 2), но смещенного влево на величину  $\tau$  по оси времени (маркер 3), подобны. Поэтому в дальнейшем все зависимости для перемещений образца-лидера и исследуемого эксплуатируемого образца будут относиться к графикам с маркерами 1 и 3.

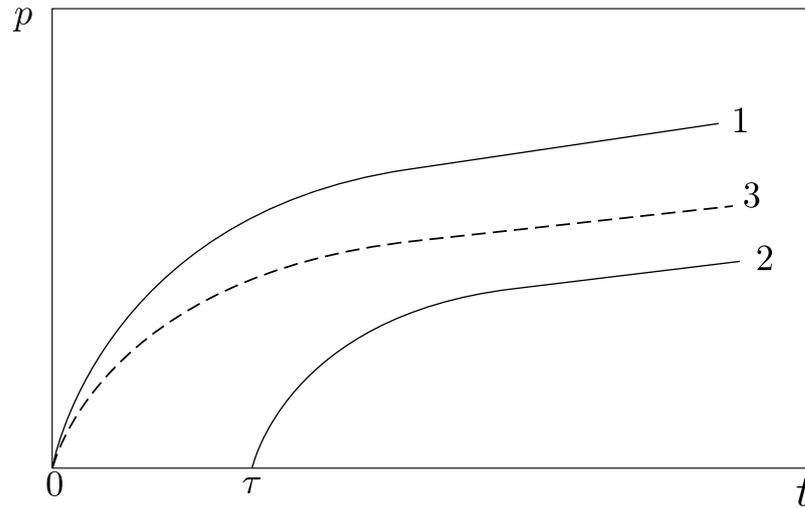


Рис. 3.2. Схема оценки деформационных характеристик обобщенного перемещения по изделию-лидеру

Поскольку в дальнейшем расчеты по разработанному в настоящей диссертации методу будут сопоставляться с расчетами по методике, изложенной в [78], то метод работы [78] будем называть «классическим». Принимая гипотезу о подобии, связь между обобщенными перемещениями образца-лидера и исследуемого элемента конструкции может быть представлена в виде матричной модели одномерной линейной регрессии:

$$\bar{p} = k\bar{p}^0 + \bar{\varepsilon}, \quad (3.1)$$

где  $\bar{p} = \{p(t_1), p(t_2), \dots, p(t_n)\}^T$  — вектор значений обобщенного перемещения исследуемого элемента на начальном этапе эксплуатации;  $\bar{p}^0 = \{p^0(t_1), p^0(t_2), \dots, p^0(t_n)\}^T$  — вектор значений обобщенного перемещения изделия-лидера;  $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}^T$  — вектор несмещенных, некоррелированных, нормально распределенных и имеющих одинаковую дисперсию ошибок;  $t_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — значения времени, в которых фиксировались значения обобщенных перемещений для обоих изделий;  $k$  — случайный параметр;  $T$  — оператор транспонирования.

Используя соотношения линейного регрессионного анализа, можно получить МНК-оценки математического ожидания неизвестного параметра  $k$ :

математического ожидания —

$$\hat{k} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^0 p_i}{\sum_{i=1}^n (p_i^0)^2} \quad (3.2)$$

и дисперсии ошибок —

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^2 - \hat{k}^2 \sum_{i=1}^n (p_i^0)^2}{n - 1}, \quad (3.3)$$

где введены обозначения  $p_i = p(t_i)$ ,  $p_i^0 = p^0(t_i)$ .

Прогноз обобщенного перемещения исследуемого элемента конструкции может быть осуществлён с помощью соотношения

$$\hat{p}(t) = \hat{k} \cdot p^0(t), \quad (3.4)$$

где  $t > t_n$ ,  $t_n$  — крайняя правая точка базы наблюдения на начальном участке обобщённого перемещения исследуемого образца.

Для решения задачи о надёжности необходимо указать еще доверительную полосу, которая с определенной вероятностью «покроет» истинные значения обобщённого перемещения исследуемого объекта. Построение  $100(1 - \alpha)\%$ -ных доверительных интервалов можно осуществить по формулам [124]

$$\hat{p}_j \pm U_{N,n-1}^\alpha \cdot s_0 (1 + v_*^j)^{1/2}, \quad (3.5)$$

$$v_*^j = \frac{1}{n} + \frac{(p_j^0)^2}{\sum_{i=1}^n (p_i^0)^2} \quad (j = \overline{1, N}), \quad (3.6)$$

где  $N$  — число точек прогноза исследуемого элемента при  $t > t_n$ , значения  $U_{N,n-1}^\alpha$  берутся из специальных таблиц [124],  $\alpha$  — степень риска.

Рассмотрим применение «классического» метода [78] для индивидуально-го прогнозирования вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластика при различных температурах и напряжениях. В работе [106] приведены экспериментальные данные для полых трубчатых образцов длиной 1000 мм и

площадью поперечного сечения  $1.2 \text{ мм}^2$  для двух температур:  $20$  и  $24 \text{ }^\circ\text{C}$  и пяти уровней растягивающего напряжения  $\sigma$  ( $4.65; 6.29; 8.34; 10.37; 12.01$ ) МПа. На рис. 3.3 приведены экспериментальные зависимости для вязкоупругой деформации (обобщённого перемещения)  $p = p(t)$  при различных сочетаниях температуры  $T$  и напряжений  $\sigma$  (10 реализаций соответственно) на интервале времени  $t \in [0; 8]$  час.

На первом этапе кривые вязкоупругого деформирования стержней, представленные на рис. 3.3, с использованием средств математической статистики проверялись на подобие (формула 3.4). Для этого рассчитывалась нормированная корреляционная функция  $r(t_i, t_j)$ , вычисление которой производилось для различных пар  $(t_i, t_j)$ , образованных в моменты времени  $t = \{0.25; 0.5; 1.0; 2.0; 3.0; 4.0; 5.0; 6.0; 7.0; 8.0\}$  час, в соответствии с формулами:

$$m(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N p_l(t_i), \quad (3.7)$$

$$k(t_i, t_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^N [p_l(t_i) - m(t_i)] \cdot [p_l(t_j) - m(t_j)],$$

$$s(t_j) = \sqrt{k(t_i, t_j)}, \quad r(t_i, t_j) = \frac{k(t_i, t_j)}{s(t_i)s(t_j)}, \quad i, j = \overline{1, 10},$$

где  $p_l(t_i)$  — значения вязкоупругого деформирования  $p$  образца с номером  $l$  в момент времени  $t = t_i$ .

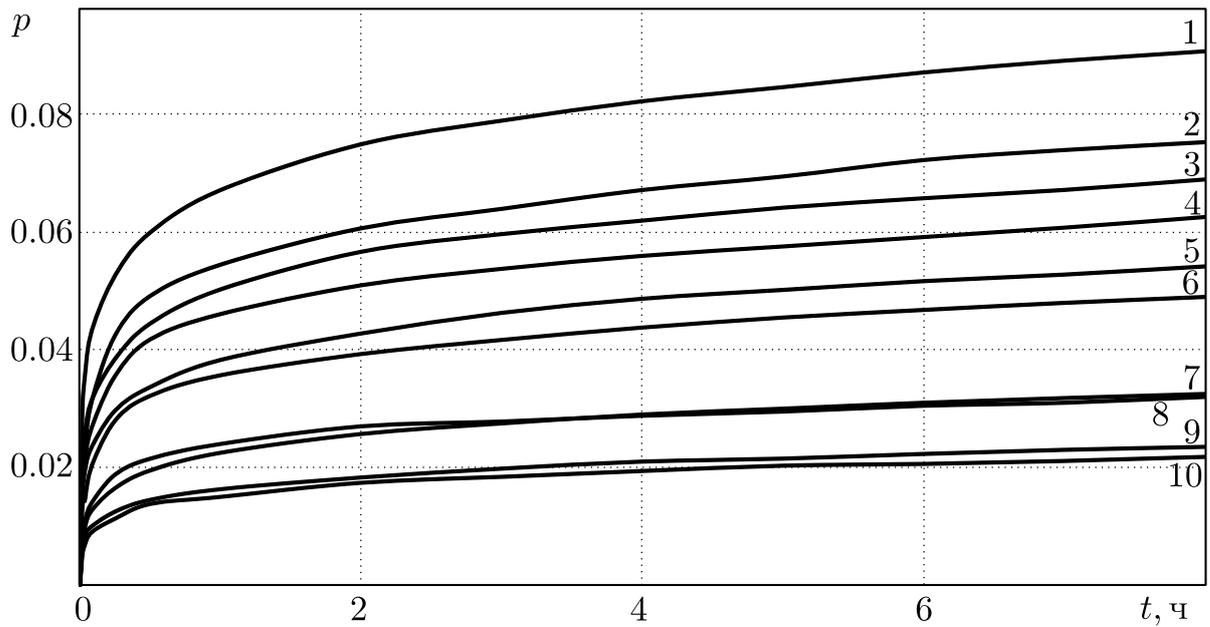


Рис. 3.3. Кривые вязкоупругого деформирования  $p = p(t)$  поливинилхлоридного пластиката. Маркеры: 1 –  $\sigma = 12.01$  МПа,  $T = 24$  °С; 2 –  $\sigma = 12.01$  МПа,  $T = 20$  °С; 3 –  $\sigma = 10.37$  МПа,  $T = 24$  °С; 4 –  $\sigma = 10.37$  МПа,  $T = 20$  °С; 5 –  $\sigma = 8.74$  МПа,  $T = 24$  °С; 6 –  $\sigma = 8.74$  МПа,  $T = 20$  °С; 7 –  $\sigma = 6.29$  МПа,  $T = 24$  °С; 8 –  $\sigma = 6.29$  МПа,  $T = 20$  °С; 9 –  $\sigma = 4.66$  МПа,  $T = 24$  °С; 10 –  $\sigma = 4.66$  МПа,  $T = 20$  °С

В результате получена следующая нормированная корреляционная матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.997 & 0.998 & 0.998 & 0.999 & 0.998 & 0.999 & 0.999 & 0.998 & 0.996 \\ & 1 & 0.998 & 0.999 & 0.999 & 0.996 & 0.996 & 0.997 & 0.998 & 0.998 \\ & & 1 & 0.999 & 0.999 & 0.996 & 0.997 & 0.997 & 0.997 & 0.997 \\ & & & 1 & 0.999 & 0.997 & 0.997 & 0.998 & 0.999 & 0.996 \\ & & & & 1 & 0.996 & 0.998 & 0.998 & 0.999 & 0.998 \\ & & & & & 1 & 0.998 & 0.999 & 0.999 & 0.998 \\ & & & & & & 1 & 0.999 & 0.997 & 0.995 \\ & & & & & & & 1 & 0.999 & 0.998 \\ & & & & & & & & 1 & 0.999 \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Дискретные значения коэффициентов корреляционной матрицы имеют порядок 0.955–0.999, что свидетельствует о хорошей обоснованности гипотезы по-

добия (3.4) и, соответственно, применимости метода прогнозирования по образцу-лидеру. Для прогнозирования вязкоупругого деформирования по модели (3.1)–(3.6) в качестве образца-лидера случайным образом был выбран образец с номером 2 при температуре  $T = 20^\circ\text{C}$ . В качестве базы наблюдений на начальном этапе эксплуатации использовался интервал  $t \in [0; 2]$  часов. Согласно изложенной выше методике, были определены все параметры модели (3.1)–(3.6). На рис. 3.4 – 3.6 в качестве примера сплошными линиями приведены экспериментальные данные, штрих-пунктирными — результаты прогноза математического ожидания на основании (3.4) для  $t \in [2; 8]$ , а штриховыми — 95 %-ный доверительный интервал для вязкоупругой деформации девяти образцов. Отметим, что в данном случае конструктивные элементы (стержни) находятся в разных режимах температурно-силового нагружения, и тем не менее получены адекватные результаты прогноза.

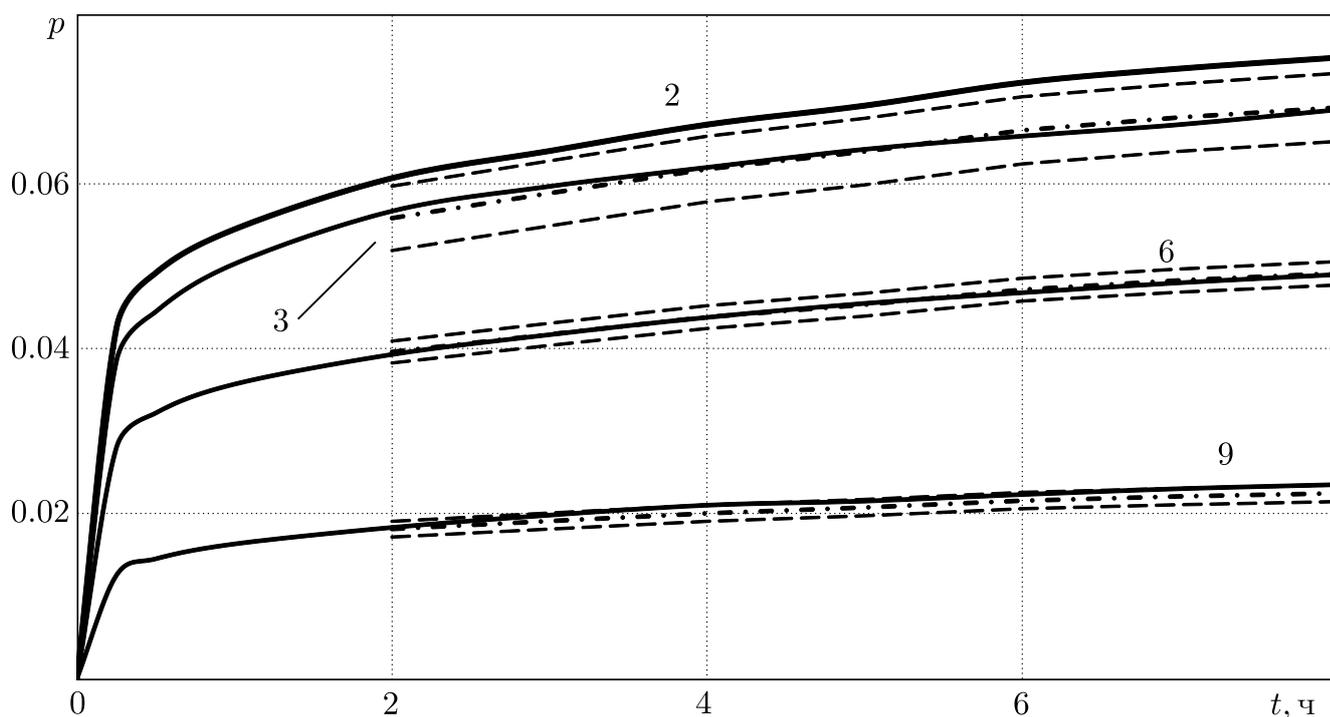


Рис. 3.4. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (образец 2) вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластика по модели [78] для образцов 3, 6 и 9: 3 –  $\sigma = 10.37$  МПа,  $T = 24$  °С; 6 –  $\sigma = 8.74$  МПа,  $T = 20$  °С; 9 –  $\sigma = 4.66$  МПа,  $T = 24$  °С

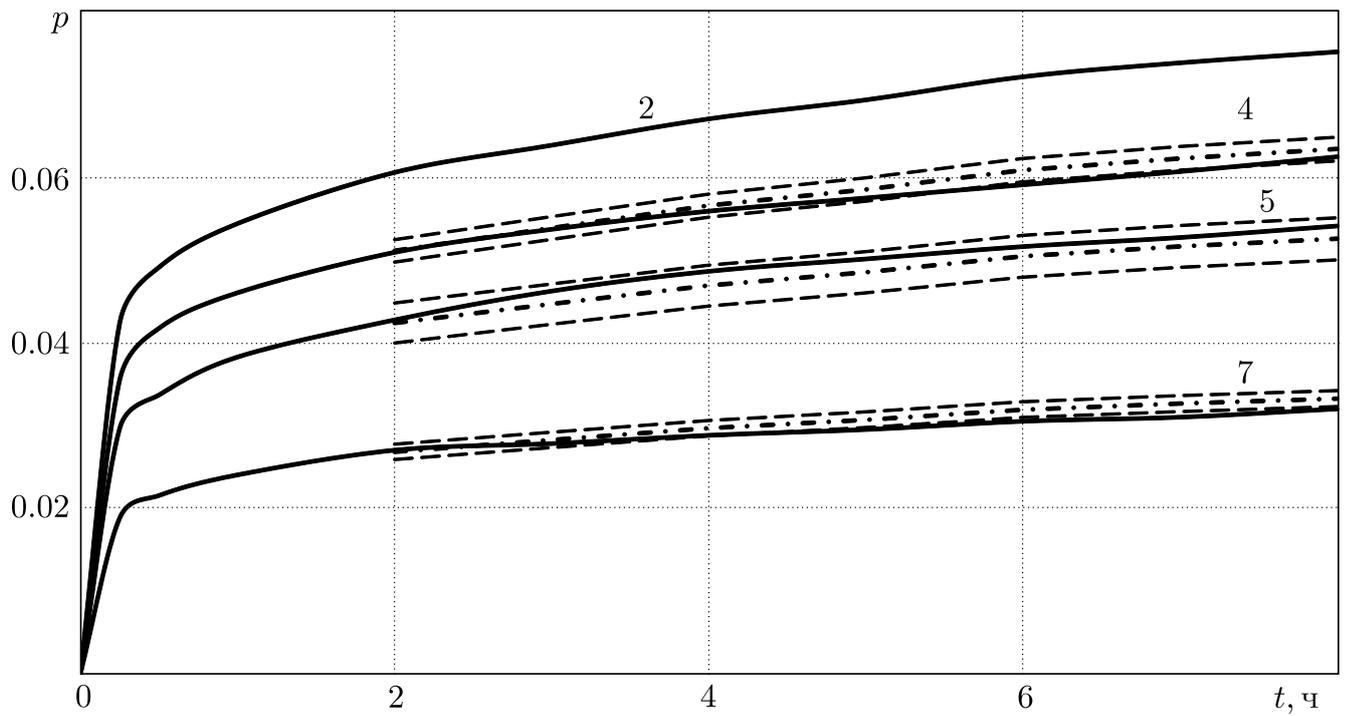


Рис. 3.5. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (образец 2) вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластиката по модели [78] для образцов 4, 5 и 7: 4 –  $\sigma = 10.37$  МПа,  $T = 20$  °С; 5 –  $\sigma = 8.74$  МПа,  $T = 24$  °С; 7 –  $\sigma = 6.29$  МПа,  $T = 24$  °С

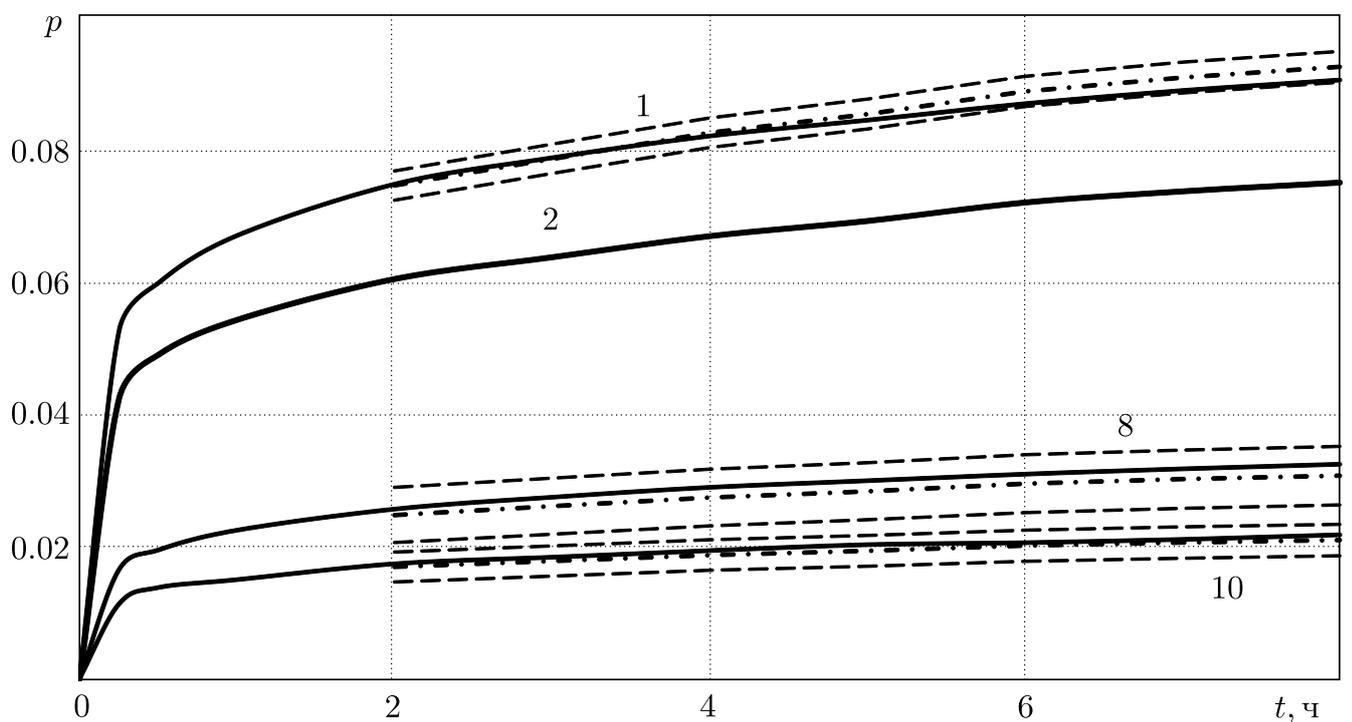


Рис. 3.6. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (образец 2) вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластиката по модели [78] для образцов 1, 8 и 10: 1 –  $\sigma = 12.01$  МПа,  $T = 24$  °С; 8 –  $\sigma = 6.29$  МПа,  $T = 20$  °С; 10 –  $\sigma = 4.66$  МПа,  $T = 20$  °С

Рассмотренный выше «классический» метод индивидуального прогнозирования обобщенного перемещения на основании (3.1) – (3.6) обладает (помимо привязки к фиксированной температуре) одним недостатком: прогноз не привязан к финальному экспериментальному значению перемещения в конце базового интервала времени  $t = t_n$  и, соответственно, к первой точке интервала прогнозирования ( $t \geq t_n$ ). И если не учитывать погрешность эксперимента и другие случайные факторы, т.е. считать измеренное экспериментальное значение обобщенного перемещения в точке  $t = t_n^*$  точным, то доверительный интервал в этой точке должен быть нулевым. Поэтому модифицируем методику (3.1)–(3.6) следующим образом: поскольку известно значение обобщенное перемещение в точке  $t = t_n$ , то необходимо оценку среднеквадратичного отклонения выполнить с учётом условной вероятности. Тогда вместо величины среднеквадратического отклонения  $s_0$  в (3.5) нужно использовать величину

$$s_* = s_1 \cdot \sqrt{1 - (r_*)^2}, \quad (3.8)$$

$$r_* = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i - \hat{p})(p_i^0 - \hat{p}^0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - \hat{p})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^0 - \hat{p}^0)^2}}, \quad (3.9)$$

где  $p_i$  и  $p_i^0$  — значения обобщенного перемещения образца лидера и прогнозируемого образца в точках  $t = t_i$  соответственно,  $\hat{p}$ ,  $\hat{p}^0$  — осреднённые значения величин  $p_i$  и  $p_i^0$ ,  $s_1$  — среднеквадратичное отклонение прогнозируемого образца, вычисляемое по формуле  $s_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (p_i - \hat{p})^2}$ .

Результаты расчётов по модифицированной методике для вязкоупругих стержней для тех же номеров образцов, что и на рис. 3.4– 3.6, приведены на рис. 3.7– 3.9, значения параметров модели (3.1)–(3.6), (3.9), представлены в табл. 3.1.

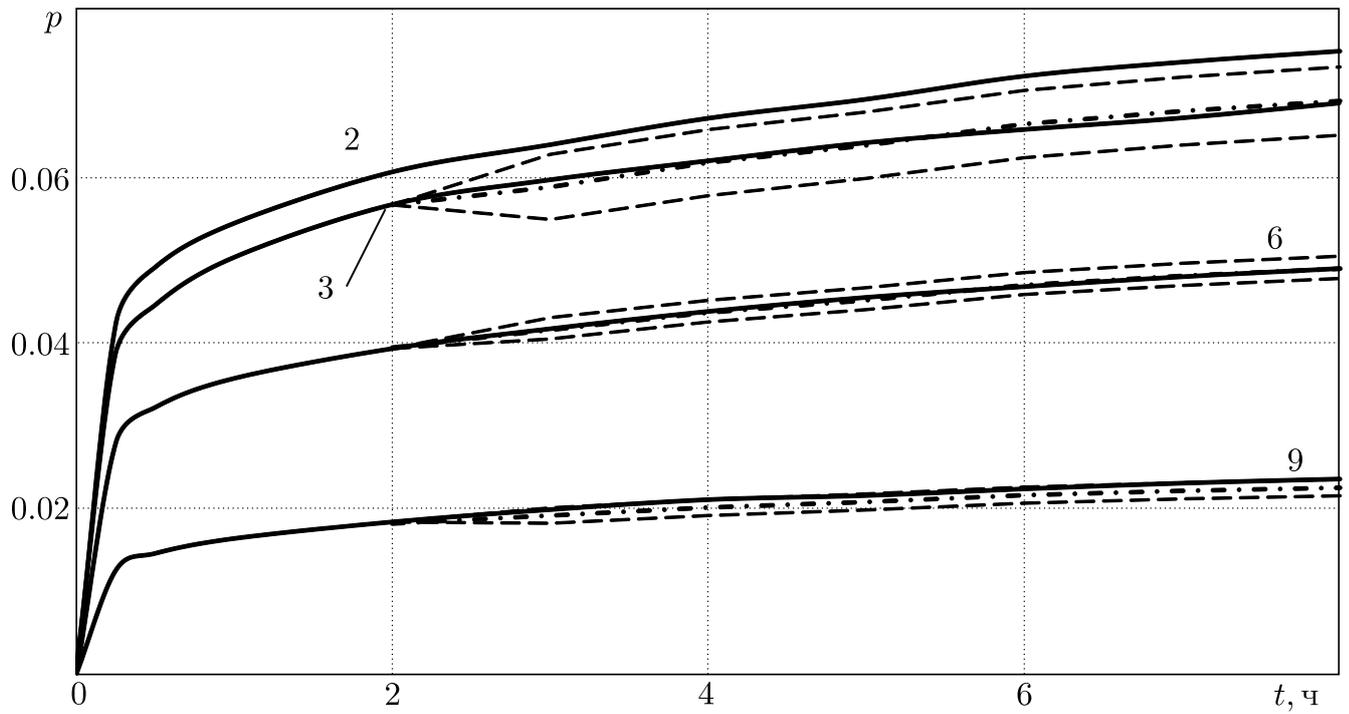


Рис. 3.7. Индивидуальное прогнозирование вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластика по образцу лидеру (образец 2) для образцов 3, 6 и 9 по модифицированной модели: 3 –  $\sigma = 10.37$  МПа,  $T = 24$  °С; 6 –  $\sigma = 8.74$  МПа,  $T = 20$  °С; 9 –  $\sigma = 4.66$  МПа,  $T = 24$  °С

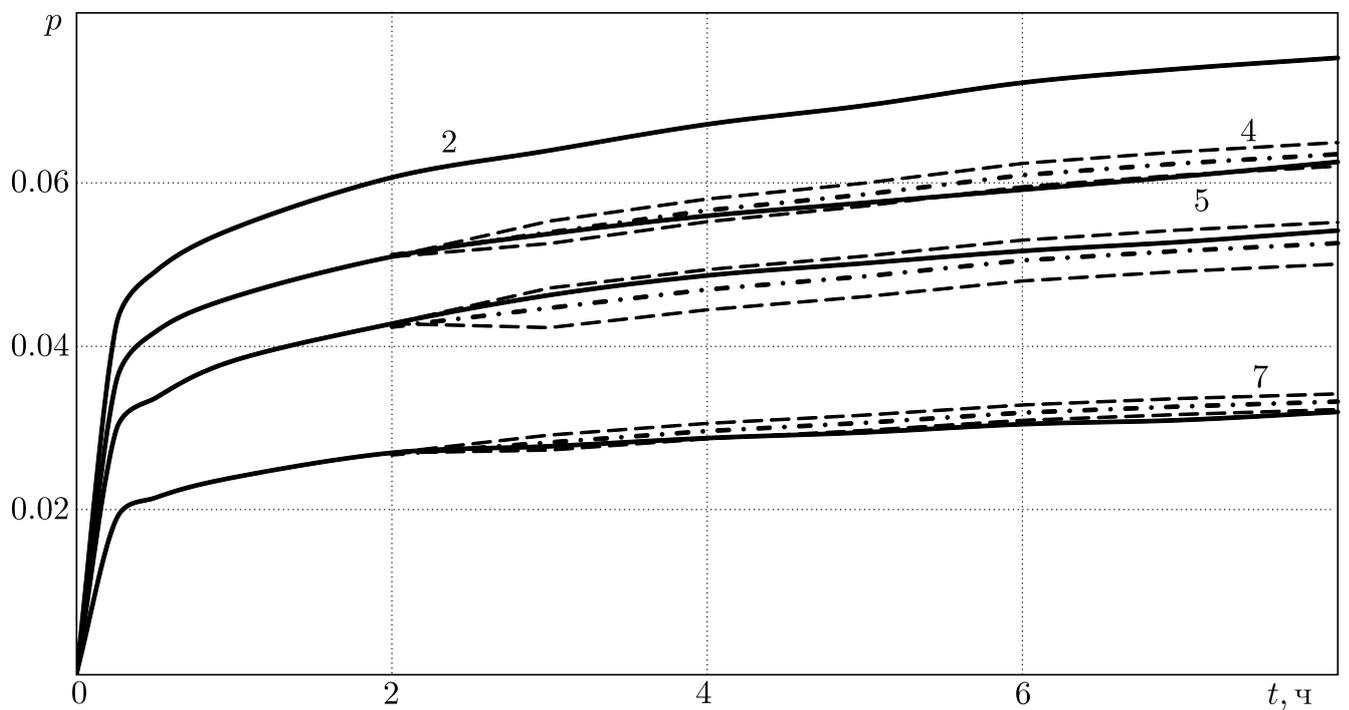


Рис. 3.8. Индивидуальное прогнозирование вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластика по образцу лидеру (образец 2) для образцов 4, 5 и 7: 4 –  $\sigma = 10.37$  МПа,  $T = 20$  °С; 5 –  $\sigma = 8.74$  МПа,  $T = 24$  °С; 7 –  $\sigma = 6.29$  МПа,  $T = 24$  °С

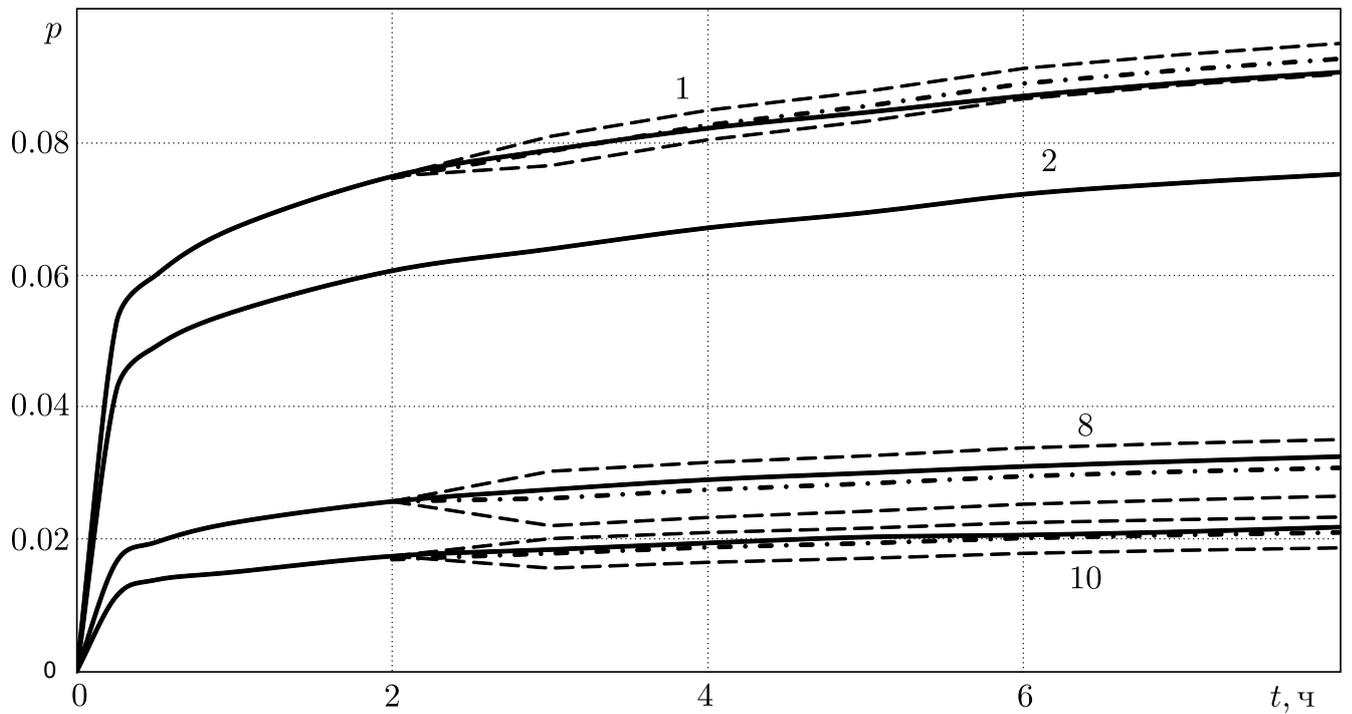


Рис. 3.9. Индивидуальное прогнозирование вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластика по образцу лидеру (образец 2) для образцов 1, 8 и 10: 1 –  $\sigma = 12.01$  МПа,  $T = 24^\circ\text{C}$ ; 8 –  $\sigma = 6.29$  МПа,  $T = 20^\circ\text{C}$ ; 10 –  $\sigma = 4.66$  МПа,  $T = 20^\circ\text{C}$

Таблица 3.1. Значения расчётных величин (3.1)–(3.6), (3.8) стохастических моделей для вязкоупругого стержня

Номер образца	$\hat{k}$	$s_0$	$s_*$
1	1.23	$3.863 \cdot 10^{-4}$	$3.859 \cdot 10^{-4}$
3	0.92	$6.52 \cdot 10^{-4}$	$6.36 \cdot 10^{-4}$
4	0.84	$2.28 \cdot 10^{-4}$	$2.27 \cdot 10^{-4}$
5	0.69	$4.05 \cdot 10^{-4}$	$4.02 \cdot 10^{-4}$
6	0.65	$2.24 \cdot 10^{-4}$	$2.14 \cdot 10^{-4}$
7	0.44	$1.54 \cdot 10^{-4}$	$1.53 \cdot 10^{-4}$
8	0.41	$7.02 \cdot 10^{-4}$	$6.81 \cdot 10^{-4}$
9	0.3	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$1.55 \cdot 10^{-4}$
10	0.28	$3.79 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$

Отметим два важных факта. Во-первых, определение характеристик стохастической модели (3.1)–(3.9) было выполнено на временной базе  $t \in [0; 2]$ , а удовлетворительный прогноз получен на интервал  $t \in [2; 8]$ , т.е. интервал прогнозирования в три раза больше базового интервала. Во-вторых, несмот-

ря на то, что в качестве образца-лидера выбран образец №2 при температуре  $T = 20\text{ }^\circ\text{C}$  и напряжении  $\sigma = 12.01\text{ МПа}$ , удовлетворительный прогноз получен и для образцов при температуре  $T = 24\text{ }^\circ\text{C}$ , причем для различных значений напряжения.

Другими словами, для рассмотренных стержневых элементов из поливинилхлоридного пластика роль играет не величина обобщенной нагрузки (напряжение), а вид напряжения — постоянная величина нагрузки при растяжении.

## **3.2. Индивидуальное прогнозирование кинетики обобщенных перемещений узлов трения и растягиваемого резьбового соединения по изделию-лидеру**

Рассмотрим применение изложенного в п. 3.1 метода индивидуального прогнозирования по лидеру к узлам трения (буксам) передней стойки шасси самолета [23]. В качестве обобщенного перемещения используется величина зазора в узлах сопряжения  $\Delta$  (мкм) (см. рис. 3.10) в зависимости от числа взлето-посадок (обобщенного «времени»  $t$ ). Информацию о характере зависимости  $\Delta = \Delta(t)$  и величине её разброса дают экспериментальные данные износа передней стойки шасси самолёта для десяти различных изделий [23], которые представлены на рис. 3.10. Здесь маркеры — номера изделий, а также представлена схема определения величины  $\Delta$  ( $F$  — приложенная нагрузка до достижения контакта внутреннего и внешнего цилиндров) в соответствии с хорошо зарекомендовавшим себя методом жёсткости [68].

Выполнена проверка на соответствие кривых, представленных на рис. 3.10, гипотезе подобия. Значения нормированной корреляционной функции  $r(t_i, t_j)$ , вычисленные по (3.7) для различных пар  $(t_i, t_j)$ , образованных в «моменты вре-

мени»  $t = \{300; 600; 900; 1200; 1500; 1800; 2100; 2400; 2700\}$  ( $t$ — взлётно-посадки),  
представлены матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & 0.97 & 0.95 & 0.95 & 0.97 & 0.95 & 0.95 & 0.97 \\ & 1 & 0.96 & 0.97 & 0.95 & 0.96 & 0.96 & 0.97 & 0.97 \\ & & 1 & 0.95 & 0.95 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.97 \\ & & & 1 & 0.95 & 0.95 & 0.96 & 0.96 & 0.96 \\ & & & & 1 & 0.96 & 0.97 & 0.97 & 0.97 \\ & & & & & 1 & 0.96 & 0.96 & 0.96 \\ & & & & & & 1 & 0.95 & 0.97 \\ & & & & & & & 1 & 0.97 \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} .$$

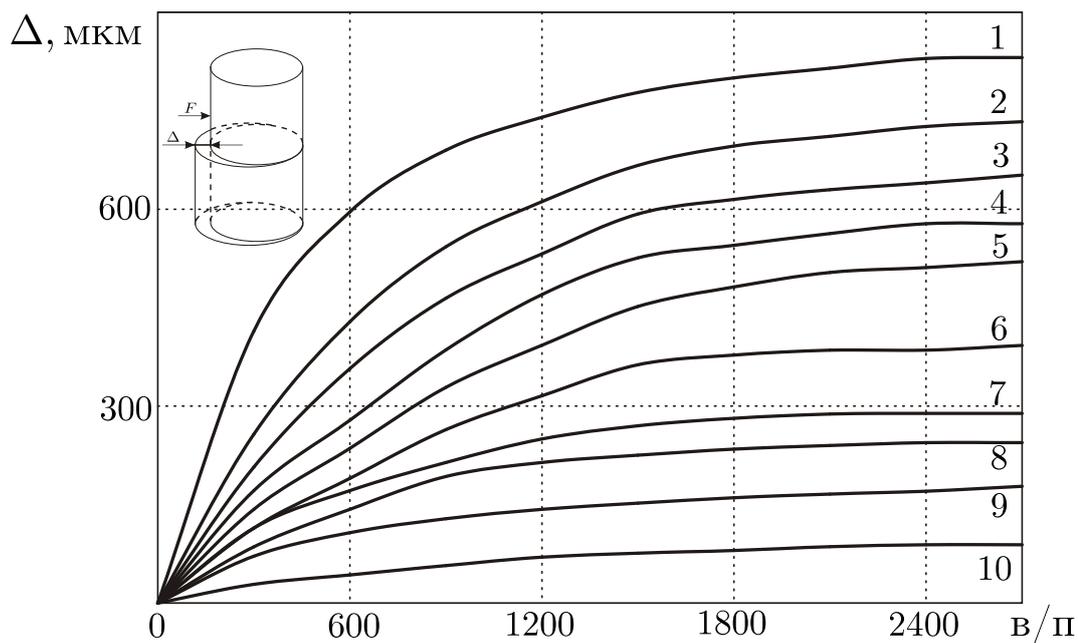


Рис. 3.10. Кривые износа передней стойки шасси самолёта в зависимости от взлётно-посадок

Учитывая, что дискретные величины нормированной корреляционной функции принимают значения 0.95–0.97, можно с высокой степенью достоверности принять гипотезу подобия кривых износа узла трения передней стойки шасси самолета, представленных на рис. 3.10.

Для прогнозирования обобщённого перемещения по изложенной «классической» методике (3.1)–(3.6) в качестве лидера в результате случайного выбора использовался образец №2. В качестве базы наблюдений на начальном этапе эксплуатации использовался интервал  $t \in [0; 1200]$  взлёто-посадок. Согласно изложенной выше методике были определены все параметры модели (3.1)–(3.6) для остальных реализаций. На рис. 3.11, 3.12 в качестве примера сплошными линиями приведены экспериментальные данные, штрих-пунктирными — результаты прогноза для математического ожидания на основании (3.4) при  $t \in [1200; 2700]$ , а штриховыми — 95 %-ный доверительный интервал величины  $\hat{p}(t)$  для шести реализаций: №3, №6 и №9 (рис. 3.11) и №5, №8 и №10 (рис. 3.12).

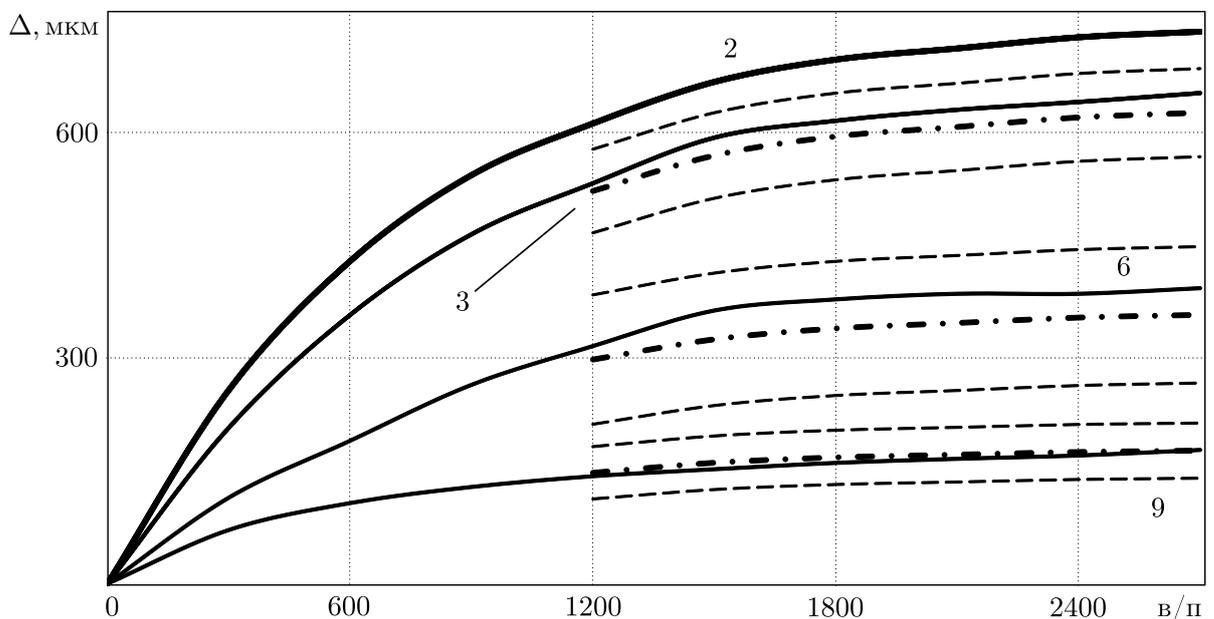


Рис. 3.11. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (образец 2) износа узла трения передней стойки шасси самолета по модели [78] для изделий 3, 6 и 9

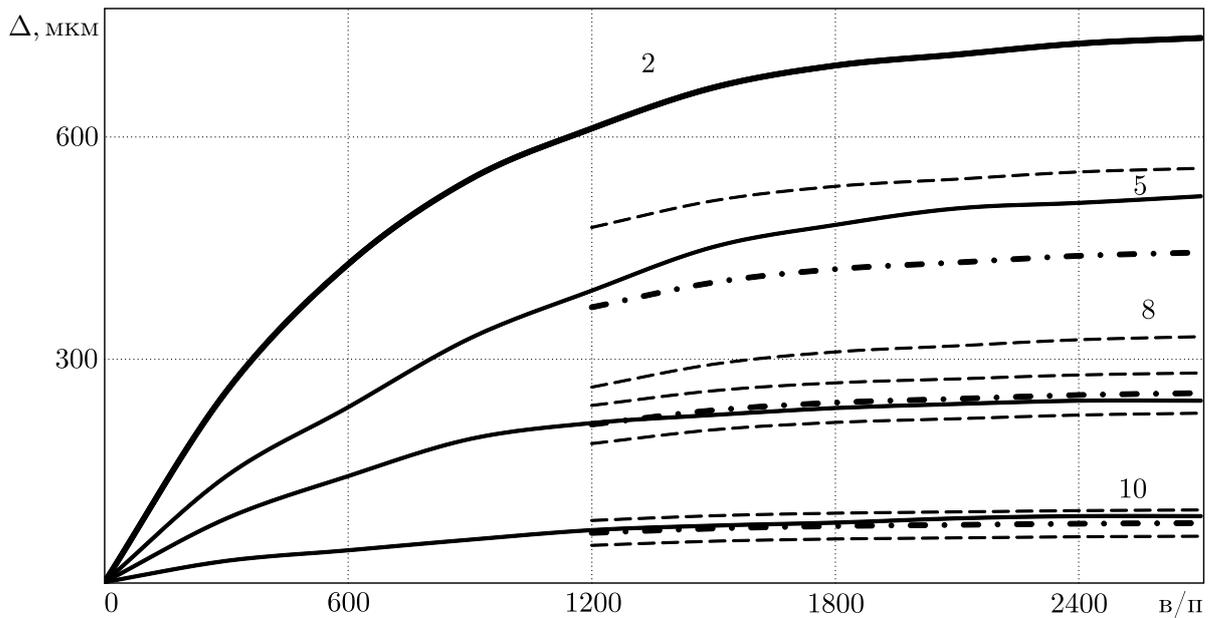


Рис. 3.12. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (образец 2) износа узла трения передней стойки шасси самолета по модели [78] для изделий 5, 8 и 10

На рис. 3.13 на основе известного «классического» метода приведены аналогичные результаты для осевого смещения торцевых сечений  $\Delta l_p = \Delta l_p(t)$  области свинчивания резьбового соединения длиной 20 мм из стали 45 при  $T = 450^\circ\text{C}$  в условиях ползучести при сложных программах изменения осевой растягивающей нагрузки  $Q$  по результатам экспериментальных данных для двух образцов, приведенных в работе [81]. Здесь дискретные экспериментальные значения зависимости  $\Delta l_p = \Delta l_p(t)$  участка свинчивания для образцов с маркерами I и II представлены кружочками и крестиками соответственно. Здесь для прогнозирования осевого перемещения торцевых сечений в качестве образца-лидера использовался образец с маркером II. В качестве базы наблюдений на начальном этапе эксплуатации использовался интервал  $t \in [0; 17.4]$  часов. Согласно изложенной выше методике, были определены все параметры модели (3.1)–(3.6). На рис. 3.13 закрашенные кружочки (точки) соответствуют расчётным значениям математического ожидания, а штриховыми линиям — 95 %-ный интервал доверительный интервал для математического ожидания образца с маркером I для  $t \in [17.4; 75]$  час.

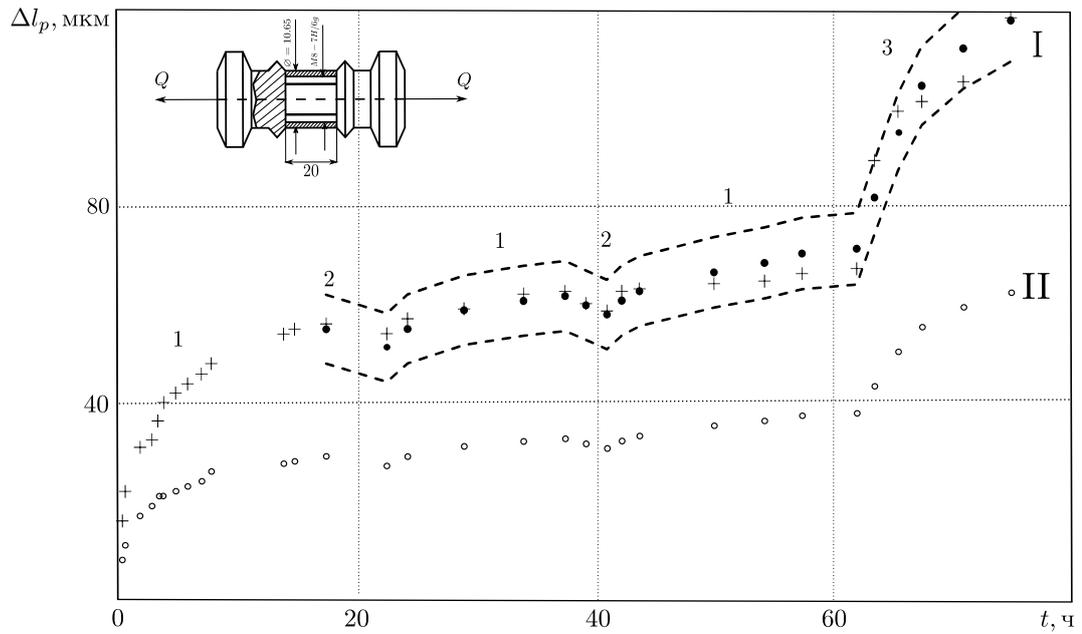


Рис. 3.13. Индивидуальное прогнозирование осевого смещения  $\Delta l_p$  на основе (3.1)–(3.6) по модели [78] в условиях ползучести образца I по изделию-лидеру II: кружочки — экспериментальные значения  $\Delta l_p$  образца II; крестики — экспериментальные значения  $\Delta l_p$  образца I; закрашенные кружочки — расчетные осреднённые значения  $\Delta l_p$  образца I; штриховые линии — 95-процентный доверительный интервал. Маркеры: 1 —  $Q = 6.86$  кН; 2 —  $Q = 0.98$  кН; 3 —  $Q = 9.86$  кН

Далее применим модифицированную методику, изложенную в п. 3.1 настоящей диссертационной работы, для узлов трения и резьбовых соединений для изделий с теми же номерами, что и на рис. 3.11 – 3.13. Соответствующие расчетные данные приведены на рис. 3.14 – 3.16, а значения параметров модели (3.1)–(3.6), (3.8), (3.9) представлены в табл. 3.2.

Таблица 3.2. Индивидуальные значения расчётных величин (3.1)–(3.6), (3.9) стохастических моделей для конструктивных элементов

номер «изделия»	$\hat{k}$	$s_0$	$s_*$
Узел трения			
3	0.85	9.09	8.08
5	0.61	17.63	16.43
6	0.49	14.07	13.06
8	0.35	4.22	3.95
9	0.24	5.69	4.98
10	0.11	2.75	2.72
Резбовое соединение			
I	1.89	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$

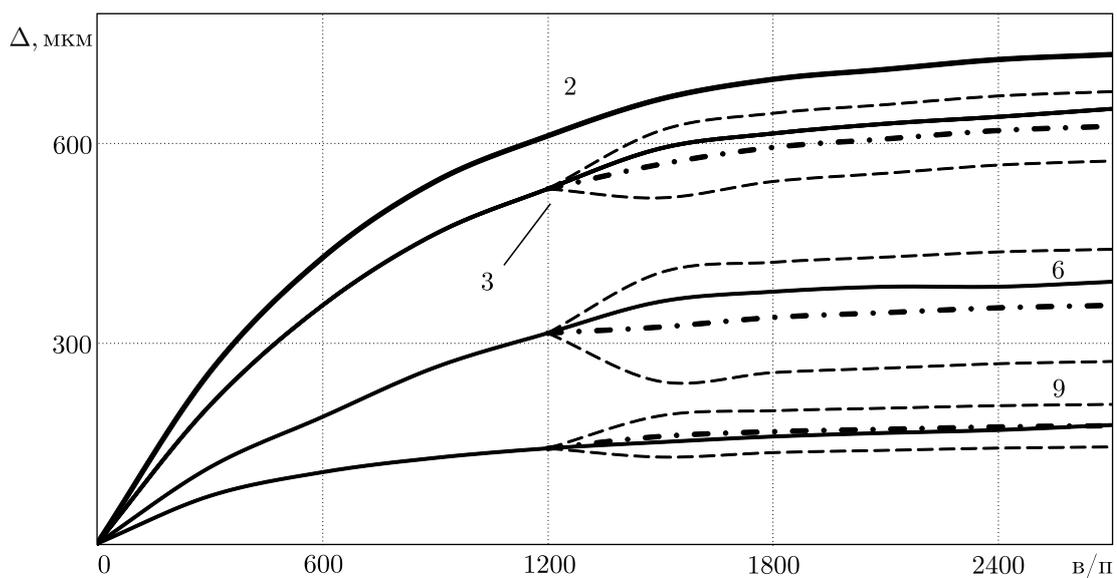


Рис. 3.14. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (изделие 2) износа узла трения передней стойки шасси самолета для изделий 3, 6 и 9 по модифицированной методике

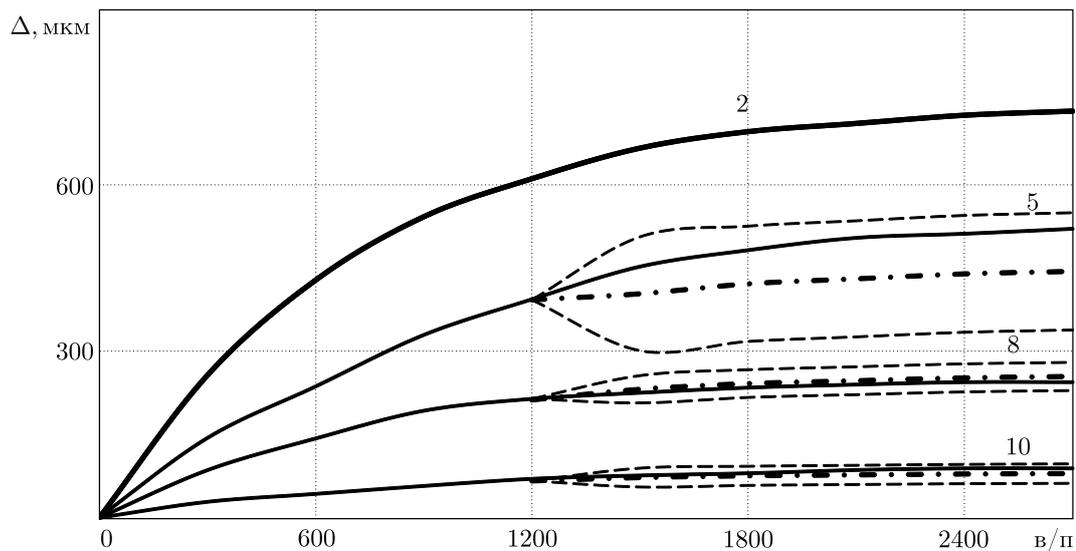


Рис. 3.15. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (изделие 2) износа узла трения передней стойки шасси самолета для изделий 5, 8 и 10 по модифицированной методике

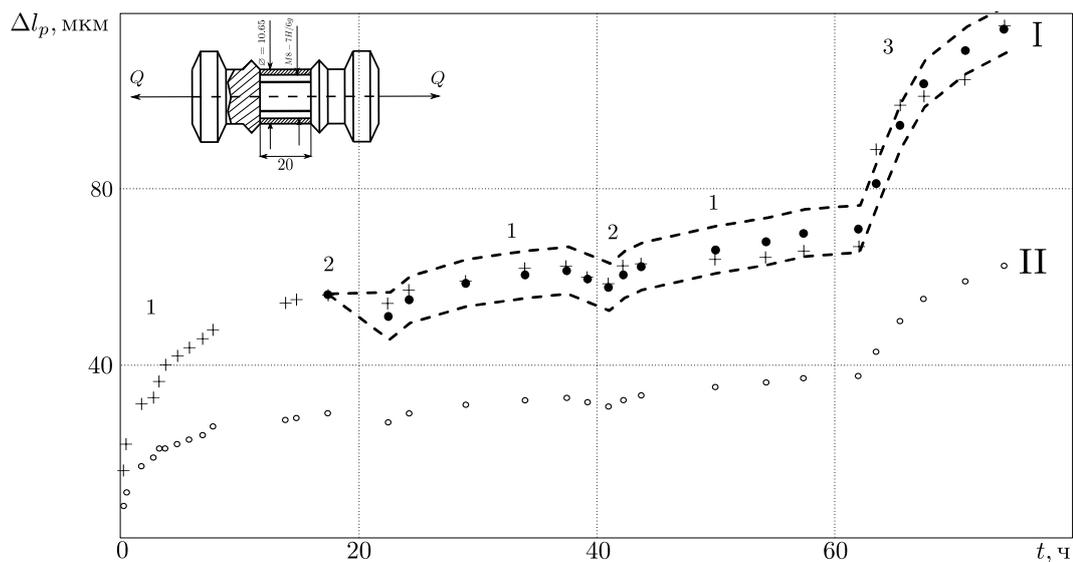


Рис. 3.16. Индивидуальное прогнозирование осевого смещения  $\Delta l_p$  в условиях ползучести образца I по изделию-лидеру II по модифицированной методике: кружочки — экспериментальные значения  $\Delta l_p$  образца II; крестики — экспериментальные значения  $\Delta l_p$  образца I; закрашенные кружочки — расчетные осреднённые значения  $\Delta l_p$  образца I; штриховые линии — 95-процентный доверительный интервал. Маркеры: 1 —  $Q = 6.86$  кН; 2 —  $Q = 0.98$  кН; 3 —  $Q = 9.86$  кН

Таким образом, предложен и реализован метод индивидуального прогнозирования обобщённого перемещения эксплуатирующихся элементов конструкций по изделию-лидеру, который не требует аналитических соотношений, связывающих обобщенные нагрузки с обобщёнными силами, точного знания характера и величины нагрузок для совокупности однотипных изделий. Конкретно полученные положительные результаты для рассмотренных в работе элементов конструкций следующие. Так, прогноз износа буксы стойки шасси самолёта по изделию-лидеру на «временной» интервал  $t \in [1200; 2700]$  (в/п), который больше базового «времени» ( $t \in [0; 1200]$  (в/п)), в рамках которого определялись оценки случайных параметров процесса, даёт хорошие результаты. Аналогично построенный прогноз для деформации ползучести стержней из поливинилхлоридного пластика на временной интервал  $t \in [2; 8]$  (час), который в 3 раза больше базового времени  $t \in [0; 2]$  (час) также даёт хорошие результаты, при этом результаты прогнозирования распространяются на температуры  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  и  $T = 24 \text{ }^\circ\text{C}$  и различные уровни приложенных напряжений. Построенный прогноз процесса ползучести резьбового соединения из стали 45 на временной интервал  $t \in [17.4; 75]$  часов, который в 4 раза больше базового времени  $t \in [0; 17.4]$  часов, даёт хороший результат и при нестационарных (ступенчатых) режимах нагрузки.

Отметим, что недостатки любой теории или математической модели наиболее контрастно проявляются именно при ступенчатых режимах изменения силового нагружения [69]. И если для таких режимов нагружения наблюдается соответствие расчетных и экспериментальных данных, то можно с полной уверенностью сделать заключение об адекватности модели для любых режимов нагружения.

В качестве примера обратимся к анализу информации, представленной на рис. 3.16. Здесь величины  $\hat{k}$ ,  $s_0$  и  $s_*$  (см. табл. 3.2) определены по экспериментальным данным на участке деформирования резьбового соединения при постоянном внешнем воздействии  $Q = 6.86 \text{ кН}$ . Прогноз же осуществляется при

этих же оценках модели уже для сложных ступенчатых режимов изменения растягивающей нагрузки  $Q$ , включая почти полную разгрузку ( $Q = 0.98$  кН) с обратимой компонентой обобщенного перемещения вследствие ползучести (режимы 2 на рис. 3.16), и тем не менее получены удовлетворительные результаты для расчета прогнозируемых значений обобщенного перемещения.

### **3.3. Прогнозирование деформационных характеристик и длительной прочности элементов конструкций по изделию-лидеру в условиях вязкого механизма разрушения материалов**

В п. 3.2 рассмотрен метод индивидуального прогнозирования кинетики деформационных характеристик в результате длительного воздействия внешних нагрузок в пределах двух стадий: упрочнения (первая стадия) и установившейся стадии накопления необратимых изменений в материале или конструктивном элементе. Однако на практике необходимо считаться не только с накопленными во времени значениями обобщенных перемещений, если есть ограничения на максимальную (критическую) их величину, но и с проблемой разрушения материала или детали вследствие накопления необратимых дефектов или поврежденности. Поэтому, например в условиях реологического деформирования при высоких температурах, возникает проблема оценки времени до разрушения материала (его длительной прочности). Решение такого рода задачи невозможно без учета третьей стадии кинетики обобщенного перемещения. Поэтому в данном разделе ставится задача прогнозирования деформационных характеристик и длительной прочности на примере ползучести стержневых элементов при наличии второй и третьей стадий в рамках механизма вязкого разрушения материала, реализующегося при очень высоких температурах, с использованием изложенной ранее идеологии прогнозирования по изделию-лидеру. При вяз-

ком разрушении, как правило, на диаграмме деформирования (кривых ползучести) материала отсутствует первая стадия ползучести (отсутствует упрочнение материала), а в «наличии» имеются лишь вторая и третья стадии. Ставится задача разработки метода прогнозирования серии стационарных кривых ползучести и времени разрушения материала при различных постоянных напряжениях по экспериментальной информации для одного образца-лидера, который базируется на обобщении аналогичного подхода, изложенного в п. 3.1, 3.2 и работе [72] для первой и второй стадии ползучести.

В основе данного подхода лежит возможность по установленным параметрам длительной прочности определять параметры установившейся ползучести, которая отмечалась во многих работах [56–58, 115, 128]. Экспериментально установлено соотношение [56, 57, 115, 128]

$$(\dot{p}_{\min})^k t^* = a, \quad (3.10)$$

где  $\dot{p}_{\min}$  — скорость установившейся ползучести,  $t^*$  — время до разрушения,  $k$  и  $a$  — параметры материала. Зависимость (3.10) в частном случае при  $k = 1$  впервые была получена и обоснована Н. Хоффом (N. J. Hoff) [115].

Соотношение (3.10) — феноменологическая зависимость, полученная на основе обработки экспериментальных данных для различных материалов. Однако она может быть получена и теоретически из схемы вязкого разрушения [20, 53, 60, 66, 69, 76]. В данном случае предполагается, что разрушение образца происходит при большом значении удлинения и сопровождается появлением шейки. Также вводятся следующие ограничения и гипотезы: считаем, что у материала отсутствует первая стадия ползучести; в момент нагружения пренебрегаем мгновенно-упругой и пластической деформациями; считаем, что деформация ползучести по длине образца является однородной вплоть до образования шейки и выполняется гипотеза несжимаемости материала. Рассмотрим цилиндрический образец и введем следующие обозначения:  $x$  и  $x_0$  — текущая и первоначальная длина образца.

чальная длина образца;  $F$  и  $F_0$  — текущая и первоначальная площадь поперечного сечения;  $\sigma_0 = Q/F_0$  и  $\sigma = Q/F$  — номинальное и истинное напряжение, соответственно;  $Q$  — приложенная к растягиваемому образцу нагрузка.

Пусть деформация ползучести  $p$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{p} = f(\sigma), \quad (3.11)$$

а в качестве меры деформации образца используется зависимость

$$p = \ln \frac{x}{x_0}. \quad (3.12)$$

Тогда из условия несжимаемости деформации ползучести  $xF = x_0F_0$  можно сразу получить

$$\sigma = \sigma_0 \exp(p), \quad (3.13)$$

$$p = \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}. \quad (3.14)$$

Из (3.14) и (3.11) устанавливается зависимость для определения величины  $\sigma = \sigma(t)$ :

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma(t)} \frac{d\xi}{\xi f(\xi)} = t. \quad (3.15)$$

Пусть функция  $f(\sigma)$  в (3.11) имеет степенную аппроксимацию

$$f(\sigma) = a\sigma^n. \quad (3.16)$$

Тогда из (3.15) и (3.16) получаем

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = (1 - ant\sigma_0^n)^{-1/n}, \quad (3.17)$$

а из (3.17) и (3.14) имеем

$$p(t) = -\frac{1}{n} \ln |1 - ant\sigma_0^n|. \quad (3.18)$$

Используя экспериментально наблюдаемый факт, что при ползучести фрагментация образца после образования шейки происходит за несколько секунд,

время разрушения  $t = t^*$  можно определить, полагая  $\sigma(t^*) = \infty$ , а значит, и  $p(t^*) = \infty$ . Тогда из (3.18) имеем

$$t^*(\sigma_0) = \frac{1}{an\sigma_0^n}. \quad (3.19)$$

Учитывая, что  $a\sigma_0^n$  — значение мгновенной и минимальной скорости установившейся ползучести в начальный момент времени ( $t = 0$ ), т.е.  $a\sigma_0^n = \dot{p}_0(\sigma_0) = \dot{p}_{\min}$ , из (3.19) находим зависимость

$$t^* \cdot \dot{p}_{\min} = n^{-1},$$

которая является частным случаем (3.10) при  $k = 1$ .

Из формулы (3.19) следует, что если  $\sigma_0 = \text{const}$ , то эта зависимость фактически описывает диаграмму длительной прочности. Определённое обобщение формулы (3.19) было сделано Е. Робинсоном (E. L. Robinson) в работе [122] для произвольных законов  $\sigma_0 = \sigma_0(t)$ . Подставляя (3.13) в (3.11), с использованием аппроксимации (3.16) получим уравнение

$$\exp(-np)\dot{p} = a[\sigma_0(t)]^n,$$

интегрирование которого позволяет найти время разрушения  $t = t^*$  ( $p(t^*) = \infty$ ) из интегрального соотношения

$$\int_0^{t^*} na[\sigma_0(t)]^n dt = 1. \quad (3.20)$$

Введем функцию  $\hat{t}(\sigma_0) = (na[\sigma_0(t)]^n)^{-1}$  и перепишем (3.20) в виде

$$\int_0^{t^*} \frac{dt}{\hat{t}(\sigma_0(t))} = 1. \quad (3.21)$$

Условие (3.21) выражает принцип линейного суммирования повреждений, высказанный Е. Робинсоном [122]. Строго теоретически он выполняется лишь для механизма вязкого разрушения и введенных ранее ограничений.

Зависимости (3.18) и (3.19) получены в предположении реализации схемы вязкого разрушения в «чистом» виде. Здесь увеличение истинного напряжения связано лишь с геометрическим уменьшением площади поперечного сечения образца в соответствии с гипотезой несжимаемости материала. Однако при вязком механизме разрушения наблюдается и внутризеренное (объёмное) накопление повреждений [20, 53, 69]. Поэтому кроме геометрического уменьшения площади поперечного сечения, которое «визуально» регистрируется датчиками экспериментальной установки, наблюдается накопление различных дефектов, приводящих к дополнительному снижению эффективной площади поперечного сечения, воспринимающего нагрузку. Поэтому, оставаясь в рамках механизма вязкого разрушения, Г. Ф. Лепин [52] для учета поврежденности предложил экспериментально обоснованную связь истинного  $\sigma$  и номинального  $\sigma_0$  напряжений в виде

$$\sigma = \sigma_0 \exp(sp), \quad (3.22)$$

где  $s \geq 1$  — феноменологический параметр значение которого для некоторых материалов может достигать величины нескольких десятков. При  $s = 1$  из (3.22) сразу следует (3.13). Использование (3.22) не вызывает никаких математических трудностей и из (3.11), (3.16) и (3.22) получаем зависимости

$$p(t) = -\frac{1}{n} \ln(1 - anst\sigma_0^n), \quad (3.23)$$

$$t^*(\sigma_0) = \frac{1}{ans\sigma_0^n}, \quad (3.24)$$

совпадающие при  $s = 1$  с (3.18) и (3.19). В связи с этим в дальнейшем для теоретического обоснования развиваемого метода прогнозирования деформации ползучести и времени разрушения материала по образцу-лидеру в условиях схемы вязкого разрушения будем использовать соотношения (3.23) и (3.24).

Предположим, что экспериментально получена кривая деформирования материала вплоть до момента разрушения для образца-лидера при некотором

номинальном напряжении  $\sigma_0$ . Перепишем (3.24) в виде

$$t^*(\sigma_0) = \frac{1}{nsp_0(\sigma_0)}, \quad (3.25)$$

где  $\dot{p}_0(\sigma_0) = a\sigma_0^n$  — начальная минимальная скорость установившейся ползучести для образца-лидера. Пусть теперь испытывается исследуемый образец при номинальном напряжении  $\sigma_1$  и зафиксирована его начальная скорость  $\dot{p}_0(\sigma_1) = a\sigma_1^n$ . Тогда, записывая для этого образца соотношение, аналогично (3.25), для времени разрушения  $t_1(\sigma_1)$  получаем:

$$t_1(\sigma_1) = t^*(\sigma_0) \cdot \frac{\dot{p}_0(\sigma_0)}{\dot{p}_0(\sigma_1)}. \quad (3.26)$$

Таким образом, если известны начальная скорость ползучести  $\dot{p}_0(\sigma_0)$  образца-лидера и время его разрушения, а также начальная скорость исследуемого образца при напряжении  $\sigma_1$  любой реализации  $\dot{p}_0(\sigma_1)$ , то время разрушения исследуемого образца можно получить на основании (3.26).

Покажем, что кроме времени до разрушения, можно прогнозировать и кривую деформации исследуемого образца при любом напряжении по известной кривой ползучести образца-лидера. Для этого в соотношении (3.23) необходимо поменять местами аргумент и функцию, т.е. найти зависимость времени от деформации и напряжения:

$$t(p, \sigma_0) = \frac{1 - e^{-nsp}}{ans\sigma_0^n} = \frac{1 - e^{-nsp}}{nsp_0(\sigma_0)}. \quad (3.27)$$

Выпишем аналогичную зависимость для номинального напряжения  $\sigma_1$  исследуемого образца:

$$t(p, \sigma_1) = \frac{1 - e^{-nsp}}{nsp_0(\sigma_1)}. \quad (3.28)$$

Тогда из (3.27) и (3.28) для времени достижения обеими реализациями при напряжениях  $\sigma_0$  (для образца-лидера) и  $\sigma_1$  (для исследуемого образца) одного и того же значения деформации ползучести  $p$  получаем

$$t(p, \sigma_1) = t(p, \sigma_0) \cdot \frac{\dot{p}_0(\sigma_0)}{\dot{p}_0(\sigma_1)}. \quad (3.29)$$

Таким образом, из (3.29) следует, что кривая ползучести исследуемого образца при номинальном напряжении  $\sigma_1$  может быть получена с помощью преобразования подобия из кривой ползучести образца-лидера при номинальном напряжении  $\sigma_0$  с коэффициентом подобия, равным отношению начальных скоростей деформации образца-лидера и исследуемого образца  $\dot{p}_0(\sigma_0)/\dot{p}_0(\sigma_1)$ .

Для проверки адекватности моделей прогнозирования ползучести и длительной прочности материала экспериментальным данным использовались данные из независимых источников.

В работе [32] представлена подробная экспериментальная информация по ползучести и длительной прочности коррозионно-стойкой стали 12X18H10T при температуре 850 °С. На рис. 3.17 сплошными линиями приведены экспериментальные кривые ползучести для четырех уровней напряжения  $\sigma_0 = \{40, 50, 60, 80\}$  МПа, осредненные по 6, 7, 6 и 2 реализациям соответственно. Для иллюстрации разработанного метода в качестве образца-лидера использовалась реализация при  $\sigma_0 = 40$  МПа (кривая 1). В табл. 3.3 приведены экспериментальные усредненные значения для начальной скорости установившейся ползучести  $\dot{p}_0(\sigma_0)$  и времени до разрушения  $t_1^*$  для всех четырех уровней номинального напряжения  $\sigma_0$  [32]. С использованием этих экспериментальных значений по формуле (3.26) получены расчетные значения времени до разрушения  $t_2^*$  по разработанной в настоящей диссертации методике на основе информации для образца-лидера (см. табл. 3.3). Для сравнения в табл. 3.3 приведены расчетные значения времени до разрушения  $t_3^*$  по модели, предложенной А. М. Локощенко и С. А. Шестериковым в [32] и имеющей вид:

$$\dot{p} = a \frac{\text{sh}(\sigma/c)}{(1-\omega)^n}, \quad \dot{\omega} = b \frac{\sigma^k}{(1-\omega)^k}, \quad (3.30)$$

где  $\omega$  — параметр поврежденности;  $a, b, c, n, k$  — параметры модели, значения которых приведены в [32].

В двух последних столбцах табл. 3.3 приведены значения относительных

погрешностей  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  (%), вычисленные по формуле

$$\Delta_i = \left| \frac{t_i^* - t_1^*}{t_1^*} \right| \cdot 100 \%, \quad i = 2, 3 \quad (3.31)$$

для моделей (3.26) и (3.30) соответственно. Как следует из этих данных, погрешность вычисления времени до разрушения по модели (3.26) для стационарных кривых ползучести меньше, чем по более сложной модели (3.30), при этом для построения модели (3.30) потребовались все 4 экспериментальные кривые ползучести «целиком» вплоть до разрушения.

На рис. 3.17 штриховыми линиями показаны расчетные (спрогнозированные) зависимости для деформации ползучести, полученные на основании (3.29), при этом использовались лишь экспериментальные данные для образца-лидера (линия 1) и начальные скорости деформации ползучести для остальных реализаций (линии 2–4).

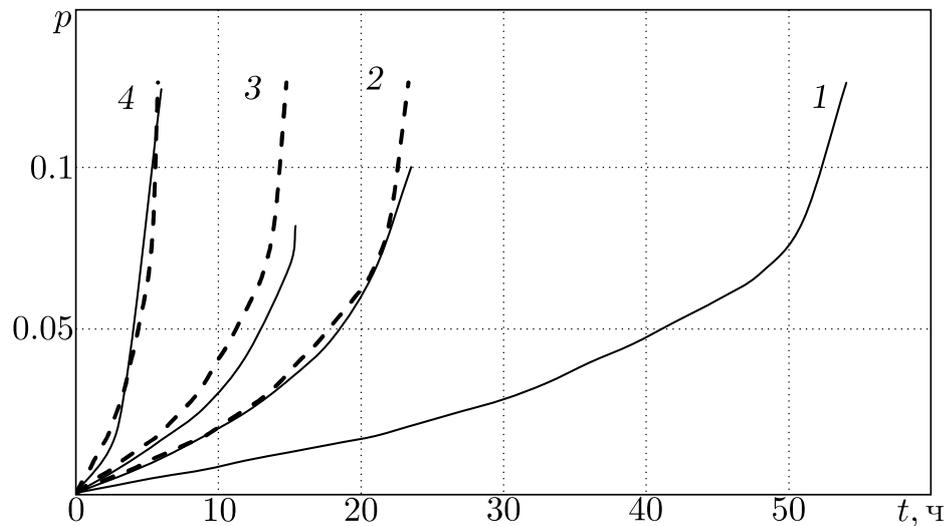


Рис. 3.17. Экспериментальные [32] (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести, построенные по образцу-лидеру (линия 1), коррозионно-стойкой стали 12X18H10T при температуре 850 °С. Маркеры (цифры) — номинальные напряжения  $\sigma_0$ : 1 — 40 МПа; 2 — 50 МПа; 3 — 60 МПа; 4 — 80 МПа.

Таблица 3.3. Экспериментальные и расчетные значения длительной прочности сплава 12X18Н10Т при температуре 850 °С

$\sigma_0$ , МПа	Экспериментальные данные [32]		Расчетные данные			
	$\dot{\rho}_0(\sigma_0)$ , ч <sup>-1</sup>	$t_1^*$ , ч	$t_2^*$ , ч	$t_3^*$ , ч	$\Delta_2$ , %	$\Delta_3$ , %
40	0.00082	54.0	54.0	51	–	5.6
50	0.0019	23.5	23.3	25.2	0.85	7.2
60	0.0030	15.4	14.8	14.1	3.9	8.4
80	0.0077	6.0	5.75	5.7	4.2	5.0

В работе [121] приведены экспериментальные данные для деформации ползучести титанового сплава при температуре 600 °С, которые представлены на рис. 3.18 сплошными линиями. По ним определялись начальные скорости деформации ползучести  $\dot{\rho}_0(\sigma_0)$  и время до разрушения  $t_1^*$ , значения которых приведены в табл. 3.4. С целью вариативности разработанного подхода для одних и тех же экспериментальных данных использовались различные реализации в качестве образца-лидера: на рис. 3.18, а в качестве образца-лидера использовался образец 3, а на рис. 3.18, б — образец 1. На рис. 3.18 штриховыми линиями показаны расчетные зависимости для деформации ползучести по формуле (3.29), а в табл. 3.4 приведены расчетные значения времени разрушения  $t_2^*$  по (3.26) и погрешности  $\Delta_2$  величины  $t_2^*$  относительно экспериментального значения  $t_1^*$  в соответствии с (3.31). Из приведенных данных на рис. 3.18 и в табл. 3.4 следует, что результаты расчетов по (3.26) и (3.29) практически не зависят от выбора образца-лидера.

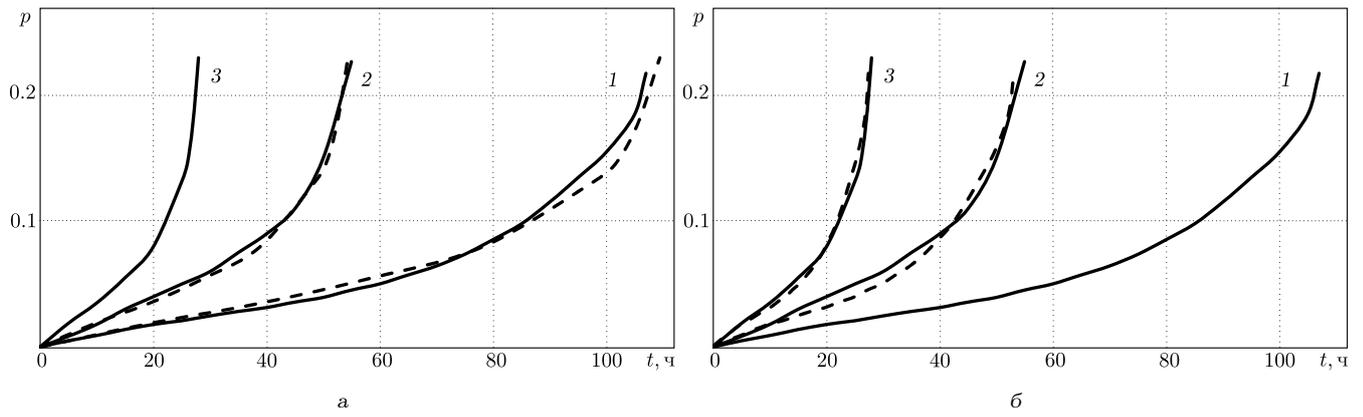


Рис. 3.18. Экспериментальные [121] (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести титанового сплава при температуре 600 °С, построенные по образцу-лидеру (линия 3 на рис. а и линия 1 на рис. б); маркеры (цифры) — номинальные напряжения  $\sigma_0$ : 1 — 300 МПа; 2 — 350 МПа; 3 — 400 МПа

Таблица 3.4. Экспериментальные и расчетные значения длительной прочности титанового сплава при температуре 600 °С

$\sigma_0$ , МПа	$\dot{p}_0(\sigma_0)$ , ч <sup>-1</sup>	$t_1^*$ , ч	образец-лидер 3		образец-лидер 1	
			$t_2^*$ , ч	$\Delta_2$ , %	$t_2^*$ , ч	$\Delta_2$ , %
300	0.00059	107	109.2	2.1	107	—
350	0.0012	55	53.7	2.4	52.6	4.4
400	0.0023	28	28	—	27.4	2.1

Рассмотрим теперь экспериментальные данные на ползучесть для сплава 09Г2С [12] при различных температурах, представленные в виде диаграмм испытаний на рисунках 3.19–3.21. По ним определялись начальные скорости деформации ползучести  $\dot{p}_0(\sigma_0)$  и время до разрушения  $t_1^*$ , значения которых приведены в таблице 3.5. С целью вариативности разработанного подхода для одних и тех же экспериментальных данных использовались различные реализации в качестве образца-лидера: на рисунках 3.19, а, 3.20, а и 3.21, а в качестве образца-лидера использовался образец 1, а на рисунках 3.19, б, 3.20, б и 3.21, б — образец 2. На рисунках 3.19 – 3.21 штриховыми линиями показаны расчетные зависимости для деформации ползучести по формуле (3.10), а в таблице 3.5 приведены расчетные значения времени разрушения  $t_2^*$  по (3.26) и погрешности

$\Delta_2$  величины  $t_2^*$  относительно экспериментального значения  $t_1^*$  в соответствии с (3.31). Из приведенных данных на рисунках 3.19 – 3.21 и в таблице 3.5 следует, что и в этом случае результаты расчетов по (3.26) и (3.29) практически не зависят от выбора образца-лидера.

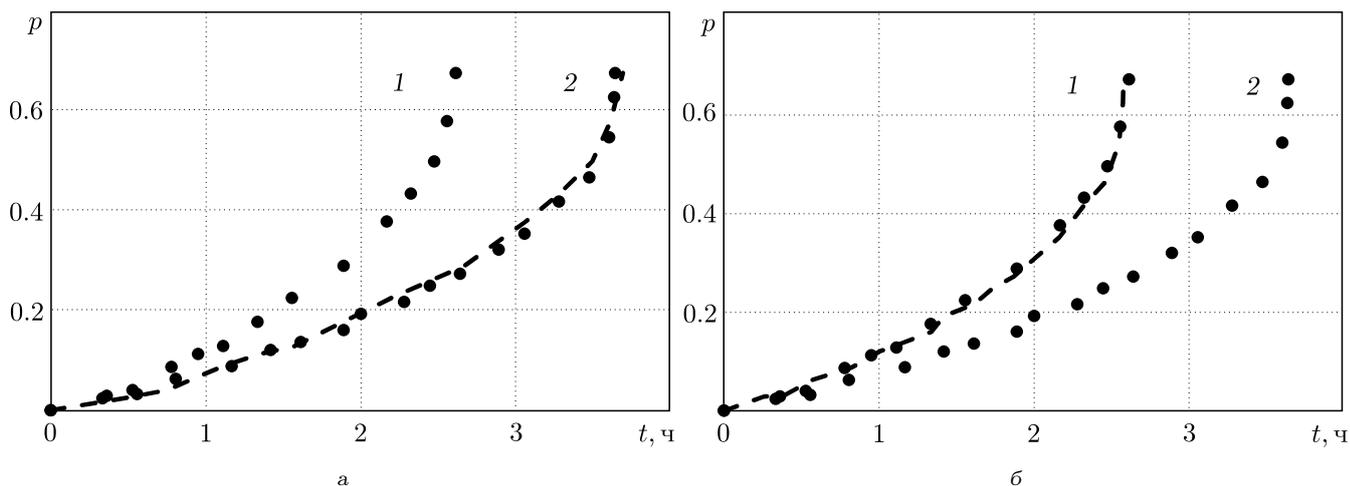


Рис. 3.19. Экспериментальные [12] (точки) и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести сплава 09Г2С при температуре 700 °С, построенные по образцу-лидеру (линия 1 на рис. а и линия 2 на рис. б); маркеры (цифры) — номинальные напряжения  $\sigma_0$ : 1 — 69.67 МПа; 2 — 58.86 МПа

Таблица 3.5. Экспериментальные и расчетные значения длительной прочности сплава 09Г2С при температурах 700 °С, 730 °С и 750 °С

$T, \text{ }^\circ\text{C}$	$\sigma_0, \text{ МПа}$	$\dot{p}_0(\sigma_0), \text{ ч}^{-1}$	$t_1^*, \text{ ч}$	образец-лидер 1		образец-лидер 2	
				$t_2^*, \text{ ч}$	$\Delta_2, \%$	$t_2^*, \text{ ч}$	$\Delta_2, \%$
700	69.67	0.075	2.61	2.61	—	2.57	1.5
700	58.86	0.053	3.64	3.69	1.37	3.64	—
730	58.86	0.195	1.14	1.14	—	1.13	0.88
730	49.05	0.070	3.14	3.18	1.27	3.14	—
750	49.05	0.088	1.64	1.64	—	1.63	0.61
750	39.24	0.030	4.79	4.81	0.42	4.79	—

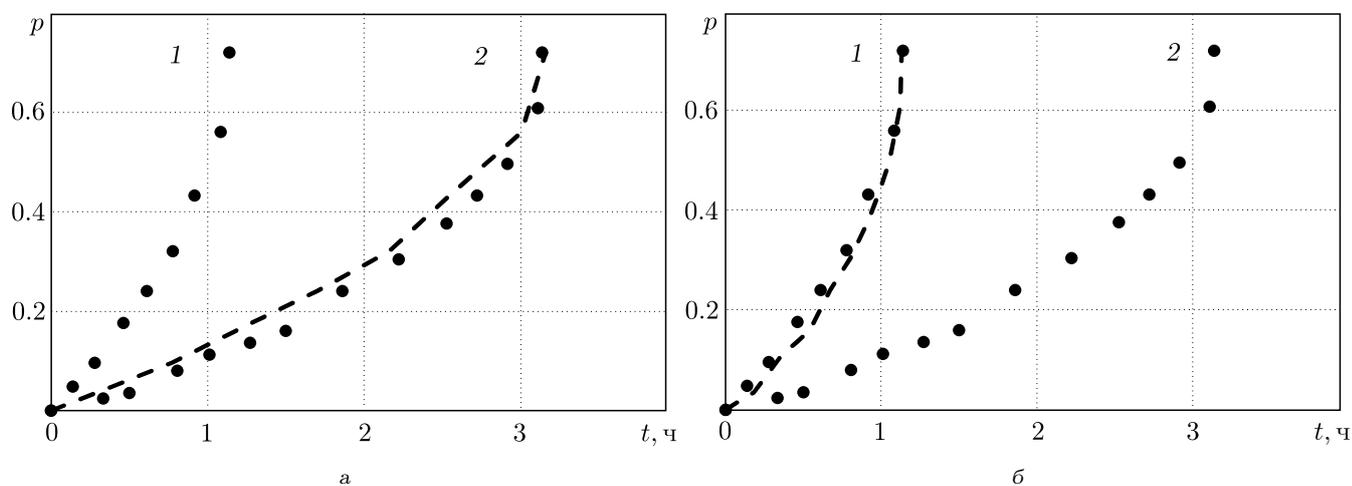


Рис. 3.20. Экспериментальные [12] (точки) и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести сплава 09Г2С при температуре 730 °С, построенные по образцу-лидеру (линия 1 на рис. а и линия 2 на рис. б); маркеры (цифры) — номинальные напряжения  $\sigma_0$ : 1 — 58.86 МПа; 2 — 49.05 МПа

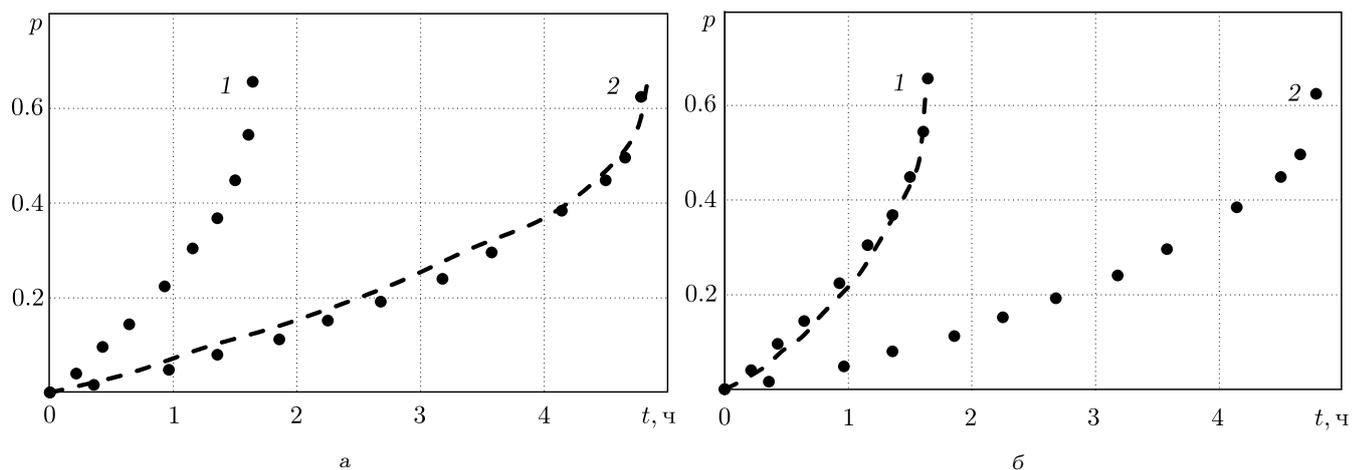


Рис. 3.21. Экспериментальные [12] (точки) и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести сплава 09Г2С при температуре 750 °С, построенные по образцу-лидеру (линия 1 на рис. а и линия 2 на рис. б); маркеры (цифры) — номинальные напряжения  $\sigma_0$ : 1 — 49.05 МПа; 2 — 38.24 МПа

Применим разработанный подход прогнозирования по образцу-лидеру к экспериментальным данным [98] для разных видов нагружения — одноосного растяжения (рис. 3.22, а) и кручения (рис. 3.22, б) образцов из сплава Д16Т при  $T = 250^\circ\text{C}$  в условиях ползучести. Отметим, что поскольку в [98] испытания на кручение проводились на тонкостенных цилиндрических образцах с внешним диаметром 20 мм и внутренним — 18 мм, то в дальнейшем при кручении величина  $\tau_0$  — это величина касательного напряжения (МПа). В работе [98] диаграммы деформирования представлены в координатах «время — удельная работа напряжений на деформациях ползучести», т.е. по оси абсцисс на рис. 3.22 приведены значения работы  $A(t) = \int_0^t \sigma_{ij} dp_{ij}$ . Поэтому формальное применение основных расчетных соотношений (3.26) и (3.29) в данном случае сводится к замене начальных скоростей деформации  $\dot{p}_0$  на начальные значения скорости  $\dot{A}_0$  (фактически — удельной мощности) в начальный момент времени ( $t = 0$ ). В качестве образца-лидера в рассматриваемом случае рассматривается реализация при номинальном напряжении  $\sigma_0 = 70$  МПа (линия 4 на рис. 3.22, а). С использованием экспериментальных данных на рис. 3.22 вычислены начальные скорости  $\dot{A}_0$  для обоих видов нагружения, значения которых приведены в табл. 3.6. Расчетные значения времени разрушения  $t_2^*$  по (3.26) с соответствующей заменой  $\dot{p}_0$  (для случая растяжения) и  $\dot{\tau}_0$  (для случая кручения) на  $\dot{A}_0$  приведены для всех вариантов при различных постоянных значениях растягивающих и касательных напряжений в табл. 3.6, здесь же приведены и относительные погрешности  $\Delta t_2$  (%) отклонения расчетных данных  $t_2^*$  от экспериментальных  $t_1^*$ . Штриховыми линиями на рис. 3.22 приведены расчетные диаграммы для работы  $A = A(t)$ , полученные с использованием (3.29). Как следует из приведенного примера, прогнозирование по одному образцу-лидеру возможно и для разных видов напряженного состояния. В целом и здесь наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных как для длительной прочности, так и для диаграмм деформирования.

Таблица 3.6. Экспериментальные и расчетные значения длительной прочности сплава Д16Т при температуре 250°C

Растяжение				
$\sigma_0$ , МПа	70	80	90	100
$\dot{A}_0, \left(\frac{H \cdot \text{мм}}{\text{мм}^3}\right) \cdot \text{ч}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$3.78 \cdot 10^{-3}$	$6.74 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-2}$
$t_1^*$ , ч	719	345	195	107
$t_2^*$ , ч	719	314	176	98
$\Delta t_2$ , %	–	9.0	9.7	8.4
Кручение				
$\tau_0$ , МПа	34.6	37.0	40.5	46.2
$\dot{A}_0, \left(\frac{H \cdot \text{мм}}{\text{мм}^3}\right) \cdot \text{ч}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	$9.46 \cdot 10^{-3}$
$t_1^*$ , ч	730	487	293	150
$t_2^*$ , ч	732.3	439.4	276	125.4
$\Delta t_2$ , %	0.3	9.8	5.8	16.4

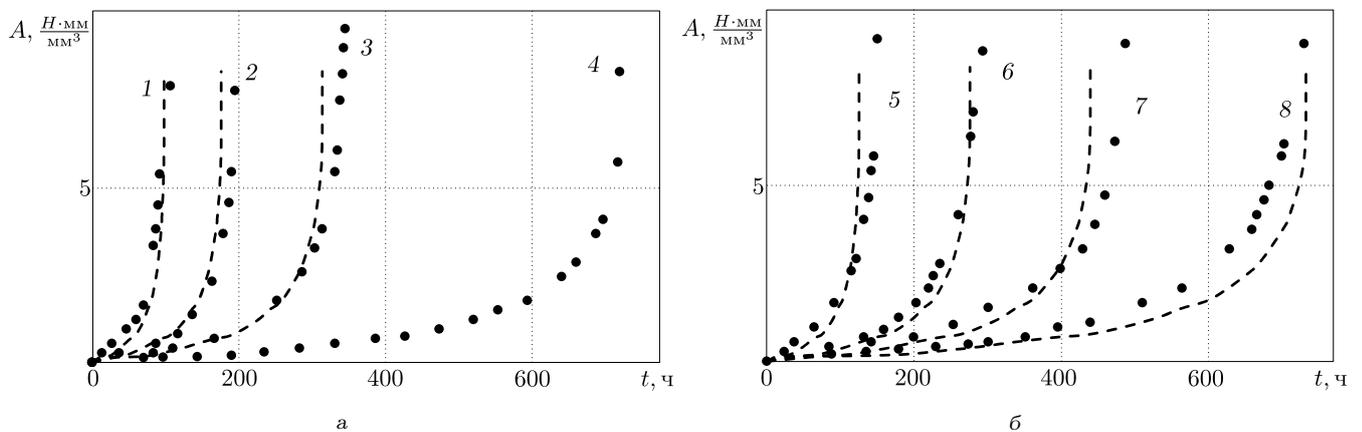


Рис. 3.22. Экспериментальные (точки) [98] и расчетные (штриховые линии) диаграммы для удельной работы напряжений на деформациях ползучести сплава Д16Т при температуре 250°C, построенные по образцу-лидеру (линия 4), в условиях одноосного растяжения при номинальных напряжениях  $\sigma_0$  (а; маркеры: 1 – 100 МПа; 2 – 90 МПа; 3 – 80 МПа; 4 – 70 МПа) и кручения при номинальных значениях  $\tau_0$  (б; маркеры: 5 – 46.2 МПа; 6 – 40.5 МПа; 7 – 37.0 МПа; 8 – 34.6 МПа)

В качестве замечания отметим следующее. Авторы [98] выполняли экспериментальные исследования с учетом изменения (уменьшения) площади поперечного сечения образцов и корректировали внешнюю приложенную нагрузку таким образом, чтобы номинальные напряжения (с учетом пересчета площади сечения)  $\sigma_0$  и  $\tau_0$  были постоянными. Поэтому пересчет экспериментальных и расчетных диаграмм в координатах « $t - A(t)$ » в координаты «время – деформация ползучести» не составляет труда, поскольку приведенные на рис. 3.22 диаграммы достаточно умножить на масштабный коэффициент  $1/\sigma_0$  вдоль оси ординат и на  $1/\sqrt{3}\tau_0$  — при кручении. Такое масштабирование графиков вдоль оси ординат не изменяет ни параметры длительной прочности, ни погрешности расчетных диаграмм от экспериментальных для фиксированных значений деформации при каждом уровне номинального напряжения.

В работе [98] также приведены экспериментальные данные в виде диаграмм деформирования и для титанового сплава ВТ-9 при температуре 600 °С, представленные на рис. 3.23. В качестве образца-лидера рассматривается реализация при номинальном напряжении  $\sigma_0 = 250$  МПа (линия 3 на рис. 3.23, а), на рис. 3.23, б взят образец-лидер 1 при номинальном напряжении  $\sigma_0 = 450$  МПа.

С использованием экспериментальных данных на рис. 3.23 вычислены начальные скорости  $\dot{A}_0$ , значения которых приведены в табл. 3.7. Расчетные значения времени разрушения  $t_2^*$  по (3.20) с соответствующей заменой  $\dot{p}_0$  на  $\dot{A}_0$  приведены для всех вариантов в табл. 3.7, здесь же приведены и относительные погрешности  $\Delta t_2$  (%) отклонения расчетных данных  $t_2^*$  от экспериментальных  $t_1^*$ . Штриховыми линиями на рис. 3.23 приведены расчетные диаграммы для работы  $A = A(t)$ , полученные с использованием (3.23). Как следует из приведенного примера, прогнозирование по одному образцу-лидеру возможно и для разных видов напряженного состояния. В целом здесь наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных как для длительной прочности, так и для диаграмм деформирования.

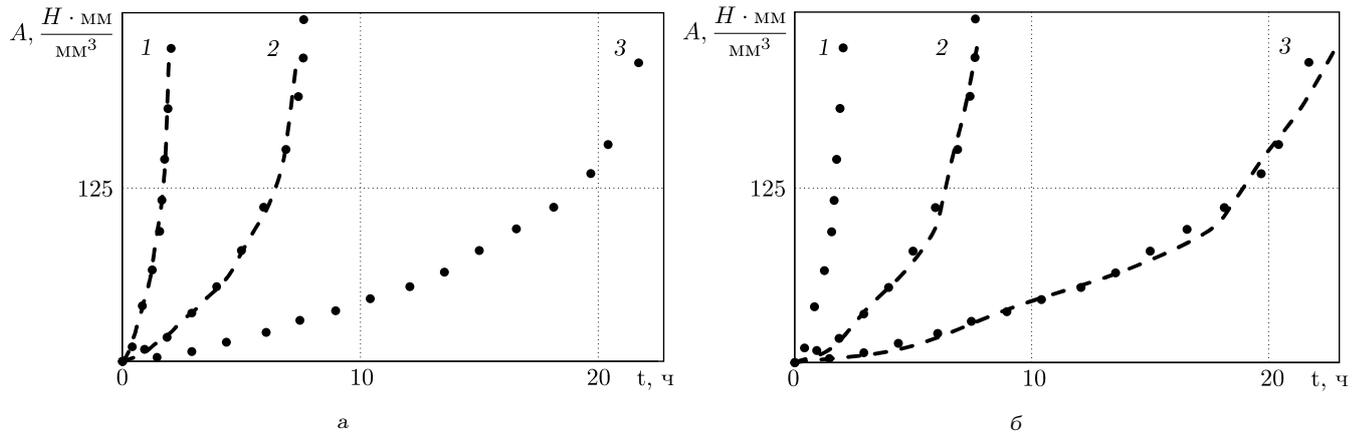


Рис. 3.23. Экспериментальные (точки) [98] и расчетные (штриховые линии) диаграммы для удельной работы напряжений на деформациях ползучести сплава ВТ-9 при температуре 600°C, построенные по образцу-лидеру 3 (а) и образцу лидеру 1 (б), маркеры: 1 — 450 МПа; 2 — 350 МПа; 3 — 250 МПа

Таблица 3.7. Экспериментальные и расчетные значения длительной прочности сплава ВТ-9 при температуре 600°C

$\sigma_0$ , МПа	$\dot{A}_0$ , $\left(\frac{H \cdot \text{мм}}{\text{мм}^3}\right) \cdot \text{ч}$	$t_1^*$ , ч	образец-лидер 1		образец-лидер 3	
			$t_2^*$ , ч	$\Delta_2$ , %	$t_2^*$ , ч	$\Delta_2$ , %
250	3.07	21.7	22.8	5.1	21.7	—
350	9.11	7.6	7.7	1.3	7.3	3.95
450	34.2	2.05	2.05	—	1.95	4.88

Рассмотрим экспериментальные данные [98], представленные на рис. 3.24 в виде кривых реологического деформирования титанового сплава ВТ-5 при различных температурах. Здесь в качестве лидера использовались образцы №4 для  $T = 450^\circ\text{C}$  и №3 для  $T = 550^\circ\text{C}$ .

С использованием экспериментальных данных на рис. 3.24 вычислены начальные скорости  $\dot{A}_0$ , значения которых приведены в табл. 3.8, 3.9. Расчетные значения времени разрушения  $t_2^*$  по (3.20) с соответствующей заменой  $\dot{p}_0$  на  $\dot{A}_0$  приведены для всех вариантов в табл. 3.8, 3.9, здесь же приведены и относительные погрешности  $\Delta t_2$  (%) отклонения расчетных данных  $t_2^*$  от экспериментальных  $t_1^*$ . Для сравнения в табл. 3.8, 3.9 приведены расчетные значения времени до разрушения  $t_3^*$  по модели, предложенной в [98], и относительные погрешности  $\Delta t_3$  (%) отклонения расчетных данных  $t_3^*$  от экспериментальных  $t_1^*$ . Штриховыми линиями на рис. 3.24 приведены расчетные диаграммы для работы  $A = A(t)$ , полученные с использованием (3.23).

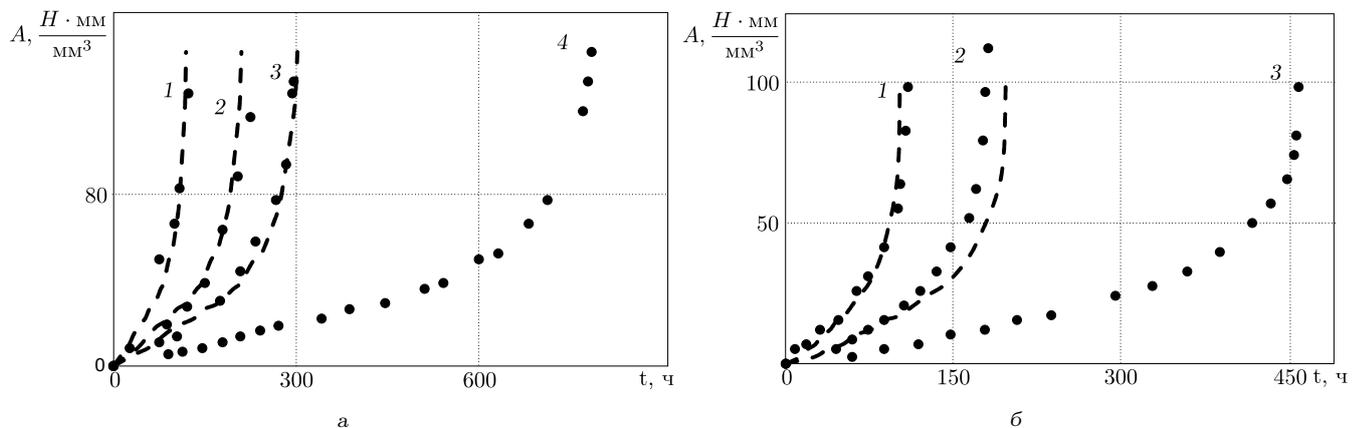


Рис. 3.24. Экспериментальные (точки) [98] и расчетные (штриховые линии) диаграммы для удельной работы напряжений на деформациях ползучести сплава ВТ-5 при температуре 450 °С, построенные по образцу-лидеру 4 ( рис. 4 а, маркеры: 1 — 370 МПа; 2 — 350 МПа; 3 — 330 МПа, 4 — 300 МПа ), и при температуре 550 °С, построенные по образцу-лидеру 3 (рис. 6 б, маркеры: 1 — 150 МПа; 2 — 130 МПа; 3 — 110 МПа)

Таблица 3.8. Экспериментальные и расчетные значения длительной прочности сплава ВТ-5 при температуре 450 °С

$\sigma_0$ , МПа	300	330	350	370
$\dot{A}_0, \left(\frac{H \cdot MM}{MM^3}\right) \cdot ч$	0.05	0.13	0.187	0.33
$t_1^*$ , ч	785	296	225	123
$t_2^*$ , ч	785	302	210	119
$t_3^*$ , ч	777	335	192	123
$\Delta t_2$ , %	–	2.03	6.67	3.25
$\Delta t_3$ , %	1.02	13.17	14.67	–

Таблица 3.9. Экспериментальные и расчетные значения длительной прочности сплава ВТ-5 при температуре 550 °С

$\sigma_0$ , МПа	110	130	150
$\dot{A}_0, \left(\frac{H \cdot MM}{MM^3}\right) \cdot ч$	0.06	0.14	0.27
$t_1^*$ , ч	460	182	110
$t_2^*$ , ч	460	197	102
$t_3^*$ , ч	471	229	104
$\Delta t_2$ , %	–	8.24	7.27
$\Delta t_3$ , %	2.39	25.82	5.45

Таким образом, можно констатировать, что разработан метод прогнозирования кривых стационарной ползучести и времени разрушения (длительной прочности) материала для исследуемых образцов по начальной (минимальной) скорости ползучести на начальном участке деформирования исследуемых образцов и известной кривой ползучести образца-лидера в условиях механизма вязкого разрушения. Проведена проверка адекватности моделей на экспериментальных данных из независимых источников в широком диапазоне материалов и параметров температурно-силового нагружения.

Кроме полученного основного результата — прогнозирования деформации ползучести и длительной прочности по изделию-лидеру, проанализируем и другие возможные варианты использования полученных в данном разделе резуль-

татов. Учитывая технические сложности проведения экспериментальных исследований в условиях ползучести, связанные, в том числе, с длительностью непрерывного эксперимента (см., например, рис. 3.22) и необходимость при одном уровне напряжения испытывать не менее 3–5 образцов), результаты настоящей работы делают возможным упрощение процесса планирования экспериментальных исследований для получения стационарных кривых ползучести и прогнозирования времени разрушения при постоянном напряжении, являющихся базовой информацией для построения соответствующих феноменологических моделей.

Для этого достаточно провести испытания при одном уровне напряжений для трех-пяти образцов (в условиях реологического деформирования имеется существенный разброс экспериментальных данных [69, 72, 76]), построить усредненную кривую ползучести и выбрать ее в качестве образца-лидера. Далее, надежно зафиксировав начальную скорость ползучести в испытаниях исследуемого образца при любом другом уровне напряжения, из соотношения (3.26) находится время до разрушения, а по (3.29) — прогнозируемая кривая реологического деформирования исследуемого образца. При этом нет необходимости продолжения эксперимента вплоть до разрушения, достаточно ограничиться начальным участком кривой ползучести. Выполнив серию экспериментов (как правило для 3 — 5 образцов) по определению начальной скорости деформации ползучести образцов при заданном напряжении и усреднив результаты, расчетным путем на основании (3.26) и (3.29) можно получить усредненную кривую деформирования и время разрушения. При этом для контроля один из образцов этой серии можно экспериментальным путем довести до разрушения.

### 3.4. Метод расчета индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций на основании стохастических реологических уравнений состояния при однопараметрическом нагружении

В п. 1.3 приведены макромодели конструкций типа (1.11), которые можно использовать для прогнозирования их работоспособности при эксплуатации по техническому состоянию. Рассмотрим их применение на примере осевого растяжения резьбового соединения из стали 45 усилием  $Q$  при температуре  $450\text{ }^\circ\text{C}$  [104]. Имеем три реализации осевого перемещения при следующих растягивающих усилиях:  $Q_1 = 700\text{ МПа}$ ,  $Q_2 = 850\text{ МПа}$ ,  $Q_3 = 1000\text{ МПа}$  (см. рис. 3.25). Для каждой реализации находим оценки параметров аппроксимации (2.2) на первой стадии нагружения, используя алгоритм, описанный в п. 2.1. Реализация этого алгоритма показала, что для всех трех реализаций достаточно одной экспоненциальной составляющей, в табл. 3.10 приведены первичные оценки основных параметров (2.2) для каждой кривой осевого перемещения.

Таблица 3.10. Расчетные оценки параметров аппроксимаций кривых осевого перемещения резьбового соединения из стали 45 при растягивающем усилии  $Q = \text{const}$  при температуре  $450\text{ }^\circ\text{C}$  на первом этапе нагружения

$Q$ , МПа	$\alpha_1$ , $\text{ч}^{-1}$	$\hat{a}_1$	$\hat{c}$	$D[a_1]$	$D[c]$	$Q_*$ , МПа
Резьбовое соединение из стали 45, $T = 450\text{ }^\circ\text{C}$						
700	0.42	29	0.2	0.37	0.0003	850
850	0.42	33.9	0.28	0.45	0.0003	
1000	0.53	44.9	1.00	0.6853	0.0006	

Первичные аппроксимации на первом этапе нагружения для трех реализаций имеют вид:

- $Q = 700\text{ МПа}$ ,  $T = 450\text{ }^\circ\text{C}$ :  $\Delta l = 29(1 - \exp(-0.42t)) + 0.2t$ ;
- $Q = 850\text{ МПа}$ ,  $T = 450\text{ }^\circ\text{C}$ :  $\Delta l = 33.9(1 - \exp(-0.42t)) + 0.28t$ ;

–  $Q = 1000$  МПа,  $T = 450^\circ\text{C}$ :  $\Delta l = 44.9(1 - \exp(-44.9t)) + t$ .

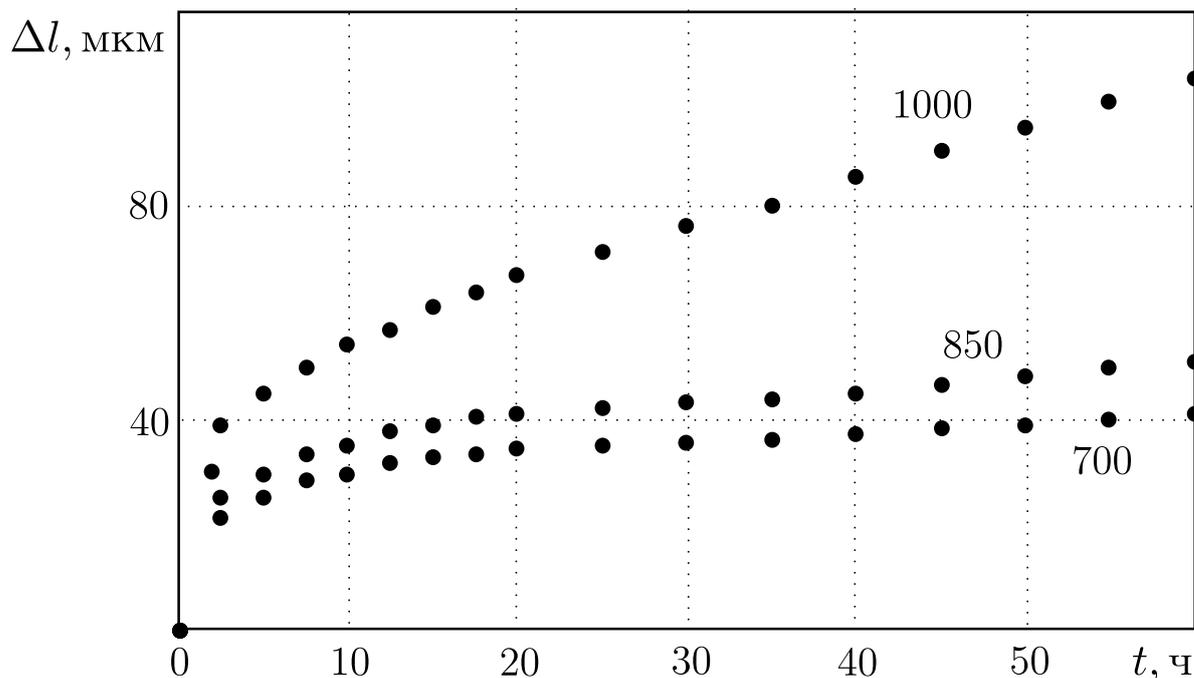


Рис. 3.25. Экспериментальные данные осевого перемещения резьбового соединения из стали 45 при температуре  $450^\circ\text{C}$ . Точки — экспериментальные данные, цифры — растягивающие усилия в МПа

Затем, в соответствии с методикой, строились степенные аппроксимации (2.84) и определялись  $\hat{b}_1$ ,  $n_1$ ,  $\hat{\gamma}$  и  $n$ , математическая модель неполной обратимости деформации ползучести (2.86) на основе осредненных кривых, представленных на рис. 3.25, дает аппроксимацию вида

$$\Delta l = 35.8 (Q/Q_*)^{1.21} (1 - \exp(-0.46t)) + 0.4 (Q/Q_*)^{4.47} t, \quad (3.32)$$

где  $\hat{b}_1 = 35.8$ ,  $n_1 = 1.21$ ,  $n = 4.47$ ,  $\hat{\gamma}_1 = 0.4$ ,  $Q_* = 850$  МПа,  $\alpha_1 = 0.46$  (в качестве значения параметра  $\alpha_1$  берется среднее значение параметров  $\alpha_1$  из табл. 3.10).

Рассмотрим поведение конкретных реализаций осевого перемещения для резьбового соединения из стали 45 при температуре  $450^\circ\text{C}$  при сложных ступенчатых режимах нагружения для образцов №3, №11 и №18, экспериментальные данные для которых приведены на рис. 3.26–3.28 соответственно. На первом этапе нагружения для каждой реализации по экспериментальным данным ( $t \in [0; 17.6]$  ч для образца №3,  $Q = 1000$  МПа;  $t \in [0; 45]$  ч для образца №11,

$Q = 850$  МПа;  $t \in [0; 20.75]$  ч для образца №18,  $Q = 850$  МПа) находятся оценки параметров первичной аппроксимации с помощью разработанного метода структурной и параметрической идентификации в пределах первой и второй стадий ползучести, изложенного в п. 2.1. Найденные индивидуальные оценки для каждого образца приведены в табл. 3.11.

Таблица 3.11. Расчетные оценки параметров аппроксимаций кривых осевого перемещения резьбового соединения из стали 45 при растягивающем усилии  $Q$  при температуре  $450$  °С для образцов №3, №11 и №18

Образец	$Q$ , МПа	$\alpha_1$ , ч <sup>-1</sup>	$\hat{a}_1$	$\hat{c}$	$D[a_1]$	$D[c]$
3	1000	0.6	25	1	0.95	0.03
11	850	0.15	32	0.2	3.97	0.003
18	850	0.85	14.3	0.35	0.6	0.003

Первичные аппроксимации на первом этапе нагружения для конкретных реализаций имеют вид:

— образец № 3 ( $Q = 1000$  МПа,  $t \in [0; 17.6]$  ч):

$$\Delta l = 25(1 - \exp(-0.6t)) + t;$$

— образец №11 ( $Q = 850$  МПа,  $t \in [0; 45]$  ч):

$$\Delta l = 32(1 - \exp(-0.15t)) + 0.2t; \quad (3.33)$$

— образец № 18 ( $Q = 850$  МПа,  $t \in [0; 20.75]$  ч):

$$\Delta l = 14.3(1 - \exp(-0.85t)) + 0.6t. \quad (3.34)$$

Затем, вместо  $\hat{b}_1$  и  $\hat{\gamma}$  (3.32), подставляем полученные индивидуальные оценки  $\hat{a}_1$  и  $\hat{c}$  в осредненную стохастическую модель и получаем индивидуальные соотношения, описывающие первый этап нагружения при  $Q(t) = Q = \text{const}$ :

— образец №3 ( $Q = 1000$  МПа,  $t \in [0; 17.6]$  ч):

$$\Delta l = \frac{25}{(1000/850)^{1.21}} (Q/Q_*)^{1.21} (1 - \exp(-0.6t)) + \frac{1}{(1000/850)^{4.47}} (Q/Q_*)^{4.47} t; \quad (3.35)$$

— образец №11 ( $Q = 850$  МПа,  $t \in [0; 45]$  ч):

$$\Delta l = 32 (Q/Q_*)^{1.21} (1 - \exp(-0.15t)) + 0.2 (Q/Q_*)^{4.47} t; \quad (3.36)$$

— образец №18 ( $Q = 850$  МПа,  $t \in [0; 20.75]$  ч):

$$\Delta l = 14.3 (Q/Q_*)^{1.21} (1 - \exp(-0.85t)) + 0.35 (Q/Q_*)^{4.47} t. \quad (3.37)$$

Отметим, что оценки  $\alpha_1$ ,  $\hat{a}_1$  и  $\hat{c}$  в индивидуальных моделях существенно отличаются от оценок этих параметров в осредненных стохастических моделях.

Для образцов №11 и №18 на первом этапе нагружения  $Q = Q_* = 850$  МПа, поэтому коэффициенты  $(Q/Q_*)^{1.21}$  и  $(Q/Q_*)^{4.47}$  будут равные единице, т.е. соотношение (3.33) эквивалентно (3.36), а (3.34) — (3.37). У образца №3 на первом этапе нагружения  $Q = 1000$  МПа, поэтому первое слагаемое соотношения (3.35) делится соответственно на  $(1000/850)^{1.21}$ , а второе — на  $(1000/850)^{4.47}$ .

Исходя из некоррелированности случайных величин  $c$  и  $\gamma$ , дисперсия осевого перемещения резьбового соединения в любой момент времени имеет вид:

— для образца №3:

$$D[\Delta l] = \frac{D[a_1]}{\left((1000/850)^{1.21}\right)^2} \varphi^2(Q) (1 - \exp(-\lambda t))^2 + \frac{D[c]}{\left((1000/850)^{4.47}\right)^2} f^2(Q) t^2;$$

— для образцов №11 и №18:

$$D[\Delta l] = D[a_1] \varphi^2(Q) (1 - \exp(-\lambda t))^2 + D[c] f^2(Q) t^2.$$

Далее в соответствии с полученными индивидуальными соотношениями проводится расчет индивидуального осевого перемещения резьбового соединения при переменном (ступенчатом) изменении нагрузки  $Q = Q(t)$ , представленные на рис. 3.26–3.28. Расчетные аналитические соотношения для образца №3 имеют вид:

$$\Delta l = c_1 \varphi(Q) (1 - \exp(-\lambda t)) + \gamma f(Q) t,$$

где  $c_1 = \frac{25}{(1000/850)^{1.21}}$ ,  $c_1 = a + b$ ,  $a = \beta c_1$ ,  $b = (1 - \beta)c_1$ ,  $\beta = 0.115$ ,  
 $\varphi(Q) = (Q/Q_*)^{1.21}$ ,  $\gamma = (850/1000)^{4.47}$ ,  $f(Q) = (Q/Q_*)^{4.47}$ ,  $Q_* = 850$  МПа,  
 $t_1 = 17.6$  ч,  $t_2 = 21.6$  ч,  $t_3 = 41.6$  ч. Коэффициент  $\beta$  определялся по участку  
разгрузки при  $t \in [t_1, t_2]$ .

1)  $t \in [0; t_1]$ ;  $Q_1 = 1000$  МПа — нагрузка

$$\Delta l(t) = \Delta_u(t) + \Delta_v(t) + \Delta_w(t), \text{ где}$$

$$\Delta_u(t) = a\varphi(Q_1) [1 - e^{-\lambda t}]; \quad \Delta_v(t) = b\varphi(Q_1) [1 - e^{-\lambda t}]; \quad \Delta_w(t) = \gamma f(Q_1)t.$$

2)  $t \in [t_1; t_2]$ ;  $Q_2 = 100$  МПа — разгрузка

$$\Delta l(t) = \Delta_u(t) + \Delta_v(t) + \Delta_w(t), \text{ где}$$

$$\Delta_u(t) = a (\varphi(Q_1) [e^{-\lambda(t-t_1)} - e^{-\lambda t}] + \varphi(Q_2) [1 - e^{-\lambda(t-t_1)}]);$$

$$\Delta_v(t) = b\varphi(Q_1) [1 - e^{-\lambda t_1}]; \quad \Delta_w(t) = \gamma [f(Q_1)t_1 + f(Q_2)(t - t_1)].$$

3)  $t \in [t_2; t_3]$ ;  $Q_1 = 1000$  МПа — нагрузка

$$\Delta l(t) = \Delta_u(t) + \Delta_v(t) + \Delta_w(t), \text{ где}$$

$$\Delta_u(t) = a(\varphi(Q_1) [e^{-\lambda(t-t_1)} - e^{-\lambda t}] + \varphi(Q_2) [e^{-\lambda(t-t_2)} - e^{-\lambda(t-t_1)}] + \\ + \varphi(Q_1) [1 - e^{-\lambda(t-t_2)}]); \quad \Delta_v(t) = b\varphi(Q_1) [1 - e^{-\lambda t_1}];$$

$$\Delta_w(t) = \gamma [f(Q_1)t_1 + f(Q_2)(t_2 - t_1) + f(Q_1)(t - t_2)].$$

4)  $t \in [t_3; +\infty)$ ;  $Q_3 = 700$  МПа — разгрузка

$$\Delta l(t) = \Delta_u(t) + \Delta_v(t) + \Delta_w(t), \text{ где}$$

$$\Delta_u(t) = a(\varphi(Q_1) [e^{-\lambda(t-t_1)} - e^{-\lambda t}] + \varphi(Q_2) [e^{-\lambda(t-t_2)} - e^{-\lambda(t-t_1)}] + \\ + \varphi(Q_1) [e^{-\lambda(t-t_3)} - e^{-\lambda(t-t_2)}] + \varphi(Q_3) [1 - e^{-\lambda(t-t_3)}]);$$

$$\Delta_v(t) = b\varphi(Q_1) [1 - e^{-\lambda t_1}] e^{-\lambda(t-t_3)} + \varphi(Q_3) [1 - e^{-\lambda(t-t_3)}];$$

$$\Delta_w(t) = \gamma [f(Q_1)t_1 + f(Q_2)(t_2 - t_1) + f(Q_1)(t_3 - t_2) + f(Q_3)(t - t_3)].$$

Для образцов №11 и №18 аналитические соотношения при ступенчатых режимах на основе стохастических уравнений состояния выводятся аналогично. Здесь они не приводятся.

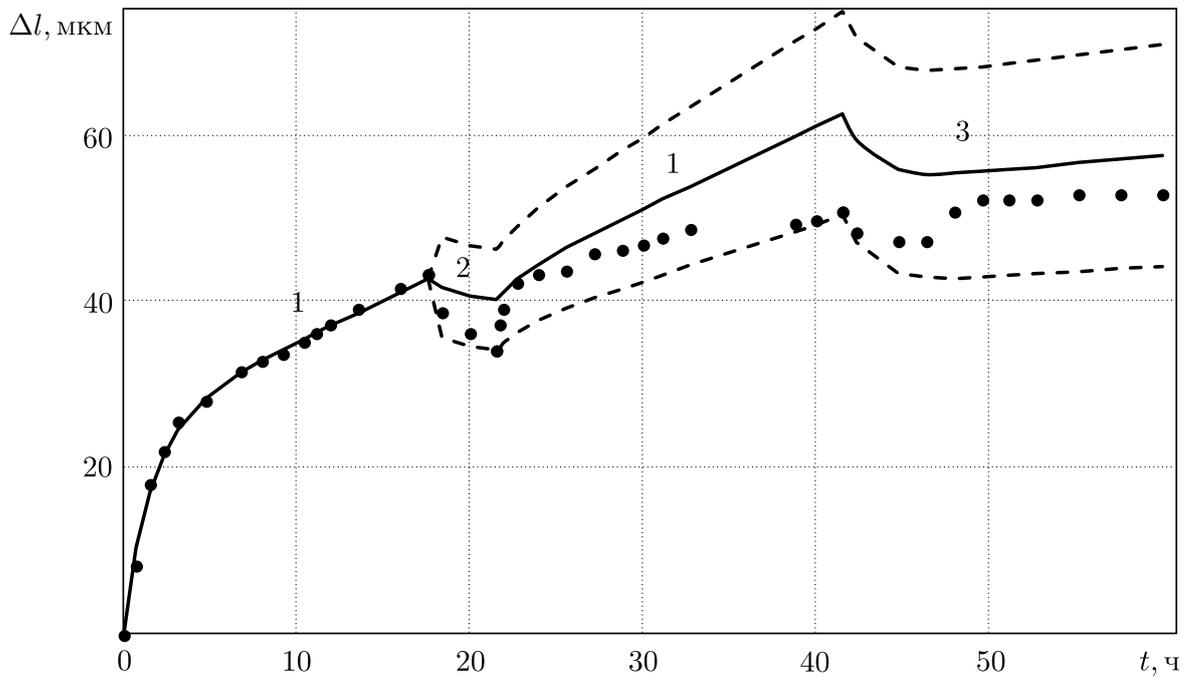


Рис. 3.26. Расчет индивидуального осевого перемещения для резьбового соединения из стали 45 (Образец №3) при температуре 450 °С: 1 — 1000 МПа; 2 — 100 МПа; 3 — 700 МПа. Сплошная кривая — индивидуальный прогноз осевого перемещения; штриховая линия — 95 % доверительный интервал; точки — экспериментальные данные

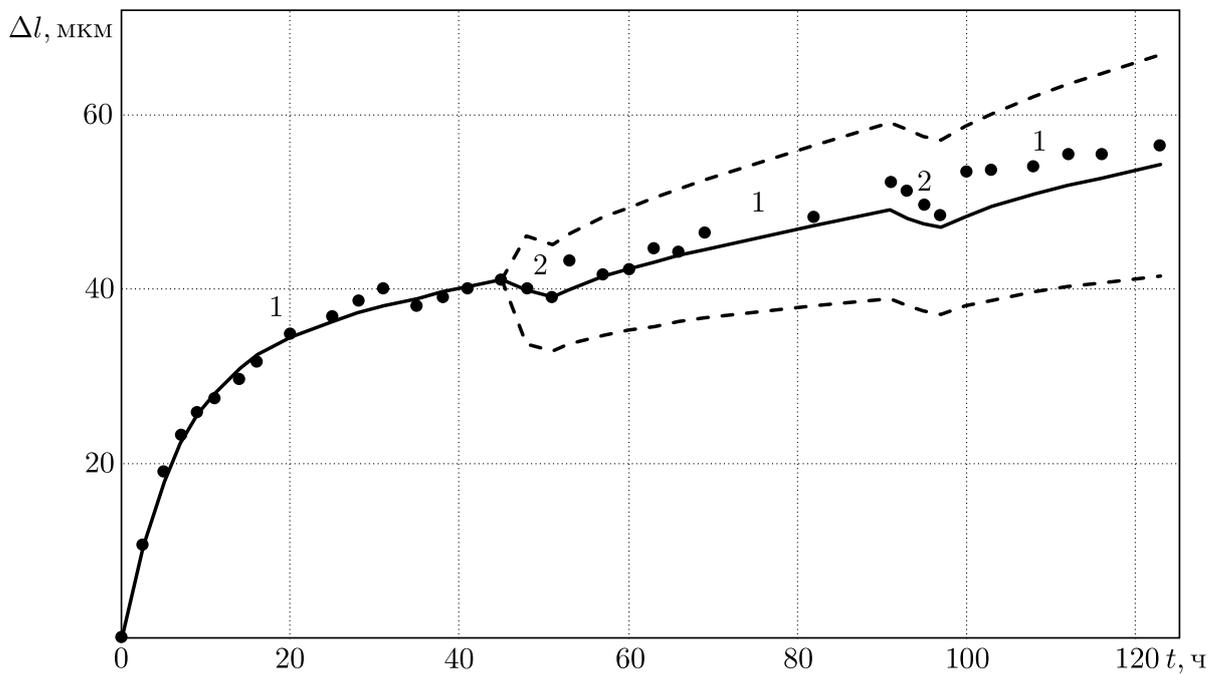


Рис. 3.27. Расчет индивидуального осевого перемещения для резьбового соединения из стали 45 (Образец №11) при температуре 450 °С: 1 — 850 МПа; 2 — 100 МПа. Сплошная кривая — индивидуальный прогноз осевого перемещения; штриховая линия — 95 % доверительный интервал; точки — экспериментальные данные

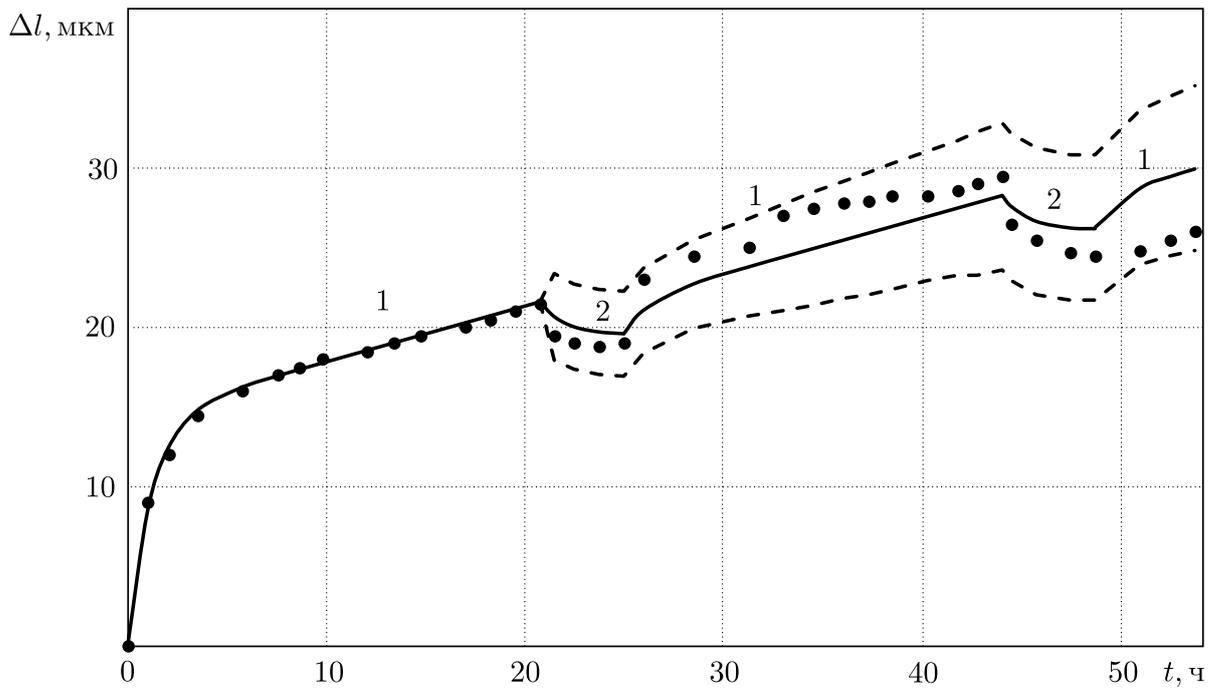


Рис. 3.28. Расчет индивидуального осевого перемещения для резьбового соединения из стали 45 (Образец №18) при температуре 450 °С: 1 — 850 МПа; 2 — 100 МПа. Сплошная кривая — индивидуальный прогноз осевого перемещения; штриховая линия — 95 % доверительный интервал; точки — экспериментальные данные

В п. 2.3 приведено построение стохастической модели (2.86) для осевого растяжения резьбового соединения из сплава ЭИ698 при температуре 700 °С (табл. 2.4). Для двух конкретных образцов по экспериментальным данным на первом этапе нагружения ( $t \in [0; 31]$  ч для образца №1 и  $t \in [0; 20]$  ч для образца №2), представленных на рис. 3.29 и рис. 3.30 соответственно, находятся оценки параметров первичной аппроксимации с помощью разработанного метода структурной и параметрической идентификации в пределах первой и второй стадий ползучести, изложенного в п. 2.1. Найденные индивидуальные оценки для каждого образца показаны в табл. 3.12.

Первичные аппроксимации на первом этапе нагружения для конкретных реализаций имеют вид:

— образец №1 ( $Q = 16$  кН,  $t \in [0; 31]$  ч):

$$\Delta l = 6.78(1 - \exp(-0.283t)) + 0.036t;$$

Таблица 3.12. Расчетные оценки параметров аппроксимаций кривых осевого перемещения резьбового соединения из сплава ЭП698 при растягивающем усилии  $Q$  при температуре  $700\text{ }^\circ\text{C}$  для образцов №1 и №2

Образец	$Q$ , кН	$\alpha_1$ , ч <sup>-1</sup>	$\hat{a}_1$	$\hat{c}$	$D[a_1]$	$D[c] \cdot 10^4$
1	16	0.283	6.78	0.036	0.28	4.7
2	28	1.671	6.37	0.86	0.38	0.25

— образец №2 ( $Q = 28$  кН,  $t \in [0; 20]$  ч):

$$\Delta l = 6.37(1 - \exp(-1.671t)) + 0.86t.$$

Затем, вместо  $\hat{b}_1$  и  $\hat{\gamma}$ , подставляем полученные индивидуальные оценки  $\hat{a}_1$  и  $\hat{c}$  в осредненную стохастическую модель, коэффициенты которой приведены в табл. 2.4, и получаем индивидуальные соотношения, описывающие первый этап нагружения при  $Q(t) = Q = \text{const}$ :

— образец №1 ( $Q = 16$  кН,  $t \in [0; 31]$  ч):

$$\Delta l = \frac{6.78}{(16/22)^{1.1}} (Q/Q_*)^{1.1} (1 - \exp(-0.283t)) + \frac{0.036}{(16/22)^{3.95}} (Q/Q_*)^{3.95} t; \quad (3.38)$$

— образец №2 ( $Q = 28$  кН,  $t \in [0; 20]$  ч):

$$\Delta l = \frac{6.37}{(28/22)^{1.1}} (Q/Q_*)^{1.1} (1 - \exp(-1.671t)) + \frac{0.86}{(28/22)^{3.95}} (Q/Q_*)^{3.95} t. \quad (3.39)$$

На первом этапе нагружения образца №1  $Q = 16$  кН, поэтому первое слагаемое соотношения (3.38) делится соответственно на  $(16/22)^{1.1}$ , а второе — на  $(16/22)^{3.95}$ .

Для образца №2 на первом этапе нагружения  $Q = 28$  кН, поэтому первое слагаемое соотношения (3.39) делится соответственно на  $(28/22)^{1.1}$ , а второе — на  $(28/22)^{3.95}$ .

Далее в соответствии с полученными индивидуальными соотношениями (3.38) и (3.39) проводится расчет индивидуального осевого перемещения резьбового соединения при переменном (ступенчатом) изменении нагрузки  $Q = Q(t)$ , представленные на рис. 3.29, 3.30. Расчетные соотношения имеют вид (на примере образца №1):

$$\Delta l = c_1 \varphi(Q)(1 - \exp(-\lambda t)) + \gamma f(Q)t,$$

где  $c_1 = \frac{6.78}{(16/22)^{1.1}}$ ,  $c_1 = a + b$ ,  $a = \beta c_1$ ,  $b = (1 - \beta)c_1$ ,  $\beta = 0.57$ ,  
 $\varphi(Q) = (Q/Q_*)^{1.1}$ ,  $\gamma = \frac{0.036}{(16/22)^{3.95}}$ ,  $f(Q) = (Q/Q_*)^{3.95}$ ,  $Q_* = 22$  кН,  $t_1 = 31$  ч.

1)  $t \in [0; t_1]$ ;  $Q_1 = 16$  кН — нагрузка

$$\Delta l(t) = \Delta_u(t) + \Delta_v(t) + \Delta_w(t), \text{ где}$$

$$\Delta_u(t) = a\varphi(Q_1) [1 - e^{-\lambda t}]; \quad \Delta_v(t) = b\varphi(Q_1) [1 - e^{-\lambda t}]; \quad \Delta_w(t) = \gamma f(Q_1)t.$$

2)  $t \in [t_1; +\infty)$ ;  $Q_2 = 22$  кН — нагрузка

$$\Delta l(t) = \Delta_u(t) + \Delta_v(t) + \Delta_w(t), \text{ где}$$

$$\Delta_u(t) = a (\varphi(Q_1) [e^{-\lambda(t-t_1)} - e^{-\lambda t}] + \varphi(Q_2) [1 - e^{-\lambda(t-t_1)}]);$$

$$\Delta_v(t) = b\varphi(Q_1) [1 - e^{-\lambda t_1}]; \quad \Delta_w(t) = \gamma [f(Q_1)t_1 + f(Q_2)(t - t_1)].$$

Для образца №2 аналитические соотношения при ступенчатых режимах на основе стохастических уравнений состояния выводятся аналогично. Здесь они не приводятся.

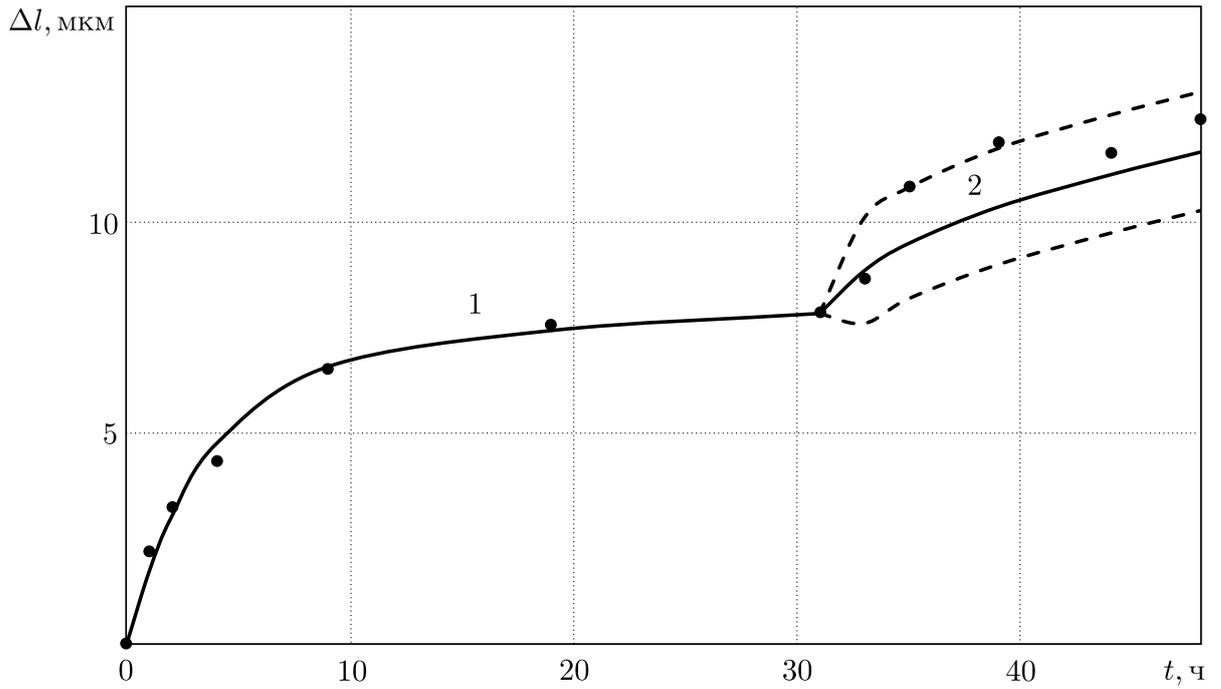


Рис. 3.29. Расчет индивидуального осевого перемещения для резьбового соединения из сплава ЭП698 (Образец № 1) при температуре 700 °С: 1 — 16 кН; 2 — 22 кН. Сплошная кривая — индивидуальный прогноз осевого перемещения; штриховая линия — 95 % доверительный интервал; точки — экспериментальные данные

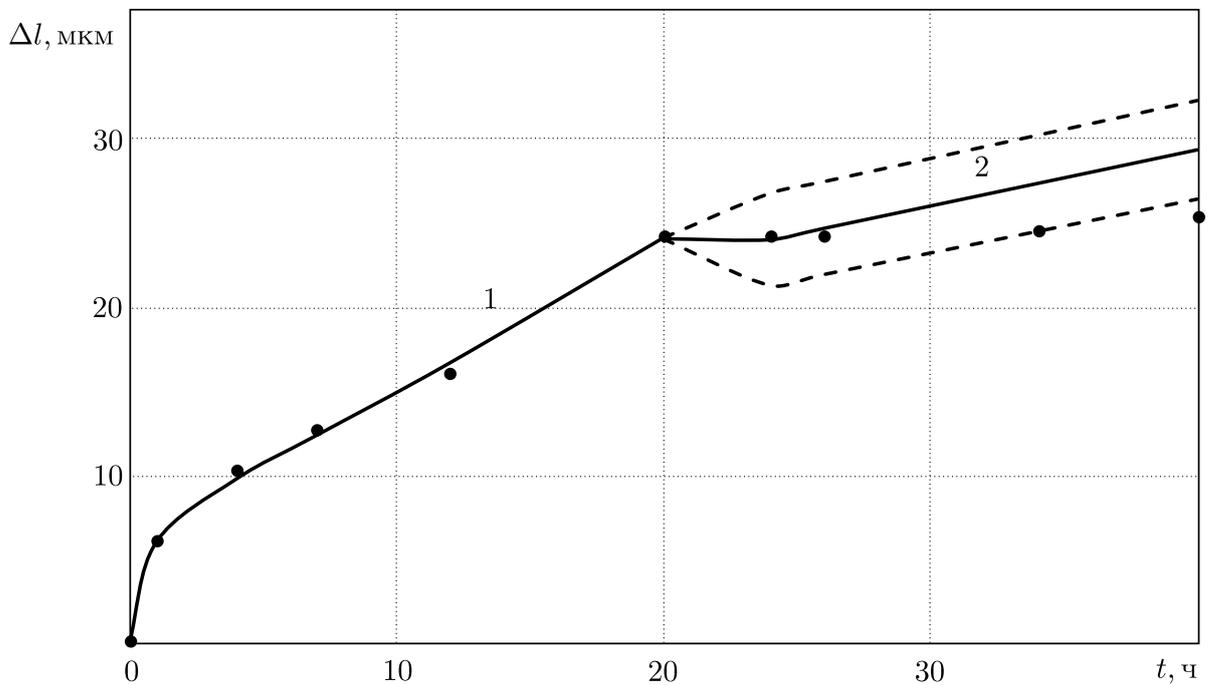


Рис. 3.30. Расчет индивидуального осевого перемещения для резьбового соединения из сплава ЭП698 (Образец № 2) при температуре 700 °С: 1 — 28 кН; 2 — 22 кН. Сплошная кривая — индивидуальный прогноз осевого перемещения; штриховая линия — 95 % доверительный интервал; точки — экспериментальные данные

Рассмотрим экспериментальные данные по испытаниям при кусочно-непрерывных напряжениях для ПВХП при температуре 24 °С. Отметим, что стохастическая модель для этого материала на основе осредненных кривых ползучести приведена в главе 2. Рассмотрим экспериментальные данные из этой же партии трубчатых образцов площадью поперечного сечения 1.2 мм<sup>2</sup> для образца в условиях ступенчатого режима нагружения напряжениями  $\sigma_0 = \{4.655; 6.288; 8.738\}$  МПа, каждый из которых действовал в течение 1 часа. Экспериментальные зависимости для деформации ползучести представлены на рис. 3.31 сплошной линией.

Для реализации метода индивидуального прогнозирования деформации ползучести этого образца воспользуемся построенной в главе 2 стохастической моделью для этого материала, сохранив в ней детерминированные параметры нелинейности  $n_1$  и  $n_2$ , а также  $m$  (см. табл. 2.6 для ПВХП при  $T = 24$  °С). Затем, используя разработанный численный метод, на основании экспериментальных данных для этого конкретного образца на первой ступени нагружения ( $\sigma_0 = 4.655$  МПа,  $t \in [0; 1]$  ч) находим оценки параметров для первичной аппроксимации кривой на участке  $t \in [0; 1]$  ч. Соответствующие оценки параметров имеют вид:  $a_1 = 0.009$ ,  $a_2 = 0,009$ ,  $\alpha_1 = 1.264$ ,  $\alpha_2 = 11.65$  и дисперсии  $D[a_1] = 1.24 \cdot 10^{-7}$  и  $D[a_2] = 5 \cdot 10^{-7}$ . Далее найденные индивидуальные оценки подставляются в полученную ранее математическую модель неполной обратимости деформации ползучести типа (1.11) и после интегрирования ДУ получаем аппроксимацию вида:

$$p(t) = \frac{0.009}{\left(\frac{4.655}{10.372}\right)^{1.2}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^{1.2} (1 - \exp(-1.264t)) + \\ + \frac{0.009}{\left(\frac{4.655}{10.372}\right)^{1.5}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right)^{1.5} (1 - \exp(-11.65t)).$$

Так как для первичной аппроксимации использовались эксперименталь-

ные данные на участке  $t \in [0; 1]$  ч, где  $\sigma = 4.655$  МПа, то полученная модель должна проходить через экспериментальные значения, поэтому слагаемые делятся соответственно на  $\left(\frac{4.655}{10.372}\right)^{1.2}$  и  $\left(\frac{4.655}{10.372}\right)^{1.5}$  (4.655 МПа— напряжение на этом участке, а  $\sigma_* = 10.372$  МПа). На рис. 3.31 приведена полученная аппроксимация, расчетные соотношения для которой в общем виде можно записать следующим образом

$$\Delta_p^{(t)} = c_1 \varphi_1(\sigma) (1 - \exp(-\lambda_1 t)) + c_2 \varphi_2(\sigma) (1 - \exp(-\lambda_2 t)),$$

где  $c_1 = \frac{0.009}{(4.655/10.372)^{1.2}}$ ,  $c_2 = \frac{0.009}{(4.655/10.372)^{1.5}}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varphi_1(\sigma) = (\sigma/\sigma_*)^{1.2}$ ,  $\varphi_2(\sigma) = (\sigma/\sigma_*)^{1.5}$ ,  $\lambda_1 = 1.264$ ,  $\lambda_2 = 11.65$ ,  $\sigma_* = 10.372$ ,  $t_1 = 1$  ч,  $t_2 = 2$  ч.

Результаты интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.11) на каждой из ступеней нагружения дают нижеследующие аналитические решения:

1)  $t \in [0; t_1]$ ;  $\sigma_1 = 4.655$  МПа — нагрузка

$$\Delta_p^{(t)} = \Delta_u(t), \text{ где}$$

$$\Delta_u(t) = c_1 \varphi_1(\sigma_1) (1 - \exp(-\lambda_1 t)) + c_2 \varphi_2(\sigma_1) (1 - \exp(-\lambda_2 t)).$$

2)  $t \in [t_1; t_2]$ ;  $\sigma_2 = 6.288$  МПа — нагрузка

$$\Delta_p^{(t)} = \Delta_u(t), \text{ где}$$

$$\Delta_u(t) = c_1 \varphi_1(\sigma_1) (\exp(-\lambda_1(t-t_1)) - \exp(-\lambda_1 t)) + c_2 \varphi_2(\sigma_1) (\exp(-\lambda_1(t-t_1)) - \exp(-\lambda_2 t)) + c_1 \varphi_1(\sigma_2) (1 - \exp(-\lambda_1(t-t_1))) + c_2 \varphi_2(\sigma_2) (1 - \exp(-\lambda_2(t-t_1))).$$

3)  $t \in [t_2; +\infty)$ ;  $\sigma_3 = 8.738$  МПа — нагрузка

$$\Delta_p^{(t)} = \Delta_u(t), \text{ где}$$

$$\Delta_u(t) = c_1 \varphi_1(\sigma_1) (\exp(-\lambda_1(t-t_1)) - \exp(-\lambda_1 t)) + c_2 \varphi_2(\sigma_1) (\exp(-\lambda_1(t-t_1)) - \exp(-\lambda_2 t)) + c_1 \varphi_1(\sigma_2) (\exp(-\lambda_1(t-t_2)) - \exp(-\lambda_1(t-t_1))) + c_2 \varphi_2(\sigma_2) \times \times (\exp(-\lambda_2(t-t_2)) - \exp(-\lambda_2(t-t_1))) + c_1 \varphi_1(\sigma_3) (1 - \exp(-\lambda_1(t-t_2))) + + c_2 \varphi_2(\sigma_3) (1 - \exp(-\lambda_2(t-t_2))).$$

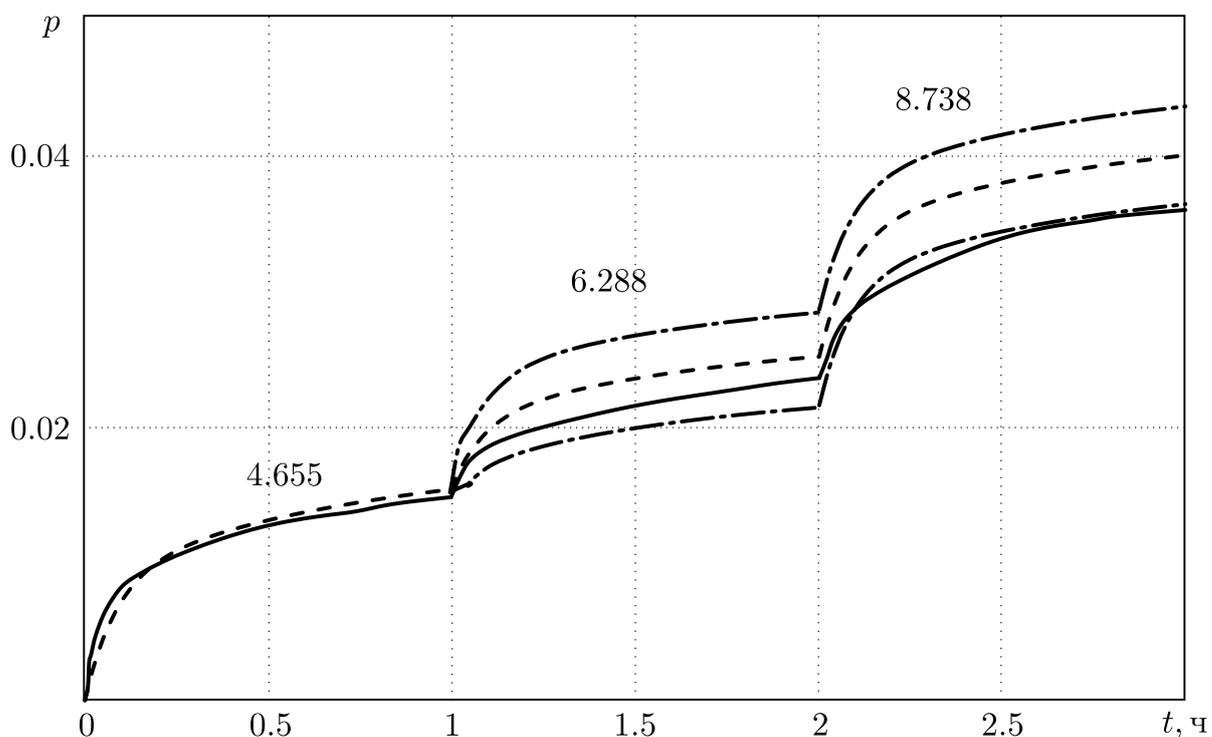


Рис. 3.31. Расчетные данные деформации ползучести по модели (1.11) для ПВХП при температуре 24°C с данными из табл. 2.6. Сплошная линия — экспериментальные данные; штриховая линия — расчетные данные для математического ожидания; штрих-пунктир — 99% доверительный интервал. Цифры — напряжение в МПа

Оценивая полученные результаты для растягиваемого резьбового соединения и одноосного растяжения полых цилиндрических образцов, можно сделать вывод о хорошей коррелированности расчетных и опытных данных и для кусочно-постоянных режимов нагружения, что также свидетельствует об адекватности модели. Отметим еще раз, что ступенчатые режимы входного воздействия (в нашем случае — осевые нагрузки) наиболее контрастно выявляют все недостатки (или достоинства) любых математических моделей, о чем можно судить по соответствию расчетных и экспериментальных значений выходных параметров (в рассмотренных случаях — осевое перемещение для резьбового соединения и деформация — для растягивающего образца трубчатого сечения).

### 3.5. Выводы по главе

1. Предложен и реализован метод индивидуального прогнозирования обобщённого перемещения элементов конструкций на стадиях упрочнения и стационарного накопления поврежденности по изделию-лидеру в стохастической постановке, который не требует аналитических соотношений, связывающих обобщенные нагрузки с обобщёнными силами, точного знания характера и величины нагрузок для совокупности однотипных изделий. Выполнено исследование эффективности разработанного метода на основании сравнения интервалов «времени» для прогноза обобщённого перемещения и базового «временного» интервала, в рамках которого определялись оценки случайных параметров процесса, для различных конструктивных элементов: износа буксы стойки шасси самолета в зависимости от количества взлето/посадок (в/п), осевого растяжения резьбового соединения и стержня в условиях ползучести материала от времени. Показано, что для базового «времени» для оценки износа стойки шасси самолета  $t \in [0; 1200]$  (в/п) хорошие результаты получены на «временном» интервале  $t \in [1200; 2700]$  (в/п)); для стержней из поливинилхлоридного пластика при базовом времени  $t \in [0; 2]$  (час) время прогноза составляет  $t \in [2; 8]$  (час), при этом результаты прогнозирования распространяются на температуры  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  и  $T = 24 \text{ }^\circ\text{C}$  и различные уровни напряжений независимо от образца-лидера; для резьбового соединения из стали 45 при базовом времени  $t \in [0; 17.4]$  часов, временной интервал прогнозирования составляет  $t \in [17.4; 75]$  часов, который в 4 раза больше базового, при этом реализован сложный режим нагружения ступенчатого изменения осевой нагрузки на участке прогнозирования. Адекватность модели подтверждается сравнением расчетных данных в стохастической постановке с экспериментальными данными, которые во всех рассмотренных случаях попадают в соответствующие доверительные интервалы.

2. Разработан метод прогнозирования кривых стационарной ползучести при наличии второй и третьей стадий и времени разрушения (длительной прочности) стержневых элементов конструкций по начальной (минимальной) скорости ползучести на начальном участке деформирования исследуемых образцов и известной кривой ползучести образца-лидера в условиях механизма вязкого разрушения материала при осевом растяжении и кручении. Проведена проверка адекватности метода сравнением данных расчета с экспериментальными данными из независимых источников в широком диапазоне материалов и параметров температурно-силового нагружения (коррозионно-стойкая сталь 12X18H10T,  $T = 850^{\circ}\text{C}$ ; сплав ВТ-9,  $T = 600^{\circ}\text{C}$ , сплав ВТ-5,  $T = 450^{\circ}\text{C}$  и  $T = 550^{\circ}\text{C}$ ; сплав ОТ-4,  $T = 550^{\circ}\text{C}$ , сплав 09Г2С,  $T = 700^{\circ}\text{C}$ ,  $T = 730^{\circ}\text{C}$  и  $T = 750^{\circ}\text{C}$ ; титановый сплав,  $T = 600^{\circ}\text{C}$ ; сплав Д16Т,  $T = 250^{\circ}\text{C}$ ). Показаны возможные варианты использования полученных результатов, в частности, в области оптимизации планирования экспериментальных исследований при построении теорий неупругого деформирования материалов.
3. Разработан и реализован метод прогнозирования кинетики обобщенного перемещения конкретного (единичного) элемента конструкций на основании стохастических уравнений состояния при однопараметрическом нагружении на примере осевого растяжения резьбовых соединений из стали 45 при температуре  $450^{\circ}\text{C}$  и сплава ЭП698 при температуре  $700^{\circ}\text{C}$ , растяжения стержней из поливинилхлоридного пластика при температуре  $24^{\circ}\text{C}$ . Выполнена проверка адекватности данных расчета экспериментальным данным в условиях сложного кусочно-постоянного режима нагружения. Показано, что интервал прогноза составляет от одного до трех базовых временных интервалов, с использованием которых выполнялась структурная и параметрическая идентификация индивидуализированной модели.

# Программное обеспечение для реализации разработанных методов

Материал данной главы излагается в соответствии с публикациями [101, 102] автора диссертации. Разработанные алгоритмы структурной и параметрической идентификации параметров математических моделей неполной обратимости деформации ползучести были реализованы в виде программ, написанных на высокоуровневом языке программирования Python. В качестве языка разработки программного обеспечения выбран именно Python, так как он обладает богатой системой библиотек (NumPy, SciPy и Pandas) и модулей, которые упрощают обработку данных. Разработанные программные продукты позволяют пользователю ввести на входе программы экспериментальные значения деформации ползучести и получить на выходе оценки параметров математической модели на выходе. Описание основных этапов вычислительных процедур и интерфейса программ изложено в данной главе.

### 4.1. Описание основных этапов алгоритма идентификации параметров математической модели ползучести в пределах первых двух стадий

Разработанный метод идентификации параметров математической модели неполной обратимости деформации ползучести, описанный в п. 2.1, состоит из следующих этапов:

- 1) Ввод экспериментальных данных и формирование равномерной выборки результатов эксперимента. В разработанном программном обеспечении ввод данных осуществляется через загрузку файла Microsoft Excel, име-

ющего определенную структуру, которая будет описана ниже.

- 2) Построение линейной аппроксимации второй стадии ползучести в виде  $\hat{y}_{lk} = A + ct_k$ . Момент  $t_k$ , начиная с которого экспоненциальные составляющие принимают асимптотические значения, находится из условия  $\frac{\Delta y'_k}{\max |y'_k|} \approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{y_1} < 0.001$ ,  $k = \overline{2, N-1}$ . Оценки параметров находятся из условия минимизации  $\|y - \hat{y}_l\|^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} (y_k - \hat{y}_{lk})^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} (y_k - \hat{A} - \hat{c}t_k)^2 \rightarrow \min$ .

- 3) Находятся оценки параметров первой экспоненциальной составляющей  $f_k = -a_1 \exp[-\alpha_1 \tau(k-1)]$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  из условия минимизации  $\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [y_k^{(1)} + \hat{a}_1 \exp(-\hat{\alpha}_1 \tau k)]^2 \rightarrow \min$  и построение регрессионной модели в форме разностных уравнений, которая может быть описана в матричной форме

$$z = F\lambda + \eta,$$

где  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})^T$ ,  $\eta = (\varepsilon_0, \varepsilon_1 - \lambda_1 \varepsilon_0, \varepsilon_2 - \lambda_1 \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1} - \lambda_1 \varepsilon_{N-2})^T$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ ,  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_0 & z_1 & \dots & z_{N-2} \end{bmatrix}^T$ , — символ транспонирования.

- 4) Итерационная процедура уточнения параметров регрессионной модели, начальные оценки имеют вид  $\hat{\lambda}_1^{(0)} = \sum_{k=1}^{N-1} z_k z_{k-1} / \sum_{k=1}^{N-1} z_{k-1}^2$ ,  $\hat{\lambda}_2^{(0)} = z_0$ , из условия  $\|\hat{\eta}\|^2 = \|z - F\lambda\|^2 \rightarrow \min$ . Итерационная процедура уточнения параметров имеет вид

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \hat{\lambda}^{(i)} + \left[ \left( W(\hat{\lambda}^{(i)}) \right)^T W(\hat{\lambda}^{(i)}) \right]^{-1} \left( W(\hat{\lambda}^{(i)}) \right)^T \left[ y^{(1)} - f(\hat{\lambda}^{(i)}) \right],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $W(\lambda_1, \lambda_2)$  — матрица Якоби размера  $[N \times 2]$ . Процесс уточнения заканчивается при выполнении условия  $\|\hat{\lambda}^{(i+1)} - \hat{\lambda}^{(i)}\| < 0.001 \|\hat{\lambda}^{(i)}\|$ .

- 5) Итерационная процедура уточнения параметров экспоненциальной составляющей, оценки параметров имеют вид  $\hat{a}_1^{(0)} = -\hat{\lambda}_2^{(i)}$ ,  $\hat{\alpha}_1^{(0)} = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)}$ ,  $\hat{c}^{(0)} = \hat{c}$ .
- 6) нахождение дисперсий величин  $a_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $c$  из матрицы  $V[\mu] = (W^T W)^{-1} s_{\text{ост}}^2$ , где  $s_{\text{ост}}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 / (N - 3)$ ,  $V_{11}(\mu) = D(a_1)$ , элементы главной диагонали являются дисперсиями  $V_{22}(\mu) = D(\alpha_1)$ ,  $V_{33}(\mu) = D(c)$ ;
- 7) Проверка условия адекватности, в качестве которых принимаются норма среднеквадратичного отклонения модели от результатов эксперимента  $h, \% = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 / \sum_{k=0}^{N-1} y_k^2} \cdot 100\%$  и квадрат коэффициента корреляции (коэффициент детерминации)  $R = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})(\hat{y}_k - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (\hat{y}_k - \bar{\hat{y}})^2}}$ . При выполнении одного из условий  $h, \% \leq 3\%$ ,  $R^2 \geq 97\%$  считаем, что модель адекватна.
- 8) При выполнении условий пункта 7) вывод результатов вычислений в файл Microsoft Excel. При невыполнении необходимо перейти ко второй экспоненциальной составляющей, повторить пункты 3) – 6) и провести проверку. При их невыполнении перейти к третьей экспоненциальной составляющей и повторить пункты 3) – 7). Далее осуществляется вывод результатов в файл Microsoft Excel.

## 4.2. Описание основных элементов и интерфейса программы идентификации параметров математической модели ползучести в пределах первых двух стадий при постоянных напряжениях

Разработанное программное обеспечение написано на языке программирования Python. Для работы на ПК необходимо, чтобы была установлена ОС Windows 10/11, программа запускается исполняемым файлом EXP3.exe.

После запуска отображается меню программы, изображенное на рис. 4.1.

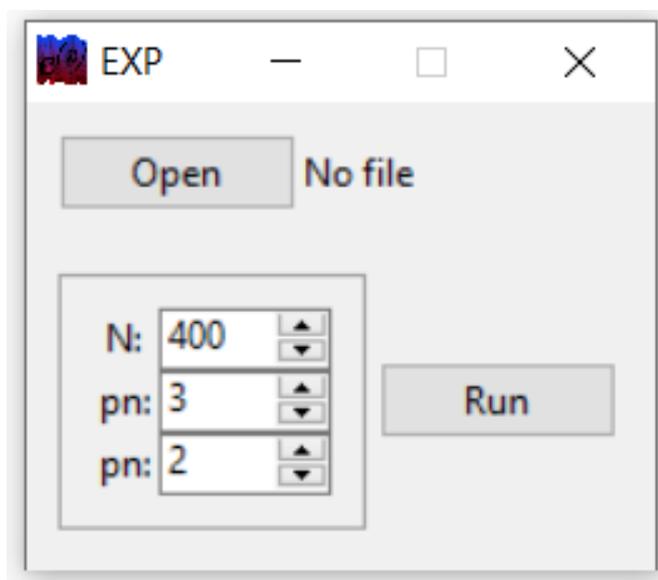


Рис. 4.1. Вид окна меню программы

На оконной форме есть возможность задать объем равномерной выборки  $N$ , сформированной в результате первичной обработки экспериментальных данных, количество точек сглаживания  $pn$  и степень сглаживающего многочлена  $mn$ .

Для ввода экспериментальных данных необходимо выбрать файл Microsoft Excel с использованием кнопки **Open** (рис. 4.2). Выбираем нужный файл и используем кнопку **Открыть**.

Для корректной работы программы необходимо, чтобы вводимые экспериментальные данные в файле Microsoft Excel соответствовали структуре,

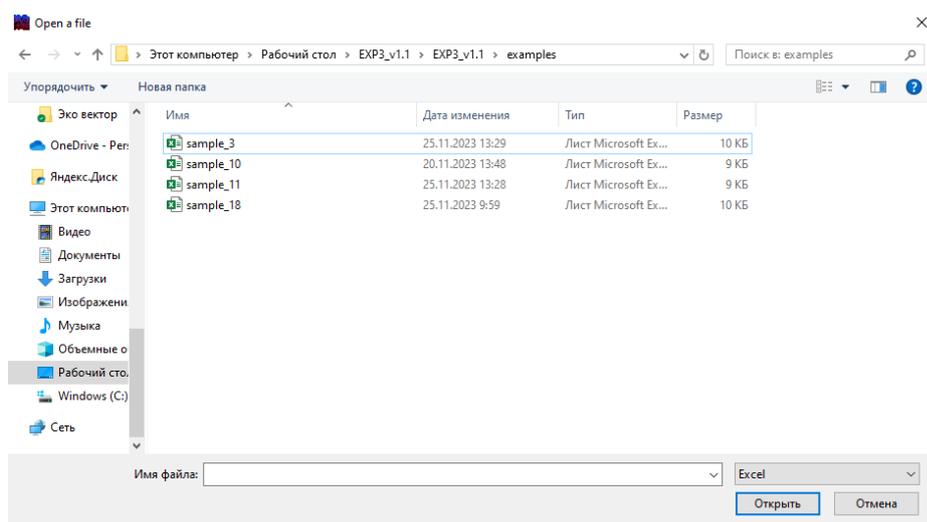


Рис. 4.2. Диалоговое окно выбора файла для работы

представленной на рис. 4.3, а именно — экспериментальные данные «время — деформация ползучести» введены столбцами  $t$  и  $p$  последовательно друг за другом.

	A	B	C	D
1	$t$	$p$		
2	0	0		
3	0,4	8		
4	0,75	16		
5	2	26		
6	3,75	31		
7	6	37		
8	7	38,4		
9	8	40		
10	10	41		
11	12,5	43		
12	14,75	45		
13	16,75	47,4		
14	19	49		
15	20,5	50		
16				

Рис. 4.3. Структура входных данных в файле

После выбора файла нажимаем кнопку **Run**, выбираем в какую папку сохранить файл с результатами (по умолчанию название файла `approximation.exe`) и нажимаем кнопку **Сохранить**. При успешной конвертации файла получаем

уведомление, показанное на рис. 4.4.

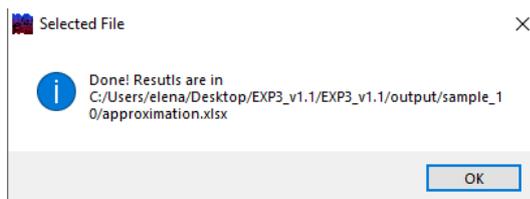


Рис. 4.4. Успешное завершение работы программы

Полученный файл `approximation.exe` состоит из следующих листов:

- **Experimental Data**, где показаны ранее введенные экспериментальные данные;
- **Equalized**, где показаны сглаженные экспериментальные данные, количество точек сглаживания, степень сглаживающего многочлена и период дискретизации  $\tau$  (рис. 4.5);

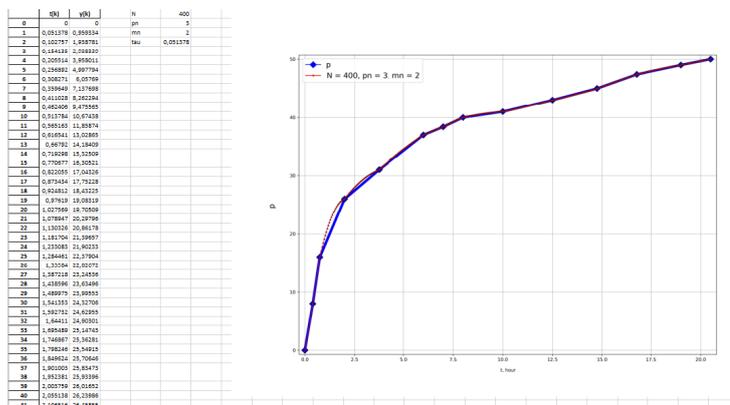


Рис. 4.5. Вид листа **Equalized**

- **Stages 1, 2**, где выведены значения аппроксимация второй стадии ползучести и оценки параметров  $\hat{A}$  и  $\hat{c}$ , показана разность  $y_1$  между экспериментальными данными и аппроксимацией второй стадии (рис. 4.6);
- **Exponent №1**, где показаны начальные оценки параметров первой экспоненциальной составляющей, показана разность  $y_1$  между экспериментальными данными и аппроксимацией второй стадии, а также остатки (рис. 4.7);

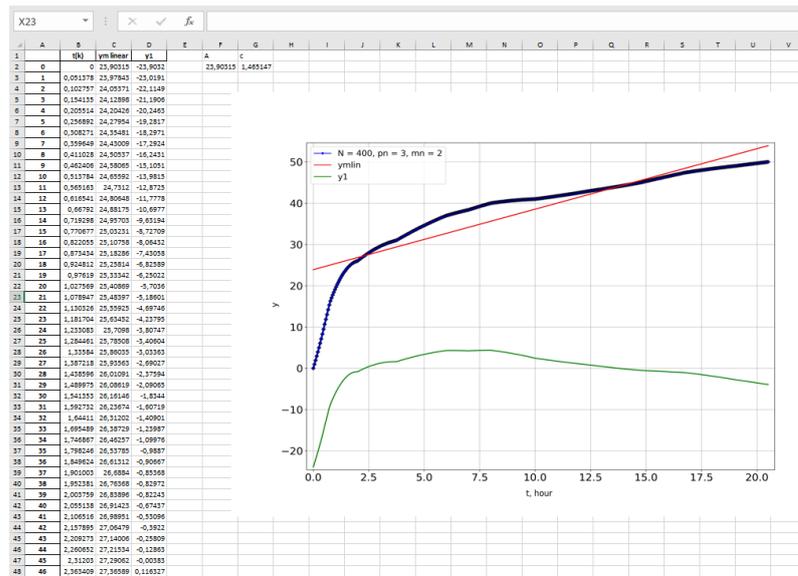


Рис. 4.6. Вид листа Stages 1,2

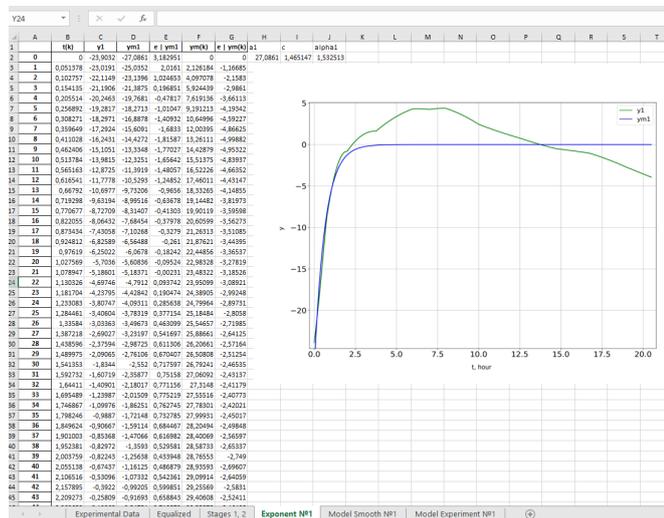


Рис. 4.7. Вид листа Exponent №1

- Model Smooth №1, где показана построенная аппроксимация по сглаженной кривой с начальными оценками параметров ( $y_m$ ) и с уточненными ( $y_{mu}$ ). Указаны оценки параметров, их дисперсии и критерии адекватности (коэффициент детерминации и среднеквадратическая норма отклонения) (рис. 4.8);
- Model Experiment №1, где показана построенная аппроксимация по экспериментальной кривой с оценками параметров, полученными по сглаженной кривой ( $y_{m1}$ ) и уточненными оценками, полученными по эксперимен-

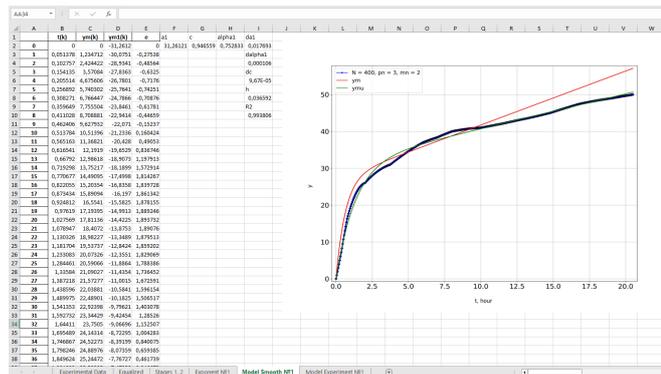


Рис. 4.8. Вид листа Model Smooth №1

тальной кривой ( $y_{m2}$ ). Указаны оценки параметров, их дисперсии и критерии адекватности (коэффициент детерминации и среднеквадратическая норма отклонения) (рис. 4.9).

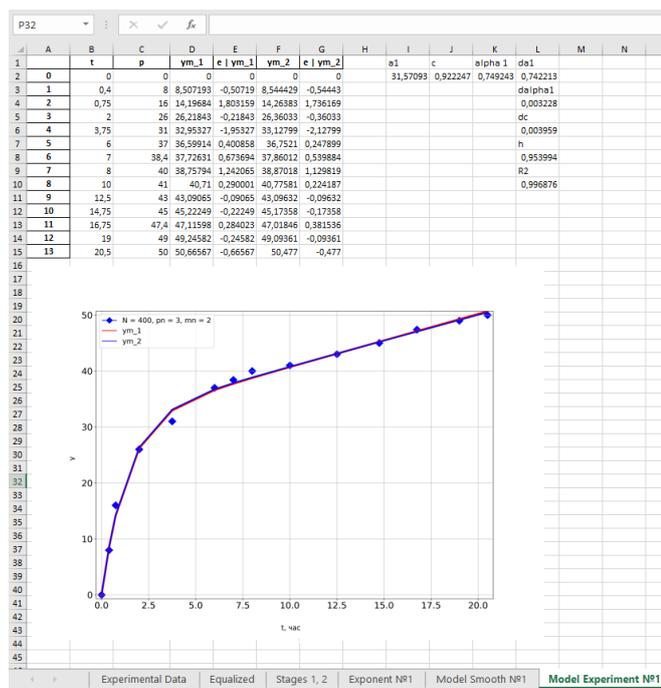


Рис. 4.9. Вид листа Model Experiment №1

Разработанное программное обеспечение зарегистрировано в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024618594 от 15.04.2024 [101].

### 4.3. Описание основных этапов алгоритма идентификации параметров математической модели ползучести в пределах стадии упрочнения при постоянных напряжениях

Алгоритм метода состоит из следующих этапов:

- 1) Ввод экспериментальных данных и формирования равномерной выборки результатов эксперимента. В разработанном программном обеспечении ввод данных осуществляется через загрузку файла Microsoft Excel, имеющего определенную структуру.
- 2) Нахождение оценок параметров первой экспоненциальной составляющей  $a_1^{(0)}$  и  $\alpha_1^{(0)}$ :  $a_1^{(0)} = y_{N-1}$ , обозначим  $z_k = \exp(-\alpha t_k)$  и получаем  $z_k = 1 - \frac{y_k}{\alpha_1^{(0)}} = 1 - \frac{y_k}{y_{N-1}}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 2$ . Учитывая случайное возмущение в экспериментальных наблюдениях  $\varepsilon_k$ , перепишем  $z_k$ :  $z_k = \exp(-\alpha_1 t_k) + \varepsilon_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 2$ , разделим левую и правую часть на  $z_k$  и прологарифмируем:  $\ln z_k = -\alpha_1 t_k - \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_k}{z_k} \right) \approx -\alpha_1 t_k + \frac{\varepsilon_k}{z_k}$ . Начальное приближение параметра  $\hat{a}_1^{(0)} = -\sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 t_k \ln z_k / \sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 t_k^2$  находится из условия минимизации  $\sum_{k=0}^{N-1} e_k^2 \approx \sum_{k=0}^{N-1} (z_k \ln z_k + \alpha_1 t_k z_k)^2 \rightarrow \min$ .
- 3) Итерационная процедура уточнения оценок параметров первой экспоненциальной составляющей: введем нелинейную функциональную зависимость  $f_k(\lambda) = a_1 [1 - \lambda_1^k]$ , где  $\lambda_1 = \exp(-\alpha \tau)$ , тогда получим  $f_k = a_1 [1 - \lambda_1^k] = a_1 - a_1 \lambda_1^k$ ;  $f_{k-1} = a_1 - a_1 \lambda_1^k \lambda_1^{-1}$ . Выражаем  $a_1 \lambda_1^k = (a_1 - f_{k-1}) \lambda_1$  и получаем

$$f_k = a_1 - a_1 \lambda_1^k = a_1 - (a_1 - f_{k-1}) \lambda_1, \quad f_k = \lambda_1 f_{k-1} + a_1 (1 - \lambda_1). \quad (4.1)$$

Из (4.1) получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_k = \lambda_1 f_{k-1} + \lambda_2, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \tau), \\ \lambda_2 = a_1 (1 - \lambda_1). \end{cases}$$

Регрессионная модель на основе разностного уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} y_k = f_k(\lambda) + \varepsilon_k, \\ f_0 = 0, \\ f_k = \lambda_1 f_{k-1} + \lambda_2, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T, \\ \lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \tau), \\ \lambda_2 = a_1 (1 - \lambda_1). \end{cases} \quad (4.2)$$

Начальные оценки параметров нелинейной регрессионной модели (4.2) находим с учетом выполнения условия  $\|e\|^2 \rightarrow \min$ .

Начальное приближение вектора оценок параметров модели (4.2) имеет вид:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \exp(-\hat{\alpha}_1^{(0)} \tau), \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = \hat{a}_1^{(0)} (1 - \hat{\lambda}_1^{(0)}).$$

Параметрическая линеаризация нелинейной зависимости  $f_k(\lambda)$  имеет вид:

$$f_k(\lambda) = f_k(\hat{\lambda}^{(i)}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_k(\hat{\lambda}^{(i)})}{\partial \lambda_j} \cdot (\lambda_j - \hat{\lambda}_j^{(i)}).$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии описывается формулой:

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \hat{\lambda}^{(i)} + \left[ \left( W(\hat{\lambda}^{(i)}) \right)^T W(\hat{\lambda}^{(i)}) \right]^{-1} \left( W(\hat{\lambda}^{(i)}) \right)^T \left[ y_k - f_k(\hat{\lambda}_j^{(i)}) \right],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

где  $W(\lambda)$  — матрица Якоби размера  $[N \times 2]$ .

Результатом расчетов, выполненных на этом шаге алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация кривой ползучести с одной экспоненциальной составляющей:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

в которой оценки параметров соответствуют элементам вектора  $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ :  
 $\hat{a}_1 = \hat{\lambda}_1^{(i+1)}$ ,  $\hat{\alpha}_1 = \hat{\lambda}_2^{(i+1)}$ .

- 4) нахождение дисперсий величин  $a_1, \alpha_1$  из  $V[\lambda] = (W^T W)^{-1} s_{\text{ост}}^2$ , где  $s_{\text{ост}}^2 = \sum_{k=1}^{N-1} (e_k - \bar{e})(e_{k-1} - \bar{e}) / (N - 2)$ ,  $e_k = y_k - \hat{y}_k$ ,  $\bar{e} = \sum_{k=0}^{N-1} e_k / N$ ,  $k = \overline{0, N - 1}$ . Диагональные элементы  $V_{11}(\lambda) = D(a_1)$ ,  $V_{22}(\mu) = D(\alpha_1)$  и задают дисперсию параметров  $a_1$  и  $\alpha_1$ .

- 5) осуществляется проверка адекватности модели на предмет нахождения корреляции в остатках. Вычисляем остатки — отклонение модели  $\hat{y}_k$  от результатов эксперимента  $y_k$ :  $e_k = y_k - \hat{y}_k$ , и их среднее арифметическое —  $\bar{e} = \sum_{k=0}^{N-1} e_k / N$ ,  $k = \overline{0, N - 1}$ . Проверка адекватности осуществляется путем вычисления значений критерия Дарбина-Уотсона:

$$dw = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} (e_k - e_{k-1})^2}{\sum_{k=0}^N (e_k - \bar{e})^2} \text{ и коэффициента корреляции между}$$

$$\text{остатками } r, \%: r = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} (e_k - \bar{e})(e_{k-1} - \bar{e})}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (e_k - \bar{e})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} (e_{k-1} - \bar{e})^2}} \cdot 100\%. \text{ Условием}$$

адекватности построенной модели результатам эксперимента можно считать не выполнение одного из неравенств:  $0 \leq dw \leq 1.6$ ,  $2.4 \leq dw \leq 4$ ;  $-1 \leq r \leq -0.2$ ,  $0.2 \leq r \leq 1$ .

- 6) При невыполнении условий пункта 5) вывод результатов вычислений в файл Microsoft Excel. При выполнении одного из условий следует, что в остатках существует корреляция, следовательно необходимо перейти к

выделению второй экспоненциальной составляющей. Для решения этой задачи необходимо построить модель авторегрессии первого порядка при ненулевом математическом ожидании случайной величины.

#### 4.4. Описание основных элементов и интерфейса программы идентификации параметров математической модели ползучести в пределах первых двух стадий

Разработанное программное обеспечение написано на языке программирования Python. Для работы на ПК необходимо, чтобы была установлена ОС Windows 10/11, программа запускается исполняемым файлом EXP2.exe.

После запуска отображается меню программы, изображенное на рис. 4.10.

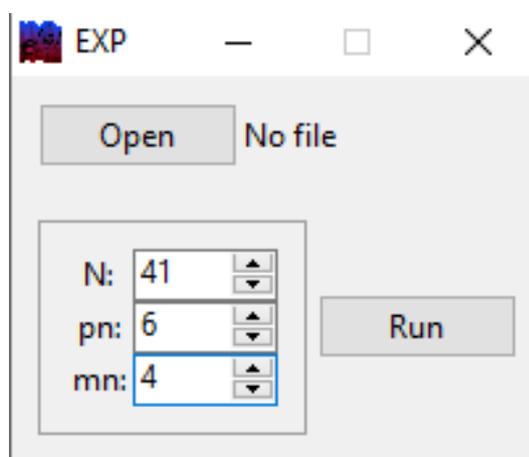


Рис. 4.10. Вид окна меню программы

На оконной форме есть возможность задать объем равномерной выборки  $N$ , сформированной в результате первичной обработки экспериментальных данных, количество точек сглаживания  $pn$  и степень сглаживающего многочлена  $mn$ .

Для ввода экспериментальных данных необходимо выбрать файл Microsoft Excel путем нажатия кнопки Open (рис. 4.11). Выбираем нужный файл и на-

жимаем кнопку **Открыть**.

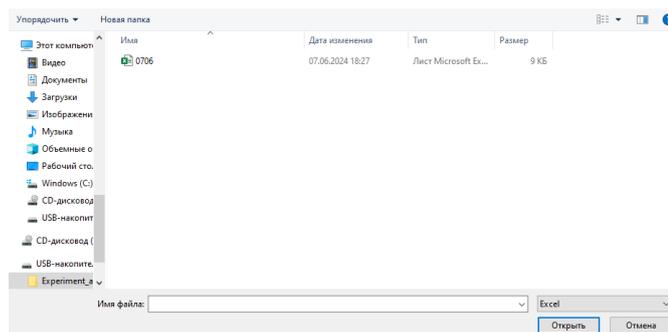


Рис. 4.11. Диалоговое окно выбора файла для работы

Для корректной работы программы необходимо, чтобы вводимые экспериментальные данные в файле Microsoft Excel соответствовали структуре, представленной на рис. 4.12, а именно — экспериментальные данные «время – деформация ползучести» введены столбцами **t** и **p** последовательно друг за другом.

	A	B	C	D
1	t	p		
2	0	0		
3	0,5	0,0145		
4	1	0,0163		
5	2	0,0183		
6	3	0,0198		
7	4	0,0210		
8	5	0,0215		
9	6	0,0223		
10	7	0,023		
11	8	0,0235		
12				
13				

Рис. 4.12. Структура файла

После выбора файла используем кнопку **Run**, выбираем в какую папку сохранить файл с результатами (по умолчанию название файла `approximation.exe`) и используем кнопку **Сохранить**. При успешной конвертации файла получаем уведомление о выполнении программы.

Основные полученные расчеты представлены на рис. 4.13. На примере экспериментальных данных, представленных на рис. 4.12, показано применение численного метода с выделением двух экспоненциальных составляющих. Показаны начальные оценки параметров первой экспоненциальной составляющей, уточненные оценки по сглаженной и экспериментальной кривой, рассчитаны критерии адекватности. Видно, что выполняются условия, описанные в пункте 5) алгоритма метода. Следовательно, есть корреляция остатков, поэтому необходимо перейти к выделению второй экспоненциальной составляющей. Проведена процедура среднеквадратичного оценивания параметров аппроксимации кривой ползучести, результаты выведены в файл.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1																	
2	Np	10			Начальное	Сглаженная	Эксперимент			Сглаженная	Эксперимент						
3	tau	0,02005	a1	0,023493151	0,021564041	0,021476456	a1	0,011991775	0,010872								
4			alpha1	0,667602421	1,418099432	1,735719968	alpha1	0,109414795	0,245322								
5			da1	-	8,21578E-05	6,16613E-05	a2	0,016811831	0,014049								
6			dalpha1	-	0,033929116	0,028732516	alpha2	2,775790452	5,703093								
7			dw	-	0,00186136	0,945189699	da1	0,000252016	7,71E-08								
8			R	-	0,999069893	0,483425741	dalpha1	2,97691E-05	0,000659								
9			Q_ost	-	-	-	da2	0,000209365	1,11E-07								
10							dalpha2	2,25491E-08	0,416769								
11							dw	0,017049582	1,796178								
12							R	0,991465492	0,056726								
13							Q_ost	-	1,19E-07								
14																	
15	t	p		t(k)	y(k)	ym0	ym1	ym2	ym2_1	ym2_2	e1	e2				umr (модель)	
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0,5	0,0145		0,02005	0,001089034	0,000312373	0,000604497	0,000936	2,62785E-05	0,000910101	0,000485	0,000152654				0,014492	
18	1	0,0163		0,0401	0,001824169	0,000620592	0,001192049	0,001823	5,24994E-05	0,001770934	0,000632	7,35547E-07				0,016367	
19	2	0,0183		0,06015	0,002536615	0,000924713	0,00176313	0,002664	7,86628E-05	0,002585166	0,000773	-0,00012721				0,018264	
20	3	0,0198		0,080201	0,003226806	0,00122479	0,002318202	0,00346	0,000104769	0,00335532	0,000909	-0,00023328				0,019712	
21	4	0,021		0,100251	0,003895174	0,001520877	0,002857714	0,004215	0,000130818	0,004083782	0,001037	-0,00031943				0,020845	
22	5	0,0215		0,120301	0,004542146	0,001813028	0,00382102	0,00493	0,00015681	0,004772809	0,00116	-0,00038747				0,021732	
23	6	0,0223		0,140351	0,005168146	0,002101294	0,00389179	0,005607	0,000182744	0,005424536	0,001276	-0,00043913				0,022426	
24	7	0,023		0,160401	0,005773593	0,002385727	0,00438719	0,00625	0,000208623	0,006040982	0,001386	-0,00047601				0,022968	
25	8	0,0235		0,180451	0,006358902	0,002666378	0,004868703	0,006859	0,000234444	0,006624057	0,00149	-0,0004996				0,023393	
26				0,200501	0,006924487	0,002943298	0,005336718	0,007436	0,000262029	0,007175568	0,001588	-0,00051129					
27				0,220551	0,007470754	0,003216535	0,005791613	0,007983	0,000285917	0,007697223	0,001679	-0,00051239					
28				0,240602	0,007998109	0,00348614	0,006233756	0,008502	0,000311569	0,008190638	0,001764	-0,0005041					
29				0,260652	0,008506952	0,003752159	0,006663504	0,008995	0,000337164	0,008657342	0,001843	-0,00048755					
30				0,280702	0,008997679	0,004014642	0,007081206	0,009461	0,000362704	0,009098782	0,001916	-0,00046381					
31				0,300752	0,009470684	0,004273635	0,007487198	0,009905	0,000388188	0,009516324	0,001983	-0,00043383					
32				0,320802	0,009926356	0,004529183	0,007881809	0,010325	0,000413616	0,009911263	0,002045	-0,00039852					
33				0,340852	0,01036508	0,004781335	0,008265359	0,010724	0,000438988	0,010284822	0,0021	-0,00035873					
34				0,360902	0,010787237	0,005030133	0,008638156	0,011102	0,000464304	0,010638159	0,002149	-0,00031523					
35				0,380952	0,011193204	0,005275623	0,009005003	0,011462	0,000489565	0,010972368	0,002193	-0,00026783					
36				0,401003	0,011583357	0,005517849	0,009352692	0,011803	0,000514771	0,011288485	0,002231	-0,00021193					
37				0,421053	0,011958064	0,005756855	0,009695009	0,012127	0,000539921	0,011587489	0,002263	-0,00016935					
38				0,441103	0,012317692	0,005992682	0,010027729	0,012435	0,000565017	0,011870306	0,00229	-0,00011763					
39				0,461153	0,012662604	0,006225374	0,010351123	0,012728	0,000590057	0,012137813	0,002311	-6,5266E-05					
40				0,481203	0,012993157	0,006454972	0,010665451	0,013006	0,000615042	0,012390839	0,002328	-1,2725E-05					
41				0,501253	0,013914268	0,006681517	0,010970967	0,01327	0,000639973	0,012630167	0,002343	0,000644127					
42				0,521303	0,014108013	0,006905005	0,011267919	0,013521	0,000664849	0,01285654	0,00234	0,000586624					
43				0,541353	0,014294426	0,007125611	0,011556547	0,01376	0,000689671	0,013070658	0,002378	0,000534097					
44				0,561404	0,014473688	0,007343239	0,011837083	0,013988	0,000714438	0,013273185	0,002637	0,000486066					
45				0,581454	0,014645981	0,007557974	0,012109756	0,014204	0,000739151	0,013464748	0,002536	0,000442083					

Рис. 4.13. Расчеты

На рис. 4.14 показан график построенной аппроксимации кривой по экспериментальным данным. На рис. 4.15 — график остатков, где  $e_1$  — остатки модели с одной экспоненциальной составляющей,  $e_2$  — двумя.

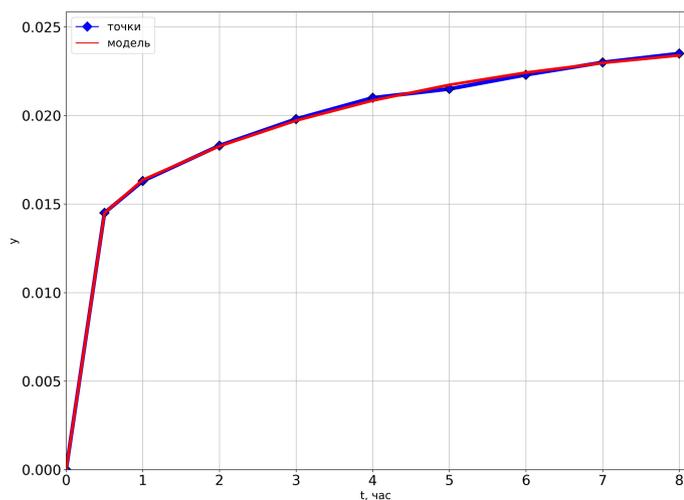


Рис. 4.14. Полученная аппроксимация кривой

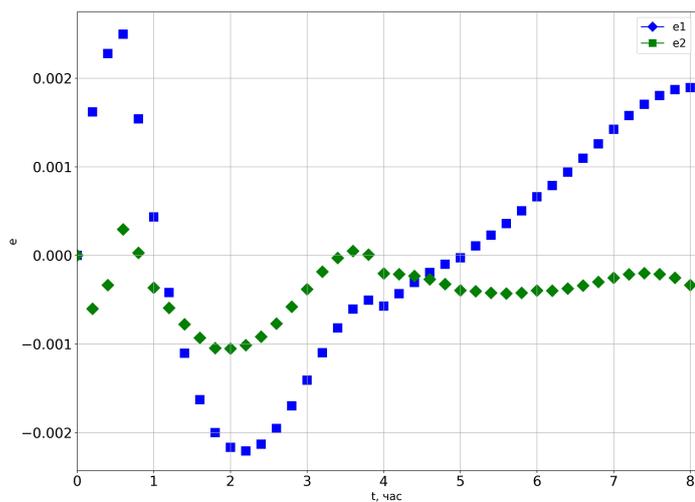


Рис. 4.15. График остатков

Разработанное программное обеспечение зарегистрировано в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024664892 от 26.06.2024 [102].

## 4.5. Выводы по главе

1. Создано программное обеспечение, реализующее разработанные численные методы структурной и параметрической идентификации кривых ползучести. Программное обеспечение позволяет пользователю задать экспериментальные данные деформации на входе программы и получить оценки параметров моделей на выходе.
2. Описаны основные этапы алгоритма разработанных численных методов.
3. Описаны элементы оконных форм и интерфейса программ.

## Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Разработана стохастическая математическая модель прогнозирования индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций с неупругими свойствами материала, общность которой проиллюстрирована на примерах анализа кинетики деформационных характеристик для ряда конструктивных элементов в условиях ползучести и износа при трении.
2. Разработан новый численный метод параметрической и структурной идентификации физически и стохастически нелинейной математической модели неупругого деформирования элементов конструкций, позволяющий, в отличие от имеющихся эвристических методов, математически обосновано свести задачу к нелинейному регрессионному анализу определения оценок случайных параметров модели на основе временных рядов последовательности результатов наблюдений деформации (обобщенного перемещения) при различных постоянных напряжениях (обобщенных нагрузках).
3. Предложен и реализован метод индивидуального прогнозирования обобщенного перемещения элементов конструкций на стадиях упрочнения и стационарного накопления поврежденности по изделию-лидеру в стохастической постановке, который не требует аналитических соотношений, связывающих обобщенные нагрузки с обобщенными перемещениями, точного знания характера и величины нагрузок для совокупности однотипных изделий. Выполнено исследование эффективности разработанного метода на основании сравнения интервалов «времени» для прогноза обобщенного перемещения и базового «временного» интервала, в рамках которого определялись оценки случайных параметров процесса, для различных конструктивных элементов: износа буксы стойки шасси самолета в за-

зависимости от количества взлетов/посадок (в/п), осевого перемещения резьбового соединения и стержней в условиях ползучести материала от времени (при растяжении). Показано, что для базового «времени» для оценки износа стойки шасси самолета  $t \in [0; 1200]$  (в/п) хорошие результаты получены на «временном» интервале  $t \in [1200; 2700]$  (в/п)); для стержней из поливинилхлоридного пластика при базовом времени  $t \in [0; 2]$  (час) время прогноза составляет  $t \in [2; 8]$  (час), при этом результаты прогнозирования распространяются на температуры  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  и  $T = 24 \text{ }^\circ\text{C}$  и различные уровни напряжений независимо от выбора образца-лидера; для резьбового соединения из стали 45 при базовом времени  $t \in [0; 17.4]$  часов временной интервал прогнозирования составляет  $t \in [17.4; 75]$  часов, который в 4 раза больше базового, при этом реализован сложный режим нагружения ступенчатого изменения осевой нагрузки на участке прогнозирования. Адекватность модели подтверждается сравнением расчетных данных в стохастической постановке с экспериментальными данными, которые во всех рассмотренных случаях попадают в соответствующие доверительные интервалы.

4. Разработан метод прогнозирования индивидуального обобщенного перемещения на примере стержневых элементов конструкций в условиях ползучести при наличии второй и третьей стадии накопления поврежденности и времени разрушения по начальной (минимальной) скорости ползучести на начальном участке деформирования исследуемых образцов и известной кривой ползучести образца-лидера в условиях вязкого разрушения материала. Проведена проверка адекватности метода сравнением данных расчета при осевом растяжении и кручении стержней с экспериментальными данными из независимых источников для стержневых конструктивных элементов из различных материалов и в широком диапазоне параметров температурно-силового нагружения (коррозионно-стойкая сталь

12X18H10T,  $T = 850^{\circ}\text{C}$ ; сплав ВТ-9,  $T = 600^{\circ}\text{C}$ , сплав ВТ-5,  $T = 450^{\circ}\text{C}$  и  $T = 550^{\circ}\text{C}$ ; сплав ОТ-4,  $T = 550^{\circ}\text{C}$ , сплав 09Г2С,  $T = 700^{\circ}\text{C}$ ,  $T = 730^{\circ}\text{C}$  и  $T = 750^{\circ}\text{C}$ ; титановый сплав,  $T = 600^{\circ}\text{C}$ ; сплав Д16Т,  $T = 250^{\circ}\text{C}$ ). Показаны возможные варианты использования полученных результатов, в частности, в области оптимизации планирования экспериментальных исследований при построении теорий неупругого деформирования материалов и элементов конструкций.

5. Разработан и реализован метод прогнозирования кинетики обобщенного перемещения конкретного (единичного) элемента конструкций на основании стохастических уравнений состояния при однопараметрическом нагружении, который проиллюстрирован на примере осевого растяжения резьбовых соединений из стали 45 при температуре  $450^{\circ}\text{C}$  и стержней из сплава ЭП698 при температуре  $700^{\circ}\text{C}$ , растяжения стержней из поливинилхлоридного пластика при температуре  $24^{\circ}\text{C}$ . Выполнена проверка адекватности данных расчета экспериментальным данным в условиях сложного кусочно-постоянного режима нагружения. Показано, что интервал прогноза составляет от одного до трех базовых временных интервалов, с использованием которых выполнялась структурная и параметрическая идентификация индивидуализированной модели.
6. Создано проблемно-ориентированное программное обеспечение, реализующее разработанные численные методы структурной и параметрической идентификации математических моделей неупругого деформирования на примере кривых ползучести, полученных при постоянном напряжении. Программное обеспечение позволяет пользователю задать экспериментальные данные деформации на входе программы и получить оценки параметров моделей на выходе.

## Список литературы

1. Антонов А. В., Соколов С. В., Чепурко В. А. Бутстреп-метод оценки восстанавливаемых объектов по специфическим данным об отказах // Информационные технологии. — 2012. — № 4. — С. 50–54.
2. Атлас диаграмм растяжения при высоких температурах, кривых ползучести и длительной прочности сталей и сплавов для двигателей / И. П. Булыгин [и др.]. — М.: Государственное издательство оборонной промышленности, 1957. — 174 с.
3. Афанасьева Е. А. Математическая модель прогнозирования деформации ползучести и длительной прочности материала по образцу прототипу // Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции, т.1. — Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова. — 2023. — С. 12–14.
4. Афанасьева Е. А. Математическое моделирование индивидуальных показателей надежности на стадии эксплуатации по изделию-лидеру // Всероссийская научная конференция (с международным участием) «Математика и математическое моделирование». Самара, Россия, 10–12 ноября 2021 г.: тезисы докладов. — Самара. — 2021. — С. 16–17.
5. Афанасьева Е. А. Метод прогнозирования длительной прочности при вязком механизме разрушения материала // Всероссийская конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»: материалы конференции, 17–19 сентября 2024 г., г. Самара. — Самара: СамГТУ. — 2024. — С. 27–29.
6. Афанасьева Е. А. Метод расчёта индивидуального ресурса элементов конструкций по изделию-лидеру // XVI Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций»: сб. материа-

- лов (Екатеринбург, 16—20 мая 2022 г.). — Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН. — 2022. — С. 172.
7. *Афанасьева Е. А.* Прогнозирование индивидуального остаточного ресурса по изделию-лидеру // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: VII Международная научно-практическая конференция (школа-семинар) молодых ученых: 22–24 апреля 2021: сборник материалов. — Тольятти: ТГУ. — 2021. — С. 105–109.
  8. *Афанасьева Е. А., Зотеев В. Е.* Метод построения модели неполной обратимости деформации ползучести в пределах первых двух стадий // Всероссийская конференция, посвященная 105-летию со дня рождения академика РАН Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред»: тезисы докладов, 13–17 мая 2024 г., г. Новосибирск, Россия. — Новосибирск: СО РАН. — 2024. — С. 21–22.
  9. *Афанасьева Е. А., Зотеев В. Е.* Метод расчета индивидуального ресурса элементов конструкций на основе стохастических уравнений состояния при однопараметрическом нагружении // Всероссийская конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи»: материалы конференции, 17–19 сентября 2024 г., г. Самара. — Самара: СамГТУ. — 2024. — С. 30–33.
  10. *Бадаев А. Н.* К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести // Проблемы прочности. — 1984. — № 12. — С. 22–26.
  11. *Банщикова И. А., Никитенко А. Ф.* Ползучесть осесимметрично нагруженных пластин с учетом накопления повреждений в их материале // ПМТФ. — 2006. — Т. 47, № 5. — С. 157–168.

12. *Бойко С. В.* Моделирование формообразования элементов конструкций в условиях нестационарной ползучести: дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела. — Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 2020. — 133 с.
13. *Болотин В. В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. — М.: Стройиздат, 1982. — 351 с.
14. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. — М.: Машиностроение, 1984. — 312 с.
15. *Болотин В. В., Чирков В. П.* Надежность механических систем // Надежность технических систем. Справочник. М.: Радио и связь. — 1985. — С. 438—457.
16. *Бондаренко В. М., Меркулов С. И.* К вопросу развития теории реконструированного железобетона // Бетон и железобетон. — 2004. — № 6. — С. 3—11.
17. *Будин А. Я., Чекренева М. В.* Усиление портовых сооружений. — М.: Транспорт, 1983. — 180 с.
18. *Бунятов В. Ю.* Вероятностные модели реологических материалов // Строительная механика машин и конструкций на автомобильных дорогах: Сб. научн.тр. — М.: Моск. автодорож. ин-т. — 1987. — С. 16—20.
19. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
20. *Волков И. А., Коротких Ю. Г.* Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. — М.: Физматлит, 2008. — 424 с.
21. *Гольденблат И. И., Баженов В. Л., Копнов В. А.* Длительная прочность в машиностроении. — М.: Машиностроение, 1977. — 246 с.
22. *Грановский В. А., Сирая Т. Н.* Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. — Л. : Энергоатомиздат, 1969. — 288 с.

23. *Громаковский Д. Г., Радченко В. П., Аверкиева В. И.* Разработка системы диагностирования узлов трения на основе метода жёсткости // Вестник машиностроения. — 1988. — № 8. — С. 10—14.
24. *Гусев А. С., Стародубцева С. А., Щербаков В. И.* Прогнозирование остаточного ресурса по результатам диагностирования натуральных конструкции и при непрерывном отслеживании их технического состояния // Известия МГТУ «МАМИ». — 2014. — Т. 4, № 1(19). — С. 100—104.
25. *Демиденко Е. З.* Линейная и нелинейная регрессии. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 302 с.
26. *Елисеева Е. Е.* Прогнозирование надежности толстостенной трубы под действием внутреннего давления // Ползучесть и длительная прочность конструкций. — 1986. — С. 113—116.
27. *Еремин Ю. А.* Об одном подходе к исследованию податливости резьбовых соединений при ползучести // Проблемы прочности. — 1983. — № 3. — С. 14—16.
28. *Еремин Ю. А.* Применение многоуровневой схематизации к расчету елочных замков лопаток трубок // Ползучесть и длительная прочность конструкций. — 1986. — С. 99—108.
29. *Еремин Ю. А., Кайдалова Л. В.* Индивидуальное прогнозирование ползучести конструкций по результатам стендовых испытаний // Изв. вузов. Машиностроение. — 1985. — № 7. — С. 10—14.
30. *Еремин Ю. А., Радченко В. П., Самарин Ю. П.* Прогнозирование деформации ползучести и перемещений в единичном изделии по результатам стендовых испытаний // Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях: Сб. научн. тр. — Куйбышев, 1984. — С. 57—74.

31. *Еремин Ю. А., Радченко В. П., Самарин Ю. П.* Расчет индивидуальных деформационных свойств элементов конструкций в условиях ползучести // *Машиностроение*. — 1984. — № 1. — С. 67–72.
32. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / Под ред. С. А. Шестерикова / А. М. Локощенко [и др.]. — М: Машиностроение, 1983. — 102 с.
33. *Зотеев В. Е.* Математическое моделирование и численный метод оценки характеристик неизотермической ползучести по результатам эксперимента // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. — 2021. — Т. 25, № 3. — С. 531–555. — DOI: [10.14498/vsgtu1871](https://doi.org/10.14498/vsgtu1871).
34. *Зотеев В. Е.* Параметрическая идентификация кривых ползучести на основе стохастических разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. — 2008. — № 1(16). — С. 90–95. — DOI: [10.14498/vsgtu578](https://doi.org/10.14498/vsgtu578).
35. *Зотеев В. Е.* Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. — 2018. — Т. 22, № 4. — С. 669–701. — DOI: [10.14498/vsgtu1643](https://doi.org/10.14498/vsgtu1643).
36. *Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю.* Численный метод определения параметров первой стадии деформации ползучести // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. — 2017. — Т. 56, № 4. — С. 40–48.
37. *Иванов Д. В.* Биомеханическая поддержка решения врача при выборе варианта лечения на основе количественных критериев оценки успешности // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 2–89. — DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89).
38. *Иванов Д. В., Доль А. В.* Биомеханическое моделирование. — Саратов: Общество с ограниченной ответственностью «Амирит», 2021. — 250 с.

39. *Ильин В. Н., Кашелкин В. В., Шестериков С. А.* Ползучесть элементов конструкций со случайными параметрами // Изв. АН СССР. МТТ. — 1982. — № 4. — С. 159—167.
40. Индивидуальное прогнозирование деформации ползучести по испытаниям малой продолжительности / Ю. Л. Калинин [и др.] // Прикладные проблемы прочности и пластичности. — 1986. — № 33. — С. 128—131.
41. К стохастическому анализу вязкоупругих свойств полимеров / А. А. Поздеев [и др.] // Вопросы механики полимеров и систем. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1976. — С. 50—55.
42. *Катанаха Н. А., Семенов А. С., Гецов Л. Б.* Единая модель долгосрочной и краткосрочной ползучести и идентификация ее параметров // Проблемы прочности. — 2013. — № 4. — С. 143—157.
43. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. — М.: Физматлит, 1960. — 455 с.
44. *Клебанов Я. М., Давыдов А. Н.* Многоуровневая декомпозиция конструкций методом аппроксимирующих обобщенных моделей // Численный и аналитические методы расчета конструкций: Тр. Межд. конференции. Самара: СамГАСА. — 1998. — С. 92—96.
45. *Ковпак В. И.* К методике оценки и прогнозирования ползучести металлических материалов // Проблемы прочности. — 1981. — № 6. — С. 38—45.
46. *Ковпак В. И.* Прогнозирование полного ресурса эксплуатации металлических материалов паропроводов тепловых электростанций. — Киев: Ин-т проблем прочн. АН УССР, 1988. — 32 с.
47. *Кондратенко В. Г., Белобеев А. С., Бузинов С. В.* Моделирование процессов деформирования материалов, упрочненных непрерывными дискретными волокнами // Изв. вузов. Машиностроение. — 1988. — № 8. — С. 116—119.

48. *Кондратьев М. А.* Методы прогнозирования и модели распространения заболеваний // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 5. — С. 863—882.
49. *Кузнецов А. П., Трубий В. А.* Исследование разброса кривых ползучести // ПМТФ. — 1972. — № 5. — С. 188—192.
50. *Кузнецов В. А.* О надежности элементов стержневых конструкций в условиях неустановившейся ползучести // Механика: Сб. научн. тр. — Куйбышев: Куйбыш. политехн. ин-т. — 1975. — № 8. — С. 67—70.
51. *Кузнецов В. А., Самарин Ю. П.* О надежности статически определимых стержневых систем в условиях ползучести // Контактные и циклические задачи теплопроводности. Вопросы прочности и работоспособности инструментальных материалов: Сб. научн. тр. — Куйбышев: Куйбыш. политехн. ин-т. — 1975. — С. 79—83.
52. *Лепин Г. Ф.* Ползучесть металлов и критерии жаропрочности. — М.: Металлургия, 1976. — 344 с.
53. *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. — М.: Физматлит, 2016. — 489 с.
54. *Локощенко А. М.* Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения материалов в условиях сложного напряженного состояния (обзор) // ПМТФ. — 2012. — Т. 53, № 4. — С. 149—164.
55. *Локощенко А. М.* Результаты исследования ползучести и длительной прочности металлов в Институте механики МГУ имени М.В. Ломоносова (к юбилею Ю. Н. Работнова) // ПМТФ. — 2014. — Т. 55, № 1. — С. 144—165.

56. *Можаровская Т. Н.* О зависимости времени до разрушения при длительном нагружении в условиях плоского напряженного состояния от минимальной скорости деформаций ползучести // Проблемы прочности. — 1982. — № 12. — С. 51—54.
57. *Можаровская Т. Н., Можаровский В. Н., Штефан Н. И.* О взаимосвязи основных характеристик ползучести и долговечности конструкционных материалов // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Машинобудування. — 2011. — № 63. — С. 185—187.
58. *Можаровская Т. Н., Можаровский В. Н., Штефан Н.* О зависимости времени до разрушения и установившейся скорости деформаций ползучести конструкционных материалов // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Машинобудування. — 2010. — № 59. — С. 37—40.
59. Неустановившаяся ползучесть и релаксация напряжений сплава АК4-1 в вероятностном аспекте / М. Н. Степнов [и др.] // Проблемы прочности. — 1975. — № 4. — С. 30—33.
60. *Никитенко А. Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. — Новосибирск: НГАСУ, 1997. — 278 с.
61. *Никитенко А. Ф., Любашевская И. В.* Долговечность сосудов высокого давления // ПМТФ. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 173—182.
62. О возможности увеличения продолжительности периода безопасной эксплуатации энергоблоков между капитальными ремонтами / К. В. Фролов [и др.] // Проблемы прочности. — 1986. — № 5. — С. 3—11.
63. *Перец И. М., Шур Л. И.* Вероятностное прогнозирование длительной прочности без использования информации о виде функции распределения // Машиноведение. — 1987. — № 6. — С. 89—92.

64. *Перец И. М., Шур Л. И.* Модель разрушения материала при высокотемпературной ползучести и ее реализация на ЭВМ // Точность и надежность систем. — 1987. — № 13. — С. 125—136.
65. *Питухин А. В.* Статистическая оценка живучести деталей машин при нерегулярном напряжении // Изв. вузов. Машиностроение. — 1988. — № 6. — С. 63—66.
66. Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) / А. М. Локощенко [и др.] // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — Т. 24, № 2. — С. 275—318. — DOI: [10.14498/vsgtu1765](https://doi.org/10.14498/vsgtu1765).
67. Ползучесть ниобиевого сплава с покрытием при ступенчатом изменении напряжения и температуры / Ю. А. Еремин [и др.] // Проблемы прочности. — 1987. — № 8. — С. 50—53.
68. *Проников А. С.* Надежность машин. — М:Машиностроение, 1978. — 592 с.
69. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
70. *Радченко В. П.* Прогнозирование ползучести и длительной прочности материалов на основе энергетического подхода в стохастической постановке // Проблемы прочности. — 1992. — № 2. — С. 34—40.
71. *Радченко В. П., Афанасьева Е. А.* Оптимизация экспериментальных исследований ползучести и длительной прочности неупрочняющихся материалов по изделию-лидеру // Перспективы развития двигателестроения: материалы международной научно-технической конференции имени Н.Д. Кузнецова, 21–23 июня 2023 г. В 2 томах, том 2. — Самара: Самарский университет. — 2023. — С. 398—399.

72. Радченко В. П., Афанасьева Е. А. Прогнозирование индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций по изделию-лидеру // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2022. — Т. 26, № 3. — С. 500—519. — DOI: [10.14498/vsgtu1919](https://doi.org/10.14498/vsgtu1919).
73. Радченко В. П., Афанасьева Е. А., Саушкин М. Н. Прогнозирование высокотемпературной реологической деформации и длительной прочности вязкопластического материала по образцу-лидеру // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2023. — Т. 27, № 2. — С. 292—308. — DOI: [10.14498/vsgtu2001](https://doi.org/10.14498/vsgtu2001).
74. Радченко В. П., Афанасьева Е. А., Саушкин М. Н. Прогнозирование ползучести и длительной прочности материала по образцу-лидеру в условиях вязкого механизма разрушения // ПМТФ. — 2023. — Т. 64, № 6. — С. 199—209. — DOI: [10.15372/PMTF202315261](https://doi.org/10.15372/PMTF202315261).
75. Радченко В. П., Голудин Е. П. Феноменологическая стохастическая модель изотермической ползучести поливинилхлоридного пластика // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — № 1(16). — С. 45—52. — DOI: [10.14498/vsgtu571](https://doi.org/10.14498/vsgtu571).
76. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. — М.: Машиностроение-1, 2004. — 265 с.
77. Радченко В. П., Зотеев В. Е., Афанасьева Е. А. Численный метод структурной и параметрической идентификации математической модели неполной обратимости деформации ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2024. — Т. 28, № 1. — С. 73—95. — DOI: [10.14498/vsgtu2071](https://doi.org/10.14498/vsgtu2071).

78. Радченко В. П., Павлова Г. А. Прогнозирование индивидуальной надежности элементов конструкций при ползучести на стадии эксплуатации по лидеру // Изв. вузов. Машиностроение. — 1989. — № 11. — С. 23—27.
79. Радченко В. П., Попов Н. Н. Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы // ПМТФ. — 2012. — Т. 76, № 6. — С. 1023—1031.
80. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Голудин Е. П. Стохастическая модель неизотермической ползучести и длительной прочности материалов // ПМТФ. — 2012. — Т. 53, № 2. — С. 167—174.
81. Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С. А. Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2001. — № 12. — С. 73—84. — DOI: [10.14498/vsgtu64](https://doi.org/10.14498/vsgtu64).
82. Радченко В. П., Шершнева М. В., Цветков В. В. Обобщённая стохастическая модель ползучести и длительной прочности балки в условиях чистого изгиба и её применение к оценке показателей надёжности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2012. — № 4(29). — С. 72—86. — DOI: [10.14498/vsgtu1113](https://doi.org/10.14498/vsgtu1113).
83. Разработка системы поддержки принятия врачебных решений в травматологии и ортопедии / А. С. Бескровный [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2021. — Т. 25, № 2. — С. 118—133. — DOI: [10.15593/RZhBiomeh/2021.2.01](https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2021.2.01).
84. Расчетные и расчетно-экспериментальные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. Расчетно-экспериментальный метод определения параметров ползучести и длительной прочности при одноосном нагружении в условиях стационарного на-

- гружения // Методические рекомендации (1-я редакция), Росстандарт. — 1982. — С. 39—47.
85. *Ребров И. С.* Усиление стержневых металлических конструкций. Проектирование и расчет. — Л.: Стройиздат, 1988. — 288 с.
86. *Самарин Ю. П.* О динамическом прогнозировании деформации ползучести при постоянном напряжении // Механика: Сб. науч. тр. — Куйбышев: Куйбыш. политехн. ин-т. — 1972. — № 4. — С. 79—83.
87. *Самарин Ю. П.* О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // Изв. АН СССР. МТТ. — 1974. — № 1. — С. 88—94.
88. *Самарин Ю. П.* Об одном обобщении метода разделения деформации в теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. — 1971. — № 3. — С. 60—63.
89. *Самарин Ю. П.* Основные феноменологические уравнения ползучести реальных материалов. Автореф. дисс. ... д-ра техн. наук. — Куйбышев: Куйбыш. политехн. ин-т, 1973. — 289 с.
90. *Самарин Ю. П.* Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Проблемы прочности. — 1974. — № 9. — С. 24—27.
91. *Самарин Ю. П.* Прогнозирование индивидуального остаточного ресурса элементов конструкций при ползучести // Надежность и долговечность машин и сооружений. — 1986. — № 10. — С. 26—31.
92. *Самарин Ю. П.* Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. — Куйбышев: КГУ, 1979. — 84 с.
93. *Самарин Ю. П., Еремин Ю. А., Радченко В. П.* Индивидуальное прогнозирование ползучести конструкций с помощью концепции черного ящика // Теоретична и приложна механика. — 1985. — Т. 16, № 4. — С. 25—35.

94. Самарин Ю. П., Клебанов Я. М. Обобщенные модели в теории ползучести конструкций. — Самара: Поволж. отд. Инженерной академии РФ, Самар. гос. техн. ун-т, 1994. — 197 с.
95. Самарин Ю. П., Сорокин О. В. О стохастических уравнениях ползучести // Механика: Сб. научн. тр. — Куйбышев: Куйбыш. политехн. ин-т. — 1972. — № 4. — С. 84—92.
96. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н. Усиление нагруженных стержневых конструкций с учетом влияния ремонтных и монтажных сил // Инженерно-строительный журнал. — 2012. — № 1. — С. 98—105.
97. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Абрагим Х. А. Повышение несущей способности усиливаемых нагруженных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2011. — № 3. — С. 23—30.
98. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. Энергетический вариант теории ползучести. — Новосибирск: ИГиЛ, 1986. — 95 с.
99. Стакян М. Г., Исаханян Н. С., Борисенко А. И. Оптимизация испытаний на усталость методом Монте-Карло // Изв. вузов. Машиностроение. — 1989. — № 5. — С. 22—27.
100. Стародубцева С. А., Гусев А. С. Прогнозирование остаточного ресурса конструкций деталей и машин // Известия МГТУ «МАМИ». — 2012. — Т. 1, 2(14). — С. 355—360.
101. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Структурная и параметрическая идентификация аппроксимации кривых ползучести на первой и второй стадиях при постоянных напряжениях / Е. А. Афанасьева, В. Е. Зотеев ; Е. А. Афанасьева. — № 2024618594 ; заявл. 26.02.2024 ; опубл. 15.04.2024, 2024613972 (Рос. Федерация).

102. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Структурная и параметрическая идентификация аппроксимации кривых ползучести на стадии упрочнения при постоянных напряжениях* / Е. А. Афанасьева, В. Е. Зотеев ; Е. А. Афанасьева. — № 2024664892 ; заявл. 17.06.2024 ; опубл. 26.06.2024, 2024663999 (Рос. Федерация).
103. *Термопрочность деталей машиностроения* / И. А. Биргер [и др.]. — М.: Машиностроение, 1975. — 455 с.
104. *Томэ В. Ф.* Разработка метода определения релаксирующего усилия затяжки в нестационарно нагруженных болтовых соединениях: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела. — Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 1993. — 175 с.
105. *Травин С. О., Роцин А. В., Дука Г. Г.* Применение метода Монте-Карло в решении задач экологической химии // *Химическая безопасность*. — 2020. — № 4(20). — С. 35–54. — DOI: [10.25514/CHS.2020.2.18003](https://doi.org/10.25514/CHS.2020.2.18003).
106. *Унгарова Л. Г.* Методы математического моделирования наследственно-упругих сред на основе дробного исчисления: дис. ... канд. физ.-мат. наук. 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. — Самара: СамГТУ, 2020. — 199 с.
107. *Фролов К. В.* Методы совершенствования машин и современные проблемы машиностроения. — М.: Машиностроение, 1984. — 233 с.
108. A landslide forecasting model using ground based SAR data: The Portalet case study / G. Herrera [et al.] // *Engineering Geology*. — 2009. — Vol. 105, no. 3/4. — P. 220–230. — DOI: [10.1016/j.enggeo.2009.02.009](https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2009.02.009).
109. *Afanaseva E. A., Afanaseva O. S.* The method of calculating the individual residual life of structural elements based on a leader-item // *Procedia Structural Integrity*. — 2023. — Vol. 50. — P. 1–5. — DOI: [10.1016/j.prostr.2023.10.014](https://doi.org/10.1016/j.prostr.2023.10.014).

110. *Alam M. R.* Forecasting patients' Lifespan // Indian Journal of Palliative Care. — 2020. — Vol. 26, no. 4. — P. 551–552. — DOI: [10.4103/IJPC.IJPC\\_222\\_19](https://doi.org/10.4103/IJPC.IJPC_222_19).
111. Deep multioutput forecasting: Learning to accurately predict blood glucose trajectory / I. Fox [et al.] // Proceedings of the 24th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery & data mining. — 2018. — P. 1387–1395.
112. *Draper N. R., Smith H.* Applied Regression Analysis. — New York: John Wiley, Sons: Wiley Series in Probability, Statistics, 1998. — 736 p.
113. *Efron B.* Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife // Annals of Statistics. — 1979. — Vol. 7, no. 1. — P. 1–26. — DOI: [10.1214/aos/1176344552](https://doi.org/10.1214/aos/1176344552).
114. Forecast of flood disaster based on a grey linear regression combined model / D. Chi [et al.] // Journal of Shenyang Agricultural University. — 2011. — Vol. 42, no. 5. — P. 592–595.
115. *Hoff N. J.* The Necking and the Rupture of Rods Subjected to Constant Tensile Loads // J. Appl. Mech. — 1953. — Vol. 20, no. 1. — P. 105–108. — DOI: [10.1115/1.4010601](https://doi.org/10.1115/1.4010601).
116. *Leckie F. A.* Some Structural Theorems of Creep and Their Implications // Advances in Creep Design: Applied Science Publishers. — 1971. — P. 49–63.
117. *Loktionov V., Lyubashevskaya I., Terentyev E.* The regularities of creep deformation and failure of the VVER's pressure vessel steel 15Kh2NMFA-A in air and argon at temperature range 500–900 °C // Nuclear Materials and Energy. — 2021. — Vol. 28. — P. 101019. — DOI: [10.1016/j.nme.2021.101019](https://doi.org/10.1016/j.nme.2021.101019).

118. *Mackenzie A.* On the Use of a Single Uniaxial Test to Estimate Deformation Rates in Some Structures Undergoing Creep // Int. J. of Mechan. Sciences. — 1968. — Vol. 10, no. 5. — P. 441–453.
119. *Metropolis N., Ulam S.* The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. — 1949. — Vol. 44, no. 247. — P. 335–341.
120. *Najera A., Kouznetsov R. L., Delacollette C.* Malaria epidemics: detection and control, forecasting and prevention. — W. H. O. M. Prevention, 1998. — 81 p.
121. Prediction of creep curves of high temperature alloys using  $\Theta$ -projection concept / C. M. Omprakash [et al.] // Procedia Engineering. — 2013. — No. 55. — P. 756–759. — DOI: [10.1016/j.proeng.2013.03.327](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.03.327).
122. *Robinson E. L.* Effect of temperature variation on the long-time rupture strength of steels // Trans. ASME. — 1952. — Vol. 74, no. 5. — P. 777–780. — DOI: [10.1115/1.4015916](https://doi.org/10.1115/1.4015916).
123. *Samarin Y.* System analysis for creep in material and structure // Advanced series in mathematical science and engineering. — 1996. — C. 295.
124. *Seber G. A. F., Lee A. J.* Linear Regression Analysis / Wiley Series in Probability and Statistics. — Hoboken, NJ : Wiley, 2003. — 455 p. — DOI: [10.1002/9780471722199](https://doi.org/10.1002/9780471722199).
125. Short-term strength properties and features of high-temperature deformation of VVER reactor pressure vessel steel 15Kh2NMFA-A within the temperature range 20–1200 °C / V. Loktionov [et al.] // Nuclear Materials and Energy. — 2019. — Vol. 352. — P. 110118. — DOI: [10.1016/j.nucengdes.2019.110188](https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2019.110188).
126. *Sim R., Penny R.* Some Results of Testing Simple Structures under Constant and Variable Loading During Creep // Journ. Of the Society for Experimental Strees Analysis. — 1970. — Vol. 10, no. 4. — P. 152–159.

127. *Sim R. G.* Evolution of Reference Parameters for Structures Subject to Creep // Journal of Mechanical Science. — 1971. — Vol. 13, no. 1. — P. 47–50.
128. Very-short-time, very-high-temperature creep rupture of type 347 stainless steel and correlation of data / C. D. Lundin [et al.] // J. Basic Eng. — 1969. — Vol. 91, no. 1. — P. 32–38. — DOI: [10.1115/1.3571023](https://doi.org/10.1115/1.3571023).
129. *Broberg H.* A probabilistic interpretation of creep rupture curves // Archives of Mechanics. — 1973. — Vol. 25, no. 5. — P. 871–879.
130. *Cozzarelli F. A., Huang W. N.* Effect of random material parameters on nonlinear steady creep solutions // International Journal of Solids and Structures. — 1971. — Vol. 7, no. 11. — P. 1477–1494. — DOI: [10.1016/0020-7683\(71\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90031-X).
131. *Huang W. N., Cozzarelli F. A.* Steady creep bending in a beam with random material parameters // Journal of the Franklin Institute. — 1972. — Vol. 294, no. 5. — P. 323–337. — DOI: [10.1016/0016-0032\(72\)90044-0](https://doi.org/10.1016/0016-0032(72)90044-0).

# Приложение А

## Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024618594

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



### СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024618594

**«Структурная и параметрическая идентификация  
аппроксимации кривых ползучести на первой и второй  
стадиях при постоянных напряжениях»**

Правообладатель: *Афанасьева Елена Андреевна (RU)*

Авторы: *Афанасьева Елена Андреевна (RU), Зотеев  
Владимир Евгеньевич (RU)*

Заявка № 2024613972

Дата поступления 26 февраля 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 15 апреля 2024 г.



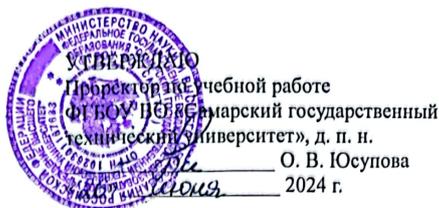
Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

*Ю.С. Зубов*



# Приложение В

## Акт о внедрении результатов работы в учебный процесс



### АКТ

об использовании результатов диссертационной работы Е. А. Афанасьевой «Стохастические модели прогнозирования индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций с неупругими свойствами материала», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в учебном процессе Самарского государственного технического университета.

Комиссия в составе начальника учебного управления университета, к.э.н., доцента Е. А. Алонцевой, заведующего кафедрой «Прикладная математика и информатика», д.ф.-м.н., профессора В. П. Радченко и председателя методического совета Института автоматизации и информационных технологий, к.п.н., доцента Я. Г. Стельмах составила настоящий акт о том, что в учебном процессе Самарского государственного технического университета использованы следующие результаты кандидатской диссертации Е. А. Афанасьевой «Стохастические модели прогнозирования индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций с неупругими свойствами материала»:

1. Алгоритмы и программное обеспечение для построения решений задач, идентификации параметров математической модели неупругого реологического деформирования и графического отображения результатов расчетов используются в лекционных курсах для студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» по дисциплине «Прикладной регрессионный анализ» и выполнении выпускных квалификационных работ.

2. Численные методы структурной и параметрической идентификации параметров математической модели неполной обратимости деформации ползучести при постоянных напряжениях используются в лекционных курсах для магистров направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» по дисциплинам «Современные методы параметрической идентификации на основе разностных уравнений», «Непрерывные и дискретные математические модели», «Нелинейное моделирование материалов и механических систем» и выполнении выпускных квалификационных работ.

3. Численные методы структурной и параметрической идентификации параметров математической модели неполной обратимости деформации ползучести при постоянных напряжениях используются в лекционных курсах для аспирантов направления 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» по дисциплине «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и выполнении выпускных квалификационных работ и подготовке диссертаций.

Начальник Учебного управления СамГТУ  
к.э.н., доцент

 Е. А. Алонцева

Зав. кафедрой «Прикладная математика и информатика»  
д.ф.-м.н., профессор

 В. П. Радченко

Председатель Методического совета Института автоматизации  
и информационных технологий  
к.п.н., доцент

 Я. Г. Стельмах

# Приложение Г

## Акт о внедрении результатов работы на предприятие

УТВЕРЖДАЮ

Генеральный конструктор

ПАО «ОДК-Кузнецов»,

кандидат технических наук

Чупин П.В.

2024 г.



АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы

Афанасьевой Елены Андреевны

«Стохастические модели прогнозирования индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций с неупругими свойствами материала»

Мы, представители публичного акционерного общества «ОДК Кузнецов» – эксперт Кочеров Е. П. и ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (СамГТУ) – заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» Радченко В. П. и директор Института автоматизации и информационных технологий СамГТУ Савельев К.В. составили настоящий акт о том, что:

- 1) численный метод параметрической и структурной идентификации математической модели ползучести материалов для обработки экспериментальных данных жаропрочных сплавов;
- 2) методы прогнозирования индивидуального деформационного поведения элементов конструкций по изделию-лидеру и с использованием стохастической модели на основе обобщенных макромоделей конструкций для оценки остаточного ресурса при эксплуатации по техническому состоянию;
- 3) метод расчета кривых стационарной ползучести при наличии второй и третьей стадии по образцу-лидеру с использованием минимальной (начальной) скорости ползучести для оптимального планирования экспериментальных исследований жаропрочных сплавов;
- 4) результаты теоретических и экспериментальных исследований остаточного деформационного ресурса и длительной прочности элементов конструкций в условиях ползучести и износа при трении из жаропрочных сплавов ЭИ437А, ВЖ98, ЭП693, ЭИ698, Д16Т, ВТ9 и сталей 12Х18Н10Т и ЭИ736

внедрены в расчетную практику в отделе прочности ОКБ ПАО «ОДК-Кузнецов».

Эксперт ПАО «ОДК-Кузнецов»,  
кандидат технических наук

Е. П. Кочеров

Зав. кафедрой «Прикладная  
математика и информатика»  
ФГБОУ ВО СамГТУ,  
д.ф.-м.н., профессор

В. П. Радченко

Директор Института автоматизации  
и информационных технологий,  
д.т.н.

К. В. Савельев