

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

На правах рукописи



ЕФИМОВ ДМИТРИЙ ЮРЬЕВИЧ

**ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН
НА НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Толоконников Лев Алексеевич

Оглавление

Введение		4
1	О дифракции звуковых волн на однородных и неоднородных упругих телах цилиндрической формы	7
1.1	Обзор литературы	7
1.2	Математические модели дифракции звука на упругих телах, находящихся в жидкости	15
2	Дифракция звуковых волн на неоднородных цилиндрических рассеивателях, расположенных в безграничном пространстве	26
2.1	Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием	26
2.2	Рассеяние неоднородными упругими цилиндрами звуковых волн, излучаемых линейным источником, расположенным непараллельно оси цилиндра	36
2.2.1	Рассеяние упругим цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, расположенным непараллельно оси цилиндра	36
2.2.2	Рассеяние неоднородным упругим цилиндрическим слоем звуковых волн, излучаемых линейным источником, расположенным непараллельно оси цилиндра	48
3	Дифракция звуковых волн на упругих цилиндрах с неоднородными упругими покрытиями в присутствии подстилающих поверхностей	55
3.1	Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи идеальной (абсолютно жесткой и акустически мягкой) плоской поверхности	55
3.2	Дифракция цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства	65
3.3	Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства	77
4	Дифракция звуковых волн на упругих цилиндрах с анизотропными неоднородными покрытиями	89
4.1	Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным упругим покрытием	89

4.1.1	Рассеяние цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием	89
4.1.2	Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука при дифракции цилиндрической звуковой волны	98
4.2	Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием	105
4.3	Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием, расположенном вблизи идеальной подстилающей поверхности	117
4.3.1	Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием в присутствии плоскости (абсолютно жесткой и акустически мягкой)	117
4.3.2	Моделирование непрерывно-неоднородного трансверсально-изотропного покрытия упругого цилиндра, находящегося вблизи плоскости, обеспечивающего наименьшее отражение звука при дифракции плоской звуковой волны	126
5	Рассеяние звуковых волн неоднородными упругими телами цилиндрической формы конечной длины	133
5.1	Дифракция звуковых волн на цилиндрических телах конечной длины, расположенных в безграничном пространстве	133
5.1.1	Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре конечной длины с неоднородным упругим покрытием	133
5.1.2	Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре конечной длины с неоднородным упругим покрытием	145
5.1.3	Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом цилиндрическом слое конечной длины	149
5.2	Рассеяние звуковых волн неоднородным упругим цилиндрическим слоем конечной длины в акустическом полупространстве	154
	Заключение	161
	Список литературы	162
	Приложение	180

Введение

Актуальность темы. Исследование дифракции звуковых волн на упругих телах имеет важное теоретическое и практическое значение. Для достижения требуемых звукоотражающих характеристик таких тел создаются специальные покрытия. В настоящее время предложены разные способы получения покрытий для уменьшения отражения звука в определенном направлении. Изменение звукоотражающих свойств упругих тел можно осуществить с помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий. С помощью таких покрытий можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях и в определенном диапазоне частот, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. При этом непрерывно-неоднородные упругие покрытия, параметры которых непрерывно меняются по толщине, можно реализовать с помощью системы однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров. Актуальности исследований дифракции звука на телах с непрерывно-неоднородными покрытиями способствует все более широкое применение современных функционально-градиентных и композитных материалов.

Определение законов неоднородности материала покрытия с целью достижения заданных звукоотражающих свойств тела приводит к необходимости решать обратные задачи. Обратные задачи относятся к малоисследованным математическим проблемам, требуют новых подходов и методов решения.

Результаты исследований дифракции звуковых волн на неоднородных упругих телах приведены в работах Бобровницкого Ю.И., Бреховских Л.М., Коваленко Г.П., Ларина Н.В., Медведского А.Л., Приходько В.Ю., Селезова И.Т., Скобельцына С.А., Толоконникова Л.А., Тютекина В.В., Hasheminejad S.M., Huang C., Nouri A., Nutt S. и др.

Многие реальные объекты достаточно хорошо аппроксимируются телами цилиндрической формы. Цилиндрические тела представляют самостоятельный интерес, а также выполняют роль эталонных при изучении дифракции звука на телах более сложной формы. В большинстве известных работ рассматривался бесконечный цилиндрический рассеиватель, находящийся в свободном пространстве. Значительно меньшее количество работ посвящено исследованию дифракции звуковых волн на цилиндрических телах конечной длины и на телах в присутствии ограничивающих поверхностей (Косарев О.И., Лебедев А.В., Лямшев А.М., Музыченко В.В., Рыбак С.А., Толоконников Л.А., Хилько А.И., Шендеров Е.Л., Williams W.E., Varadan V.K., Varadan V.V., Su J.H. и др.).

Изучение влияния непрерывно-неоднородных упругих покрытий на звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел является актуальной проблемой.

Целью работы является исследование влияния непрерывно-неоднородных покрытий упругих цилиндрических тел, находящихся в идеальной жидкости, на дифракцию гармонических звуковых волн.

Научная новизна. Получены решения новых прямых и обратных задач дифракции зву-

ковых волн (плоских, цилиндрических и сферических) на упругих цилиндрических телах бесконечной и конечной длины с непрерывно-неоднородными и анизотропными упругими покрытиями, находящимися в свободном пространстве и в присутствии ограничивающих поверхностей.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы представляют собой вклад в теорию дифракции звука на деформируемых телах. Результаты работы могут быть использованы в гидроакустике для звуковой эхолокации различных объектов; в судовой акустике при изучении акустических характеристик судовых конструкций; в дефектоскопии для разработки методов неразрушающего контроля; в медицине при разработке методов ультразвуковой диагностики; в архитектурной акустике; для проектирования промышленных материалов и конструкций с требуемыми звукоотражающими свойствами.

Методы исследования. В диссертационной работе решения поставленных задач получены в рамках линейной теории упругости и гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости. Используются аналитические и численные методы решения обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений (метод разделения переменных, метод функций Грина, метод сплайн-коллокации); метод мнимых источников; асимптотические методы; методы численного интегрирования; методы нелинейного математического программирования.

Достоверность полученных результатов вытекает из корректной постановки задач и обоснованности применяемых математических методов; обеспечивается проведением расчетов на ЭВМ с контролируемой точностью; подтверждается совпадением полученных решений с известными результатами для частных и предельных случаев, а также с решениями в специализированных пакетах.

Положения, выносимые на защиту:

- математическая модель дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных упругих телах, граничащих с идеальной жидкостью;
- методы решения прямых задач дифракции звука на неоднородных упругих телах;
- аналитические решения прямых задач дифракции гармонических звуковых волн (плоских, цилиндрических и сферических) на упругих цилиндрах (бесконечной и конечной длины) с неоднородными и анизотропными упругими покрытиями, находящимися в свободном пространстве и в присутствии плоской подстилающей поверхности;
- метод решения обратных задач дифракции звука на неоднородных упругих телах;
- решения обратных дифракционных задач об определении законов неоднородности покрытия упругих цилиндрических тел с оптимальными звукоотражающими свойствами;

- результаты численных исследований рассеянных акустических полей; анализ влияния неоднородных покрытий на акустические характеристики цилиндрических тел.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались:

- на XXXV, XXXVI сессиях Российского Акустического Общества (Россия, Москва, РАО, 2023, 2024);
- на XXIX, XXX Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, (Россия, Москва, Вятчи, МАИ, НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИ механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2023, 2024);
- на Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 2023);
- на научных семинарах кафедры «Прикладная математика и информатика» Тульского государственного университета (Россия, Тула, ТулГУ, 2022–2024).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 18 работ, в том числе: 11 статей в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, Russian Science Citation Index, получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

На разных этапах работа поддерживалась грантами Российского научного фонда (проект № 18-11-00199), Министерства просвещения РФ (соглашения № 073-03-2023-303/2 от 14.02.2023 г., № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 г.).

Личный вклад. Модели в главе 1 и решения задач, представленные в разделах 3.3, 5.2, 5.1.2 получены автором. Модели и решения задач, представленные в главах 2, 4, разделах 3.1, 3.2, 5.1.1 изложены на основе совместных работ с Толоконниковым Л.А. Личный вклад автора в эти работы – получение аналитических решений, построение алгоритмов численного решения, проведение численных исследований. В разделе 5.1.3 представлены результаты, опубликованные в совместной работе с Добровольским Н.Н и Толоконниковым Л.А. Автор участвовал в постановке задачи, получении аналитического решения, проведении численных исследований и анализе результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа содержит 181 страницу, в том числе 137 рисунков и 2 таблицы. Список литературы включает 220 наименований.

1. О дифракции звуковых волн на однородных и неоднородных упругих телах цилиндрической формы

1.1. Обзор литературы

Большинство исследований в теории дифракции звуковых волн на деформируемых твердых телах цилиндрической формы относится к однородным упругим телам: изотропным сплошным цилиндрам и цилиндрическим оболочкам, находящимся в акустической среде. Чаще всего рассматривается круговой цилиндр бесконечной длины, находящийся в безграничном пространстве.

Первые работы [186, 198] по рассеянию звука упругими цилиндрами исследовали рассеяние плоских звуковых волн на сплошном цилиндре при нормальном падении волны. Работа [198] также изучала рассеяние звука на тонкой цилиндрической оболочке, описанной по теории Кирхгофа-Лява, в случае нормального падения плоской волны.

Задача о рассеянии сплошным упругим цилиндром наклонно падающей плоской звуковой волны была рассмотрена в работе [91]. В экспериментах исследовалось рассеяние звука латунными, алюминиевыми и стальными цилиндрами в воде.

В работе [182] описываются результаты теоретических исследований рассеяния звука в воде цилиндрами из силиконовой резины при нормальном падении плоской волны.

С помощью преобразования Зоммерфельда-Ватсона [51, 165] была решена задача о высокочастотном рассеянии плоской звуковой волны, нормально падающей на сплошной упругий цилиндр [183].

Решение задачи рассеяния звука сплошным упругим цилиндром в случае наклонного падения плоской волны было получено в работе [189]. Экспериментальное исследование рассеяния упругим цилиндром наклонно падающей плоской волны при малых углах падения было проведено в работе [207] (угол падения отсчитывается от нормали к продольной оси цилиндра).

Работы [171, 179, 204, 209, 218] проводили исследования состава волн, возбужденных наклонно падающей волной в упругом цилиндре, и описывали их вклад в рассеянное поле.

Работа [180] представляет сравнение теоретических и экспериментальных исследований резонансных явлений при рассеянии плоской звуковой волны на упругом цилиндре с концентрической полостью, заполненной жидкостью. В этой работе использован подход классической резонансной теории для анализа рассеяния звука упругим цилиндром. Было обнаружено, что существуют существенные изменения в сигнале обратного рассеяния, которые могут быть представлены суперпозицией резонансов в отдельных нормальных модах (парциальных волнах) и базовых составляющих, соответствующих отражению от абсолютно жесткого тела.

Исследование резонансных явлений при рассеянии наклонно падающей волны упругим цилиндром также было проведено в работе [185]. В этой работе рассматривалось рассеяние упругого цилиндра под углом и был исследован влияние этого угла на резонансные явления.

Другие исследования, такие как работы [22, 23, 184], рассмотрели рассеяние звука упругим цилиндрической оболочкой произвольной толщины при нормальном и наклонном падении плоской волны. В этих работах были изучены различные аспекты рассеяния, включая влияние толщины оболочки и угла падения на резонансные явления.

Таким образом, эти исследования представляют собой сравнение теоретических и экспериментальных результатов исследования рассеяния упругим цилиндром наклонно падающей плоской акустической волны и резонансных явлений, которые возникают при таком рассеянии.

Работы [88, 166] посвящены рассмотрению дифракции звука на тонкой цилиндрической оболочке с использованием уравнений движения, предложенных Кеннардом [199]. В [85] проведен анализ звукового поля внутри тонкой упругой цилиндрической оболочки. Работа [214] рассматривает дифракцию звука на тонкой алюминиевой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью. Для решения задач рассеяния акустических волн упругими оболочками разработан асимптотический подход [63], который включает синтез приближенного решения на основе сращивания разложений для различных асимптотических моделей. В работе [203] рассматривается рассеяние цилиндрической звуковой волны сплошным упругим цилиндром.

В [203], как и в большинстве известных работ по дифракции цилиндрических волн на телах цилиндрической формы полагается, что линейный источник волн параллелен оси вращения цилиндра. Лишь в работе [67], считается, что источник располагается в пространстве произвольным образом. При этом рассматривается самый простой случай, когда рассеиватель является абсолютно жестким.

Работа [205] посвящена дифракции сферической звуковой волны на упругом цилиндре, где решение сводится к вычислению интегралов на комплексной плоскости от цилиндрических функций комплексного аргумента.

С помощью потенциалов Дебая получено решение трехмерной задачи рассеяния звуковой волны, излучаемой точечным источником, на пустотелой цилиндрической оболочке произвольной толщины [62, 200]. При этом все потенциалы представляются в виде интегралов, зависящих от осевой составляющей волнового вектора.

В работе [157] изучено рассеяние звука на упругом круговом цилиндре с неконцентрической полостью, имеющей форму кругового цилиндра. Рассмотрены различные случаи положения полости относительно центра цилиндра и получены аналитические выражения для рассеивающего поля. В работе [158] рассмотрен случай, когда полость имеет форму кругового цилиндра, но смещена относительно центра основного цилиндра. Были найдены аналитические решения для поля внутри и снаружи цилиндра, а также выражения для рассеяния. В работах [160, 161] исследовано рассеяние звука на упругих круговых цилиндрах с несколькими неконцентрическими полостями, имеющими форму круговых цилиндров. Были найдены аналитические решения для внутреннего и внешнего полей, а также выражения для рассеяния. Все эти работы представляют собой значимый вклад в изучение дифракции звука на упругих круговых цилиндрах с неконцентрическими полостями и содержат полезные резуль-

таты для понимания рассеяния звука на подобных объектах.

В ряде работ исследована дифракция звуковых волн на цилиндрических телах, находящихся вблизи границ раздела сред. В [217] показано, что рассеяние плоской волны абсолютно жестким цилиндром, расположенным вблизи непоглощающей плоской границы, может быть рассмотрено как рассеяние двух плоских волн двумя цилиндрами. При этом вторая волна и второй цилиндр являются зеркальным отражением исходных волны и цилиндра относительно плоской границы. Рассеяние плоской волны абсолютно жестким цилиндром в присутствии упругой плоской поверхности изучено в [172], а дифракция звука на однородном изотропном упругом цилиндре, находящемся вблизи упругого или импедансного полупространства рассмотрена в [168]. Дифракция звуковых волн на сплошном однородном изотропном упругом цилиндре в плоском слое жидкости с абсолютно мягкими границами изучена в [5].

Дифракционные задачи для конечных цилиндрических тел изучены в гораздо меньшей степени.

В [220] рассмотрена дифракция плоской гармонической звуковой волны на жестком цилиндре конечной длины. Задача решается с помощью преобразований Лапласа и сводится к решению двух комплексных интегральных уравнений. Получено приближенное решение для случая, когда длина цилиндра много больше длины волны. Полученная в работе формула для отдельной моды потенциала скорости рассеянного поля является ошибочной, так как в нее не входит длина цилиндра. В работах [89, 90] теоретически рассмотрено рассеяние плоской монохроматической звуковой волны конечной упругой цилиндрической оболочкой и конечным упругим стержнем кругового сечения, шарнирно закрепленными в безграничный цилиндрический абсолютно жесткий и неподвижный экран. В [89] задача решена при помощи метода интегро-дифференциального уравнения. В [90] исследовано рассеяние звука с учетом продольных и изгибных колебаний стержня. Установлено, что при некоторых углах падения звуковой волны на стержень наблюдается сильное рассеяние в направлении, противоположном направлению падающей звуковой волны. В [4] экспериментально определено сечение обратного рассеяния сплошного упругого цилиндра конечной длины в водной среде при широком диапазоне изменения длины и радиуса цилиндра. В качестве рассеивателей использованы воздушные и металлические цилиндры. В [216] с использованием метода Т – матриц исследовано рассеяние звука упругим цилиндром, ограниченным на концах полусферами. Решение той же задачи методом граничных интегральных уравнений получено в [117]. Работы [7, 40, 95, 96] посвящены решению задачи рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны упругой цилиндрической оболочкой, ограниченной двумя абсолютно твердыми полусферами. В [95] получено приближенное аналитическое выражение для амплитуды рассеяния в дальней зоне поля с помощью интеграла Кирхгофа. В [96] исследованы особенности рассеяния в случае низких частот. В [7] для определения амплитуды обратного рассеяния применяется импеданс излучения ограниченной цилиндрической области. В [40] рассматривается итерационный метод решения задачи. В [170] построена приближенная формула для давления поля, рассеянного конечным импедансным цилиндром, в дальней зоне. При этом

осуществлен переход от формулы, описывающей рассеяние звука на бесконечном цилиндре, к формуле для ограниченного по длине цилиндра. Рассмотрено обратное рассеяние, когда точки излучения и приема совмещены, что реально соответствует только нормальному падению волны. В [82] исследовано рассеяние акустических полей упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины. Использована приближенная модель рассеяния, основанная на применении метода последовательных отражений. Рассмотрен случай углов падения, близких к нормали к боковой поверхности цилиндра. В [6] изучено рассеяние звука упругими телами в режиме, когда прием рассеянного телом сигнала происходит под углом, отличным от угла падения волны. Проведен детальный анализ теоретических зависимостей, полученных с использованием интеграла Кирхгофа. Дано сравнение с экспериментами. С использованием формулы Кирхгофа в [68, 70] получена формула для звукового давления рассеянного конечным цилиндром поля в дальней зоне.

В работе [215] получено выражение для функции формы акустического рассеяния в дальнем поле упругого эллиптического цилиндра конечной длины. Заданная прочность эластичных эллиптических цилиндров из алюминия и полиметилметакрилата (ПММА) различной длины, изменяющихся с безразмерной частотой, изучается для различных углов падения. Кроме того, теоретически и экспериментально исследовано изменение силы воздействия эллиптического цилиндра из ПММА в зависимости от угла падения в диапазоне частот 20-40 кГц. Когда результаты теоретического моделирования сравниваются с результатами эксперимента, выясняется, что теоретические предсказания хорошо согласуются с результатами эксперимента.

Исследования дифракции звука на неоднородных упругих телах являются менее распространенными. Одна из причин этого заключается в сложности решения уравнений движения сплошной среды, где физико-механические характеристики материала тела являются функциями пространственных координат. В случае, когда материальные параметры зависят только от одной координаты, задача становится более простой, хотя все равно остается достаточно сложной. В ряде работ исследовались прямые задачи дифракции звуковых волн на неоднородных деформируемых твердых телах, в основном гармонических. Рассмотрим некоторые из них, относящиеся к изотропным цилиндрическим рассеивателям.

В [194] рассмотрено нормальное падение плоской звуковой волны на цилиндрическую оболочку, состоящую из однородных изотропных упругих коаксиальных слоев, полость которой заполнена идеальной жидкостью. Аналогичная задача для нестационарного плоского акустического импульса решена в [193]. В статье [92] было найдено решение задачи дифракции акустического поля точечного ненаправленного источника на многослойной цилиндрической оболочке, состоящей из нескольких упругих коаксиальных слоев произвольной толщины. В работе [170] была успешно решена задача дифракции плоской звуковой волны на системе однородных упругих коаксиальных цилиндрических слоев с произвольной толщиной при нормальном падении волны на эту систему.

Статья [159] предлагает использование импедансного метода для расчета виброакустиче-

ских характеристик цилиндрических тел, у которых упругие и инерционные параметры являются кусочно-непрерывными функциями радиальной координаты. В этой работе были решены задачи о рассеянии и прохождении плоской звуковой волны, которая нормально падает на слоисто-неоднородный полый цилиндр. В [26] предложено развитие импедансного метода для расчета рассеяния плоских звуковых волн на цилиндрических радиально-слоистых телах, включая сплошные и полые цилиндры. В [103] и [152] получены решения двумерных задач о рассеянии плоской и цилиндрической звуковых волн непрерывно-слоистым упругим полым цилиндром, как снаружи, так и внутри которого находятся вязкие жидкости.

Рассматривалось покрытие в виде упругого цилиндрического слоя с непрерывно изменяющимися плотностью и модулями упругости для изменения звукоотражающих свойств абсолютно жесткого цилиндра [102, 131], однородного упругого сплошного цилиндра [129, 134] и однородного упругого полого цилиндра с концентрической цилиндрической [132] и неконцентрической эллиптической [78] полостями. Такие покрытия также были рассмотрены для системы из двух одинаковых однородных упругих цилиндров, когда на них падает плоская звуковая волна [127]. В работе [151] была решена аналогичная задача для системы из двух одинаковых непрерывно-слоистых упругих цилиндрических слоев с абсолютно жесткими включениями. В упомянутых работах полагалось, что упругие неоднородные цилиндрические тела располагаются в неподвижной среде. Дифракция плоской звуковой волны на абсолютно жестком цилиндре с неоднородным упругим покрытием, расположенном в движущейся среде, изучена в [156].

В работе [99] с использованием метода конечных элементов (МКЭ) было найдено решение задачи о рассеянии звука упругим цилиндром с кусочно-непрерывным неоднородным упругим покрытием. В других работах [181, 210] исследовалось прохождение звука через цилиндрическую оболочку из функционально-градиентного материала. В работе [64] была получена приближенная система связанных обобщенных волновых уравнений, которая удобна для описания высокочастотных колебаний упругих твердых тел, зависящих от одной координаты. В этой работе была решена задача о дифракции плоской акустической волны на неоднородном упругом цилиндре произвольного поперечного сечения, и она была сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений. Также были решены задачи о дифракции плоской [150] и цилиндрической [86] звуковых волн на упругом эллиптическом цилиндре с круговой цилиндрической полостью, где плотность и модули упругости являются непрерывными функциями радиальной координаты. В работе [52] было найдено решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на однородной упругой оболочке с покрытием в виде неоднородного упругого слоя, где плотность и модули упругости зависят от его постоянной толщины.

Исследования дифракции звука на анизотропных неоднородных телах изучены в меньшей степени.

Были найдены решения задач дифракции плоской [121] и цилиндрической [130] звуковых волн на непрерывно-слоистом трансверсально-изотропном упругом цилиндрическом слое.

Также было найдено решение задачи дифракции плоской звуковой волны на непрерывно-слоистом анизотропном упругом цилиндрическом слое в случае общей цилиндрической анизотропии [124]. В работе [121, 124] рассматривалось наклонное падение плоской волны на тело, а в работе [130] предполагалось, что ось цилиндрического источника n -го порядка параллельна оси вращения цилиндрического слоя.

В работе [110] представлено численно-аналитическое решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с трансверсально-изотропным радиально-неоднородным упругим покрытием. С использованием метода конечных элементов были решены задача о рассеянии плоской звуковой волны нециркулярным неоднородным анизотропным упругим цилиндром [53] и задача о дифракции плоской звуковой волны на конечном однородном упругом цилиндре с покрытием в виде радиально-неоднородного анизотропного упругого цилиндрического слоя [115].

Было найдено решение двумерной задачи о нестационарной дифракции плоского [35] и цилиндрического [34] акустических импульсов с использованием непрерывно-слоистого трансверсально-изотропного упругого цилиндрического слоя. В [80] рассмотрено нестационарное рассеяние плоского акустического импульса упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием.

В упомянутых выше работах рассматривались тела в безграничном пространстве. Реально всегда имеем ограничивающие звукоотражающие поверхности. При этом возникают многократные переотражения между телом и границей, которые существенно изменяют картину акустического поля. В работах [101, 104, 123, 125, 126, 153, 154] рассматривались задачи дифракции звуковых волн на неоднородном упругом цилиндрическом теле в плоском волноводе с идеальными границами, заполненным идеальной жидкостью было найдено решение для рассеянного акустического поля в волноводе в виде потенциала простого слоя. Для этого была выбрана функция Грина таким образом, чтобы рассеянное поле удовлетворяло уравнению Гельмгольца, граничным условиям на стенках волновода и условиям излучения на бесконечности. Определение поля смещений в цилиндрическом теле было сведено к решению краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае, когда одна из границ волновода является акустически мягкой, а другая абсолютно жесткой, функция Грина для потенциала простого слоя была построена в работе [133].

В статье [148] было получено аналитическое решение для задачи дифракции цилиндрических звуковых волн на абсолютно жестком цилиндре с непрерывно-слоистым покрытием в плоском волноводе, заполненном идеальной жидкостью. Один из концов волновода является идеальным (абсолютно жестким или акустически мягким), а другой немного отличается от идеального. Акустическое поле в волноводе исследуется как сумма вкладов от источника и рассеивателя. Вклад от рассеивателя определяется на основе решения задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на жестком цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием в бесконечном пространстве. Путем использования интегральной формы записи цилиндрической волны, получаемой из разложения цилиндрической волны по плоским вол-

нам, и интегрального представления цилиндрических базисных решений уравнения Гельмгольца через цилиндрические базисные решения, вклады от источника и рассеивателя находятся в виде суперпозиции плоских волн с учетом многократного отражения от границ волновода.

В ряде работ [118, 119, 128] была исследована дифракция звуковых волн на неоднородном деформируемом теле, находящемся в идеальной жидкости в присутствии идеальной плоской поверхности. Во всех этих работах дифракционная задача была решена путем замены отражающей границы на зеркально отраженные рассеиватель и первичную звуковую волну. При такой замене возникает задача о дифракции звука на двух идентичных телах в безграничном пространстве, которая была аналитически решена в работе [118] с использованием теорем сложения для специальных функций, входящих в разложения звуковых полей. В работах [119, 128] для решения этой задачи был использован МКЭ.

В [120] с применением МКЭ решена задача о рассеянии плоской звуковой волны однородным упругим эллиптическим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием постоянной толщины, помещенным в идеальную жидкость, граничащую с упругим полупространством. При этом не учитывалось переотражение волн между телом и упругой поверхностью.

Собственные колебания деформируемого тела оказывают существенное воздействие на его звукоотражающие свойства. Результаты исследований этого влияния содержатся в работах [69, 72, 135, 188]. Следует отметить, что при дифракции акустических волн на цилиндрическом рассеивателе, в последнем возникают как стационарные (установившиеся) моды и распространяющиеся волновые моды, определяемые уравнениями Похгаммера – Кри. Такие эффекты изучаются в работах [199, 202]

Также рассматривались и другие связанные вопросы. Рассеяние звука цилиндрическими телами с покрытиями рассматривалось в работах [187, 195, 196]. В частности, изучалось влияние анизотропии и неоднородности материала среды на распространение упругих волн в ней (см., например, [93, 111, 116, 155]), моделирование непрерывно-слоистых твердых сред с помощью дискретно-слоистых сред (см., например, [36, 66, 81, 100, 201]), а также моделирование дискретно-слоистого покрытия радиально-неоднородным слоем [146].

В указанных выше работах не была рассмотрена температура тела. Следует отметить, что количество исследований, в которых было рассмотрено волновое взаимодействие между жидкостью и деформируемым твердым телом при наличии температурных полей, ограничено. Такие задачи, в том числе на телах цилиндрической формы, рассматривались в [79].

Большая часть приложений акустических методов основана на решении так называемых обратных задач, когда по параметрам излучаемого или отраженного звукового поля судят о параметрах объекта или среды.

В обзоре [39] обсуждаются работы, в которых были решены обратные задачи дифракции звука на деформируемых твердых телах, включая неоднородные. В работах [65, 175, 176, 177, 178] были представлены основные подходы и особенности решения обратных задач при дифракции звуковых волн. В этих работах было рассмотрено применение классических методов

теории потенциала и интегральных уравнений для решения задач дифракции акустических и электромагнитных волн на ограниченных телах, находящихся в однородном пространстве. В работе [37] представлены обзоры и оригинальные решения обратных задач рассеяния и излучения в акустике. В нем освещены известные подходы, формулировки и методы решения акустических обратных задач, а также представлены основные результаты, полученные на момент публикации. Был проведен анализ методов определения количественных характеристик рассеивающих неоднородностей на основе наблюдений рассеяния падающего на них акустического поля. Также были представлены результаты численного моделирования решений некоторых обратных задач.

В работе [173] исследованы обратные задачи рассеяния звука поверхностной неоднородностью. В работе [174] рассмотрено решение двумерной задачи рассеяния с использованием функционально-аналитических методов. В работе [11] рассматривается применение акустической томографии для изображения рефракционных неоднородностей в океане с использованием нестандартного представления. Работы [1, 2] посвящены решению трехмерной обратной задачи акустического рассеяния с использованием алгоритма Новикова-Хенкина и модифицированного алгоритма Новикова. В статье [10] предлагается метод построения оценок максимального правдоподобия в корреляционной акустической термотомографии. Работа [15] посвящена численному и физическому моделированию процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка. В [9] обсуждается функциональное моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния. Вопросы единственности и устойчивости решения обратной задачи акустического рассеяния рассматриваются в [12]. В [13, 14] рассматриваются обратные волновые задачи и их прикладные аспекты в области линейной и нелинейной акустической томографии, а также акустической термотомографии.

В работах [25, 219] исследованы методы решения обратных задач в области теории упругости и акустики. Рассмотрены задачи восстановления дефектов на основе акустического рассеяния. В этих работах предлагается метод идентификации полостей по диаграмме направленности для решения геометрической обратной задачи. Работа [192] посвящена решению задачи восстановления отражающих неоднородностей с использованием метода среднего. В статье [191] рассматривается применение матричной функции Грина для решения задачи акустической интроскопии. Работа [213] представляет результаты определения групповой скорости ультразвуковых волн в трансверсально-изотропной упругой среде. Статья [212] посвящена анализу ультразвуковых полей и дефектоскопии в монокристаллах алюминия с использованием лазерной методики. В работе [211] рассматривается применение вейвлетов для анализа ультразвуковых полей, полученных с помощью лазерного интерферометра, и их использование в дефектоскопии и локализации дефектов в монокристаллах алюминия. Статья [208] обсуждает вопросы настройки и калибровки оборудования при ультразвуковой дефектоскопии с использованием образцов с цилиндрическими сверлениями.

Интерес представляет обратная задача определения свойств рассеивателя, которые обеспечивают нужный уровень звукоотражения. Одним из эффективных способов изменения звуко-

отражающих свойств твердого тела является нанесение покрытия на его поверхность. Исследовались различные типы покрытий, которые могут быть нанесены на твердые тела. В работе [54] для достижения заданного уровня гашения поля дифракции на абсолютно твердом цилиндре использовалось перфорированное покрытие, состоящее из резонаторов Гельмгольца, распределенных по окружности цилиндра. В работе [29] предлагается общая схема создания покрытий нового типа с повышенной эффективностью – поглощающих и нерассеивающих покрытий с протяженной реакцией. Рассматривается теория таких покрытий и метод определения наилучших значений их параметров. Особое внимание уделяется плоским покрытиям с протяженной реакцией. В работах [27, 28, 30] покрытие с протяженной реакцией используется для подавления отражения и рассеяния волн на цилиндрических объектах. В работе [71] были определены условия, при которых выбор импедансов однородного покрытия и упругой цилиндрической оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. В [73] рассмотрены варианты полного гашения рассеянного и дифракционного звукового поля цилиндрической оболочки. Работа [74] посвящена задаче об активном гашении вибраций цилиндрической оболочки со свободными краевыми условиями, оболочка подкреплена кольцами, приведен пример идентификации источника и гашения изгибных колебаний оболочки. Также стоит отметить работу [31], в которой представлен обзор и анализ методов решения и современного состояния задачи поглощения звука в линейной формулировке. Для достижения нужных звукоотражающих свойств твердого тела можно использовать непрерывно-неоднородное упругое покрытие, подобрав соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия (как указано в работах [113, 114]). Математическое моделирование таких покрытий, минимизирующих рассеяние звука телами, исследовалось в работах [112, 132, 136, 145, 147, 149]. В этих работах для решения обратных дифракционных задач использовался подход, основанный только на решении прямых задач и не требующий экспериментальных измерений акустических откликов. Этот подход заключается в построении функционала на основе решения прямой задачи, который выражает интенсивность или амплитуду рассеянной звуковой волны, и его минимизации в рамках допустимого множества функций, описывающих механические параметры покрытия.

Коэффициентные обратные задачи для неоднородного упругого тела решены, например, в работах [17, 18, 19, 20, 21].

1.2. Математические модели дифракции звука на упругих телах, находящихся в жидкости

Уравнения волновых полей в идеальной жидкости. Для математического моделирования распространения звуковых волн в идеальной среде используется система уравнений гидродинамики идеальной жидкости, которая описывает динамику ее движения [76]. Эта система включает:

уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \text{grad } \tilde{p}, \quad (1.2.1)$$

где \mathbf{F} – массовая сила, отнесённая к единице массы;

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\tilde{\rho} \mathbf{v}) = 0. \quad (1.2.2)$$

Математическое описание движения жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости \mathbf{v} , давления \tilde{p} и плотности $\tilde{\rho}$. Эти функции зависят от времени t и пространственных координат.

Система уравнений (1.2.1), (1.2.2) представляет собой систему из четырех скалярных уравнений с пятью неизвестными компонентами: тремя компонентами вектора скорости \mathbf{v} , давлением \tilde{p} и плотностью $\tilde{\rho}$. Следовательно, система уравнений (1.2.1), (1.2.2) является незамкнутой. Для замыкания системы необходимо добавить уравнение физического состояния, которое связывает давление и плотность. Уравнение состояния позволяет определить одну из неизвестных величин через остальные, тем самым замыкая систему уравнений.

В теории распространения малых звуковых возмущений в идеальной жидкости предполагается, что сжимаемая жидкость движется адиабатически, то есть без теплообмена с окружающей средой. В этом случае уравнение состояния принимает вид:

$$\tilde{p} = p_0 \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (1.2.3)$$

p_0, ρ_0 – давление и плотность невозмущенной жидкости; $\gamma = c_p/c_v$; c_p, c_v – теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

Введем безразмерную величину акустического сжатия s , которая определяется следующим образом:

$$s = (\tilde{\rho} - \rho_0) / \rho_0.$$

Последнее выражение можно переписать в виде:

$$\tilde{\rho} = \rho_0 (1 + s). \quad (1.2.4)$$

Учитывая уравнение (1.2.4), перепишем уравнение (1.2.3) в следующем виде:

$$\tilde{p} = p_0 (1 + s)^\gamma. \quad (1.2.5)$$

При малых колебаниях жидкости сжатие s мало, поэтому членами более высокого порядка можно пренебречь. В результате из уравнения (1.2.5) получим:

$$p = \tilde{p} - p_0 = \rho_0 c^2 s, \quad (1.2.6)$$

где p – акустическое давление; $c = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ – скорость звука.

Подставив выражение (1.2.4) в уравнение неразрывности (1.2.2), получим:

$$\operatorname{div}(\tilde{\rho}\mathbf{v}) = \tilde{\rho} \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \tilde{\rho} = \rho_0 \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho_0 s \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \tilde{\rho}.$$

Пренебрегая последними двумя слагаемыми как величинами второго порядка малости, получим вместо уравнения (1.2.2):

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.2.7)$$

Поскольку распространение звука представляет собой малые колебания жидкости, в уравнении движения (1.2.1) можно пренебречь конвективными членами. Тогда при отсутствии внешних сил уравнение движения упрощается до следующего вида:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \operatorname{grad} \tilde{p}. \quad (1.2.8)$$

Подставляя в уравнение (1.2.8) выражение (1.2.6), в линейном приближении получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -c^2 \operatorname{grad} s. \quad (1.2.9)$$

Рассмотрим ситуацию, когда в начальный момент времени существует потенциал скорости $\tilde{\Psi}_0$. Это означает, что начальная скорость жидкости может быть выражена как градиент этого потенциала:

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \operatorname{grad} \tilde{\Psi}_0. \quad (1.2.10)$$

Используя ранее полученное уравнение (1.2.9), можно выразить скорость в любой момент времени как:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}|_{t=0} - c^2 \operatorname{grad} \left(\int_0^t s dt \right).$$

Подставляя начальное условие (1.2.10), получаем:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \left(\tilde{\Psi}_0 - \int_0^t s dt \right) = \operatorname{grad} \tilde{\Psi}. \quad (1.2.11)$$

Последнее показывает, что существует потенциал скорости $\tilde{\Psi}$ в любой момент времени t , который определяется как:

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_0 - \int_0^t s dt.$$

Дифференцируя это выражение дважды по времени, получаем:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (1.2.12)$$

Подставляя выражение (1.2.11), выражающее скорость через потенциал, в уравнение (1.2.7), приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{\Psi} = -\Delta \tilde{\Psi}. \quad (1.2.13)$$

Из уравнений (1.2.12) и (1.2.13) приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{\Psi}, \quad (1.2.14)$$

которое описывает процесс распространения звука в идеальной жидкости.

В рамках теории малых возмущений, для описания движения жидкости достаточно определить потенциал скорости $\tilde{\Psi}$. Это связано с тем, что знание потенциала позволяет однозначно определить все остальные характеристики движения, такие как скорость, давление и плотность жидкости, так как

$$\mathbf{v} = \text{grad } \tilde{\Psi}, \quad s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t}.$$

Таким образом, вместо решения сложной системы уравнений (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3), можно свести задачу к нахождению единственной скалярной функции – потенциала скорости $\tilde{\Psi}$.

В случае установившегося режима колебаний

$$\tilde{\Psi} = \Psi \exp(-i\omega t),$$

где ω – круговая частота; Ψ – функция только пространственных координат.

Тогда уравнение (1.2.14) переходит в уравнение Гельмгольца

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (1.2.15)$$

$k = \omega/c$ – волновое число жидкости. В дальнейшем будем рассматривать установившийся режим движения с временной зависимостью вида $\exp(-i\omega t)$. Далее в выражениях для всех искомых параметров волновых полей в жидкости и упругом теле (потенциалы скорости и смещения) будет присутствовать множитель $\exp(-i\omega t)$, который в дальнейшем для краткости записи опускаем. В результате будем иметь следующие выражения для скорости частиц жидкости и акустического давления

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_0\omega\Psi.$$

Для описания акустического поля в идеальной жидкости можно использовать интегральное уравнение Гельмгольца-Кирхгофа [167, 169]. Рассмотрим задачу определения поля, создаваемого точечным источником звука с амплитудой A , расположенным в точке \mathbf{R}_0 , в точке наблюдения \mathbf{R}_2 , при наличии отражающей поверхности Ω (рис. 1.2.1).

Звуковое поле в произвольной точке \mathbf{R}_2 описывается уравнением Гельмгольца:

$$\Delta \Psi(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_0) + k^2 \Psi(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_0) = -\delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) A. \quad (1.2.16)$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Для решения этой задачи вводится вспомогательный точечный источник в точке \mathbf{R}_2 , и его поле описывается функцией Грина $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) + k^2 G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_2). \quad (1.2.17)$$

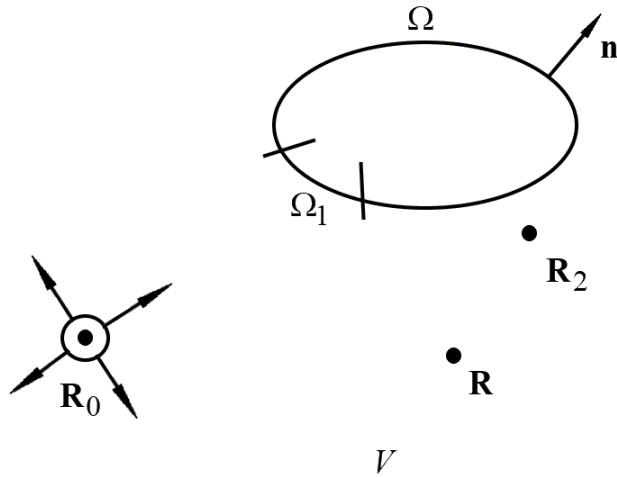


Рис. 1.2.1. К выводу интегрального уравнения Гельмгольца-Кирхгофа

Умножим уравнение (1.2.16) на $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$, уравнение (1.2.17) - на $\Psi(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_0)$, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем по всему объему V , за исключением области, ограниченной поверхностью Ω . Получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \iiint_V [\Delta \Psi(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_0) G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) - \Psi(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_0) \Delta G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)] dV_{r_2} = \\ & = -A \iiint_V \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) dV_{r_2} + \iiint_V \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_2) \Psi(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_0) dV_{r_2} = \\ & = -AG(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0). \end{aligned}$$

Здесь и ниже индекс r_2 в элементе объема dV_{r_2} и в элементе площади $d\Omega_{r_2}$ означает, что интегрирование производится по координатам точки \mathbf{R}_2 . Интеграл по объему преобразуется к интегралу по площади, ограничивающей этот объем, по формуле Грина. Можно полагать, что объем V ограничен поверхностью Ω и сферой весьма большого радиуса. В силу условия излучения [167] интеграл по этой сфере исчезает при увеличении ее радиуса. В результате получим

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = AG(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega_{r_2}. \quad (1.2.18)$$

Полученное выражение называют интегральным уравнением Гельмгольца-Кирхгофа. Здесь мы в подынтегральном выражении опустили один из аргументов функции $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$. Это уравнение будет справедливо для двумерного случая, если заменить интеграл по поверхности интегралом по кривой и использовать функцию Грина для двумерной задачи.

До настоящего момента мы не накладывали конкретных граничных условий на функцию Грина на поверхности. Теперь рассмотрим поверхность Ω , состоящую из двух областей: Ω_1

и $\Omega - \Omega_1$, обладающих различными характеристиками. На участке $\Omega - \Omega_1$ звуковое давление и нормальная компонента колебательной скорости связаны через импеданс Z_p этого участка следующим соотношением: $p = v_n Z_p = Z_p / (i\omega\rho_0) \partial p / \partial n$.

Предположим, что нам известна функция Грина, удовлетворяющая граничному условию на поверхности с импедансом, соответствующим импедансу на участке $\Omega - \Omega_1$, то есть условию $G = Z_p / (i\omega\rho_0) \partial G / \partial n$.

Разобьем интеграл по поверхности Ω на два интеграла по областям Ω_1 и $\Omega - \Omega_1$. Во втором интеграле, соответствующем области $\Omega - \Omega_1$, мы учтем граничные условия как для звукового давления, так и для функции Грина. В результате интеграл по области $\Omega - \Omega_1$ обратится в ноль, и интегрирование в формуле (1.2.18) можно будет проводить только по области Ω_1 .

Уравнения волновых полей в упругих средах. Для моделирования распространения малых возмущений в упругих телах используется модель линейной неоднородной анизотропной упругой среды [77, 84, 97, 109, 162]. Эта модель характеризуется следующими параметрами: равновесная плотность $\rho = \rho(\mathbf{R})$, являющаяся функцией координат; тензор модулей упругости Λ , описывающий упругие свойства среды. Неоднородность среды проявляется в том, что её механические параметры являются непрерывными функциями пространственных координат.

Тензор Λ является тензором четвертого ранга, но из-за физической симметрии его компонент, а также при рассмотрении изотермических или адиабатических деформаций [84], количество независимых компонент сокращается до 21. Эти компоненты обозначаются как $\lambda_{ijkl} = \lambda_{jikl} = \lambda_{ijlk} = \lambda_{klij}$ – модули упругости анизотропного упругого материала, где каждый из индексов $[i, j, k, l]$ принимает значения 1, 2 или 3, соответствующие координатным осям.

Вследствие симметрии компонент тензора ($\lambda_{ijkl} = \lambda_{jikl} = \lambda_{ijlk} = \lambda_{klij}$), его можно представить в виде симметричной матрицы 6×6 с компонентами λ_{pq} , где ($p, q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), $p = p(i, j)$, $q = q(k, l)$. Связь между индексами $[i, j, k, l]$ и $[p, q]$ устанавливается с помощью нотации Фойгта [97], где индексы p и q конструируются по определенному правилу

$$p(i, j) = \begin{cases} i, & j = i, \\ 9 - i - j, & j \neq i. \end{cases}$$

Для описания упругих свойств реальных материалов часто используются модели, предполагающие определенную симметрию, что приводит к уменьшению числа независимых компонент тензора упругости Λ . В настоящей работе рассматриваются модели как изотропных, так и трансверсально-изотропных материалов. Для трансверсально-изотропных сред анализируются случаи с криволинейной формой поверхностей изотропии, а именно, концентрическими цилиндрическими поверхностями кругового сечения [84, 93]. В общем случае, для описания упругих свойств трансверсально-изотропного материала требуется задание пяти независимых параметров, составляющих тензор упругости Λ [97, 162].

В этом случае осью упругой симметрии является всякая прямая, проходящая через ось анизотропии (которая совпадает с осью вращения цилиндра) и перпендикулярная к ней, и в

качестве независимых выступают модули λ_{11} , λ_{12} , λ_{22} , λ_{23} , λ_{55} . Тензор модулей упругости Λ в соответствии с нотацией Фойгта [162] может быть записан в матричной форме

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_{22} - \lambda_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} \end{pmatrix}. \quad (1.2.19)$$

Здесь $\lambda_{pq} = \lambda_{pq}(\mathbf{R})$ — модули упругости трансверсально-изотропного упругого тела в двухиндексном обозначении, где $p, q = 1, 2, \dots, 6$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

В случае изотропного материала, когда упругие свойства материала в каждой точке не зависят от направления прикладываемых сил, все компоненты тензора модулей упругости можно выразить через два параметра λ , μ :

$$\lambda_{11} = \lambda + 2\mu, \quad \lambda_{12} = \lambda, \quad \lambda_{22} = \lambda + 2\mu, \quad \lambda_{23} = \lambda, \quad \lambda_{55} = \mu. \quad (1.2.20)$$

$\lambda = \lambda(\mathbf{R})$, $\mu = \mu(\mathbf{R})$ называют модулями упругости Ламе [3].

В рамках теории упругости, смещение любой материальной точки упругой среды относительно её равновесного положения описывается вектором смещения \mathbf{u} . Зная этот вектор, можно определить компоненты тензора малых деформаций ε , обозначаемые как ε_{ij} . Этот тензор используется в линейных моделях для описания деформации среды и вычисляется по следующей формуле [97]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i).$$

В цилиндрической системе координат r, φ, z компоненты тензора малых деформаций выражаются через компоненты вектора смещений \mathbf{u} следующим образом [98]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right], & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right], \\ \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

В упругой среде, подвергающейся деформации, возникают поверхностные силы, которые описываются тензором напряжений σ , компоненты которого обозначаются как σ_{ij} . В рамках линейной теории упругости, тензор напряжений линейно связан с тензором деформации ε согласно следующему выражению [108]:

$$\sigma = \Lambda \cdot \varepsilon, \text{ или в компонентной форме: } \sigma_{ij} = \lambda_{ikl} \varepsilon^{kl}. \quad (1.2.22)$$

Это соотношение, известное как обобщенный закон Гука, устанавливает связь между напряжениями и деформациями в линейно-упругом теле.

Следует отметить, что первое выражение в (1.2.22) содержит произведение тензора четвертого ранга Λ на тензор второго ранга ε , что может быть громоздким. Однако, используя симметрию исходных тензоров и вводя нотацию Фойгта, можно упростить это выражение. Введем вектор напряжений $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T$ и вектор деформаций $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^T$ (сохраняя обозначения). Тогда произведение $\Lambda \cdot \varepsilon$ можно интерпретировать как матричное умножение, где σ и ε – векторы, а Λ – матрица. Это представление значительно упрощает вычисления и анализ соотношения между напряжениями и деформациями.

Соотношения (1.2.22) приводят к относительно простой связи компонентов тензора напряжений и характеристик деформации в случае изотропного материала

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.2.23)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Учитывая (1.2.21), (1.2.23), соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения \mathbf{u} в однородной изотропной среде в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

где $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Уравнения движения упругой неоднородной среды в случае установившихся колебаний в криволинейной системе координат описываются общими уравнениями движения сплошной среды [97]

$$\nabla^j \sigma_{ij} = -\rho \omega^2 u_i,$$

которые в цилиндрической системе координат принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho u_z. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Анизотропия и неоднородность упругого тела не позволяют в общем случае свести уравнения движения (1.2.25) к уравнениям типа волновых. Однако решение задач о распространении упругих колебаний в неоднородной упругой среде заметно упрощается при наложении определенных ограничений на характер неоднородности. В данной работе рассматриваются радиально-неоднородные материалы, когда неоднородность механических характеристик

проявляется только по цилиндрической радиальной координате r . Причем механические характеристики являются непрерывными функциями этой координаты.

Для однородной изотропной упругой среды уравнения (1.2.25) могут быть преобразованы к форме, явно выражающей вектор смещения \mathbf{u} :

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = -\omega^2 \rho \mathbf{u}. \quad (1.2.26)$$

Это уравнение, известное как уравнение Ламе [3, 108].

В отличие от жидкой среды, в общем случае для однородного изотропного упругого тела векторное поле смещений \mathbf{u} не может быть выражено только через одну скалярную потенциальную функцию. Для полного описания требуется введение дополнительной векторной функции. Представим вектор смещения \mathbf{u} в виде

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} F + \operatorname{rot} \Phi, \quad (1.2.27)$$

где F и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения.

В результате уравнение Ламе приводится к скалярному и векторному уравнениям Гельмгольца, которые описывают распространение продольных и поперечных волн [3, 108]

$$\Delta F + k_l^2 F = 0, \quad (1.2.28)$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (1.2.29)$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости продольных и поперечных волн. Чтобы баланс в числе уравнений и неизвестных сохранялся с учетом особенностей поля Φ можно явно использовать дополнительное условие $\operatorname{div} \Phi = 0$. В случае плоской или осесимметричной задачи этого условия не требуется.

Для однородного изотропного упругого цилиндрического тела в двумерном случае, когда волновые поля не зависят от координаты z , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z = 0$, где \mathbf{e}_z – единичный вектор оси z . Тогда векторный потенциал $\Phi = \Phi(r, \varphi) \cdot \mathbf{e}_z$ и векторное уравнение в (1.2.29) сводится к одному скалярному относительно $\Phi(r, \varphi)$.

В трехмерном случае вектор Φ представляется в виде [94]

$$\Phi = \operatorname{rot}(W \cdot \mathbf{e}_z) + k_\tau M \cdot \mathbf{e}_z,$$

где W и M – функции пространственных координат. Тогда векторное уравнение в (1.2.29) приводится к двум скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций W и M

$$\Delta W + k_\tau^2 W = 0, \quad \Delta M + k_\tau^2 M = 0.$$

Граничные и дополнительные условия в задачах дифракции. При формулировке задач дифракции гармонической звуковой волны, падающей из идеальной жидкости на поверхность упругого тела, помимо уравнений, описывающих волновые процессы в жидкости и упругом

теле, требуется определить граничные условия. Важно отметить, что вследствие малости амплитуд колебаний деформация границ рассеивателя является незначительной. По этой причине граничные условия, которые должны быть заданы на деформированной поверхности, могут быть перенесены на границу тела, соответствующую его невозмущенному состоянию.

На контактирующей с жидкостью поверхности упругого тела граничные условия [58] включают равенство нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенство нормального напряжения и акустического давления, условие отсутствия касательных напряжений:

$$-i\omega u_n = v_n, \quad \sigma_{nn} = -p, \quad \sigma_{n\tau} = 0. \quad (1.2.30)$$

Здесь u_n, v_n – нормальные компоненты векторов смещения частиц упругого тела и скорости частиц жидкости; $\sigma_{nn}, \sigma_{n\tau}$ – нормальное и касательные напряжения.

При переходе через границу раздела упругого цилиндра и неоднородного упругого покрытия должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и касательные напряжения:

$$u_j = u_{0j}, \quad \sigma_{nn} = \sigma_{0nn}, \quad \sigma_{n\tau} = \sigma_{0n\tau}. \quad (1.2.31)$$

В последних равенствах отсутствие и наличие нижнего индекса 0 указывает на то, что у соответствующих величин указывают на то, что эти величины относятся к различающимся по физико-механическим характеристикам упругим средам.

В случае перехода через границу раздела упругой среды с вакуумом, должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и касательных составляющих тензора напряжений

$$\sigma_{nn} = 0, \quad \sigma_{n\tau} = 0. \quad (1.2.32)$$

Для получения однозначного решения дифракционных задач, помимо основных уравнений, необходимо ввести дополнительные условия. Эти условия обеспечивают физическую корректность решения и его единственность. В частности, для внешних волновых полей требуется выполнение условий излучения на бесконечности, а для внутренних волновых полей – условий ограниченности.

Условия излучения на бесконечности, используемые при решении дифференциальных уравнений, гарантируют, что волны распространяются от объекта, а не к нему [51, 167]. В неограниченном трехмерном пространстве эти условия имеют конкретную математическую форму, которая обеспечивает физически корректное поведение волновых полей на больших расстояниях от рассеивателя

$$\Psi_S = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial \Psi_S}{\partial r} - ik\Psi_S = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

а в двумерном случае имеют вид

$$\Psi_S = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial \Psi_S}{\partial r} - ik\Psi_S = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

где под Ψ_S следует понимать как потенциал скоростей рассеянной телом звуковой волны. Эти условия, в частности, предотвращают возникновение неестественных решений, в которых волны приходят из бесконечности.

При определении внутреннего волнового поля используются условия ограниченности. Эти условия накладывают требование на то, чтобы решения соответствующих дифференциальных уравнений оставались конечными внутри рассматриваемой области. Иными словами, физически обоснованные решения не должны уходить в бесконечность в пределах исследуемой среды.

Таким образом, построенная математическая модель дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных упругих телах включает уравнения, описывающие волновые поля в идеальной жидкости и упругом теле, граничные и дополнительные условия.

2. Дифракция звуковых волн на неоднородных цилиндрических рассеивателях, расположенных в безграничном пространстве

В настоящей главе приведены решения прямых задач дифракции гармонических цилиндрических звуковых волн на радиально-неоднородных упругих цилиндрических рассеивателях (упругом цилиндре с неоднородным упругим покрытием, неоднородном упругом цилиндрическом слое), расположенных в безграничном жидком пространстве. На основе этих решений показана возможность изменения звукоотражающих свойств тел за счет свойств неоднородности упругого тела.

Результаты исследований, приведенные в данной главе, отражены в работах [49, 139, 144].

2.1. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный изотропный упругий цилиндр радиуса r_2 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного упругого изотропного слоя, внешний радиус которого равен r_1 . Цилиндрическая система координат r, φ, z выбрана таким образом, что координатная ось z совпадает с осью вращения цилиндра (рис. 2.1.1). Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Цилиндр окружен идеальной сжимаемой жидкостью, плотность и скорость звука которой соответственно равны ρ_1 и c .

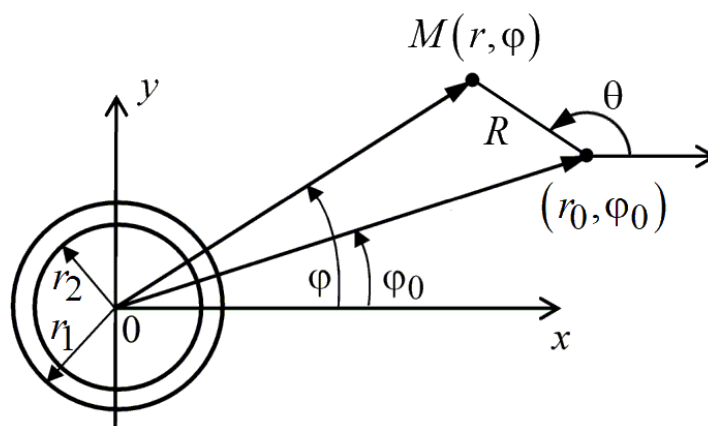


Рис. 2.1.1. Геометрия задачи 2.1

Пусть из внешнего пространства на цилиндр с покрытием падает монохроматическая цилиндрическая волна. Падающая волна излучается бесконечно длинным цилиндрическим источником, на поверхности которого возбуждена одна из мод и ось которого параллельна оси

цилиндра. В цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной с рассеивателем, ось источника имеет координаты (r_0, φ_0) .

Выберем дополнительную цилиндрическую систему координат R, θ, z , связанную с источником так, чтобы полярные оси основной и дополнительной систем координат были одинаково ориентированы. Тогда потенциал скоростей гармонической звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником порядка m , может быть представлен в виде

$$\Psi_0 = AH_m(kR) \exp[i(m\theta - \omega t)],$$

где A – амплитуда волны; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; ω – круговая частота; $H_m(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; R – расстояние между источником и точкой наблюдения:

$$R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}.$$

Простейшая монохроматическая симметричная цилиндрическая волна, излучаемая бесконечно длинным цилиндрическим источником, параллельным оси z , описывается с помощью цилиндрической функции Ганкеля первого рода нулевого порядка. Потенциал скоростей такой волны представляется в виде

$$\Psi_0 = AH_0(kR) \exp(-i\omega t).$$

В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим отраженную от тела волну, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

Уравнения волновых полей. В рассматриваемой постановке задача является двумерной: все искомые величины не зависят от координаты z .

В силу линейной постановки задачи потенциал скоростей полного акустического поля

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_S,$$

где Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны.

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций, представим потенциал скоростей падающей волны в основной системе координат в виде [55]

$$\begin{aligned} \Psi_0 = A(-1)^m \exp(im\varphi_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \begin{cases} H_{m-n}(kr_0) J_n(kr), & r < r_0; \\ J_{m-n}(kr_0) H_n(kr), & r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n .

Учитывая, что [83]

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad H_{-n}(x) = (-1)^n H_n(x),$$

из (2.1.1) для симметричной цилиндрической волны получаем разложение

$$\Psi_0 = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} H_n(kr_0) J_n(kr), & r < r_0; \\ J_n(kr_0) H_n(kr), & r > r_0. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

С учетом условий излучения на бесконечности рассеянное акустическое поле Ψ_S будем искать в виде

$$\Psi_S(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (2.1.3)$$

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом цилиндре и неоднородном цилиндрическом слое.

Представим вектор смещения \mathbf{u}_0 частиц упругого изотропного однородного цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } F + \text{rot } \Phi,$$

где F и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного (1.2.28) и векторного (1.2.29) уравнений Гельмгольца.

Так как упругое тело находится в условиях плоской деформации, то $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_z = 0$, где \mathbf{e}_z – единичный вектор оси z . Тогда векторный потенциал $\Phi = \Phi(r, \varphi) \mathbf{e}_z$, где $\Phi(r, \varphi)$ – скалярная функция. В этом случае векторное уравнение (1.2.29) сводится к одному скалярному уравнению относительно функции $\Phi = \Phi(r, \varphi)$, которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\Delta \Phi + k_r^2 \Phi = 0.$$

Учитывая условия ограниченности, функции F и Φ будем искать в виде

$$\begin{aligned} F(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_l r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \\ \Phi(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(k_r r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Компоненты вектора смещения \mathbf{u}_0 , записанные через функции F и Φ , в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$u_{0r} = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad u_{0\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{0ij} и вектора смещения \mathbf{u}_0 в однородном изотропном цилиндре имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{0rr} &= \lambda_0 \left[\frac{\partial u_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) \right] + 2\mu_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}, \\ \sigma_{0\varphi\varphi} &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{r} \left(\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi} + u_{0r} \right) + \lambda_0 \frac{\partial u_{0r}}{\partial r}, \quad \sigma_{0r\varphi} = \mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{0\varphi}}{r} \right). \end{aligned}$$

Используя соотношения выше, выразим компоненты тензора напряжений σ_{0rr} , $\sigma_{0r\varphi}$ через функции L , Φ :

$$\begin{aligned}\sigma_{0rr} &= -\lambda_0 k_l^2 F + 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{0r\varphi} &= \frac{2\mu_0}{r} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right).\end{aligned}$$

Волновые поля в неоднородном слое описываются уравнениями линейной теории упругости изотропного тела (1.2.21), (1.2.23)-(1.2.25).

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое являются периодически-ми функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции u_r , u_φ будем искать в виде следующих рядов Фурье:

$$\begin{aligned}u_r(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \\ u_\varphi(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)].\end{aligned}\quad (2.1.5)$$

Подставляя разложения (2.1.5) в уравнения (1.2.25), записанные через функции u_r , u_φ , получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$ для каждого n :

$$\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \widehat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (2.1.6)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r), U_{2n}(r))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_n = (a_{npq})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{B}}_n = (b_{npq})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{C}}_n = (c_{npq})_{2 \times 2}$ – матрицы второго порядка с элементами:

$$\begin{aligned}a_{n11} &= r^2(\lambda + 2\mu), \quad a_{n22} = r^2\mu, \quad a_{n12} = a_{n21} = 0, \\ b_{n11} &= (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r, \quad b_{n12} = in(\lambda + \mu)r, \quad b_{n21} = in(\lambda + \mu)r, \\ b_{n22} &= \mu'r^2 + \mu r, \quad c_{n11} = \lambda'r - \lambda - (n^2 + 2)\mu + \omega\rho r^2, \\ c_{n12} &= in(\lambda'r - \lambda - 3\mu), \quad c_{n21} = in(\mu'r + \lambda + 3\mu), \\ c_{n22} &= -\mu'r - n^2\lambda - (2n^2 + 1)\mu + \omega^2\rho r^2.\end{aligned}$$

Коэффициенты A_n , B_n , C_n разложений (2.1.3), (2.1.4) и функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$ из разложений (2.1.5) подлежат определению из граничных условий (1.2.30)

$$\text{при } r = r_1: \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0$$

и (1.2.31)

$$\text{при } r = r_2: \quad u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}.$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ находим коэффициенты A_n , выраженные через $U_{1n}(r)$:

$$A_n = -\frac{A\Omega_{mn}k J_n'(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{k H_n'(kr_1)},$$

где $\Omega_{mn} = (-1)^{n+m} H_{m-n}(kr_0) \exp(im\varphi_0)$; штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = r_2$ находятся неизвестные коэффициенты B_n, C_n , выраженные через $U_{1n}(r_2), U_{2n}(r_2)$:

$$\begin{aligned} B_n &= \gamma_{1n} U_{1n}(r_2) + \gamma_{2n} U_{2n}(r_2), & C_n &= \gamma_{3n} U_{1n}(r_2) + \gamma_{4n} U_{2n}(r_2), \\ \gamma_{1n} &= k_\tau r_2 J'_n(k_\tau r_2) / \Delta_n, & \gamma_{2n} &= in J_n(k_\tau r_2) / \Delta_n, & \gamma_{3n} &= in J_n(k_l r_2) / \Delta_n, \\ & & \gamma_{4n} &= -k_l r_2 J'_n(k_l r_2) / \Delta_n, \\ \Delta_n &= [k_l r_2^2 J'_n(k_l r_2) k_\tau J'_n(k_\tau r_2) - n^2 J_n(k_l r_2) J_n(k_\tau r_2)] / r_2. \end{aligned}$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получаем четыре краевых условия, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (2.1.6):

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \widehat{\mathbf{D}}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_1} &= \mathbf{G}_n, \\ \left(\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \widehat{\mathbf{F}}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

где $\mathbf{G}_n = (g_{n1}, 0)^T$; $\widehat{\mathbf{D}}_n = (d_{npq})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{F}}_n = (f_{npq})_{2 \times 2}$ – матрицы второго порядка:

$$\begin{aligned} g_{n1} &= 2A\rho_1\omega r_1 (-1)^{n+m} H_{m-n}(kr_0) \exp(im\varphi_0) / (\pi k H'_n(kr_1)), \\ d_{n11} &= r\lambda + \rho_1\omega^2 r^2 H_n(kr) / (k H'_n(kr)), \\ d_{n12} &= inr\lambda, & d_{n21} &= inr\mu, & d_{n22} &= -r\mu, \\ f_{n11} &= r^2 [\gamma_{1n} e_{1n} + \gamma_{3n} e_{2n} + \lambda/r], & f_{n12} &= r^2 [\gamma_{2n} e_{1n} + \gamma_{4n} e_{2n} + in\lambda/r], \\ f_{n12} &= r^2 [\gamma_{2n} e_{1n} + \gamma_{4n} e_{2n} + in\lambda/r], \\ f_{n21} &= \mu_0 r^2 [\gamma_{1n} e_{3n} + \gamma_{3n} e_{4n} + in\mu / (\mu_0 r)], \\ f_{n22} &= \mu_0 r^2 [\gamma_{2n} e_{3n} + \gamma_{4n} e_{4n} - \mu / (\mu_0 r)], \\ e_{1n} &= [\lambda_0 n^2 J_n(k_l r) - k_l^2 r^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) J''_n(k_l r) - \lambda_0 k_l r J'_n(k_l r)] / r^2, \\ e_{2n} &= 2\mu_0 in [J_n(k_\tau r) - k_\tau r J'_n(k_\tau r)] / r^2, \\ e_{3n} &= 2in [J_n(k_l r) - k_\eta r J'_n(k_l r)] / r^2, \\ e_{4n} &= [k_\tau^2 r^2 J''_n(k_\tau r) - k_\tau r J'_n(k_\tau r) + n^2 J_n(k_\tau r)] / r^2. \end{aligned}$$

Краевая задача (2.1.6), (2.1.7) решена методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических B -сплайнов [139].

Решение краевой задачи методом сплайн-коллокации. Найдем решение краевой задачи (2.1.6), (2.1.7) методом сплайн-коллокации. Введём на отрезке $[r_2, r_1]$ равномерную сетку Δ : $r_2 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = r_1$ с шагом h . Будем искать приближенное решение краевой задачи в виде кубических сплайнов $S_{1n}(r), S_{2n}(r)$ дефекта 1 с узлами на сетке Δ . Здесь $S_{1n}(r), S_{2n}(r)$ – сплайн-функции, приближающие функции $U_{1n}(r), U_{2n}(r)$ соответственно.

Представим кубические сплайны в виде разложения по базису из нормализованных кубических B -сплайнов:

$$S_{\gamma n}(r) = \sum_{l=-1}^{M+1} b_{\gamma n}^{(l)} B_l(r), \quad (\gamma = 1, 2), \quad (2.1.8)$$

где $b_{\gamma n}^{(l)}$ – коэффициенты разложения, которые подлежат дальнейшему определению;

$$B_l(r) = \frac{1}{6} \left[2 + \frac{r - x_l}{h} \right]^3 B_l^0(r) + \left[\frac{2}{3} - \frac{(r - x_l)^2}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{(r - x_l)^3}{h^3} \right] B_{l+1}^0(r) + \\ + \left[\frac{2}{3} - \frac{(r - x_l)^2}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{(r - x_l)^3}{h^3} \right] B_{l+2}^0(r) + \frac{1}{6} \left[2 - \frac{r - x_l}{h} \right]^3 B_{l+3}^0(r)$$

– базисная сплайн-функция, отличная от нуля на интервале-носителе (x_{l-2}, x_{l+2}) со средним узлом x_l , где

$$B_l^0(r) = \begin{cases} 1, & r \in [x_{l-2}, x_{l-1}), \\ 0, & r \notin [x_{l-2}, x_{l-1}). \end{cases}$$

Для того, чтобы все базисные функции в (2.1.8) были определены, сетка должна быть дополнена узлами

$$x_{\zeta-3} = x_0 + (\zeta - 3)h, \quad x_{L+3-\zeta} = x_L + (3 - \zeta)h, \quad \zeta = 0, 1, 2.$$

Потребуем, чтобы сплайны $S_{\gamma n}(r)$ удовлетворяли системе (2.1.6) и краевым условиям (2.1.7) в узлах коллокации, совпадающих с узлами введенной сетки. Используя выражения для узловых значений B -сплайна и его производных, получим систему $2M + 6$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных коэффициентов $b_{\gamma n}^{(l)}$ ($\gamma = 1, 2; \quad l = -1, 0, 1, \dots, M + 1$):

$$\mathbf{V}_n^{(0)} \mathbf{b}_n^{(0)} = 0, \quad \mathbf{W}_n^{(l)} \mathbf{b}_n^{(l)} = 0, \quad (l = 0, 1, \dots, M), \quad \mathbf{T}_n^{(M)} \mathbf{b}_n^{(M)} = 6h\mathbf{G}_n, \quad (2.1.9)$$

где $\mathbf{b}_n^{(l)} = \left(b_{1n}^{(l-1)}, b_{2n}^{(l-1)}, b_{1n}^{(l)}, b_{2n}^{(l)}, b_{1n}^{(l+1)}, b_{2n}^{(l+1)} \right)^T$; $\mathbf{V}_n^{(l)} = (v_{\alpha\beta})_{2 \times 6}$, $\mathbf{W}_n^{(l)} = (w_{\alpha\beta})_{2 \times 6}$, $\mathbf{T}_n^{(l)} = (t_{\alpha\beta})_{2 \times 6}$ – матрицы с элементами:

$$v_{\alpha\tau} = -3a_{\alpha\tau} + hf_{\alpha\tau}, \quad v_{\alpha,\tau+2} = 4hf_{\alpha\tau}, \quad v_{\alpha,\tau+4} = 3a_{\alpha\tau} + hf_{\alpha\tau},$$

$$w_{\alpha\tau} = 6a_{\alpha\tau} - 3hb_{\alpha\tau} + h^2c_{\alpha\tau}, \quad w_{\alpha,\tau+2} = -12a_{\alpha\tau} + 4h^2c_{\alpha\tau}, \quad w_{\alpha,\tau+4} = 6a_{\alpha\tau} + 3hb_{\alpha\tau} + h^2c_{\alpha\tau},$$

$$t_{\alpha\tau} = -3a_{\alpha\tau} + hd_{\alpha\tau}, \quad t_{\alpha,\tau+2} = 4hd_{\alpha\tau}, \quad t_{\alpha,\tau+4} = 3a_{\alpha\tau} + hd_{\alpha\tau}, \quad (\tau = 1, 2).$$

Нижний индекс n , которым должны быть снабжены элементы $v_{\alpha\beta}$, $w_{\alpha\beta}$, $t_{\alpha\beta}$ матриц $\mathbf{V}_n^{(l)}$, $\mathbf{W}_n^{(l)}$, $\mathbf{T}_n^{(l)}$, для простоты записи опущен. Верхний индекс l в записи матриц $\mathbf{V}_n^{(l)}$, $\mathbf{W}_n^{(l)}$, $\mathbf{T}_n^{(l)}$ означает, что элементы, зависящие от r , вычисляются при $r = x_l$.

Решая систему (2.1.9), находим приближенное решение краевой задачи (2.1.6), (2.1.7) в виде (2.1.8). Затем вычисляем коэффициенты A_n , B_n , C_n разложений (2.1.3), (2.1.4). В результате

получаем аналитические выражения, описывающие волновые поля вне и внутри цилиндрического тела

Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты частотной зависимости безразмерной амплитуды рассеянного акустического поля $|\Psi_S/A|$ в фиксированной точке наблюдения $(r, \varphi) = (100, \pi)$ от волнового размера тела kr_2 .

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_2 = 1$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.1 м располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль), так и неоднородные.

Неоднородность первого вида проявляется в изменении плотности материала слоя:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

Неоднородность второго вида характеризуется изменением плотности и модулей упругости материала слоя:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0 \cdot f(r), \quad \mu = \mu^0 \cdot f(r), \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

Здесь и далее в качестве функций неоднородности будут рассматриваться два вида линейной зависимости $f(r)$ на отрезке $[r_2, r_1]$:

$$f_1(r) = \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} + 0.5, \quad f_2(r) = \frac{r_1 - r}{r_1 - r_2} + 0.5, \quad (2.1.10)$$

и два вида нелинейной зависимости $f(r)$ на отрезке $[r_2, r_1]$:

$$f_3(r) = 0.75 \left[\left(\frac{r - r_2}{r_1 - r_2} \right)^2 + 1 \right], \quad f_4(r) = 0.75 \left[\left(\frac{r_1 - r}{r_1 - r_2} \right)^2 + 1 \right]. \quad (2.1.11)$$

Отметим, что функции (2.1.10), (2.1.11) зависят от геометрических параметров неоднородного цилиндрического слоя: внутреннего радиуса r_2 и внешнего радиуса r_1 .

На рисунке 2.1.2 показано изменение функций неоднородности $f(r)$ по толщине слоя $[r_2, r_1]$. На рисунке 2.1.2 (a, b) сплошными линиями показаны зависимости $f_1(r)$, $f_3(r)$, пунктирными — $f_2(r)$, $f_4(r)$, соответственно. Функции $f(r)$ выбраны таким образом, чтобы среднее значение функции $f(r)$ по толщине слоя было равно 1.

Предполагалось, что линейный источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_0 = 4r_2$ и $\varphi_0 = \pi$.

Суммирование в ряде (2.1.3) проводилось для n , изменяющегося от $-N$ до N , где $N = [2kr_1] + 1$; $[\cdot]$ — целая часть числа. Для контроля точности получаемого приближенного решения вычисления проводились на сгущающихся сетках. Вычислительный процесс останавливался в тот момент, когда для последней пары сеток величины $|U_{jn}(\xi)|$ ($j = 1, 2$) различались не более, чем на 10^{-7} для некоторых произвольно выбранных для контроля точек $\xi \in [r_2, r_1]$.

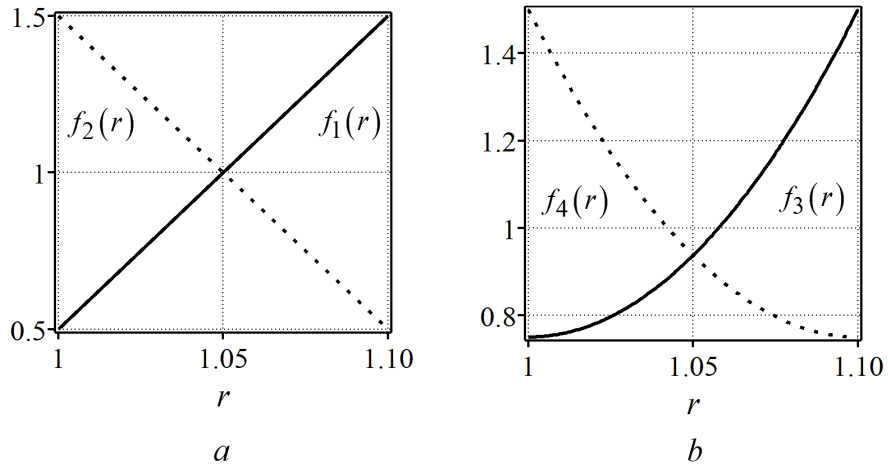


Рис. 2.1.2. Зависимости $f(r)$ по толщине слоя

На рисунках 2.1.3 – 2.1.8 представлены частотные зависимости рассеянного акустического поля $|\Psi_S/A|$ от волнового размера тела kr_2 . Сплошные линии на рисунках соответствуют случаю неоднородного покрытия, штриховые – однородному упругому покрытию, пунктирные – упругому цилиндру без покрытия. В названиях рисунков указано, при каком виде неоднородности и законе $f(r)$ построена сплошная кривая на каждом из рисунков.

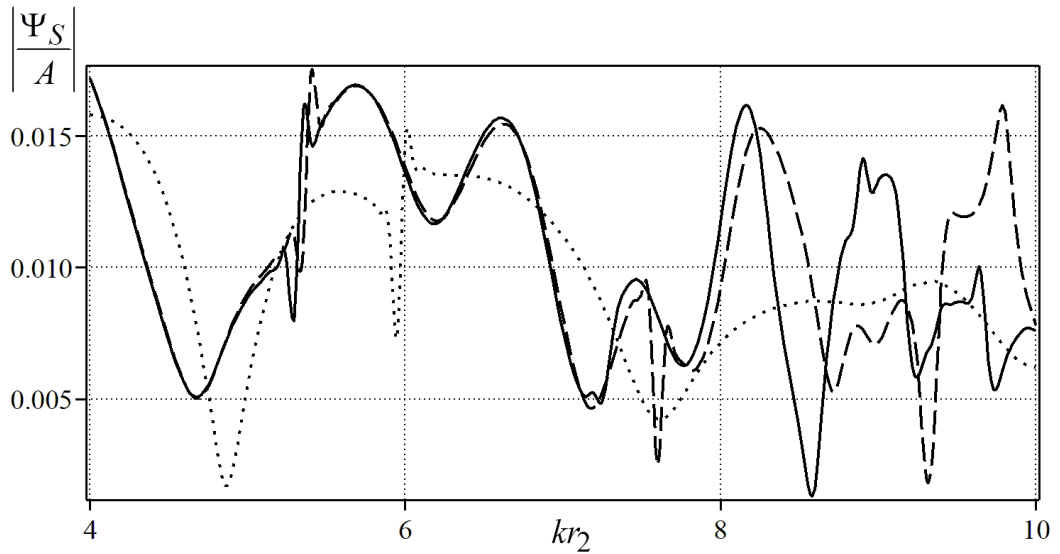


Рис. 2.1.3. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с неоднородностью первого вида, $f_1(r)$

Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|\Psi_S/A|$ от волнового размера цилиндра kr_2 рассчитаны в интервале $4 \leq kr_2 \leq 10$. Отметим, что при $kr_2 < 4$ частотные зависимости при однородном и неоднородном покрытиях отличаются незначительно. С увеличением частоты такое отличие становится все более заметным. Следует отметить, на рисунках 2.1.3, 2.1.5, когда неоднородность материала покрытия первого вида задается функциями $f_1(r)$, $f_3(r)$, возрастающими по толщине слоя, происходит сдвиг резонансов в области

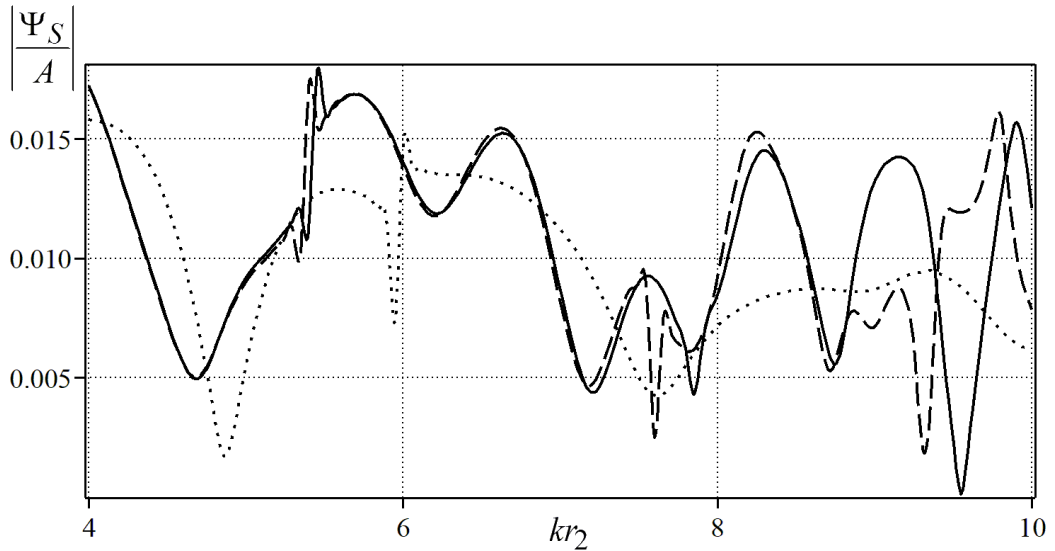


Рис. 2.1.4. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с неоднородностью первого вида, $f_2(r)$

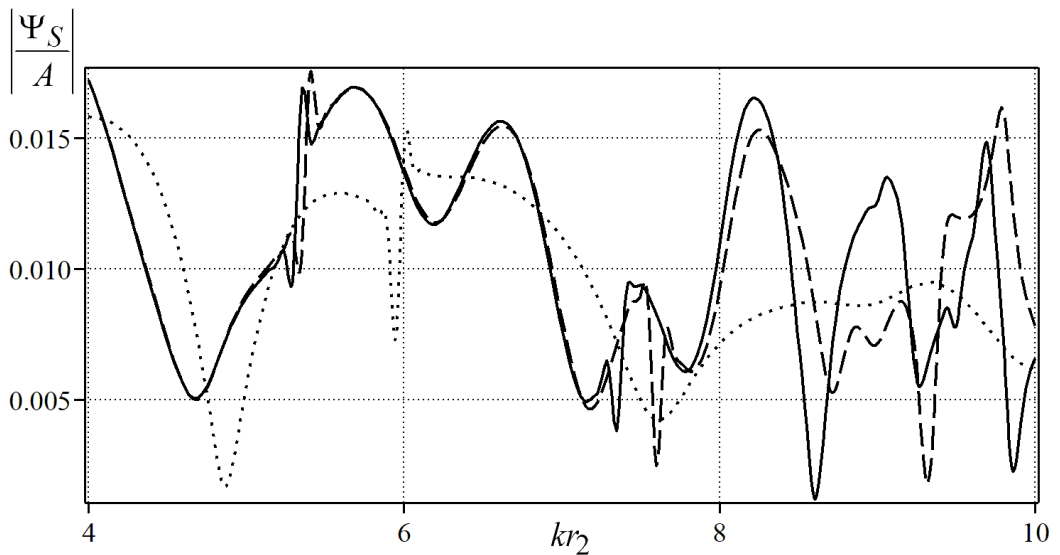


Рис. 2.1.5. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с неоднородностью первого вида, $f_3(r)$

$kr_2 \in (5.5, 5.7)$ в сторону меньших волновых чисел. На рисунках 2.1.4, 2.1.6, когда неоднородность материала покрытия первого вида задается функциями $f_2(r)$, $f_4(r)$, убывающими по толщине слоя, происходит сдвиг резонансов в области $kr_2 \in (5.5, 5.7)$ в сторону больших волновых чисел. Сравнивая попарно рисунки 2.1.3, 2.1.4 с рисунками 2.1.7, 2.1.8, можно видеть, что неоднородность второго вида показывает более заметные различия с однородным случаем в области резонансов, расположенных в интервале $kr_2 \in (5, 5.5)$. При этом следует отметить относительную схожесть поведения сплошных кривых на рисунках 2.1.3, 2.1.7; 2.1.4, 2.1.8 за исключением того, что сплошные кривые, построенные для неоднородности второго вида на рисунках 2.1.7, 2.1.8 имеют более резонирующий характер. Для упругого неоднород-

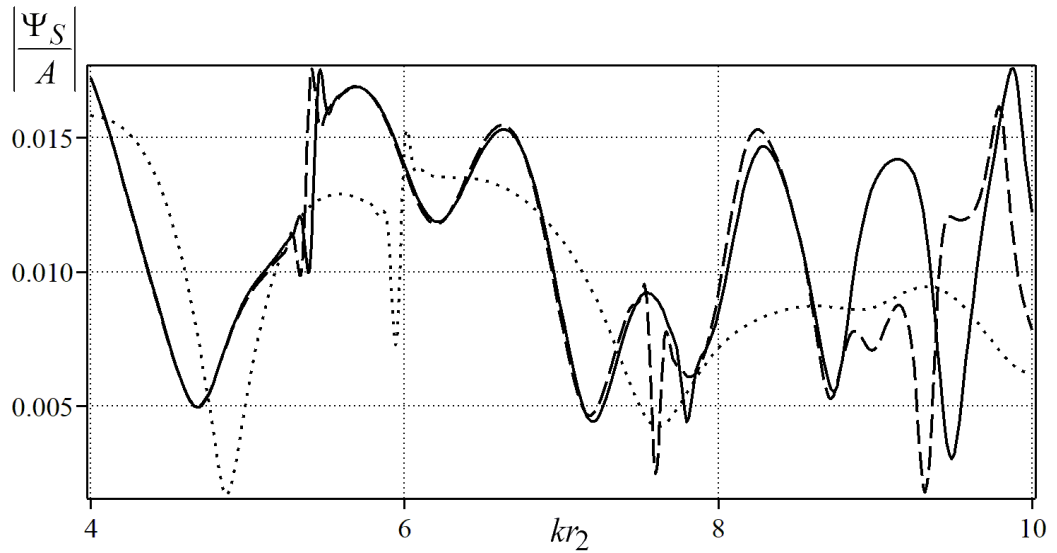


Рис. 2.1.6. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с неоднородностью первого вида, $f_4(r)$

ного слоя из полимерного материала (поливинилбутираль) наиболее существенное различие в частотных характеристиках, обусловленное влиянием разных видов неоднородности слоя, становится заметным в основном при $kr_2 > 7.2$. При этом заметим, что в области $kr_2 > 7.2$, возрастающие по толщине слоя функции неоднородности $f_1(r)$, $f_3(r)$ вызывают сдвиг резонансов в сторону меньших частот, а убывающие по толщине слоя функции неоднородности $f_2(r)$, $f_4(r)$ сдвигают резонансы в сторону больших частот.

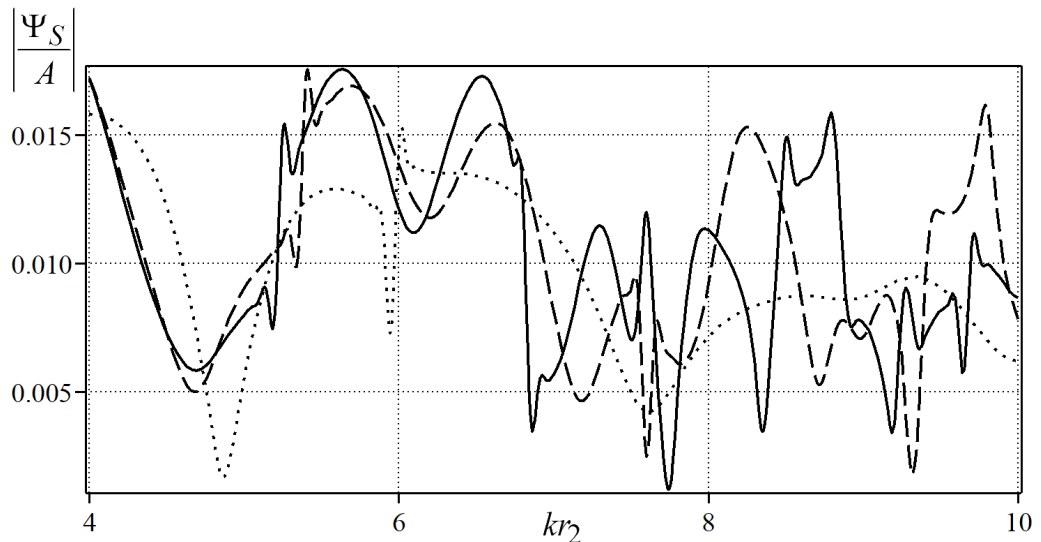


Рис. 2.1.7. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с неоднородностью второго вида, $f_1(r)$

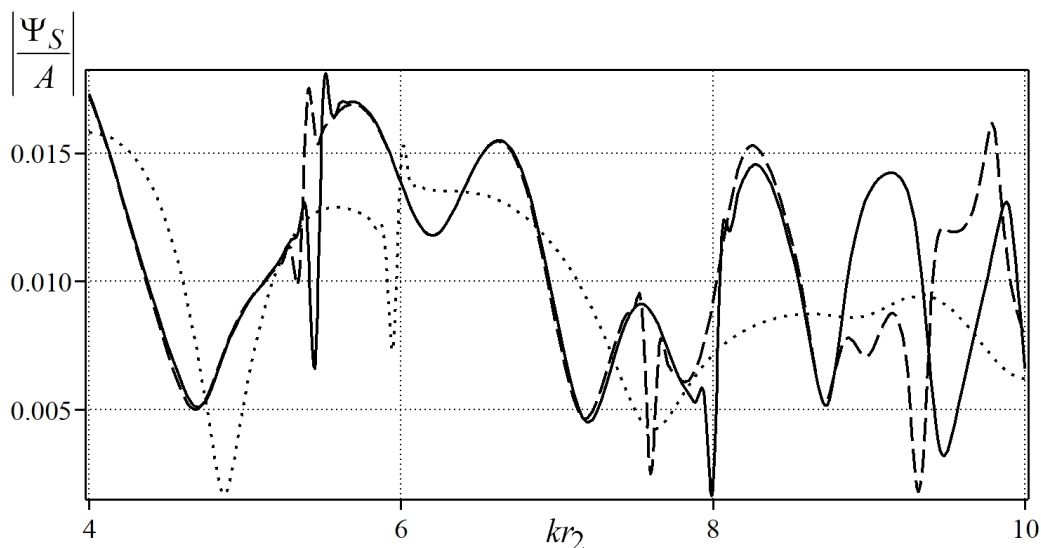


Рис. 2.1.8. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с неоднородностью второго вида, $f_2(r)$

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что неоднородность цилиндрического слоя оказывает значительное влияние на его звукоотражающие свойства, причем степень этого влияния значительно зависит от физико-механических характеристик материала слоя.

2.2. Рассеяние неоднородными упругими цилиндрами звуковых волн, излучаемых линейным источником, расположенным непараллельно оси цилиндра

2.2.1. Рассеяние упругим цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, расположенным непараллельно оси цилиндра

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный однородный изотропный упругий цилиндр радиуса R_2 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом R_1 . Свяжем с цилиндром прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат так, чтобы их координатные оси z совпадали с осью вращения цилиндра. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а его плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр с покрытием падает гармоническая цилиндрическая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, ось которого непараллельна оси цилиндра и не лежит с ней в одной плоскости.

Начало O координатных систем x, y, z и r, φ, z выберем на оси z так, чтобы из точки O

выходил общий перпендикуляр к оси z и линейному источнику. Длину этого перпендикуляра обозначим через d . Ось x направим так, чтобы указанный перпендикуляр лежал на этой оси. Без ограничения общности будем считать, что линейный источник пересекает отрицательную часть оси x в точке $x = -d$, $d > 0$. Осуществим параллельный перенос вдоль оси x до точки O прямой, на которой лежит линейный источник. Пусть полученная прямая будет общей осью z_1 прямоугольной x_1, y_1, z_1 и цилиндрической r_1, φ_1, z_1 систем координат с началом в точке O . При этом ось x_1 совместим с осью x . Обозначим через α угол между осями z и z_1 (рис. 2.2.1).

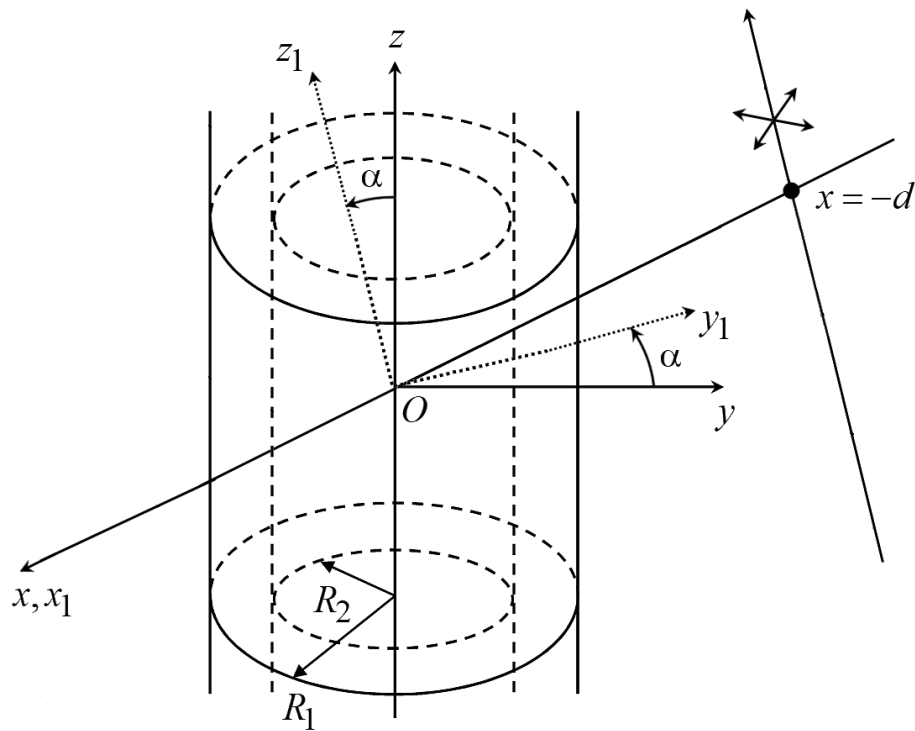


Рис. 2.2.1. Геометрия задачи 2.2.1

Потенциал скорости падающей цилиндрической волны в системе координат x_1, y_1, z_1 запишется в виде

$$\Psi_0 = AH_0(kR) \exp(-i\omega t), \quad R = \sqrt{(x_1 - d)^2 + y_1^2}, \quad (2.2.1)$$

где A – амплитуда волны; $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; ω – круговая частота; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поле смещений в неоднородном упругом цилиндрическом слое.

Уравнения волновых полей. Задача определения акустического поля вне цилиндра заключается в нахождении решения волнового уравнения (1.2.15); распространение малых

возмущений внутри однородного упругого цилиндра описывается уравнениями (1.2.28), (1.2.29); поле смещений в неоднородном упругом внешнем слое, вызванное акустическим воздействием, описывается полной системой уравнений линейной теории упругости изотропного неоднородного тела (1.2.21), (1.2.24), (1.2.25).

В силу линейной постановки задачи потенциал скоростей полного акустического поля

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_S,$$

где Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны.

Запишем вектор смещения \mathbf{u}_0 частиц упругого изотропного однородного цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } F + \text{rot } \Phi,$$

где F и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного (1.2.28) и векторного (1.2.29) уравнений Гельмгольца.

Представим вектор Φ в уравнении (1.2.29) в виде

$$\Phi = \text{rot } (W \cdot \mathbf{e}_z) + k_\tau M \cdot \mathbf{e}_z,$$

где W и M – функции пространственных координат; \mathbf{e}_z – единичный вектор оси z . Тогда векторное уравнение (1.2.29) приводится к двум скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций W и M

$$\Delta W + k_\tau^2 W = 0, \quad \Delta M + k_\tau^2 M = 0. \quad (2.2.2)$$

Прямоугольные координаты x, y, z и x_1, y_1, z_1 связаны между собой соотношениями

$$x_1 = x, \quad y_1 = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad z_1 = -y \sin \alpha + z \cos \alpha. \quad (2.2.3)$$

Воспользуемся интегральным соотношением [163]

$$H_0 \left(k \sqrt{(x_1 - d)^2 + y_1^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp [i (\xi y_1 + \eta |x_1 - d|)] d\xi, \quad (2.2.4)$$

где $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$.

С учетом (2.2.1)-(2.2.4) получаем для потенциала скорости падающей волны следующее выражение в цилиндрической системе координат r, φ, z :

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp [i \xi (r \sin \varphi \cos \alpha + z \sin \alpha) + i \eta |r \cos \varphi - d|] d\xi. \quad (2.2.5)$$

При $|\xi| > k$ величина η становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - \xi^2}$ из условия $\text{Im } \mu \geq 0$ обеспечивает условие излучения на бесконечности для потенциала Ψ_0 при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i \sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$.

Заметим, что далее при использовании граничных условий (1.2.30) на внешней поверхности цилиндра потребуется выражение (2.2.5), в котором следует положить $|r \cos \varphi - d| = d - r \cos \varphi$, так как на внешней поверхности цилиндрического слоя $r \cos \varphi - d < 0$. Будем иметь

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\xi z \sin \alpha) \exp[ir(\xi \sin \varphi \cos \alpha - \eta \cos \varphi)] d\xi. \quad (2.2.6)$$

Заменяем в выражении, стоящем в (2.2.6), величины ξ и η величинами β и γ с помощью соотношений $\xi \cos \alpha = \beta \sin \gamma$, $\eta = -\beta \cos \gamma$. Тогда вместо (2.2.6) получим

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\xi z \sin \alpha) \exp[i\beta r \cos(\varphi - \gamma)] d\xi, \quad (2.2.7)$$

где $\beta = \sqrt{k^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}$, $\gamma = \arctg(-\xi \cos \alpha / \eta)$.

Подынтегральное выражение в (2.2.7) имеет вид плоской волны, падающей наклонно на цилиндр. При этом $(\xi \sin \alpha)^2 + \beta^2 = k^2$. Используя известное разложение [55]

$$\exp[i\beta r \cos(\varphi - \gamma)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp[in(\varphi - \gamma)],$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n , получим разложение падающей цилиндрической звуковой волны по цилиндрическим волновым функциям

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi. \quad (2.2.8)$$

С учетом условий излучения на бесконечности потенциал скорости рассеянной волны Ψ_S , являющейся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\xi) H_n(\beta r) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi. \quad (2.2.9)$$

С учетом условия ограниченности функции F , W и M , являющиеся решениями уравнений (1.2.28), (2.2.2), будем искать в виде

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(\xi) J_n(k_1 r) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi, \\ W &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\xi) J_n(k_2 r) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi, \\ M &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n(\xi) J_n(k_2 r) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

где $k_1 = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}$, $k_2 = \sqrt{k_r^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}$.

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции u_r , u_φ , u_z будем искать в виде рядов Фурье по координате φ :

$$\begin{aligned} u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r, \xi) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi, \\ u_\varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r, \xi) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi, \\ u_z &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{3n}(r, \xi) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Подставляя разложения (2.2.11) в уравнения (1.2.25) и учитывая (1.2.24), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r, \xi)$, $U_{2n}(r, \xi)$, $U_{3n}(r, \xi)$ для каждого n и ξ :

$$\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \widehat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (2.2.12)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r, \xi), U_{2n}(r, \xi), U_{3n}(r, \xi))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{3 \times 3}$ — матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} a_{n11} &= (\lambda + 2\mu) r^2, & a_{n22} &= \mu r^2, & a_{n33} &= \mu r^2, & a_{nij} &= 0, & i &\neq j, \\ b_{n11} &= (\lambda' + 2\mu') r^2 + (\lambda + 2\mu) r, & b_{n12} &= b_{n21} = in(\lambda + \mu) r, \\ b_{n13} &= b_{n31} = i\xi(\lambda + \mu) r^2 \sin \alpha, & b_{n22} &= b_{n33} = \mu' r^2 + \mu r, & b_{n23} &= b_{n32} = 0, \\ c_{n11} &= \omega^2 r^2 \rho - \mu(n^2 + r^2 \xi^2 \sin^2 \alpha + 2) + \lambda' r - \lambda, & c_{n12} &= in(\lambda' r - \lambda - 3\mu), \\ c_{n13} &= i\xi \lambda' r^2 \sin \alpha, & c_{n21} &= in(\mu' r + \lambda + 3\mu), \\ c_{n22} &= \omega^2 r^2 \rho - n^2 \lambda - \mu' r - \mu(2n^2 + r^2 \xi^2 \sin^2 \alpha + 1), & c_{n23} &= c_{n32} = -n\xi(\lambda + \mu) r \sin \alpha, \\ c_{n31} &= i\xi(\mu' r + \lambda + \mu) r \sin \alpha, & c_{n33} &= \omega^2 r^2 \rho - \xi^2 \lambda r^2 \sin^2 \alpha - \mu(n^2 + 2r^2 \xi^2 \sin^2 \alpha), \end{aligned}$$

где штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Коэффициенты $A_n(\xi)$, $B_n(\xi)$, $C_n(\xi)$, $D_n(\xi)$ разложений (2.2.9), (2.2.10) и функции $U_{1n}(r, \xi)$, $U_{2n}(r, \xi)$, $U_{3n}(r, \xi)$ из разложений (2.2.11) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности цилиндрического слоя при $r = R_1$ заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений (1.2.30)

$$\text{при } r = R_1: \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0.$$

На внутренней поверхности покрытия при $r = R_2$ при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения (1.2.31)

$$\text{при } r = R_2 : \quad u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}.$$

Здесь σ_{0ij} – компоненты тензора напряжений в однородном изотропном цилиндре, которые связаны с компонентами вектора смещения \mathbf{u}_0 соотношениями (1.2.24).

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = R_1$ находим коэффициенты $A_n(\xi)$, выраженные через $U_{1n}(r, \xi)$:

$$A_n(\xi) = -\frac{Ai^n \exp(id\eta) \beta J'_n(\beta R_1) + i\eta\pi\omega U_{1n}(R_1, \xi)}{\eta\pi\beta H'_n(\beta R_1)}. \quad (2.2.13)$$

Из оставшихся граничных условий на внешней поверхности цилиндрического слоя при $r = R_1$ находим три краевых условия, которым должна удовлетворять краевая задача (2.2.12)

$$\left(\frac{1}{r} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{E}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=R_1} = \mathbf{W}_n, \quad (2.2.14)$$

где элементы матриц $\mathbf{W}_n = (w_{n1}, 0, 0)^T$; $\mathbf{E}_n = (e_{nij})_{3 \times 3}$ определяются выражениями:

$$w_{n1} = \frac{2Ai^n \rho_1 \omega \exp(id\eta)}{\pi^2 \eta \beta r H'_n(\beta r)}, \quad e_{n11} = \frac{\lambda}{r} + \frac{\omega^2 \rho_1 H_n(\beta r)}{\beta H'_n(\beta r)}, \quad e_{n12} = \frac{in\lambda}{r}, \quad e_{n13} = i\lambda\xi \sin \alpha,$$

$$e_{n21} = \frac{i n \mu}{r}, \quad e_{n22} = -\frac{\mu}{r}, \quad e_{n23} = e_{32} = e_{33} = 0, \quad e_{n31} = i\mu\xi \sin \alpha.$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = R_2$ находим коэффициенты $B_n(\xi)$, $C_n(\xi)$, $D_n(\xi)$, выраженные через $U_{1n}(R_2, \xi)$, $U_{2n}(R_2, \xi)$, $U_{3n}(R_2, \xi)$:

$$\mathbf{K}_n = ([\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{U}_n)_{r=R_2}, \quad (2.2.15)$$

где $\mathbf{K}_n = (B_n(\xi), C_n(\xi), D_n(\xi))^T$; $\mathbf{M}_n = (m_{nij})_{3 \times 3}$ – матрица третьего порядка с элементами:

$$m_{n11} = k_1 J'_n(k_1 R_2), \quad m_{n12} = i\xi k_2 J'_n(k_2 R_2) \sin \alpha, \quad m_{n13} = in k_\tau J_n(k_2 R_2) / R_2,$$

$$m_{n21} = in J_n(k_1 R_2) / R_2, \quad m_{n22} = -n\xi J_n(k_2 R_2) \sin \alpha / R_2, \quad m_{n23} = -k_2 k_\tau J'_n(k_2 R_2),$$

$$m_{n31} = i\xi J_n(k_1 R_2) \sin \alpha, \quad m_{n32} = k_2^2 J_n(k_2 R_2), \quad m_{nq33} = 0.$$

Из оставшихся граничных условий при $r = R_2$ с учетом (2.2.15) получим следующие краевые условия для системы (2.2.12):

$$\left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{T}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=R_2} = 0, \quad (2.2.16)$$

где $\mathbf{T}_n = \mathbf{F}_n - \Gamma_n [\mathbf{M}_n]^{-1}$; $\mathbf{F}_n = (f_{npm})_{3 \times 3}$, $\Gamma_n = (\gamma_{npm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$f_{n11} = \lambda(r) / r, \quad f_{n12} = in\lambda(r) / r, \quad f_{n13} = i\xi\lambda(r) \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned}
f_{n21} &= in\mu(r)/r, \quad f_{n22} = -\mu(r)/r, \quad f_{n23} = f_{nq32} = f_{n33} = 0, \quad f_{n31} = i\xi\mu(r)\sin\alpha, \\
\gamma_{n11} &= 2\mu_0 k_1^2 J_n''(k_1 R_2) - \lambda_0 (k_1^2 + \xi^2 \sin^2 \alpha) J_n(k_1 R_2), \quad \gamma_{n12} = 2i\xi \sin \alpha \mu_0 k_2^2 J_n''(k_2 R_2), \\
\gamma_{n13} &= 2ink_\tau \mu_0 [k_2 R_2 J_n'(k_2 R_2) - J_n(k_2 R_2)] / R_2^2, \quad \gamma_{n21} = 2in\mu_0 [k_1 r_2 J_n'(k_1 R_2) - J_n(k_1 R_2)] / R_2^2, \\
\gamma_{n22} &= 2n\xi\mu_0 \sin \alpha [k_2 R_2 J_n'(k_2 R_2) - J_n(k_2 R_2)] / R_2^2, \\
\gamma_{n23} &= -\mu_0 k_\tau [k_2^2 R_2^2 J_n''(k_2 R_2) - k_2 R_2 J_n'(k_2 R_2) + n^2 J_n(k_2 R_2)] / R_2^2, \\
\gamma_{n31} &= 2i\xi\mu_0 k_1 J_n'(k_1 R_2) \sin \alpha, \quad \gamma_{n32} = -\mu_0 k_2 (\xi^2 \sin^2 \alpha - k_2^2) J_n'(k_2 R_2), \\
\gamma_{nq33} &= -n\xi\mu_0 k_\tau J_n(k_2 R_2) \sin \alpha / R_2.
\end{aligned}$$

Краевая задача (2.2.12), (2.2.14), (2.2.16) решалась методом сплайн-коллокации. Решив ее и определив по формуле (2.2.13) коэффициенты $A_n(\xi)$, получим аналитическое описание волновых полей во внешней среде.

Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты угловых и частотных характеристик рассеянного акустического поля $|\Psi_S/A|$ в дальней зоне $r = 100$ м в плоскости $z = 0$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $R_2 = 0.8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль), так и неоднородные, механические характеристики которых менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad f(r) = f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r), \quad R_2 \leq r \leq R_1.$$

Функции $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$, $f_4(r)$, задающие неоднородность материала цилиндрического слоя, определены выражениями (2.1.10), (2.1.11).

Полагалось, что линейный источник отстоит от центра основной координатной системы на расстоянии $d = 4$ м и генерирует звуковую волну единичной амплитуды с частотой, соответствующей волновому размеру тела $kR_2 = 4$.

Решение краевой задачи (2.2.12), (2.2.14), (2.2.16) получено методом сплайн-коллокации [50]. Для контроля точности вычисления проводились на сгущающихся вдвое сетках. Суммирование в (2.2.9) проводилось в диапазоне от $-N$ до N , где $N = 2[kR_1] + 1$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Несобственный интеграл в (2.2.9) вычислялся по квадратурной формуле Симпсона с использованием приема обрезания бесконечных пределов [59].

На рисунках 2.2.2 – 2.2.13 представлены диаграммы направленности рассеянного поля. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Штриховые линии соответствуют цилиндру с однородным покрытием, сплошные линии – цилиндру с неоднородным покрытием, пунктирные –

цилиндру без покрытия. В названиях рисунков указано, при каком значении угла α построен рисунок, и при каком законе неоднородности $f(r)$ построена сплошная кривая на каждом из рисунков.

На группах рисунков 2.2.2 – 2.2.5; 2.2.6 – 2.2.9; 2.2.10 – 2.2.13 приведены кривые, рассчитанные для случаев, когда $\alpha = 0$; $\pi/4$; $\pi/2$ соответственно. В случае, когда $\alpha = 0$, линейный источник параллелен оси цилиндра. Результаты вычислений диаграмм направленности для этого случая приведены на группе рисунков 2.2.2 – 2.2.5. Они полностью повторяют результаты, полученные с использованием аналитического решения из раздела 2.1.

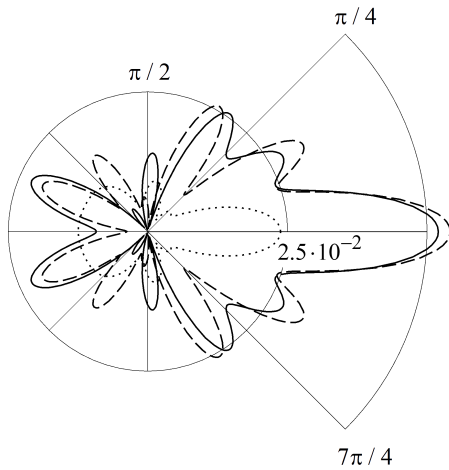


Рис. 2.2.2. $\alpha = 0$, $f(r) = f_1(r)$

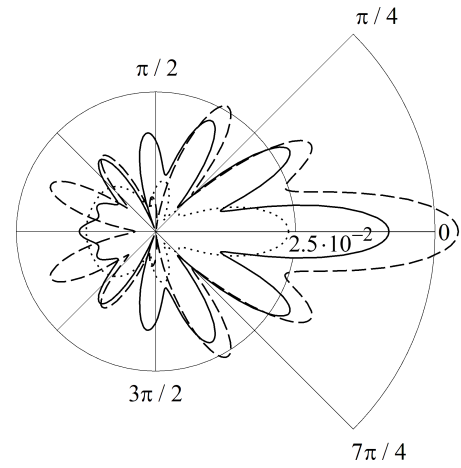


Рис. 2.2.3. $\alpha = 0$, $f(r) = f_2(r)$

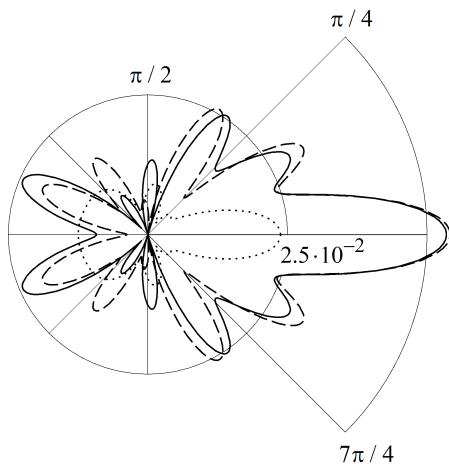


Рис. 2.2.4. $\alpha = 0$, $f(r) = f_3(r)$

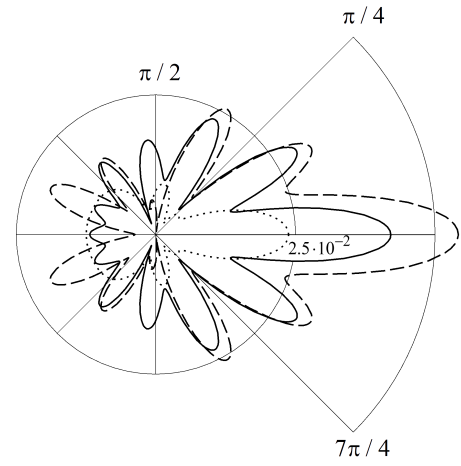
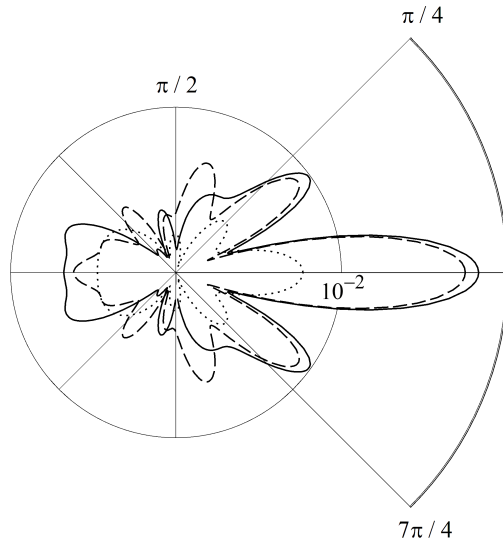
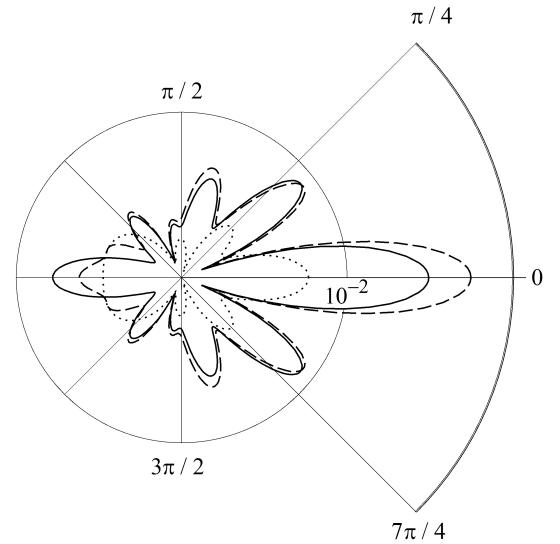
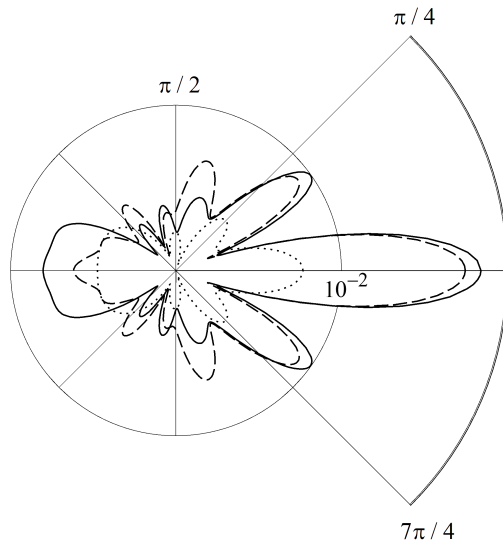
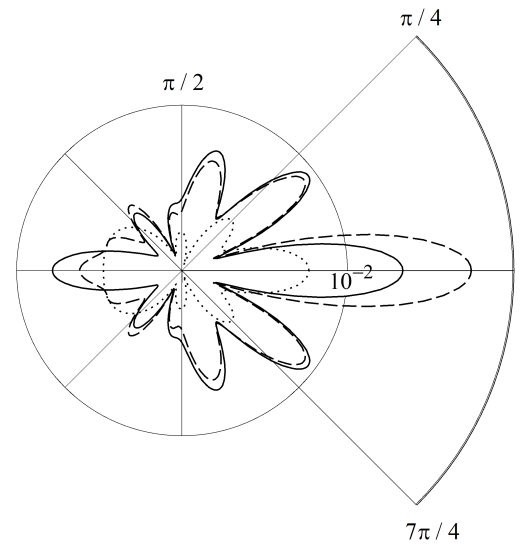


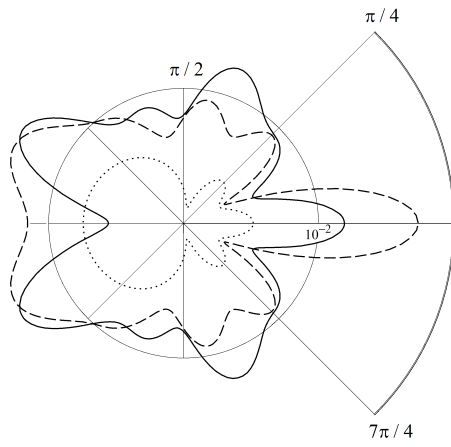
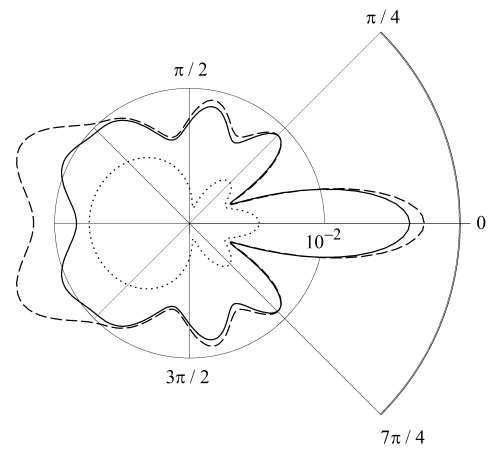
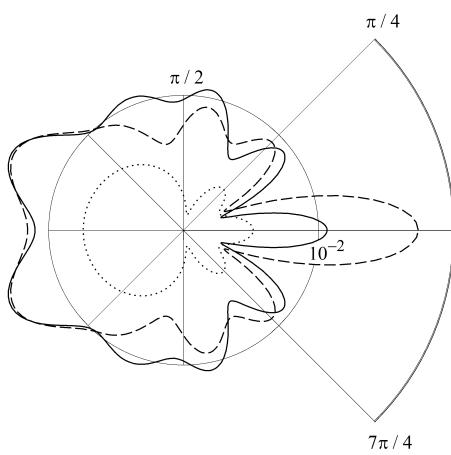
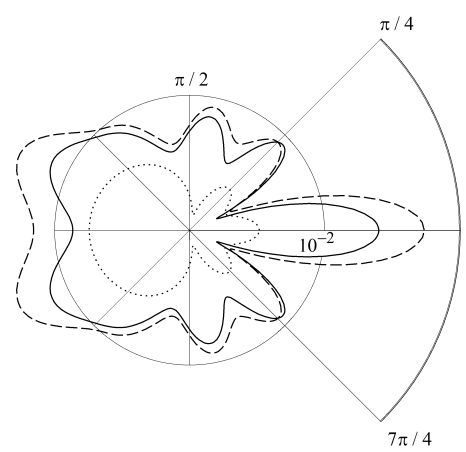
Рис. 2.2.5. $\alpha = 0$, $f(r) = f_4(r)$

Различие сплошных кривых в каждой из групп рисунков 2.2.2 – 2.2.5; 2.2.6 – 2.2.9; 2.2.10 – 2.2.13 указывает на влияние неоднородности упругого цилиндрического слоя на угловую характеристику рассеяния звука. Это влияние зависит, в частности, от распределения самой неоднородности по толщине слоя и от частоты падающего поля.

Рис. 2.2.6. $\alpha = \pi/4$, $f(r) = f_1(r)$ Рис. 2.2.7. $\alpha = \pi/4$, $f(r) = f_2(r)$ Рис. 2.2.8. $\alpha = \pi/4$, $f(r) = f_3(r)$ Рис. 2.2.9. $\alpha = \pi/4$, $f(r) = f_4(r)$

Следует отметить, что возрастающие по толщине слоя функции неоднородности $f_1(r)$, $f_3(r)$ (рисунки 2.2.2 и 2.2.4, 2.2.6 и 2.2.8, 2.2.10 и 2.2.12) показывают достаточно схожее влияние на рассеянное акустическое поле. Наиболее существенное различие их влияния наиболее заметно в областях прямого ($\varphi = 0$) и обратного ($\varphi = \pi$) рассеяния звука. Аналогичный вывод можно сделать для диаграмм, рассчитанных с убывающими по толщине слоя функциями неоднородности $f_2(r)$, $f_4(r)$ (рисунки 2.2.3 и 2.2.4, 2.2.7 и 2.2.8, 2.2.11 и 2.2.13).

На группе рисунков 2.2.10 – 2.2.13, построенных при $\alpha = \pi/2$, можно видеть отсутствие ярко выраженных лепестков в освещенной области ($\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$) и достаточно гладкую форму диаграмм рассеянного поля.

Рис. 2.2.10. $\alpha = \pi/2, f(r) = f_1(r)$ Рис. 2.2.11. $\alpha = \pi/2, f(r) = f_2(r)$ Рис. 2.2.12. $\alpha = \pi/2, f(r) = f_3(r)$ Рис. 2.2.13. $\alpha = \pi/2, f(r) = f_4(r)$

На рисунках 2.2.14 – 2.2.16 представлены частотные зависимости рассеянного акустического поля $|\Psi_S/A|$ от волнового размера тела kR_2 для значений угла $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$, соответственно. Сплошные линии на рисунках соответствуют случаю неоднородного покрытия, штриховые — однородному упругому покрытию, пунктирные — упругому цилиндру без покрытия. Неоднородность материала покрытия задавалась функцией $f_1(r)$.

Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|\Psi_S/A|$ от волнового размера цилиндра kR_2 рассчитаны в интервале $2 \leq kR_2 \leq 4$ в фиксированной точке наблюдения с пространственными координатами $(r, \varphi, z) = (100, \pi, 0)$.

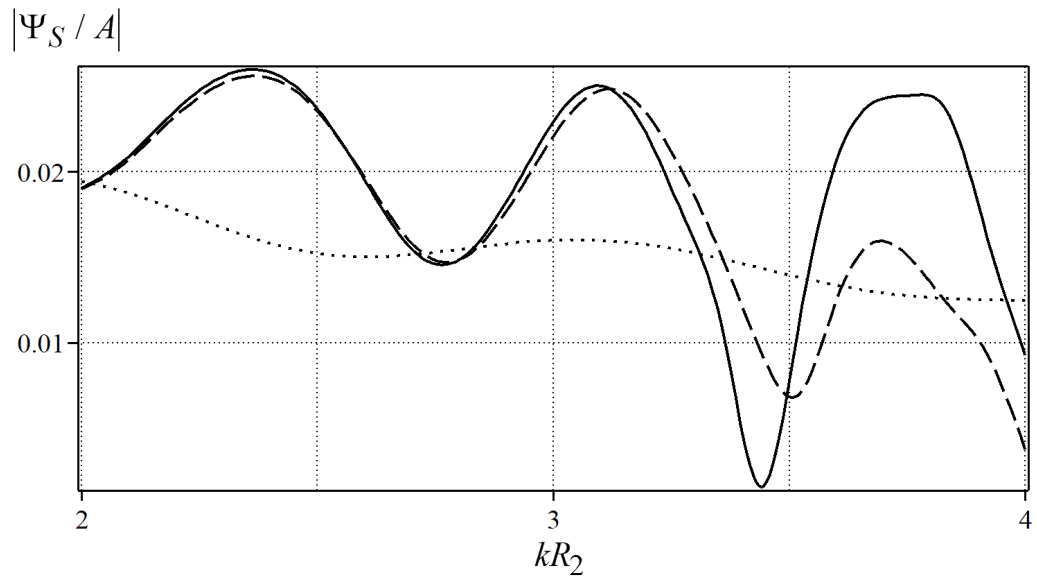


Рис. 2.2.14. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра, $\alpha = 0$

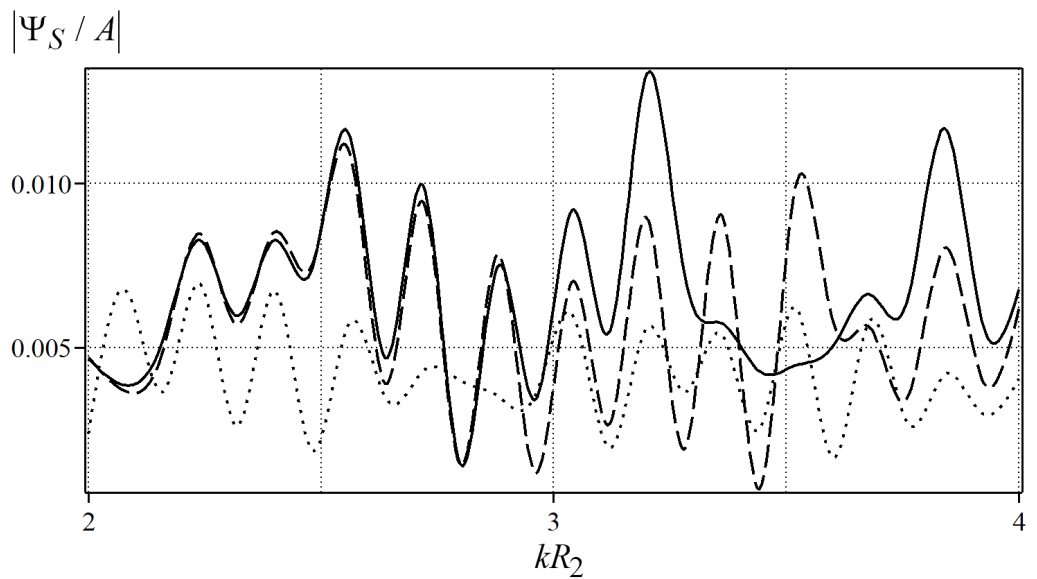


Рис. 2.2.15. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра, $\alpha = \pi/4$

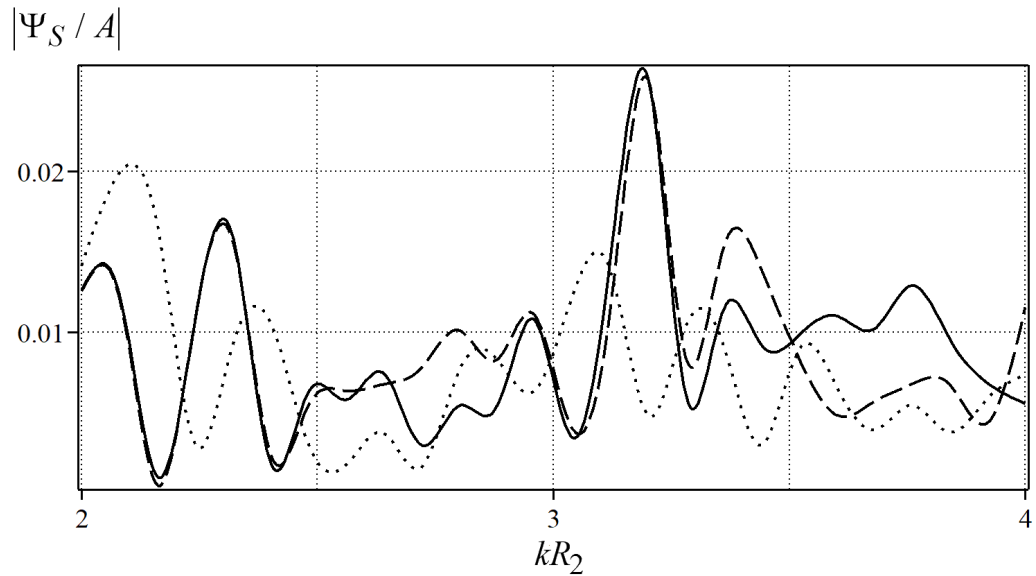


Рис. 2.2.16. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра, $\alpha = \pi/2$

Отметим, что при $kR_2 < 2$ частотные зависимости при однородном и неоднородном покрытиях отличаются незначительно. С увеличением частоты такое отличие становится все более заметным.

Сравнивая сплошную и штриховую линии на каждом из рисунков 2.2.14, 2.2.15, можно видеть, что неоднородность материала покрытия начинает оказывать наиболее существенное влияние на рассеянное акустическое поле при $kR_2 > 2.7$. Также отметим, что в случае $\alpha = \pi/4$ на рисунке 2.2.15 частотная диаграмма имеет более колебательный характер по сравнению с рисунком 2.2.14, где расчеты проводились для случая, когда ось источника параллельна оси цилиндра. Заметим, что присутствует относительное сохранение положений резонансных значений частот ω всех трех кривых, показанных на рисунке 2.2.15.

Проводя сравнение сплошной и штриховой кривых на рисунке 2.2.16, заметим, что влияние неоднородности становится более заметным при $kR_2 > 2.5$. Также отметим относительное сохранение положений точек резонансов для случаев однородного и неоднородного покрытий.

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что неоднородность цилиндрического слоя влияет на его звукоотражающие свойства, причем степень этого влияния значительно зависит в том числе от физико-механических характеристик материала слоя. Отметим, что угол наклона линейного источника α относительно положения цилиндрического рассеивателя существенно меняет поле характер первичного волнового возмущения волновой системы, что оказывает значительное влияние на рассеянное акустическое поле.

2.2.2. Рассеяние неоднородным упругим цилиндрическим слоем звуковых волн, излучаемых линейным источником, расположенным непараллельно оси цилиндра

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный изотропный упругий цилиндрический слой бесконечной длины. Цилиндрический слой имеет произвольную толщину. Его внешний радиус – R_1 , а внутренний – R_0 . Выберем прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси z совпадают с осью вращения цилиндрического слоя. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала цилиндрического слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а его плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Полагаем, что в полости цилиндрического слоя – вакуум. Окружающая тело жидкость является идеальной сжимаемой, плотность и скорость звука которой соответственно равны ρ_1 и c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндрический слой падает монохроматическая цилиндрическая волна. Падающая волна излучается бесконечно длинным цилиндрическим источником, на поверхности которого возбуждена одна из мод, расположенным таким образом, что оси источника и цилиндрического рассеивателя не являются параллельными и не лежат в одной плоскости. Начало O координатных систем x, y, z и r, φ, z выберем на оси z так, чтобы из точки O выходил общий перпендикуляр к оси z и линейному источнику. Длину этого перпендикуляра обозначим через d . Ось x направим так, чтобы указанный перпендикуляр лежал на этой оси. Без ограничения общности будем считать, что линейный источник пересекает отрицательную часть оси x в точке $x = -d$, $d > 0$. Осуществим параллельный перенос вдоль оси x до точки O прямой, на которой лежит линейный источник. Пусть полученная прямая будет общей осью z_1 прямоугольной x_1, y_1, z_1 и цилиндрической r_1, φ_1, z_1 систем координат с началом в точке O . При этом ось x_1 совместим с осью x . Обозначим через α угол между осями z и z_1 (геометрия задачи аналогична показанной на рис. 2.2.1).

Потенциал скорости падающей цилиндрической волны, излучаемой цилиндрическим источником порядка m , в системе координат x_1, y_1, z_1 запишется в виде

$$\Psi_0 = AH_m(kR) \exp[i(m\theta - \omega t)], \quad R = \sqrt{(x_1 - d)^2 + y_1^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = y_1 / (x_1 - d), \quad (2.2.17)$$

где A – амплитуда волны; $H_m(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; ω – круговая частота; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поле смещений в неоднородном упругом цилиндрическом слое.

Уравнения волновых полей. Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца (1.2.15) относительно потенциала смещения частиц жидкости Ψ в полном акустическом поле, образованном суперпозицией полей падающей и рассеянной волн

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_S,$$

где Ψ_0 – потенциал скорости падающей звуковой волны; Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны.

Воспользуемся интегральной формой записи цилиндрических волновых функций через декартовы базисные решения уравнения Гельмгольца:

$$H_m(kR) \exp(im\theta) = \frac{\gamma_m i^m}{\pi k^m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\eta - i\xi)^m}{\eta} \exp[i(\pm\xi y_1 + \eta|x_1 - d|)] d\xi, \quad (2.2.18)$$

$$\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2},$$

где знак плюс у показателя экспоненты и $\gamma_m = 1$ соответствуют $x_1 - d < 0$, а знак минус и $\gamma_m = (-1)^m$ соответствуют $x_1 - d > 0$. Формула (2.2.18) получена на основе соотношений, приведенных в [148, 163].

Используя интегральное представление (2.2.18) и известное разложение плоской звуковой волны по цилиндрическим волновым функциям аналогично тому как показано в подразделе 2.2.1, потенциал звуковой волны (2.2.17) записывается в цилиндрической системе координат на внешней поверхности цилиндрического рассеивателя в виде

$$\Psi_0|_{r=R_1} = A \frac{i^m}{\pi k^m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(id\eta)}{\eta} (\eta - i\xi)^m \exp(i\xi z \sin \alpha) \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta R_1) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi, \quad (2.2.19)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\beta = \sqrt{k^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}$; $\gamma = \arctg(-\xi \cos \alpha / \eta)$.

С учетом условий излучения на бесконечности потенциал скорости рассеянной волны Ψ_S , являющейся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\xi) H_n(\beta r) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi. \quad (2.2.20)$$

Деформация тела, вызванная акустическим воздействием, описывается полной системой уравнений линейной теории упругости изотропного неоднородного тела, состоящей из системы уравнений движения сплошной среды (1.2.25), обобщенного закона Гука (1.2.23) и линейного тензора деформации Коши-Грина (1.2.21).

Граничные условия на внешней боковой поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений (1.2.30). На внутренней боковой поверхности цилиндра должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных напряжений (1.2.32).

Представим компоненты вектора смещений в неоднородном упругом слое \mathbf{u} в виде разложений в ряды Фурье

$$u_w = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{ln}(r, \xi) \exp[in(\varphi - \gamma)] d\xi;$$

$$w = r, \varphi, z; \quad l = 1, 2, 3; \quad w \leftrightarrow l. \quad (2.2.21)$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = R_1$ находим коэффициенты $A_n(\xi)$, выраженные через $U_{1n}(R_1, \xi)$:

$$A_n(\xi) = -\frac{Ai^n \exp(id\eta) \Omega_m(\xi) \beta J'_n(\beta R_1) + i\eta\pi\omega U_{1n}(R_1, \xi)}{\eta\pi\beta H'_n(\beta R_1)},$$

$$\Omega_m(\xi) = \frac{i^m(\eta - i\xi)^m}{k^m}. \quad (2.2.22)$$

Система (1.2.25) с учетом (2.2.21) сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Присоединяя соответствующие граничные условия на внешней (1.2.30) и внутренней (1.2.32) боковых поверхностях цилиндрического слоя, получаем краевую задачу для описания волнового поля в неоднородном упругом изотропном цилиндрическом слое

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \widehat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n &= 0, \\ \left(\frac{1}{r} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n' + \mathbf{E}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=R_1} &= \mathbf{W}_{1n}, \\ \left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n' + \mathbf{F}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=R_0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

где $\mathbf{W}_{1n} = (w_{1n1}, 0, 0)^T$;

$$w_{1n1} = \frac{2Ai^n \rho_1 \omega \exp(id\eta) \Omega_m(\xi)}{\pi^2 \eta \beta r H'_n(\beta r)};$$

элементы матриц $\widehat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{3 \times 3}$, $\mathbf{E}_n = (e_{nij})_{3 \times 3}$, $\mathbf{F}_n = (f_{nij})_{3 \times 3}$ приведены в подразделе 2.2.1.

Решив краевую задачу (2.2.23) методом сплайн-коллокации [50], находим значения \mathbf{u} на внешней боковой поверхности цилиндра. Зная значения \mathbf{u} , можно определить поле Ψ_S по формулам (2.2.20), (2.2.22).

Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты угловых и частотных характеристик рассеянного акустического поля $|\Psi_S(\varphi)/A|$ в дальней зоне $r = 100$ м в плоскости $z = 0$. Полагалось, что цилиндрический слой из поливинилбутираля ($R_1 = 1$ м, $R_0 = 0.5$ м) располагается в свободном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Рассматривался как однородный цилиндрический слой с характерными плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м², так и неоднородный, физико-механические характеристики которого изменялись по закону

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad f(r) = f_1(r), f_2(r), \quad R_0 \leq r \leq R_1.$$

Полагалось, что линейный источник излучает симметричную цилиндрическую волну ($m = 0$) и отстоит от центра основной координатной системы на расстоянии $d = 4$ м и генерирует звуковую волну единичной амплитуды с частотой, соответствующей волновому размеру тела $kR_1 = 5$.

Суммирование в (2.2.20) проводилось в диапазоне от $-N$ до N , где $N = 2[kR_1] + 1$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Несобственный интеграл в (2.2.20) вычислялся по квадратурной формуле Симпсона с использованием приема обрезания бесконечных пределов [59].

На рисунках 2.2.17 – 2.2.22 представлены диаграммы направленности рассеянного поля, рассчитанные для случаев, когда $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$ соответственно. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Пунктирные линии соответствуют однородному цилиндрическому слою, сплошные линии – неоднородному цилиндрическому слою. В названиях рисунков указано, при каком значении угла α построен рисунок, и при каком законе неоднородности $f(r)$ построена сплошная кривая на каждом из рисунков.

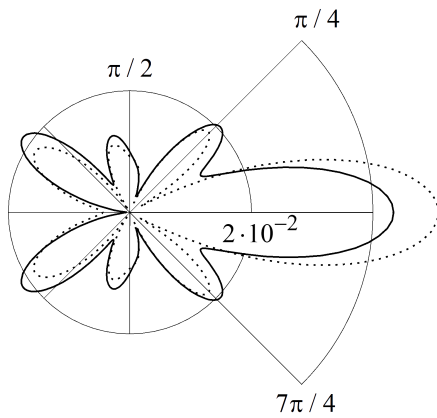


Рис. 2.2.17. $\alpha = 0, f(r) = f_1(r)$

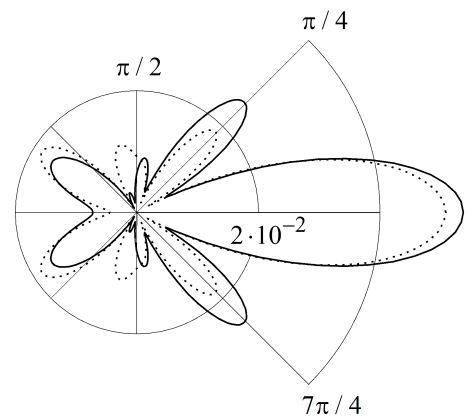


Рис. 2.2.18. $\alpha = 0, f(r) = f_2(r)$

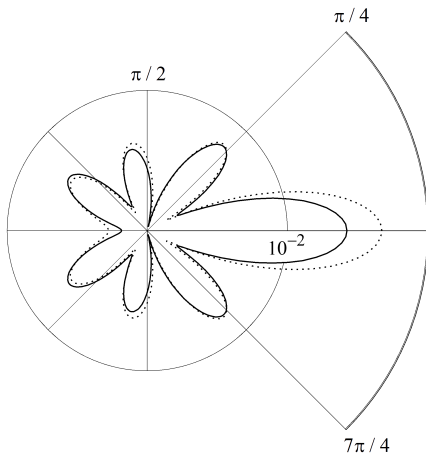


Рис. 2.2.19. $\alpha = \pi/4, f(r) = f_1(r)$

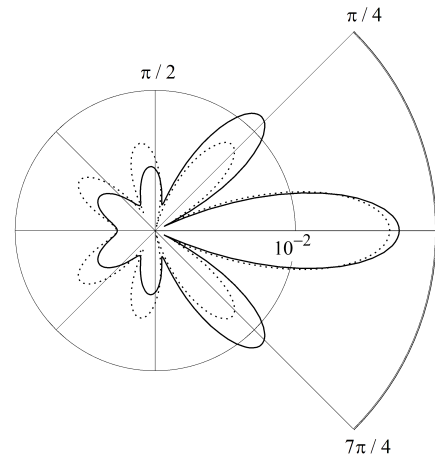
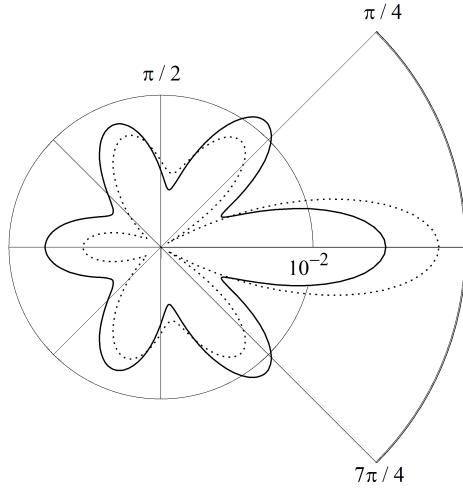
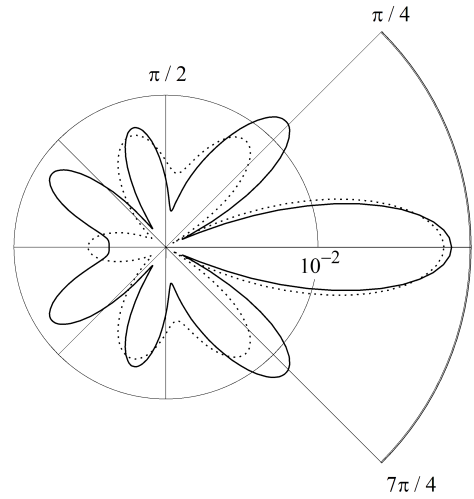


Рис. 2.2.20. $\alpha = \pi/4, f(r) = f_2(r)$

Рис. 2.2.21. $\alpha = \pi/2$, $f(r) = f_1(r)$ Рис. 2.2.22. $\alpha = \pi/2$, $f(r) = f_2(r)$

Сравнение сплошных и пунктирных линий на рисунках 2.2.17 – 2.2.21 позволяет сделать вывод об относительном сохранении формы диаграмм рассеянного акустического поля при исследуемых законах неоднородности $f_1(r)$, $f_2(r)$ относительно однородных случаев во всем диапазоне изменения угла φ . При этом на рисунке 2.2.22 неоднородность оказывает существенное изменение формы лепестков в освещенной области ($\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$) и относительное сохранение формы только в теневой области ($\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$).

Было установлено, что неоднородность цилиндрического слоя из полимерного материала начинает оказывать существенное влияние на рассеянное акустическое поле при частоте, соответствующей $kR_1 = 5$, при отношении внешнего радиуса цилиндрического слоя к внутреннему $R_1/R_0 > 1.7$.

На рисунках 2.2.23 – 2.2.25 представлены частотные зависимости рассеянного акустического поля $|\Psi_S/A|$ от волнового размера тела kR_1 для значений угла $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$, соответственно. Сплошные линии на рисунках соответствуют случаю неоднородного слоя, штриховые — однородному упругому слою. Неоднородность материала слоя задавалась функцией $f_2(r)$. Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|\Psi_S/A|$ от волнового размера цилиндра kR_1 рассчитаны в интервале $0 < kR_1 \leq 5$ в фиксированной точке наблюдения с пространственными координатами $(r, \varphi, z) = (100, \pi, 0)$.

Анализ кривых, построенных на рисунках 2.2.23 – 2.2.25, показывает, что неоднородность материала цилиндрического слоя начинает оказывать значительное влияние на рассеянное акустическое поле уже при небольших значениях волнового размера тела kR_1 , что обусловлено достаточно большим значением отношения $R_1/R_0 = 2$, выбранным для проведения расчетов. Сравнивая попарно штриховые и сплошные кривые на рисунках 2.2.23 – 2.2.25, можно видеть, что частотные зависимости, построенные для значений угла $\alpha = \pi/4, \pi/2$, имеют более резонирующий характер, по сравнению с кривыми, изображенными для случая, когда $\alpha = 0$.

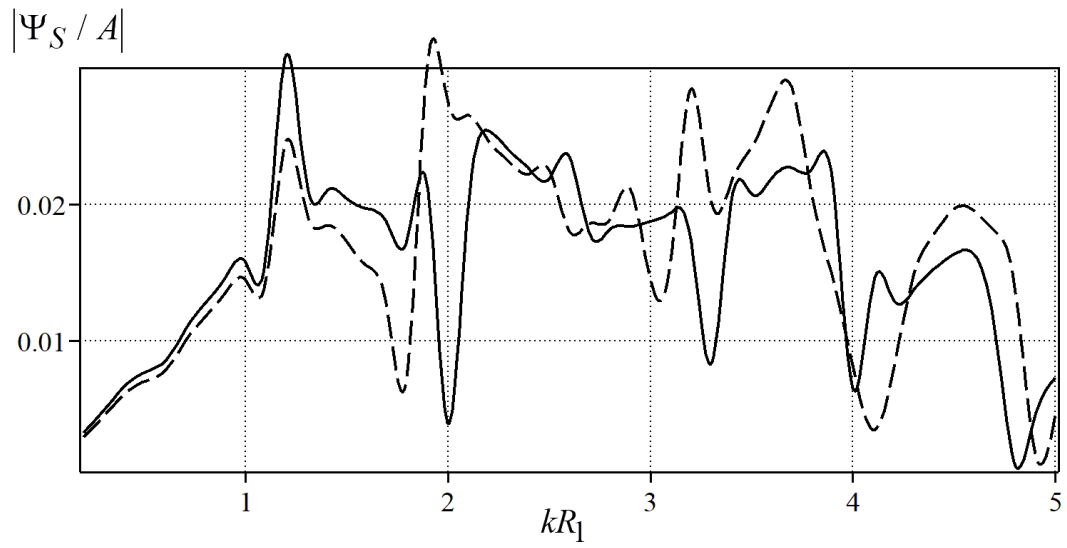


Рис. 2.2.23. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра, $\alpha = 0$

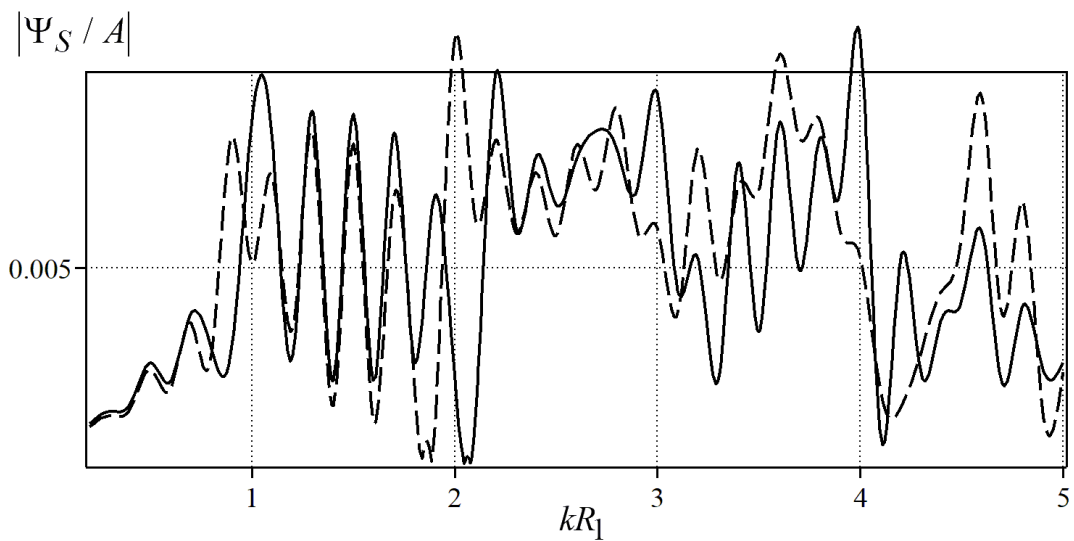


Рис. 2.2.24. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра, $\alpha = \pi/4$

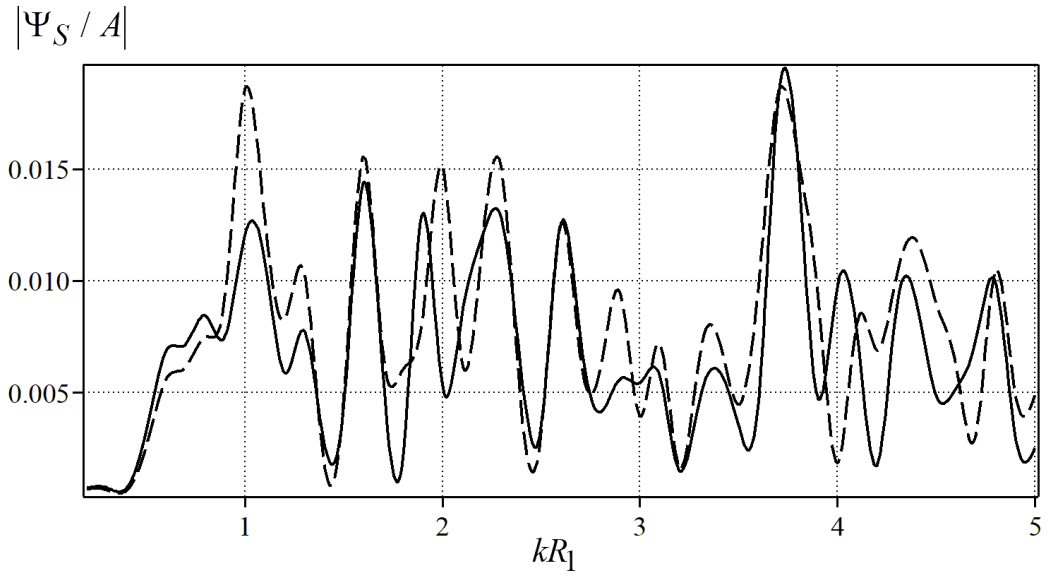


Рис. 2.2.25. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра, $\alpha = \pi/2$

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что неоднородность цилиндрического слоя влияет на его звукоотражающие свойства, причем степень этого влияния значительно зависит от физико-механических характеристик материала слоя и распределения самой неоднородности по толщине слоя.

3. Дифракция звуковых волн на упругих цилиндрах с неоднородными упругими покрытиями в присутствии подстилающих поверхностей

В настоящей главе приведены решения прямых задач о рассеянии гармонических звуковых волн (плоских, цилиндрических, сферических) упругим цилиндром с радиально-неоднородным покрытием, расположенным в присутствии ограничивающей плоской поверхности. Решение в разделе 3.1 получено с использованием метода мнимых источников, исключим подстилающую плоскость, вводя в рассмотрение второй цилиндр, являющийся зеркальным отражением исходного рассеивателя, и вторую волну, распространяющуюся в направлении волнового вектора. Решения в разделах в 3.2 и 3.3 основано на использовании интегрального уравнения Гельмгольца-Кирхгофа, а учет многократных переотражений между цилиндром и границей полупространства достигался при помощи специальной функции Грина для упругого полупространства.

Были проведены численные расчеты распределения амплитуды рассеянного акустического поля. Оценено влияние упругой подстилающей поверхности на рассеянное поле. Установлено, что неоднородное покрытие позволяет эффективно изменять характеристики рассеяния цилиндрического тела при соответствующем выборе законов неоднородности материала покрытия.

Результаты исследований, приведенные в данной главе, отражены в работах [41, 42, 48, 137, 142].

3.1. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи идеальной (абсолютно жесткой и акустически мягкой) плоской поверхности

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный упругий цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом r_1 . Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного покрытия описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты, а плотность ρ — непрерывной функцией этой координаты. Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Цилиндр с покрытием находится вблизи плоской поверхности Γ , которая является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Ось цилиндра параллельна плоскости Γ и отстоит от нее на расстоянии d .

Пусть из внешнего полупространства на тело под произвольным углом падает плоская гармоническая звуковая волна с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, где ω — круговая частота; t — время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

При рассеянии звука цилиндром, находящимся вблизи звукоотражающей границы, возникают многократные переотражения между телом и плоскостью, так что близко расположенная

подстилающая поверхность оказывает существенное влияние на рассеяние звука цилиндром. Определим акустическое поле, рассеянное цилиндром с покрытием в присутствии плоскости.

Уравнения волновых полей. В рассматриваемой постановке задача является трехмерной. Так как подстилающая плоскость полагается идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой), то решение поставленной задачи можно найти методом мнимых источников. Решение задачи проведем, используя подход, примененный в [127, 128]. Согласно методу мнимых источников исключим плоскость Γ , вводя в рассмотрение второй цилиндр, являющийся зеркальным отражением исходного рассеивателя, и вторую плоскую волну, распространяющуюся в направлении волнового вектора \mathbf{k}_2 [128]. Причем вектор \mathbf{k}_2 является зеркальным отражением волнового вектора \mathbf{k}_1 падающей плоской звуковой волны относительно плоскости Γ . В результате исходная задача сводится к задаче рассеяния двух плоских волн на двух идентичных цилиндрах, находящихся в безграничном пространстве, заполненном идеальной жидкостью [127].

Введём три одинаково ориентированные прямоугольные декартовы системы координат: основную (x, y, z) , связанную с плоскостью Γ , и две локальных (x_{+1}, y_{+1}, z_{+1}) и (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) , связанные с действительным и фиктивным цилиндрами соответственно (рис. 3.1.1). Плоскость xz совмещена с плоскостью Γ , координатные оси z_{+1} и z_{-1} совпадают с осями вращения первого и второго цилиндров соответственно, координатные оси y_{+1} и y_{-1} совпадают с осью y . Свяжем прямоугольные системы координат (x, y, z) , (x_{+1}, y_{+1}, z_{+1}) , (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) с цилиндрическими системами координат (r, φ, z) , $(r_{+1}, \varphi_{+1}, z_{+1})$, $(r_{-1}, \varphi_{-1}, z_{-1})$. Отметим, что $z = z_q$ ($q = \pm 1$). В локальных цилиндрических координатах уравнения внешней и внутренней поверхностей покрытия q -го цилиндра имеют вид $r_q = r_1$ и $r_q = r_0$ ($q = \pm 1$).

Потенциал скорости падающей волны, распространяющейся в направлении волнового вектора \mathbf{k}_1 , в основной системе координат имеет вид

$$\Psi_{01} = A \exp [i (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{R})],$$

где A – амплитуда волны; $\mathbf{k}_1 = (k \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k \sin \theta_0 \sin \varphi_0, k \cos \theta_0)$; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ – радиус-вектор; θ_0 и φ_0 – полярный и азимутальный углы падения плоской волны.

Чтобы граничные условия на плоскости Γ (при $y = 0$) удовлетворялись автоматически, потенциал скорости второй падающей плоской волны должен быть равен [128]

$$\Psi_{02} = A \exp [i (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{R})],$$

если плоскость Γ жесткая, и

$$\Psi_{02} = -A \exp [i (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{R})],$$

если плоскость Γ мягкая. При этом $\mathbf{k}_2 = (k \sin \theta_0 \cos \varphi_0, -k \sin \theta_0 \sin \varphi_0, k \cos \theta_0)$.

С учетом того, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_q + \mathbf{R}_{Oq}$ ($q = \pm 1$), где \mathbf{R}_q – радиус-вектор точки наблюдения в q -ой локальной системе координат; $\mathbf{R}_{Oq} = (0, dq, 0)$ – радиус-вектор, соединяющий точку

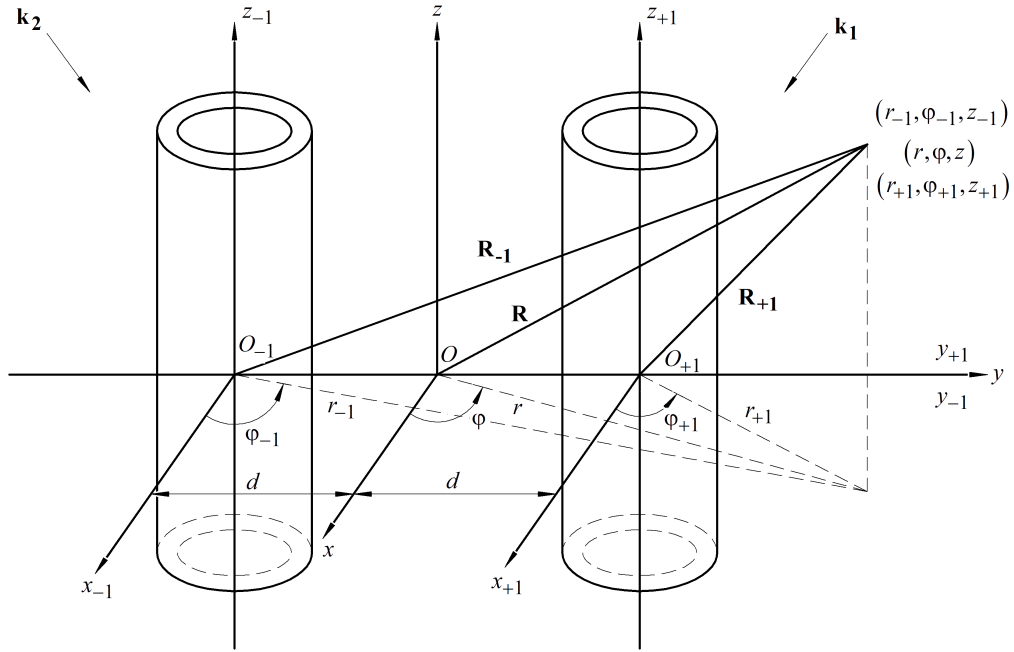


Рис. 3.1.1. Геометрия задачи 3.1

O с точкой O_q , потенциалы скорости падающих плоских волн в локальных цилиндрических координатах представляются в виде разложений [55]

$$\Psi_{01}(r_q, \varphi_q, z_q) = A e^{i\beta d q \sin \varphi_0} e^{i\alpha z_q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r_q) e^{in(\varphi_q - \varphi_0)}, \quad (3.1.1)$$

$$\Psi_{02}(r_q, \varphi_q, z_q) = \pm A e^{-i\beta d q \sin \varphi_0} e^{i\alpha z_q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r_q) e^{in(\varphi_q + \varphi_0)}, \quad (3.1.2)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$; $\beta = k \sin \theta_0$.

Распространение гармонических звуковых волн в идеальной жидкости описывается уравнением Гельмгольца.

В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля будет равен

$$\Psi = \Psi_{01} + \Psi_{02} + \Psi_{S1} + \Psi_{S2}, \quad (3.1.3)$$

где Ψ_{S1} и Ψ_{S2} – потенциалы скорости рассеянных двумя цилиндрами первой и второй плоских волн соответственно.

Потенциал скорости волны, рассеянной цилиндром в присутствии подстилающей плоской поверхности, определяется выражением

$$\Psi_S = \Psi_{02} + \Psi_{S1} + \Psi_{S2}. \quad (3.1.4)$$

Потенциалы Ψ_{Sj} представим в виде суммы двух слагаемых

$$\Psi_{Sj} = \sum_{q=\pm 1} \Psi_{Sj}^{(q)} \quad (j = 1, 2), \quad (3.1.5)$$

каждое из которых представляет собой потенциал скорости волны, рассеянной q -ым цилиндром при воздействии j -ой плоской волны.

Функции $\Psi_{S_j}^{(q)}$ являются решениями уравнений Гельмгольца в локальных цилиндрических координатах и должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности. Эти функции будем искать в виде

$$\Psi_{S_j}^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q) = e^{i\alpha z_q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{jn}^{(q)} H_n(\beta r_q) e^{in(\varphi_q - \varphi_{0j})} \quad (q = \pm 1, \quad j = 1, 2), \quad (3.1.6)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля порядка n ; $\varphi_{0j} = (2j - 3)\varphi_0$.

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение упругих волн в однородных упругих цилиндрах (действительном и мнимом).

Представим вектор смещения $\mathbf{u}_{0j}^{(q)}$ частиц упругого изотропного однородного q -го цилиндра при воздействии j -ой плоской волны ($j = 1, 2$) в виде

$$\mathbf{u}_{0j}^{(q)} = \text{grad } F_j^{(q)} + \text{rot } \Phi_j^{(q)},$$

где $F_j^{(q)}$ и $\Phi_j^{(q)}$ – скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца (1.2.28) и (1.2.29) соответственно.

Представим вектор $\Phi_j^{(q)}$ в виде

$$\Phi_j^{(q)} = \text{rot} \left(W_j^{(q)} \cdot \mathbf{e}_{z_q} \right) + k_\tau M_j^{(q)} \cdot \mathbf{e}_{z_q},$$

где $W_j^{(q)}$ и $M_j^{(q)}$ – скалярные функции пространственных координат r_q, φ_q, z_q ; \mathbf{e}_{z_q} – единичный вектор оси z_q .

Тогда векторное уравнение относительно функции $\Phi_j^{(q)}$ сведется к двум скалярным уравнениям Гельмгольца относительно функций $W_j^{(q)}$ и $M_j^{(q)}$

$$\Delta W_j^{(q)} + k_\tau^2 W_j^{(q)} = 0, \quad \Delta M_j^{(q)} + k_\tau^2 M_j^{(q)} = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции $F_j^{(q)}, L_j^{(q)}, M_j^{(q)}$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} F_j^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q) &= e^{i\alpha z_q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{jn}^{(q)} J_n(k_1 r_q) e^{in(\varphi_q - \varphi_{0j})}, \quad (q = \pm 1, \quad j = 1, 2), \\ W_j^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q) &= e^{i\alpha z_q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{jn}^{(q)} J_n(k_2 r_q) e^{in(\varphi_q - \varphi_{0j})}, \quad (q = \pm 1, \quad j = 1, 2), \\ M_j^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q) &= e^{i\alpha z_q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{jn}^{(q)} J_n(k_2 r_q) e^{in(\varphi_q - \varphi_{0j})}, \quad (q = \pm 1, \quad j = 1, 2), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

где $k_1 = \sqrt{k_l^2 - \alpha^2}$, $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - \alpha^2}$.

Волновые поля в неоднородных упругих покрытиях цилиндров описываются системой общих уравнений движения упругой среды (1.2.25), которые записываются в локальной q -ой

цилиндрической системе координат r_q, φ_q, z_q для q -ого цилиндра, находящегося под действием j -ой плоской волны. В произвольной ортогональной системе координат такую систему можно записать в виде

$$\nabla^m \sigma_{imj}^{(q)} = -\rho \omega u_{ij}^{(q)}, \quad (3.1.8)$$

где индексы q и j показывают к какому цилиндру и какой волне соответственно относится система (3.1.8).

Используя соотношения (1.2.24), связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами вектора смещения, запишем уравнения (3.1.8) через компоненты вектора смещения в локальных цилиндрических координатах.

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(q)}$ в неоднородном упругом покрытии q -го цилиндра будем искать в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} u_r^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q) &= e^{i\alpha z_q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}^{(q)}(r_q) e^{in(\varphi_q - \varphi_{0j})}, \\ u_\varphi^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q) &= e^{i\alpha z_q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}^{(q)}(r_q) e^{in(\varphi_q - \varphi_{0j})}, \\ u_z^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q) &= e^{i\alpha z_q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{3n}^{(q)}(r_q) e^{in(\varphi_q - \varphi_{0j})}. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Здесь и далее индекс j ($j = 1, 2$), показывающий под воздействием какой плоской волны происходит деформация в покрытии, опущен для упрощения записи.

Подставляя разложения (3.1.9) в уравнения (3.1.8), записанные через функции $u_r^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q)$, $u_\varphi^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q)$, $u_z^{(q)}(r_q, \varphi_q, z_q)$, получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{in}^{(q)}(r_q)$ ($i = 1, 2, 3$) для каждого n :

$$\widehat{\mathbf{A}}_n^{(q)} \mathbf{U}_n''^{(q)} + \widehat{\mathbf{B}}_n^{(q)} \mathbf{U}_n'^{(q)} + \widehat{\mathbf{C}}_n^{(q)} \mathbf{U}_n^{(q)} = 0, \quad (q = \pm 1, \quad j = 1, 2), \quad (3.1.10)$$

где $\mathbf{U}_n^{(q)} = \left(U_{1n}^{(q)}(r_q), U_{2n}^{(q)}(r_q), U_{3n}^{(q)}(r_q) \right)^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_n^{(q)} = \left(a_{npm}^{(q)} \right)_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{B}}_n^{(q)} = \left(b_{npm}^{(q)} \right)_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{C}}_n^{(q)} = \left(c_{npm}^{(q)} \right)_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с компонентами:

$$\begin{aligned} a_{n11}^{(q)} &= (\lambda + 2\mu) r_q^2, \quad a_{n22}^{(q)} = a_{n33}^{(q)} = \mu r_q^2, \quad a_{npm}^{(q)} = 0, \quad (p \neq m), \\ b_{n11}^{(q)} &= (\lambda' + 2\mu') r_q^2 + (\lambda + 2\mu) r_q, \quad b_{n12}^{(q)} = in(\lambda + \mu) r_q, \quad b_{n13}^{(q)} = i\alpha(\lambda + \mu) r_q^2, \\ b_{n21}^{(q)} &= in(\lambda + \mu) r_q, \quad b_{n22}^{(q)} = \mu' r_q^2 + \mu r_q, \quad b_{n23}^{(q)} = 0, \quad b_{n31}^{(q)} = i\alpha(\lambda + \mu) r_q^2, \quad b_{n32}^{(q)} = 0, \\ b_{n33}^{(q)} &= \mu' r_q^2 + \mu r_q, \quad c_{n11}^{(q)} = \lambda' r_q - \lambda - (n^2 + 2 + \alpha^2 r_q^2) \mu + \omega \rho r_q^2, \\ c_{n12}^{(q)} &= in(\lambda' r_q - \lambda - 3\mu), \quad c_{n13}^{(q)} = i\alpha \lambda' r_q^2, \quad c_{n21}^{(q)} = in(\mu' r_q + \lambda + 3\mu), \\ c_{n22}^{(q)} &= -\mu' r_q - n^2 \lambda - (2n^2 + \alpha^2 r_q^2 + 1) \mu + \omega^2 \rho r_q^2, \quad c_{n23}^{(q)} = c_{n32}^{(q)} = -n\alpha(\lambda + \mu) r_q, \\ c_{n31}^{(q)} &= i\alpha(\mu' r_q^2 + (\lambda + \mu) r_q), \quad c_{n33}^{(q)} = -(n^2 + 2\alpha^2 r_q^2) \mu - \alpha^2 \lambda r_q^2 + \omega^2 \rho r_q^2. \end{aligned}$$

Искомые функции $\Psi_{Sj}^{(q)}$, $F_j^{(q)}$, $W_j^{(q)}$, $M_j^{(q)}$, $u_r^{(q)}$, $u_\varphi^{(q)}$, $u_z^{(q)}$ должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия q -го цилиндра имеют вид (1.2.30)

$$r_q = r_1 : \quad -i\omega u_r^{(q)} = v_r, \quad \sigma_{rr}^{(q)} = -p, \quad \sigma_{r\varphi}^{(q)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(q)} = 0. \quad (3.1.11)$$

Граничные условия на внутренней поверхности покрытия q -го цилиндра записываются как (1.2.31)

$$r_q = r_0 : \quad u_r^{(q)} = u_{0r}^{(q)}, \quad u_\varphi^{(q)} = u_{0\varphi}^{(q)}, \quad u_z^{(q)} = u_{0z}^{(q)}, \quad \sigma_{rr}^{(q)} = \sigma_{0rr}^{(q)}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(q)} = \sigma_{0r\varphi}^{(q)}, \quad \sigma_{rz}^{(q)} = \sigma_{0rz}^{(q)}, \quad (3.1.12)$$

где $\sigma_{0pm}^{(q)}$ — компоненты тензора напряжений в однородном q -ом цилиндре (индекс j опущен).

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}_{0j}^{(q)}$ и тензора напряжений $\sigma_{0pm}^{(q)}$ в однородном упругом q -ом цилиндре запишем через функции $F_j^{(q)}$, $W_j^{(q)}$, $M_j^{(q)}$, а компоненты тензора напряжений в неоднородном покрытии q -го цилиндра $\sigma_{pm}^{(q)}$ — через компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(q)}$.

Для нахождения коэффициентов $A_{jn}^{(q)}$, $B_{jn}^{(q)}$, $C_{jn}^{(q)}$, $D_{jn}^{(q)}$ разложений (3.1.6), (3.1.7) и функций $U_{1n}^{(q)}(r_q)$, $U_{2n}^{(q)}(r_q)$, $U_{3n}^{(q)}(r_q)$ в разложениях (3.1.9) из граничных условий воспользуемся теоремой сложения для волновых цилиндрических функций [55], которая позволяет волновую функцию $H_n(\beta r_q) e^{in\varphi_q}$, записанную в q -ой локальной системе координат, выразить через волновые функции, но записанные уже в другой, $(-q)$ -ой системе координат.

Теорема сложения имеет вид:

$$H_n(\beta r_q) e^{in\varphi_q} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n-m}(2\beta d) J_m(\beta r_{-q}) e^{i(n-m)\varphi_{q,-q} + im\varphi_{-q}}, \quad 2d > r_{-q}. \quad (3.1.13)$$

Здесь через $\varphi_{q,-q}$ обозначена полярная координата начала O_{-q} $(-q)$ -ой локальной системы координат в q -ой локальной системе координат с началом в O_q . При этом $\varphi_{q,-q} = \pi(2+q)/2$.

С помощью теоремы сложения для волновых цилиндрических функций из первых двух граничных условий (3.1.11) получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (при $i = 1$ и $i = 2$) относительно неизвестных коэффициентов $A_{jn}^{(q)}$ ($q = \pm 1$):

$$A_{jn}^{(q)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{inm}^{(-q,q)} A_{jm}^{(q)} = S_{in}^{(q)}, \quad (i = 1, 2; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad q = \pm 1), \quad (3.1.14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{1nm}^{(-q,q)} &= \frac{J'_n(\beta r_1)}{H'_n(\beta r_1)} H_{m-n}(2\beta d) e^{i(m-n)\varphi_{-q,q}}, \quad \alpha_{2nm}^{(-q,q)} = \frac{J_n(\beta r_1)}{H_n(\beta r_1)} H_{m-n}(2\beta d) e^{i(m-n)\varphi_{-q,q}}, \\ S_{1n}^{(q)} &= -Ai^n \frac{J'_n(\beta r_1)}{H'_n(\beta r_1)} e^{i\beta d q \sin \varphi_{0j}} - \frac{i\omega U_{1n}^{(q)}(r_1)}{\beta H'_n(\beta r_1)}, \quad S_{2n}^{(q)} = -Ai^n \frac{J_n(\beta r_1)}{H_n(\beta r_1)} e^{i\beta d q \sin \varphi_{0j}} + \\ &+ \frac{i}{\rho_1 \omega H_n(\beta r_1)} \left((\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U_{1n}^{(q)}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} (U_{1n}^{(q)}(r_1) + in U_{2n}^{(q)}(r_1)) + \right. \\ &\left. + i\alpha \lambda(r_1) U_{3n}^{(q)}(r_1) \right), \quad \varphi_{-q,q} = \pi(2-q)/2, \end{aligned}$$

штрихи означают дифференцирование по аргументу функций.

Для решения бесконечных систем линейных уравнений (3.1.14) воспользуемся методом усечения [60]. Как и в [127] методом обратной матрицы найдем решения двух усеченных систем (3.1.14) при $i = 1$ и $i = 2$, выбрав порядок усечения N . Получим два выражения для коэффициентов $A_{jn}^{(q)}$, записанных через значения функций $U_{1n}^{(q)}(r_q)$, $U_{2n}^{(q)}(r_q)$, $U_{3n}^{(q)}(r_q)$ на внешней поверхности покрытия (при $r_q = r_1$). Приравнивая между собой эти выражения, получаем краевое условие при $r_q = r_1$ для нахождения решения системы дифференциальных уравнений (3.1.10).

Другие краевые условия, которым должна удовлетворять система (3.1.10) при $r_q = r_1$, находим из третьего и четвертого граничного условия (3.1.11)

$$r_1 U_{2n}^{\prime(q)}(r_1) + in U_{1n}^{(q)}(r_1) - U_{2n}^{(q)}(r_1) = 0, \quad U_{3n}^{\prime(q)}(r_1) + i\alpha U_{1n}^{(q)}(r_1) = 0. \quad (3.1.15)$$

Из первых трех граничных условий (3.1.12), заключающихся в равенстве смещений частиц взаимодействующих упругих сред, выразим неизвестные коэффициенты $B_{jn}^{(q)}$, $C_{jn}^{(q)}$, $D_{jn}^{(q)}$ через значения функций $U_{1n}^{(q)}(r_q)$, $U_{2n}^{(q)}(r_q)$, $U_{3n}^{(q)}(r_q)$ на внутренней поверхности покрытия (при $r_q = r_0$)

$$\mathbf{K}_n^{(q)} = \left([\mathbf{T}_n^{(q)}]^{-1} \mathbf{U}_n^{(q)} \right)_{r_q=r_0}, \quad (q = \pm 1),$$

где $\mathbf{K}_n^{(q)} = \left(B_{jn}^{(q)}, C_{jn}^{(q)}, D_{jn}^{(q)} \right)^T$ – вектор коэффициентов; $\mathbf{T}_n^{(q)} = \left(t_{npm}^{(q)} \right)_{3 \times 3}$ – матрица третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} t_{n11}^{(q)} &= k_1 J_n'(k_1 r_0), & t_{n12}^{(q)} &= i\alpha k_2 J_n'(k_2 r_0), & t_{n13}^{(q)} &= ink_\tau J_n(k_2 r_0) / r_0, \\ t_{n21}^{(q)} &= in J_n(k_1 r_0) / r_0, & t_{n22}^{(q)} &= -\alpha n J_n(k_2 r_0) / r_0, & t_{n23}^{(q)} &= -k_\tau k_2 J_n'(k_2 r_0), \\ t_{n31}^{(q)} &= i\alpha J_n(k_1 r_0), & t_{n32}^{(q)} &= (k_\tau^2 - \alpha^2) J_n(k_2 r_0), & t_{n33}^{(q)} &= 0. \end{aligned}$$

В результате преобразований, аналогичных приведенным в [142], из (3.1.12) получаем еще три краевых условия, которым должна удовлетворять система (3.1.10) при $r_q = r_0$

$$\left(\frac{1}{r_q^2} \widehat{\mathbf{A}}_n^{(q)} \mathbf{U}_n^{(q)} + \mathbf{Y}_n^{(q)} \mathbf{U}_n^{(q)} \right)_{r_q=r_0} = 0. \quad (3.1.16)$$

где $\mathbf{Y}_n^{(q)} = \mathbf{F}_n^{(q)} - \mathbf{G}_n^{(q)} [\mathbf{T}_n^{(q)}]^{-1}$; $\mathbf{F}_n^{(q)} = \left(f_{npm}^{(q)} \right)_{3 \times 3}$, $\mathbf{G}_n^{(q)} = \left(\gamma_{npm}^{(q)} \right)_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} f_{n11}^{(q)} &= \lambda(r_0) / r_0, & f_{n12}^{(q)} &= in\lambda(r_0) / r_0, & f_{n13}^{(q)} &= i\alpha\lambda(r_0), \\ f_{n21}^{(q)} &= in\mu(r_0) / r_0, & f_{n22}^{(q)} &= -\mu(r_0) / r_0, & f_{n23}^{(q)} &= f_{n32}^{(q)} = f_{n33}^{(q)} = 0, & f_{n31}^{(q)} &= i\alpha\mu(r_0), \\ \gamma_{n11}^{(q)} &= -\lambda_0 k_l^2 J_n(k_1 r_0) + 2\mu_0 k_1^2 J_n''(k_1 r_0), & \gamma_{n12}^{(q)} &= 2i\alpha\mu_0 k_2^2 J_n''(k_2 r_0), \\ \gamma_{n13}^{(q)} &= 2in\mu_0 k_\tau (k_2 r_0 J_n'(k_2 r_0) - J_n(k_2 r_0)) / r_0^2, & \gamma_{n21}^{(q)} &= 2in\mu_0 (k_1 r_0 J_n'(k_1 r_0) - J_n(k_1 r_0)) / r_0^2, \\ \gamma_{n22}^{(q)} &= -2\alpha n\mu_0 (k_2 r_0 J_n'(k_2 r_0) - J_n(k_2 r_0)) / r_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{n23}^{(q)} &= -\mu_0 k_\tau (k_2^2 r_0^2 J_n''(k_2 r_0) - k_2 r_0 J_n'(k_2 r_0) + n^2 J_n(k_2 r_0)) / r_0^2, \\ \gamma_{n31}^{(q)} &= 2i\alpha\mu_0 k_1 J_n'(k_1 r_0), \quad \gamma_{n32}^{(q)} = \mu_0 k_2 (k_\tau^2 - 2\alpha^2) J_n'(k_2 r_0), \quad \gamma_{n33}^{(q)} = -\alpha n \mu_0 k_\tau J_n(k_2 r_0) / r_0.\end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения функций $U_{1n}^{(q)}(r_q)$, $U_{2n}^{(q)}(r_q)$, $U_{3n}^{(q)}(r_q)$ ($q = \pm 1$) для всех n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$) необходимо найти решение системы $6(2N + 1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1.10), удовлетворяющих полученным выше краевым условиям. Построенная краевая задача может быть решена каким-либо численным или аналитическим методом. Затем находим неизвестные коэффициенты $A_{jn}^{(q)}$, $B_{jn}^{(q)}$, $C_{jn}^{(q)}$ и $D_{jn}^{(q)}$ разложений (3.1.6), (3.1.7) ($q = \pm 1$; $j = 1, 2$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$).

Отметим, что, используя полученное решение Ψ_{S1} дифракционной задачи для случая, когда падающая плоская волна имеет потенциал скорости Ψ_{01} , легко записать решение задачи дифракции плоской волны с потенциалом скорости Ψ_{02} . Для этого достаточно заменить компоненты волнового вектора \mathbf{k}_1 на компоненты вектора \mathbf{k}_2 , если подстилающая плоскость является акустически жесткой, и дополнительно заменить амплитуду A на $-A$, если плоскость – акустически мягкая.

В результате на основании (3.1.4)–(3.1.6) получаем аналитическое описание акустического поля, рассеянного цилиндром с покрытием в присутствии плоскости

$$\Psi_S = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\pm A e^{-i\beta d q \sin \varphi_0} i^n J_n(\beta r) e^{in(\varphi + \varphi_0)} + \sum_{j=1}^2 \sum_{q=\pm 1} A_{jn}^{(q)} H_n(\beta r_q) e^{in(\varphi_q + \varphi_{0j})} \right]. \quad (3.1.17)$$

Следует отметить, что выражение (3.1.17) содержит цилиндрические волновые функции $H_n(\beta r_q) e^{in\varphi_q}$, записанные в локальных системах координат (r_q, φ_q, z_q) ($q = \pm 1$). Для дальнейших исследований все волновые функции, входящие в (3.1.17), необходимо записать в единой системе координат. В качестве такой системы выберем цилиндрическую систему $(r_{+1}, \varphi_{+1}, z_{+1})$, связанную с исходным цилиндром. Функции $H_n(\beta r_{-1}) e^{in\varphi_{-1}}$ записываются в цилиндрической системе координат $(r_{+1}, \varphi_{+1}, z_{+1})$ с помощью теоремы сложения для цилиндрических волновых функций (3.1.13) в случае, когда $2d > r_{-q}$, или по формуле

$$H_n(\beta r_q) e^{in\varphi_q} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n-m}(\beta r_{-q}) J_m(2\beta d) e^{i(n-m)\varphi_{-q} + im\varphi_{q,-q}}, \quad (3.1.18)$$

если $2d < r_{-q}$ [55].

Численные исследования. На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты угловых и частотных характеристик безразмерной амплитуды рассеянного поля $|\Psi_S/A|$ в дальней зоне. Расчеты проводились по формуле (3.1.17) в системе координат $(r_{+1}, \varphi_{+1}, z_{+1})$ с учетом (3.1.18).

Краевая задача для системы (3.1.17), (3.1.14)–(3.1.16) решалась методом сплайн-коллокации [50]. Каждая функция $U_{1n}^{(q)}(r_q)$, $U_{2n}^{(q)}(r_q)$, $U_{3n}^{(q)}(r_q)$ ($q = \pm 1$) представлялась в виде разложения по базисным B – сплайнам.

Рассматривался алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$) радиуса $r_0 = 0.8 \text{ м}$ с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м , находящийся в полупространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c = 1485 \text{ м/с}$). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ (поливинилбутираль), так и неоднородные, механические характеристики которых менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f_2(r_q), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad r_0 \leq r_q \leq r_1.$$

Функция $f_2(r)$, задающая неоднородность материала цилиндрического слоя, определена выражением в (2.1.10).

Расстояние от оси цилиндра до плоскости $d = 3 \text{ м}$. Полагалось, что плоская звуковая волна единичной амплитуды падает на тело под углами $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = -\pi/4$.

На рисунках 3.1.2 и 3.1.3 сплошными линиями построены угловые зависимости амплитуды рассеянного акустического поля $|\Psi_S/A|$ от полярного угла φ в области жидкого полупространства, которая определяется неравенством $-\arcsin(d/r_{+1}) < \varphi < \arcsin(d/r_{+1}) + \pi$ (изменение угла против часовой стрелки), рассчитанные при $r_{+1} = 100 \text{ м}$ в плоскости $z_{+1} = 0$, для случая цилиндра с неоднородным упругим покрытием, штриховыми – для цилиндра с однородным покрытием, пунктиром – для упругого цилиндра без покрытия.

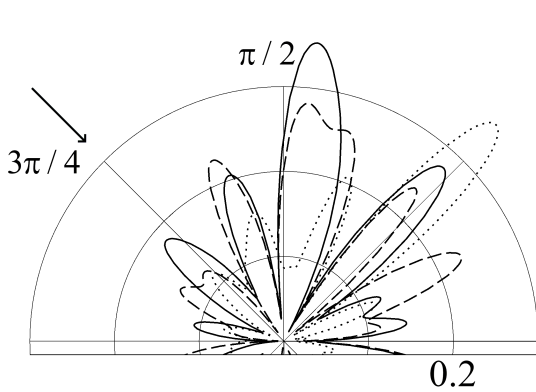


Рис. 3.1.2. Абс. жест. пов.

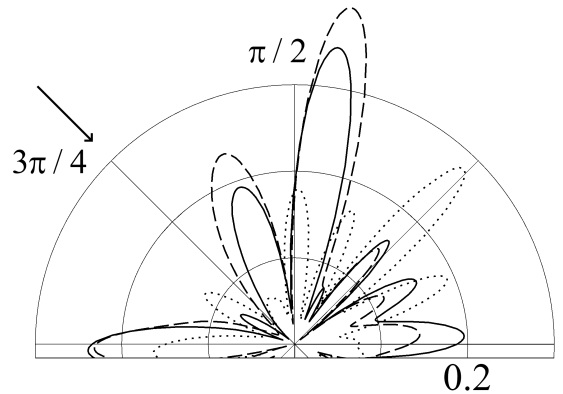


Рис. 3.1.3. Ак. мягк. пов.

На рисунке 3.1.2 показана угловая зависимость $|\Psi_S/A|$ при фиксированной частоте, соответствующей волновому размеру тела $kr_0 = 4$, для случая, когда подстилающая поверхность является абсолютно жесткой, на рисунке 3.1.3 для случая, когда поверхность акустически мягкая. Стрелки на графиках указывают направление падения плоской звуковой волны. Можно видеть, что наличие упругого покрытия оказывает значительное влияние на амплитуду рассеяния. Следует отметить, что, сравнивая попарно сплошные и штриховые кривые на рисунках 3.1.2 и 3.1.3, наблюдается относительное сохранение формы диаграмм направленности для случаев неоднородного и однородного упругих покрытий. Таким образом, выявлено существенное влияние радиально-неоднородного упругого покрытия на звукоотражающие

свойства упругого цилиндрического тела. С помощью непрерывно-неоднородных покрытий можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Заметим, что различные типы подстилающих поверхностей (абсолютно жесткая и акустически мягкая) оказывают различное влияние на рассеянное поле.

На рисунках 3.1.4 – 3.1.6 представлены частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|\Psi_S/A|$ в фиксированной точке с пространственными координатами $(r_{+1}, \varphi_{+1}, z_{+1}) = (100, \pi + \varphi_0, 0)$ от волнового размера тела kr_0 в интервале $2 \leq kr_2 \leq 4$ в случае абсолютно жесткой подстилающей поверхности, акустически мягкой поверхности и цилиндра, расположенного в безграничном пространстве, соответственно. Сплошная линия соответствует случаю упругого цилиндра с неоднородным упругим покрытием, штриховая – цилиндру с однородным покрытием, пунктирная – упругому цилиндру без покрытия.

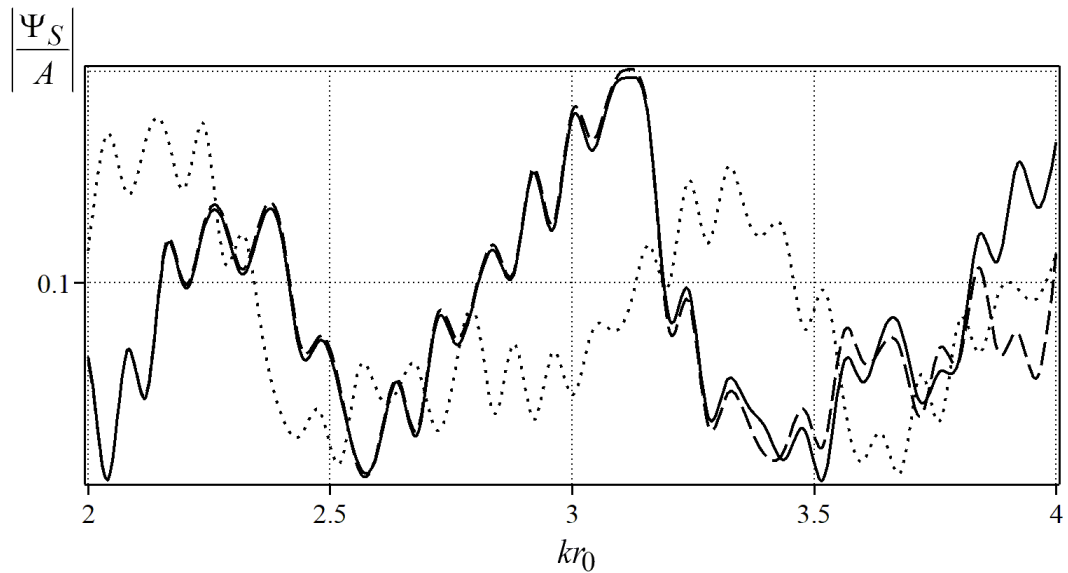


Рис. 3.1.4. Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра (поверхность абсолютно жесткая)

Из рисунков 3.1.4 – 3.1.6 можно видеть, что неоднородность материала покрытия начинает оказывать существенное влияние на рассеянное акустическое поле при $kr_0 > 3.2$ в случае абсолютно жесткой и акустически мягкой поверхности. В случае цилиндрического тела, расположенного в безграничном пространстве, влияние неоднородности начинает проявляться при значениях волнового размера $kr_0 > 3$. Небольшая разница может быть связана со слагаемым Ψ_{02} , которое входит в результирующее рассеянное поле (3.1.4) в случае присутствия ограничивающей поверхности. Величина Ψ_{02} характеризует волну, отраженную от границы, которая никак не зависит от акустических свойств цилиндрического рассеивателя. Так как в области волновых размеров $3 < kr_0 < 3.2$ влияние неоднородности для цилиндрического тела в свободном пространстве незначительно, то в случае, когда цилиндр расположен вблизи поверхности акустического полупространства, величина Ψ_{02} нивелирует влияние неоднородности цилиндрического рассеивателя. Следует отметить, что присутствие ограничивающей

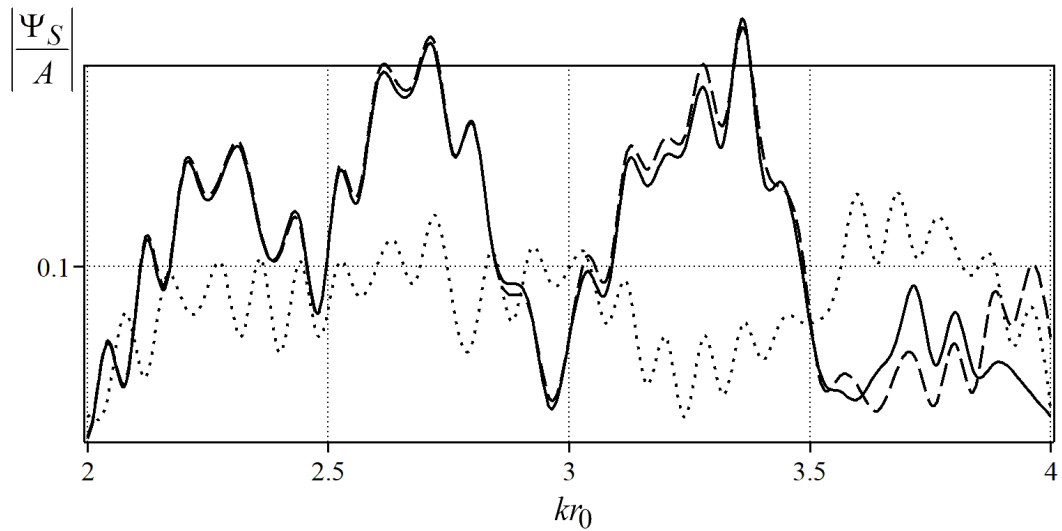


Рис. 3.1.5. Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра (поверхность акустически мягкая)

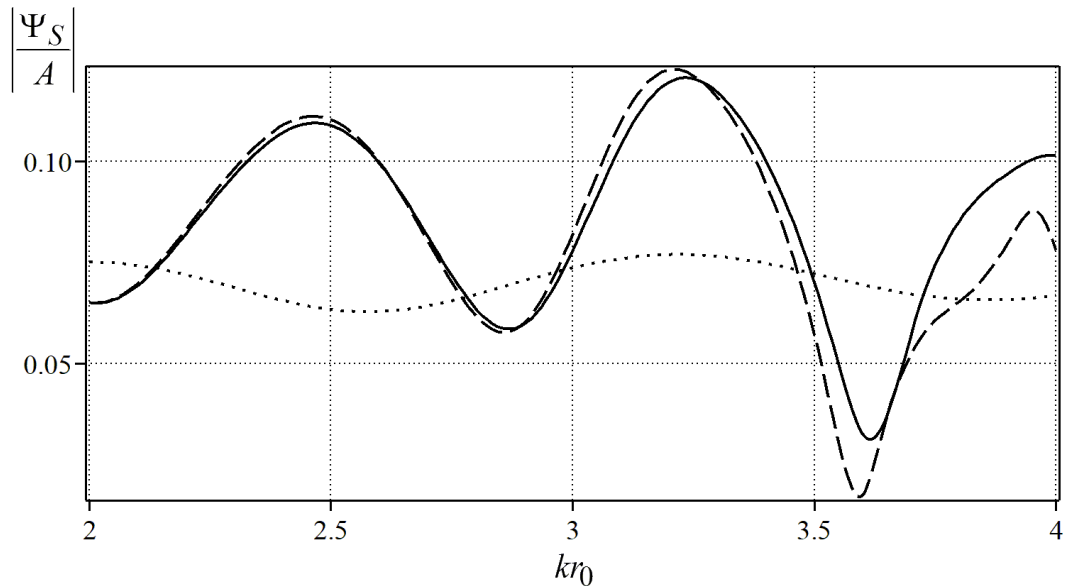


Рис. 3.1.6. Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра (цилиндр в безграничном пространстве)

поверхности вблизи цилиндрического рассеивателя, увеличивает количественную характеристику безразмерной амплитуды рассеянного поля примерно в два раза. Было проведено сравнение положений точек резонансов на рисунках в случае присутствия абсолютно жесткой и акустически мягкой поверхностей. Установлено, что положение большей части резонансных точек сохраняется со смещением не более 0.05.

3.2. Дифракция цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный однородный и изотропный упругий ци-

цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного упругого изотропного слоя, внешний радиус которого равен r_1 . Цилиндр с покрытием находится в идеальной жидкости с плотностью ρ_* и скоростью звука c , граничащей с однородным изотропным упругим полупространством с плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ_1 и μ_1 . Ось цилиндра параллельна границе упругого полупространства и отстоит от неё на расстоянии d . Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы координатная ось z совпадала с осью вращения цилиндра. С прямоугольной системой координат свяжем цилиндрическую систему координат r, φ, z .

Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r , а модули упругости материала покрытия λ и μ – дифференцируемыми функциями координаты r . В системе координат x, y, z граница упругого полупространства определяется уравнением $y = -d$ (рис. 3.2.1).

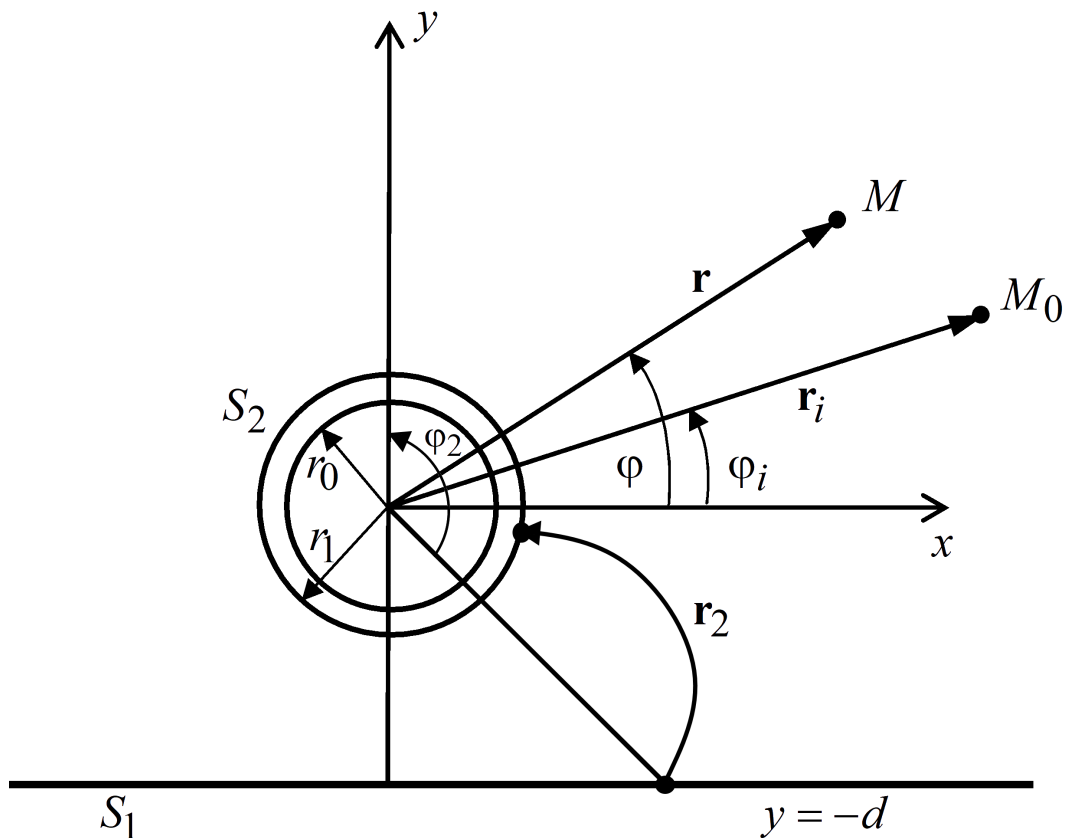


Рис. 3.2.1. Геометрия задачи 3.2

В полупространстве, заполненном идеальной жидкостью, находится линейный источник, параллельный оси z , который генерирует монохроматическую цилиндрическую звуковую волну с частотой ω и амплитудой A . Положение источника определяется точкой M_0 , имеющей цилиндрические координаты (r_i, φ_i) . Точка наблюдения M имеет координаты (r, φ) .

Определим акустическое поле в жидком полупространстве.

Уравнения волновых полей. Потенциал скорости гармонической звуковой волны, излу-

чаемой осесимметричным цилиндрическим источником в свободном пространстве, представим в виде

$$\Psi_0 = AG_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \exp(-i\omega t), \quad (3.2.1)$$

где $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{i}{4}H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|)$ – функция Грина для свободного пространства; $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; \mathbf{r} и \mathbf{r}_i – радиус-векторы точек M и M_0 ; t – время. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

Потенциал скорости полного акустического поля в жидком полупространстве будем искать в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{S_1} + \Psi_{S_2}, \quad (3.2.2)$$

где Ψ_{S_1} – потенциал скорости волны, отраженной от границы полупространства; Ψ_{S_2} – потенциал скорости рассеянной цилиндром волны (с учетом многократного переотражения между цилиндром и упругим полупространством).

Полное звуковое поле в верхнем полупространстве удовлетворяет интегральному уравнению Гельмгольца-Кирхгофа (1.2.18)

$$\Psi(\mathbf{r}) = AG(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) + \int_S \left[\Psi(\mathbf{r}_2) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_2)}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] dS. \quad (3.2.3)$$

Здесь $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ – двумерная функция Грина для уравнения Гельмгольца; $S = S_1 + S_2$, S_1 – поверхность упругого полупространства, S_2 – внешняя поверхность покрытия цилиндра. При интегрировании по поверхности S_1 точка \mathbf{r}_2 находится на поверхности полупространства и дифференцирование выполняется по внешней нормали к поверхности S_1 , а в интеграле по поверхности S_2 точка \mathbf{r}_2 находится на поверхности цилиндра и дифференцирование происходит по внешней нормали к поверхности S_2 .

Для того, чтобы в (3.2.3) исключить интегрирование по бесконечной поверхности S_1 воспользуемся функцией Грина, предложенной в [168]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) + G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2), \quad (3.2.4)$$

где

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4}H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik\xi(x - x_2) + ik\eta|y - y_2|] \frac{d\xi}{\eta}, \quad \eta = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (3.2.5)$$

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A'_1(\xi) \exp[ik\xi(x - x_2) + ik\eta(y + y_2)] \frac{d\xi}{\eta}. \quad (3.2.6)$$

Здесь $A'_1(\xi) = \exp(i2kd\eta) A_1(\xi)$, $A_1(\xi)$ – коэффициент отражения плоской волны единичной амплитуды, падающей на упругое полупространство. Коэффициент $A_1(\xi)$ находится при

решении задачи об отражении плоской волны, направление распространения которой задается горизонтальной $k\xi$ и вертикальной $-k\eta$ компонентами волнового вектора \mathbf{k} , в системе координат с началом отсчета, лежащим на границе упругого полупространства.

Функция Грина (3.2.4) удовлетворяет на поверхности раздела идеальной жидкости и упругого полупространства тем же граничным условиям что и потенциал скорости акустического поля

при $y = -d$:

$$-i\omega u_{1y} = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \sigma_{1yy} = -i\omega\rho_*G, \quad \sigma_{1xy} = 0,$$

где u_{1y} и σ_{1yy} , σ_{1xy} – нормальная компонента вектора смещения и компоненты тензора напряжений в упругом полупространстве. При таком выборе функции Грина интеграл по поверхности полупространства S_1 в (3.2.3) обращается в ноль, и остается только интеграл по поверхности цилиндра S_2 .

При замене переменной $\xi = \sin\theta$ переходим от $A_1(\xi)$ к коэффициенту отражения плоской волны, падающей под углом θ на границу упругого полупространства, $A_1(\theta)$. Задача об отражении плоской звуковой волны от упругого полупространства решена в [32]. Коэффициент отражения имеет вид

$$A_1(\theta) = \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}, \quad (3.2.7)$$

где

$$d_1 = k_y [\lambda_1 k_{1l}^2 (k_{1\tau}^2 - 2k_x^2) + 2\mu_1 k_{1ly} (2k_x^2 k_{1\tau y} + k_{1ly} k_{1\tau}^2 - 2k_x^2 k_{1ly})],$$

$$d_2 = k_{1ly} k_{1\tau}^2 \omega^2 \rho_*.$$

Здесь $k_x = k \sin\theta$, $k_y = k \cos\theta$, $k_{1l} = \omega/c_{1l}$ и $k_{1\tau} = \omega/c_{1\tau}$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн в упругом полупространстве; $c_{1l} = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$ и $c_{1\tau} = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ – скорости продольных и поперечных волн; $k_{1ly} = \sqrt{k_{1l}^2 - k_x^2}$, $k_{1\tau y} = \sqrt{k_{1\tau}^2 - k_x^2}$.

Используя теорему сложения [55] для цилиндрических волновых функций, представим $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ в виде разложения

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi - \varphi_2)} \begin{cases} J_n(kr) H_n(kr_2), & r < r_2; \\ J_n(kr_2) H_n(kr), & r > r_2, \end{cases} \quad (3.2.8)$$

где $J_n(x)$ и $H_n(x)$ – цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n соответственно.

В (3.2.6) сделаем замену переменных $\xi = \sin\theta$, $\eta = \cos\theta$ и перейдем к цилиндрической системе координат $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $x_2 = r_2 \cos\varphi_2$, $y_2 = r_2 \sin\varphi_2$. Тогда G_1 примет вид

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4\pi} \int_{\Gamma} A_1'(\theta) \exp[ikr \sin(\varphi + \theta)] \exp[-ikr_2 \sin(-\varphi_2 + \theta)] d\theta, \quad (3.2.9)$$

где Γ – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости θ (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$).

Используя разложение [55]

$$\exp(\pm ikr \sin \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^m J_m(kr) \exp(im\varphi), \quad (3.2.10)$$

из (3.2.9) получаем

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_2) \exp(-im\varphi_2) g_{n+m}, \quad (3.2.11)$$

где

$$g_l = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_1(\theta) \exp[i(2kd \cos \theta + l\theta)] d\theta. \quad (3.2.12)$$

Определим потенциал скорости полного акустического поля на внешней поверхности покрытия цилиндра S_2 . Представим его, а также нормальную составляющую скорости частиц жидкости на поверхности S_2 в виде разложений в ряды Фурье

$$\Psi|_{r=r_1} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} p_q \exp(iq\varphi), \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{r=r_1} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} v_q \exp(iq\varphi), \quad (3.2.14)$$

где p_q и v_q – коэффициенты, подлежащие определению.

В уравнении (3.2.3) устремим точку наблюдения на поверхность S_2 и учтем, что при выборе функции Грина в виде (3.2.4) достаточно ограничиться интегрированием по поверхности S_2 . Подставим в левую часть (3.2.3) разложение (3.2.13), а в первое слагаемое правой части (3.2.3) – функцию Грина в виде суммы (3.2.4), составленной из выражений (3.2.8) и (3.2.11), в которых заменим r_2, φ_2 на r_i, φ_i . Далее подставим разложения (3.2.13), (3.2.14) и функцию Грина (сумма ((3.2.8)) и (3.2.11)) в подынтегральное выражение уравнения (3.2.3). При этом дифференцирование по нормали будем выполнять по переменной r_2 . При выполнении дифференцирования выражения (3.2.8) следует выбрать нижнюю строчку в формуле (3.2.8). После проведения указанных операций следует положить $r = r_2 = r_1$.

Осуществив интегрирование по поверхности цилиндра ($dS_2 = r_1 d\varphi_2, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$) с учетом ортогональности экспоненциальных множителей и используя выражение для вронскиана [83]

$$J_n(kr_1) H'_n(kr_1) - J'_n(kr_1) H_n(kr_1) = 2i/(\pi kr_1),$$

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов p_q, v_q

$$p_q + \alpha_q v_q + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\beta_{qn}^{(1)} p_n + \beta_{qn}^{(2)} v_n) = X_q, \quad q = -\infty, \dots, \infty, \quad (3.2.15)$$

где

$$\alpha_q = -\frac{H_q(kr_1)}{kH'_q(kr_1)}, \quad \beta_{qn}^{(1)} = (-1)^n \frac{J'_n(kr_1)}{H'_q(kr_1)} g_{n+q}, \quad \beta_{qn}^{(2)} = (-1)^{n+1} \frac{J_n(kr_1)}{kH'_q(kr_1)} g_{n+q},$$

$$X_q = -\frac{A}{2\pi k r_1 H'_q(k r_1)} \left[H_q(k r_i) \exp(-i q \varphi_i) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k r_i) \exp(-i m \varphi_i) g_{m+q} \right].$$

Рассмотрим вычисление коэффициентов g_l , определяемых выражением (3.2.12). Интеграл (3.2.12) разобьем на три интеграла по участкам $(-\pi/2 + i\infty, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi/2 - i\infty)$. Выполним замену переменных $\theta = -\pi/2 + i\gamma_1$ в первом и $\theta = \pi/2 - i\gamma_2$ в третьем интегралах. В результате получаем

$$g_l = (I_{1l} + I_{2l} + I_{3l}) / \pi,$$

где

$$I_{1l} = (-i)^{l+1} \int_0^{\infty} A_1(\gamma_1) \exp(-2kd \cdot \text{sh } \gamma_1) \exp(-l\gamma_1) d\gamma_1,$$

$$I_{2l} = 2 \int_0^{\pi/2} A_1(\theta) \exp(i2kd \cos \theta) \cos l\theta d\theta,$$

$$I_{3l} = i^{l-1} \int_0^{\infty} A_1(\gamma_2) \exp(-2kd \cdot \text{sh } \gamma_2) \exp(l\gamma_2) d\gamma_2.$$

Здесь $A_1(\gamma_j)$ определяется по формуле (3.2.7), в которой следует положить $k_x = (-1)^j k \text{ch } \gamma_j$, $k_y = ik \text{sh } \gamma_j$, ($j = 1, 2$).

Теперь воспользуемся результатами раздела 2.1 [139].

Согласно разделу 2.1 радиальная u_r и угловая u_φ компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом покрытии представляются в виде рядов Фурье

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{1q}(r) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)], \quad u_\varphi(r, \varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{2q}(r) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)], \quad (3.2.16)$$

где функции $U_{1q}(r)$, $U_{2q}(r)$ для каждого q являются решением следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\widehat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}_q'' + \widehat{\mathbf{B}}_q \mathbf{U}_q' + \widehat{\mathbf{C}}_q \mathbf{U}_q = 0, \quad (3.2.17)$$

где $\mathbf{U}_q = (U_{1q}(r), U_{2q}(r))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_q$, $\widehat{\mathbf{B}}_q$, $\widehat{\mathbf{C}}_q$ – матрицы второго порядка с элементами, приведенными в разделе 2.1.

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц неоднородной упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательного напряжения при $r = r_1$:

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad (3.2.18)$$

где u_r и v_r – нормальные компоненты векторов смещения и скорости; σ_{rr} и $\sigma_{r\varphi}$ – компоненты тензора напряжений в упругом неоднородном покрытии.

Используя обобщенный закон Гука (1.2.23) с учетом (3.2.17), будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[(\lambda + 2\mu) U'_{1q}(r) + \frac{\lambda}{r} (U_{1q}(r) + iqU_{2q}(r)) \right] \exp[iq(\varphi - \varphi_i)], \\ \sigma_{r\varphi} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu \left[\frac{iq}{r} U_{1q}(r) + U'_{2q}(r) - \frac{U_{2q}(r)}{r} \right] \exp[iq(\varphi - \varphi_i)].\end{aligned}\quad (3.2.19)$$

Подставляя (3.2.13), (3.2.14), (3.2.16) и (3.2.19) в первые два граничных условия (18), получаем

$$\begin{aligned}v_q &= -i\omega U_{1q}(r_1) \exp(-iq\varphi_i), \\ p_q &= \frac{i}{\rho_*\omega} \left[(\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1q}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} (U_{1q}(r_1) + iqU_{2q}(r_1)) \right] \exp(-iq\varphi_i).\end{aligned}\quad (3.2.20)$$

Подставляя выражения (3.2.20) в систему (3.2.15), получаем краевое условие при $r = r_1$ для нахождения частного решения системы (3.2.17)

$$\begin{aligned}& F_{1q} U'_{1q}(r_1) + F_{2q}^{(1)} U_{1q}(r_1) + F_{3q} U_{2q}(r_1) + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_{1n} U'_{1n}(r_1) + F_{2n}^{(2)} U_{1n}(r_1) + F_{3n} U_{2n}(r_1) \right] F_{4qn} = X_q, \\ & F_{1q} = \frac{i}{\rho_*\omega} [\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)] \exp(-iq\varphi_i), \\ & F_{2q}^{(j)} = \frac{i}{\rho_*\omega} \left[\frac{\lambda(r_1)}{r_1} + \omega^2 \rho_* \frac{Z_q^{(j)}(kr_1)}{kZ_q^{(j)'}(kr_1)} \right] \exp(-iq\varphi_i), \quad F_{3q} = -\frac{q\lambda(r_1)}{r_1\rho_*\omega} \exp(-iq\varphi_i), \\ & F_{4qn} = (-1)^n \frac{J'_n(kr_1)}{H'_q(kr_1)} g_{n+q}, \\ & Z_q^{(1)}(kr_1) = H_q(kr_1), \quad Z_q^{(2)}(kr_1) = J_q(kr_1).\end{aligned}\quad (3.2.21)$$

Второе краевое условие, которому должна удовлетворять система (3.2.17) при $r = r_1$, находим из третьего граничного условия (3.2.18) с учетом (3.2.19)

$$iqU_{1q}(r_1) + r_1 U'_{2q}(r_1) - U_{2q}(r_1) = 0.\quad (3.2.22)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения

при $r = r_0$:

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi},\quad (3.2.23)$$

где u_{0r} , $u_{0\varphi}$ и σ_{0rr} , $\sigma_{0r\varphi}$ – компоненты вектора смещения и компоненты тензора напряжений в однородном упругом цилиндре.

В результате преобразований, аналогичных приведенным в разделе 2.1, из (3.2.23) получаем еще два условия, которым должна удовлетворять система (3.2.17) при $r = r_0$

$$\left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}'_q + \widehat{\mathbf{F}}_q \mathbf{U}_q \right)_{r=r_0} = 0.\quad (3.2.24)$$

Компоненты матрицы $\widehat{\mathbf{F}}_q$ в уравнении (3.2.24) приведены в разделе 2.1.

Решение краевой задачи (3.2.17), (3.2.21), (3.2.22), (3.2.24) найдено методом сплайн-коллокации [50] для $q = -N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N$, выбрав в качестве порядка усечения величину $N = 2[kr_1] + 1$, где $[\]$ – целая часть числа. После нахождения $U_{1q}(r)$, $U_{2q}(r)$ определяем по формулам (3.2.20) коэффициенты p_q, v_q . В результате получаем аналитическое описание потенциала скорости полного акустического поля и нормальной составляющей скорости на поверхности цилиндра.

Теперь определим потенциал скорости полного акустического поля в точке наблюдения M . Обратимся к интегральному уравнению (3.2.3), используя представление потенциала Ψ в виде (3.2.2). Запишем выражения для $\Psi_0, \Psi_{S1}, \Psi_{S2}$. Будем иметь

$$\Psi_0 = A \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} \begin{cases} J_n(kr) H_n(kr_i), & r < r_i; \\ J_n(kr_i) H_n(kr), & r > r_i, \end{cases} \quad (3.2.25)$$

$$\Psi_{S1} = A \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_i) \exp(-im\varphi_i) g_{n+m}, \quad (3.2.26)$$

$$\Psi_{S2} = \int_{S_2} \left[\Psi(\mathbf{r}_2) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_2)}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] dS_2. \quad (3.2.27)$$

Подставим в (3.2.26) разложения (3.2.13), (3.2.14), а также функцию Грина в виде суммы (3.2.4), в которой первое слагаемое определяется нижней строкой формулы (3.2.8), а второе слагаемое – формулой (3.2.11). Интегрируя по поверхности цилиндра, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{S2} = & \frac{i\pi r_1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [p_q k J'_q(kr_1) - v_q J_q(kr_1)] \times \\ & \times \left[H_q(kr) \exp(iq\varphi) + (-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in\varphi) g_{n+q} \right], \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

где коэффициенты p_q и v_q определяются согласно (3.2.20).

Потенциал скорости рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_S = \Psi_{S1} + \Psi_{S2}. \quad (3.2.29)$$

Следует отметить, что полученное решение не ограничивается рассмотрением только упругой границы полупространства. В том случае, если цилиндр расположен вблизи абсолютно жесткой поверхности, функция Грина (3.2.4) при $y = -d$ должна удовлетворять условию

$$\partial G / \partial y = 0. \quad (3.2.30)$$

Если же поверхность является акустически мягкой, то

$$G = 0 \quad (3.2.31)$$

при $y = -d$.

Условие (3.2.30) выполняется при $A_1 = 1$, а условие (3.2.31) при $A_1 = -1$ [168]. Тогда выражение (3.2.12) может быть сведено к интегральному представлению цилиндрической функции Ганкеля [55]. Получаем $g_l = \pm(-i)^{-l} H_l(2kd)$, где знаки плюс и минус относятся к абсолютно жесткой и акустически мягкой поверхностям соответственно.

Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты угловых характеристик рассеянного акустического поля $|\Psi_S/A|$ в дальней зоне ($r = 100$ м).

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_0 = 0.8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_* = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с) и отстоит от границы полупространств на расстояние $d = 3 + r_1$ м. Упругое полупространство характеризуется параметрами: $\rho_1 = 7.85 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_1 = 1.2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu_1 = 7.9 \cdot 10^{10}$ Н/м² (сталь). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль), так и неоднородное покрытие, механические характеристики которого менялись по законам:

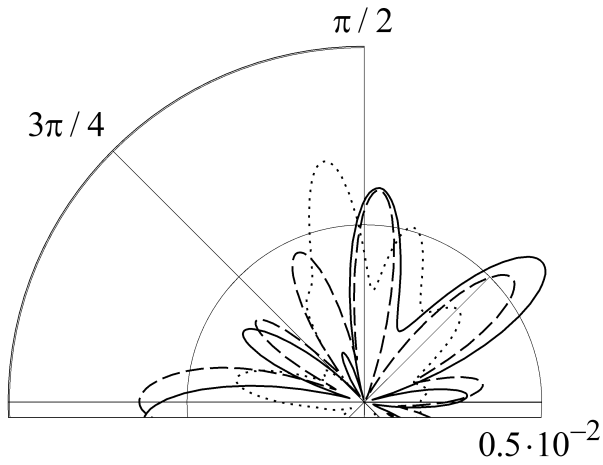
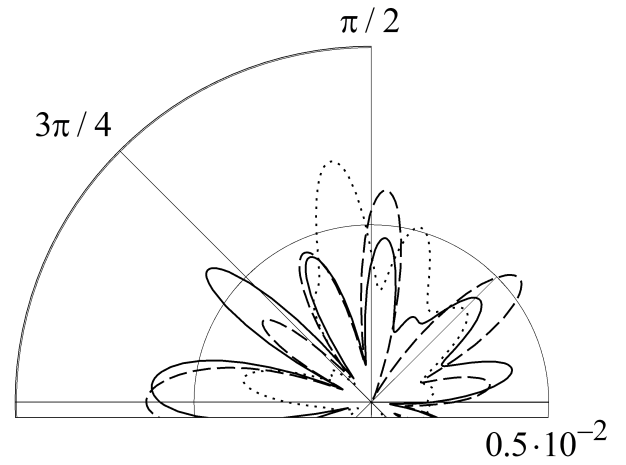
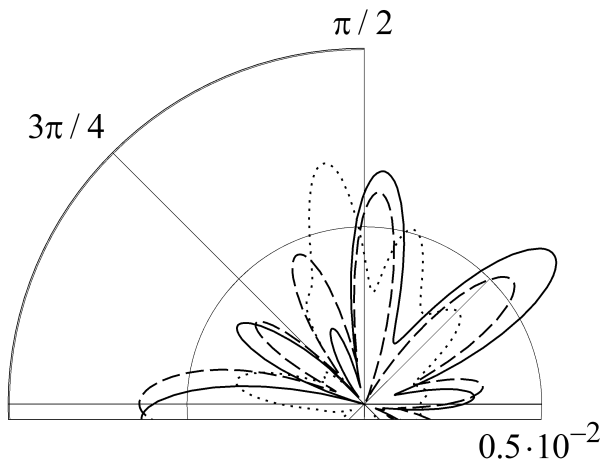
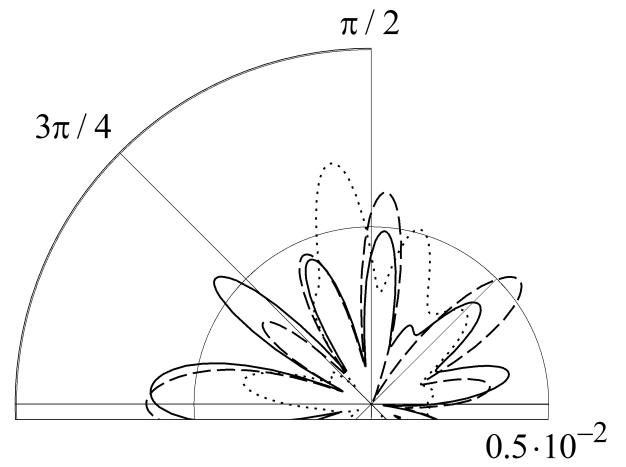
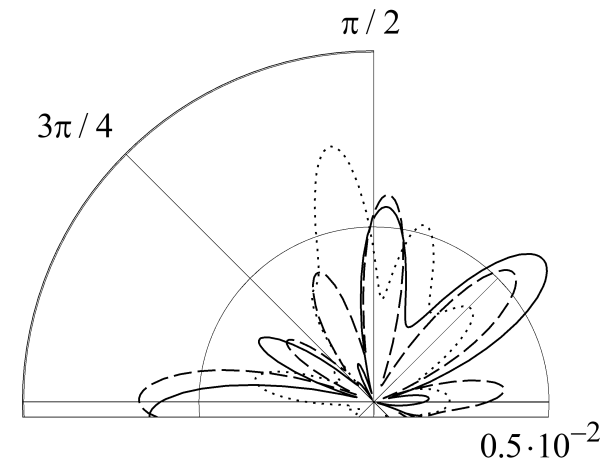
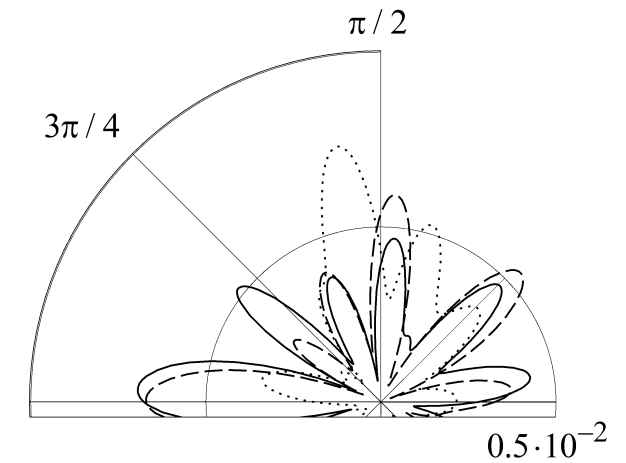
$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad f(r) = f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r), \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Функции $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$, $f_4(r)$, задающие неоднородность материала цилиндрического слоя, определены выражениями (2.1.10), (2.1.11).

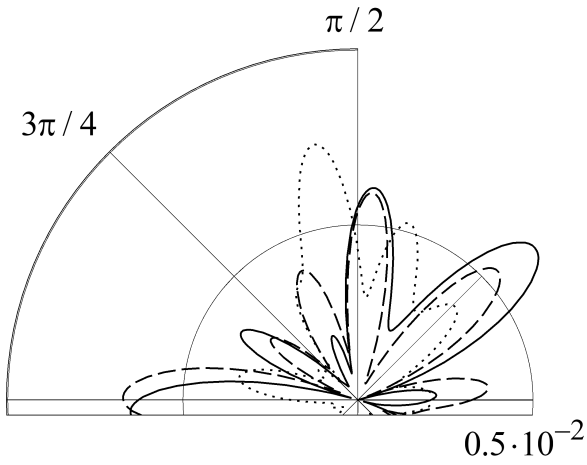
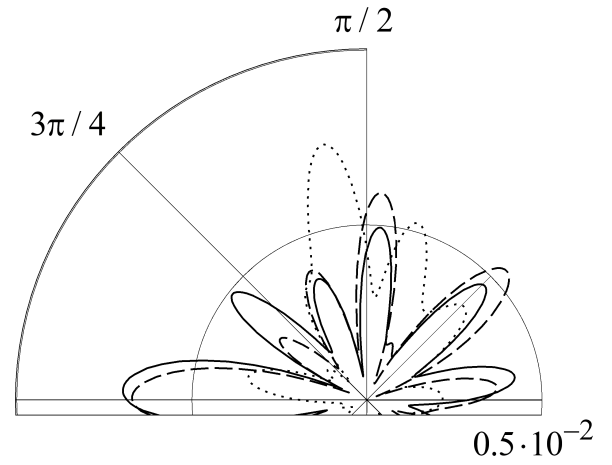
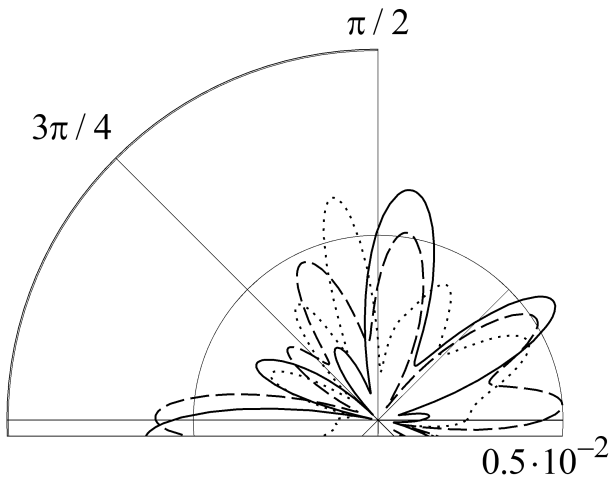
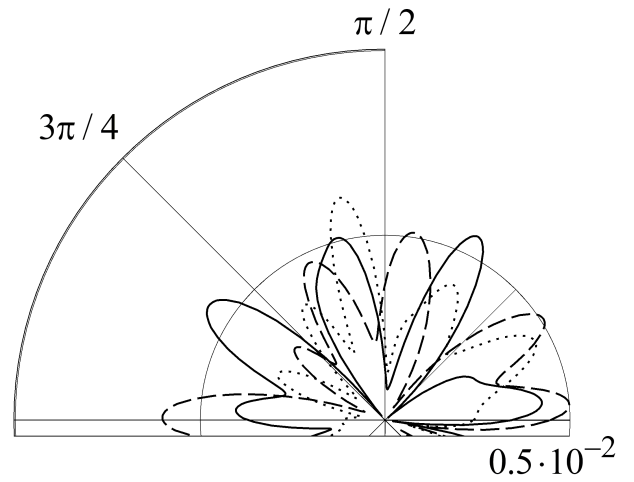
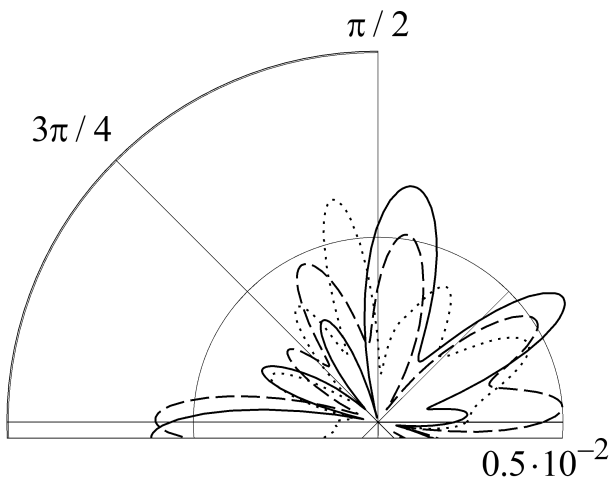
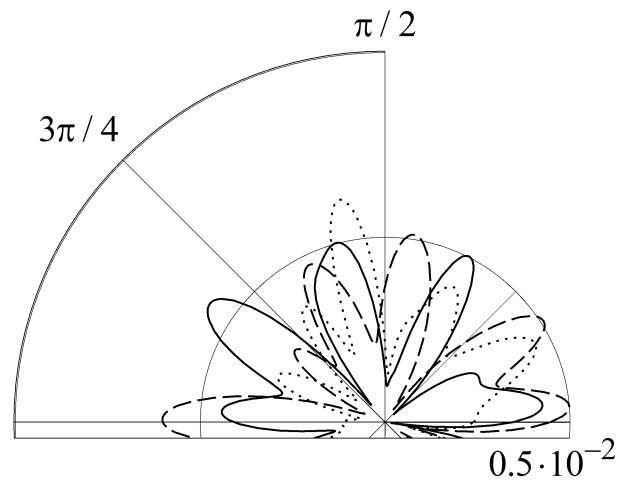
Предполагалось, что цилиндрический источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_i = 4$, $\varphi_i = \pi/3$.

На рисунках 3.2.2 – 3.2.13 представлены зависимости амплитуды рассеяния $|\Psi_S/A|$ от полярного угла φ при волновом размере тела $kr_0 = 4$ в области жидкого полупространства, которая определяется неравенством $-\arcsin(d/r) < \varphi < \arcsin(d/r) + \pi$ (изменение угла против часовой стрелки). На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Сплошная линия соответствует случаю неоднородного покрытия, штриховая – однородному покрытию, пунктирная – однородному цилиндру без покрытия. В названиях рисунков указано, при каком законе неоднородности $f(r)$ построена сплошная кривая на каждом из рисунков и каком типе подстилающей поверхности построена диаграмма. “упруг. п” означает, что цилиндр располагался вблизи упругой поверхности, “абс. жест. п” значит, что цилиндр находился вблизи абсолютно жесткой поверхности и “акуст. мяг. п” означает акустически мягкую поверхность.

Группа рисунков 3.2.2 – 3.2.5 построена для случая упругой поверхности для различных законов неоднородности $f(r)$ цилиндрического слоя. Анализируя рисунки можно видеть, что функции $f_1(r)$, $f_3(r)$, возрастающие по толщине слоя, показывают идентичные изменения рассеянного акустического поля по сравнению со случаем однородного покрытия. Наиболее существенные различия присутствуют в угловых диапазонах $\varphi \in [0, \pi/4]$ и $\varphi \in [\pi/2, 3\pi/4]$. Идентичное влияние оказывают и функции неоднородности $f_2(r)$, $f_4(r)$, убывающие по тол-

Рис. 3.2.2. $f(r) = f_1(r)$, упруг. пРис. 3.2.3. $f(r) = f_2(r)$, упруг. пРис. 3.2.4. $f(r) = f_3(r)$, упруг. пРис. 3.2.5. $f(r) = f_4(r)$, упруг. пРис. 3.2.6. $f(r) = f_1(r)$, абс. жест. пРис. 3.2.7. $f(r) = f_2(r)$, абс. жест. п

щине слоя. Различие между ними наблюдается в диапазонах $\varphi \in [0, \pi/4]$ и $\varphi \in [3\pi/4, \pi]$. Аналогичные выводы о схожем влиянии пар функций неоднородности $f_1(r)$, $f_3(r)$ и $f_2(r)$, $f_4(r)$ могут быть сделаны для групп рисунков 3.2.6 – 3.2.9, 3.2.10 – 3.2.13, построенных для

Рис. 3.2.8. $f(r) = f_3(r)$, абс. жест. пРис. 3.2.9. $f(r) = f_4(r)$, абс. жест. пРис. 3.2.10. $f(r) = f_1(r)$, акуст. мяг. пРис. 3.2.11. $f(r) = f_2(r)$, акуст. мяг. пРис. 3.2.12. $f(r) = f_3(r)$, акуст. мяг. пРис. 3.2.13. $f(r) = f_4(r)$, акуст. мяг. п

случаев абсолютно жесткой и акустически мягкой поверхности. Неоднородность материала покрытия приводит к существенным изменениям рассеянного поля по всем исследуемому диа-

пазоне углов φ .

Следует отметить, что пунктирные рисунки, построенные для упругого цилиндра без покрытия, крайне схожи для всех трех исследуемых типов подстилающих поверхностей. Схожими по форме являются группы диаграмм 3.2.2 – 3.2.5 и 3.2.6 – 3.2.9, что позволяет сделать вывод о схожести влияние упругой и абсолютно жесткой поверхности при исследуемых физико-механических и геометрических параметрах волновой системы. Присутствует относительное сохранение формы, однако количественная характеристика рассеянного поля в случае абсолютно жесткой поверхности больше, чем в случае упругой. При этом диаграммы, построенные для случая акустически мягкой поверхности 3.2.10 – 3.2.13 существенно от них отличаются.

На рисунках 3.2.14 – 3.2.15 построены диаграммы рассеянного поля вблизи поверхности цилиндрического рассеивателя. Для этого полагалось $r = 1.1r_1$. Обозначение “бз” в названиях рисунков следует понимать, как то, что рисунок построен в ближней зоне по отношению к цилиндру. Поверхность полагалась упругой. Для сравнения на рисунках 3.2.16 – 3.2.17 построены диаграммы направленности рассеянного поля при тех же параметрах для цилиндра, расположенного в безграничном пространстве. Обозначение “безгр. пр” в названиях рисунков следует понимать, как то, что рисунок построен для цилиндра, находящегося в безграничном пространстве. Можно видеть, что присутствие подстилающей поверхности существенно меняет рассеянное акустическое поле.

Также в ходе численных исследований было установлено, что при $d/r_1 > 150$ цилиндр и подстилающая поверхность перестают переотражать между собой акустические волны и формула (3.2.28) показывает результаты, аналогичные полученным в разделе 2.1, где цилиндр располагался в безграничном пространстве.

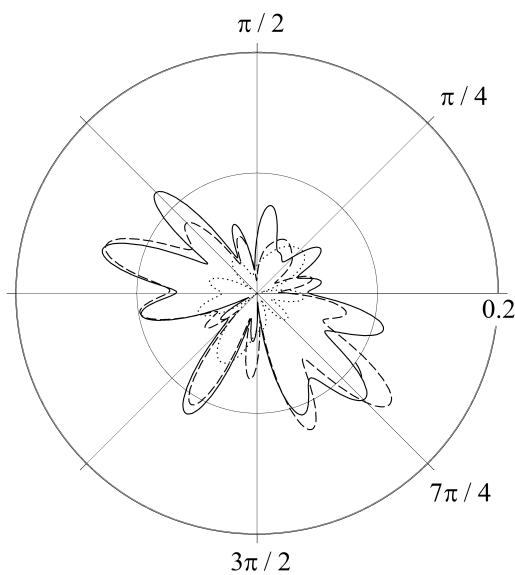


Рис. 3.2.14. $f(r) = f_1(r)$, упруг. п, бз

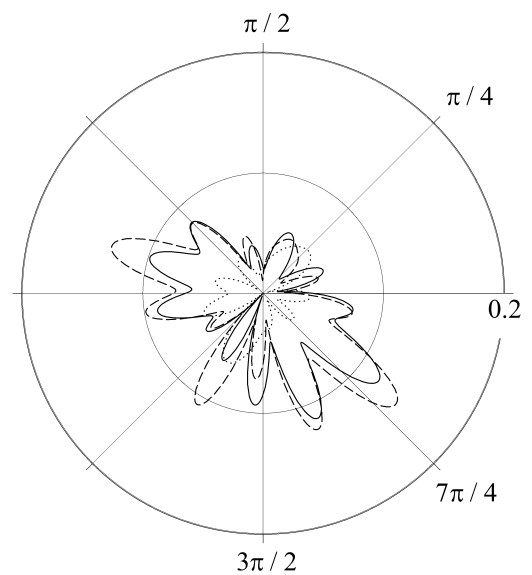
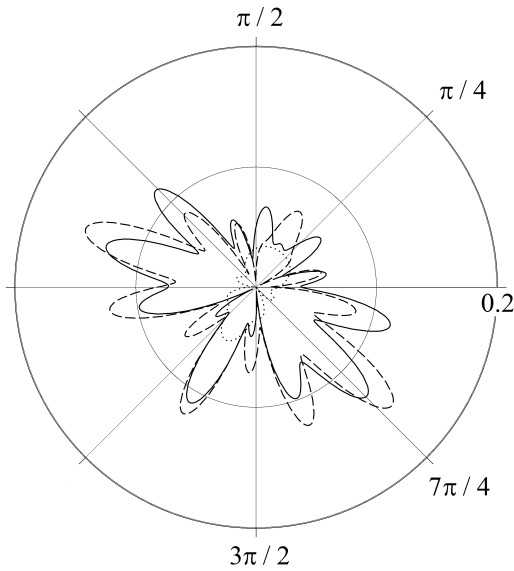
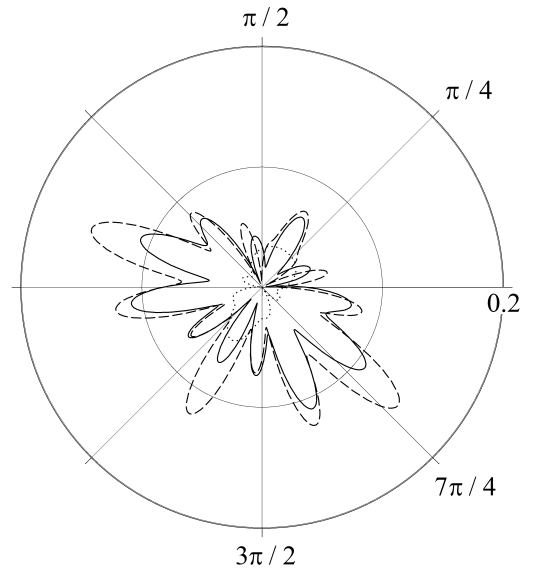


Рис. 3.2.15. $f(r) = f_2(r)$, упруг. п, бз

Рис. 3.2.16. $f(r) = f_1(r)$, безгр. пр, бзРис. 3.2.17. $f(r) = f_2(r)$, безгр. пр, бз

Таким образом, сопоставление результатов расчетов, проведенных для тел с однородными и неоднородными покрытиями, расположенными рядом с различными типами поверхностей, демонстрирует, что неоднородность покрытия и тип ограничивающей подстилающей поверхности оказывают значительное влияние на дифракционную картину.

3.3. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный однородный изотропный упругий цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного упругого изотропного слоя, внешний радиус которого равен r_1 . Цилиндр с покрытием находится в идеальной жидкости с плотностью ρ_* и скоростью звука c , граничащей с однородным изотропным упругим полупространством с плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ_1 и μ_1 . Ось цилиндра параллельна границе упругого полупространства и отстоит от неё на расстоянии d (рис. 3.3.1).

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы координатная ось z совпадала с осью вращения цилиндра. С прямоугольной системой координат свяжем цилиндрическую систему координат r, φ, z .

Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r , а модули упругости материала покрытия λ и μ – дифференцируемыми функциями координаты r . В системе координат x, y, z граница упругого полупространства определяется уравнением $y = -d$.

В полупространстве, заполненном идеальной жидкостью, находится точечный источник, который генерирует гармоническую сферическую звуковую волну с частотой ω и амплитудой A . Положение источника определяется точкой M_0 , имеющей цилиндрические координаты

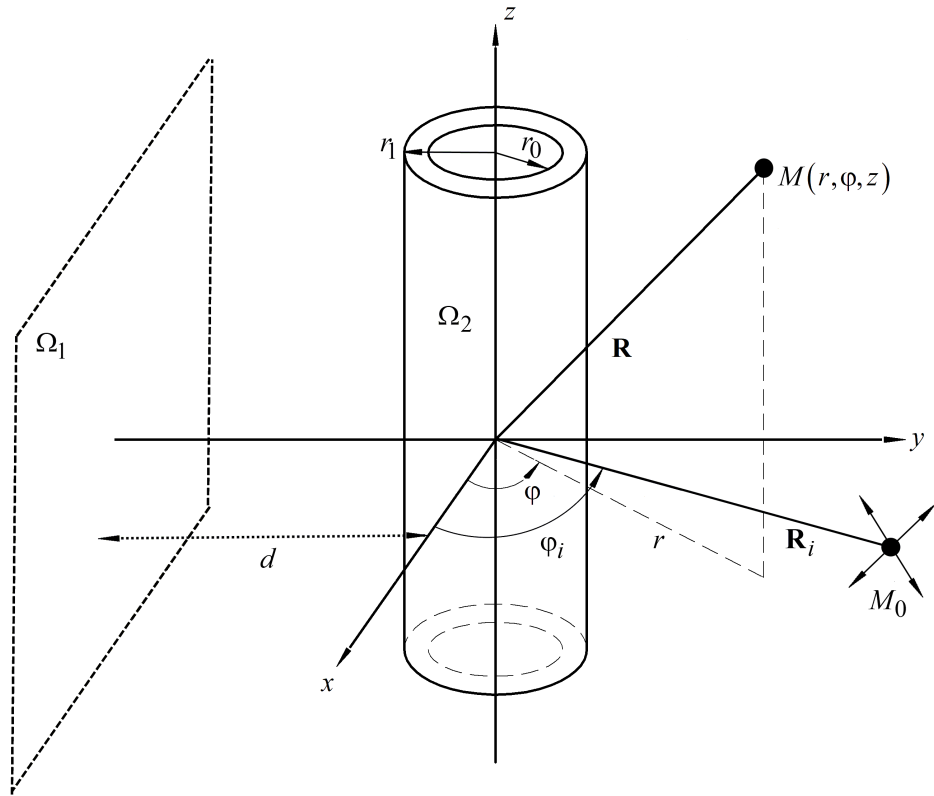


Рис. 3.3.1. Геометрия задачи 3.3

$(r_i, \varphi_i, 0)$. Точка наблюдения M имеет координаты (r, φ, z) .

Уравнения волновых полей. Потенциал скорости гармонической звуковой волны, излучаемой сферическим источником в свободном пространстве, представим в виде

$$\Psi_0 = AG_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) \exp(-i\omega t), \quad (3.3.1)$$

где A – амплитуда; $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) = \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|)}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|}$ – трехмерная функция Грина для свободного пространства; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; \mathbf{R} и \mathbf{R}_i – радиус-векторы точек M и M_0 ; t – время. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

Полное звуковое поле в верхнем полупространстве удовлетворяет интегральному уравнению Гельмгольца-Кирхгофа (1.2.18)

$$\Psi(\mathbf{R}) = AG(\mathbf{R}, \mathbf{R}_i) + \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega. \quad (3.3.2)$$

Здесь $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – трехмерная функция Грина для уравнения Гельмгольца; $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, Ω_1 – поверхность упругого полупространства, Ω_2 – внешняя поверхность покрытия цилиндра. При интегрировании по поверхности Ω_1 точка \mathbf{R}_2 находится на поверхности полупространства и дифференцирование выполняется по внешней нормали к поверхности Ω_1 , а в интеграле по поверхности Ω_2 точка \mathbf{R}_2 находится на поверхности цилиндра и дифференцирование происходит по внешней нормали к поверхности Ω_2 .

Используя разложение сферической звуковой волны по цилиндрическим волновым функциям, представим $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ в виде [55]

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(h) dh, \quad (3.3.3)$$

$$\tilde{G}_o(h) = e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_2)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_2), & r < r_2; \\ J_n(k_h r_2) H_n(k_h r), & r > r_2, \end{cases}$$

где $J_n(x)$ и $H_n(x)$ – цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n соответственно, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Для того, чтобы в (3.3.2) исключить интегрирование по бесконечной поверхности Ω_1 , воспользуемся функцией Грина полупространства

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) + G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2), \quad (3.3.4)$$

где $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – некоторая функция, представляющая акустическое поле, полученное при отражении первичной волны $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ от поверхности Ω_1 . Таким образом функция Грина (3.3.4) определяет поле точечного источника в пространстве внешнем к поверхности Ω_1 , т.е. является функцией Грина полупространства.

Запишем функцию (3.3.3) в декартовой системе координат. Воспользуемся теоремой сложения для цилиндрических волновых функций [55]

$$H_0(k_h |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_2)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_2), & r < r_2; \\ J_n(k_h r_2) H_n(k_h r), & r > r_2. \end{cases}$$

Такое выражение содержится в формуле (3.3.3). Определим связь между декартовыми и цилиндрическими координатами выражениями $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x_2 = r_2 \cos \varphi_2$, $y_2 = r_2 \sin \varphi_2$. Тогда используя интегральное представление цилиндрической функции Ганкеля первого рода нулевого порядка [55]

$$H_0(k_h |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \exp [ik_h \sin \varphi_1 (x - x_2) + ik_h \cos \varphi_1 |y - y_2|] d\varphi_1,$$

где Γ – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости φ_1 (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$), получим выражение для $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$, записанное в декартовой системе координат

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|)}{4\pi |\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|} = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [ik_h \xi (x - x_2) + ik_h \eta |y - y_2| + ih(z - z_2)] \frac{d\xi dh}{\eta}, \quad \eta = \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3.3.5)$$

Тогда, основываясь на (3.3.5), функция $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ может быть записана как

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A'_1(\xi, h) \exp [ik_h \xi (x - x_2) + ik_h \eta (y + y_2) + ih(z - z_2)] \frac{d\xi dh}{\eta}, \quad (3.3.6)$$

где $A'_1(\xi, h) = \exp(i2k_h d \eta) A_1(\xi, h)$, $A_1(\xi, h)$ – коэффициент отражения плоской волны единичной амплитуды, падающей на упругое полупространство.

Функция Грина (3.3.4) удовлетворяет на поверхности раздела идеальной жидкости и упругой поверхности тем же граничным условиям что и потенциал скорости акустического поля.

Задача об отражении плоской звуковой волны, падающей на границу раздела идеальной жидкости и упругой поверхности решена в [32]. Коэффициент отражения плоской волны, падающей на границу полупространств под полярным и азимутальным углами падения θ_1, φ_1 имеет вид

$$A_1(\varphi_1, \theta_1) = \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}, \quad (3.3.7)$$

где

$$d_1 = k_y [\lambda_1 k_{1l}^2 (2k_{1\tau y}^2 - k_{1\tau}^2) + 2\mu_1 k_{1ly} (k_{1ly} (2k_{1\tau y}^2 - k_{1\tau}^2) + 2k_{1\tau y} (k_x^2 + k_z^2))],$$

$$d_2 = k_{1ly} k_{1\tau}^2 \omega^2 \rho_*$$

Здесь $k_x = k \sin \theta_1 \sin \varphi_1$, $k_y = k \sin \theta_1 \cos \varphi_1$, $k_z = k \cos \theta_1$; $k_{1l} = \omega/c_{1l}$ и $k_{1\tau} = \omega/c_{1\tau}$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн в упругом полупространстве; $c_{1l} = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$ и $c_{1\tau} = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ – скорости продольных и поперечных волн; $k_{1ly} = \sqrt{k_{1l}^2 - k_x^2 - k_z^2}$, $k_{1\tau y} = \sqrt{k_{1\tau}^2 - k_x^2 - k_z^2}$.

Выполняя в (3.3.6) замену переменных $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x_2 = r_2 \cos \varphi_2$, $y_2 = r_2 \sin \varphi_2$, $\xi = \sin \varphi_1$, $\eta = \cos \varphi_1$ а в (3.3.7) $k_x = k_h \sin \varphi_1$, $k_y = k_h \cos \varphi_1$, $k_z = h$ и используя разложение (3.2.10), получим

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} A'_1(\varphi_1, h) e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp[in(\varphi + \varphi_1)] \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_2) \exp[im(\varphi_1 - \varphi_2)] d\varphi_1 dh. \quad (3.3.8)$$

Определим потенциал скорости полного акустического поля на внешней поверхности покрытия цилиндра Ω_2 . Представим его, а также нормальную составляющую скорости частиц жидкости на поверхности Ω_2 в виде рядов Фурье по координате φ и интегралов Фурье по координате z

$$\Psi|_{r=r_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} p_q(\sigma) \exp(iq\varphi) d\sigma, \quad (3.3.9)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{r=r_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} v_q(\sigma) \exp(iq\varphi) d\sigma, \quad (3.3.10)$$

где $p_q(\sigma)$ и $v_q(\sigma)$ – коэффициенты, подлежащие определению.

Устремим точку наблюдения на поверхность цилиндра, подставим полученные выше выражения в интегральное соотношение (3.3.2) и учтем, что при указанном выборе функции

Грина можно ограничиться интегрированием по поверхности цилиндра. Дальнейшие преобразования аналогичны показанным в разделе 3.2. Осуществляя интегрирование по поверхности цилиндра $d\Omega_2 = r_1 d\varphi_2 dz_2$, $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$, $z_2 \in (-\infty, \infty)$, при интегрировании по координате z_2 будем пользоваться следующими свойствами [167]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\sigma - h)z] dz = 2\pi\delta(\sigma - h), \quad \int_a^b f(\sigma)\delta(\sigma - h)d\sigma = f(h), \quad h \in [a, b],$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $p_q(h)$ и $v_q(h)$

$$p_q(h) + \alpha_q(h)v_q(h) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\beta_{qn}^{(1)}(h)p_n(h) + \beta_{qn}^{(2)}(h)v_n(h)] = X_q(h), \quad (3.3.11)$$

$$q = -\infty, \dots, \infty, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad h = -\infty, \dots, \infty, \quad h \in \mathbb{R},$$

где

$$\alpha_q(h) = \frac{H_q(k_h r_1)}{k_h H'_q(k_h r_1)},$$

$$\beta_{qn}^{(1)}(h) = (-1)^n \frac{J'_n(k_h r_1)}{H'_q(k_h r_1)} g_{n+q}(h), \quad \beta_{qn}^{(2)}(h) = (-1)^{n+1} \frac{J_n(k_h r_1)}{k_h H'_q(k_h r_1)} g_{n+q}(h),$$

$$X_q(h) = -\frac{A}{4\pi^2 k_h r_1 H'_q(k_h r_1)} \times$$

$$\times \left[H_q(k_h r_i) \exp(-iq\varphi_i) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_i) \exp(-im\varphi_i) g_{m+q}(h) \right],$$

$$g_l(h) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_1(\varphi_1, h) \exp[i(2k_h d \cos \varphi_1 + l\varphi_1)] d\varphi_1.$$

Для вычисления коэффициентов $g_l(h)$ следует выполнить замену $\xi_1 = \sin \varphi_1$, $\eta_1 = \cos \varphi_1$. В таком случае интегралы будут вычисляться не по комплексному контуру Γ , а по вещественной прямой

$$g_l(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A'_1(\xi_1, h) (\eta_1 + i\xi_1)^l \frac{d\xi_1}{\eta_1}, \quad (3.3.12)$$

где $A'_1(h, \xi_1) = \exp(i2k_h d \eta_1) A_1(h, \xi_1)$. Следует отметить, что при осуществлении интегрирования в (3.3.12) функция $A_1(h, \xi_1)$ может обращаться в бесконечность в некоторых точках $\xi^*(h)$. Однако все такие точки являются интегрируемыми особыми точками.

Теперь воспользуемся результатами работы [129]. Согласно [129] компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом покрытии представляются в виде рядов Фурье по координате

нате φ и интегралов Фурье по координате z

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{1q}(r, h) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{2q}(r, h) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ u_z(r, \varphi, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{3q}(r, h) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] dh, \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

где функции $U_{1q}(r, h)$, $U_{2q}(r, h)$, $U_{3q}(r, h)$ для каждого q и h являются решением следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\widehat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}_q'' + \widehat{\mathbf{B}}_q \mathbf{U}_q' + \widehat{\mathbf{C}}_q \mathbf{U}_q = 0, \quad (3.3.14)$$

где, согласно [129], $\mathbf{U}_q = (U_{1q}(r, h), U_{2q}(r, h), U_{3q}(r, h))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_q = (a_{qij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{B}}_q = (b_{qij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{C}}_q = (c_{qij})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} a_{q11} &= (\lambda + 2\mu) r^2, \quad a_{q22} = \mu r^2, \quad a_{q33} = \mu r^2, \quad a_{qij} = 0, \quad (i \neq j), \\ b_{q11} &= (\lambda' + 2\mu') r^2 + (\lambda + 2\mu) r, \quad b_{q12} = b_{q21} = iq(\lambda + \mu) r, \\ b_{q13} &= b_{q31} = ih(\lambda + \mu) r^2, \quad b_{q22} = b_{q33} = \mu' r^2 + \mu r, \quad b_{q23} = b_{q32} = 0, \\ c_{q11} &= \omega^2 r^2 \rho - \mu(q^2 + r^2 h^2 + 2) + \lambda' r - \lambda, \quad c_{q12} = iq(\lambda' r - \lambda - 3\mu), \\ c_{q13} &= ih\lambda' r^2, \quad c_{q21} = iq(\mu' r + \lambda + 3\mu), \\ c_{q22} &= \omega^2 r^2 \rho - q^2 \lambda - \mu' r - \mu(2q^2 + r^2 h^2 + 1), \\ c_{q23} &= c_{q32} = -qh(\lambda + \mu) r, \quad c_{q31} = ih(\mu' r + \lambda + \mu) r, \\ c_{q33} &= \omega^2 r^2 \rho - h^2 \lambda r^2 - \mu(q^2 + 2r^2 h^2). \end{aligned}$$

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц неоднородной упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

при $r = r_1$:

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (3.3.15)$$

где u_r и v_r – нормальные компоненты векторов смещения и скорости; σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} – компоненты тензора напряжений в упругом неоднородном покрытии.

Подставляя (3.3.9), (3.3.10), (3.3.13) и обобщенный закон Гука (1.2.23) в первые два граничных условия (3.3.15), получаем

$$\begin{aligned} v_q(h) &= -i\omega U_{1q}(r_1, h) \exp(-iq\varphi_i), \\ p_q(h) &= \left[(\lambda + 2\mu) U'_{1q}(r_1, h) + \frac{\lambda}{r_1} (U_{1q}(r_1, h) + iqU_{2q}(r_1, h) + ihr_1 U_{3q}(r_1, h)) \right] \times \\ &\quad \times \frac{i}{\rho_* \omega} \exp(-iq\varphi_i). \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Подставляя выражения (3.3.16) в систему (3.3.11), получаем краевое условие при $r = r_1$ для нахождения частного решения системы (3.3.14)

$$F_{1q}U'_{1q}(r_1, h) + F_{2q}^{(1)}U_{1q}(r_1, h) + F_{3q}U_{2q}(r_1, h) + F_{4q}U_{3q}(r_1, h) + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_{1n}U'_{1n}(r_1, h) + F_{2n}^{(2)}U_{1n}(r_1, h) + F_{3n}U_{2n}(r_1, h) + F_{4n}U_{3n}(r_1, h) \right] F_{5qn} = \\ = X_q(h), \quad (3.3.17)$$

$$q = -\infty, \dots, \infty, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad h = -\infty, \dots, \infty, \quad h \in \mathbb{R},$$

где

$$F_{1q} = \frac{i}{\rho_*\omega} [\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)] \exp(-iq\varphi_i), \\ F_{2q}^{(j)} = \frac{i}{\rho_*\omega} \left[\frac{\lambda(r_1)}{r_1} + \omega^2 \rho_* \frac{Z_q^{(j)}(k_h r_1)}{k_h Z_q^{(j)'}(k_h r_1)} \right] \exp(-iq\varphi_i), \quad F_{3q} = -\frac{q\lambda(r_1)}{r_1 \rho_*\omega} \exp(-iq\varphi_i), \\ F_{4q} = -\frac{h\lambda(r_1)}{\rho_*\omega} \exp(-iq\varphi_i), \quad F_{5qn} = (-1)^n \frac{J'_n(k_h r_1)}{H'_q(k_h r_1)} g_{n+q}(h), \\ Z_q^{(1)}(k_h r_1) = H_q(k_h r_1), \quad Z_q^{(2)}(k_h r_1) = J_q(k_h r_1).$$

Другие краевые условия, которым должна удовлетворять система (3.3.14) при $r = r_1$, находим из третьего и четвертого граничных условий (3.3.15)

$$iqU_{1q}(r_1, h) + r_1 U'_{2q}(r_1, h) - U_{2q}(r_1, h) = 0, \\ U'_{3q}(r_1, h) + ihU_{1q}(r_1, h) = 0. \quad (3.3.18)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения

при $r = r_0$:

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}, \quad (3.3.19)$$

где u_{0r} , $u_{0\varphi}$, u_{0z} и σ_{0rr} , $\sigma_{0r\varphi}$, σ_{0rz} – компоненты вектора смещения и компоненты тензора напряжений в однородном упругом цилиндре.

В результате преобразований, аналогичных приведенным в [129], из (3.3.19) получаем еще три условия, которым должна удовлетворять система (3.3.14) при $r = r_0$

$$\left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}'_q + \widehat{\mathbf{F}}_q \mathbf{U}_q \right)_{r=r_0} = 0. \quad (3.3.20)$$

где, согласно [129], $\widehat{\mathbf{F}}_q = \mathbf{T}_q - \mathbf{G}_q[\mathbf{M}_q]^{-1}$; $\mathbf{T}_q = (t_{qij})_{3 \times 3}$, $\mathbf{G}_q = (\gamma_{qij})_{3 \times 3}$, $\mathbf{M}_q = (m_{qij})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$t_{q11} = \lambda(r_0)/r_0, \quad t_{q12} = iq\lambda(r_0)/r_0, \quad t_{q13} = ih\lambda(r_0),$$

$$\begin{aligned}
t_{q21} &= iq\mu(r_0)/r_0, & t_{q22} &= -\mu(r_0)/r_0, & t_{q23} &= t_{q32} = t_{q33} = 0, & t_{q31} &= ih\mu(r_0), \\
\gamma_{q11} &= 2\mu_0 k_1^2 J_q''(k_1 r_0) - \lambda_0 (k_1^2 + h^2) J_q(k_1 r_0), \\
\gamma_{q12} &= 2ih\mu_0 k_2^2 J_q''(k_2 r_0), & \gamma_{q13} &= 2iqk_\tau \mu_0 (k_2 r_0 J_q'(k_2 r_0) - J_q(k_2 r_0)) / r_0^2, \\
\gamma_{q21} &= 2iq\mu_0 (k_1 r_0 J_q'(k_1 r_0) - J_q(k_1 r_0)) / r_0^2, \\
\gamma_{q22} &= 2qh\mu_0 (k_2 r_0 J_q'(k_2 r_0) - J_q(k_2 r_0)) / r_0^2, \\
\gamma_{q23} &= -\mu_0 k_\tau (k_2^2 r_0^2 J_q''(k_2 r_0) - k_2 r_0 J_q'(k_2 r_0) + q^2 J_q(k_2 r_0)) / r_0^2, \\
\gamma_{q31} &= 2ih\mu_0 k_1 J_q'(k_1 r_0), & \gamma_{q32} &= -\mu_0 k_2 (h^2 - k_2^2) J_q'(k_2 r_0), & \gamma_{q33} &= -qh\mu_0 k_\tau J_q(k_2 r_0) / r_0, \\
m_{q11} &= k_1 J_q'(k_1 r_0), & m_{q12} &= ihk_2 J_q'(k_2 r_0), & m_{q13} &= iqk_\tau J_q(k_2 r_0) / r_0, \\
m_{q21} &= iqJ_n(k_1 r_0) / r_0, & m_{q22} &= -qhJ_q(k_2 r_0) / r_0, & m_{q23} &= -k_2 k_\tau J_q'(k_2 r_0), \\
m_{q31} &= ihJ_q(k_1 r_0), & m_{q32} &= k_2^2 J_q(k_2 r_0), & m_{q33} &= 0, \\
k_1 &= \sqrt{k_l^2 - h^2}, & k_2 &= \sqrt{k_\tau^2 - h^2}.
\end{aligned}$$

Теперь определим потенциал скорости полного акустического поля в точке наблюдения M . Обратимся к интегральному уравнению (3.3.2), используя представление потенциала Ψ в виде (3.2.2), запишем выражения для Ψ_0 , Ψ_{S1} , Ψ_{S2} . Будем иметь

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= A \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_0(h) dh, \\
\tilde{\Psi}_0(h) &= e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_i), & r < r_i; \\ J_n(k_h r_i) H_n(k_h r), & r > r_i; \end{cases} \quad (3.3.21)
\end{aligned}$$

$$\Psi_{S1} = A \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_i) \exp(-im\varphi_i) g_{n+m}(h) dh, \quad (3.3.22)$$

$$\Psi_{S2} = \iint_{\Omega_2} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega_2. \quad (3.3.23)$$

Подставим в (3.3.23) разложения (3.3.9), (3.3.10), а также функцию Грина в виде суммы (3.3.4), в которой первое слагаемое определяется нижней строкой формулы (3.3.3), а второе слагаемое – формулой (3.3.8). Интегрируя по поверхности цилиндра, получаем

$$\begin{aligned}
\Psi_{S2} &= \frac{ir_1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [p_q(h) k_h J_q'(k_h r_1) - v_q(h) J_q(k_h r_1)] \times \\
&\times \left[H_q(k_h r) \exp(iq\varphi) + (-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp(in\varphi) g_{n+q}(h) \right] dh, \quad (3.3.24)
\end{aligned}$$

где коэффициенты $p_q(h)$ и $v_q(h)$ определяются согласно (3.3.16).

Потенциал скорости рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_S = \Psi_{S1} + \Psi_{S2}. \quad (3.3.25)$$

Асимптотические выражения. В дальней зоне акустического поля ($kr \gg 1$) интегралы (3.3.22) и (3.3.24), могут быть вычислены методом перевала [16, 56]:

$$\int_C g(\gamma) e^{Wf(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi}{W|f''(\gamma_0)|}} g(\gamma_0) e^{Wf(\gamma_0)+i\zeta}, \quad W \gg 1, \quad (3.3.26)$$

где C – некоторый контур на комплексной плоскости γ ; ζ – угол, определяющий направление линии наибыстрейшего убывания функции $\text{Re } f(\gamma)$, проходящей через точку перевала γ_0 , определяемую как точку резкого максимума функции $f(\gamma)$, т.е. $f'(\gamma_0) = 0$, $f''(\gamma_0) \neq 0$.

Рассмотрим интеграл (3.3.24). Используя асимптотические формулы для цилиндрических волновых функций [83]

$$H_q(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \exp[i(k_h r - \pi q/2 - \pi/4)], \quad J_n(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \cos(k_h r - \pi n/2 - \pi/4),$$

а также тождество $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, позволяющее записать асимптотическую формулу функции Бесселя через экспоненциальные функции, представим интеграл (3.3.24) в виде суммы трех интегралов, каждый из которых может быть вычислен методом перевала при $kr \gg 1$

$$\Psi_{S2} = \frac{ir_1}{4} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[I_{1q} \exp(iq\varphi) + \frac{1}{2}(-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I_{2qn} + I_{3qn}) \exp(in\varphi) \right],$$

$$I_{1q} = (-i)^q e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} w_q(h) \exp(ik_h r) dh,$$

$$I_{2qn} = (-i)^n e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} g_{n+q}(h) w_q(h) \exp(ik_h r) dh,$$

$$I_{3qn} = i^n e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} g_{n+q}(h) w_q(h) \exp(-ik_h r) dh,$$

$$w_q(h) = p_q(h) k_h J'_q(k_h r_1) - v_q(h) J_q(k_h r_1).$$

В каждом из полученных интегралов выполним замену $h = k \sin \gamma$:

$$I_{1q} = (-i)^q e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] w_q(k \sin \gamma) k \cos \gamma d\gamma,$$

$$I_{2qn} = (-i)^n e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] g_{n+q}(k \sin \gamma) w_q(k \sin \gamma) k \cos \gamma d\gamma,$$

$$I_{3qn} = i^n e^{i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi k r \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma - \cos \gamma \right) \right] g_{n+q}(k \sin \gamma) w_q(k \sin \gamma) k \cos \gamma d\gamma.$$

Точка перевала для интегралов I_{1q} и I_{2qn} определяется как $\gamma_0 = \arctan(z/r)$, а для интеграла I_{3qn} $\tilde{\gamma}_0 = -\arctan(z/r)$.

Определим направление линии наискорейшего спуска из точки γ_0 . Запишем разложение в ряд Тейлора функции $f(\gamma)$ вблизи точки γ_0

$$f(\gamma) \approx f(\gamma_0) + \frac{1}{2}f''(\gamma_0)(\gamma - \gamma_0)^2.$$

Выполним параметризацию $f''(\gamma_0) = |f''(\gamma_0)| \exp(i \arg f''(\gamma_0))$, $\gamma - \gamma_0 = \tilde{\rho} \exp(i\zeta)$. Получим

$$f(\gamma) - f(\gamma_0) = \frac{1}{2}\tilde{\rho}^2 |f''(\gamma_0)| \exp[i(2\zeta + \arg f''(\gamma_0))].$$

Теперь найдем те направления, вдоль которых разность $\operatorname{Re}[f(\gamma) - f(\gamma_0)]$ быстрее всего убывает с увеличением $\tilde{\rho}$, а $\operatorname{Im}[f(\gamma) - f(\gamma_0)]$ остается неизменной. Тогда направление наискорейшего спуска может быть найдено из уравнения

$$2\zeta + \arg f''(\gamma_0) = \pi + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (3.3.27)$$

По формуле (3.3.27) получаем $\zeta = -\pi/4$ для интегралов I_{1q} и I_{2qn} , и $\zeta = \pi/4$ для интеграла I_{3qn} .

В результате в соответствии с (3.3.26) будем иметь

$$\begin{aligned} I_{1q} &\approx \frac{2}{r}(-i)^{q+1} \exp\left[ikr\left(\frac{z}{r}\sin\gamma_0 + \cos\gamma_0\right)\right] w_q(k\sin\gamma_0)\cos\gamma_0, \\ I_{2qn} &\approx \frac{2}{r}(-i)^{n+1} \exp\left[ikr\left(\frac{z}{r}\sin\gamma_0 + \cos\gamma_0\right)\right] g_{n+q}(k\sin\gamma_0) w_q(k\sin\gamma_0)\cos\gamma_0, \\ I_{3qn} &\approx \frac{2}{r}i^{n+1} \exp\left[ikr\left(\frac{z}{r}\sin\tilde{\gamma}_0 - \cos\tilde{\gamma}_0\right)\right] g_{n+q}(k\sin\tilde{\gamma}_0) w_q(k\sin\tilde{\gamma}_0)\cos\tilde{\gamma}_0. \end{aligned}$$

Используя ту же процедуру, что и для предыдущих интегралов, может быть получена асимптотическая формула для Ψ_{S1} в дальней зоне акустического поля

$$\Psi_{S1} \approx A \frac{i}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} [I_{4nq} + I_{5nq}] \exp(in\varphi),$$

где

$$\begin{aligned} I_{4qn} &\approx \frac{(-i)^{n+1}}{r} \exp\left[ikr\left(\frac{z}{r}\sin\gamma_0 + \cos\gamma_0\right)\right] g_{n+q}(k\sin\gamma_0) w_{2q}(k\sin\gamma_0)\cos\gamma_0, \\ I_{5qn} &\approx \frac{i^{n+1}}{r} \exp\left[ikr\left(\frac{z}{r}\sin\tilde{\gamma}_0 - \cos\tilde{\gamma}_0\right)\right] g_{n+q}(k\sin\tilde{\gamma}_0) w_{2q}(k\sin\tilde{\gamma}_0)\cos\tilde{\gamma}_0, \\ w_{2q}(h) &= (-1)^m J_m(k_h r_i) \exp(-im\varphi_i). \end{aligned}$$

Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты угловых характеристик рассеянного акустического поля $|\Psi_S/A|$ в дальней зоне ($r = 100$ м) в плоскости $z = 0$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_0 = 0.8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м

располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_* = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c = 1485 \text{ м/с}$) и отстоит от границы полупространств на расстояние $d = 3 + r_1 \text{ м}$. Упругое полупространство характеризуется параметрами: $\rho_1 = 7.85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\mu_1 = 7.9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ (сталь). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ (поливинилбутираль), так и неоднородное покрытие, механические характеристики которого менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f_1(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Функция $f_1(r)$, задающая неоднородность материала цилиндрического слоя, определена выражением в (2.1.10).

Предполагалось, что точечный источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_i = 4$, $\varphi_i = \pi/3$.

На рисунках 3.3.2 – 3.3.4 представлены зависимости амплитуды рассеяния $|\Psi_S/A|$ от полярного угла φ при волновом размере тела $kr_0 = 4$ в области жидкого полупространства, которая определяется неравенством $-\arcsin(d/r) < \varphi < \arcsin(d/r) + \pi$ (изменение угла против часовой стрелки). На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Сплошная линия соответствует случаю неоднородного покрытия, штриховая – однородному покрытию, пунктирная – однородному цилиндру без покрытия. В названиях рисунков указано, при каком законе неоднородности $f(r)$ построена сплошная кривая на каждом из рисунков и каком типе подстилающей поверхности построена диаграмма. “упруг. п” означает, что цилиндр располагался вблизи упругой поверхности, “абс. жест. п” значит, что цилиндр находился вблизи абсолютно жесткой поверхности и “акуст. мяг. п” означает акустически мягкую поверхность.

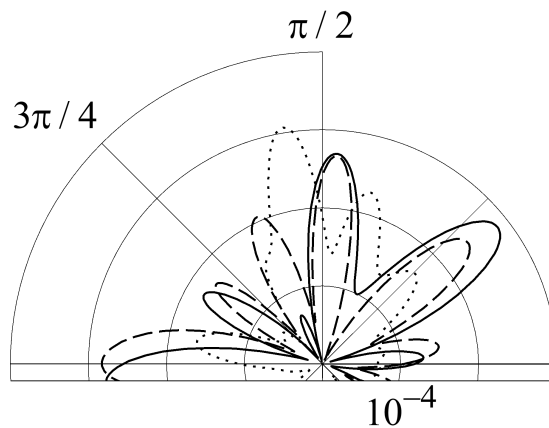
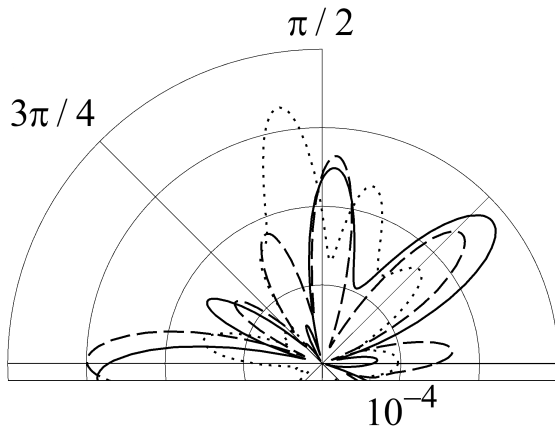
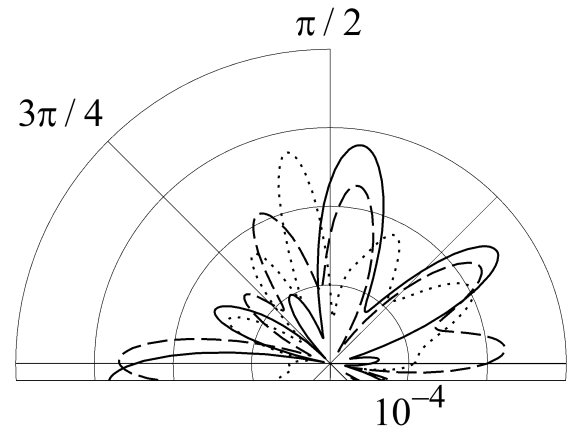


Рис. 3.3.2. $f(r) = f_1(r)$, упруг. п

Сравнивая пунктирные кривые на рисунках 3.3.2 – 3.3.4, построенные для однородного цилиндра без покрытия, расположенного вблизи упругой, абсолютно жесткой и акустически мягкой границ можно видеть, что все типы поверхности оказывают схожее влияние на рассеянное акустическое поле. Более явные различия наблюдаются при сравнении штриховых и

Рис. 3.3.3. $f(r) = f_1(r)$, абс. жест. пРис. 3.3.4. $f(r) = f_1(r)$, акуст. мяг. п

сплошных кривых на рисунках 3.3.2 – 3.3.4. При этом важно отметить, что случаи упругой на рисунке 3.3.2 и абсолютно жесткой на рисунке 3.3.3 поверхностей показывают идентичные по форме результаты, однако количественное значение безразмерной амплитуды в случае абсолютно жесткой поверхности немного больше. Существенно по форме отличается от них рисунок 3.3.4 для случая акустически мягкой поверхности.

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что как тип ограничивающей полупространство поверхности, так и неоднородность цилиндрического слоя влияют на его звукоотражающие свойства.

4. Дифракция звуковых волн на упругих цилиндрах с анизотропными неоднородными покрытиями

В этой главе представлены решения прямых и обратных задач дифракции звуковых волн на однородном изотропном упругом цилиндре с упругим радиально-неоднородным трансверсально-изотропным покрытием. Рассмотрены случаи дифракции звуковых волн, излучаемых линейным и сферическим источниками, на цилиндрическом теле, расположенном в безграничном пространстве и дифракции плоской звуковой волны на цилиндрическом рассеивателе, находящемся в акустическом полупространстве. Показана возможность изменения звукоотражающих свойств упругих тел с помощью непрерывно-слоистых упругих покрытий.

Предложен метод решения обратных задач дифракции звуковых волн на неоднородных упругих телах, использующий исключительно решения прямых дифракционных задач и не требующий экспериментальных замеров акустических откликов. Решены обратные задачи дифракции звука однородных упругих тел цилиндрической формы с непрерывно-неоднородными упругими покрытиями.

Результаты исследований, изложенные в настоящей главе, отражены в работах [46, 47, 138, 140, 143].

4.1. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным упругим покрытием

4.1.1. Рассеяние цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием

Постановка задачи. Рассмотрим однородный изотропный упругий цилиндр бесконечной длины и радиуса r_2 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр покрыт упругим радиально-неоднородным трансверсально-изотропным слоем с внешним радиусом r_1 . Цилиндрическая система координат r, φ, z выбрана таким образом, что координатная ось z совпадает с осью вращения цилиндра и является осью цилиндрической анизотропии материала покрытия (геометрия задачи аналогична показанной на рис. 2.1.1). Полагаем, что модули упругости λ_{ijkl} материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а его плотность ρ — непрерывной функцией координаты r : $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}(r)$, $\rho = \rho(r)$.

Окружающая цилиндрическое тело жидкость является идеальной и характеризуется плотностью ρ_1 и скоростью звука c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр с покрытием падает монохроматическая цилиндрическая волна. Падающая волна излучается бесконечно длинным цилиндрическим источником, на поверхности которого возбуждена одна из мод и ось которого параллельна оси цилиндра. В цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной с рассеивателем, ось источника имеет координаты (r_0, φ_0) .

Выберем дополнительную цилиндрическую систему координат R, θ, z , связанную с источником так, чтобы полярные оси основной и дополнительной систем координат были одинаково ориентированы. Тогда потенциал скоростей гармонической звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником порядка m , может быть представлен в виде

$$\Psi_0 = AH_m(kR) \exp[i(m\theta - \omega t)],$$

где A – амплитуда волны; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; ω – круговая частота; $H_m(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; R – расстояние между источником и точкой наблюдения: $R = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^{1/2}$. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим отраженную от тела волну, а также найдем поля смещений в упругом цилиндре и неоднородном слое.

Уравнения волновых полей. В рассматриваемой постановке задача является двумерной: все искомые величины не зависят от координаты z .

В силу линейной постановки задачи потенциал скоростей полного акустического поля

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_S,$$

где Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны.

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций, представим потенциал скоростей падающей волны в основной системе координат в виде [55]

$$\begin{aligned} \Psi_0 = A(-1)^m \exp(im\varphi_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \times \\ \times \begin{cases} H_{m-n}(kr_0)J_n(kr), & r < r_0; \\ J_{m-n}(kr_0)H_n(kr), & r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n .

С учетом условий излучения на бесконечности рассеянное акустическое поле Ψ_S будем искать в виде

$$\Psi_S(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (4.1.2)$$

Рассмотрим уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом цилиндре.

Представим вектор смещения \mathbf{u}_0 частиц упругого изотропного однородного цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } F + \text{rot } \Phi,$$

где F и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного (1.2.28) и векторного (1.2.29) уравнений Гельмгольца.

Так как упругое тело находится в условиях плоской деформации, то $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_z = 0$, где \mathbf{e}_z – единичный вектор оси z . Тогда векторный потенциал $\mathbf{\Phi} = \Phi(r, \varphi) \mathbf{e}_z$, где $\Phi(r, \varphi)$ – скалярная функция. В этом случае векторное уравнение (1.2.29) сводится к одному скалярному уравнению относительно функции $\Phi = \Phi(r, \varphi)$, которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\Delta \Phi + k_T^2 \Phi = 0.$$

Учитывая условия ограниченности, функции F и Φ будем искать в виде

$$\begin{aligned} F(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_l r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \\ \Phi(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(k_T r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Уравнения движения упругого неоднородного слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды (1.2.25)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

где u_r, u_φ – компоненты вектора смещения \mathbf{u} частиц неоднородного слоя; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое; $\rho = \rho(r)$.

В соответствии с обобщенным законом Гука (1.2.22), с учетом тензора упругих модулей для трансверсально-изотропного материала (1.2.19), компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с компонентами тензора деформаций ε_{ij} соотношениями

$$\sigma_{rr} = \lambda_{11} \varepsilon_{rr} + \lambda_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\lambda_{55} \varepsilon_{r\varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda_{12} \varepsilon_{rr} + \lambda_{22} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad (4.1.5)$$

где

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (4.1.6)$$

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции u_r, u_φ будем искать в виде рядов Фурье

$$u_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad u_\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (4.1.7)$$

Подставляя разложения (4.1.5) в уравнения (4.1.4) с учетом (4.1.6) и (4.1.7), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r), U_{2n}(r)$ для каждого n

$$\widehat{\mathbf{A}}_n U_n'' + \widehat{\mathbf{B}}_n U_n' + \widehat{\mathbf{C}}_n U_n = 0, \quad (4.1.8)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r), U_{2n}(r))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{2 \times 2}$ — матрицы второго порядка с элементами

$$\begin{aligned} a_{n11} &= \lambda_{11} r^2, & a_{n12} &= a_{n21} = 0, & a_{n22} &= \lambda_{55} r^2, \\ b_{n11} &= \lambda'_{11} r^2 + \lambda_{11} r, & b_{n12} &= b_{n21} = in(\lambda_{12} + \lambda_{55})r, & b_{n22} &= \lambda'_{55} r^2 + \lambda_{55} r, \\ c_{n11} &= \omega^2 r^2 \rho - n^2 \lambda_{55} + \lambda'_{12} r - \lambda_{22}, & c_{n12} &= in(\lambda'_{22} r - \lambda_{55} - \lambda_{22}), \\ c_{n21} &= in(\lambda'_{55} r + \lambda_{55} + \lambda_{22}), & c_{n22} &= \omega^2 r^2 \rho - n^2 \lambda_{22} + \lambda'_{55} r - \lambda_{55}. \end{aligned}$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Коэффициенты A_n , B_n , C_n разложений (4.1.2), (4.1.3) и функции U_{1n} , U_{2n} из разложений (4.1.7) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательного напряжения (1.2.30). На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения (1.2.31).

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ находим коэффициенты A_n , выраженные через $U_{1n}(r)$

$$A_n = -\frac{A\alpha_{mn}kJ'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kH'_n(kr_1)}, \quad (4.1.9)$$

где

$$\alpha_{mn} = (-1)^{n+m} H_{m-n}(kr_0) \exp(im\varphi_0).$$

В случае симметричной падающей волны ($m = 0$) получаем $\alpha_{0n} = H_n(kr_0)$ и

$$A_n = -\frac{AH_n(kr_0)kJ'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kH'_n(kr_1)}.$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = r_2$ находим неизвестные коэффициенты B_n и C_n , выраженные через $U_{1n}(r_2)$ и $U_{2n}(r_2)$, аналогично тому, как показано в разделе 2.1.

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получаем четыре краевых условия, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (4.1.8)

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \widehat{\mathbf{D}}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_1} &= \mathbf{G}_n, \\ \left(\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \widehat{\mathbf{F}}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

где $\mathbf{G}_n = (g_{n1}, 0)^T$; $\widehat{\mathbf{D}}_n = (d_{nij})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{F}}_n = (f_{nij})_{2 \times 2}$ — матрицы второго порядка с элементами

$$g_{n1} = 2A\rho_1\omega r_1\alpha_{mn}/(\pi kH'_n(kr_1)), \quad d_{n11} = r\lambda_{12} + \rho_1\omega^2 r^2 H_n(kr)/(kH'_n(kr)),$$

$$d_{n12} = inr\lambda_{12}, \quad d_{n21} = inr\lambda_{55}, \quad d_{n22} = -r\lambda_{55}.$$

Элементы матрицы \widehat{F}_n приведены в разделе в разделе 2.1.

Решая краевую задачу (4.1.8), (4.1.10) методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических B -сплайнов [50], определим неизвестные функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$. Затем вычислим коэффициенты A_n , B_n , C_n . В результате получим аналитические выражения, описывающие волновые поля вне и внутри цилиндрического тела.

Отметим, что из полученного решения прямой задачи дифракции цилиндрических волн на упругом цилиндре с неоднородным трансверсально-изотропном покрытием можно получить решение для случая, когда падающая волна является плоской. Для этого следует заменить в (4.1.9) функцию $H_n(kr_0)$ ее асимптотическим выражением согласно

$$H_n(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left[i \left(kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (4.1.11)$$

считая, что расстояние между источником и рассеивателем достаточно велико ($kr_0 \gg 1$). В результате получим решение задачи дифракции плоской волны с амплитудой $A \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} \exp[i(kr_0 - \frac{\pi}{4})]$, распространяющейся перпендикулярно оси цилиндра в направлении волнового вектора, образующего угол $\pi - \varphi_0$ с положительным направлением оси x .

Численные исследования. Были проведены расчеты угловых зависимостей безразмерной амплитуды звукового рассеяния $|\Psi_S/A|$ от координаты φ при $r = 100$ м.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_2 = 0.8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). При расчетах использовались следующие характерные значения модулей упругости, приведенные в таблице 4.1.1.

Таблица 4.1.1. Характерные величины модулей упругости ($\times 10^9$) Н/м²

Материал	λ_{11}^0	λ_{12}^0	λ_{22}^0	λ_{23}^0	λ_{55}^0
Тип 1	3.2	2.41	9.15	2.41	0.95
Тип 2	9.15	0.6	3.2	0.6	1.11
Изотропный	5.86	3.9	5.86	3.9	0.98

Изотропной базой материалов был поливинилбутираль с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³.

Отметим, что в анизотропных средах распространяющиеся волны не являются ни чисто продольными, ни чисто поперечными. В работе [61] приведены выражения для сечений поверхностей фазовых скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн, распространяющихся в однородных трансверсально-изотропных средах, плоскостью проходящей через ось упругой симметрии. Упругие характеристики трансверсально-изотропных материалов типов

1, 2 таковы, что максимум фазовой скорости квазипродольных волн в материале типа 1 достигается в направлении касательной к поверхности изотропии, а в материале типа 2 – в направлении оси упругой симметрии, т.е. в радиальном направлении.

Рассматривалось как однородное трансверсально-изотропное покрытие, так и неоднородные, физико-механические характеристики которой изменялись по законам

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda_{pq} = \lambda_{pq}^0, \quad f(r) = f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r), \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

Функции $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$, $f_4(r)$, задающие неоднородность материала цилиндрического слоя, определены выражениями (2.1.10), (2.1.11).

Предполагалось, что линейный источник излучает симметричную ($m = 0$) звуковую волну единичной амплитуды с частотой, соответствующей волновому размеру тела $kr_1 = 5$, и располагается в точке с координатами $r_0 = 4r_1$ и $\varphi_0 = \pi$.

На рисунках 4.1.1 – 4.1.8 представлены диаграммы направленности рассеянного поля. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Сплошные линии соответствуют случаю трансверсально-изотропного неоднородного покрытия, штриховые линии построены для изотропного неоднородного случая, а пунктирные для случая изотропного однородного покрытия, где полагалось $\rho = \rho^0$. В названиях рисунков указано, при каком законе неоднородности $f(r)$ построены сплошная и штриховая кривые, и при каком типе анизотропии построена сплошная кривая на каждом из рисунков.

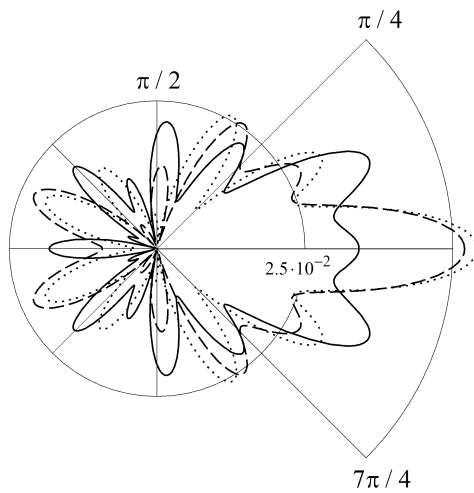


Рис. 4.1.1. $f(r) = f_1(r)$, тип 1

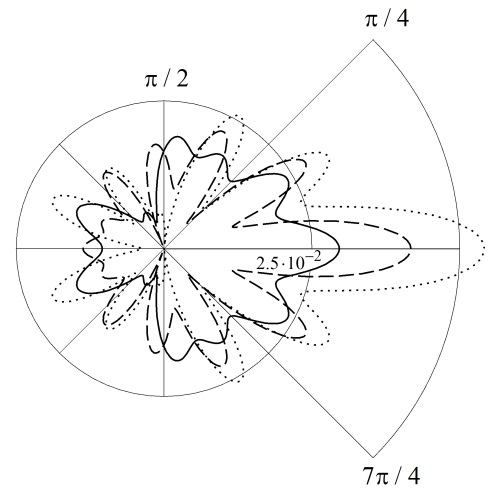
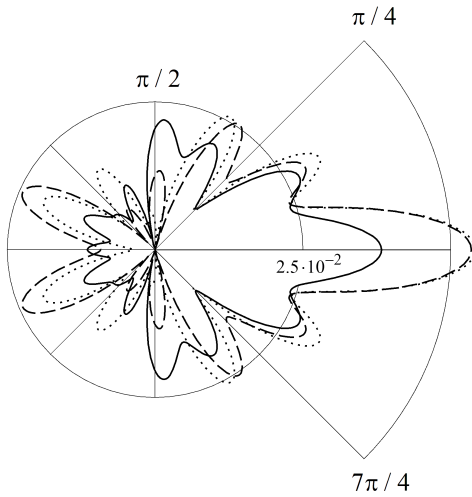
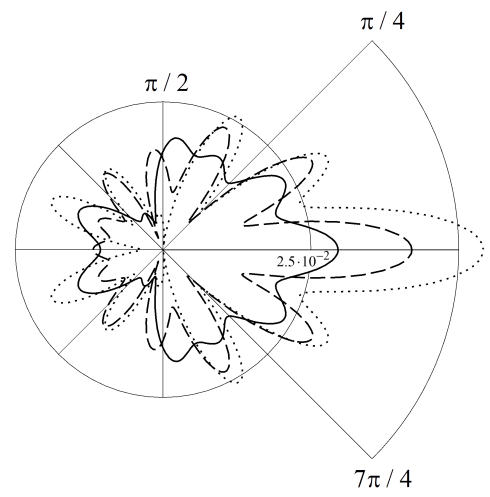
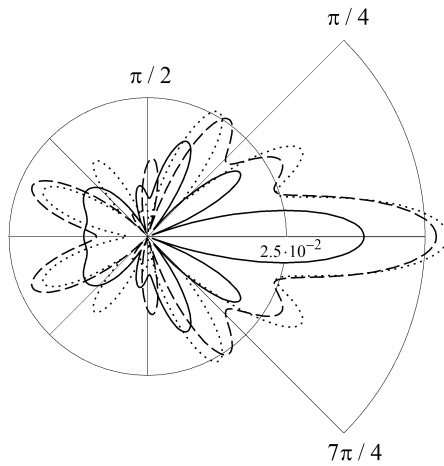
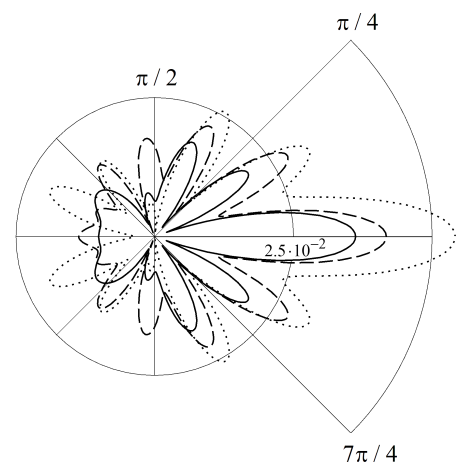


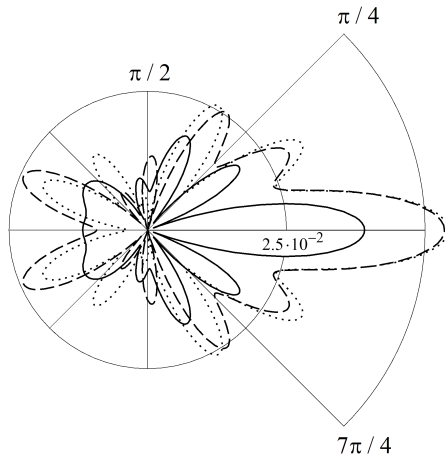
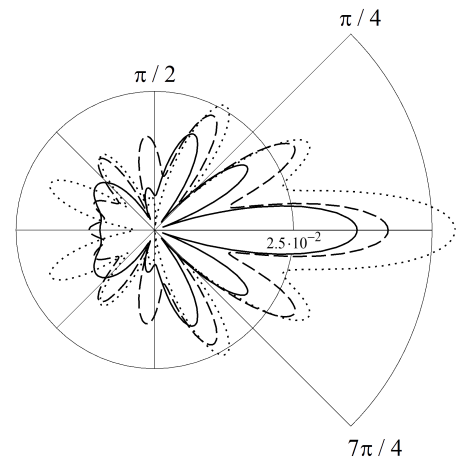
Рис. 4.1.2. $f(r) = f_2(r)$, тип 1

Сравнивая на каждом из рисунков 4.1.1 – 4.1.8 штриховую и пунктирную кривые, можно видеть, что рассматриваемые законы неоднородности $f(r)$ сохраняют относительную форму диаграмм рассеянного поля. Сравнивая этот результат со сплошными кривыми можно сделать вывод о том, что форма диаграмм направленности существенно зависит от типа анизотропии упругого покрытия. Следует отметить, что убывающие по толщине слоя функции

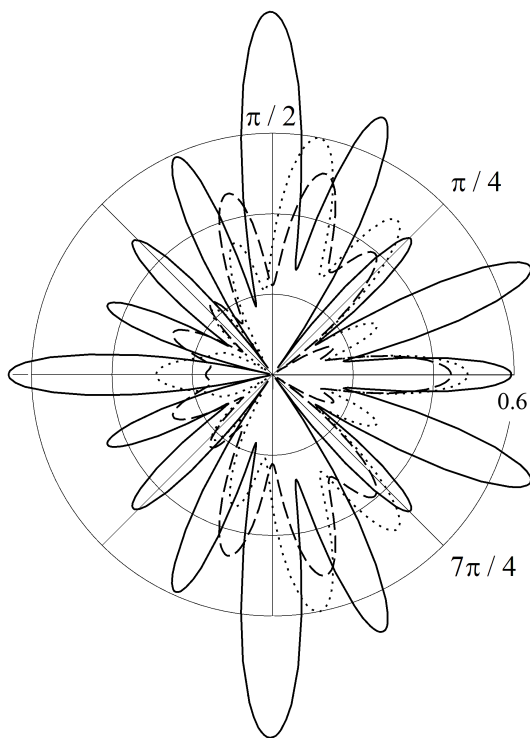
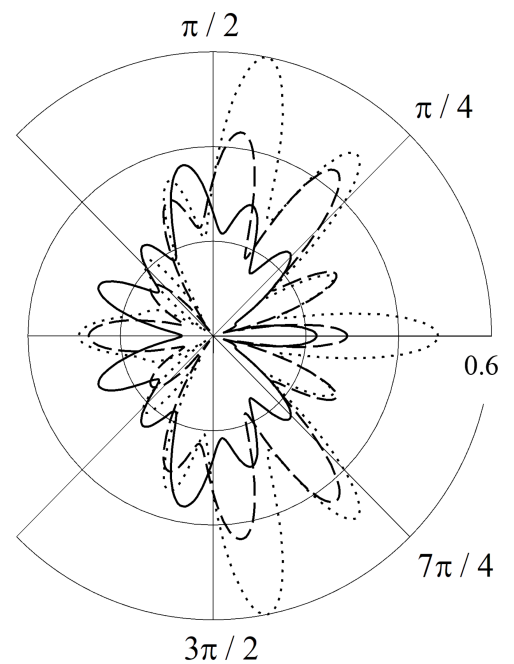
Рис. 4.1.3. $f(r) = f_3(r)$, тип 1Рис. 4.1.4. $f(r) = f_4(r)$, тип 1Рис. 4.1.5. $f(r) = f_1(r)$, тип 2Рис. 4.1.6. $f(r) = f_2(r)$, тип 2

неоднородности $f_2(r)$, $f_4(r)$ (рисунки 4.1.2, 4.1.4) показывают достаточно схожее влияние на рассеянное акустическое поле как в случае изотропного неоднородного покрытия (штриховые линии), так и для случая неоднородного покрытия с анизотропией типа 1 (сплошные линии).

Из рисунков 4.1.5 – 4.1.8 видно, что анизотропия типа 2 привела к одинаковым характеристикам рассеянного поля для всех рассматриваемых законов неоднородности $f(r) = f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$, $f_4(r)$ (сплошные линии). Небольшое различие их влияния наиболее заметно в областях прямого ($\varphi = 0$) и обратного ($\varphi = \pi$) рассеяния звука, и оценивается как разница не более чем в 3% относительно отклонения от изотропного однородного случая (пунктирные кривые), которое составляет от 28% до 31% для рассматриваемых законов $f(r)$. В целом изменения, вносимые в рассеянное поле неоднородностями материала $f(r) = f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$, $f_4(r)$ менее значительны, чем изменения, связанные с введением анизотропии.

Рис. 4.1.7. $f(r) = f_3(r)$, тип 2Рис. 4.1.8. $f(r) = f_4(r)$, тип 2

На рисунках 4.1.9 – 4.1.12 представлены диаграммы направленности рассеянного поля вблизи поверхности цилиндрического рассеивателя при $r = 1.1r_1$. Сплошные линии соответствуют случаю трансверсально-изотропного неоднородного покрытия, штриховые линии построены для изотропного неоднородного случая, а пунктирные для случая изотропного однородного покрытия. В названиях рисунков указано, при каком законе неоднородности $f(r)$ построены сплошная и штриховая кривые, и при каком типе анизотропии построена сплошная кривая на каждом из рисунков. Обозначение “бз” в названиях рисунков следует понимать, как то, что рисунок построен в ближней зоне по отношению к рассеивателю.

Рис. 4.1.9. $f(r) = f_1(r)$, тип 1, бзРис. 4.1.10. $f(r) = f_2(r)$, тип 1, бз

Сравнивая диаграммы на рисунках 4.1.9 – 4.1.12 с соответствующими диаграммами, построенными в дальней зоне поля (рисунки 4.1.1, 4.1.2, 4.1.5, 4.1.6) можно видеть, что качественные и количественные характеристики для ближней и дальней зоны поля существенно отличаются. Отметим, что из рисунков 4.1.11, 4.1.12, как и в дальней зоне поля, можно видеть одинаковое влияние рассматриваемых законов неоднородности $f(r) = f_1(r), f_2(r)$ при анизотропии типа 2 (сплошные кривые).

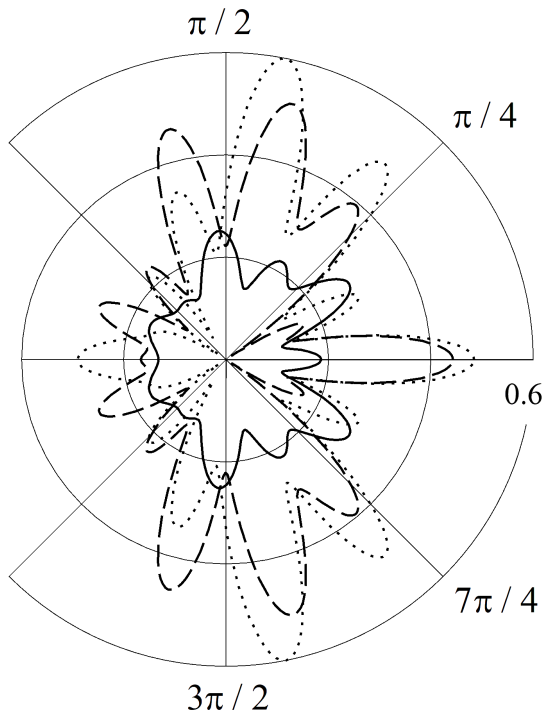


Рис. 4.1.11. $f(r) = f_1(r)$, тип 2, бз

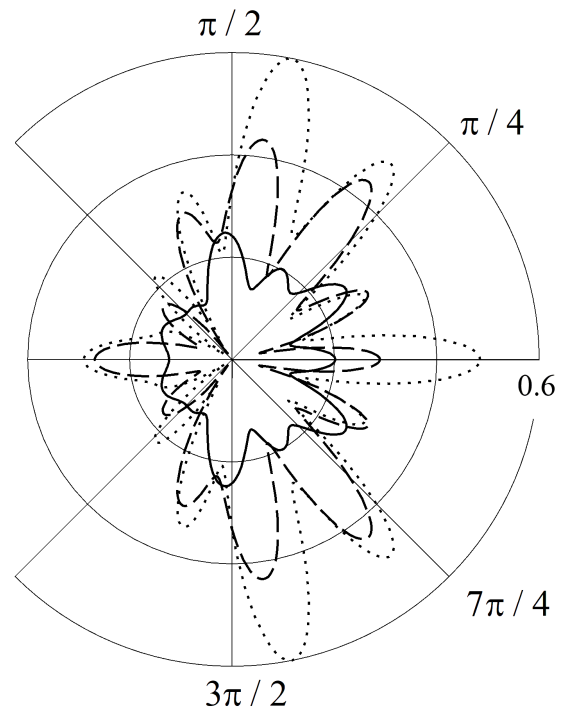


Рис. 4.1.12. $f(r) = f_2(r)$, тип 2, бз

Рисунки 4.1.13, 4.1.14 построены в дальней зоне поля для случая, когда первичным источником волнового возмущения является плоская звуковая волна. Обозначение “пл” в названиях рисунков следует понимать, как то, что рисунок построен для случая падения плоской звуковой волны.

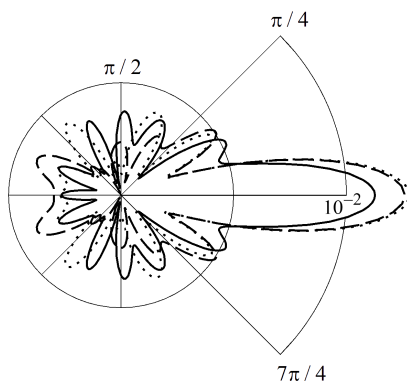


Рис. 4.1.13. $f(r) = f_1(r)$, тип 1, пл

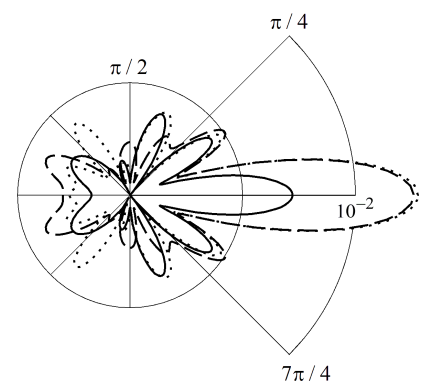


Рис. 4.1.14. $f(r) = f_1(r)$, тип 2, пл

Для построения диаграмм в случае плоской звуковой волны при расчетах полагалось, что линейный источник располагается в точке с радиальной координатой $r_0 = 110r_1$. Сравнивая построенные рисунки в случае плоской волны с соответствующими рисунками, построенными для случая, когда линейный источник располагался вблизи поверхности цилиндрического рассеивателя (рисунки 4.1.1, 4.1.5), можно сделать вывод о том, что учет криволинейности волнового фронта падающей волны оказывает существенное влияние на рассеянное акустическое поле в том случае, когда источник первичного волнового возмущения располагается вблизи рассеивающего тела.

Видно, что на рассматриваемых частотах учет криволинейности волнового фронта линейного источника, расположенного вблизи поверхности цилиндрического рассеивателя, анизотропия и неоднородность материала покрытия цилиндра существенно изменяют форму круговых диаграмм направленности амплитуды рассеянной звуковой волны.

4.1.2. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука при дифракции цилиндрической звуковой волны

Постановка и решение задачи. Рассмотрим дальнюю зону акустического поля ($kr \gg 1$). Используя асимптотическое представление функции Ганкеля при больших значениях аргумента (4.1.11) из (4.1.2) находим

$$\Psi_S \approx A \sqrt{\frac{r_1}{2r}} \exp \left[i \left(kr - \frac{\pi}{4} \right) \right] F(\omega, \varphi),$$

где

$$F(\omega, \varphi) = \frac{2}{A \sqrt{\pi k r_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n \exp[in(\varphi - \varphi_0)].$$

На основе решения прямой задачи подраздела 4.1.1 определим такие законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее рассеяние звука в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ при фиксированном угле наблюдения $\varphi = \varphi_*$ и в заданном секторе наблюдения $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ при фиксированной частоте $\omega = \omega_*$.

Будем считать, что функции ρ , λ_{11} , λ_{12} , λ_{22} , λ_{55} аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной r , то есть будем рассматривать следующие квадратичные законы неоднородности трансверсально-изотропного упругого материала покрытия:

$$\eta(r) = \eta^0 \bar{\eta}(r), \quad (4.1.12)$$

где

$$\bar{\eta}(r) = \eta^{(0)} + \eta^{(1)}r + \eta^{(2)}r^2. \quad (4.1.13)$$

Здесь и далее под символом η подразумевается каждая из величин ρ , λ_{pq} , а под символом η^0 — характерные величины для механических свойств материала покрытия. Отметим, что

значение модуля упругости λ_{23} не фиксируется, так как он не присутствует ни в уравнениях (4.1.8), ни в краевых условиях (4.1.10).

В качестве меры звукового рассеяния введем величину $I(\omega, \varphi) = |F(\omega, \varphi)|^2$ — интенсивность звукового рассеяния. Построим функционалы вида

$$\Phi_1[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega, \varphi_*) d\omega, \quad (4.1.14)$$

$$\Phi_2[\rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}] = \frac{1}{(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I(\omega_*, \varphi) d\varphi, \quad (4.1.15)$$

определенные на классе квадратичных функций (4.1.13) и выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука в заданном диапазоне частот и угловом секторе наблюдения соответственно.

Для каждого функционала найдем такие значения коэффициентов функций (4.1.13), при которых он достигает минимального значения.

Для функций (4.1.13), определенных на отрезке $[r_2, r_1]$, введем ограничения

$$C_{1\eta} \leq \bar{\eta}(r) \leq C_{2\eta}, \quad (4.1.16)$$

где $C_{1\eta}, C_{2\eta}$ — некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (4.1.16) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс r и осью ординат $f(r)$ бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$\Omega(\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = \{(r, f) : r_2 \leq r \leq r_1, C_{1\eta} \leq f \leq C_{2\eta}\},$$

показанной на рисунке 4.1.15.

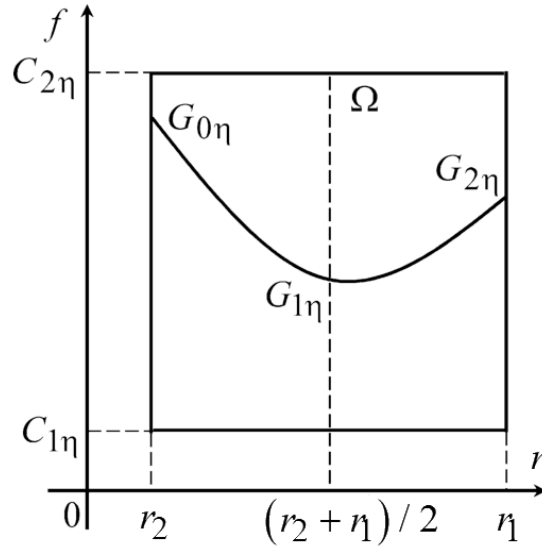
В области Ω каждая функция $f(r)$ единственным образом определяется тремя точками $G_{0\eta}(r_2, f_{0\eta}), G_{1\eta}(\bar{r}, f_{1\eta}), G_{2\eta}(r_1, f_{2\eta})$, где $\bar{r} = (r_2 + r_1)/2$, $f_{q\eta} \in [C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ ($q = 0, 1, 2$).

Подставляя значения точек $G_{0\eta}, G_{1\eta}, G_{2\eta}$ в выражение (4.1.13), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$. Решая полученную систему, находим

$$\begin{aligned} \eta^{(0)} &= [f_{0\eta} r_1 \bar{r} (\bar{r} - r_1) + f_{1\eta} r_1 r_2 (r_1 - r_2) + f_{2\eta} \bar{r} r_2 (r_2 - \bar{r})] / \Delta_\eta, \\ \eta^{(1)} &= [f_{0\eta} (r_1^2 - \bar{r}^2) + f_{1\eta} (r_2^2 - r_1^2) + f_{2\eta} (\bar{r}^2 - r_2^2)] / \Delta_\eta, \\ \eta^{(2)} &= [f_{0\eta} (\bar{r} - r_1) + f_{1\eta} (r_1 - r_2) + f_{2\eta} (r_2 - \bar{r})] / \Delta_\eta, \\ \Delta_\eta &= (r_1 - r_2) (r_1 r_2 - r_1 \bar{r} - r_2 \bar{r} + \bar{r}^2). \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Выбирая из отрезка $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ значения ординат $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$ и вычисляя с помощью соотношений (4.1.17) значения коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, получаем квадратичные законы неоднородности материала покрытия. При этом не все квадратичные законы подлежат рассмотрению. Если выполняется условие

$$r_2 \leq -\eta^{(1)} / (2\eta^{(2)}) \leq r_1,$$

Рис. 4.1.15. Область Ω

то это означает, что абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[r_2, r_1]$. В этом случае параболу следует рассматривать только тогда, когда ордината ее вершины принадлежит отрезку $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$, то есть при выполнении условия

$$C_{1\eta} \leq \eta^{(0)} - \eta^{(1)2} / (4\eta^{(2)}) \leq C_{2\eta}. \quad (4.1.18)$$

Поиск значений коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ функций (4.1.13), удовлетворяющих условиям (4.1.16) и минимизирующих функцию

$$\Phi_m \left(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, \lambda_{55}^{(0)}, \lambda_{55}^{(1)}, \lambda_{55}^{(2)} \right) \rightarrow \min \quad (m = 1, 2), \quad (4.1.19)$$

осуществим с помощью алгоритма имитации отжига [87].

Введем для ординаты $f_{q\eta}$ ($q = 0, 1, 2$) точки $G_{q\eta}$ на отрезке $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ равномерную сетку $f_{q\eta}^{(l_{q\eta})} = C_{1\eta} + l_{q\eta}h$. Здесь $l_{q\eta}$ — номер узла сетки, $h = (C_{2\eta} - C_{1\eta}) / \tilde{n}$ — шаг сетки, \tilde{n} — количество равных частей, на которые разбит отрезок $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$.

Нахождение оптимального набора коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ осуществим с помощью процедуры поиска минимума функции пятнадцати переменных (4.1.19). Алгоритм имитации отжига представляет собой метод решения задачи глобальной оптимизации. Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов.

На первом этапе из множества допустимых дискретных сочетаний на введенной сетке случайным образом выбирается начальная точка — совокупность пятнадцати значений

$$\mathbf{f}^{(0)} = (f_{0\rho}, f_{1\rho}, f_{2\rho}, \dots, f_{0\lambda_{55}}, f_{1\lambda_{55}}, f_{2\lambda_{55}}).$$

На втором этапе в качестве минимального значения устанавливается текущий уровень

энергии $E_{\min} = \Phi_m(\mathbf{f}^{(0)})$, а также начальное и конечное значения температуры — $T_{\max} = T(1)$ и T_{\min} , которые определяют количество выполняемых итераций в вычислительном процессе.

Понижение температуры определяется законом $T(j) = T_{\max}/j^{(1/w)}$, где w — число параметров, оптимизирующих значение функции Φ_m .

Итерация j основного цикла выглядит следующим образом:

1) Сгенерировать новую точку $\mathbf{f}^{(j)}$ по правилу

$$\mathbf{f}^{(j)} = \mathbf{f}^{(j-1)} + T(j) \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \sim C(0, 1),$$

где $C(0, 1)$ — стандартное распределение Коши размерности w .

2) Вычислить новое значение энергии $E_j = \Phi_m(\mathbf{f}^{(j)})$.

3) Сравнить энергию системы E_j в состоянии $\mathbf{f}^{(j)}$ с найденным к текущему моменту минимальным значением E_{\min} . Если $E_j < E_{\min}$, то необходимо изменить текущее значение минимума $E_{\min} = E_j$, понизить значение температуры и перейти к следующей итерации. Если $E_j \geq E_{\min}$, то следует перейти к следующему шагу.

4) Сгенерировать случайную величину $\tilde{\alpha}$, равномерно распределенную на интервале $(0, 1)$.

5) Понизить значение температуры системы. Вычислить вероятность принятия нового состояния системы, которая в соответствии с распределением Гиббса равна

$$P(\Delta E, T(j)) = \exp[(E_{\min} - E_j)/T(j)].$$

Если $\tilde{\alpha} < P(\Delta E, T(j))$, то необходимо изменить текущее значение минимума и перейти к следующей итерации.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока выполняется условие $T(j) > T_{\min}$.

Так как поставленная задача решается на некотором дискретном множестве значений $f_{0\eta}$, $f_{1\eta}$, $f_{2\eta}$, то на первый шаг основного цикла накладываются дополнительные условия. В том случае, если найденное значение $\mathbf{f}^{(j)}$ выходит за пределы области Ω , то $\mathbf{f}^{(j)}$ вычисляется заново. Также сгенерированное значение $\mathbf{f}^{(j)}$ может не соответствовать узлам введенной сетки. В таком случае $\mathbf{f}^{(j)}$ округляется до ближайшего узла.

Найденный таким образом локальный минимум функции Φ_m и соответствующий ему набор коэффициентов зависит как от выбора начальной точки, так и от значения шага h , вектора \mathbf{X} , а также значений $\tilde{\alpha}$, $P(\Delta E, T(j))$, которые за одну полную процедуру поиска могут вычисляться достаточно большое количество раз. Поэтому процедура поиска локального минимума повторяется M раз, а в качестве конечного решения выбирается наилучший найденный результат.

Численные исследования. Проведены расчеты параметров в законах неоднородности (4.1.12), обеспечивающих минимальное рассеяние звука. Полагалось, что магниевый цилиндр ($\rho_0 = 1.74 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 3.8 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 1.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_2 = 0.8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). При расчетах рассматривались два типа характерных модулей упругости неоднородного трансверсально-изотропного цилиндрического

слоя, а также случай изотропного неоднородного покрытия. Изотропной базой всех материалов был алюминий с характерной плотностью $\rho^0 = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Характерные значения модулей упругости приведены в таблице 4.1.2.

Таблица 4.1.2. Характерные величины модулей упругости ($\times 10^{10}$) Н/м²

Материал	λ_{11}^0	λ_{12}^0	λ_{22}^0	λ_{23}^0	λ_{55}^0
Тип 3	5.74	3.28	16.4	3.28	2.54
Тип 4	16.4	0.82	5.74	0.82	2.95
Изотропный	10.5	5.3	10.5	5.3	2.6

Упругие характеристики трансверсально-изотропных материалов типов 3, 4 таковы, что максимум фазовой скорости квазипродольных волн в материале типа 3 достигается в направлении касательной к поверхности изотропии, а в материале типа 4 – в радиальном направлении.

Предполагалось, что линейный источник излучает симметричную ($m = 0$) звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_0 = 4r_1$ и $\varphi_0 = \pi$.

В ограничениях (4.1.16) полагалось $C_{1\eta} = 0.5$ и $C_{2\eta} = 1.5$ для всех функций $\eta = \rho, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{55}$.

При расчетах использовались следующие параметры алгоритма имитации отжига. Шаг сетки полагался $h = 0.125$. Размерность пространства параметров $w = 15$, а в качестве минимального и максимального значений температуры были выбраны значения $T_{\min} = 5$ и $T_{\max} = 10$, что обеспечило 32767 итераций за одну полную процедуру поиска оптимальных значений. Для каждого типа входных данных эксперимент выполнялся $M = 10$ раз.

Все допустимые законы неоднородности материала покрытия изображены на рисунке 4.1.16.

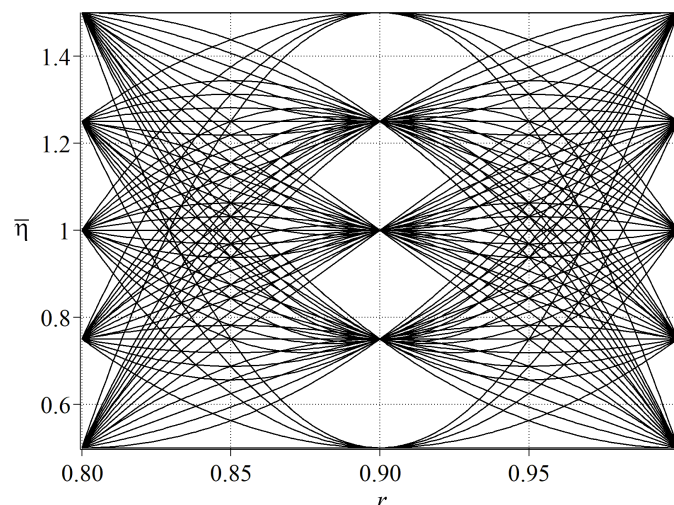


Рис. 4.1.16. Допустимые квадратичные зависимости

Законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие наименьшую интенсивность рассеяния звука цилиндром с покрытием при фиксированном угле $\varphi_* = \pi$ в частотном диапазоне, определяемым изменением волнового размера цилиндра в промежутке $4.8 \leq kr_2 \leq 6.4$ имеют вид:

тип 3

$$\begin{aligned}\rho &= 2.7 \cdot 10^3 (-12.5r^2 + 17.5r - 4.5), \\ \lambda_{11} &= 5.74 \cdot 10^{10} (-56.25r^2 + 99.375r - 42.625), \\ \lambda_{12} &= 3.28 \cdot 10^{10} (-62.5r^2 + 112.5r - 49.5), \\ \lambda_{22} &= 16.4 \cdot 10^{10} (-18.75r^2 + 34.375r - 15), \\ \lambda_{55} &= 2.54 \cdot 10^{10} (25r^2 - 45r + 21.5); \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

тип 4

$$\begin{aligned}\rho &= 2.7 \cdot 10^3 (37.5r^2 - 67.5r + 31.5), \\ \lambda_{11} &= 16.4 \cdot 10^{10} \cdot 0.5, \\ \lambda_{12} &= 0.82 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81.5), \\ \lambda_{22} &= 5.74 \cdot 10^{10} (12.5r^2 - 27.5r + 15.5), \\ \lambda_{55} &= 2,54 \cdot 10^{10} (-43.75r^2 + 81.875r - 37); \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

изотропный

$$\begin{aligned}\rho &= 2.7 \cdot 10^3 (6.25r^2 - 13.125r + 8), \\ \lambda_{11} &= 10.5 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81.5), \\ \lambda_{12} &= 5.3 \cdot 10^{10} (6.25r^2 - 11.875r + 6.75), \\ \lambda_{22} &= 10.5 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81.5), \\ \lambda_{55} &= 2.6 \cdot 10^{10} (25r^2 - 50r + 25.5). \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Для оптимальных законов неоднородности (4.1.20) – (4.1.22) значения функционала Φ_1 равны $1.26 \cdot 10^{-2}$, 10^{-2} и $1.23 \cdot 10^{-2}$ соответственно. Для оценки эффективности покрытий с оптимальными звукоотражающими свойствами было рассчитано значение функционала Φ_1 для упругого цилиндра без покрытия, равное $1.86 \cdot 10^{-2}$.

Для случая фиксированной частоты ω_* , которой соответствует волновой размер цилиндра $kr_2 = 4.8$, в угловом секторе $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ получены следующие оптимальные законы неоднородности материала покрытия:

тип 3

$$\begin{aligned}
\rho &= 2.7 \cdot 10^3 (-100r^2 + 180r - 79.5), \\
\lambda_{11} &= 5.74 \cdot 10^{10} (37.5r^2 - 67.5r + 31.5), \\
\lambda_{12} &= 3.28 \cdot 10^{10} (-56.25r^2 + 100.625r - 43.875), \\
\lambda_{22} &= 16.4 \cdot 10^{10} (-6.25r^2 + 11.875r - 5), \\
\lambda_{55} &= 2.54 \cdot 10^{10} (100r^2 - 180r + 81.5);
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

тип 4

$$\begin{aligned}
\rho &= 2.7 \cdot 10^3 (56.25r^2 - 101.875r + 46.875), \\
\lambda_{11} &= 16.4 \cdot 10^{10} \cdot 1.5, \\
\lambda_{12} &= 0.82 \cdot 10^{10} (-12.5r^2 + 26.25r - 26), \\
\lambda_{22} &= 5.74 \cdot 10^{10} (87.5r^2 - 157.5r + 71.5), \\
\lambda_{55} &= 2.54 \cdot 10^{10} (-62.5r^2 + 113.75r - 50.375);
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

изотропный

$$\begin{aligned}
\rho &= 2.7 \cdot 10^3 (62.5r^2 - 112.5r + 51.5), \\
\lambda_{11} &= 10.5 \cdot 10^{10} (25r^2 - 47.5r + 23.5), \\
\lambda_{12} &= 5.3 \cdot 10^{10} (18.75r^2 - 29.375r + 12.125), \\
\lambda_{22} &= 10.5 \cdot 10^{10} (37.5r^2 - 67.5r + 31.5), \\
\lambda_{55} &= 2.6 \cdot 10^{10} \cdot 0.5.
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

При этом наименьшие значения функционала Φ_2 при найденных оптимальных законах (4.1.23) – (4.1.25) для анизотропии типов 3 и 4 равны $\Phi_2 = 0.69 \cdot 10^{-2}$ и $\Phi_2 = 0.51 \cdot 10^{-2}$, а для изотропного покрытия $\Phi_2 = 0.56 \cdot 10^{-2}$. Для упругого цилиндра без покрытия $\Phi_2 = 1.15 \cdot 10^{-2}$.

Для иллюстрации эффективности предложенных покрытий проведены расчеты частотных и угловых зависимостей интенсивности рассеяния звука.

На рисунке 4.1.17 приведены зависимости интенсивности звукоотражения $I(\omega, \varphi)$ от волнового размера kr_2 при $\varphi = \pi$ в диапазоне $4.8 \leq kr_2 \leq 6.4$. Сплошными линиями изображены частотные зависимости для цилиндров, имеющих покрытия с оптимальными законами неоднородности (4.1.20) (рис. 4.1.17a), (4.1.21) (рис. 4.1.17b) и (4.1.22) (рис. 4.1.17c).

На рисунке 4.1.18 приведены угловые зависимости интенсивности звукоотражения $I(\omega, \varphi)$ при фиксированной частоте $\omega = 4.8c/r_2$ в угловом секторе $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$. Сплошными линиями показаны зависимости для цилиндров с оптимальными покрытиями (4.1.23) (рис. 4.1.18a), (4.1.24) (рис. 4.1.18b) и (4.1.25) (рис. 4.1.18c).

Пунктирными линиями обозначены зависимости для цилиндра без покрытия.

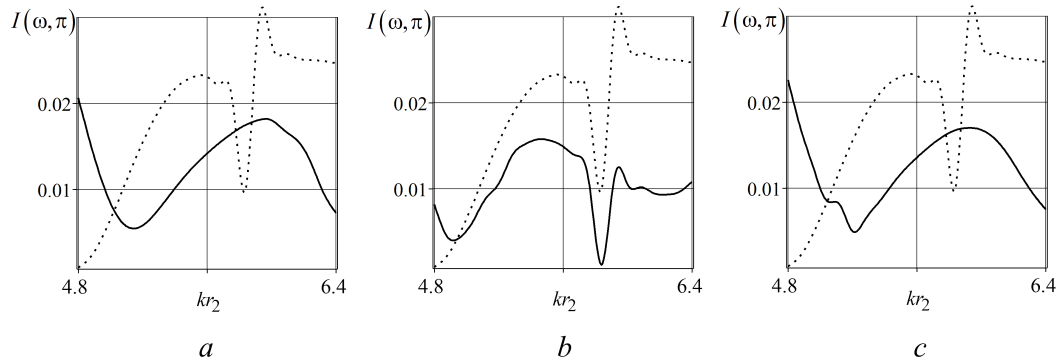


Рис. 4.1.17. Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния

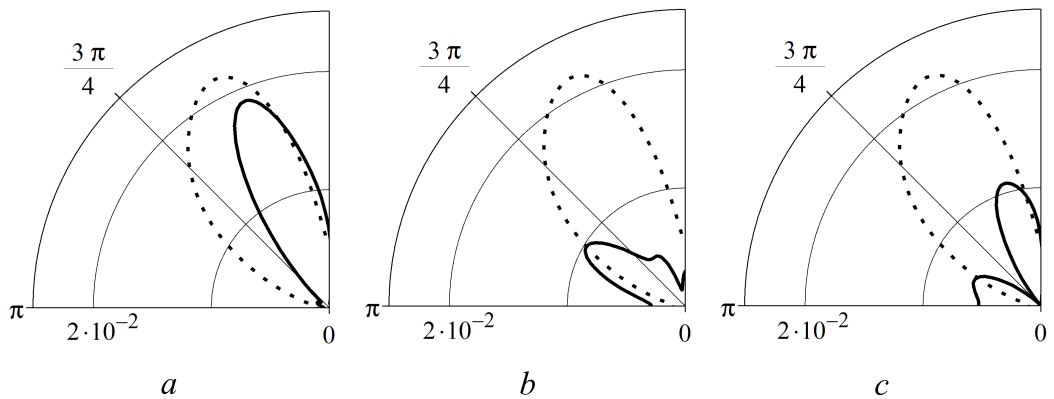


Рис. 4.1.18. Угловые зависимости интенсивности звукового рассеяния

Таким образом, осуществлено моделирование непрерывно-неоднородного покрытия, обеспечивающего наименьшее звуковое рассеяние. Расчеты показали, что с использованием неоднородного покрытия с характеристиками, распределенными по соответствующим законам неоднородности, можно существенно уменьшить интенсивность рассеянного цилиндром акустического поля в заданном диапазоне частот и в определенном направлении.

4.2. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием

Постановка задачи. Рассмотрим случай, когда падающая из внешнего пространства на изотропный упругий цилиндр с неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием, введенный в рассмотрение в разделе 4.1, звуковая волна является сферической и излучается точечным источником (рис. 4.2.1).

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, цилиндрические координаты которого (r_0, φ_0, z_0) . Потенциал скорости падающей волны

$$\Psi_0 = A \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0| - i\omega t)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|}, \quad (4.2.1)$$

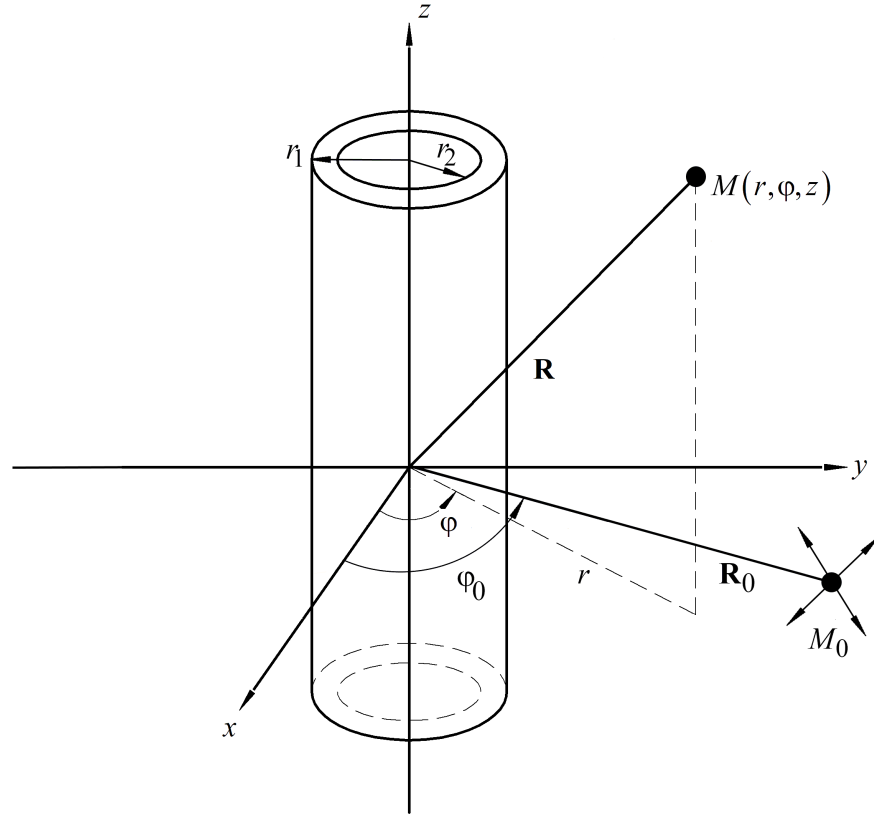


Рис. 4.2.1. Геометрия задачи 4.2

где A – амплитуда волны; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; \mathbf{R} и \mathbf{R}_0 – радиус-векторы точки наблюдения и точки, в которой располагается источник; ω – круговая частота; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поля смещений в однородном цилиндре и неоднородном трансверсально-изотропном слое.

Уравнения волновых полей. В силу линейности рассматриваемой задачи потенциал скорости полного акустического поля Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_S,$$

где Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны.

Запишем сферическую звуковую волну (4.2.1) в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям [55]

$$\Psi_0 = A \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_0(h) dh,$$

$$\tilde{\Psi}_0(h) = \frac{i}{2} e^{ih(z-z_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} H_n(k_h r_0) J_n(k_h r), & r < r_0; \\ J_n(k_h r_0) H_n(k_h r), & r > r_0, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

где $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$; $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка n ; $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Без ограничения общности положим $z_0 = 0$.

С учетом условий излучения на бесконечности потенциал скорости рассеянной волны Ψ_S , являющейся решением уравнения Гельмгольца, будем искать в виде

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh. \quad (4.2.3)$$

Рассмотрим уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом цилиндре. Представим вектор смещения \mathbf{u}_0 частиц однородного изотропного упругого цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } F + \text{rot } \Phi,$$

где F и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца (1.2.28) и (1.2.29) соответственно.

Представим вектор Φ уравнения (1.2.29) в виде

$$\Phi = \text{rot}(W \cdot \mathbf{e}_z) + k_\tau M \cdot \mathbf{e}_z,$$

где W и M – функции пространственных координат; \mathbf{e}_z – единичный вектор оси z .

Тогда векторное уравнение (1.2.29) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций W и M

$$\Delta W + k_\tau^2 W = 0, \quad \Delta M + k_\tau^2 M = 0.$$

С учетом условия ограниченности функции F , W и M будем искать в виде

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(h) J_n(k_1 r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ W &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(h) J_n(k_2 r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ M &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n(h) J_n(k_2 r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

где $k_1 = \sqrt{k_l^2 - h^2}$, $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - h^2}$.

Компоненты вектора смещения \mathbf{u}_0 в цилиндрической системе координат записываются через функции F , W , M следующим образом

$$\begin{aligned} u_{0r} &= \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial M}{\partial \varphi}, & u_{0\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial z} - k_\tau \frac{\partial M}{\partial r}, \\ u_{0z} &= \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k_\tau^2 W. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Уравнения движения упругого неоднородного слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид (1.2.25).

В соответствии с обобщенным законом Гука (1.2.22) компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с компонентами тензора деформации ε_{ij} соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda_{11}\varepsilon_{rr} + \lambda_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_{12}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_{23}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_{22}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\lambda_{55}\varepsilon_{r\varphi}, & \sigma_{rz} &= 2\lambda_{55}\varepsilon_{rz}, & \sigma_{\varphi z} &= (\lambda_{22} - \lambda_{23})\varepsilon_{\varphi z}.\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты φ с периодом 2π . Поэтому функции u_r , u_φ , u_z будем искать в виде рядов Фурье по координате φ :

$$\begin{aligned}u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{1n}(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ u_\varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{2n}(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh, \\ u_z &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{3n}(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] dh.\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

Подставляя разложения (4.2.7) в уравнения (1.2.25) с учетом (1.2.24) и (4.2.6), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r, h)$, $U_{2n}(r, h)$, $U_{3n}(r, h)$ для каждого n и h :

$$\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \widehat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (4.2.8)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r, h), U_{2n}(r, h), U_{3n}(r, h))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned}a_{n11} &= \lambda_{11}r^2, & a_{n22} &= \lambda_{55}r^2, & a_{n33} &= \lambda_{55}r^2, & a_{nij} &= 0, & i &\neq j, \\ b_{n11} &= \lambda'_{11}r^2 + \lambda_{11}r, & b_{n12} &= b_{n21} = in(\lambda_{12} + \lambda_{55})r, & b_{n13} &= b_{n31} = ih(\lambda_{12} + \lambda_{55})r^2, \\ b_{n22} &= b_{n33} = \lambda'_{55}r^2 + \lambda_{55}r, & b_{n23} &= b_{n32} = 0, \\ c_{n11} &= \omega^2 r^2 \rho - \lambda_{55}(n^2 + h^2 r^2) + \lambda'_{12}r - \lambda_{22}, & c_{n12} &= in(\lambda'_{12}r - \lambda_{55} - \lambda_{22}), \\ c_{n13} &= ih(\lambda'_{12}r + \lambda_{12} - \lambda_{23})r, & c_{n21} &= in(\lambda'_{55}r + \lambda_{55} + \lambda_{22}), \\ c_{n22} &= \omega^2 r^2 \rho - n^2 \lambda_{22} - \lambda'_{55}r - \lambda_{55} + h^2 r^2 (\lambda_{23} - \lambda_{22})/2, & c_{n23} &= c_{n32} = -hn(\lambda_{22} + \lambda_{23})r/2, \\ c_{n31} &= ih(\lambda'_{55}r + \lambda_{55} + \lambda_{23})r, & c_{n33} &= \omega^2 r^2 \rho - h^2 \lambda_{22} r^2 + n^2 (\lambda_{23} - \lambda_{22})/2.\end{aligned}$$

Коэффициенты $A_n(h)$, $B_n(h)$, $C_n(h)$, $D_n(h)$ разложений (4.2.2), (4.2.4) и функции $U_{1n}(r, h)$, $U_{2n}(r, h)$, $U_{3n}(r, h)$ из разложений (4.2.7) подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия на внешней поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\text{при } r = r_1 : \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (4.2.9)$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_2 : \quad u_r &= u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Здесь σ_{0ij} – компоненты тензора напряжений в однородном изотропном цилиндре, которые связаны с компонентами вектора смещения \mathbf{u}_0 соотношениями (1.2.24).

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ находим коэффициенты $A_n(h)$, выраженные через $U_{1n}(r_1, h)$:

$$A_n(h) = -\frac{AiH_n(k_h r_0) k_h J'_n(k_h r_1) + 2i\omega U_{1n}(r_1, h)}{2k_h H'_n(k_h r_1)}. \quad (4.2.11)$$

Из оставшихся граничных условий на внешней поверхности цилиндра при $r = r_1$ находим три краевых условия, которым должна удовлетворять краевая задача (4.2.8)

$$\left(\frac{1}{r} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{E}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_1} = \mathbf{W}_n, \quad (4.2.12)$$

где элементы матриц $\mathbf{W}_n = (w_{n1}, 0, 0)^T$; $\mathbf{E}_n = (e_{nij})_{3 \times 3}$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} w_{n1} &= \frac{iA\rho_1\omega H_n(k_h r_0)}{\pi k_h r_1 H'_n(k_h r_1)}, \quad e_{n11} = \frac{\lambda_{12}}{r} + \frac{\omega^2 \rho_1 H_n(k_h r)}{k H'_n(k_h r)}, \\ e_{n12} &= \frac{in\lambda_{12}}{r}, \quad e_{n13} = ih\lambda_{12}, \quad e_{n21} = \frac{in\lambda_{55}}{r}, \quad e_{n22} = -\frac{\lambda_{55}}{r}, \\ e_{n23} &= e_{32} = e_{33} = 0, \quad e_{n31} = ih\lambda_{55}. \end{aligned}$$

Из условий непрерывности составляющих вектора смещений при $r = r_2$ находим неизвестные коэффициенты $B_n(h)$, $C_n(h)$, $D_n(h)$ выраженные через $U_{1n}(r_2, h)$, $U_{2n}(r_2, h)$, $U_{3n}(r_2, h)$:

$$\mathbf{K}_n = ([\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{U}_n)_{r=r_2},$$

где $\mathbf{K}_n = (B_n(h), C_n(h), D_n(h))^T$; $\mathbf{M}_n = (m_{nij})_{3 \times 3}$:

$$m_{n11} = k_1 J'_n(k_1 r_2), \quad m_{n12} = ihk_2 J'_n(k_2 r_2), \quad m_{n13} = ink_\tau J_n(k_2 r_2) / r_2,$$

$$m_{n21} = inJ_n(k_1r_2)/r_2, \quad m_{n22} = -hnJ_n(k_2r_2)/r_2, \quad m_{n23} = -k_2k_\tau J'_n(k_2r_2),$$

$$m_{n31} = ihJ_n(k_1r_2), \quad m_{n32} = k_2^2 J_n(k_2r_2), \quad m_{n33} = 0.$$

Из оставшихся трех граничных условий (4.2.10), состоящих в равенстве напряжений, находим

$$\left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}'_n + \mathbf{T}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_2} = 0, \quad (4.2.13)$$

где $\mathbf{T}_n = \mathbf{F}_n - \mathbf{G}_n[\mathbf{M}_n]^{-1}$; $\mathbf{F}_n = (f_{npm})_{3 \times 3}$, $\mathbf{G}_n = (\gamma_{npm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$f_{n11} = \lambda_{12}(r_2)/r_2, \quad f_{n12} = in\lambda_{12}(r_2)/r_2, \quad f_{n13} = ih\lambda_{12}(r_2), \quad f_{n21} = in\lambda_{55}(r_2)/r_2,$$

$$f_{n22} = -\lambda_{55}(r_2)/r_2, \quad f_{n23} = f_{n32} = f_{n33} = 0, \quad f_{n31} = ih\lambda_{55}(r_2),$$

$$\gamma_{n11} = 2\mu_0 k_1^2 J''_n(k_1r_2) - \lambda_0(k_1^2 + h^2) J_n(k_1r_2), \quad \gamma_{n12} = 2ih\mu_0 k_2^2 J''_n(k_2r_2),$$

$$\gamma_{n13} = 2ink_\tau \mu_0 (k_2r_2 J'_n(k_2r_2) - J_n(k_2r_2))/r_2^2, \quad \gamma_{n21} = 2in\mu_0 (k_1r_2 J'_n(k_1r_2) - J_n(k_1r_2))/r_2^2,$$

$$\gamma_{n22} = 2nh\mu_0 (k_2r_2 J'_n(k_2r_2) - J_n(k_2r_2))/r_2^2,$$

$$\gamma_{n23} = -\mu_0 k_\tau (k_2^2 r_2^2 J''_n(k_2r_2) - k_2r_2 J'_n(k_2r_2) + n^2 J_n(k_2r_2))/r_2^2,$$

$$\gamma_{n31} = 2ih\mu_0 k_1 J'_n(k_1r_2), \quad \gamma_{n32} = -\mu_0 k_2 (h^2 - k_2^2) J'_n(k_2r_2),$$

$$\gamma_{nq33} = -nh\mu_0 k_\tau J_n(k_2r_2)/r_2.$$

Решая краевую задачу (4.2.8), (4.2.12), (4.2.13) методом сплайн-коллокации [139], определяем неизвестные функции $U_{1n}(r, h)$, $U_{2n}(r, h)$, $U_{3n}(r, h)$ из разложений (4.2.7). Затем вычислим коэффициенты $A_n(h)$, $B_n(h)$, $C_n(h)$, $D_n(h)$. В результате получаем аналитические выражения, описывающие волновые поля вне и внутри цилиндрического тела.

В дальней зоне акустического поля при $kr \gg 1$ интеграл (4.2.3) может быть вычислен методом перевала [16, 56]

$$\int_{\Gamma} g(\gamma) e^{Qf(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi}{Q|f''(\gamma_0)|}} g(\gamma_0) e^{Qf(\gamma_0)+i\zeta}, \quad Q \gg 1, \quad (4.2.14)$$

где Γ – некоторый контур на комплексной плоскости γ ; ζ – угол, определяющий направление линии наибыстрейшего убывания функции $\text{Re } f(\gamma)$, проходящей через точку перевала γ_0 , определяемую как точку резкого максимума функции $f(\gamma)$, т.е. $f'(\gamma_0) = 0$, $f''(\gamma_0) \neq 0$.

Заменим цилиндрическую функцию Ганкеля в (4.2.3) ее асимптотической формулой при больших значениях аргумента (4.1.11), а также выполним замену $h = k \sin \gamma$. Получим:

$$\Psi_S = e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi kr \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n(k \sin \gamma) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] k \cos \gamma d\gamma,$$

где Γ – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости γ (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$).

Тогда точка перевала γ_0 определяется как $\gamma_0 = \arctan(z/r)$, а угол наискорейшего спуска может быть найден из уравнения (3.3.27). Для рассматриваемого случая $\zeta = -\pi/4$.

В результате в соответствии с формулой (4.2.14) будем иметь

$$\Psi_S \approx \frac{2}{r} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \right) \right] k \cos \gamma_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{n+1} A_n(k \sin \gamma_0) \exp[in(\varphi - \varphi_0)].$$

Численные исследования. Были проведены расчеты частотных зависимостей безразмерной амплитуды звукового рассеяния $|\Psi_S/A|$ от волнового размера тела kr_1 в фиксированной точке наблюдения с цилиндрическими координатами $(r, \varphi, z) = (100, \pi, 0)$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_2 = 1$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.1 м располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). При расчетах использовались характерные значения модулей упругости, приведенные в таблице 4.1.1. Изотропной базой материалов был поливинилбутираль с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³.

В качестве порядка усечения бесконечных рядов использовалась величина $N = 2[kr_1] + 1$, где $[\cdot]$ – целая часть числа.

Предполагалось, что точечный источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_0 = 3r_2$ и $\varphi_0 = \pi$.

На рисунках 4.2.2 – 4.2.5 представлены частотные зависимости амплитуды звукового рассеяния $|\Psi_S/A|$ в диапазоне частот, соответствующем изменению волнового размера в диапазоне $4 \leq kr_1 \leq 12$ для цилиндра с неоднородным покрытием, механические характеристики которого менялись по законам

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda_{pq} = \lambda_{pq}^0, \quad f(r) = f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r), \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

Функции $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$, $f_4(r)$, задающие неоднородность материала цилиндрического слоя, определены выражениями (2.1.10), (2.1.11).

При этом штриховая и пунктирная линии соответствуют материалам с анизотропией типов 1 и 2, соответственно, сплошной линией построена кривая для изотропного случая, а штрихпунктирной для случая изотропного однородного покрытия, где полагалось $\rho = \rho^0$. В названиях рисунков указано, при каком законе неоднородности $f(r)$ построены штриховая, пунктирная и сплошная кривые на каждом из рисунков.

Из графиков следует, что на исследуемых частотах, в случае близко расположенного сферического источника звуковых волн, как учет анизотропии, так и наличие неоднородности в цилиндрическом слое из полимерного материала приводит к существенному изменению значений частотной характеристики амплитуды рассеянной звуковой волны.

Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|\Psi_S/A|$ от волнового размера цилиндра kr_2 рассчитаны в интервале $4 \leq kr_2 \leq 10$. Отметим, что при $kr_2 < 4$ частотные

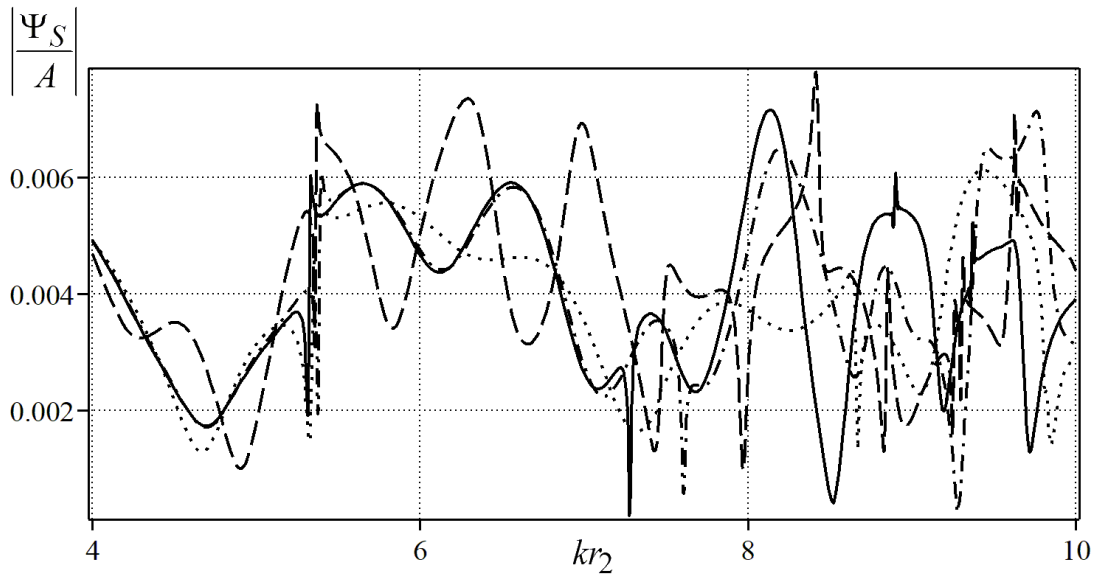


Рис. 4.2.2. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_1(r)$

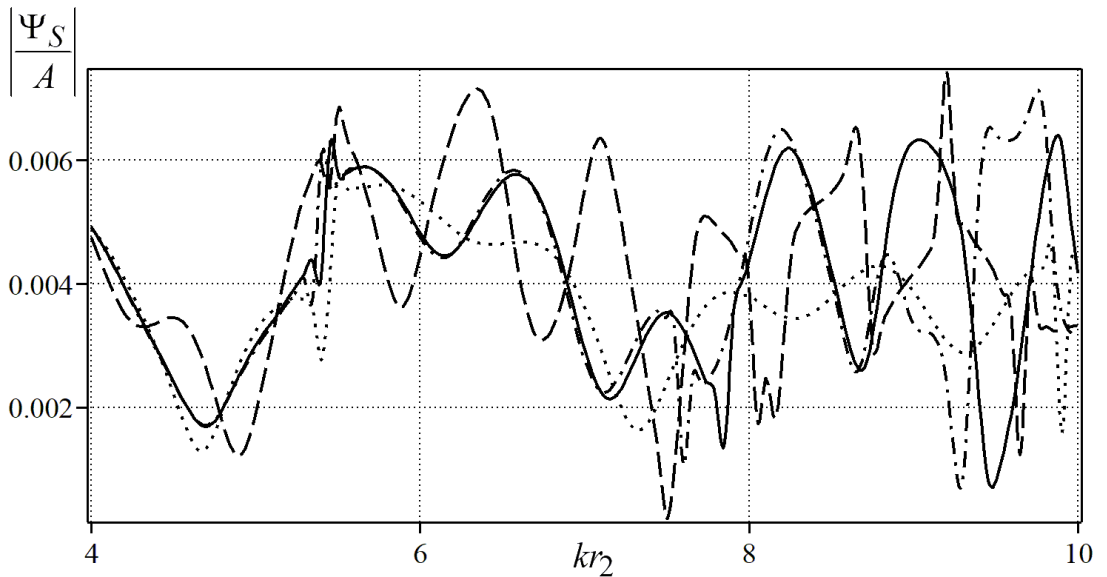


Рис. 4.2.3. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_2(r)$

зависимости при однородном и неоднородном покрытиях отличаются незначительно. С увеличением частоты такое отличие становится все более заметным. Влияние анизотропии на рассеянное акустическое поле наиболее заметно начинает проявляться также при $kr_2 > 4$.

Осуществляя сравнение штриховых и пунктирных кривых на каждом из рисунков 4.2.2 – 4.2.5, можно сделать вывод о том, что анизотропия типов 1 и 2 оказывает существенно различающееся влияние на рассеянное акустическое поле и значительно отличается от сплошных линий, построенных для изотропного случая.

Сравнивая штриховые кривые на рисунках 4.2.2, 4.2.4, можно видеть, что законы неоднородности $f_1(r)$, $f_3(r)$, которые являются функциями, возрастающими по толщине слоя,

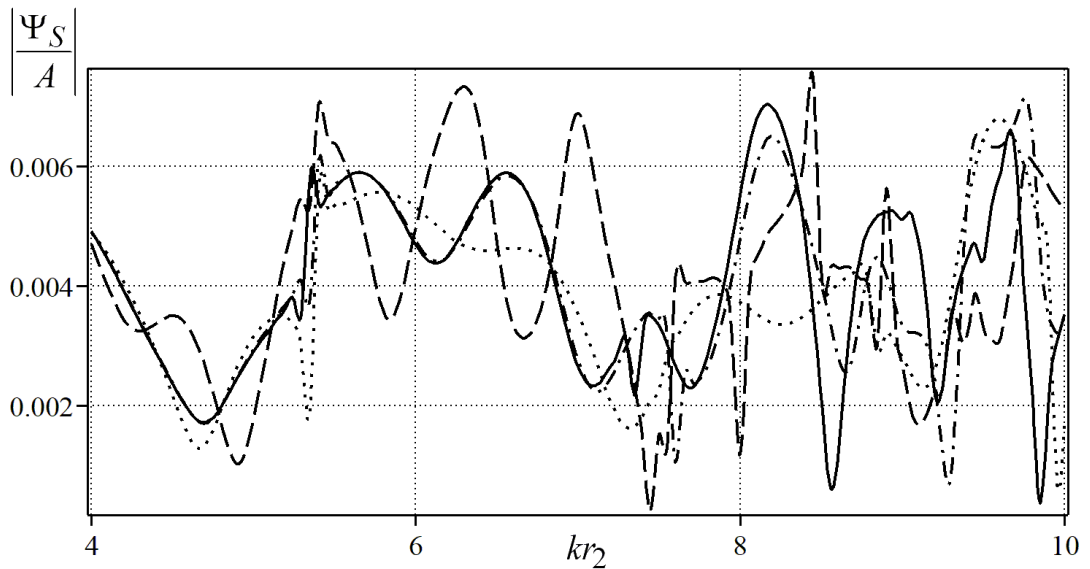


Рис. 4.2.4. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_3(r)$

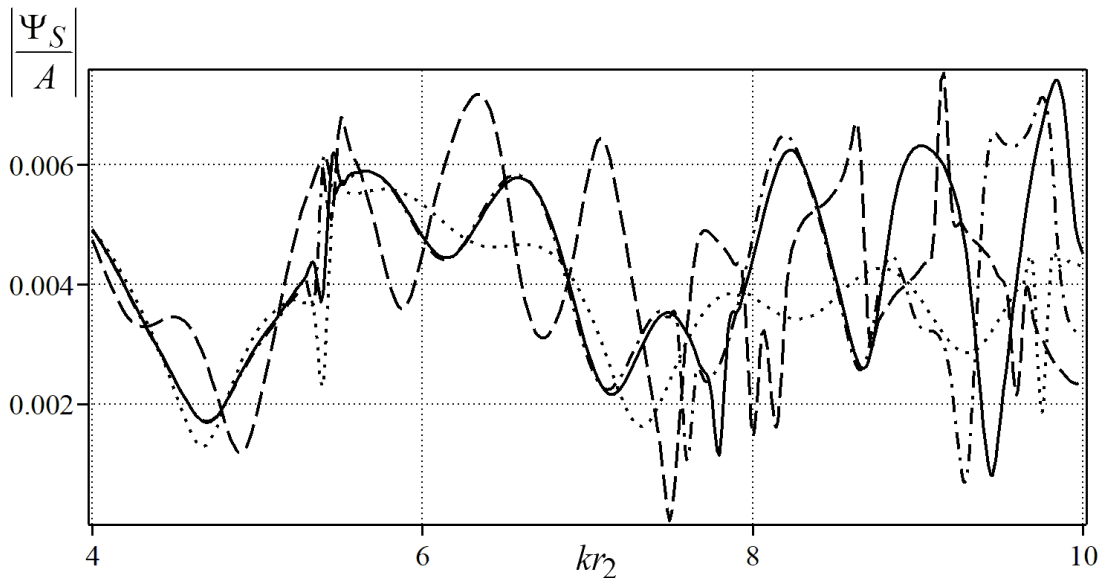


Рис. 4.2.5. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_4(r)$

совместно с анизотропией типа 1 показывают достаточно схожие характеристики рассеянного поля в интервале изменения волнового размера $4 \leq kr_2 \leq 7.4$ и начинают существенно различаться при $kr_2 > 7.4$. При этом наиболее заметным различием влияния функций $f_1(r)$, $f_3(r)$ при $kr_2 > 7.4$ является сдвиг резонансных значений при законе неоднородности $f_3(r)$ относительно случая закона неоднородности $f_1(r)$ в сторону больших частот.

Проводя сравнение штриховых кривых на рисунках 4.2.3, 4.2.5, можно видеть, что законы неоднородности $f_2(r)$, $f_4(r)$, которые являются функциями, убывающими по толщине слоя, совместно с анизотропией типа 1 показывают достаточно схожие характеристики рассеянного поля в интервале изменения волнового размера $4 \leq kr_2 \leq 7.8$ и начинают существенно

различаться при $kr_2 > 7.8$. При этом наиболее заметным различием влияния функций $f_2(r)$, $f_4(r)$ при $kr_2 > 7.8$ является сдвиг резонансных значений при законе неоднородности $f_4(r)$ относительно случая закона неоднородности $f_2(r)$ в сторону меньших частот.

Анализируя пунктирные кривые на рисунках 4.2.2, 4.2.4, можно видеть, что законы неоднородности $f_1(r)$, $f_3(r)$, которые являются функциями, возрастающими по толщине слоя, совместно с анизотропией типа 2 показывают достаточно схожие характеристики рассеянного поля в интервале изменения волнового размера $4 \leq kr_2 \leq 8.4$ и начинают существенно различаться при $kr_2 > 8.4$. Наиболее заметным различием влияния функций $f_1(r)$, $f_3(r)$ при $kr_2 > 8.4$ является сдвиг резонансных значений при законе неоднородности $f_3(r)$ относительно случая закона неоднородности $f_1(r)$ в сторону больших значений волнового размера. При этом также существенное различие влияния неоднородностей, задаваемых функциями $f_1(r)$, $f_3(r)$, присутствует в области резонанса, расположенного при частоте, соответствующей волновому размеру тела $kr_2 \approx 5.4$.

Проводя анализ пунктирных кривых на рисунках 4.2.3, 4.2.5, можно видеть, что законы неоднородности $f_2(r)$, $f_4(r)$, которые являются функциями, убывающими по толщине слоя, совместно с анизотропией типа 2 показывают достаточно схожие характеристики рассеянного поля в интервале изменения волнового размера $4 \leq kr_2 \leq 9.7$ и начинают существенно различаться при $kr_2 > 9.7$. Наиболее заметным различием влияния функций $f_2(r)$, $f_4(r)$ при $kr_2 > 9.7$ является сдвиг резонансных значений при законе неоднородности $f_4(r)$ относительно случая закона неоднородности $f_2(r)$ в сторону меньших значений волнового размера. Отметим, что существенное различие между случаями функций неоднородности $f_2(r)$, $f_4(r)$ присутствует также в области резонанса при $kr_2 \approx 5.4$.

Отметим, что из полученного решения задачи дифракции сферической волны на неоднородном цилиндре можно получить решение для случая, когда падающая волна является плоской, распространяющейся перпендикулярно оси цилиндра. Для этого следует заменить в (4.2.1) волновую функцию $H_n(k_h r_0)$ ее асимптотическим выражением (4.1.11), считая, что расстояние между источником и рассеивателем достаточно велико ($kr_0 \gg 1$), а после применить метод перевала (4.2.14). В результате, из решения дифракционной задачи для случая падения сферической волны получится решение задачи для случая падения плоской волны с амплитудой равной $A \exp(ikr_0)/r_0$, распространяющейся перпендикулярно оси цилиндра в направлении волнового вектора, образующего угол $\pi - \varphi_0$ с положительным направлением оси x . На рисунках 4.2.6, 4.2.7 построены частотные зависимости для случая, когда первичное волновое возмущение цилиндрического рассеивателя было вызвано плоской звуковой волной. Для расчетов случая плоской звуковой волны полагалось, что точечный источник располагается на значительном удалении от рассеивателя – $r_0 = 110r_2$. Сравнивая кривые на рисунках 4.2.6, 4.2.7 с аналогичными кривыми, построенными на рисунках 4.2.2, 4.2.3 для случая, когда первичное волновое поле вызвано точечным источником звука, можно видеть, что рисунки имеют достаточно схожую качественную характеристику при $4 \leq kr_2 \leq 5.4$ и начинают существенно различаться при $kr_2 > 5.4$. Отметим значительное различие коли-

чественной характеристики безразмерной амплитуды поля для случаев падения плоской и сферической звуковых волн на всем исследуемом интервале частот. Полученный результат позволяет сделать вывод о существенном влиянии учета криволинейности волнового фронта падающей на тело звуковой волны в том случае, когда источник звука находится достаточно близко к рассеивающему телу.

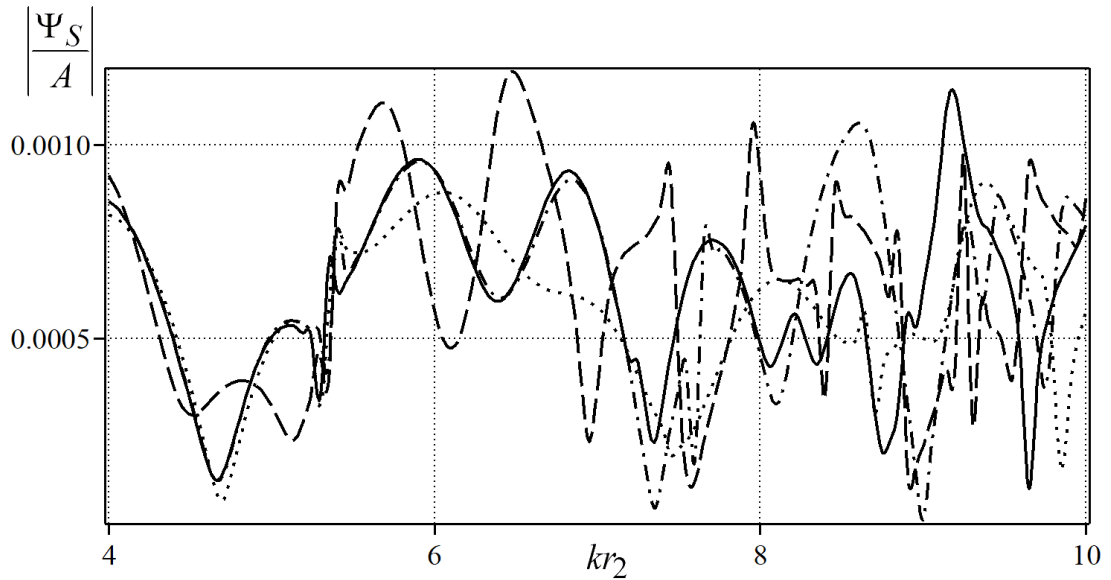


Рис. 4.2.6. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_1(r)$, случай плоской волны

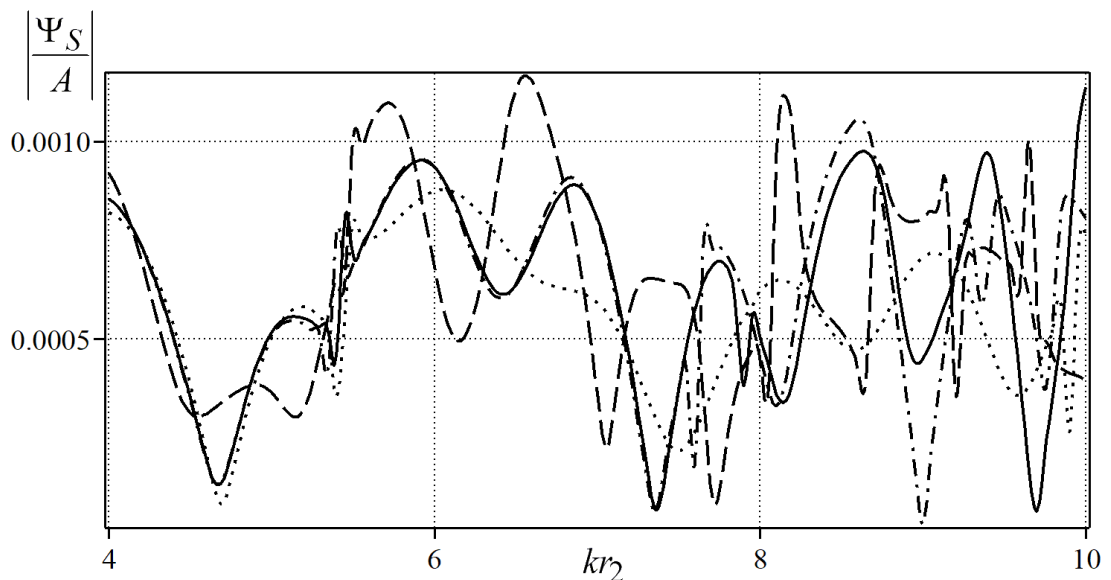


Рис. 4.2.7. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_2(r)$, случай плоской волны

На рисунках 4.2.8 – 4.2.11 построены угловые характеристики рассеянного акустического

поля $|\Psi_S/A|$ вблизи поверхности рассеивателя при $r = 1.1r_1$, при фиксированной частоте, соответствующей волновому размеру тела $kr_2 = 5$. Обозначение “бз” в названиях рисунков следует понимать, как то, что рисунок построен в ближней зоне по отношению к рассеивателю. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной

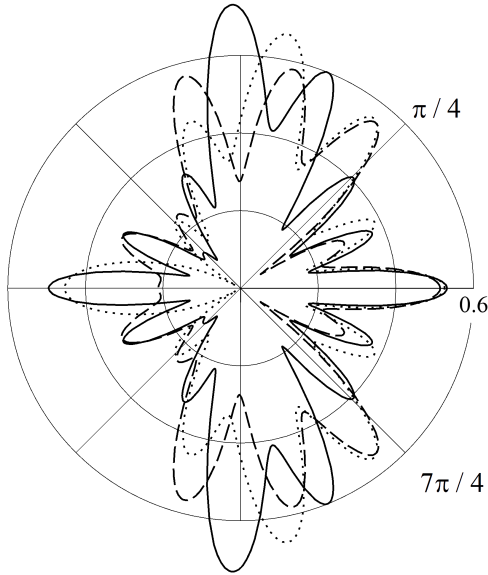


Рис. 4.2.8. $f(r) = f_1(r)$, тип 1, бз

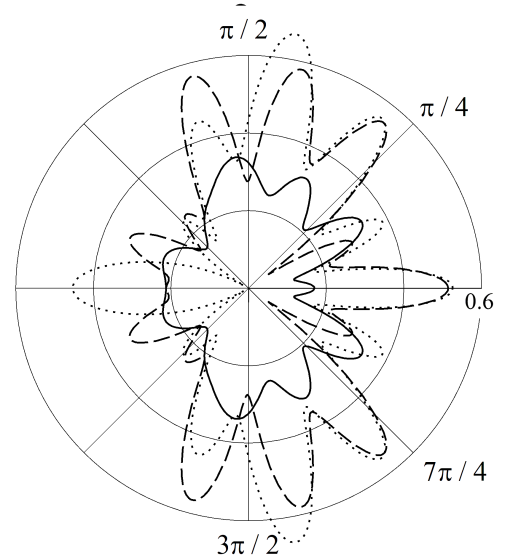


Рис. 4.2.9. $f(r) = f_1(r)$, тип 2, бз

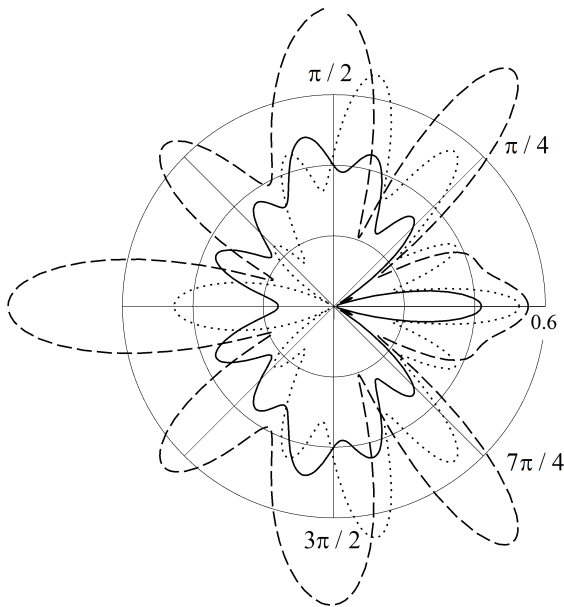


Рис. 4.2.10. $f(r) = f_2(r)$, тип 1, бз

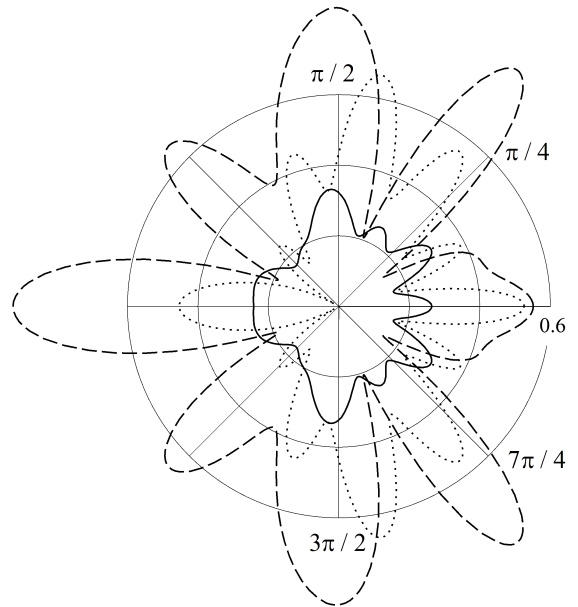


Рис. 4.2.11. $f(r) = f_2(r)$, тип 2, бз

для соответствующих значений угла φ . Сплошные линии соответствуют случаю трансверсально-изотропного неоднородного покрытия, штриховые линии построены для изотропного неоднородного случая, а пунктирные для случая изотропного однородного покры-

тия, где полагалось $\rho = \rho^0$. В названиях рисунков указано, при каком законе неоднородности $f(r)$ построены сплошная и штриховая кривые, и при каком типе анизотропии построена сплошная кривая на каждом из рисунков.

Рисунки 4.2.8 – 4.2.11 позволяют сделать вывод о значительном влиянии неоднородности и анизотропии на рассеянное акустическое поле вблизи поверхности рассеивателя.

При этом следует отметить, что наличие неоднородности в изотропном случае (штриховые линии) сохраняет относительную форму акустического поля относительно случая изотропного однородного покрытия (пунктирные линии). Наиболее существенные изменения наблюдаются в областях прямого и обратного рассеяния звука. В то время как учет анизотропии различных типов приводит к существенным качественным изменениям диаграмм рассеянного поля.

4.3. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием, расположенном вблизи идеальной подстилающей поверхности

4.3.1. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным трансверсально-изотропным упругим покрытием в присутствии плоскости (абсолютно жесткой и акустически мягкой)

Постановка задачи. Рассмотрим изотропный упругий цилиндр бесконечной длины радиусом r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного трансверсально-изотропного упругого слоя с внешним радиусом r_1 . Тело находится в полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Плоская подстилающая поверхность Γ является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Ось цилиндра параллельна плоскости Γ и отстоит от неё на расстоянии d .

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы координатная ось z совпадала с осью вращения цилиндра. В системе координат x, y, z граница полупространства Γ определяется уравнением $y = -d$. С прямоугольной системой координат свяжем цилиндрическую систему координат r, φ, z (рис. 4.3.1). Материал покрытия характеризуется модулями упругости λ_{ijkl} , которые описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , и плотностью ρ , которая является непрерывной функцией координаты r . Ось z является осью цилиндрической анизотропии материала покрытия.

Пусть из внешнего пространства на цилиндр перпендикулярно его оси падает плоская звуковая волна, потенциал скорости которой

$$\Psi_0 = A \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - i\omega t],$$

где A – амплитуда волны; $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, 0\}$ – волновой вектор падающей волны; $\mathbf{r} = \{x, y, 0\}$ – радиус-вектор; $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$; $k_x = k \cos \varphi_0$; $k_y = k \sin \varphi_0$; φ_0 – угол,

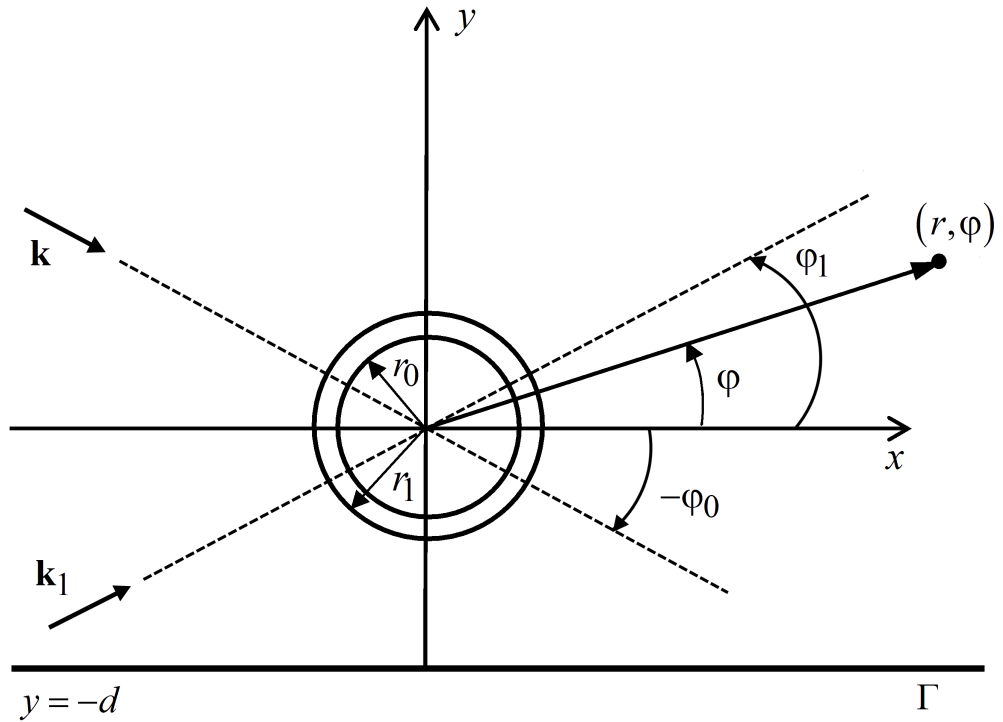


Рис. 4.3.1. Геометрия задачи 4.3

образованный вектором \mathbf{k} с положительным направлением оси x ; ω – круговая частота; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное цилиндром с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием в присутствии идеальной плоскости.

Уравнения волновых полей. Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца (1.2.15).

Получим приближенное решение задачи, пренебрегая отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, но учитывая рассеяние цилиндрическим телом волны, образующейся при отражении падающей плоской волны от плоскости. Чтобы отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, можно было пренебречь, следует полагать, что $d \gg r_1$. В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_{S1}, \quad (4.3.1)$$

Ψ_1 – потенциал скорости волны, возникающей при отражении падающей плоской волны от плоскости Γ ; Ψ_{S1} – потенциал скорости волн, рассеянных упругим цилиндром с покрытием при воздействии на нее волн с потенциалами Ψ_0 и Ψ_1 .

Потенциал Ψ_1 описывает плоскую волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению (1.2.15) и граничному условию на поверхности Γ , которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Psi_0 + \Psi_1)|_{y=-d} = 0, \quad (4.3.2)$$

если плоскость Γ является абсолютно жесткой, и в равенстве нулю акустического давления

$$(\Psi_0 + \Psi_1)|_{y=-d} = 0, \quad (4.3.3)$$

если плоскость Γ является акустически мягкой.

Потенциал Ψ_1 имеет вид

$$\Psi_1 = A_1 \exp [i (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})], \quad (4.3.4)$$

где A_1 – амплитуда волны; $\mathbf{k}_1 = \{k_{1x}, k_{1y}, 0\}$ – волновой вектор отраженной от плоскости волны; $k_{1x} = k \cos \varphi_1$; $k_{1y} = k \sin \varphi_1$; φ_1 – угол, образованный вектором \mathbf{k}_1 с положительным направлением оси x . Согласно закону Снеллиуса [32] $k_{1x} = k_x$ и $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$.

Подставляя (4.3.4) в граничные условия (4.3.2) и (4.3.3), находим

$$A_1 = \pm A \exp (-i2kd \sin \varphi_0), \quad (4.3.5)$$

где знаки «плюс» и «минус» относятся к случаям жесткой и мягкой подстилающих поверхностей соответственно.

В цилиндрической системе координат падающая и отраженная плоские волны представляются разложениями [55]

$$\Psi_0 = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) \exp [in(\varphi - \varphi_0)], \quad \Psi_1 = A_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) \exp [in(\varphi + \varphi_0)]. \quad (4.3.6)$$

С учетом условий излучения на бесконечности рассеянное акустическое поле Ψ_S будем искать в виде

$$\Psi_{S1}(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) \exp [in(\varphi - \varphi_0)]. \quad (4.3.7)$$

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной анизотропной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений. На внешней поверхности покрытия (при $r = r_1$) потенциал Ψ_S должен удовлетворять граничным условиям

$$-i\omega u_r = \frac{\partial}{\partial r} (\Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_{S1}), \quad \sigma_{rr} = -i\rho_1 \omega (\Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_{S1}), \quad \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (4.3.8)$$

Описание волновых полей в однородном упругом цилиндре и неоднородном упругом трансверсально-изотропном слое аналогично тому, как показано в подразделе 4.1.1.

Подставляя (4.1.7), (4.3.6) и (4.3.7) в первое граничное условие (4.3.4), находим

$$A_n = -\frac{i^n (A + A_1 \exp (i2n\varphi_0)) k J'_n(kr_1) + i\omega U_{1n}(kr_1)}{k H'_n(kr_1)}. \quad (4.3.9)$$

В результате получаем краевую задачу для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно разложений Фурье компонент вектора

смещения \mathbf{u} в неоднородном трансверсально-изотропном упругом слое

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n'' + \widehat{\mathbf{B}}_n \mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{C}}_n \mathbf{U}_n &= 0, \\ \left(\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{D}}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_1} &= \mathbf{W}_n, \\ \left(\widehat{\mathbf{A}}_n \mathbf{U}_n' + \widehat{\mathbf{F}}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_0} &= 0,\end{aligned}\quad (4.3.10)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}(r), U_{2n}(r))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_n = (a_{nij})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{B}}_n = (b_{nij})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{C}}_n = (c_{nij})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{D}}_n = (d_{nij})_{2 \times 2}$, $\widehat{\mathbf{F}}_n = (f_{nij})_{2 \times 2}$ – матрицы второго порядка с элементами, приведенными в подразделе 4.1.1; $\mathbf{W}_n = (w_{n1}, 0)^T$;

$$w_{n1} = \frac{2i^n (A + A_1 \exp(i2n\varphi_0)) \omega \rho_1}{\pi k r H_n'(kr)}.$$

При получении выражения для w_{n1} было использовано выражение для вронскиана [83].

Таким образом, для нахождения функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ следует решить краевую задачу (4.3.10). Задача решается методом сплайн-коллокации [50]. После нахождения решения краевой задачи вычисляем коэффициенты A_n по формуле (4.3.9). В результате потенциал скорости Ψ_S определяется выражением (4.3.7).

Потенциал скорости рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_S = \Psi_1 + \Psi_{S1}, \quad (4.3.11)$$

или

$$\Psi_S(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_1 i^n J_n(kr) \exp(in\varphi_0) + A_n H_n(kr) \exp(-in\varphi_0)] \exp(in\varphi).$$

Численные исследования. Для оценки границ применимости предложенного приближенного решения задачи было проведено сравнение численных результатов с аналитическим решением, полученным в разделе 3.1. Установлено, что совпадения с удовлетворительным отклонением диаграмм, построенных двумя методами, не превышающим 10%, достигаются при значениях $d/r_0 > 15$. Близость диаграмм, построенных двумя методами, оценивалась величиной

$$\max_{\varphi \in (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)} \left| \frac{\Psi_S^{(mnim)}(\varphi) - \Psi_S^{(prib)}(\varphi)}{\Psi_S^{(mnim)}(\varphi)} \right|,$$

где $\Psi_S^{(mnim)}(\varphi)$ – рассеянное поле, найденное с использованием аналитического решения из раздела 3.1; $\Psi_S^{(prib)}(\varphi)$ – рассеянное поле, найденное с использованием приближенного решения из настоящего раздела; $\tilde{\varphi}_j = (-1)^j \arcsin(d/r) + (j-1)\pi$, $j = 1, 2$. На рисунке 4.3.2 показана зависимость коэффициента обратного рассеяния звука $|\Psi_S/A|$, рассчитанная в дальней зоне при $r = 100$ м, от величины d/r_0 в интервале $1.1 \leq d/r_0 \leq 25$, построенная для алюминиевого цилиндра с радиусом 1 м с волновым размером тела $kr_0 = 4$, расположенного в жидком полупространстве, заполненном водой, при падении звуковой волны под углом $\varphi_0 = -\pi/4$. Поверхность полагалась абсолютно жесткой. Сплошная кривая построена с использованием приближенного решения, пунктирная кривая с использованием аналитического решения из раздела 3.1.

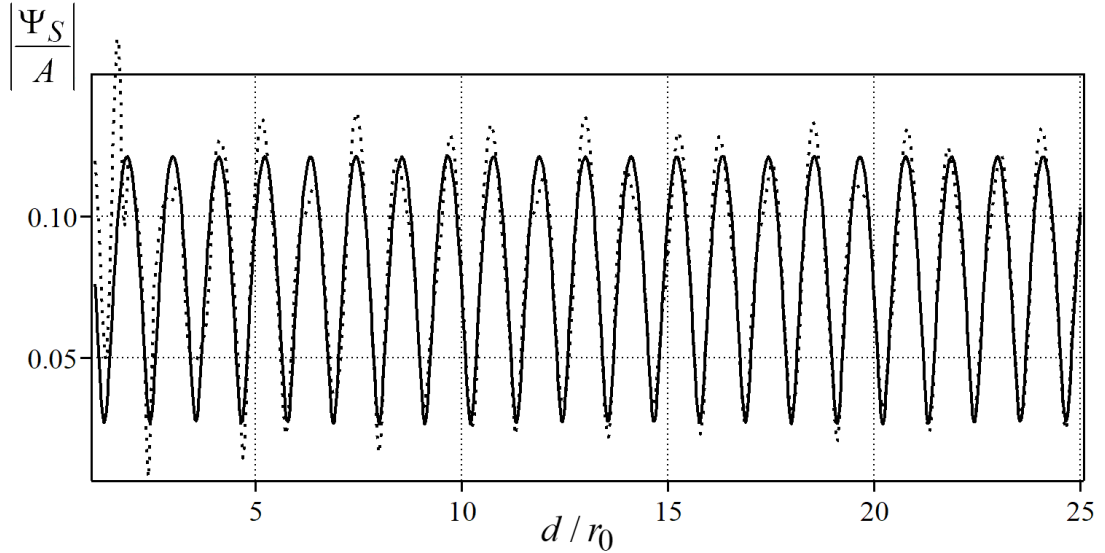


Рис. 4.3.2. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от d/r_0

Были проведены расчеты частотных зависимостей безразмерной амплитуды звукового рассеяния $|\Psi_S/A|$ от волнового размера тела kr_0 в фиксированной точке наблюдения с цилиндрическими координатами $(r, \varphi) = (100, \pi + \varphi_0)$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_0 = 1$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в акустическом полупространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с) и отстоит от границы полупространства на расстояние $d/r_0 = 20$. При расчетах использовались характерные значения модулей упругости с анизотропией типов 1 и 2, приведенные в таблице 4.1.1. Изотропной базой материалов был поливинилбутираль с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³.

Рассматривалось как однородное трансверсально-изотропное покрытие, так и неоднородные, физико-механические характеристики которой изменялись по законам

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda_{pq} = \lambda_{pq}^0, \quad f(r) = f_1(r), f_2(r), \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Функции $f_1(r)$, $f_2(r)$, задающие неоднородность материала цилиндрического слоя, определены выражениями (2.1.10).

Полагалось, что плоская акустическая волна единичной амплитуды падает на цилиндр под углом $\varphi_0 = -\pi/3$.

На рисунках 4.3.3 – 4.3.10 представлены частотные зависимости амплитуды звукового рассеяния $|\Psi_S/A|$ в диапазоне частот, соответствующем изменению волнового размера в диапазоне $4 \leq kr_0 \leq 8$. Штриховые и пунктирные линии соответствуют случаям трансверсально-изотропного неоднородного покрытия с типами анизотропии 1 и 2, соответственно. Сплошные линии построены для изотропного неоднородного случая, а штрих-пунктирные для случая изотропного однородного покрытия, где полагалось $\rho = \rho^0$. В названиях рисунков указано, при каком законе неоднородности $f(r)$ построены штриховые, пунктирные и сплошные

кривые на каждом из рисунков, а также отмечено, какой тип поверхности границы полупространства полагался при расчетах.

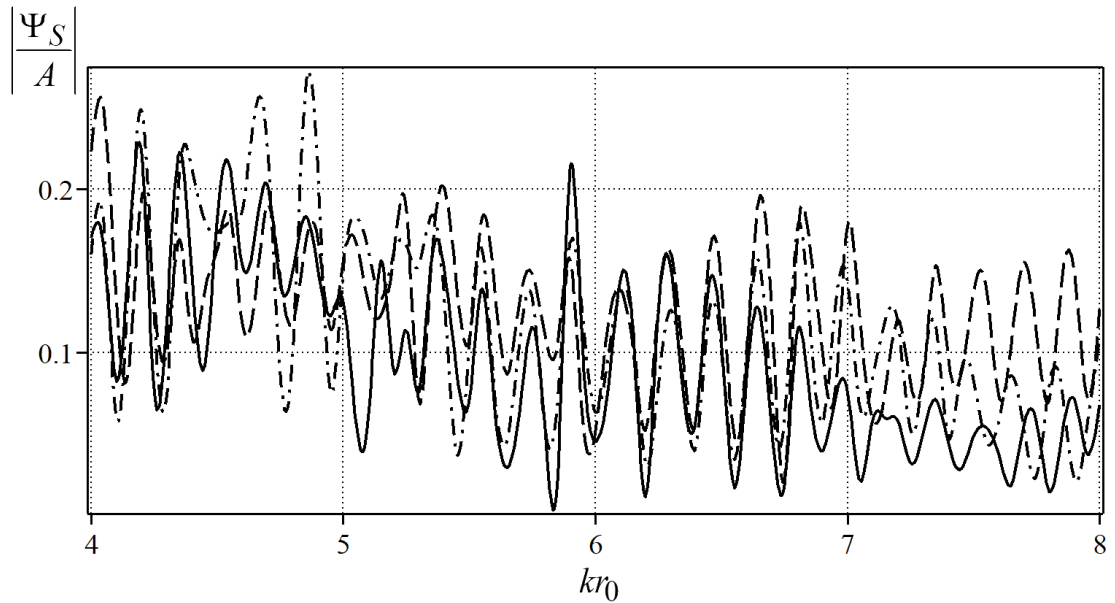


Рис. 4.3.3. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_1(r)$, абсолютно жесткая поверхность

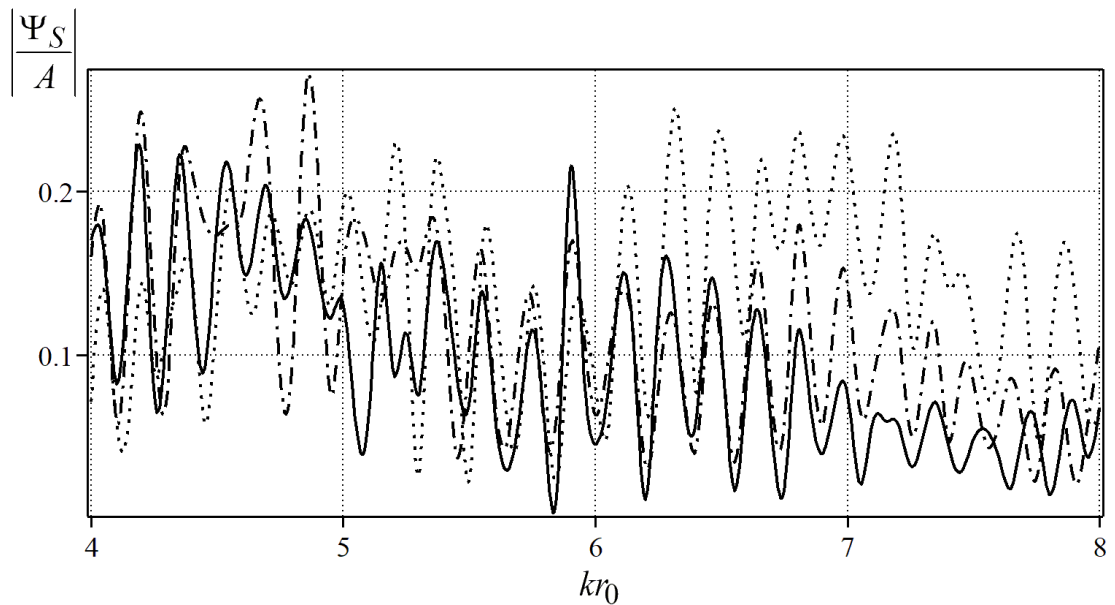


Рис. 4.3.4. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_1(r)$, абсолютно жесткая поверхность

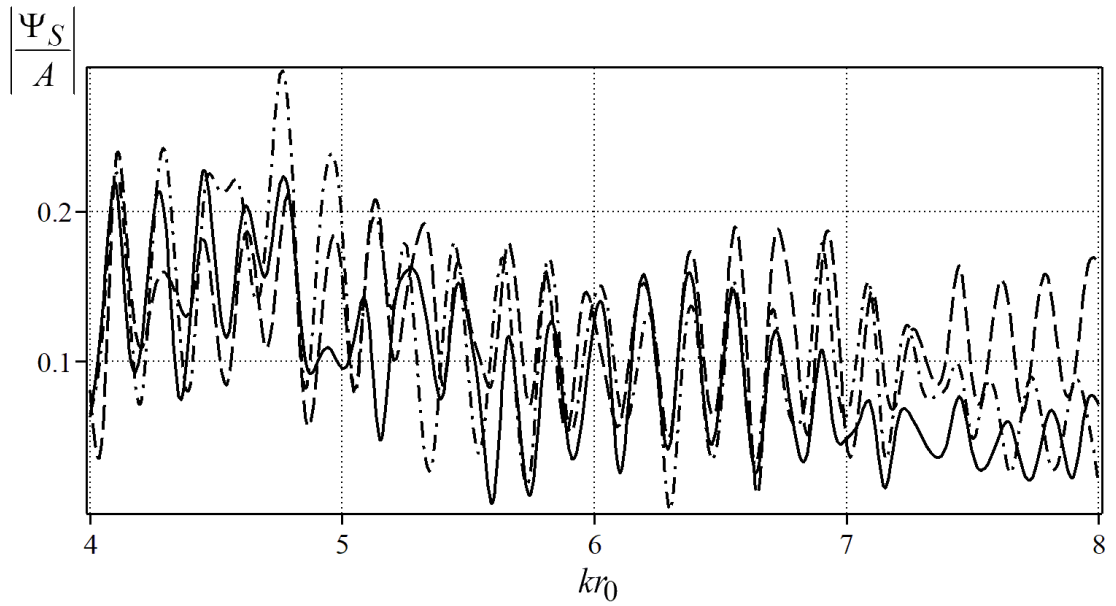


Рис. 4.3.5. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_1(r)$, акустически мягкая поверхность

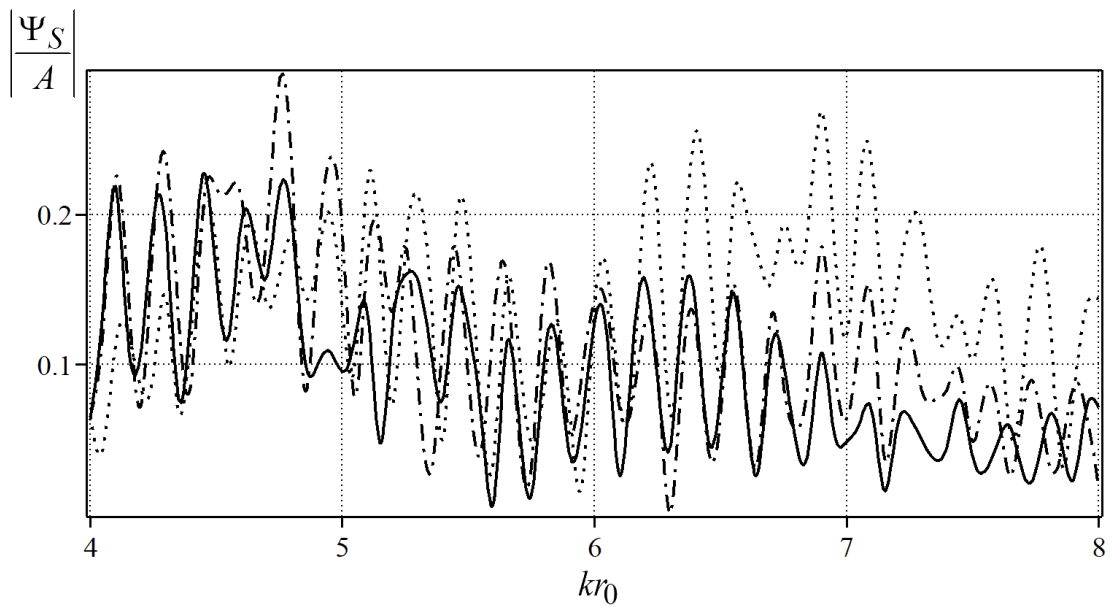


Рис. 4.3.6. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_1(r)$, акустически мягкая поверхность

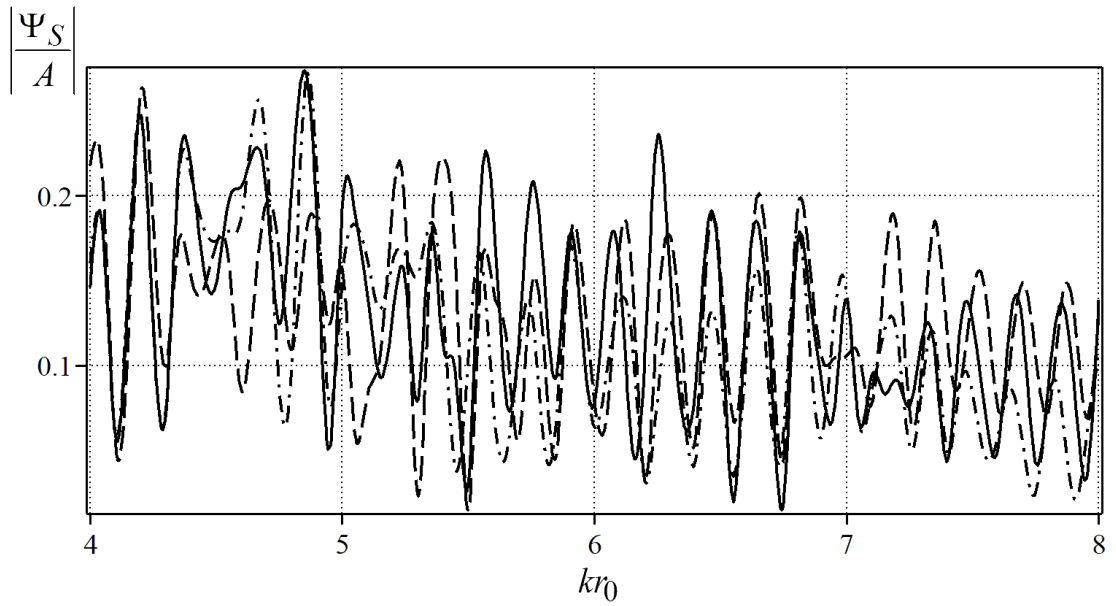


Рис. 4.3.7. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_2(r)$, абсолютно жесткая поверхность

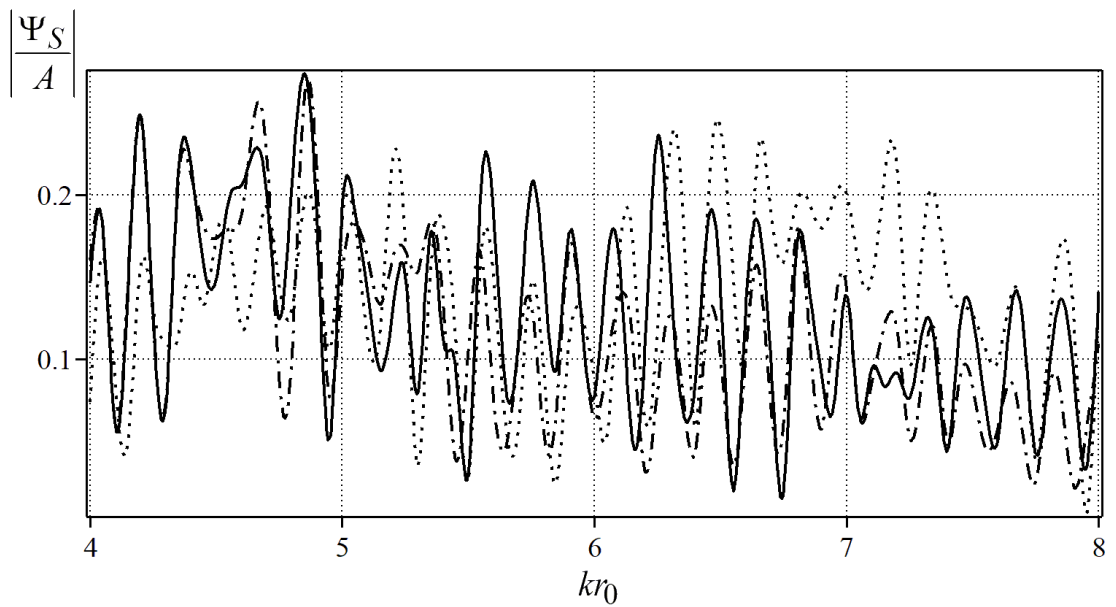


Рис. 4.3.8. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_2(r)$, абсолютно жесткая поверхность

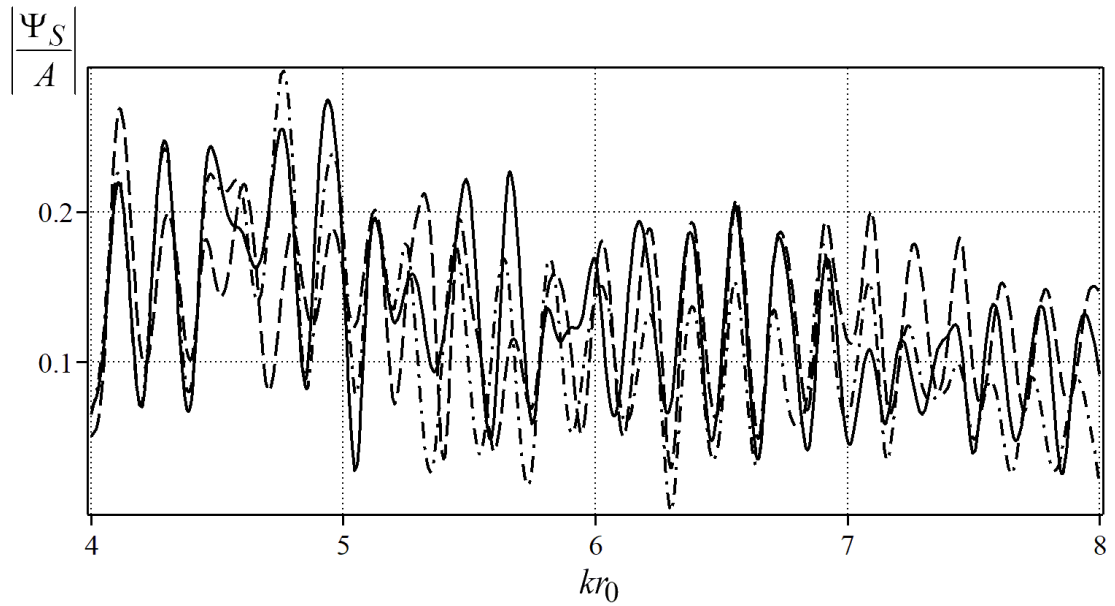


Рис. 4.3.9. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_2(r)$, акустически мягкая поверхность

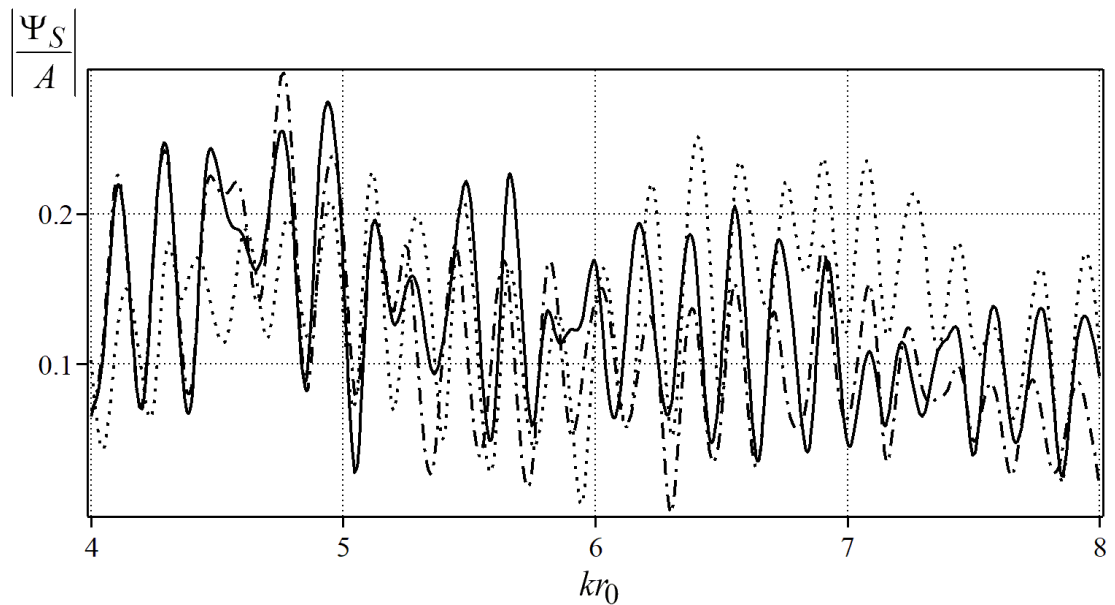


Рис. 4.3.10. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_2(r)$, акустически мягкая поверхность

Для оценки влияния присутствия границы акустического полупространства вблизи цилиндрического рассеивателя на рисунке 4.3.11 построена частотная диаграмма для случая, когда цилиндр расположен в безграничном пространстве.

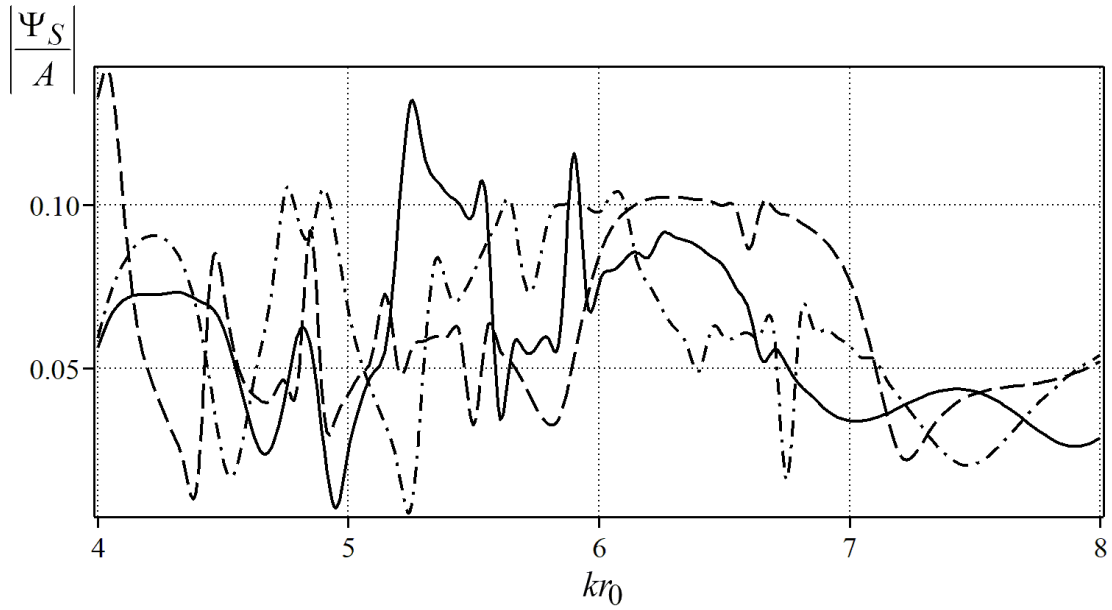


Рис. 4.3.11. Частотные зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра с покрытием, $f(r) = f_1(r)$, безграничное пространство

Сравнивая штриховые и пунктирные линии на каждой из пар рисунков 4.3.3, 4.3.4; 4.3.5, 4.3.6; 4.3.7, 4.3.8; 4.3.9, 4.3.10, можно сделать вывод о том, что различные типы анизотропии оказывают разнохарактерное влияние на рассеянное поле. Сравнительный анализ штриховых и пунктирных кривых со сплошными и штрих-пунктирными кривыми на группах рисунков 4.3.3, 4.3.7; 4.3.4, 4.3.8; 4.3.5, 4.3.9; 4.3.6, 4.3.10, позволяет сделать вывод о том, что изменения, вносимые неоднородностью материала $f(r)$ менее значительны, чем изменения, связанные с введением анизотропии. Сравнение кривых на рисунках 4.3.3, 4.3.5, 4.3.11 показывает, что присутствие ограничивающей поверхности, а также ее тип, приводят к существенным изменениям в акустическом поле, рассеянном цилиндром.

4.3.2. Моделирование непрерывно-неоднородного трансверсально-изотропного покрытия упругого цилиндра, находящегося вблизи плоскости, обеспечивающего наименьшее отражение звука при дифракции плоской звуковой волны

На основе решения прямой задачи подраздела 4.3.1 определим такие законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее рассеяние звука в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ при фиксированном угле наблюдения $\varphi = \varphi_*$ и в заданном секторе наблюдения $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ при фиксированной частоте $\omega = \omega_*$.

Решение этой обратной задачи найдено методом, предложенным в подразделе 4.1.2. Подынтегральная функция в (4.1.14), (4.1.15) определялась выражением $I(\omega, \varphi) = |\Psi_S(\omega, \varphi)/A|^2$, где $\Psi_S(\omega, \varphi)$ имеет вид (4.3.11).

На основе полученного решения прямой задачи подраздела 4.3.1 были проведены расчеты параметров в законах неоднородности покрытия цилиндра (4.1.22), обеспечивающих наименьшее рассеяние звука в дальней зоне акустического поля при $r = 100$ м. Полагалось,

что магниевый цилиндр ($\rho_0 = 1.74 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_0 = 3.8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu_0 = 1.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$) радиуса $r_0 = 1 \text{ м}$ с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается полупространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c = 1485 \text{ м/с}$). Расстояние от оси цилиндра до границы полупространства $d = 20r_0$. При расчетах рассматривалось два типа характерных величин модулей упругости неоднородного трансверсально-изотропного цилиндрического слоя, а также случай изотропного неоднородного покрытия. Изотропной базой всех материалов был алюминий с характерной плотностью $\rho^0 = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, а характерные значения модулей упругости приведены в таблице 4.1.2.

Полагалось, что плоская звуковая волна единичной амплитуды падает на упругий цилиндр с неоднородным покрытием, расположенный вблизи абсолютно жесткой поверхности, под углом φ_0 .

В ограничениях (4.1.16) полагалось $C_{1\eta} = 0.5$, $C_{2\eta} = 1.5$. При применении алгоритма отжига шаг сетки полагался равным $h = 0.125$, размерность пространства параметров $w = 15$. Для каждого типа неоднородного покрытия цилиндра эксперимент по поиску оптимальных значений проводился $M = 10$ раз, а каждый эксперимент обеспечивал 32767 итераций за одну полную процедуру поиска оптимальных значений при $5 \leq T(j) \leq 10$.

Все допустимые законы неоднородности материала покрытия изображены на рисунке 4.3.12.

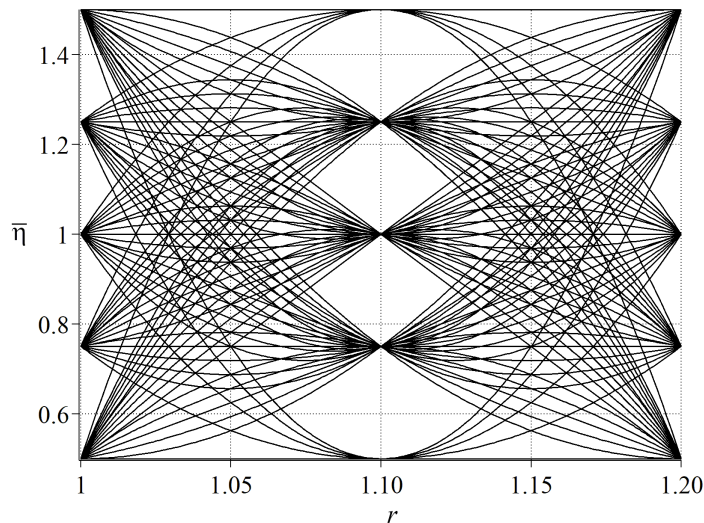


Рис. 4.3.12. Допустимые квадратичные зависимости

Законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие наименьшую интенсивность рассеяния звука цилиндром с покрытием при фиксированном угле $\varphi_* = 2\pi/3$ и $\varphi_0 = -\pi/3$ в частотном диапазоне, определяемым изменением волнового размера цилиндра в промежутке $5 \leq kr_0 \leq 7$ имеют вид:

тип 3

$$\begin{aligned}
\rho &= 2.7 \cdot 10^3 \cdot 1.5, \\
\lambda_{11} &= 5.74 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119.5), \\
\lambda_{12} &= 3.28 \cdot 10^{10} (-87.5r^2 + 192.5r - 104.5), \\
\lambda_{22} &= 16.4 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119.5), \\
\lambda_{55} &= 2.54 \cdot 10^{10} (12.5r^2 - 28.75r + 17.75);
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

тип 4

$$\begin{aligned}
\rho &= 2.7 \cdot 10^3 \cdot 1.5, \\
\lambda_{11} &= 16.4 \cdot 10^{10} (-37.5r^2 + 82.5r - 44.5), \\
\lambda_{12} &= 0.82 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119.5) \\
\lambda_{22} &= 5.74 \cdot 10^{10} (12.5r^2 - 22.5r + 10.5), \\
\lambda_{55} &= 2.54 \cdot 10^{10} (62.5r^2 - 140r + 79);
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

изотропный

$$\begin{aligned}
\rho &= 2.7 \cdot 10^3 \cdot (-12.5r^2 + 23.75r - 9.75), \\
\lambda_{11} &= 10.5 \cdot 10^{10} \cdot 0.5, \\
\lambda_{12} &= 5.3 \cdot 10^{10} (50r^2 - 110r + 61.5), \\
\lambda_{22} &= 10.5 \cdot 10^{10} (25r^2 - 55r + 30.75), \\
\lambda_{55} &= 2.6 \cdot 10^{10} (68.75r^2 - 153.125r + 85.875).
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Значения функционала Φ_1 , соответствующие законам (4.3.12), (4.3.13) для анизотропного неоднородного покрытия – $\Phi_1 = 0.66 \cdot 10^{-2}$ и $\Phi_1 = 0.59 \cdot 10^{-2}$. Для изотропного случая с законами и неоднородности (4.3.14) получили значение $\Phi_1 = 0.57 \cdot 10^{-2}$.

Для оценки эффективности покрытий с оптимальными звукоотражающими свойствами было рассчитано значение функционала для упругого цилиндра без покрытия, которое составило $\Phi_1 = 1.14 \cdot 10^{-2}$.

Для случая фиксированной частоты, которой соответствует волновой размер цилиндра $kr_0 = 6$, в угловом секторе $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ при угле падения плоской волны $\varphi_0 = -\pi/6$ получены следующие оптимальные законы неоднородности материала покрытия:

тип 3

$$\begin{aligned}
\rho &= 2.7 \cdot 10^3 \cdot 1.5, \\
\lambda_{11} &= 5.74 \cdot 10^{10} (-6.25r^2 + 15.625r - 8.25), \\
\lambda_{12} &= 3.28 \cdot 10^{10} (-62.5r^2 + 137.5r - 74.5), \\
\lambda_{22} &= 16.4 \cdot 10^{10} \cdot 0.5, \\
\lambda_{55} &= 2.54 \cdot 10^{10} (50r^2 - 108.75r + 60);
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

тип 4

$$\begin{aligned}
 \rho &= 2.7 \cdot 10^3 \cdot 1.5, \\
 \lambda_{11} &= 16.4 \cdot 10^{10} (-6.25r^2 + 15.625r - 8.25), \\
 \lambda_{12} &= 0.82 \cdot 10^{10} (-62.5r^2 + 137.5r - 74.5), \\
 \lambda_{22} &= 5.74 \cdot 10^{10} \cdot 0.5, \\
 \lambda_{55} &= 2.54 \cdot 10^{10} (50r^2 - 108.75r + 60);
 \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

изотропный

$$\begin{aligned}
 \rho &= 2.7 \cdot 10^3 \cdot 1.5, \\
 \lambda_{11} &= 10.5 \cdot 10^{10} (-12.5r^2 + 22.5r - 8.5), \\
 \lambda_{12} &= 5.3 \cdot 10^{10} (-25r^2 + 60r - 34.5), \\
 \lambda_{22} &= 10.5 \cdot 10^{10} \cdot 0.5, \\
 \lambda_{55} &= 2.6 \cdot 10^{10} (-62.5r^2 + 135r - 71.5).
 \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Наименьшие значения функционала Φ_2 при найденных оптимальных законах (4.3.15) и (4.3.16) для покрытий из материалов типов 3 и 4 равны $\Phi_2 = 0.54 \cdot 10^{-2}$ и $\Phi_2 = 0.27 \cdot 10^{-2}$, а для изотропного покрытия при оптимальных законах (4.3.17) $-\Phi_2 = 0.4 \cdot 10^{-2}$. Значение функционала для упругого цилиндра без покрытия составило $\Phi_2 = 0.85 \cdot 10^{-2}$.

На рисунках 4.3.13–4.3.15 приведены зависимости интенсивности звукоотражения $I(\omega, \varphi)$ от волнового размера kr_0 при $\varphi = 2\pi/3$ в диапазоне $5 \leq kr_0 \leq 7$. Сплошными линиями изображены частотные зависимости для цилиндров, имеющих покрытия с оптимальными законами неоднородности (4.3.12) (рис. 4.3.13), (4.3.13) (рис. 4.3.14) и (4.3.14) (рис. 4.3.15). Пунктирными линиями обозначены зависимости для цилиндра без покрытия.

На рисунке 4.3.16 приведены угловые зависимости интенсивности звукоотражения $I(\omega, \varphi)$ при фиксированном значении волнового размера $kr_0 = 6$ в угловом секторе $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$. Сплошными линиями показаны зависимости для цилиндров с оптимальными покрытиями (4.3.15) (рис. 4.3.16a), (4.3.16) (рис. 4.3.16b) и (4.3.17) (рис. 4.3.16c). Пунктиром обозначены зависимости для цилиндра без покрытия.

Чтобы выявить влияние свойств подстилающей поверхности Γ на рассеянное акустическое поле, была осуществлена процедура минимизации функционала Φ_1 в частотном диапазоне, соответствующем изменению волнового размера в промежутке $5 \leq kr_0 \leq 7$ при фиксированном значении угла $\varphi_* = 2\pi/3$ и азимутальном угле падающей волны $\varphi_0 = -\pi/3$ в случае акустически мягкой границы полупространства для цилиндра с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием типа 3. Минимальному значению $\Phi_1 = 0.63 \cdot 10^{-2}$

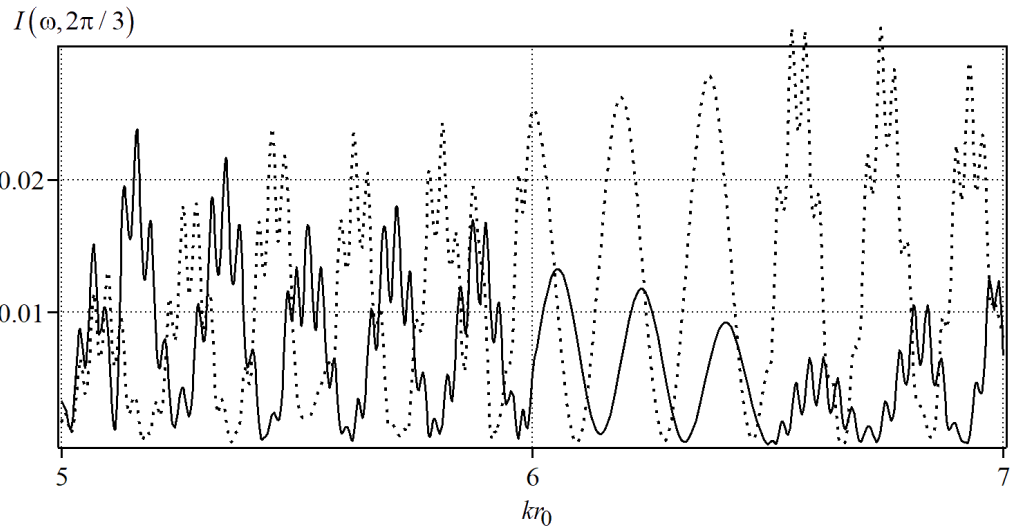


Рис. 4.3.13. Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с покрытием типа 1

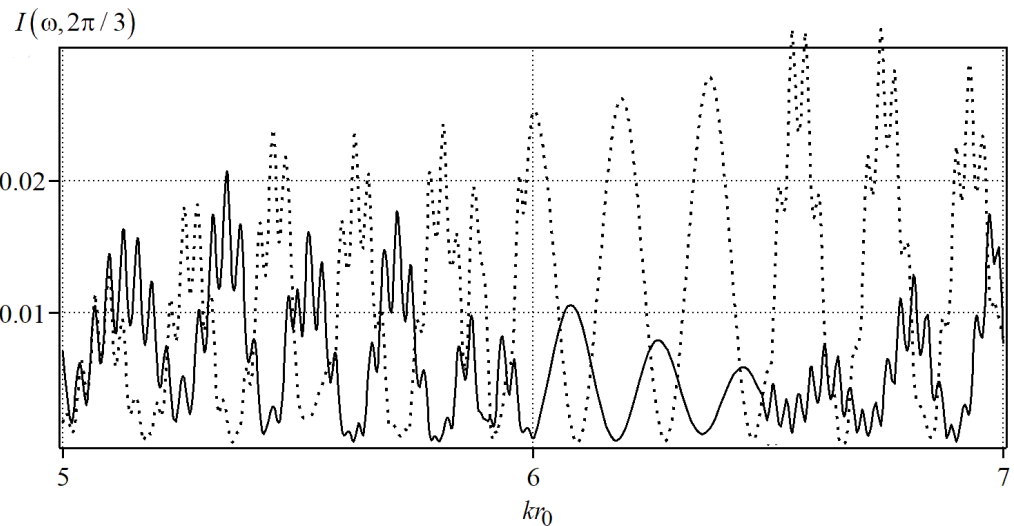


Рис. 4.3.14. Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с покрытием типа 2

соответствует покрытие со следующими характеристиками

$$\begin{aligned}
 \rho &= 2.7 \cdot 10^3 \cdot 1.5, \\
 \lambda_{11} &= 5.74 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119.5), \\
 \lambda_{12} &= 3.28 \cdot 10^{10} (-100r^2 + 220r - 119.5), \\
 \lambda_{22} &= 16.4 \cdot 10^{10} (-25r^2 + 56.25r - 30.75), \\
 \lambda_{55} &= 2.54 \cdot 10^{10} \cdot 1.5.
 \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

При этом значение функционала для цилиндра без покрытия составило $\Phi_1 = 1.12 \cdot 10^{-2}$.

На рисунке 4.3.17 приведены частотные характеристики для цилиндра с оптимальным покрытием (4.3.18) (сплошная линия) и без покрытия (пунктирная линия) при $\varphi_* = 2\pi/3$ в

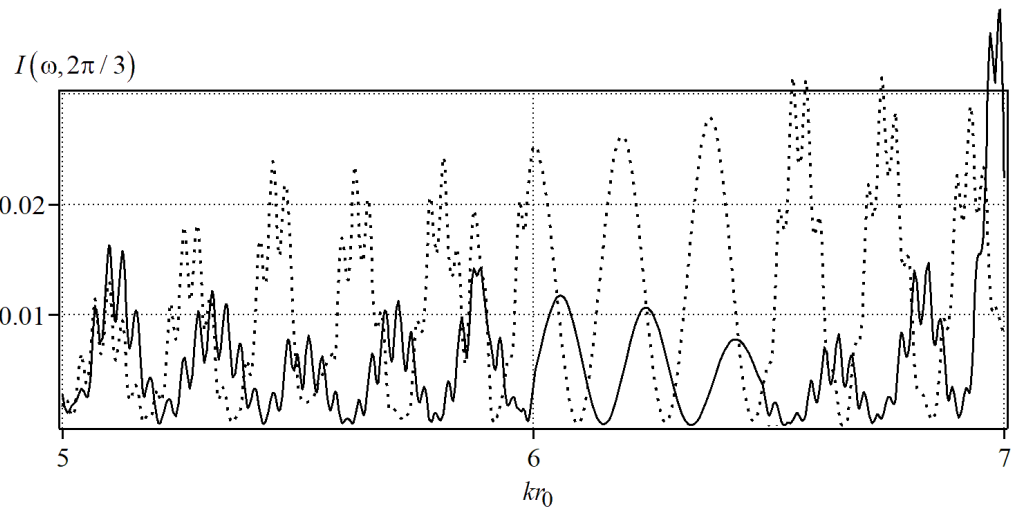


Рис. 4.3.15. Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с изотропным покрытием

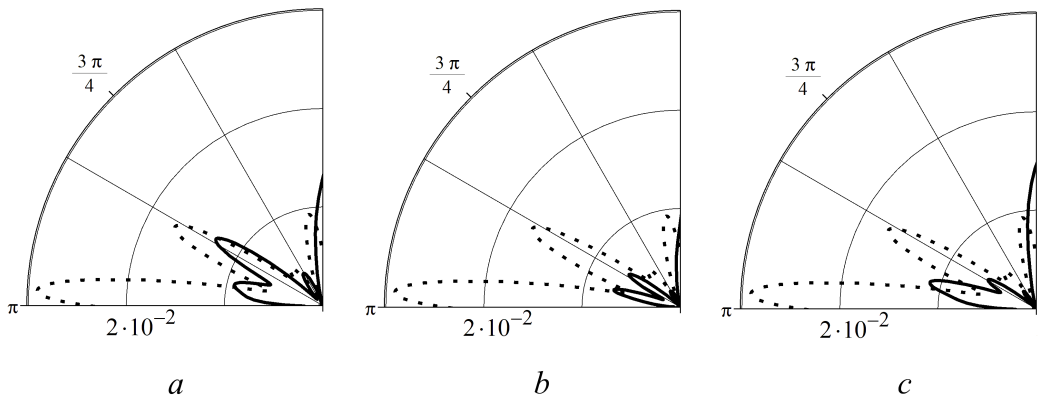


Рис. 4.3.16. Угловые зависимости интенсивности звукового рассеяния

случае акустически мягкой границы Г.

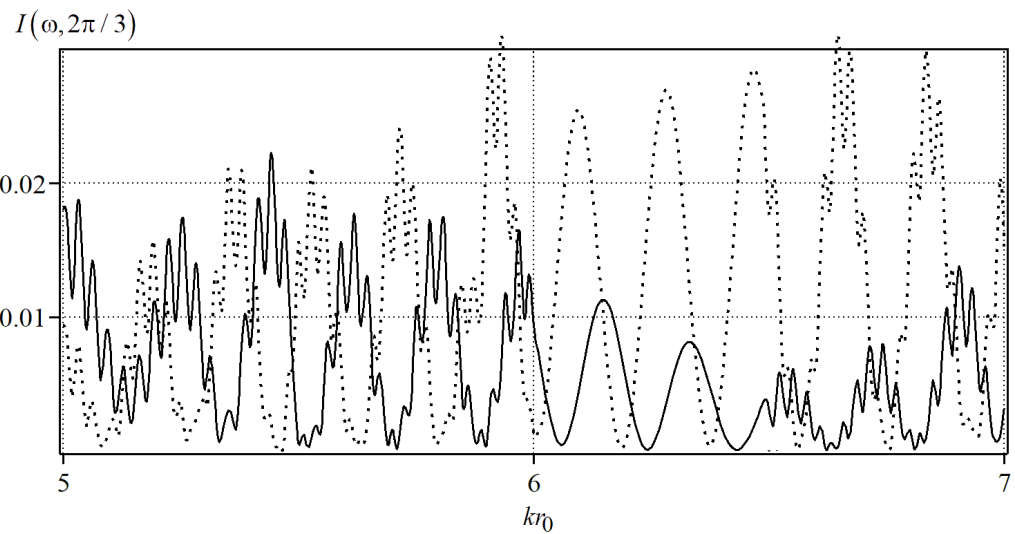


Рис. 4.3.17. Частотные зависимости интенсивности звукового рассеяния для цилиндра с покрытием типа 1 в случае акустически мягкой поверхности

В результате проведенного вычислительного эксперимента по математическому моделированию непрерывно-неоднородного покрытия, предназначенного для минимизации звукового рассеяния, были получены следующие выводы. Расчеты продемонстрировали, что применение неоднородного покрытия с характеристиками, распределенными в соответствии с определенными законами неоднородности, позволяет значительно снизить интенсивность акустического поля, рассеянного цилиндром, в заданном диапазоне частот и в определенном направлении.

5. Рассеяние звуковых волн неоднородными упругими телами цилиндрической формы конечной длины

В настоящей главе приведены решения прямых задач дифракции гармонических звуковых волн (плоских, цилиндрических) на радиально-неоднородных упругих цилиндрических рассеивателях конечной длины (упругом цилиндре с неоднородным упругим покрытием, неоднородном упругом цилиндрическом слое), расположенных как в безграничном жидком пространстве, так и в присутствии подстилающей поверхности. На основе этих решений показана возможность изменения звукоотражающих свойств тел за счет свойств неоднородности упругого тела.

Результаты исследований, приведенные в данной главе, отражены в работах [38, 43, 44, 45, 141].

5.1. Дифракция звуковых волн на цилиндрических телах конечной длины, расположенных в безграничном пространстве

5.1.1. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре конечной длины с неоднородным упругим покрытием

Постановка задачи. Рассмотрим однородный изотропный упругий цилиндр конечной длины L радиуса r_2 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде коаксиального радиально-неоднородного упругого изотропного слоя, внешний радиус которого равен r_1 ($r_1 < L/2$). Свяжем с цилиндром прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат так, что координатная ось z совпадает с осью вращения цилиндра, а торцы цилиндра отстоят от центра координатной системы на расстояние $L/2$ (рис. 5.1.1). Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Цилиндр помещен в идеальную сжимаемую жидкость, плотность и скорость звука которой соответственно равны ρ_1 и c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр произвольным образом падает плоская гармоническая звуковая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k} .

Потенциал скорости падающей волны в системе координат x, y, z равен

$$\Psi_0 = A \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - i\omega t],$$

где A – амплитуда волны; ω – круговая частота; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ – радиус-вектор; $\mathbf{k} = (k \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k \sin \theta_0 \sin \varphi_0, k \cos \theta_0)$ – волновой вектор; θ_0 и φ_0 – полярный и азимутальный углы падения волны; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости, $k = |\mathbf{k}|$, t – время. Без ограничения общности будем считать, что вектор \mathbf{k} лежит в плоскости xz и $\varphi_0 = 0$. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

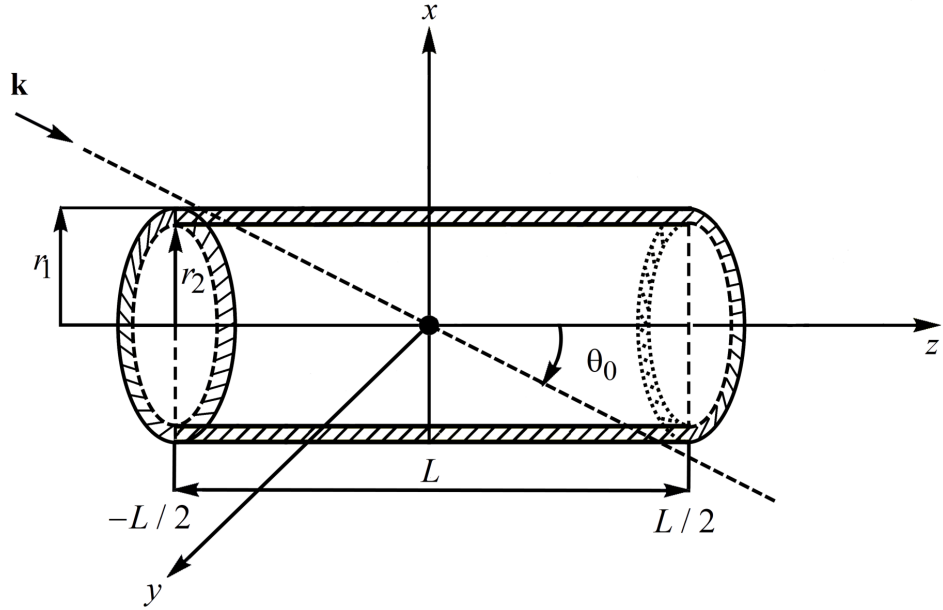


Рис. 5.1.1. Геометрия задачи 5.1.1

Определим акустическое поле вне цилиндра и поля смещений в однородном цилиндре и его неоднородном покрытии.

Уравнения волновых полей. Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца (1.2.15). В силу линейной постановки задачи потенциал скоростей полного акустического поля

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_S,$$

где Ψ_S – потенциал скорости рассеянной волны.

Потенциал скорости падающей плоской волны представим в виде

$$\Psi_0 = A \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi), \quad (5.1.1)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$, $\beta = k \sin \theta_0$.

Рассеянное поле с учетом условий излучения на бесконечности будем искать в виде комбинации всевозможных цилиндрических волн, бегущих вдоль оси z с волновым числом h

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp(in\varphi) dh, \quad (5.1.2)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$.

В (5.1.2) на участках интегрирования от $h = -\infty$ до $-k$ и от $h = k$ до $+\infty$ величина $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ становится чисто мнимой. Чтобы выполнялось условие излучения на бесконечности для потенциала Ψ_S при $r \rightarrow \infty$, необходимо потребовать, чтобы $\text{Im } k_h \geq 0$. Это

следует из (5.1.2) с привлечением асимптотической формулы для функции $H_n(k_h r)$ при больших значениях аргумента ($k_h r \gg 1$)

$$H_n(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \exp[i(k_h r - \pi n/r - \pi/4)]. \quad (5.1.3)$$

Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k < h < k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

Представим вектор смещения \mathbf{u}_0 частиц упругого изотропного однородного цилиндра в виде

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad } F + \text{rot } \Phi,$$

где F и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения, которые в случае установившегося режима колебаний являются решениями скалярного (1.2.28) и векторного (1.2.29) уравнений Гельмгольца.

Представим вектор Φ уравнения (1.2.29) в виде

$$\Phi = \text{rot}(W \cdot \mathbf{e}_z) + k_\tau M \cdot \mathbf{e}_z,$$

где W и M – функции пространственных координат; \mathbf{e}_z – единичный вектор оси z . Тогда векторное уравнение (1.2.29) можно заменить двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций W и M

$$\Delta W + k_\tau^2 W = 0, \quad \Delta M + k_\tau^2 M = 0. \quad (5.1.4)$$

Компоненты вектора смещения \mathbf{u}_0 , записанные через функции F , W и M , в цилиндрической системе координат имеют вид (4.2.5).

Волновые поля в неоднородном слое описываются уравнениями линейной теории упругости изотропного тела (1.2.21), (1.2.23)-(1.2.25).

Граничные условия на внешней поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\text{при } r = r_1 : \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (5.1.5)$$

На внутренней поверхности слоя при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_2 : \quad u_r &= u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Здесь σ_{0ij} – компоненты тензора напряжений в однородном изотропном цилиндре, которые связаны с компонентами вектора смещения \mathbf{u}_0 соотношениями (1.2.24).

Будем считать, что конечный упругий цилиндр с неоднородным покрытием шарнирно закреплен по торцам в бесконечные цилиндрические абсолютно жесткие и неподвижные экраны. В этом случае при $z = \pm L/2$ должны выполняться краевые условия [122]

$$u_{0r} = 0, \quad u_{0\varphi} = 0, \quad M_{0z} = 0, \quad N_{0z} = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad M_z = 0, \quad N_z = 0, \quad (5.1.7)$$

что означает равенство нулю радиальных смещений u_{0r} , u_r , угловых смещений $u_{0\varphi}$, u_φ , изгибающих моментов в продольном направлении M_{0z} , M_z и продольных сил N_{0z} , N_z цилиндра и покрытия соответственно. При этом согласно [164]

$$M_{0z} = \int_0^{r_2} \sigma_{0zz} r dr, \quad M_z = \int_{r_2}^{r_1} \sigma_{zz} r dr, \quad N_{0z} = \int_0^{r_2} \sigma_{0zz} dr, \quad N_z = \int_{r_2}^{r_1} \sigma_{zz} dr.$$

Поэтому условия (5.1.7) сводятся к следующим краевым условиям при $z = \pm L/2$:

$$u_{0r} = 0, \quad u_{0\varphi} = 0, \quad \sigma_{0zz} = 0, \quad u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \sigma_{zz} = 0. \quad (5.1.8)$$

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений с частными производными (1.2.15), (1.2.28), (5.1.4), (1.2.21), (1.2.23)-(1.2.25), удовлетворяющих условиям (5.1.5), (5.1.6), (5.1.8), условию излучения на бесконечности для отраженной волны и условиям ограниченности волнового поля внутри цилиндра.

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{2nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\ u_z(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{3nq}(r) \cos[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

где $k_q = \pi q/L$.

С учетом условия ограниченности функции решения уравнений (1.2.28) и (5.1.4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} B_{nq} J_n(k_1 r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\ W &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} C_{nq} J_n(k_2 r) \cos[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \\ M &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} D_{nq} J_n(k_2 r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

где $k_1 = \sqrt{k_l^2 - k_q^2}$; $k_2 = \sqrt{k_r^2 - k_q^2}$.

Выбор функций u_r , u_φ , u_z и F , W , M в виде (5.1.9) и (5.1.10) обеспечивает выполнение условий (5.1.7).

Подставляя разложения (5.1.9) в уравнения (1.2.25), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1nq}(r)$, $U_{2nq}(r)$, $U_{3nq}(r)$ для каждого n и q

$$\widehat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}'' + \widehat{\mathbf{B}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}' + \widehat{\mathbf{C}}_{nq} \mathbf{U}_{nq} = 0, \quad (5.1.11)$$

где $\mathbf{U}_{nq} = (U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r))^T$; $\widehat{\mathbf{A}}_{nq} = (a_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{B}}_{nq} = (b_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\widehat{\mathbf{C}}_{nq} = (c_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} a_{nq11} &= (\lambda + 2\mu) r^2, & a_{nq22} &= a_{nq33} = \mu r^2, & a_{nqpm} &= 0, & (p \neq m), \\ b_{nq11} &= (\lambda' + 2\mu') r^2 + (\lambda + 2\mu) r, & b_{nq12} &= b_{nq21} = in(\lambda + \mu) r, & b_{nq13} &= -k_q(\lambda + \mu) r^2, \\ b_{nq22} &= b_{nq33} = \mu' r^2 + \mu r, & b_{nq23} &= b_{nq32} = 0, & b_{nq31} &= k_q(\lambda + \mu) r^2, \\ c_{nq11} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(k_q^2 r^2 + n^2 + 2) + \lambda' r - \lambda, & c_{nq12} &= in(\lambda' r - \lambda - 3\mu), & c_{nq13} &= -k_q \lambda' r^2, \\ c_{nq21} &= in(\mu' r + \lambda + 3\mu), & c_{nq22} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu' r - n^2 \lambda - \mu(2n^2 + k_q^2 r^2 + 1), \\ c_{nq23} &= -ink_q(\lambda + \mu) r, & c_{nq31} &= k_q(\mu' r + \lambda + \mu) r, \\ c_{nq32} &= ink_q(\lambda + \mu) r, & c_{nq33} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(2k_q^2 r^2 + n^2) - k_q^2 \lambda r^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_n(h)$, B_{nq} , C_{nq} , D_{nq} разложений (5.1.2), (5.1.10) и функции $U_{1nq}(r)$, $U_{2nq}(r)$, $U_{3nq}(r)$ в разложениях (5.1.9) подлежат определению из граничных условий (5.1.6) и (5.1.7).

Воспользуемся следующей парой преобразований Фурье

$$\tilde{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz} f(z) dz, \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \tilde{f}(h) dh.$$

Используя формулу [75]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} dz = \delta(h)$$

и принимая во внимание четность дельта-функции Дирака $\delta(x)$, найдем преобразования Фурье по z потенциала падающей звуковой волны, определяемого (5.1.1)

$$\tilde{\Psi}_0(h) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp(in\varphi) \delta(h - \alpha), \quad \Psi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{\Psi}_0(h) dh. \quad (5.1.12)$$

Учитывая то, что $u_r = 0$ при $|z| > L/2$, преобразование Фурье по z радиального смещения неоднородного упругого слоя будет иметь вид

$$\tilde{u}_r(h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) g_q(h) \exp(in\varphi), \quad u_r = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{u}_r(h) dh, \quad (5.1.13)$$

где

$$g_q(h) = (-i)^{q-1} \frac{L}{4\pi} \left[\frac{\sin k_q^{(+)}}{k_q^{(+)}} - (-1)^q \frac{\sin k_q^{(-)}}{k_q^{(-)}} \right],$$

$$k_q^{(+)} = (hL + \pi q)/2, \quad k_q^{(-)} = (hL - \pi q)/2.$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ с учетом (5.1.2), (5.1.12), (5.1.13) находим коэффициенты $A_n(h)$, выраженные через $U_{1nq}(r)$

$$A_n(h) = -\frac{1}{k_h H'_n(k_h r_1)} \left[A i^n \beta J'_n(\beta r_1) \delta(h - \alpha) + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r_1) g_q(h) \right]. \quad (5.1.14)$$

Здесь и далее штрихами обозначено дифференцирование по аргументу.

Подставим во второе граничное условие (5.1.5) выражения (5.1.1), (5.1.2) и (5.1.9), домножим обе части равенства на $\sin[k_q(z + L/2)]$ и проинтегрируем по z в пределах от $-L/2$ до $L/2$. В результате, учитывая выражение для вронскиана [83], получим

$$\begin{aligned} (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{(r_1)} [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[\frac{2i^n A g_q(\alpha)}{\beta r_1 H'_n(\beta r_1)} - \pi \omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

где

$$Z_{nmq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_m(h) g_q(h) dh, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad m, q = 1, 2, \dots). \quad (5.1.16)$$

Интеграл (5.1.16) вычислить аналитически не представляется возможным. Его значение может быть найдено только численно.

Отметим, что при $n \neq 0$ на вещественной оси отсутствуют особенности подынтегральной функции, в том числе в точках $h = \pm k$, которые являются нулями функции $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$. В этом можно убедиться, если заменить в (5.1.16) цилиндрическую функцию Ганкеля первого рода порядка n и ее производную асимптотическими формулами при малых значениях аргумента, так как в окрестностях точек $h = \pm k$ значения $k_h r_1$ малы.

Имеем при $z \rightarrow 0$ [83]

$$H_n(z) \approx -\frac{i}{\pi} (n-1)! \left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad H'_n(z) \approx \frac{2^n i n!}{\pi z^{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

$$H_0(z) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{z}{2}, \quad H'_0(z) \approx \frac{2i}{\pi z}.$$

При этом учитываем [83], что

$$H_{-n}(z) = (-1)^n H_n(z).$$

Получаем, что для каждого набора n, m, q ($n = \pm 1, \pm 2, \dots; m, q = 1, 2, \dots$) подынтегральная функция в (5.1.16) не имеет особых точек. При $n = 0$ подынтегральная функция в точках $h = \pm k$ имеет логарифмические особенности, которые являются интегрируемыми.

Кроме того, на основании формул (5.1.3) и (5.1.13) устанавливаем, что при $h \rightarrow \pm\infty$ подынтегральная функция имеет порядок h^{-3} , откуда следует сходимость интеграла (5.1.16).

Из третьего и четвертого граничных условий (5.1.5) находим

$$\begin{aligned} inU_{1nq}(r_1) + r_1U'_{2nq}(r_1) - U_{2nq}(r_1) &= 0, \\ k_qU_{1nq}(r_1) + U'_{3nq}(r_1) &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Из первых трех граничных условий (5.1.6) при $r = r_2$ находятся неизвестные коэффициенты B_{nq} , C_{nq} , D_{nq} , выраженные через $U_{1nq}(r_2)$, $U_{2nq}(r_2)$, $U_{3nq}(r_2)$

$$\mathbf{K}_{nq} = [\mathbf{M}_{nq}]^{-1}\mathbf{U}_{nq},$$

где $\mathbf{K}_{nq} = (B_{nq}, C_{nq}, D_{nq})^T$; $\mathbf{M}_{nq} = (m_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрица с элементами

$$\begin{aligned} m_{nq11} &= k_1J'_n(k_1r_2), \quad m_{nq12} = -k_2k_qJ'_n(k_2r_2), \quad m_{nq13} = ink_\tau J_n(k_2r_2)/r_2, \\ m_{nq21} &= inJ_n(k_1r_2)/r_2, \quad m_{nq22} = -ink_qJ_n(k_2r_2)/r_2, \quad m_{nq23} = -k_2k_\tau J'_n(k_2r_2), \\ m_{nq31} &= k_qJ_n(k_1r_2), \quad m_{nq32} = k_2^2J_n(k_2r_2), \quad m_{nq33} = 0. \end{aligned}$$

Из оставшихся неиспользованных граничных условий (5.1.6) получим краевые условия для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на внутренней поверхности покрытия при $r = r_2$

$$\left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}'_{nq} + \mathbf{T}_{nq} \mathbf{U}_{nq} \right)_{r=r_2} = 0, \quad (5.1.18)$$

где $\mathbf{T}_{nq} = \mathbf{F}_{nq} - \mathbf{G}_{nq}[\mathbf{M}_{nq}]^{-1}$; $\mathbf{F}_{nq} = (f_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\mathbf{G}_{nq} = (\gamma_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами

$$\begin{aligned} f_{nq11} &= \lambda(r)/r, \quad f_{nq12} = in\lambda(r)/r, \quad f_{nq13} = -\lambda(r)k_q, \\ f_{nq21} &= in\mu(r)/r, \quad f_{nq22} = -\mu(r)/r, \quad f_{nq23} = f_{nq32} = f_{nq33} = 0, \quad f_{nq31} = k_q\mu(r). \\ \gamma_{nq11} &= 2\mu_0k_1^2J''_n(k_1r) - \lambda_0(k_1^2 + k_q^2)J_n(k_1r), \\ \gamma_{nq12} &= -2k_q\mu_0k_2^2J''_n(k_2r), \quad \gamma_{nq13} = 2ink_\tau\mu_0(k_2rJ'_n(k_2r) - J_n(k_2r))/r^2, \\ \gamma_{nq21} &= 2in\mu_0(k_1rJ'_n(k_1r) - J_n(k_1r))/r^2, \quad \gamma_{nq22} = 2ink_q\mu_0(J_n(k_2r) - k_2rJ'_n(k_2r))/r^2, \\ \gamma_{nq23} &= -\mu_0k_\tau(k_2^2r^2J''_n(k_2r) - k_2rJ'_n(k_2r) + n^2J_n(k_2r))/r^2, \\ \gamma_{nq31} &= 2\mu_0k_1k_qJ'_n(k_1r), \quad \gamma_{nq32} = -\mu_0k_2(k_q^2 - k_2^2)J'_n(k_2r), \quad \gamma_{nq33} = in\mu_0k_\tau k_q J_n(k_2r)/r. \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое в выражении (5.1.14) для коэффициентов рассеяния $A_n(h)$ характеризует вклад жесткого фона в рассеянное акустическое поле, второе – вклад упругих колебаний. Этот жесткий фон создается конечным цилиндром с покрытием и абсолютно жесткими цилиндрическими экранами.

Теперь представим рассеянное поле в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, позволяющего определить рассеянное акустическое поле в произвольной точке пространства по известным потенциалу поля и его нормальной производной на поверхности рассеивателя

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega, \quad (5.1.19)$$

где \mathbf{R}_2 – радиус-вектор точки, находящейся на внешней боковой поверхности цилиндрической оболочки; $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – функция Грина для свободного пространства; Ω – боковая поверхность цилиндра; $d\Omega = r_1 d\varphi_2 dz_2$; $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$; $z_2 \in [-L/2, L/2]$. Применение формулы (5.1.19) вызвано необходимостью устранения вклада в рассеянное поле цилиндрических абсолютно жестких экранов и учета только рассеяния звука цилиндром конечной длины.

Выберем функцию Грина в виде потенциала точечного источника и в цилиндрической системе координат имеет вид [55]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0(\xi) d\xi, \quad (5.1.20)$$

где

$$\tilde{G}_0(\xi) = \frac{i}{8\pi} e^{i\xi(z-z_2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\varphi - \varphi_2)] \begin{cases} H_m(\eta r_2) J_m(\eta r), & r < r_2; \\ J_m(\eta r_2) H_m(\eta r), & r > r_2. \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}.$$

Для того, чтобы избавиться от вычисления интегралов по переменной h , выражения для потенциала полного поля и его нормальной производной на поверхности цилиндра $r = r_1$ получим из первого и второго граничных условий (5.1.5). Будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{R}_2) &= \frac{i}{\omega\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} [(\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1nq}(r_1) + \\ &\quad + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} (U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1)) - \\ &\quad - k_q \lambda(r_1) U_{3nq}(r_1)] \sin[k_q(z_2 + L/2)] e^{in\varphi_2}, \\ \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} &= -i\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r_1) \sin[k_q(z_2 + L/2)] e^{in\varphi_2}. \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Подставляя (5.1.20), (5.1.21) в интеграл (5.1.19) и осуществляя интегрирование по поверхности Ω с учетом ортогональности экспоненциальных множителей, получим

$$\begin{aligned} \Psi_S(\mathbf{R}) &= -\frac{\pi r_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\tilde{W}_{1nq} U'_{1nq}(r_1) + W_{1nq} U_{1nq}(r_1) + \right. \\ &\quad \left. + W_{2nq} U_{2nq}(r_1) + W_{3nq} U_{3nq}(r_1) \right] e^{in\varphi}, \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

где

$$\tilde{W}_{1nq} = \frac{\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)}{\omega\rho_1} I_{1nq}(r, z), \quad W_{1nq} = \frac{\lambda(r_1)}{r_1 \omega\rho_1} I_{1nq}(r, z) + \omega I_{2nq}(r, z),$$

$$W_{2nq} = \frac{in\lambda(r_1)}{r_1\omega\rho_1} I_{1nq}(r, z), \quad W_{3nq} = -\frac{k_q\lambda(r_1)}{\omega\rho_1} I_{1nq}(r, z),$$

$$I_{1nq}(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) g_q(\xi) d\xi, \quad I_{2nq}(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) g_q(\xi) d\xi.$$

В дальней зоне акустического поля ($kr \gg 1$) интегралы $I_{1nq}(r, z)$ и $I_{2nq}(r, z)$, входящие в (5.1.22), могут быть вычислены методом перевала. Заменяем в подынтегральных выражениях цилиндрическую функцию Ганкеля ее асимптотической формулой при больших значениях аргумента (5.1.3), а также выполним замену $\xi = k \sin \gamma$. В результате получаем

$$I_{1nq}(r, z) = (-i)^n e^{-i\pi/4} \times$$

$$\times \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi kr \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] (k \cos \gamma)^2 J'_n(kr_1 \cos \gamma) g_q(k \sin \gamma) d\gamma,$$

$$I_{2nq}(r, z) = (-i)^n e^{-i\pi/4} \times$$

$$\times \int_{\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi kr \cos \gamma}} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \right] k \cos \gamma J_n(kr_1 \cos \gamma) g_q(k \sin \gamma) d\gamma,$$

где Γ – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости γ (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$).

Согласно методу перевала [16, 56]

$$\int_{\Gamma} s(\gamma) e^{Qf(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi}{Q|f''(\gamma_0)|}} s(\gamma_0) e^{Qf(\gamma_0) + i\zeta}, \quad Q \gg 1, \quad (5.1.23)$$

где Γ – контур на комплексной плоскости γ ; ζ – угол, определяющий направление линии наибоыстрейшего убывания функции $\operatorname{Re} f(\gamma)$, проходящей через точку перевала γ_0 , где $f'(\gamma_0) = 0$, $f''(\gamma_0) \neq 0$.

В нашем случае $Q = kr$, $f(\gamma) = i \left(\frac{z}{r} \sin \gamma + \cos \gamma \right)$. Тогда точка перевала γ_0 определяется как $\gamma_0 = \arctan(z/r)$, а угол наискорейшего спуска может быть найден из уравнения (3.3.27). Получаем $\zeta = -\pi/4$. В результате в соответствии с формулой (5.1.23) будем иметь

$$I_{1nq}(r, z) \approx (-i)^{n+1} \frac{2}{r} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \right) \right] k \cos^2 \gamma_0 J'_n(kr_1 \cos \gamma_0) g_q(k \sin \gamma_0),$$

$$I_{2nq}(r, z) \approx (-i)^{n+1} \frac{2}{r} \exp \left[ikr \left(\frac{z}{r} \sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 \right) \right] \cos \gamma_0 J_n(kr_1 \cos \gamma_0) g_q(k \sin \gamma_0).$$

Заметим, что при применении метода перевала важным условием является требование, согласно которому функция $s(\gamma)$ в (5.1.23) должна изменяться много медленнее функции $\exp[Qf(\gamma)]$, что в рассматриваемом случае достигается при выполнении дополнительного условия $r \gg L$.

Численные исследования. На основе полученного решения (5.1.22) были проведены расчеты угловых и частотных характеристик амплитуды рассеянного акустического поля $|\Psi_S(\varphi)/A|$ в дальней зоне ($r = 100$ м) в плоскости $z = 0$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$) радиуса $r_2 = 0.8 \text{ м}$ с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в безграничном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c = 1485 \text{ м/с}$). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ (поливинилбутираль), так и неоднородное с механическими характеристиками

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad f(r) = f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r), \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

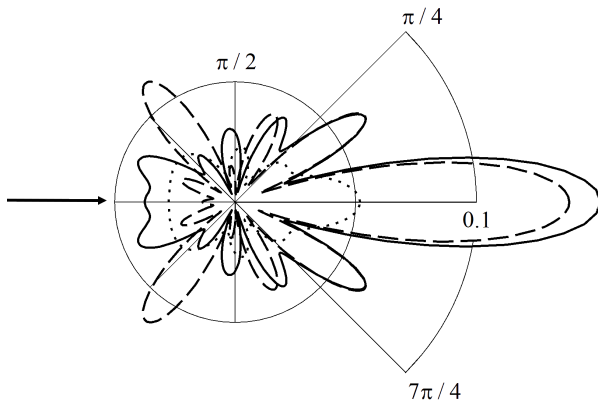
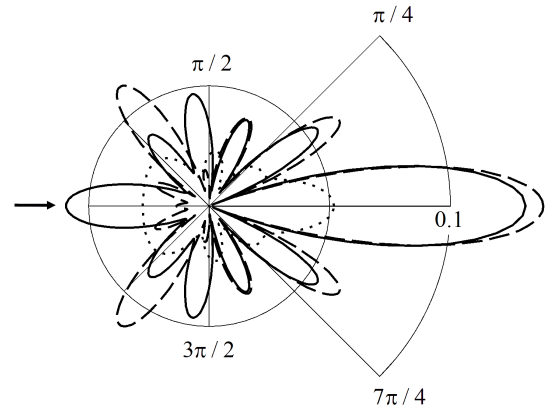
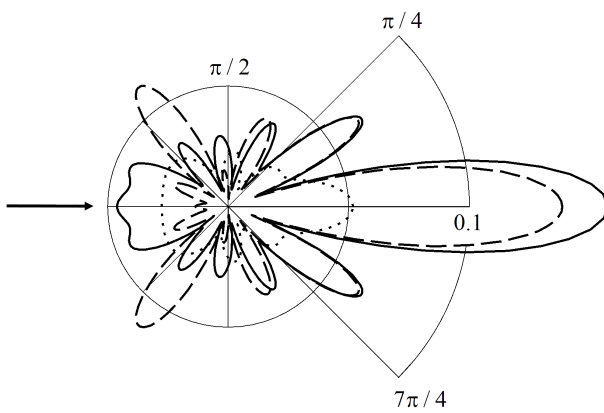
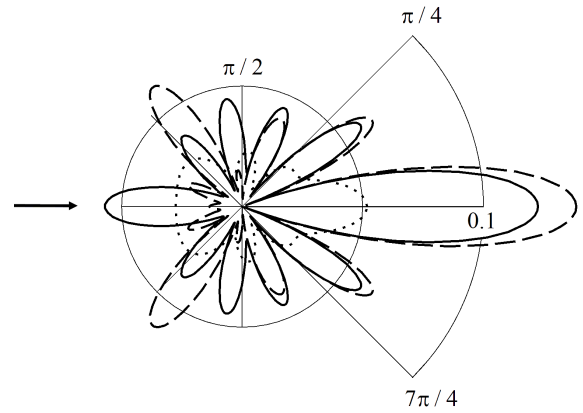
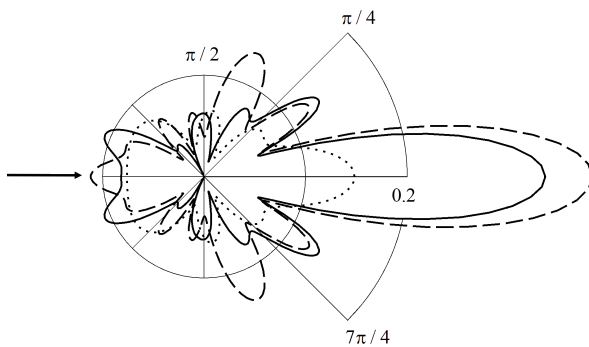
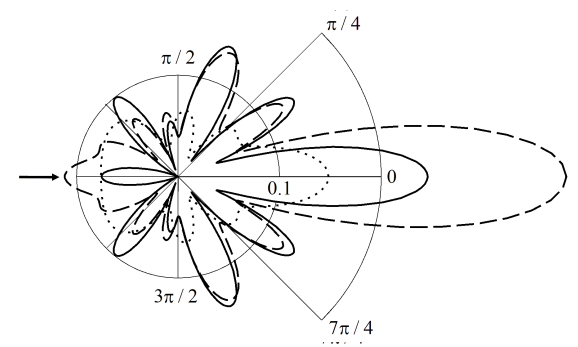
Функции $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$, $f_4(r)$, задающие неоднородность материала цилиндрического слоя, определены выражениями (2.1.10), (2.1.11).

Решение краевой задачи (5.1.11), (5.1.15), (5.1.17), (5.1.18) получено методом сплайн-коллокации [50]. Для контроля точности получаемого приближенного решения вычисления проводились на сгущающихся вдвое сетках. Вычислительный процесс останавливался в тот момент, когда на последней паре сеток величины $|U_{jmq}(\xi)|$ ($j = 1, 2, 3$) различались не более, чем на 10^{-9} на концах отрезка $[r_2, r_1]$ и в восьми равноотстоящих контрольных точках этого отрезка.

Суммирование в (5.1.22) по индексу n проводилось в диапазоне от $-N$ до N , а по q от 1 до N , где $N = 2[kr_1] + 1$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

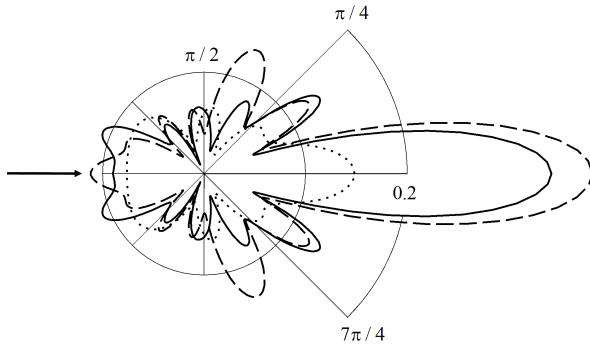
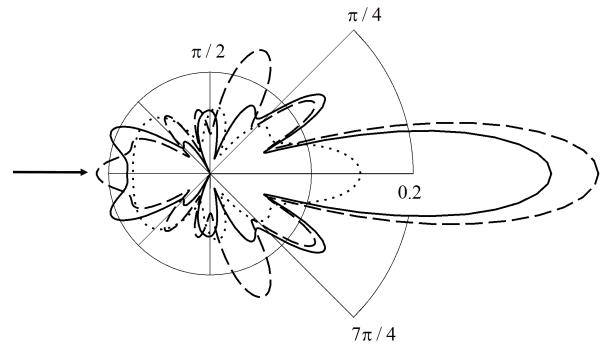
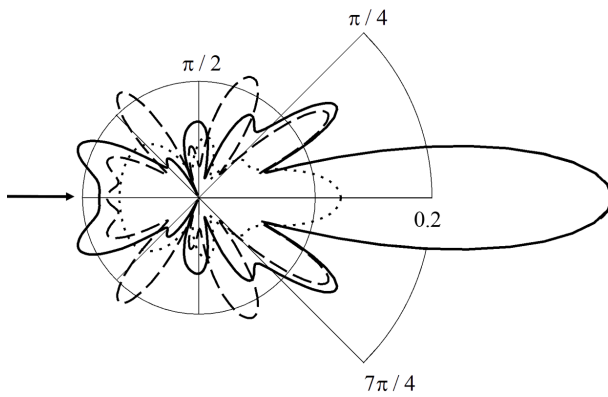
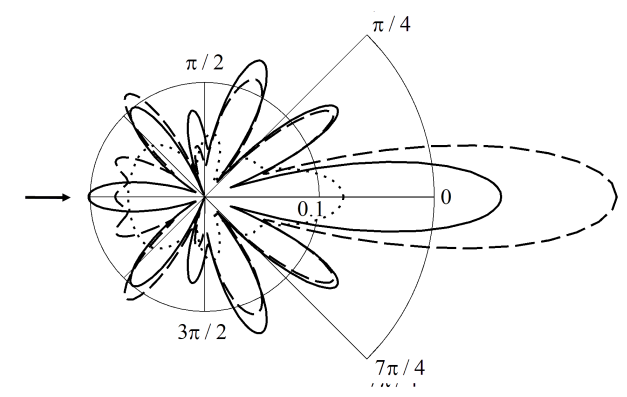
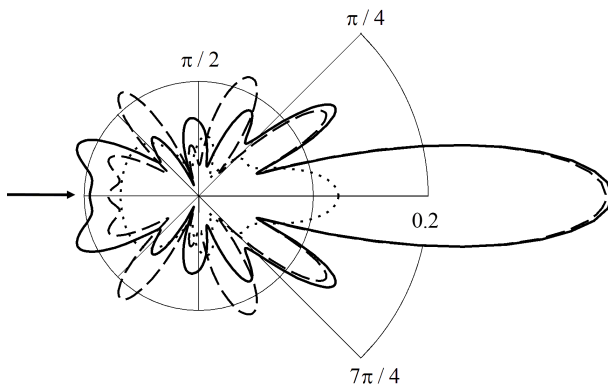
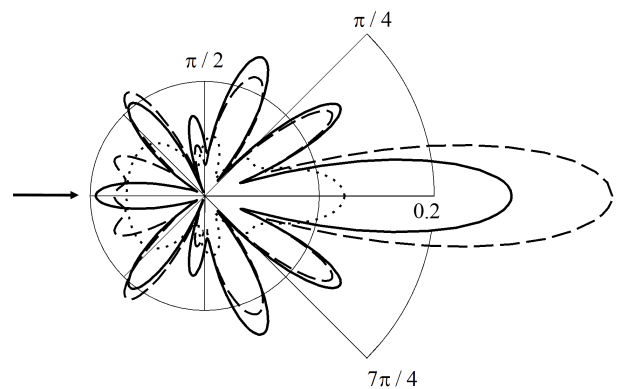
Так как подынтегральная функция в (5.1.16) быстро убывает на бесконечности (при $h \rightarrow \pm\infty$ подынтегральная функция имеет порядок $O(h^{-3})$), то несобственный интеграл (5.1.16) вычислялся с использованием приема обрезания бесконечных пределов [59]. Интеграл в конечных пределах вычислялся по квадратурной формуле Симпсона [59] на равномерной сетке.

На рисунках 5.1.2 – 5.1.13 представлены полярные диаграммы направленности амплитуды рассеянного акустического поля $|\Psi_S(\varphi)/A|$ при волновом размере тела $kr_2 = 4$ и угле падения $\theta_0 = \pi/2$ для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Сплошные линии соответствуют неоднородному покрытию, штриховые – однородному покрытию, пунктирные – цилиндру без покрытия. Стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны. В названиях рисунков указано, при каком значении L/r_1 построен рисунок и каком законе неоднородности $f(r)$ построена сплошная линия на каждом из рисунков. Сравнивая сплошные кривые на рисунках 5.1.2, 5.1.4 можно видеть, что законы неоднородности $f_1(r)$, $f_3(r)$, которые являются функциями, возрастающими по толщине слоя, показывают достаточно схожее влияние на рассеянное акустическое поле. Наиболее заметное различие между ними проявляется в области прямого звукового рассеяния ($\varphi = 0$). Аналогичная ситуация наблюдается при сравнении сплошных кривых на рисунках 5.1.3, 5.1.5, где в качестве функций неоднородности рассматриваются убывающие по толщине слоя функции $f_2(r)$, $f_4(r)$.

Рис. 5.1.2. $f(r) = f_1(r)$, $L/r_1 = 5$ Рис. 5.1.3. $f(r) = f_2(r)$, $L/r_1 = 5$ Рис. 5.1.4. $f(r) = f_3(r)$, $L/r_1 = 5$ Рис. 5.1.5. $f(r) = f_4(r)$, $L/r_1 = 5$ Рис. 5.1.6. $f(r) = f_1(r)$, $L/r_1 = 50$ Рис. 5.1.7. $f(r) = f_2(r)$, $L/r_1 = 50$

Можно видеть, что при небольших значениях L/r_1 на рисунках 5.1.2 – 5.1.5 количественная характеристика амплитуды рассеяния звука примерно в два раза меньше по сравнению с рисунками, построенными далее при больших значениях L/r_1 .

Отметим, что диаграммы направленности на группах рисунков 5.1.6 – 5.1.9 и 5.1.10 – 5.1.13 достаточно схожи, а расчеты в группе рисунков 5.1.10 – 5.1.13 при $L/r_1 = 100$ идентич-

Рис. 5.1.8. $f(r) = f_3(r)$, $L/r_1 = 50$ Рис. 5.1.9. $f(r) = f_4(r)$, $L/r_1 = 50$ Рис. 5.1.10. $f(r) = f_1(r)$, $L/r_1 = 100$ Рис. 5.1.11. $f(r) = f_2(r)$, $L/r_1 = 100$ Рис. 5.1.12. $f(r) = f_3(r)$, $L/r_1 = 100$ Рис. 5.1.13. $f(r) = f_4(r)$, $L/r_1 = 100$

ны диаграммам, рассчитанным для случая однородного упругого цилиндра с неоднородным покрытием бесконечной длины с использованием решения, полученного в работе [134]. Однако такое точное совпадение достигается только при угле падения волны $\theta_0 = \pi/2$. Различие штриховой и сплошной кривых на рисунках 5.1.2 – 5.1.13 указывает на возможность изменения характеристик рассеянной цилиндром звуковой волны за счет неоднородности покрытия.

На рисунке 5.1.14 изображены частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|\Psi_S(\pi)/A|$ от волнового размера цилиндра kr_1 в диапазоне $3 \leq kr_1 \leq 5$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют случаям цилиндра с неоднородным покрытием с законом $f(r) = f_2(r)$ при $L/r_1 = 5, 50, 100$ соответственно. Кривые 4, 5 соответствуют цилиндру с однородным покрытием при $L/r_1 = 5, 100$.

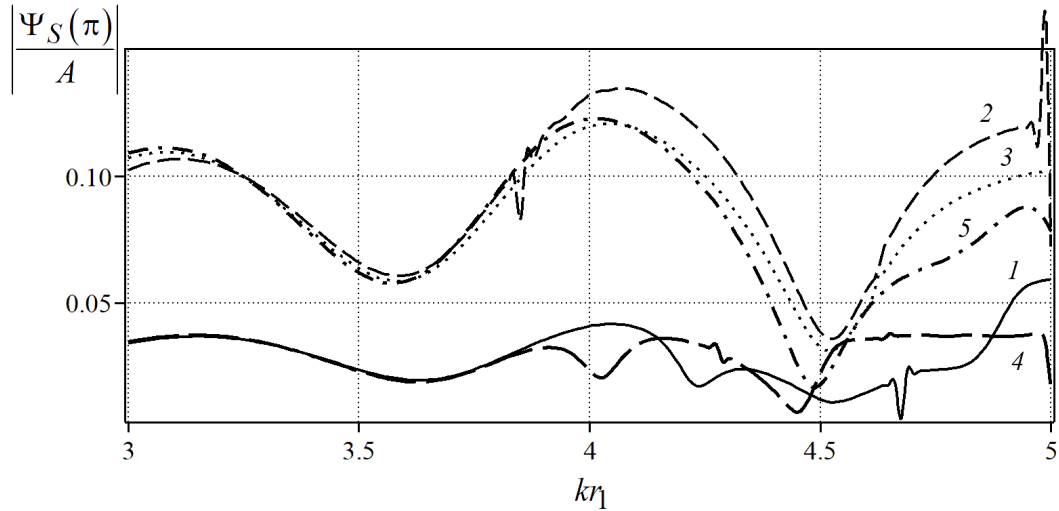


Рис. 5.1.14. Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра

Сравнение кривых 2 и 3 показывает, что при достаточно больших значениях L/r_1 качественное поведение амплитуды обратного рассеяния звука отличается незначительно. Основное отличие заключается в присутствии резонансов на кривой соответствующей $L/r_1 = 50$ вблизи значений частот, соответствующим значениям волнового размера $kr_1 = 3.85, 5$. Из анализа кривых 1 и 4, 3 и 5 можно видеть, что влияние неоднородности материала покрытия усиливается с увеличением значения волнового размера. Заметим также, что кривые 3 и 4, рассчитанные для случая $L/r_1 = 100$, полностью повторяют кривые для случая цилиндра бесконечной длины, рассчитанные с использованием решения из [134].

5.1.2. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре конечной длины с неоднородным упругим покрытием

Постановка задачи и решение задачи. Рассмотрим случай, когда падающая из внешнего пространства на изотропный упругий цилиндр конечной длины с радиально-неоднородным упругим покрытием, введенный в рассмотрение в подразделе 5.1.1, звуковая волна является цилиндрической и излучается линейным источником, расположенным в точке с координатами (r_i, φ_i) цилиндрической системы координат (r, φ, z) , ось которой совпадает с осью цилиндрического рассеивателя (рис. 5.1.15). Потенциал скоростей в акустической волне, излучаемой линейным источником, на поверхности которого возбуждена одна из мод, имеет вид

$$\Psi_0 = AH_m(kR) \exp(im\theta), \quad (5.1.24)$$

где A – амплитуда волны; $H_m(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; R – расстояние между источником и точкой наблюдения:

$$R = [r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\varphi - \varphi_i)]^{1/2}.$$

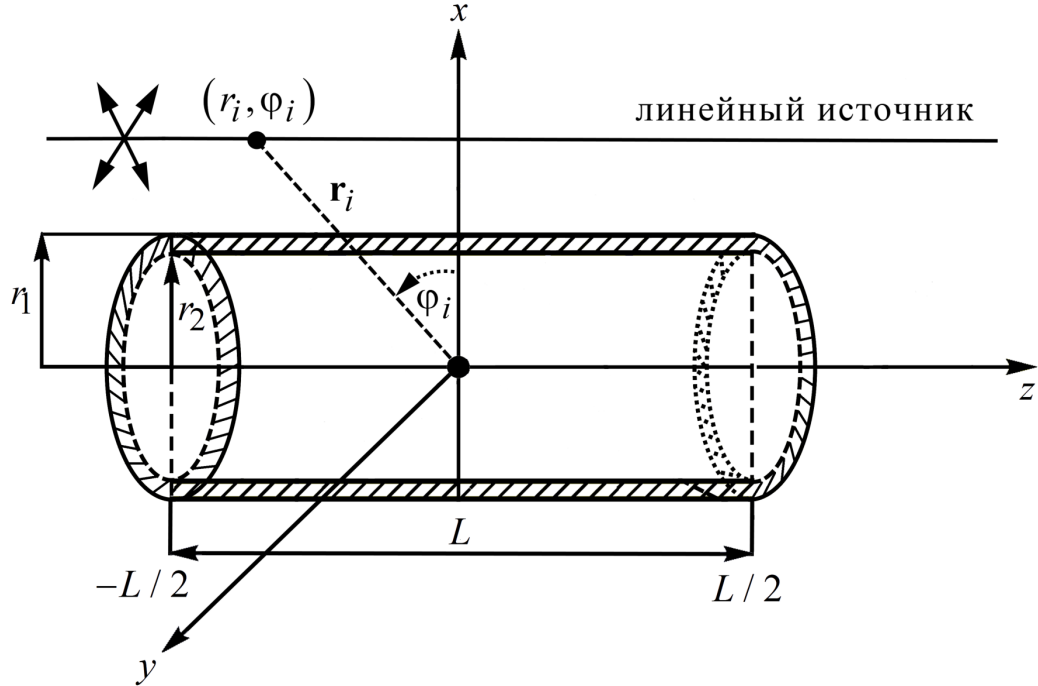


Рис. 5.1.15. Геометрия задачи 5.1.2

Хотя падающее волновое поле двумерно, искомые волновые поля будут трехмерными.

В системе координат рассеивателя цилиндрическая волна (5.1.24) может быть представлена на разложении (2.1.1).

Поскольку на внешней поверхности цилиндрического рассеивателя выражение (5.1.24) может быть представлено в виде

$$\Psi_0 = A(-1)^m \exp(im\varphi_i) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n H_{m-n}(kr_i) J_n(kr) \exp[in(\varphi - \varphi_i)],$$

схожим выражению для потенциала плоской волны, то решение задачи проводится точно также, как и в случае плоской волны, рассмотренной в подразделе 5.1.1. При этом граничное условие, которое для плоской звуковой волны имеет вид (5.1.15), для случая цилиндрической волны запишется как

$$\begin{aligned} & (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ & = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[\frac{2\Omega_{mn} A g_q(0)}{k r_1 H'_n(k r_1)} - \pi \omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \\ & \Omega_{mn} = (-1)^{m+n} H_{m-n}(k r_i) \exp[i(m-n)\varphi_i]. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Решив краевую задачу (5.1.11), (5.1.25), (5.1.17), (5.1.18) методом сплайн-коллокации [50], находим значения \mathbf{u} на внешней боковой поверхности цилиндра. Зная значения \mathbf{u} , можно определить поле Ψ_S по формуле (5.1.22).

Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты угловых и частотных характеристик амплитуды рассеянного акустического поля $|\Psi_S(\varphi)/A|$ в дальней зоне ($r = 100$ м) в плоскости $z = 0$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр радиуса $r_2 = 0.8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в безграничном пространстве, заполненном водой. Рассматривалось как однородное полимерное покрытие из поливинилбутираля, так и неоднородное с механическими характеристиками

$$\rho = \rho^0 \cdot f_2(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

Функция $f_2(r)$, задающая неоднородность материала цилиндрического слоя, определена выражением в (2.1.10).

Полагалось, что линейный источник располагается в точке с цилиндрическими координатами $(r_i, \varphi_i) = (4, \pi)$ и генерирует симметричную ($m = 0$) звуковую волну единичной амплитуды.

На рисунках 5.1.16 – 5.1.18 представлены полярные диаграммы направленности амплитуды рассеянного акустического поля $|\Psi_S(\varphi)/A|$ при волновом размере тела $kr_2 = 4$ для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$. Сплошные линии соответствуют неоднородному покрытию, штриховые – однородному покрытию, пунктирные – цилиндру без покрытия. В названиях рисунков указано, при каком значении L/r_1 построен рисунок и каком законе неоднородности $f(r)$ построена сплошная линия на каждом из рисунков.

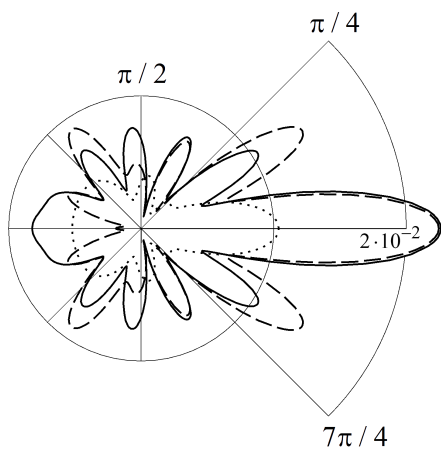


Рис. 5.1.16. $f(r) = f_2(r)$, $L/r_1 = 5$

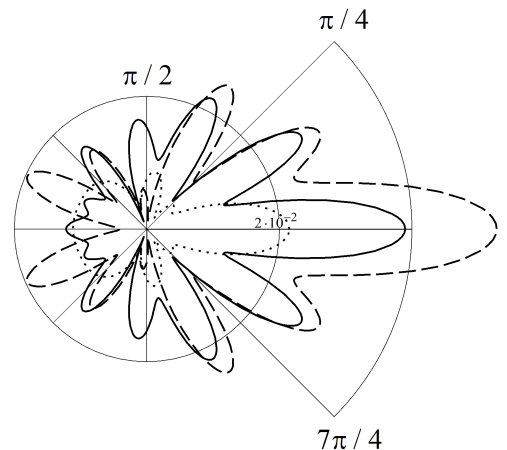


Рис. 5.1.17. $f(r) = f_2(r)$, $L/r_1 = 50$

На рисунке 5.1.19 изображены частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|\Psi_S(\pi)/A|$ от волнового размера цилиндра kr_1 в диапазоне $3 \leq kr_1 \leq 5$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют случаям цилиндра с неоднородным покрытием с законом $f(r) = f_2(r)$

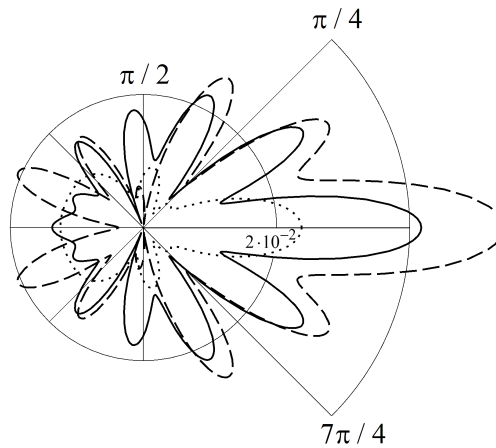


Рис. 5.1.18. $f(r) = f_2(r)$, $L/r_1 = 100$

при $L/r_1 = 5, 50, 100$ соответственно. Кривые 4, 5 соответствуют цилиндру с однородным покрытием при $L/r_1 = 5, 100$. При меньших значениях волнового размера тела kr_1 неоднородность материала покрытия проявляется незначительно.

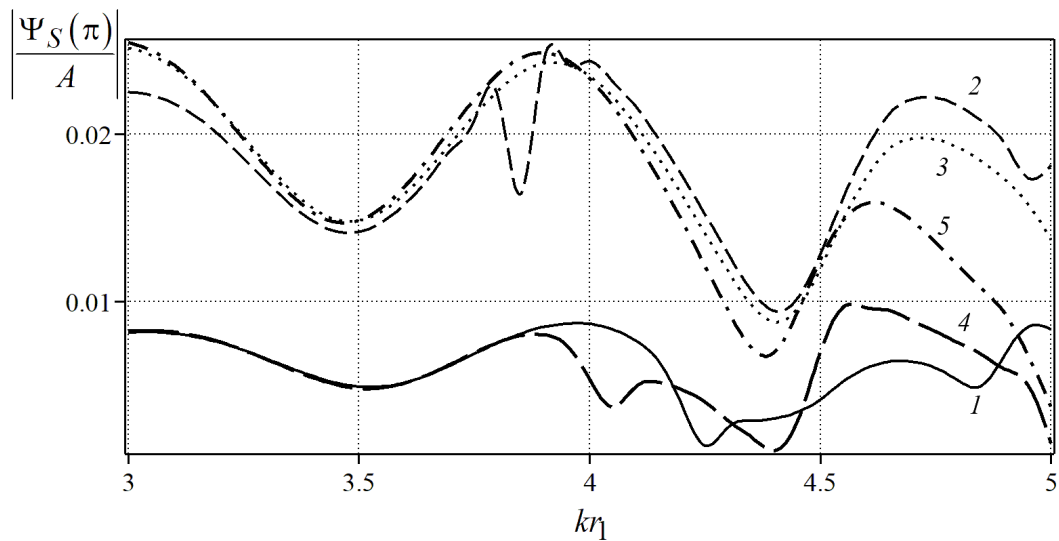


Рис. 5.1.19. Частотные зависимости амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра

Сравнение и штриховых кривых на рисунках 5.1.16 – 5.1.18 показывает возможность изменения звукоотражающих свойств упругого цилиндрического тела за счет непрерывной неоднородности его покрытия. На рисунке 5.1.16 при $L/r_1 = 5$ неоднородность практически не проявляется в теневой области ($\varphi = 0$), однако приводит к существенным изменениям в освещенной области ($\varphi = \pi$). Характеристики поля, рассеянное цилиндром достаточно большой длины (рисунки 5.1.17 и 5.1.18) различаются незначительно. В том числе схоже проявление неоднородности материала покрытия цилиндра.

Сравнивая рисунки 5.1.16 – 5.1.19 с соответствующими рисунками, когда первичным источником волнового возмущения была плоская звуковая волна – рисунками 5.1.3, 5.1.7, 5.1.11,

5.1.14, можно видеть, что учет криволнейности первичного акустического поля, излучаемого линейным источником, приводит к существенным изменениям дифракционной картины.

Отметим, что кривые, построенные на рисунке 5.1.18, а также кривые 3, 5 на рисунке 5.1.19 полностью повторяют кривые для случая цилиндра бесконечной длины, рассчитанные с использованием решения из раздела 2.1.

Также были проведены расчеты частотных зависимостей амплитуды обратного рассеяния звука $|\Psi_S(\pi)/A|$ от волнового размера цилиндра kr_1 в случае, когда линейный источник располагается в точке с цилиндрическими координатами $(r_i, \varphi_i) = (110, \pi)$. Результаты расчетов показали, что качественное поведение кривых полностью повторяет поведение кривых, показанных на рисунке 5.1.14, построенных для случая плоской звуковой волны и отличаются от кривых на рисунке 5.1.14 лишь количественной характеристикой амплитуды.

5.1.3. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом цилиндрическом слое конечной длины

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный изотропную упругий цилиндрический слой конечной длины L . Цилиндрический слой имеет произвольную толщину. Его внешний радиус – r_1 ($r_1 < L/2$), а внутренний – r_2 . Выберем прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси z совпадают с осью вращения цилиндра, а торцы цилиндра отстоят от центра координатной системы на расстоянии $L/2$ (геометрия задачи аналогична показанной на рис. 5.1.1). Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Полагаем, что в полости цилиндрического слоя – вакуум. Окружающая тело жидкость является идеальной сжимаемой, плотность и скорость звука которой соответственно равны ρ_1 и c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндрический слой падает плоская гармоническая звуковая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k} , который лежит в плоскости xz и образует угол θ_0 с положительным направлением оси z .

Определим акустическое поле, рассеянное цилиндрическим слоем конечной длины.

Уравнения волновых полей. Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца (1.2.15) относительно потенциала смещения частиц жидкости Ψ в полном акустическом поле, образованном суперпозицией полей падающей и рассеянной волн.

Рассеянное поле с учетом условий излучения на бесконечности будем искать в виде комбинации всевозможных цилиндрических волн, бегущих вдоль оси z с волновым числом h

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp(in\varphi) dh, \quad (5.1.26)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$; $k = \omega/c$; $\alpha = k \cos \theta_0$, $\beta = k \sin \theta_0$.

Деформация тела, вызванная акустическим воздействием, описывается полной системой уравнений линейной теории упругости изотропного неоднородного тела, состоящей из системы уравнений движения сплошной среды (1.2.25), обобщенного закона Гука (1.2.23) и линейного тензора деформации Коши-Грина (1.2.21).

Граничные условия на внешней боковой поверхности цилиндрического слоя заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений (1.2.30). На внутренней боковой поверхности слоя должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных напряжений (1.2.32).

В математической постановке задача состоит в нахождении решений системы уравнений (1.2.15), (1.2.21), (1.2.23), (1.2.25), удовлетворяющих граничным условиям.

Потенциал Ψ_S ищется в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, позволяющего определить рассеянное акустическое поле в произвольной точке пространства по известному потенциалу Ψ и его нормальной производной на поверхности рассеивателя

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega, \quad (5.1.27)$$

где \mathbf{R}_2 – радиус-вектор точки, находящейся на внешней боковой поверхности оболочки; $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – функция Грина для свободного пространства; Ω – боковая поверхность цилиндра; $d\Omega = r_1 d\varphi_2 dz_2$; $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$; $z_2 \in [-L/2, L/2]$. Применение формулы (5.1.27) вызвано необходимостью устранения вклада в рассеянное поле цилиндрических абсолютно жестких экранов и учета только рассеяния звука цилиндрическим слоем конечной длины.

Выберем функцию Грина в виде потенциала точечного источника (5.1.20).

Представляя компоненты вектора смещений \mathbf{u} в виде разложений в ряды Фурье (5.1.9), система (1.2.21), (1.2.23), (1.2.25) сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Присоединяя соответствующие граничные условия на внешней и внутренней боковых поверхностях цилиндрического слоя, получаем краевую задачу для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}'' + \widehat{\mathbf{B}}_{nq} \mathbf{U}_{nq}' + \widehat{\mathbf{C}}_{nq} \mathbf{U}_{nq} = 0, \\ & (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ & = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[\frac{2i^n A g_q(\alpha)}{\beta r_1 H'_n(\beta r_1)} - \pi \omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \\ & inU_{1nq}(r_1) + r_1 U'_{2nq}(r_1) - U_{2nq}(r_1) = 0, \\ & k_q U_{1nq}(r_1) + U'_{3nq}(r_1) = 0, \\ & \left(\frac{1}{r^2} \widehat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}'_{nq} + \mathbf{F}_{nq} \mathbf{U}_{nq} \right)_{r=r_2} = 0. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

Все компоненты краевой задачи (5.1.28) приведены в подразделе 5.1.1.

Выражая из граничных условий неизвестные функциональные коэффициенты $A_n(h)$ через компоненты вектора смещения \mathbf{u} на поверхности цилиндрического слоя и подставляя (5.1.26) и (5.1.20) в формулу (5.1.27), получаем выражение для результирующего рассеянного поля Ψ_S , возникающего при дифракции плоской звуковой волны на упругом неоднородном цилиндрическом слое конечной длины:

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \frac{ir_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[W_{1n} I_{1n} + W_{2n} I_{2n} + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} [I_{4nq} - I_{3nq}] U_{1nq}(r_1) \right] \exp(in\varphi), \quad (5.1.29)$$

где

$$W_{1n} = -\frac{Ai^n J'_n(\beta r_1) H_n(\beta r_1)}{H'_n(\beta r_1)}, \quad W_{2n} = Ai^n \beta J'_n(\beta r_1),$$

$$I_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} \frac{\sin[L(\alpha - \xi)/2]}{(\alpha - \xi)} \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) d\xi,$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} \frac{\sin[L(\alpha - \xi)/2]}{(\alpha - \xi)} J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) d\xi,$$

$$I_{3nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} \frac{\sin[L(\alpha - \xi)/2]}{(\alpha - \xi)} \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dh d\xi,$$

$$I_{4nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} \frac{\sin[L(\alpha - \xi)/2]}{(\alpha - \xi)} g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dh d\xi.$$

Важно отметить, что для того, чтобы выражение (5.1.29) удовлетворяло условиям излучения на бесконечности, в интегралах I_{1n} , I_{2n} , I_{3nq} , I_{4nq} следует полагать $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k \leq h \leq k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$. Интегралы, входящие в (5.1.29), подлежат вычислению каким-либо численным методом. Для вычисления интегралов по переменным h , ξ может быть применен прием обрешивания бесконечных пределов и интегрирование по вещественной прямой заменено интегрированием по конечному отрезку.

Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты зависимости $|\Psi_S/A|$ от координаты φ в плоскости $z = 0$ при $r = r_*$.

Полагалось, что цилиндрический слой из поливинилбутираля ($r_1 = 1$ м, $r_2 = 0.5$ м) располагается в свободном пространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Рассматривался как однородный цилиндрический слой с характерными плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м², так и неоднородный, физико-механические характеристики которого изменялись по закону

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad f(r) = f_3(r), f_4(r), \quad r_2 \leq r \leq r_1.$$

Функции $f_3(r)$, $f_4(r)$, задающие неоднородность материала цилиндрического слоя, определены выражениями (2.1.11).

Расчеты выполнены при волновом размере тела $kr_1 = 4$, угле падения $\theta_0 = \pi/2$, для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$ и $r_* = 100$ м.

Решение краевой задачи (5.1.28) получено методом сплайн-коллокации [50].

Суммирование в (5.1.29) проводилось в диапазоне от $-S$ до S по индексу n и от 1 до S по индексу q , где $S = 2[kr_1] + 1$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

Следует отметить, что вычисление интегралов, входящих в (5.1.29), сопряжено с некоторыми трудностями, связанными с тем, что цилиндрическая функция Ганкеля первого рода $H_n(x)$ при $x = 0$ имеет полюс n -го порядка при $n \neq 0$ и логарифмическую особенность при $n = 0$ [107]. При численных расчетах интегралов в (5.1.29) отрезки интегрирования по переменным ξ , h разбивались на участки $(-Y, -k - \varepsilon)$, $(-k - \varepsilon, -k + \varepsilon)$, $(-k + \varepsilon, k - \varepsilon)$, $(k - \varepsilon, k + \varepsilon)$, $(k + \varepsilon, Y)$, где $Y = W, Q$ – значения конечных пределов интегрирования по переменным h , ξ соответственно, $\varepsilon > 0$ малый параметр. На участках $(\pm k - \varepsilon, \pm k + \varepsilon)$ цилиндрические волновые функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n , а также их производные заменялись асимптотическими формулами при малых значениях аргумента [83], так как в окрестностях точек ξ , $h = \pm k$ значения η , k_h малы.

Интегралы в (5.1.29) вычислялись с использованием квадратурной формулы Симпсона и последовательным интегрированием по квадратурной формуле Симпсона [59].

На рисунках 5.1.20 – 5.1.25 представлены диаграммы направленности амплитуды рассеянного акустического поля для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$ соответственно. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ , а стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны. Штриховые линии соответствуют однородной цилиндрическому слою, сплошные линии – неоднородному слою. В названиях рисунков указано, при каком значении L/r_1 построен рисунок и каком законе неоднородности $f(r)$ построена сплошная линия на каждом из рисунков.

Сравнивая рисунки 5.1.20, 5.1.21, построенные при $L/r_1 = 5$, с рисунками 5.1.22, 5.1.23, 5.1.24, 5.1.25 можно видеть, что при небольших значениях L/r_1 уменьшается количественная характеристика безразмерной амплитуды рассеянного акустического поля (примерно в два раза). При этом присутствует относительное сохранение формы диаграмм. Наиболее заметные различия между рисунками при $L/r_1 = 5$ и рисунками, построенными при больших значениях длины цилиндрического слоя, присутствуют в области обратного звукового рассеяния ($\varphi = \pi$) в случае однородного цилиндрического слоя (штриховые кривые на рисунках 5.1.20, 5.1.21).

Попарное сравнение кривых на рисунках 5.1.22, 5.1.24 и 5.1.23, 5.1.25 показывает, что при достаточно больших значениях L/r_1 поведение амплитуды рассеяния звука отличается незначительно.

Важно отметить, что штриховые кривые на рисунках 5.1.24, 5.1.25, построенные для слу-

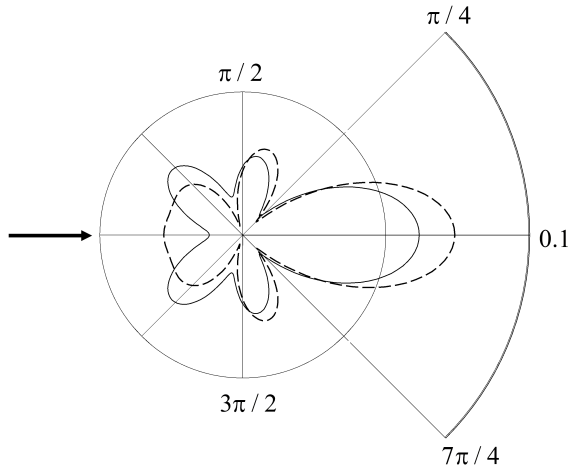


Рис. 5.1.20. $f(r) = f_3(r)$, $L/r_1 = 5$

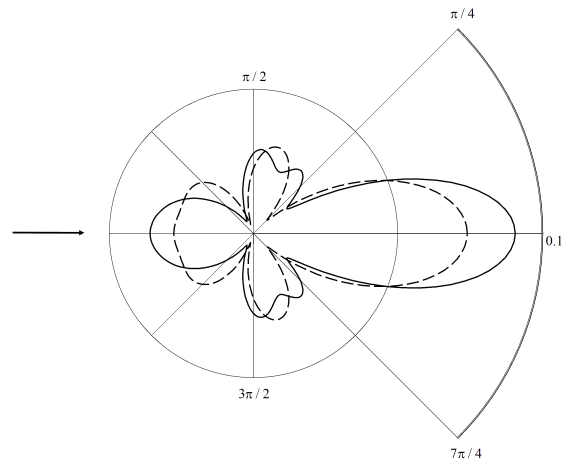


Рис. 5.1.21. $f(r) = f_4(r)$, $L/r_1 = 5$

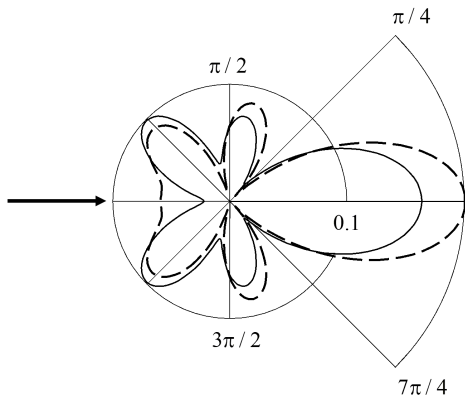


Рис. 5.1.22. $f(r) = f_3(r)$, $L/r_1 = 50$

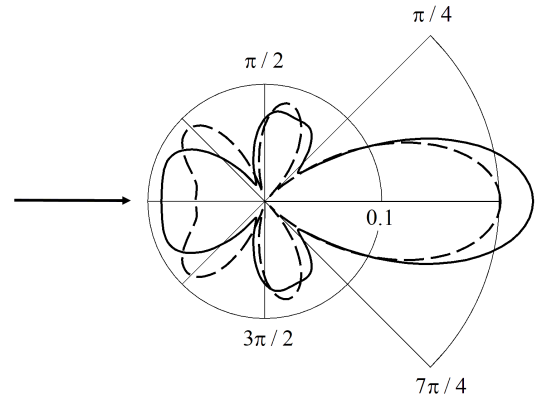


Рис. 5.1.23. $f(r) = f_4(r)$, $L/r_1 = 50$

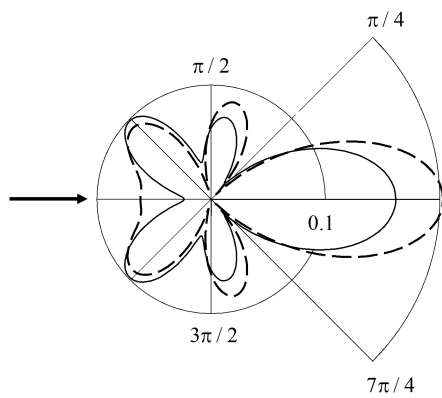


Рис. 5.1.24. $f(r) = f_3(r)$, $L/r_1 = 100$

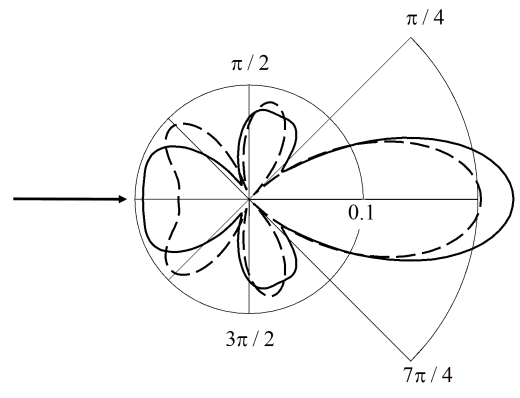


Рис. 5.1.25. $f(r) = f_4(r)$, $L/r_1 = 100$

чая однородного упругого цилиндрического слоя при $L/r_1 = 100$, полностью повторяют кривую, построенную с использованием аналитического решения из [23], что позволяет сделать вывод о корректности предложенного решения.

В ходе численных расчетов было получено, что неоднородность цилиндрического слоя из полимерного материала начинает оказывать существенное влияние на рассеянное акустическое поле при частоте, соответствующей $kr_1 = 4$, при отношении внешнего радиуса цилиндрического слоя к внутреннему $r_1/r_2 > 1.7$.

Установлено, что неоднородность материала цилиндрического слоя позволяет эффективно изменять характеристики рассеяния цилиндрического тела при соответствующем выборе законов неоднородности материала.

5.2. Рассеяние звуковых волн неоднородным упругим цилиндрическим слоем конечной длины в акустическом полупространстве

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный изотропный упругий цилиндрический слой конечной длины L . Цилиндрический слой имеет произвольную толщину. Его внешний радиус – r_1 ($r_1 < L/2$), а внутренний – r_0 . Тело находится в полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Плоская подстилающая поверхность Γ является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Ось оболочки параллельна плоскости Γ и отстоит от неё на расстоянии d .

Введем прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси z совпадают с осью вращения цилиндра, а торцы цилиндра отстоят от центра координатной системы на расстоянии $L/2$. В системе координат x, y, z граница полупространства Γ определяется уравнением $y = -d$ (рис. 5.2.1). Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Будем считать, что в полости цилиндрического слоя – вакуум.

Пусть из внешнего пространства на цилиндрический слой падает плоская гармоническая акустическая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k} .

Потенциал скорости падающей волны в системе координат x, y, z равен

$$\Psi_0 = \tilde{A}_0 \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - i\omega t],$$

где \tilde{A}_0 – амплитуда волны; ω – круговая частота; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ – радиус-вектор; $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор; $k_x = k \cos \varphi_0 \sin \theta_0$; $k_y = k \sin \varphi_0 \sin \theta_0$; $k_z = k \cos \theta_0$; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; θ_0, φ_0 – полярный и азимутальный углы падения плоской акустической волны; $k = |\mathbf{k}|$; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное конечной цилиндрической оболочкой в присутствии идеальной плоскости.

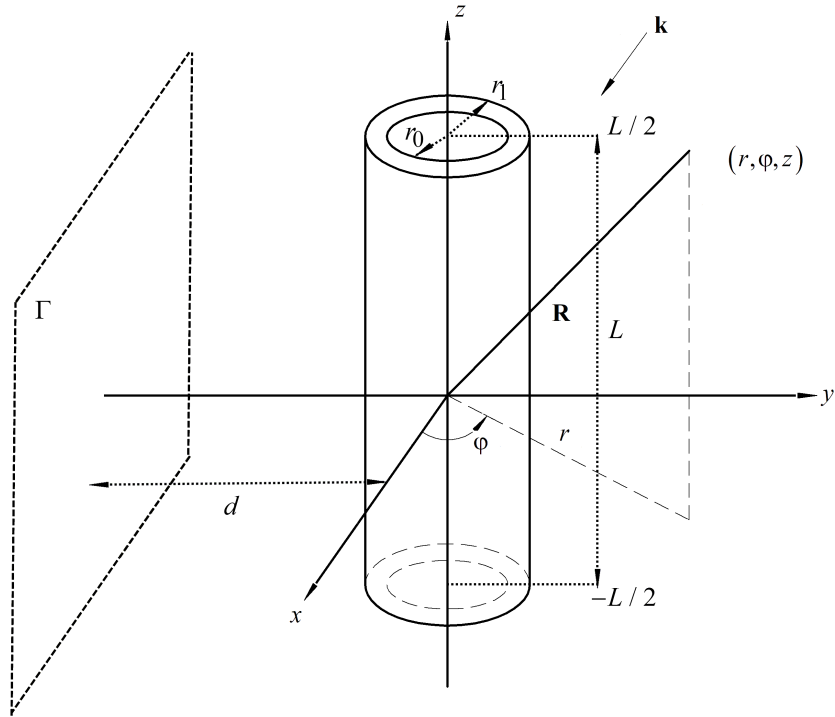


Рис. 5.2.1. Геометрия задачи 5.2

Уравнения волновых полей. Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца (1.2.15).

Уравнения движения упругого неоднородного цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид (1.2.25).

Получим приближенное решение задачи, пренебрегая отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, но учитывая рассеяние цилиндрической оболочкой волны, образующейся при отражении падающей плоской волны от плоскости. Чтобы отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, можно было пренебречь, следует полагать, что $d \gg r_1$. В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_{S1}, \quad (5.2.1)$$

Ψ_1 – потенциал скорости волны, возникающей при отражении падающей плоской волны от плоскости Γ ; Ψ_{S1} – потенциал скорости волн, рассеянных цилиндрической оболочкой при воздействии на нее волн с потенциалами Ψ_0 и Ψ_1 .

Потенциал Ψ_1 описывает плоскую волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению (1.2.15) и граничному условию на поверхности Γ , которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости (4.3.2), если плоскость Γ является абсолютно жесткой, и в равенстве нулю акустического давления (4.3.3), если плоскость Γ является акустически мягкой.

Потенциал Ψ_1 имеет вид

$$\Psi_1 = \tilde{A}_1 \exp [i (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{R})], \quad (5.2.2)$$

где \tilde{A}_1 – амплитуда волны; $\mathbf{k}_1 = (k_{1x}, k_{1y}, k_{1z})$ – волновой вектор отраженной от плоскости волны; $k_{1x} = k \cos \varphi_1 \sin \theta_0$; $k_{1y} = k \sin \varphi_1 \sin \theta_0$; φ_1 – угол, образованный вектором \mathbf{k}_1 с положительным направлением оси x . Согласно закону Снеллиуса [32] $k_{1x} = k_x$, $k_{1z} = k_z$ и $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$.

Подставляя (5.2.2) в граничные условия (4.3.2) и (4.3.3), находим

$$\tilde{A}_1 = \pm \tilde{A}_0 \exp (-i2k_y d),$$

где знаки «плюс» и «минус» относятся к случаям жесткой и мягкой подстилающих поверхностей соответственно. В цилиндрической системе координат падающая и отраженная плоские волны представляются разложением [55]

$$\Psi_j = \tilde{A}_j \exp (i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n (\beta r) \exp [in (\varphi - \varphi_j)], \quad (j = 0, 1), \quad (5.2.3)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$, $\beta = k \sin \theta_0$.

Рассеянное поле с учетом условий излучения на бесконечности будем искать в виде комбинации всевозможных цилиндрических волн, бегущих вдоль оси z с волновым числом h

$$\Psi_{S1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp (ihz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (h) H_n (k_h r) \exp (in\varphi) dh, \quad (5.2.4)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Граничные условия на внешней поверхности оболочки заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\text{при } r = r_1 \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (5.2.5)$$

На внутренней поверхности оболочки должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений:

$$\text{при } r = r_0 \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (5.2.6)$$

Аналогично тому, как показано в подразделе 5.1.1, компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое будем искать в виде (5.1.9). Подставляя разложения (5.1.9) в уравнения (1.2.25) с учетом (1.2.24), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (5.1.11) относительно неизвестных функций $U_{1nq}(r)$, $U_{2nq}(r)$, $U_{3nq}(r)$, описывающих волновые поля в неоднородном слое.

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ (первое условие (5.2.5)) с учетом (5.1.12), (5.1.13), принимая во внимание соотношение $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$, находим коэффициенты

$A_n(h)$, выраженные через $U_{1nq}(r_1)$

$$A_n(h) = -\frac{1}{k_h H'_n(k_h r_1)} \left[i^n \beta J'_n(\beta r_1) \delta(h - \alpha) \left(\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0} \right) + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r_1) g_q(h) \right]. \quad (5.2.7)$$

Подставим во второе граничное условие (5.2.5) выражения (5.2.3), (5.2.4) и (5.2.7), домножим обе части равенства на $\sin[k_q(z + L/2)]$ и проинтегрируем по z в пределах от $-L/2$ до $L/2$. В результате получим

$$\begin{aligned} & (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ & = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[\frac{2i^n g_q(\alpha) \left(\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0} \right)}{\beta r_1 H'_n(\beta r_1)} - \pi \omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

где Z_{nmq} определено выражением (5.1.16).

Из третьего и четвертого граничных условий (5.2.5) находим краевые условия (5.1.17).

Из граничных условий (5.2.5) получим краевые условия для системы (5.1.11)

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}'_{nq} + \mathbf{F}_{nq} \mathbf{U}_{nq} \right)_{r=r_0} = 0, \quad (5.2.9)$$

где $\mathbf{U}_{nq} = (U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_{nq} = (a_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\mathbf{F}_{nq} = (f_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами, приведенными в подразделе 5.1.1.

Теперь представим рассеянное поле в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа (5.1.19), позволяющего определить рассеянное акустическое поле в произвольной точке пространства по известным потенциалу поля и его нормальной производной на поверхности рассеивателя. Применение формулы (5.1.19) вызвано необходимостью устранения вклада в рассеянное поле цилиндрических абсолютно жестких экранов и учета только рассеяния звука цилиндрической оболочкой конечной длины. Выберем функцию Грина в виде потенциала точечного источника и в цилиндрической системе координат имеет вид (5.1.20).

Подставляя в (5.1.19) полное поле, определяемое выражением (5.2.1), с использованием (5.2.3), (5.2.4), (5.2.8), с учетом (5.1.20) и формулы [170]

$$\int_a^b f(h) \delta(h - \alpha) dh = f(\alpha), \text{ если } \alpha \text{ лежит внутри } [a, b],$$

а также осуществляя интегрирование по переменной φ_2 с учетом свойства ортогональности экспоненциальных множителей, получим выражение для потенциала Ψ_{S1} , рассеянного цилиндрическим слоем

$$\Psi_{S1}(\mathbf{R}) = \frac{ir_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[Q_{1n} I_{1n} + Q_{2n} I_{2n} + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} [I_{4nq} - I_{3nq}] U_{1nq}(r_1) \right] \exp(in\varphi), \quad (5.2.10)$$

$$Q_{1n} = -\frac{i^n J'_n(\beta r_1) H_n(\beta r_1) (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0})}{H'_n(\beta r_1)}, \quad Q_{2n} = i^n \beta J'_n(\beta r_1) (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0}),$$

а выражения для I_{1n} , I_{2n} , I_{3nq} , I_{4nq} приведены в подразделе 5.1.3.

Потенциал скорости полного рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_S = \Psi_1 + \Psi_{S1}, \quad (5.2.11)$$

где Ψ_{S1} определяется выражением (5.2.10).

Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты зависимости коэффициента обратного звукового рассеяния $|\Psi_S(\pi + \varphi_0)/\tilde{A}_0|$ от волнового размера тела kr_1 в плоскости $z = 0$ при $r = r_*$.

Полагалось, что цилиндрический слой из поливинилбутираля ($r_1 = 1$ м, $r_0 = 0.5$ м) располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Расстояние от оси цилиндра до границы полупространства оценивалось величиной $d/r_1 = 20$. Рассматривался как однородный цилиндрический слой с характерными плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м², так и неоднородный, физико-механические характеристики которого изменялись по закону

$$\rho = \rho^0 \cdot f_4(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Функция $f_4(r)$, задающая неоднородность материала цилиндрического слоя, определена выражением в (2.1.11).

Полагалось, что плоская акустическая волна единичной амплитуды падает на цилиндрический слой под углами падения $(\varphi_0, \theta_0) = (-\pi/3, \pi/2)$ для значений $L/r_1 = 5, 100$ и $r_* = 100$ м.

Вычисления осуществлялись аналогично подразделу 5.1.3.

На рисунках 5.2.2 – 5.2.4 представлены частотные зависимости коэффициента обратного рассеяния звука $|\Psi_S(2\pi/3)/\tilde{A}_0|$ от волнового размера тела kr_1 в интервале $3 \leq kr_1 \leq 5$ для значений $L/r_1 = 5, 50, 100$. Поверхность полагалась абсолютно жесткой. Пунктирные линии соответствуют однородному цилиндрическому слою, сплошные линии – неоднородному слою.

При $kr_1 < 3$ неоднородность материала цилиндрического слоя проявляется незначительно. Сравнивая кривые на рисунке 5.2.2 с кривыми на рисунках 5.2.3 и 5.2.4 можно видеть, что при небольших значениях длины цилиндрического слоя ($L/r_1 = 5$) количественная характеристика безразмерной амплитуды рассеянного поля примерно в два раза меньше по сравнению со случаями большей длины цилиндрического рассеивателя.

Проводя сравнительный анализ кривых на рисунках 5.2.3 и 5.2.4 можно заметить, что они имеют достаточно схожий характер. Однако, при частотах соответствующих волновому размеру тела $kr_1 > 3$ частотная характеристика в случае ($L/r_1 = 100$) показывает более резонирующую картину.

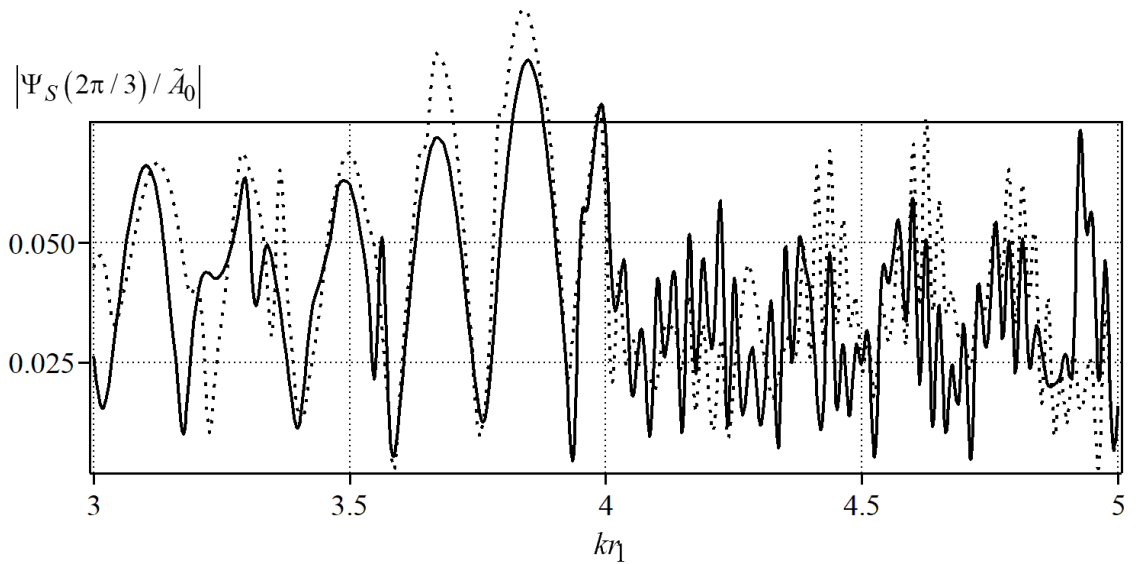


Рис. 5.2.2. Частотные зависимости коэффициента обратного звукового рассеяния от волнового размера тела, $L/r_1 = 5$

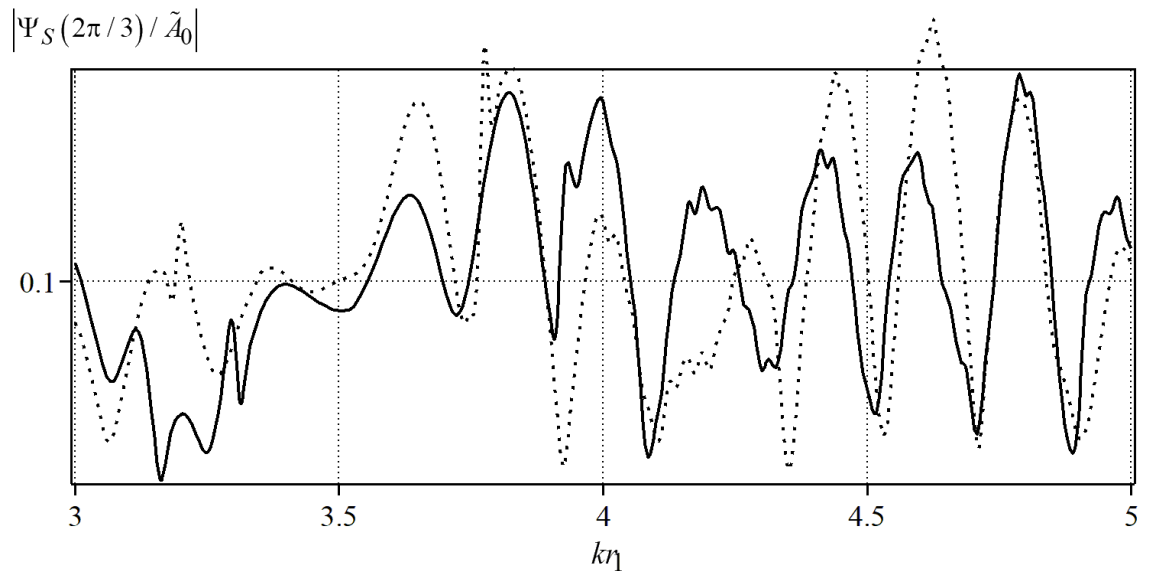


Рис. 5.2.3. Частотные зависимости коэффициента обратного звукового рассеяния от волнового размера тела, $L/r_1 = 50$

На рисунке 5.2.5 представлены частотные зависимости коэффициента обратного рассеяния звука $|\Psi_S(2\pi/3)/\tilde{A}_0|$ от волнового размера тела kr_1 в интервале $3 \leq kr_1 \leq 5$ для значения $L/r_1 = 100$ в случае неоднородного цилиндрического слоя. Сплошной линией построена кривая для случая абсолютно жесткой поверхности, пунктирной для акустически мягкой поверхности, штриховой для неоднородного цилиндрического слоя, расположенного в безграничном пространстве.

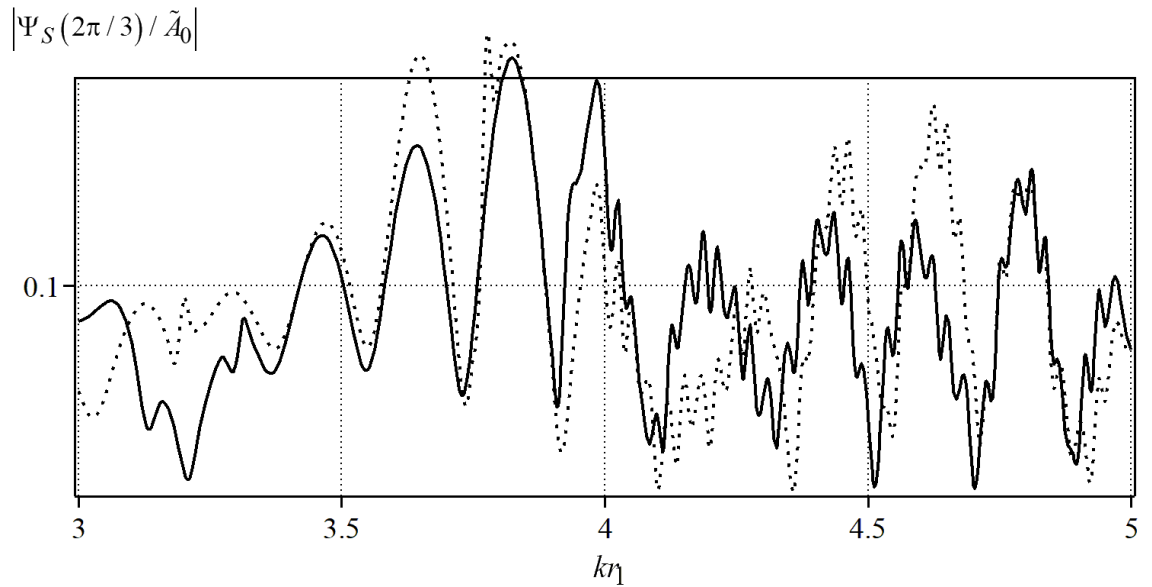


Рис. 5.2.4. Частотные зависимости коэффициента обратного звукового рассеяния от волнового размера тела, $L/r_1 = 100$

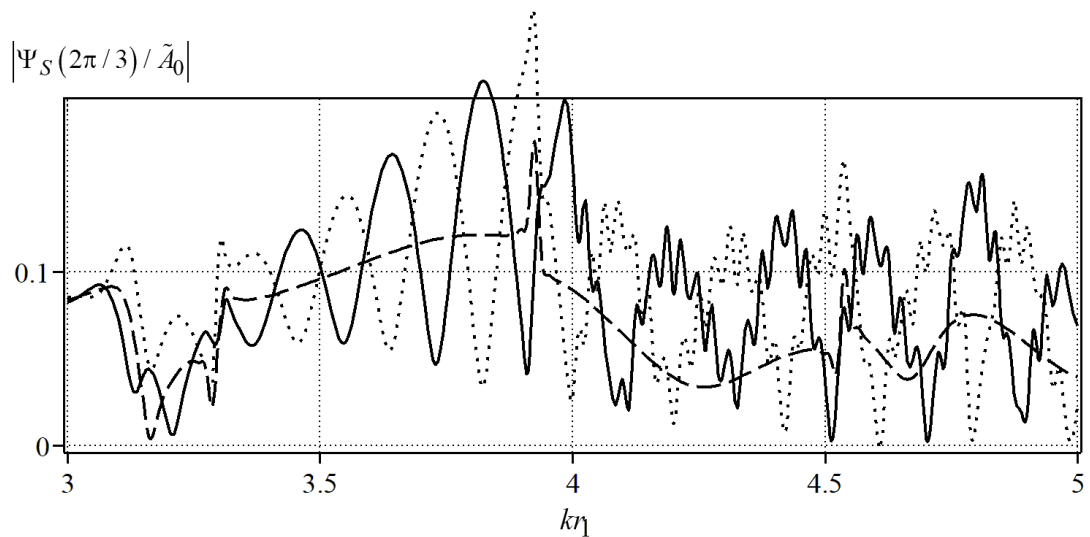


Рис. 5.2.5. Частотные зависимости коэффициента обратного звукового рассеяния от волнового размера тела, $L/r_1 = 100$

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что присутствие ограничивающей поверхности, ее тип и неоднородность цилиндрического слоя влияют на его звукоотражающие свойства, причем степень этого влияния значительно зависит от физико-механических характеристик материала слоя.

Заключение

В диссертационной работе получила развитие теория дифракции звуковых волн. Получен ряд новых результатов, краткое содержание которых излагается ниже.

1. Построена математическая модель дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных упругих телах цилиндрической формы, граничащих с идеальной жидкостью.
2. Предложены подходы к решению прямых задач дифракции звуковых волн на упругих однородных цилиндрах с неоднородными покрытиями. Первый подход заключается в аналитическом описании акустического поля во внешней области в виде разложения по базисным решениям уравнения Гельмгольца и в построении краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения волнового поля в неоднородном упругом слое. Второй подход отличается от первого в способе аналитического описания волнового поля во внешней области через распределение потенциала скорости и его нормальной производной на внешней поверхности цилиндрического рассеивателя с использованием интегрального уравнения Гельмгольца-Кирхгофа.
3. Получены новые решения прямых задач дифракции акустических волн (плоских, цилиндрических и сферических) на цилиндрических телах бесконечной и конечной длины, имеющих неоднородные и анизотропные упругие покрытия и расположенных как в свободном пространстве, так и в присутствии ограничивающих поверхностей (идеальных и упругих). Показано, что характер дифракции цилиндрических и сферических волн отличается от характера дифракции плоской волны. Это отличие становится более выраженным при приближении источника к рассеивателю. Оценено влияние присутствия ограничивающих поверхностей на рассеянное акустическое поле. Выявлено существенное влияние неоднородности и анизотропии материала тел на рассеяние звука. Обнаружены характерные черты этого влияния. Изучены особенности рассеяния звука цилиндрическими телами конечной длины.
4. Получены решения обратных дифракционных задач для тел цилиндрической формы с радиально-неоднородными покрытиями. Осуществлено математическое моделирование неоднородных упругих покрытий. Найдены функциональные зависимости для физико-механических характеристик материала покрытий, обеспечивающие минимальное рассеяние звука в заданных угловом секторе и диапазоне частот.
5. Разработаны эффективные алгоритмы и программы для ЭВМ расчета характеристик рассеянных акустических полей и определения законов неоднородности материала покрытий.

Список литературы

1. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // Акустический журнал. 2008. Т. 54. № 3. С. 469–482.
2. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина // Акустический журнал. 2005. Т. 51. № 4. С. 437-446.
3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1971. 288 с.
4. Андреева И.Б., Самоволькин В.Г. Рассеяние звука упругими цилиндрами конечной длины // Акустический журнал. 1976. Т. 22. № 5. С. 637-643.
5. Белов В.Е., Горский С.М., Зиновьев А.Ю., Хилько А.И. Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости // Акустический журнал. 1994. Т. 40. №4. С. 548-560.
6. Белогорцев А.С., Бугаев В.В., Музыченко В.В. Некоторые особенности рассеяния звука упругими оболочками в жидкости // Акустический журнал. 1993. Т. 39. № 4. С. 598-604.
7. Белогорцев А.С., Музыченко В.В. Влияние ограниченности цилиндрической оболочки на амплитуду обратного рассеяния // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 2. С. 228-234.
8. Бочарова О.В., Ватульян А.О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 3. С. 275-282.
9. Буров В.А., Вечерин С.Н., Морозов С.А., Румянцева О.Д. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // Акустический журнал. 2010. Т. 56. № 4. С. 516-536.
10. Буров В.А., Касаткина Е.Е., Марьин А.О., Румянцева О.Д. Оценки максимального правдоподобия в корреляционной акустической термотомографии // Акустический журнал. 2007. Т. 53. № 4. С. 580-596.
11. Буров В.А., Попов А.Ю., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Акустическая томография океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей // Акустический журнал. 2005. Т. 51. № 5. С. 602-613.
12. Буров В.А., Румянцева О.Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // Акустический журнал. 2003. Т. 49. № 5. С. 590-603.
13. Буров В.А., Румянцева О.Д. Обратные волновые задачи акустической томографии: Обратные задачи излучения в акустике Ч. 1. М.: УРСС, 2018. 384 с.

14. Буров В.А., Румянцева О.Д. Обратные волновые задачи акустической томографии: Обратные задачи акустического рассеяния Ч. 2. М.: УРСС, 2019. 760 с.
15. Буров В.А., Шмелев А.А. Численное и физическое моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 4-5. С. 466-480.
16. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Наука, 1989. 134 с.
17. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. - М.: Физматлит, 2007. 224 с.
18. Ватульян А.О., Сатуновский П.С. Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Доклады РАН. 2007. Т. 414. № 1. С. 36-38.
19. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. О реконструкции плоских трещин в анизотропном упругом теле // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. № 3. С. 533-542.
20. Ватульян А.О., Углич П.С. Реконструкция неоднородных характеристик поперечно-неоднородного слоя при антиплоских колебаниях // ПМТФ. 2014. Т. 55. № 3. С. 146-153.
21. Ватульян А.О., Явруян О.В., Богачев И.В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акустический журнал. 2011. Т. 57. № 6. С. 723-730.
22. Векслер Н.Д. Стационарное рассеяние акустической волны толстослойным круговым упругим цилиндром // Известия Академии наук Эстонской ССР. 1986. Т. 35. №4. С. 381-389.
23. Векслер Н.Д., Корсунский В.М., Рыбак С.А. Рассеяния плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акустический журнал. 1990. Т. 36. Вып. 1. С. 12-16.
24. Векслер Н.Д., Избики Ж.-Л., Конуар Ж.-М., Ленуар О., Рембер П. Теоретическое и экспериментальное исследование рассеяния упругим цилиндром наклонно падающей плоской акустической волны // Акустический журнал. 1993. Т. 39. Вып. 2. С. 230-240.
25. Ворович И.И., Сумбатян М.А. Восстановление образа дефекта по рассеянному полю в акустическом приближении // Изв. АН СССР: МТТ. 1990. № 6. С. 79-84.
26. Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акустический журнал. 1986. Т.32. № 6. С. 762-766.
27. Бобровницкий Ю.И. Научные основы акустического стелса // Доклады РАН. 2012. Т. 442. № 1. С. 41-44.

28. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журнал. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.
29. Бобровницкий Ю.И. Теория новых поглощающих и нерассеивающих покрытий повышенной эффективности // Акустический журнал. 2007. Т. 53. № 5. С. 613-624.
30. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журнал. 2010. Т. 56. № 2. С. 147-151.
31. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (Обзор) // Акустический журнал. 2018. Т. 64. № 5. С. 517-525.
32. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343с.
33. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 412 с.
34. Гаев А.В. Нестационарное рассеяние акустических волн на неоднородных анизотропных упругих телах: дисс. ... к-та физ.-мат. наук. Тула, 2003. 196 с.
35. Гаев А.В. Нестационарное рассеяние плоского акустического импульса неоднородным трансверсально-изотропным цилиндрическим слоем // Известия Тульского государственного университета. Серия Информатика. 2002. Т. 8. Вып. 3. С. 51-56.
36. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акустический журнал. 2012. Т. 58. № 3. С. 370-385.
37. Горюнов А.Л., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 152 с.
38. Добровольский Н.Н., Ефимов Д.Ю., Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. Вып. 5. С. 274-288. DOI: 10.22405/2226-8383-2023-24-5-274-288
39. Добровольский Н.Н., Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. О решениях обратных задач дифракции звуковых волн // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 3. С. 220-245.
40. Доценко И.Е., Музыченко В.В., С.А. Рыбак. Рассеяние звука на ограниченной цилиндрической упругой оболочке с полусферическими заглушками // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 5. С. 922-932.

41. Ефимов Д.Ю. Дифракция звука от точечного источника на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи упругой границы // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. Вып. 5. С. 289-306. DOI: 10.22405/2226-8383-2023-24-5-289-306
42. Ефимов Д.Ю. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства // Сборник трудов XXXV сессии Российского акустического общества (Россия, Москва, РАО, 13-17 февраля 2023). М.: ГЕОС, 2023. С. 515-520. DOI: 10.34756/GEOS.2023.17.38491
43. Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // Сборник трудов XXXVI сессии Российского акустического общества (Россия, Москва, РАО, 21-25 октября 2024). М.: ГЕОС, 2024. С. 528-534. DOI: 10.34756/GEOS.2024.17.38890
44. Ефимов Д.Ю. Исследование акустического поля, рассеянного конечной неоднородной упругой цилиндрической оболочкой, расположенной вблизи плоской поверхности, с использованием теоретико-числовых методов // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 4-6 декабря 2023). Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2024. С. 1068-1074.
45. Ефимов Д.Ю. Рассеяние акустических волн неоднородной упругой цилиндрической оболочкой конечной длины в полупространстве // Прикладная математика и механика. 2024. Т. 88. Вып. 2. С. 299-312. DOI: 10.31857/S0032823524020096
46. Ефимов Д.Ю. Программа определения оптимальных параметров неоднородности анизотропного покрытия упругого цилиндра в присутствии плоской поверхности, обеспечивающих наименьшее отражение звука. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2022681787, 16.11.2022. 1с.
47. Ефимов Д.Ю. Программа расчета амплитуды рассеянного поля в задаче о дифракции цилиндрической звуковой волны на бесконечном круговом упругом цилиндре с трансверсально-изотропным неоднородным покрытием. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2022681789, 16.11.2022. 1с.
48. Ефимов Д.Ю., Толоконников Л.А. О рассеянии звуковых волн упругим цилиндром с неоднородным покрытием, расположенным вблизи границы упругого полупространства // Материалы XXIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. М.: ООО «ТРП», 2023. С. 117-119.

49. Ефимов Д.Ю., Толоконников Л.А. Рассеяние неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочкой звуковых волн, излучаемых линейным источником, расположенным непараллельно оси цилиндра // *Материалы XXX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. М.: ООО «ТРП», 2024. С. 97-99.*
50. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.*
51. Зоммерфельд А. *Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: ИЛ, 1950. 456 с.*
52. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Влияние неоднородного покрытия на прохождение звука через упругую оболочку // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 179-192.*
53. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С.132-145.*
54. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // *Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 6. С.791-798.*
55. Иванов Е.А. *Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.*
56. Ильин А.М., Данилин А.Р. *Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.*
57. Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды. М.: МГУ, 1990. 310 с.*
58. Исакович М.А. *Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.*
59. Калиткин Н.Н. *Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.*
60. Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматлит, 1962. 708 с.*
61. Карабутов А.А., Керштейн И.М., Пеливанов И.М., Подымова Н.Б. Распространение продольных и сдвиговых акустических видеоимпульсов в графито-эпоксидных композитах // *Акустический журнал. 1999. Т. 45. № 1. С. 86–91.*
62. Клещев А.А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // *Акустический журнал. 2004. Т. 50. № 1. С. 86-89.*

63. Ковалев В.А. Асимптотический подход в задачах рассеяния акустических волн упругими оболочками // Вестник Самарского гос. ун-та. 2006. № 9. С. 42-54.
64. Коваленко Г.П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акустический журнал. 1987. Т.33. №6. С. 1060-1063.
65. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир. 1987. 311 с.
66. Коровайцева Е.А., Пшеничнов С.Г. Об исследовании переходных волновых процессов в линейно-вязкоупругих телах с учетом непрерывной неоднородности материала // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т.78. №3. С. 262-270.
67. Корсунский С.В. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на абсолютно жестком цилиндре // Акустический журнал. 1988. Т. 34. № 3. С. 481-484.
68. Косарев О.И. Вторичное гидроакустическое поле, создаваемое твердым конечным цилиндром в дальнем поле // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2015. № 4. С. 99-103.
69. Косарев О.И. Дисперсионное уравнение свободной конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 6. С. 49-58.
70. Косарев О.И. Дифракция звука на конечном твердом цилиндре в дальнем поле // Вестник научно-техн. развития. 2017. № 3. С. 30-37.
71. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.
72. Косарев О.И. Задача определения корней дисперсионного уравнения конечной цилиндрической оболочки в жидкости // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2019. № 2. С. 100-106.
73. Косарев О.И. Задача полного гашения дифракционного звукового поля цилиндрической оболочки // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2024. № 1. С. 3-12.
74. Косарев О.И., Пузакина А.К. Задача активного гашения вибраций цилиндрической оболочки дискретными силами // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2022. № 2. С. 44-50.
75. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
76. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI, Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 736 с.

77. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII, Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 260 с.
78. Ларин Н.В. Рассеяние звука упругой цилиндрической оболочкой с неоднородным покрытием и неконцентрической эллиптической полостью // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 2. С. 146-163.
79. Ларин Н.В. Рассеяние звуковых волн неоднородными термоупругими телами: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Тула, 2022. 272 с.
80. Ларин Н.В., Белкин А.Э. Нестационарное рассеяние звука упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. Вып. 3. С. 381-395.
81. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
82. Лебедев А.В., Хилько А.И. Рассеяние звука упругими тонкостенными цилиндрами ограниченной длины // Акустический журнал. 1992. Т. 38. № 6. С. 1057-1065.
83. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз., 1963. 358 с.
84. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
85. Лиходаева Е.А., Шендеров Е.Л. Периферические волны, возникающие при дифракции плоской звуковой волны на тонкой цилиндрической оболочке // Акустический журнал. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 79-84.
86. Лобанов А.В. Дифракция звуковых волн на неоднородных упругих эллиптических цилиндрах и сфероидах: дисс. ... к-та физ.-мат. наук. Тула, 2012. 148 с.
87. Лопатин А.С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. 2005. Вып. 1. С. 133-149. СПб.: Изд-во СПбГУ.
88. Лямшев Л.М. Дифракция звука на бесконечной тонкой цилиндрической оболочке // Акустический журнал. 1958. Т. 4. Вып. 2. С. 161-167.
89. Лямшев Л.М. Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // Доклады АН СССР. 1957. Т. 115. № 2. С. 271-273.
90. Лямшев Л.М. Рассеяние звука тонким ограниченным стержнем // Акустический журнал. 1958. Т. 4. № 1. С. 51-58.
91. Лямшев Л.М. Рассеяние звука упругими цилиндрами // Акустический журнал. 1959. Т. 5. Вып. 1. С. 58-63.

92. Маляров К.В. Передача звука через упругую слоистую цилиндрическую оболочку // Акустический журнал. 1974. Т. 20. № 1. С. 71-75.
93. Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В. Дифракция плоских нестационарных упругих волн на неоднородном трансверсально изотропном цилиндре // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. М.: ООО «ТР-принт», 2012. С. 53.
94. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.
95. Музыченко В.В., Рыбак С.А. Амплитуда резонансного рассеяния звука ограниченной цилиндрической оболочкой в жидкости // Акустический журнал. 1986. Т. 32. № 1. С. 129-131.
96. Музыченко В.В., Рыбак С.А. Некоторые особенности рассеяния звука ограниченными цилиндрическими оболочками // Акустический журнал. 1986. Т. 32. № 5. С. 699-701.
97. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
98. Паргон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
99. Пешков Н.Ю., Скобельцын С.А. Рассеяние звука упругим цилиндром с кусочно-непрерывным неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. Вып. 10. С. 214-226.
100. Пшеничных С. Г. Нестационарные волновые процессы в цилиндре из функционально-градиентного вязкоупругого материала // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2024. Вып 2. С. 37-44.
101. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на неоднородном упругом полом цилиндре в слое жидкости с жесткими границами // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2009. Вып. 1. С. 81-88.
102. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т.75. №5. С. 850-857.
103. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным упругим полым цилиндром в вязкой жидкости // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 62-70.
104. Садомов А.А. Дифракция звука на неоднородной анизотропной цилиндрической оболочке в волноводе с жесткими границами при симметричном распределении источников первичного поля // Вестник Тульского государственного университета. Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2007. Вып. 1. С. 76-83.

105. Садомов А.А. Дифракция звука на неоднородной анизотропной цилиндрической оболочке в слое жидкости // Известия Тульского государственного университета. Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2007. Вып. 1. С. 76-83.
106. Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. 480 с.
107. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике: учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
108. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
109. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
110. Скобельцын С.А. Задача о дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с трансверсально-изотропным неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2021. Вып. 11. С. 230-239.
111. Скобельцын С.А. Задача о рассеянии упругих цилиндрических волн неоднородным цилиндром // Известия Тульского государственного университета. Серия Геодинамика, физика, математика, термодинамика, геоэкология. 2006. Вып. 3. С. 126-138.
112. Скобельцын С.А. Минимизация рассеяния звука сфероидом вблизи идеальной поверхности выбором параметров внешнего слоя // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 421-437.
113. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородного покрытия упругого цилиндра с полостью для обеспечения заданных звукоотражающих свойств // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 7. С. 163-175.
114. Скобельцын С.А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. №7. С. 83-92.
115. Скобельцын С.А. Решение задач акустики с использованием метода конечных элементов. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 224 с.
116. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Метод конечных элементов в задаче о рассеянии плоской упругой волны неоднородным цилиндром // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т.11. Вып. 5. С. 187-200.
117. Скобельцын С.А., Окорочков М.В. Определение направления оси конечного цилиндра со сферическими заглушками по рассеянию звуковой волны // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. Вып. 4. С. 71-80.

118. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Дифракция звука в полупространстве на конечном упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 7. С. 158-174.
119. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным внешним слоем вблизи плоскости // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 4. С. 224-239.
120. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Рассеяние звука неоднородным упругим эллиптическим цилиндром в акустическом полупространстве // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 7. С. 183-200.
121. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акустический журнал. 1995. Т. 41. № 1. С. 134-138.
122. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
123. Толоконников Л.А. Дифракция звука на трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины в волноводе с акустически мягкими границами // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 154-163.
124. Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полом цилиндре // Оборонная техника. 1998. №4-5. С. 11-14.
125. Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с акустически мягкими границами // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 43-53.
126. Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 76-83.
127. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. №1. С. 238-254.
128. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276-289.
129. Толоконников Л.А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. № 4. С. 215-226.

130. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // Оборонная техника. 1998. №4-5. С. 9-11.
131. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
132. Толоконников Л.А. Определение законов неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, обеспечивающих минимальное звукоотражение // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 67-81.
133. Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 1. С. 270-281.
134. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч.2. С. 265-274.
135. Толоконников Л.А. Резонансное рассеяние звука трансверсально-изотропной цилиндрической оболочкой // Известия Тульского государственного университета. Серия Геодинамика, физика, математика, термодинамика, геоэкология. 2006. Вып. 3. С. 106-113.
136. Толоконников Л.А., Белкин А.Э. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражения звука // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. № 4. С. 354-368.
137. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779-791. DOI: 10.31857/S0032823521060114 = Tolokonnikov, L.A., Efimov, D.Yu. Diffraction of sound waves at an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in the vicinity of the boundary of an elastic half-space // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56. №8. P. 1657-1667. DOI: 10.3103/S0025654421080185
138. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 4. С. 368-381. DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-368-381
139. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460-472. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-1-460-472

140. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 293-311. DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-1-293-311
141. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. Вып. 4. С. 3-23. DOI: 10.20948/mm-2023-04-01 = Tolokonnikov, L.A., Efimov, D.Yu. Scattering of Sound Waves by a Finite Length Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. Vol. 15. No. 5. P. 863-876. DOI: 10.1134/s2070048223050125
142. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 369-381. DOI: 10.22405/2226-8383-2020-21-4-369-381
143. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным анизотропным покрытием в присутствии плоскости // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 3. С. 207-223. DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-3-207-223
144. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Рассеяние упругим цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником // Математическое моделирование. 2024. Т. 36. Вып. 1. С. 71-84. DOI: 10.20948/mm-2024-01-05 = Tolokonnikov, L.A., Efimov, D.Yu. Scattering by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves // Mathematical Models and Computer Simulations. 2024. Vol. 16. No. 3. P. 373-382. DOI: 10.1134/S2070048224700054
145. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра, находящегося в плоском волноводе // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 315-323.
146. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Моделирование дискретно-слоистого покрытия упругого цилиндра радиально-неоднородным слоем в задаче рассеяния звука // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 2. С. 194-202.
147. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. О влиянии неоднородного покрытия упругого цилиндра на рассеяние звука в присутствии плоской поверхности // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. Вып. 9. С. 111-118.
148. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Рассеяние цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, в плоском волноводе // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 8. С. 97-113.

149. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. №. 4. С. 189-199.
150. Толоконников Л.А., Лобанов А.В. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом эллиптическом цилиндре с полостью // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. Вып. 3. С. 126-136.
151. Толоконников Л.А., Логвинова А.Л. Дифракция плоской звуковой волны на двух неоднородных упругих цилиндрах с жесткими включениями // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 54-66.
152. Толоконников Л.А., Романов А.Г. Дифракция цилиндрических звуковых волн на неоднородном полом цилиндре в вязкой жидкости // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 151-160.
153. Толоконников Л.А., Романов А.Г. Распространение звука в волноводе в присутствии неоднородной цилиндрической оболочки произвольной толщины // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 161-176.
154. Толоконников Л.А., Садомов А.А. О дифракции звука на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке в слое жидкости // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12. Вып. 5. С. 208-216.
155. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А. Задача о рассеянии плоской упругой волны упругим цилиндром с неоднородным анизотропным внешним слоем // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2000. Т.6. Вып. 2. С. 134-140.
156. Толоконников Л.А., Толоконников С.Л. Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с неоднородным упругим покрытием в движущейся среде // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. Вып. 3. С. 408-418.
157. Толоконников Л.А., Филатова Ю.М. Дифракция звука на упругом цилиндре с неконцентрической полостью // Материалы междунар. научн. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Гриф и К, 2008. С. 301-302.
158. Толоконников Л.А., Филатова Ю.М. О дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неконцентрической полостью // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2009. Вып. 1. Ч. 2. С. 11-17.

159. Тютеекин В.В. Импедансный метод расчета характеристик упругих неоднородных радиально-слоистых цилиндрических тел // Акустический журнал. 1983. Т. 29. № 4. С. 529-536.
160. Филатова Ю.М. Анализ акустического поля, рассеянного упругим цилиндром с неконцентрической полостью // Вестник Тульского государственного университета. Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2009. Вып. 1. С. 92-95.
161. Филатова Ю.М. Рассеяние цилиндрических звуковых волн упругим цилиндром с неконцентрической полостью // Вестник Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 15. Вып. 2. Механика. С. 107-113.
162. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах М.: Наука, 1965. 388 с.
163. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т.2. М.: Мир, 1978. 558 с.
164. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ, 2000. 592 с.
165. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
166. Шендеров Е.Л. Прохождение звуковой волны через упругую цилиндрическую оболочку // Акустический журнал. 1963. Т. 9. Вып. 2. С. 222-230.
167. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
168. Шендеров Е.Л. Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Акустический журнал. 2002. Т. 48. № 2. С. 266-276.
169. Шендеров Е.Л. Дифракция звуковой волны на открытом конце волновода с импедансными стенками и импедансными фланцами // Акустический журнал. 2000. Т. 46. № 6. С. 816-828.
170. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
171. Bao X.-L., Cao H., Uberall H. Resonances and surface waves in the scattering of an obliquely incident acoustic field by an infinite elastic cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1990. Vol. 87. No 1. P. 106-110.
172. Bertrand J.C., Young J.W. Multiple scattering between a cylinder and a plane // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. Vol. 60. No 6. P. 1265-1269.
173. Burov V.A., Prudnikova I.P., Sirotkina N.S. Inverse problem of ultrasonic scattering by boundary inhomogeneity in isotropic solids // Акустический журнал. 1992. Т. 38. № 6. С. 1013-1018.

174. Burov V.A., Rumiantseva O.D. Solution of two-dimensional acoustical inverse scattering problem based on functional-analytical methods // *Акустический журнал*. 1992. Т. 38. № 3. С. 413-420.
175. Colton D. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves. *SIAM Review*. 1984. V.26. P. 323-350.
176. Colton D., Kress R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. New York: Wiley-Interscience, 1983. 320 p.
177. Colton D., Kress R. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, 2nd edition. New York: Springer, 1998. 336 p.
178. Colton D., Kress R. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Berlin: Springer, 2013. 430 p.
179. Conoir J.M. Resonance scattering theory for oblique incidence: scattering by an elastic infinite cylinder. In *Electromagnetic and acoustic scattering: detection and inverse problem*. Conference Proceeding. Marseille. 1988. P. 97-103.
180. Chung Y. Tsui, Reid G.N., Gaunard G.C. // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1986. V. 80. № 2. P. 382-390.
181. Daneshjou K., Shokrieh M.M., Moghaddam M.G., Talebitooti R. Analytical model of sound transmission through relatively thick FGM cylindrical shells considering third order shear deformation theory // *Composite Structures*. 2010. V. 93. №1. P. 67-78.
182. Davis C.M., Dragonette L.R., Flax L. Acoustic scattering from silicone rubber cylinders and spheres // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1978. V. 63. No. 6. P. 268-275.
183. Dickey J.W., Uberall H. Acoustic high-frequency scattering by elastic cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1979. V. 66. N 1. P. 275-283.
184. Doolittle R.D., Uberall H. Sound scattering by elastic cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1966. Vol. 39. N 2. P. 272-275.
185. Fan Y., Honavar F., Sinclair F.N., Jafary M.R. Circumferential resonance modes of solid elastic cylinders excited by obliquely incident acoustic waves // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2003. Vol.113. №1. P. 102-113.
186. Faran J.J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1951. Vol. 23. № 4. P. 405-420.
187. Fathi-Haftshejani P., Honarvar, F. Nondestructive Evaluation of Clad Rods by Inversion of Acoustic Scattering Data // *Journal of Nondestructive Evaluation*. 2019. V. 38. A.N. 67.

188. Flax L., Dragonette L.R., Uberall H. Theory of elastic resonance excitation by sound scattering // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1978. Vol. 63. N 3. P. 723-731.
189. Flax L., Varadan V.K., Varadan V.V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. Vol. 68. No. 6. P. 1832-1835.
190. Flax L., Gaunaurd G.C., Uberall H. Theory of resonance scattering. In *Physical Acoustics*, edited by W.P. Mason and R.N. Thurston. V.15. New York: Academic, 1981. P. 191-294.
191. Goryunov A.A. Matrix Green's function formalism in acoustic intrascopy problems // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 1992. T. 27. № 6. P. 381-386.
192. Goryunov A.A., Rychagov M.N. Reconstruction of a refraction inhomogeneity by the method of averages // *Soviet Journal of Nondestructive Testing*. 1989. T. 24. № 12. C. 805-809.
193. Hasheminejad S.M., Abbasion S., Mirzaei Ya. Acoustic pulse interaction with a submerged functionally graded material hollow cylinder // *Acoust. Phys.* 2011. Vol. 57. No. 1. P. 20-35.
194. Hasheminejad S.M., Rajabi M. Acoustic resonance scattering from a submerged functionally graded cylindrical shell // *Journal of Sound and Vibration*. 2007. Vol. 302. No. 1-2. P. 208-228.
195. Hasheminejad S.M., Safari N. Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids // *J. of Sound and Vibration*. 2005. V. 280. P. 101-125.
196. Honarvar, F. Sinclair A. N. Scattering of an obliquely incident plane wave from a circular clad rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1997. V. 102. No. 1. P. 41-48.
197. Ilyashenko A.V. Pochhammer–Cree longitudinal waves: Anomalous polarization // *Mech. Solids*. 2019. V. 54. P. 598–606.
198. Junger M.C. Sound scattering by thin elastic shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1952. V. 24. No. 4. P. 366-373.
199. Kennard E.H. The new approach to shell theory circular cylinders // *J. Appl. Mech.* 1953. V. 20. № 1.
200. Kleschev A.A. Diffraction of sound radiated by a point source on an elastic cylindrical shell // *J. Techn. Acoust.* 1997. V. 3. № 4. P. 20-23.
201. Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G. Study of transient wave processes in continuously inhomogeneous elastic and viscoelastic bodies. Chapter 1. // *Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications: Nova Science Publishers, Inc. New York.* 2020. P.1-28.
202. Kuznetsov S.V., Ilyashenko A.V. Polarization of Pochhammer–Chree waves: axisymmetric longitudinal modes // *Acoust. Phys.* 2018. Vol. 64. No. 6. P. 659–664.

203. Lee F.A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // *Acustica*. 1963. V. 13. № 3. P. 26-31.
204. Li T., Ueda M. Sound scattering of a plane wave obliquely incident on a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1989. V. 86. No. 6. P. 2363-2368.
205. Li T., Ueda M. Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1990. V. 87. No. 5. P. 1871-1879.
206. Marston P.L. GTD for backscattering from elastic spheres and cylinders in water and the coupling of surface elastic waves with the acoustic field // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. V.83. №1. P. 25-37.
207. Maze G., Izbicki J.-L., Ripoche J. Resonances of plates and cylinders: guided waves // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1985. V. 77. No. 4. P. 1352-1357.
208. Mogilner L.Y., Smorodinskii Y.G. Ultrasonic Flaw Detection: Adjustment and Calibration of Equipment Using Samples with Cylindrical Drilling // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2018. T. 54. № 9 P. 630-637.
209. Molinero I., de Billy M. Characterization of guided waves propagating in infinite cylinders for oblique insonification // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. V. 83. No 4. P. 1280-1283.
210. Nouri A., Astaraki S. Optimization of Sound Transmission Loss through a Thin Functionally Graded Material Cylindrical Shell // *Shock and Vibration*. 2014. P. 1-10.
211. Perov D.V., Rinkevich A.B., Smorodinskii Ya.G., Keler B. Using wavelets for analyzing ultrasonic fields detected by a laser interferometer. Flaw detection and localization in an aluminum single-crystal // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2001. T. 37. № 12. C. 889-899.
212. Rinkevich A.B., Smorodinskii Ya.G., Burkhanov A.M., Krivonosova A.S., Keller B. Analysis of ultrasonic fields and flaw detection in aluminum single crystals based on laser detection technique // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2000. T. 36. № 11. C. 831-838.
213. Rinkevich A.V., Smorodinskij Y.G., Volkova N.N., Zagrebin B.N. Group velocity of ultrasonics in transverse-isotrope media // *Defectscopy (rus)*. 1994. № 2. C. 58-63.
214. Ryan W.W. Acoustical reflections from aluminium cylindrical shells immersed in water // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1978. V. 64. No. 4. P. 1159-1164.
215. Shuyuan Li, Jingyao Shi, Yuqi Gao, Xiaofeng Zhang, Jun Fan, Bin Wang Acoustic scattering by a finite-length elastic elliptical cylinder in a plane wave // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2021. V. 150. No. 2. P. 1381-1389.

216. Su J.-H., Varadan V.V., Varadan V.K., Flax L. Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. V. 68. No 2. P. 686-691.
217. Twersky V. Multiple scattering of radiation by an arbitrary planar configuration of parallel cylinders and by two parallel cylinders // *J. Appl. Phys.* 1952. 23. P. 407–414.
218. Veksler N.D. Scattering of a plane acoustic wave obliquely incident on a solid elastic cylinder // *Acustica*. 1990. V. 71. N. 2. P. 111-120.
219. Vorovich I.I., Boyev N.V., Sumbatyan M.A. Reconstruction of the obstacle shape in acoustic medium under ultrasonic scanning // *Inverse Problems in Engineering*. 2001. V. 9. № 4. P. 315-337.
220. Williams W.E. Diffraction by a cylinder of finite length // *Math. Proceed. Camb. Phil. Soc.* 1956. M.52. No 2. P. 322-335.

Приложение

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022681787

**Программа определения оптимальных параметров
неоднородности анизотропного покрытия упругого
цилиндра в присутствии плоской поверхности,
обеспечивающих наименьшее отражение звука**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Тульский государственный университет" (ТулГУ) (RU)*

Автор(ы): *Ефимов Дмитрий Юрьевич (RU)*

Заявка № **2022680751**

Дата поступления **01 ноября 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **16 ноября 2022 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 68b80077e14e49f0a94e6bd24145d5c7
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**
Действителен с 20.05.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022681789

Программа расчета амплитуды рассеянного поля в задаче о дифракции цилиндрической звуковой волны на бесконечном круговом упругом цилиндре с трансверсально-изотропным неоднородным покрытием

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Тулский государственный университет" (ТулГУ) (RU)*

Автор(ы): *Ефимов Дмитрий Юрьевич (RU)*

Заявка № **2022680757**

Дата поступления **01 ноября 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **16 ноября 2022 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 68b80077e14e1010a94eeb6d24145d5c7
Владислав Зубов Юлий Сергеевич
Действителен с 2.03.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов

