

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

На правах рукописи



ЛЕВИН АРТЁМ СЕРГЕЕВИЧ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
СТЕРЖНЕВЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ
С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор технических наук, профессор
Баранов Виктор Леопольдович

Тула - 2025

Оглавление

Введение.....	5
1 Состояние исследуемого вопроса.....	14
1.1 Область применения стержневых упругих элементов.....	14
1.2 Обзор литературы по теме исследования.....	17
2 Квазистатическое деформирование стержневых упругих элементов амортизаторов.....	37
2.1 Принятые гипотезы.....	38
2.2 Основная система уравнений и начальные условия.....	39
2.3 Численное решение основной системы уравнений.....	45
2.3.1 Численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.....	45
2.3.2 Решение методом минимизации целевой функции.....	46
2.4 Сравнение результатов различных методов расчёта.....	56
2.5 Построение силовых характеристик.....	60
2.6 Потенциальная энергия стержневых упругих элементов.....	65
2.7 Выводы по главе 2.....	69
3 Динамическое деформирование стержневых упругих элементов амортизаторов.....	70
3.1 Основная система уравнений для описания динамики процесса.....	71
3.2 Численное решение задачи динамики упругих элементов.....	77
3.2.1 Расчёт коэффициента отношения скоростей.....	78
3.2.2 Расчёт изменения скорости во времени.....	85

3.3 Сравнение результатов расчётов для квазистатической и динамической постановки задачи	87
3.3.1 Сравнение времени первого останова	87
3.4 Выводы по главе 3.....	89
4 Начальное контактно-волновое взаимодействие.....	90
4.1 Модель возникновения и распространения поперечной волны в стержневых упругих элементах.....	90
4.2 Численные расчеты.....	94
4.3 Выводы по главе 4.....	98
5 Стержневые упругие элементы с зафиксированными сосредоточенными массами.....	99
5.1 Квазистатическое деформирование стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами.....	99
5.1.1 Основная система уравнений.....	99
5.1.2 Численное решение уравнения изгиба стержня с зафиксированными сосредоточенными массами.....	103
5.1.3 Результаты численных расчётов.....	105
5.2 Динамическое деформирование упругого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами	111
5.2.1 Основные уравнения.....	111
5.2.2 Численный расчёт динамики стержневых упругих элементов с сосредоточенными массами.....	113
5.3 Выводы по главе 5.....	122
Заключение	123

Список литературы	126
Приложение А (рекомендуемое) Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.....	140
Приложение Б (рекомендуемое) Акты о внедрении результатов.....	144

Введение

Актуальность темы диссертации. Задача эффективного расчёта параметров амортизационных устройств на стадиях их проектирования, отработки и эксплуатации актуальна в различных отраслях машиностроения и приборостроения. Амортизационные устройства применяются в автомобильной, авиационной технике, медицинском оборудовании, измерительных приспособлениях, стрелковом и артиллерийском оружии и прочих механизмах, работающих на основе упругого изгибного деформирования стержневых элементов.

Существует широкое многообразие механизмов, где именно амортизаторы являются «лимитирующими» звеньями, от характеристик которых зависят интенсивность и темп работы устройства, поэтому создание комплексных математических моделей изгибного деформирования их упругих стержневых элементов, а также программных комплексов и инженерных методик, позволяющих надёжно прогнозировать их квазистатические и динамические характеристики, актуально в настоящее время.

Широкие диапазоны варьирования параметров внешних воздействий для одних и тех же амортизирующих устройств в процессе их эксплуатации требуют оперативного изменения и адаптации квазистатических и динамических характеристик их упругих элементов без изменения их конструкции. Одним из методов изменения характеристик упругих элементов является использование зафиксированных в их структуре сосредоточенных масс, в связи с чем разработка и реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов динамического изгибного деформирования стержневых элементов амортизаторов с сосредоточенными массами как варьируемыми параметрами их конструкции является актуальной задачей.

Анализ различных современных систем автоматизации процессов проектирования и расчётов, в числе которых: SolidWorks Simulation, ANSYS, Логос, Abaqus, показывает широкую возможность их применения в рамках задач механики деформируемого твёрдого тела, существующие системы работают на основе метода конечных элементов и позволяют решать широкий спектр задач. Недостатком проведения расчётов в существующих автоматизированных системах является большая трудоёмкость, высокие требования к оборудованию вычислительной машины и обязательное наличие необходимых компетенций у инженера – исполнителя расчёта.

Общим недостатком существующих расчётных автоматизированных систем является отсутствие возможностей встраивания созданных и численно реализованных моделей в структуру более крупных программных комплексов, например, при создании востребованных в различных отраслях «цифровых двойников».

В качестве недостатка моделирования в расчётных автоматизированных системах можно также отметить невозможность создания сложных моделей для решения сопряженных задач «сквозного» проектирования, вследствие чего созданные в расчётных автоматизированных системах модели имеют более низкий потенциал масштабирования, чем классические конечно-разностные варианты их реализации.

Таким образом, задача создания современных машиноориентированных инженерных методик, позволяющих проводить расчёты стержневых элементов амортизаторов с варьируемыми сосредоточенными массами без существенной трудоёмкости, является актуальной с точки зрения ее научной и практической значимости.

Область исследований диссертации соответствует пунктам 2, 3 и 8 паспорта специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

- «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»;

- «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента»;

- «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Степень разработанности темы. Задачи оценки различных физических характеристик стержневых упругих элементов являются одними из наиболее старейших задач механики. Комплексную задачу моделирования процесса изгиба упругих стержневых элементов можно разложить на три основных части: квазистатическую, динамическую и контактно-волновую.

В задаче расчёта статики упругих стержневых элементов наибольшее распространение в настоящее время получили модели Эйлера-Бернулли и С.П. Тимошенко, фундаментальными являются исследования: Я. Бернулли, Л. Эйлера, Г. Кирхгофа, С.П. Тимошенко, А.И. Лурье, Е.П. Попова, В.А. Светлицкого, В.З. Власова, А.А. Илюхина, П.А. Жилина.

Из современных авторов, занимающихся проблемой статики стержней можно выделить работы: Н.В. Пустового, В.Е. Левина, К.Г. Охоткина, Д.М. Зуева, К.Н. Анахаева, S. Bouadjadjaа, А.М. Dehrouyeh-Semnani, H. Weia, Q.X. Pan.

Проблема динамики изгиба стержневых упругих элементов рассматривалась в большом количестве работ, как отдельный процесс, так и в контексте общего рассмотрения процесса колебаний. В качестве основных исследований можно отметить работы: В.А. Светлицкого, М.Н. Серазутдинова, H. Weia, W. Sumelka, P. Stempin.

Современными авторами, рассматривающими решения контактно-волновой задачей для стержневых упругих элементов являются: А.А. Локтев, А.В. Залетди-

нов, S. Abrate.

Задача динамики стержневого упругого элемента с сосредоточенными массами решалась в работах: В.А. Светлицкого, W. Ji, V.C. Meesala, X. Du, J. Zhang.

В результате анализа существующих работ был сделан вывод об отсутствии комплексной модели динамического изгиба стержневых упругих элементов и актуальности темы диссертации.

Цель диссертационной работы: разработка математической модели, позволяющей создать инженерно-ориентированный комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов по комплексному динамическому изгибному деформированию стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами.

Задачи, решаемые в работе:

1. Создание численных программно-ориентированных математических моделей квазистатического изгиба стержневых упругих элементов амортизаторов переменного сечения на основе уравнения Эйлера-Бернулли.

2. Разработка математических моделей динамики процесса взаимодействия стержневых элементов и амортизируемых ими тел, и их программная реализация.

3. Предложение контактно-волновой модели начальной стадии процесса соударения стержневых упругих элементов и амортизируемых ими тел путем введения волновых процессов в общие уравнения энергобаланса с целью повышения точности расчётов кинематических и силовых характеристик упругих элементов, а также для оценки влияния фронтов поперечных волн на прочность материала в их опасных сечениях.

4. Разработка комплексных моделей динамики стержневых элементов с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами с целью разработки инженерных методик, позволяющих анализировать влияние величин сосредоточенных масс и их геометрического положения в конструкции на лимитирующие эксплуатационные характеристики упругих элементов амортизаторов. Реализация

полученных методик в виде комплексов программ, позволяющих проводить априорные прогностические расчёты динамики стержневых элементов с зафиксированными сосредоточенными массами.

Научная новизна исследования.

1. Создана и реализована оригинальная математическая модель нелинейного изгиба стержневых упругих элементов амортизаторов на основе уравнения Эйлера-Бернулли, отличающаяся от существующих использованием в ней метода минимизации целевой функции для уменьшения трудоёмкости решения.

2. Разработана методика расчёта динамического изгиба стержневых элементов амортизаторов, отличающаяся возможностью многократного использования однократно рассчитанных силовых характеристик стержневых элементов при расчёте параметров ударяющих амортизируемых тел с различными массами и начальными скоростями.

3. Разработана комплексная методика расчёта квазистатического и динамического изгибного деформирования стержневых элементов с зафиксированными сосредоточенными массами, в отличие от существующих методов учитывающая контактно-волновые явления и использующая метод многомерной минимизации, позволяющая эффективно с низкой трудоёмкостью производить численное решение.

4. Создана новая экспериментальная установка и на ее базе самостоятельно выполнены эксперименты, позволяющие верифицировать предложенные расчётные зависимости времен первого останова и изгибных амплитуд стержневых элементов с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами при амортизации ими ударяющего тела.

Теоретическая значимость диссертации. Результаты, полученные в виде математических моделей изгибного деформирования стержневых упругих элементов амортизаторов с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами и их реализации, дополняют и обобщают существующие исследования в

части создания комплексных моделей динамики изгиба стержневых упругих элементов амортизаторов.

Практическая значимость работы состоит:

1) в создании комплексного инженерного инструментария, позволяющего эффективно проектировать узлы амортизирующих устройств, связанных со стержневыми упругими элементами, с учетом разработанных моделей их деформирования в квазистатической, динамической и контактно-волновой постановке;

2) в разработанных и зарегистрированных программных комплексах, внедрённых на АО «СКБ» (г. Пермь) и используемых в проектировании образцов амортизирующих устройств;

3) в разработанных математических моделях и программно-вычислительных комплексах, внедрённых в учебный процесс ТулГУ.

Методы и методология исследования. Исследование базируется на современных методах исследования теории упругости, механики и волновой динамики стержневых упругих элементов. В процессе исследования применяются современные машинно-ориентированные численные методы, такие как метод Рунге-Кутты 4-го порядка с адаптивным шагом, с использованием коэффициентов Дормана-Принса; метод конечных разностей; метод численной минимизации целевой функции «Differential Evolution»; метод полиномиальной интерполяции. Вычисления проводились с использованием современных ПЭВМ с использованием разработанных программных комплексов на языке Python и математического пакета Matlab.

В исследовании применяется авторский экспериментальный метод верификации разработанных моделей динамического изгибного деформирования стержневых элементов амортизаторов.

Объектами исследования настоящей работы являются стержневые упругие элементы амортизаторов, имеющие переменное поперечное сечение, с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами.

Предметом исследования настоящей работы является комплексный (квазистатический, динамический, контактно-волновой) процесс изгиба стержневых элементов амортизаторов переменного поперечного сечения с зафиксированными сосредоточенными массами.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математическая модель динамического изгиба стержневых элементов амортизаторов, позволяющая производить многократный расчёт с использованием одной и той же силовой характеристики для амортизируемых тел с различными параметрами массы и скорости.

2. Комплексная математическая модель квазистатического, динамического и ударно-волнового изгибного деформирования стержневых элементов амортизаторов с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами.

3. Алгоритмы решения системы ОДУ второго порядка на основе уравнения Эйлера-Бернулли, включающего предложенные варианты целевых функций, зависящих от схем приложения внешней нагрузки и позволяющих создавать численную реализацию для расчёта и анализа квазистатического процесса изгибного деформирования стержневых элементов амортизаторов.

Достоверность основных научных положений и выводов обеспечивается:

1) применением апробированных классических и современных численных методов анализа;

2) положительными результатами сравнения решений, полученных с использованием новых методик, представленных в данной работе, и методик других авторов;

3) объёмом натурных и численных авторских экспериментов, анализ результатов которых демонстрирует достоверность разработанных методик расчёта;

4) положительными решениями Федеральной службы по интеллектуальной собственности Российской Федерации о Государственной регистрации программ для ЭВМ, разработанных автором.

Апробация результатов исследования. Результаты исследования докладывались на научно-практических конференциях с Всероссийским участием «Техника XXI века глазами молодых учёных и специалистов» (2020,...,2024 гг.); «Научно-практических конференциях профессорско-преподавательского состава ТулГУ с Всероссийским участием» (2021,...,2023 гг.), проводимых на базе Тульского государственного университета; на Всероссийской конференции «Проблемы развития стрелковой отрасли в Российской Федерации» в городе Ижевск (2024 год).

Результаты работы были удостоены II-го места на XXI Всероссийской научно-технической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Техника XXI века глазами молодых ученых и специалистов», проводимой на базе ТулГУ в 2023 году.

Публикации. По теме диссертации автором:

- опубликовано суммарно 17 статей в различных сборниках и научно-технических журналах, из которых 2 статьи в научных изданиях, утверждённых ВАК Минобрнауки РФ;

- получено 4 свидетельства о Государственной регистрации программ для ЭВМ.

Работа выполнена в Тульском государственном университете, где автор являлся аспирантом в 2020-2025 гг.

Личный вклад автора:

1) автором разработана серия проблемно-ориентированных программных комплексов по расчёту квазистатических и динамических характеристик стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами;

2) представленные в диссертации модели процессов динамического изгибного деформирования стержневых упругих элементов амортизаторов с зафиксированными сосредоточенными массами и связанные с ними исследования, включая численные расчеты и их анализ, выполнены автором лично;

3) автор осуществлял организацию проведения комплекса экспериментальных работ и принимал непосредственное участие в их проведении, а также в анализе и использовании их результатов.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы (116 наименований) и двух приложений. Изложена в **объёме** 145 страниц машинописного текста и содержит 54 рисунка и 7 таблиц.

1 Состояние исследуемого вопроса

1.1 Область применения стержневых упругих элементов

Стержневые упругие элементы амортизаторов используются в различных областях машиностроения и приборостроения. Использование стержневых упругих элементов позволяет демпфировать возникающие пики нагружения и распределить их во времени, что приводит к увеличению надёжности работы механизмов и улучшает эргономику устройств.

В приложении к стрелковому вооружению, амортизирующее устройство позволяет значительно скомпенсировать отдачу оружия и обеспечить безопасную стрельбу патронами большого калибра. Однако, для достижения наибольшего эффекта амортизации необходимо подобрать амортизирующие элементы таким образом, чтобы они обеспечивали амортизацию при определённых интенсивностях нагрузок. В качестве упругого элемента может быть использован стержневой амортизирующий элемент (рисунок 1.1) [49]. Варьирование конструктивных параметров упругого элемента позволяет достичь требуемых характеристик амортизационного устройства и всей конструкции в целом.

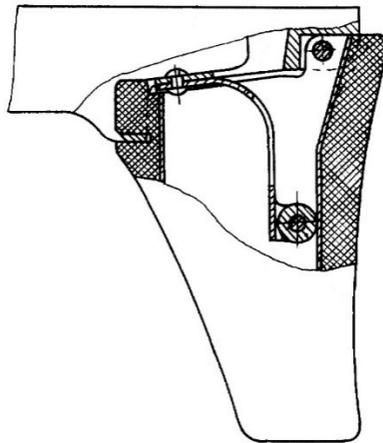


Рисунок 1.1 – Приклад стрелкового оружия

Амортизационные устройства на основе плоских упругих элементов получили большое распространение в отрасли транспортного машиностроения. В автомобилестроении известно большое количество амортизирующих устройств, имеющих в качестве амортизирующего элемента упругий стержень, например: [48, 50, 51]. Особое распространение стержневые упругие элементы получили в подвеске различного автотранспорта, примером является однолистовые полурессоры независимой подвески, применяемые в различных изделиях, например деталь с артикулом M1120400 (рисунок 1.2) [86] в шасси грузовых автомобилей марок BPW, KNORP, KOGEL, SCHMITZ.

Существуют примеры применения упругих стержневых элементов в медицинском оборудовании (рисунок 1.3), например патент [52], при проектировании, таких элементов, важно точно достигать требуемых квазистатических и динамических характеристик для априори заданных массогабаритных параметров. Каждое медицинское ортопедическое изделие имеет уникальные параметры, зависящие от особенностей пользователя изделия, в результате чего использование представленной в работе методики позволит оперативно производить расчёты для большого количества образцов за малое время.

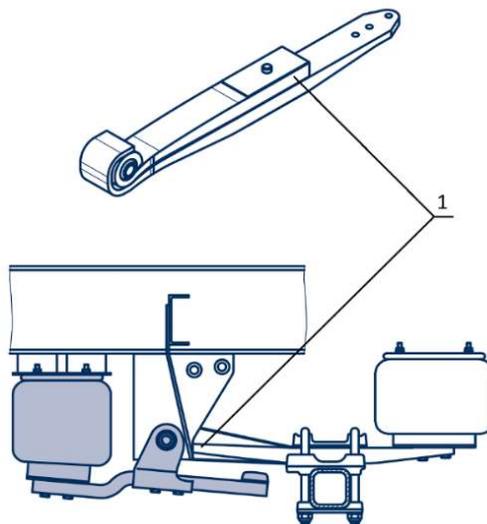


Рисунок 1.2 – Полурессора и её расположение в системе подвески:

1- полурессора

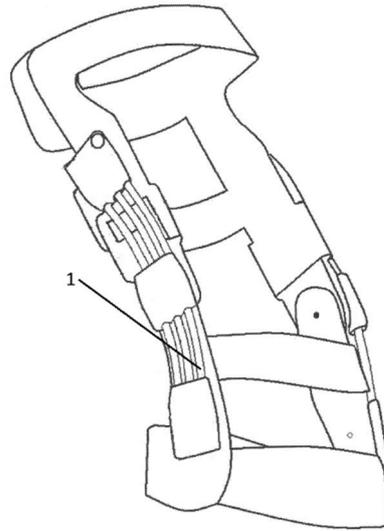


Рисунок 1.3 – Сборная лангета для коленного сустава:

1 – стержневой упругий элемент

Стержневые упругие элементы широко применяются в измерительных приспособлениях (рисунок 1.4), например: патент [53]. Разработанная в данной работе методика позволяет при проектировании измерительных приспособлений эффективно осуществить расчётное прогнозирование будущих квазистатических и динамических характеристик стержневых упругих элементов.

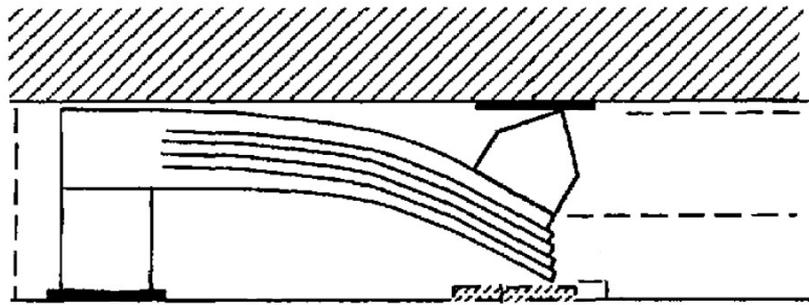


Рисунок 1.4 – Измерительное приспособление

Для создания современных амортизирующих и виброзащитных устройств со стержневыми упругими элементами необходимо точно определять конструктивные параметры и физические характеристики, что достигается за счёт моделирования. Применение предложенных моделей и разработанных программных

комплексов позволит конструктору в ходе научно-исследовательской работы или на этапе технического проекта опытно-конструкторских работ более точно достигать требуемых динамических характеристик для проектируемых деталей, что позволит значительно сократить время на разработку опытного образца, а также положительно скажется на его качестве.

1.2 Обзор литературы по теме исследования

Моделирование изгиба стержневого упругого элемента является одной из старейших задач механики. Впервые задачу расчёта изгиба упругого стержня рассматривали ещё Леонардо да Винчи и Галилео Галилей [71].

В настоящее время существует огромное количество моделей, описывающих изгибное деформирование стержневого упругого элемента, самыми распространёнными из которых являются [60]: модель Кирхгоффа; модель Эйлера-Бернулли; модель С.П. Тимошенко; модель Шереметьева-Пелеха-Редди-Левинсона; модели, использующие метод конечных элементов.

Создание модели динамического изгибного деформирования представляет комплексную задачу, сочетающую квазистатическую, динамическую и ударную части. В данной работе в качестве основной модели по критерию математической ясности и точности вычислений предлагается взять модель упругого изгиба стержня Эйлера-Бернулли.

Квазистатическое изгибное деформирование стержневого упругого элемента с использованием модели Эйлера-Бернулли рассматривается в широком множестве научных исследований. Известно большое количество методов получения решений задач изгиба стержневых упругих элементов в квазистатической постановке. Однако проведенный анализ показал, что представленные в современной

научной литературе аналитические и численные методы расчёта не являются универсальными для различных схем внешнего нагружения.

В работах [54, 55, 56] для расчёта изгиба изначально прямого стержневого элемента, нагруженного сосредоточенной нагрузкой, предлагается использовать следующую форму уравнения изгиба Эйлера-Бернулли (записано в нотации Е.П. Попова [55]):

$$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} = -\frac{P_c}{H} \sin(\vartheta + \delta_c), \quad (1.1)$$

где ϑ - угол наклона касательной к упругой линии; s – длина упругого элемента; P_c - сосредоточенная нагрузка; H - изгибная жёсткость, $H = EI$; δ_c - угол наклона оси абсцисс к вектору сосредоточенных сил.

Вводят обозначения:

$$\beta_c^2 = P_c l^2 / H, \quad \zeta_c = \vartheta + \delta_c,$$

где l - расстояние от точки нагружения до точки консольного закрепления.

Используя введённые обозначения, записывают следующую форму уравнения (1.1):

$$l^2 \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} = -\beta_c^2 \sin \zeta_c. \quad (1.2)$$

Записывают общую точную форму дифференциального уравнения равновесия упругой линии для всех многообразных задач основного класса:

$$l^2 \frac{d^2 \zeta}{ds^2} = -\beta^2 \sin \zeta, \quad (1.3)$$

где опущен индекс «с» и в левой части вместо ϑ стоит ζ , так как $\zeta_c = \vartheta + \delta_c$ и величина δ_c является постоянной в каждом равновесном состоянии стержневого упругого элемента.

Далее в работе [55] предлагается метод эллиптических параметров и метод упругих параметров для упрощённого решения уравнения (1.3). В работе [55] ав-

тором представлена численная реализация разработанных им методов в виде программы для ЭВМ, позволяющая инженеру оперативно рассчитывать квазистатические характеристики упругих стержневых элементов.

Достоинством работы [55] является компактность общих формул расчёта изгиба и практическая простота расчётов по разработанной автором методике.

В работе [55] представлены методы, позволяющие рассчитывать изгиб только геометрически однородных упругих стержневых элементов, в результате чего методика не обеспечивает эффективного расчёта в условиях сильных ограничений массогабаритных параметров проектируемых стержневых упругих элементов, требующих переменного сечения стержневого упругого элемента.

Кроме этого, представленные в [55] методы не позволяют достичь требуемой при проектировании точности результатов расчётов при малых изгибах упругих элементов, что отмечает сам автор в тексте работы.

Результаты, полученные в работах Е.П. Попова используются современными авторами в работах [28], [29].

В работах [61, 62, 64] В.А. Светлицким предложен подход к моделированию стержня, как пространственно-ориентированной кривой. Данный подход отражён в современных работах Н.В. Пустового [59], В.Е. Левина [43], суть подхода может быть отражена в системе уравнений (1.4) - (1.10).

$$U_{1,s} = \varepsilon x_{1,s} - \gamma x_{2,s}; \quad (1.4)$$

$$U_{2,s} = \varepsilon x_{2,s} + \gamma x_{1,s}; \quad (1.5)$$

$$\gamma_{3,s} = \frac{M_3}{EJ}; \quad (1.6)$$

$$Q_{1,s} = -q_1; \quad (1.7)$$

$$Q_{2,s} = -q_2; \quad (1.8)$$

$$M_3 = -m_3 + x_{2,s} Q_1 - x_{1,s} Q_2; \quad (1.9)$$

$$\varepsilon = \frac{x_{j,s} Q_j}{EF}. \quad (1.10)$$

где $U_{i,s}$ - проекции вектора перемещения точки упругого элемента; ε - продольная деформация; $x_{i,s}$ - координаты узлов криволинейного участка; γ - величина кручения; $\gamma_{3,s}$ - кривизна осевой линии; M_3 - изгибающий момент в сечении; E - модуль Юнга; F - площадь сечения; $Q_{i,s}$ - проекция вектора внутренних сил; q_i - проекция вектора нагрузки; m_3 - проекция вектора внешнего момента.

Уравнения (1.4) – (1.10) в работе [43] предлагается решать с помощью метода пристрелки.

В качестве общего недостатка работ [43], [59] можно отметить сложность численной реализации приведённых уравнений в случае расчёта геометрически неоднородного стержня.

В работах К.Г. Охоткина и Д.М. Зуева [28, 29, 31] предлагается для выражения расчёта для первой моды (без точек перегиба) нелинейного решения задачи поперечного изгиба защемлённой консоли использовать модифицированную линеаризованную теорию.

$$f = \frac{\mu}{3} (2 - 3\xi_k + \xi_k^3), \quad (1.11)$$

$$\xi_k = \frac{1 + \frac{2}{3}\mu^2 - \sqrt{1 + \mu^2}}{1 + \mu^2}, \quad (1.12)$$

где f - безразмерное значение стрелы прогиба, равное отношению прогиба к

длине стержня y/L ; μ - безразмерный параметр нагрузки, $\mu = \frac{PL^2}{2EJ}$; P - величина

нагрузки; E – модуль упругости; J - момент инерции.

Представленные выражения (1.11) и (1.12) являются простыми в применении и, как показано в [29], имеют приемлемую точность. Недостатком представленных выражений является невозможность расчёта прогиба для стержней переменного сечения, а также для следящих и скользящих схем внешнего нагружения.

В работе [1] К.Н. Анахаев рассматривает проблему расчёта прогиба стержневых упругих элементов на основе теории Эйлера-Бернулли с использованием упрощённых зависимостей по расчёту эллиптических интегралов:

$$x_A = 2\frac{E}{K} - 1, y_A = 2\frac{\lambda}{K}, \quad (1.13)$$

$$E = \ln\sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2) \cdot \lambda^2}, \quad (1.14)$$

$$\bar{P} = \frac{P}{P_E} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K^2, \quad (1.15)$$

$$K = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln\sqrt{1-\lambda^2}}{\ln[0,35(1-0,2\sqrt{1-\lambda^2})]}, \quad (1.16)$$

$$P_E = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{W}{L^2}, \quad (1.17)$$

где x_A , y_A - абсцисса и ордината точки нагружения изогнутого стержневого упругого элемента; E - эллиптический интеграл 2 рода; K - полный эллиптический интеграл 1 рода; \bar{P} - безразмерное значение нагрузки; P_E - критическая сила; W - изгибная жёсткость; P - величина нагрузки; L - длина упругого элемента; λ - модуль эллиптического интеграла.

Выражения (1.13) – (1.17) обладают вычислительной простотой и, как показывает анализ, приведенный в статье [1], обладают допустимой точностью относительно классического метода эллиптических интегралов [55]. К недостаткам приведённых выражений можно отнести невозможность расчёта для стержней переменного сечения, а также требование к применению вычислительной техники для определения величины λ подбором из выражений (1.14) и (1.16).

В исследовании [85] авторами предложены выражения для расчёта статики стержневого упругого элемента с переменным сечением и проведена экспериментальная положительная оценка точности результатов расчётов.

$$D' = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{eq}^k [(h_k - e)^3 - (h_{k-1} - e)^3], \quad (1.18)$$

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \bar{Q}_{eq}^k (h_k - h_{k-1}), \quad (1.19)$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \bar{Q}_{eq}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (1.20)$$

$$e = \frac{B}{A}, \quad (1.21)$$

$$L = \sqrt{\frac{D'}{2P}} \int_0^{\psi^m} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin \psi^m - \sin \psi}}, \quad (1.22)$$

$$\Delta_x = L - 2\sqrt{\frac{D'}{2P}} [\sin \psi^m], \quad (1.23)$$

$$\Delta_z = \sqrt{\frac{D'}{2P}} \int_0^{\psi^m} \frac{\sin \psi}{\sqrt{\sin \psi^m - \sin \psi}} d\psi, \quad (1.24)$$

где A , B , D' - специальные коэффициенты; Q_{eq} - матрица жесткости; h_{k-1} , h_k - толщина начала и конца участка k из n ; L - длина упругого элемента в рассматриваемой точке; P - величина нагрузки; ψ^m - угол склонения нейтральной оси стержня; Δ_x , Δ_z - горизонтального и вертикальное перемещение.

Представленные выражения (1.18) – (1.24) представляют из себя конечно-элементную модель стержневого упругого элемента с переменным сечением, которая позволяет рассчитывать прогибы упругих элементов под действием неследящей скользящей нагрузки.

Недостатком приведённых выражений является невозможность расчёта иных схем нагружения, кроме неследящих скользящих, без доработки модели. Конечно-элементные модели сложны в анализе и имеют ограниченный потенциал масштабирования. В выражении (1.22) из условия неизменности координаты по длине упругого элемента прямым подбором вычисляют угол склонения нейтральной оси текущего конечного элемента, при определённых требованиях к точности расчёта данная операция требует существенных затрат по времени расчёта для одного элемента и всей системы.

В [89], используя модель Эйлера-Бернулли, автор предлагает упрощённую систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, конечно-численная реализация которой позволяет рассчитывать прогибы стержневого упругого элемента:

$$\left(1 + \frac{1}{8} \lambda(5 + 3 \cos(2\theta))\right) \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} - \frac{3}{8} \lambda \sin(2\theta) \left(\frac{d\theta}{d\zeta}\right)^2 + P \sin(\theta + \alpha - \theta(1)) = 0, \quad (1.25)$$

$$\psi_1 = \theta, \quad (1.26)$$

$$\psi_2 = \frac{d\theta}{d\zeta}, \quad (1.27)$$

$$\frac{d\psi_1}{d\zeta} = \psi_2, \quad (1.28)$$

$$\frac{d\psi_2}{d\zeta} = \left(1 + \frac{1}{8} \lambda(5 + 3 \cos(2\psi_1))\right)^{-1} \left(\frac{3}{8} \lambda \sin(2\psi_1) \psi_2^2 - P \sin(\psi_1 + \alpha - \psi_1(1))\right), \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= 0 \\ \psi_2(1) &= 0 \end{aligned}, \quad (1.30)$$

$$\xi = \int_0^\zeta (\cos(\theta) - 1) d\zeta, \quad (1.31)$$

$$\eta = \int_0^\zeta \sin(\theta) d\zeta, \quad (1.32)$$

где λ - константа Ляме; θ - величина угла вращения сечения; ζ - безразмерная координата по длине упругого элемента; P - безразмерная величина нагрузки; ξ - безразмерный прогиб; η - безразмерное поперечное сечение; α - угол наклона нагрузки к нейтральной оси стержня.

Предлагаемую систему уравнений автор предлагает решать с помощью методов Рунге-Кутты 4-го порядка и метода Ньютона-Рафсона.

Недостатком приведённых выражений (1.25) - (1.32) является невозможность расчёта с их помощью прогибов стержневых упругих элементов, нагруженных согласно скользящим схемам нагружения.

Существует большое количество научных исследований по расчёту изгибного деформирования стержневого упругого элемента в динамической постановке. Проблема рассматривается как самостоятельно, так и косвенно в контексте колебаний стержневых элементов.

В работе [114] авторы приводят выражения для описания динамики изгибного деформирования стержневого упругого элемента на основе модели Эйлера-Бернулли.

$$\frac{d\theta}{ds} = \alpha [\cos(\beta\theta_B)(x_B - x) + \sin(\beta\theta_B)(w_B - w)] + m, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (1.33)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}^T,$$

$$h_i = \alpha_i \left[\cos(\beta\theta_B^{(p)})(x_B^{(p)} - x_i^{(p)}) + \sin(\beta\theta_B^{(p)})(w_B^{(p)} - w_i^{(p)}) \right] + m_i, \quad (1.34)$$

$$\alpha_i = \frac{Pl^2}{EI(s_i)}, \quad m_i = \frac{Ml}{EI(s_i)}, \quad l = L - s_i,$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{f}_s, \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{f}_c,$$

$$\mathbf{f}_s = \{\sin\theta_i\}^T, \quad \mathbf{f}_c = \{\cos\theta_i\}^T,$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

где θ - угол наклона нейтральной линии; s – координата по длине упругого элемента; β - безразмерный коэффициент угла наклона нагрузки; θ_B - угол наклона нейтральной линии в точке нагружения; x_B - координата участка стержня в точке нагружения; x - координата участка стержня; w_B - прогиб в точке нагружения; N – количество участков разбиения упругого элемента; m – безразмерная величина момента; h_i - кривизна упругого элемента на участке i ; $\theta_B^{(p)}$, $x_B^{(p)}$, $x_i^{(p)}$, $w_B^{(p)}$, $w_i^{(p)}$ - угол наклона нейтральной линии в точке нагружения, координата участка стержня в точке нагружения, координата участка стержня, прогиб в точке нагружения, прогиб на участке i на шаге расчёта p ; m_i - безразмерный момент в сечении; $EI(s_i)$ - изгибная жёсткость на участке i ; P - нагрузка на упругий элемент.

Предложенные выражения и их численная реализация с использованием конечного элемента в виде стержня позволяют рассчитывать динамические характеристики упругого стержневого элемента. Недостатком разработанной модели является невозможность расчёта в случае воздействия нагрузки по скользящей схеме нагружения.

В работе [63] В.А. Светлицким получены выражения для описания динамики стержневых упругих элементов на основе модели Эйлера-Бернулли.

$$m_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial s} + \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P}, \quad (1.35)$$

$$\mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} + \mathbf{T}, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^{(i)} \delta(s - s_i), \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\nu=1}^{\rho} \mathbf{T}^{(\nu)} \delta(s - s_i), \quad (1.37)$$

где m_0 - масса единицы длины стержня; t - время; $\boldsymbol{\omega}$ - вектор угловой скорости; \mathbf{v} - вектор скорость точки; \mathbf{Q} - матрица внутренних моментов; $\boldsymbol{\chi}$ - вектор кривизны нейтральной оси стержня; \mathbf{P} - вектор нагрузки; \mathbf{J} - матрица моментов инерции; \mathbf{M} - матрица внутренних моментов; s – координата по осевой линии стержня; \mathbf{e}_1 - базисный вектор; \mathbf{T} - вектор моментов ; $\boldsymbol{\mu}$ - вектор момента инерции стержня.

Полученные в работе [63] выражения позволяют производить расчёт динамики изгибного деформирования стержневых упругих элементов с переменными поперечными сечениями.

Недостатком приведённых выражений (1.35) – (1.37) является их математическая сложность, что приводит к трудностям численной реализации и ограниченной масштабируемости представленных решений. Представленная в работе [63] система уравнений имеет в основе представление о стержне как об ориентированной, направленной кривой, следовательно при численной реализации предложенных выражений могут возникнуть устранимые разрывы первого рода, что накладывает особые требования на шаг интегрирования системы, что влечёт к увеличению времени расчёта и возможным потерям в точности.

М.Н. Серазутдинов в работе [70] предлагает метод расчёта статики и динамики стержневых упругих элементов на основе модели Эйлера-Бернулли. В работе [70] предложены выражения для конечно-элементной реализации процесса статического и динамического изгиба.

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^N \sum_i^I \left[\delta K(\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}(s_i, t)) - \delta \Pi(\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}(s_i, t)) + \delta' W(\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}(s_i, t)) H_{ni} \right] = 0;$$

$$\tilde{u}_k(t, s) = \sum_{m=1}^M A_{km}^n(t) f_m(s), k = \overline{1,3}; \quad (1.38)$$

$$\tilde{\varphi}_1(t, s) = \sum_{m=1}^M B_m^n(t) f_m(s), \quad (1.39)$$

$$f_1(s) = (1 - s^2)^2; f_2 = [s(2 - s)]^2; f_3(s) = s(s - 1)^2;$$

$$f_j(s) = [(1 - s^2)s^2]s^{j-1}; j = 1, M - 4, \quad (1.40)$$

$$\tilde{u}_k(t, 0) = A_{k1}^n(t), \tilde{u}_k(t, 1) = A_{k2}^n(t), \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_k(t, 0)}{\partial s} = A_{k3}^n(t); \frac{\partial \tilde{u}_k(t, 1)}{\partial s} = A_{k4}^n(t); k = \overline{1,3}; \quad (1.42)$$

$$\tilde{\varphi}_1(t, 0) = B_1^n(t); \tilde{\varphi}_1(t, 1) = B_2^n(t); \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1(t, 0)}{\partial s} = B_3^n(t); \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(t, 1)}{\partial s} = B_4^n(t). \quad (1.44)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{C}} + \mathbf{K}\mathbf{C} = \mathbf{F} \quad (1.45)$$

где $K, \Pi, \delta'W$ - кинетическая, потенциальная энергии деформации и элементарная работа внешних сил; H_{ni} - множители, величина которых зависит от формы линии стержня и от используемой при интегрировании квадратурной формулы; t - время; s - параметр, используемый для описания линии стержня; $\bar{u}_n(s_i, t), \bar{\varphi}(s_i, t)$ - вектора перемещения и поворота локальной системы координат; $\tilde{u}_k(t, s), \tilde{\varphi}_k(t, s)$ - вектора перемещения и поворота глобальной системы координат; $A_{km}^n(t), B_{km}^n(t)$ - функции, подлежащие определению из решения $f_j(s)$; \mathbf{M}, \mathbf{K} - матрицы масс и жесткостей стержневой системы; $\mathbf{C} = \{A_{11}, A_{12}, \dots, B_M^N\}^T$ - вектор функция; \mathbf{F} - вектор, зависящий от характера действующей внешней нагрузки.

Автор предлагает далее решать предложенную систему уравнений (1.38) – (1.45) численно, а для определения статических и динамических характеристик изгибного деформирования стержневых упругих элементов находить значения неизвестных коэффициентов многочлена.

Как видно из представленных выше выражений, создание и численная реализация модели представляет из себя сложную задачу, связанную с решением матричных выражений, содержащих в себе частные производные по различным переменным. В основе представленных выражений лежит аппроксимация неизвестной функции многочленами и последующий поиск коэффициентов, данный подход затрудняет последующий анализ модели как цельной физической системы. В исследовании не определена методика по нахождению H_{ni} - что является сложной задачей, требующей априорного определения данного коэффициента, что снижает точность результатов расчётов.

В работе [111] авторы рассматривают применение метода непрерывного феноменологического моделирования к динамическому изгибному деформированию стержневого упругого элемента согласно модели Эйлера-Бернулли, в результате чего получено выражение:

$$V_3 = -D_{x_1}^{\alpha} \left[\ell_f^{2\alpha-2} D_{x_1}^{\alpha} \left(\ell_f^{\alpha-1} \overline{D u_3} \right) \right] EI, \quad (1.46)$$

$$\alpha \in (0,1)$$

где $D_{x_1}^{\alpha}(\dots)$ – дробная производная Капуто; $(\dots) \equiv (\dots)(x_1, t)$ - упрощение записи;

x_1 - координата по длине стержня; EI - изгибная жёсткость сечения; ℓ_f - масштаб длины в рассматриваемой точке x_1 ; $\overline{u_3}$ - вектор вертикальных перемещений;

V_3 - нагрузка на упругий элемент.

Выражение (1.46) автор предлагает реализовывать с помощью метода конечных элементов. Приведённые выражения позволяют рассчитывать динамику стержневого упругого элемента во времени. Недостатком является чувствительность результата к выбору коэффициента α , методика выбора не приводится в работе. Сложность вычислительной схемы дробной производной Капуто не позволяет создать простую для анализа и малую по трудоёмкости реализацию приведённых выражений.

В работах А.А. Локтева [44] и А.В. Залетдинова [27] (научный руководитель А.А. Локтев) рассматривается учёт контактно-волнового динамического контакта на общий процесс деформирования твёрдого тела. В работах [44] и [27] представлен подробный совокупный обзор различных подходов к моделированию контактно-волнового упругого деформирования, в числе которых: стандартные решения волновых уравнений; подходы, основанные на дуплексном представлении динамического контакта двух тел; подход Герца.

Одним из важных выводов работы [27], является вывод о том, что наиболее вероятные места возникновения наибольших напряжений в конструкциях, испытывающих ударное воздействие – контактная область, точки под ней на всю толщину конструкции.

В работе [27] предлагаются следующие выражения, объединяющие решения для контактной и волновой задачи взаимодействия тел:

$$\begin{aligned}
 w(t) = & \frac{E_1 V_0}{\rho h \pi r_0^2} \frac{t^3}{6} - \frac{E_1 V_0 (G^{(1)} + G^{(2)})}{\rho h \pi r_0^3} \frac{t^4}{12} + \\
 & + \left[\frac{3E_1 V_0 (G^{(1)} + G^{(2)})^2}{\rho h \pi r_0^4} - \frac{E_1^2 V_0}{\rho h \pi r_0^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{\rho h \pi r_0^2} \right) \right] \frac{t^5}{120} + \\
 & + \left[\frac{2E_1^2 V_0 (G^{(1)} + G^{(2)})}{\rho h \pi r_0^3} \left(\frac{1}{m} + \frac{4}{\rho h \pi r_0^2} \right) - \frac{4E_1 V_0 (G^{(1)} + G^{(2)})^3}{\rho h \pi r_0^5} + \frac{1}{4} \frac{E_1 V_0 (G^{(1)3} + G^{(2)3})}{\rho h \pi r_0^5} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{12E_1V_0}{\rho h^3 \pi r_0^2} \frac{(G^{(1)3} - G^{(2)3})G^{(2)2}}{G^{(1)2} - G^{(2)2}} - \frac{E_1V_0}{\rho h \pi r_0^5} \left(\frac{E_\theta}{E_r} - 1 \right) \frac{G^{(1)3}G^{(2)}}{G^{(1)} - G^{(2)}} \left. \right\} \frac{t^6}{720}, \\
P(t) = & E_1V_0 \left\{ t - E_1 \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{\rho h \pi r_0^2} \right) \frac{t^3}{6} + \frac{E_1(G^{(1)} + G^{(2)})t^4}{\rho h \pi r_0^3} - \right. \\
& - E_1 \left[\frac{(G^{(1)} + G^{(2)})^2}{\rho h \pi r_0^4} - \frac{E_1}{6} \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{\rho h \pi r_0^2} \right)^2 \right] \frac{t^5}{20} + \\
& + E_1 \left[- \frac{4E_1(G^{(1)} + G^{(2)})}{\rho h \pi r_0^3} \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{\rho h \pi r_0^2} \right) + \frac{4(G^{(1)} + G^{(2)})^3}{\rho h \pi r_0^5} - \right. \\
& - \frac{1}{4} \frac{(G^{(1)3} + G^{(2)3})}{\rho h \pi r_0^5} - \frac{12}{\rho h^3 \pi r_0^2} \frac{(G^{(1)3} - G^{(2)3})G^{(2)2}}{G^{(1)2} - G^{(2)2}} + \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho h \pi r_0^5} \left(\frac{E_\theta}{E_r} - 1 \right) \frac{G^{(1)3}G^{(2)}}{G^{(1)} - G^{(2)}} \right] \frac{t^6}{360} \right\}.
\end{aligned}$$

где $w(t)$ - значение динамического прогиба; $P(t)$ - значение силы контактного взаимодействия; E_1 - модуль упругости первого рода; V_0 - скорость ударяющегося тела в момент касания упругого элемента; t - время; ρ - плотность упругого элемента; h - толщина упругого элемента; r_0 - радиус соударяющегося тела; $G^{(1)}$ - скорость продольной волны в упругом элементе; $G^{(2)}$ - скорость поперечной волны в упругом элементе; E_θ , E_r - модули упругости для направлений θ и r ; m - масса ударяющегося в упругий элемент тела.

Недостатком работ [27] и [44] является представление контактной задачи соприкосновения как задачи о сжатии пружинного буфера, что не учитывает начальный процесс формирования поперечной волны напряжений до возникновения волны изгиба. Также проиллюстрированные выражения не учитывают распространение волн напряжения в упругом элементе переменного сечения.

В работе [81], аналогично работам [27] и [44] предполагается начальная интерпретация процесса соударения как системы пружина с грузом и ударяющееся тело. Автор предлагает четыре варианта представления пружины с грузом. Волновые процессы автор предлагает рассматривать с помощью стандартных волновых уравнений. Силу соударения автор предлагает вычислять с помощью закона сохранения энергии и модифицированного выражения контактной силы Герца.

Недостатком работы [81] является невозможность использования представленных соотношений для тел с переменным поперечным сечением. Системы расчёта, основанные на выражениях контактной силы Герца, предполагают квазистатический характер нагружения и не позволяют с высокой точностью учесть влияние соударения на дальнейшую динамику изгиба упругих элементов.

Задача комплексного моделирования динамики стержневого упругого элемента с сосредоточенными массами является актуальной в различных отраслях машиностроения и рассматривалась в большем количестве научных исследований, в данной работе представлен обзор нескольких наиболее актуальных подходов к решению данной задачи.

В работе [63] В.А. Светлицким предложен подход, выражающийся в представлении о стержне как об ориентированной кривой, представлены выражения для расчёта динамики стержневого упругого элемента в следующем виде:

$$n_1(\varepsilon) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \varepsilon} - \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{Q} - \mathbf{P} = 0; \quad (1.47)$$

$$\mathbf{J}(\varepsilon) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}(\varepsilon) \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varepsilon} - \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{M} - \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} - \mathbf{T} = 0; \quad (1.48)$$

$$\mathbf{M} = A(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}_0^{(1)}); \quad (1.49)$$

$$\mathbf{L}_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varepsilon} + \mathbf{L} \boldsymbol{\chi}_0^{(1)} - \boldsymbol{\chi} = 0; \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varepsilon} + \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = 0; \quad (1.51)$$

$$\mathbf{L}_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} - \boldsymbol{\omega} = 0; \quad (1.52)$$

$$[n_1(\varepsilon) + m_1 \delta(\varepsilon - \varepsilon_1) + m_2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_2)] \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \varepsilon} - \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{Q} - \mathbf{P} = 0; \quad (1.53)$$

$$[\mathbf{J}(\varepsilon) + \mathbf{J}^{(2)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_2)] \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{J}(\varepsilon) + \mathbf{J}^{(2)} \delta(\varepsilon - \varepsilon_2)] \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varepsilon} - \boldsymbol{\chi} \times \mathbf{M} - \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} - \mathbf{T} = 0. \quad (1.54)$$

где $n_1(\dots)$ - безразмерная функция; \mathbf{v} - безразмерный вектор скоростей; τ - безразмерное время; $\boldsymbol{\omega}$ - безразмерный вектор угловой скорости; $\mathbf{J}(\dots)$ - безразмерная матрица моментов инерции; $\boldsymbol{\chi}$ - безразмерный вектор кручения и кривизны; \mathbf{M} - безразмерная матрица внутренних моментов; $\delta(\dots)$ - функция Дирака; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - безразмерные координаты сечения по длине элемента; \mathbf{e}_1 - единичный вектор; m_1, m_2 - величины сосредоточенных масс; \mathbf{L}, \mathbf{L}_1 - специальный матричный оператор.

Уравнения (1.47) - (1.54), описывающие динамику стержневого упругого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами, предлагается решать численными методами, такими как: метод начальных значений; методы, использующие обобщённые функции.

Из недостатков работы можно отметить, что представленные в работе [63] методики содержат в себе выражения значительного объёма и сложности, что значительно затрудняет их анализ и численную реализацию. Приведённые выражения не позволяют произвести расчёт для стержневого упругого элемента с более, чем двумя сосредоточенными массами без модификации приведённых выражений.

Из современных работ по моделированию стержневых упругих элементов с сосредоточенными массами можно отметить следующие работы: [94], [100], [104].

В работе [100] авторами исследуется задача расчёта динамических характеристик стержневых упругих элементов с зафиксированной сосредоточенной мас-

сой. Статика стержневого упругого элемента описывается с помощью метода конечных элементов с конечным элементом в виде линейного стержня модели Эйлера-Бернулли.

Динамику изгибного деформирования предлагается рассчитывать с помощью следующих выражений:

$$T_b = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_b \dot{\mathbf{q}}$$

$$T_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{q}}$$

$$T = T_b + T_c$$

$$\delta W_f + \delta W_\tau - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = 0$$

$$\delta W_f = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_a$$

$$\delta W_\tau = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_\tau$$

где \mathbf{q} – вектор обобщённых координат узлов; \mathbf{M}_b , \mathbf{M}_c , \mathbf{M} – вектора масс упругого элемента, сосредоточенной массы, суммарный; T_b , T_c , T – кинетические энергии упругого элемента, сосредоточенной массы и общая; δW_f , δW_τ – виртуальные работы изогнутой балки, действующая на центральное твёрдое тело.

Конечно-численная реализация представленных выражений является сложной задачей и не позволяет производить расчёт для случаев, когда сосредоточенная масса закреплена не на конце упругого элемента.

В работе [104] рассматривается задача расчёта динамических характеристик упругого стержневого элемента различными величинами сосредоточенных масс. Динамику стержневого упругого элемента предлагается описывать с помощью следующих выражений:

$$\rho \ddot{w} + c_1 \dot{w} + EI_Y \left(w'''' + [w'(w'w'')] \right)' + m \ddot{u}_b w'' + \frac{\rho}{2} \left(w' \int_l^s \int_0^\theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w^2) dy d\theta \right)' -$$

$$-\rho \ddot{u}_b (w' + (s-l)w'') - \frac{mw''}{2} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w'^2) ds = 0 \quad (1.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (EI_Y w'' w'^2 + EI_Y w''') \Big|_{s=l} = 0, \quad w''(l, t) = 0 \\ \left(m \ddot{u}_b w' - mw' \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w'^2}{2} \right) ds + EI_Y (w'''' w'^2 + w''^2 w' + w''''') - m \ddot{w} \right) \Big|_{s=l} = 0 \end{array} \right. \quad (1.56)$$

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0} = 0, \quad (1.57)$$

где E – модуль упругости; c_l – коэффициент демпфирования; I_Y – момент инерции; l – длина стержневого упругого элемента; s , t – координаты по длине упругого элемента и времени; $w(s, t)$ – прогиб упругого элемента; u_b – перемещение подвижного основания.

Приведённые выражения (1.55) – (1.57) предлагается решать, применяя дискретизацию Галёркина. Структура выражений (1.55) – (1.57) содержит производные 4-го порядка, что приводит к трудностям создания точной конечно-численной реализации. В статье предлагается аппроксимировать решение с помощью различных выражений, другие методы не применяются, вследствие чего затруднено масштабирование на случай двух и более сосредоточенных масс.

В [94] исследуется задача расчёта динамических характеристик стержневого упругого элемента переменного сечения с сосредоточенными массами, предлагаемый метод основан на нелинейной теории деформации Грина и модели Эйлера-Бернулли.

$$\rho A \int_0^L \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \bar{u} \frac{\partial w}{\partial t} - \Omega^2 \bar{u} u - \dot{\Omega} \bar{u} w \right) dx + EA \int_0^L \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + EA \int_0^L \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx +$$

$$+ m \left(\bar{u}(L) \frac{\partial^2 u(L)}{\partial t^2} - 2\Omega \bar{u}(L) \frac{\partial w(L)}{\partial t} - \Omega^2 \bar{u}(L) u(L) - \dot{\Omega} \bar{u}(L) w(L) \right) = \quad (1.58)$$

$$= \int_0^L \left[\rho A \Omega^2 (a+x) \right] \bar{u}(L) dx + m \Omega^2 (a+L) \bar{u}(L)$$

$$\rho A \int_0^L \left(\bar{w} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\Omega \bar{w} \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 \bar{w} w - \dot{\Omega} \bar{w} u \right) dx + EA \int_0^L \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx + EI \int_0^L \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx +$$

$$+ m \left(\bar{w}(L) \frac{\partial^2 w(L)}{\partial t^2} - 2\Omega \bar{w}(L) \frac{\partial u(L)}{\partial t} - \Omega^2 \bar{w}(L) w(L) - \dot{\Omega} \bar{w}(L) u(L) \right) = \quad (1.59)$$

$$= - \int_0^L \left[\rho A \dot{\Omega} (a+x) \right] \bar{w}(L) dx - m \dot{\Omega} (a+L) \bar{w}(L)$$

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N U_i(x) T_i^u(t), \quad w(x, t) = \sum_{i=1}^N W_i(x) T_i^w(t), \quad (1.60)$$

где ρ - плотность материала; A - площадь поперечного сечения; L - длина упругого элемента; w , u - вертикальный и горизонтальный прогиб; t - время; x - координата абсцисс; m - величина сосредоточенной массы; Ω - угловая скорость; E - модуль упругости; N - количество базисных функций; $U_i(x)$, $W_i(x)$ - базисные функции; $T_i^u(t)$, $T_i^w(t)$ - неизвестные обобщённые координатные функции, связанные со временем.

Приведённые выражения (1.58) – (1.60) предлагается решать с помощью метода Галёркина, алгоритм численной реализации в работе не приведён. Недостатком приведённых выражений является невозможность их применения на случай нескольких сосредоточенных масс, а также сложность конечно-численной реализации.

Таким образом, в результате обзора и анализа существующих научных работ по теме комплексного моделирования динамического изгибного деформиро-

вания стержневого упругого элемента амортизатора было выявлено отсутствие комплексной модели, учитывающей контактно-волновые явления в энергобалансе динамической системы, обладающей простотой численной реализации с учётом возможностей современных вычислительных средств, позволяющей инженеру создать масштабируемую методику с возможностью встраивания в комплекс проблемно-ориентированных программ.

2 Квазистатическое деформирование стержневых упругих элементов амортизаторов

В данной главе сформулирована и решена задача определения силовых характеристик упругих элементов амортизаторов в приложении к различным схемам их внешнего нагружения, рассматриваются случаи безперегибного изгибного деформирования упругих элементов. Под силовой характеристикой понимается зависимость амплитуды поперечного прогиба упругого элемента амортизатора от величины внешней нагрузки и схемы ее приложения. При моделировании использована классическая модель изгиба упругих элементов Эйлера-Бернулли [55, 96], для которой разработаны новые виды её численной реализации, использующие современные методы минимизации целевых функций, позволяющие уменьшать трудоёмкость решения соответствующих схемам внешнего нагружения упругих элементов задач Коши для систем дифференциальных уравнений.

В главе рассмотрена основная система уравнений, используемая при расчёте силовых характеристик упругих элементов амортизаторов, а также анализируются методы её численной реализации. Проводится сравнение получаемых результатов с результатами, использующими теорию Кирхгофа [37], метод эллиптических параметров Е.П. Попова [55] и метод конечных элементов, реализованный в программном комплексе SolidWorks Simulation.

Представлено решение задачи о нахождении времени первого останова (первый момент времени, когда скорость амортизируемого тела равна нулю) в квазистатической постановке.

2.1 Принятые гипотезы

Общий вид упругого стержневого геометрически неоднородного элемента амортизатора приведен на рисунке 2.1. При моделировании применяются гипотезы, соответствующие модели Эйлера-Бернулли [62], такие как:

1) материал элемента амортизатора линейно-упругий, т.е. подчиняется закону Гука;

2) поперечные нормальные сечения амортизатора, плоские до деформации, остаются нормальными и плоскими и в процессе деформации (гипотеза плоских сечений Бернулли);

3) размеры поперечных сечений амортизатора считаются малыми по сравнению с его продольным габаритом в начальном положении и с радиусами кривизны, возникающими в процессе его изгибного деформирования;

4) длина продольной нейтральной оси амортизатора в процессе его деформирования не изменяется;

5) различные статические эквивалентные локальные нагрузки вызывают в стержне (если не учитывать местные напряжения вблизи точки приложения нагрузки) одно и то же напряженно-деформированное состояние (принцип Сен-Венана [62]).

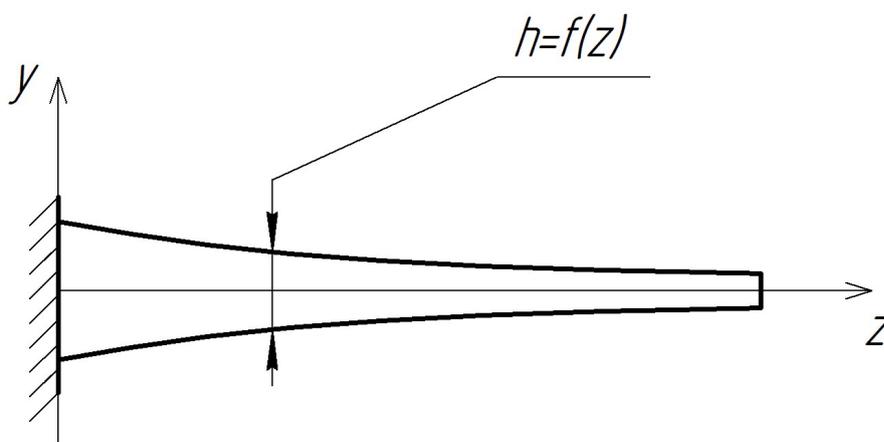


Рисунок 2.1 - Общий вид упругого элемента амортизатора

2.2 Основная система уравнений и начальные условия

Для случаев больших прогибов стержневых упругих элементов амортизатора существуют различные схемы приложения к ним сосредоточенных внешних сил. В данной работе анализируются четыре основные расчётные схемы приложения внешней нагрузки [15], изображённые на рисунке 2.2.

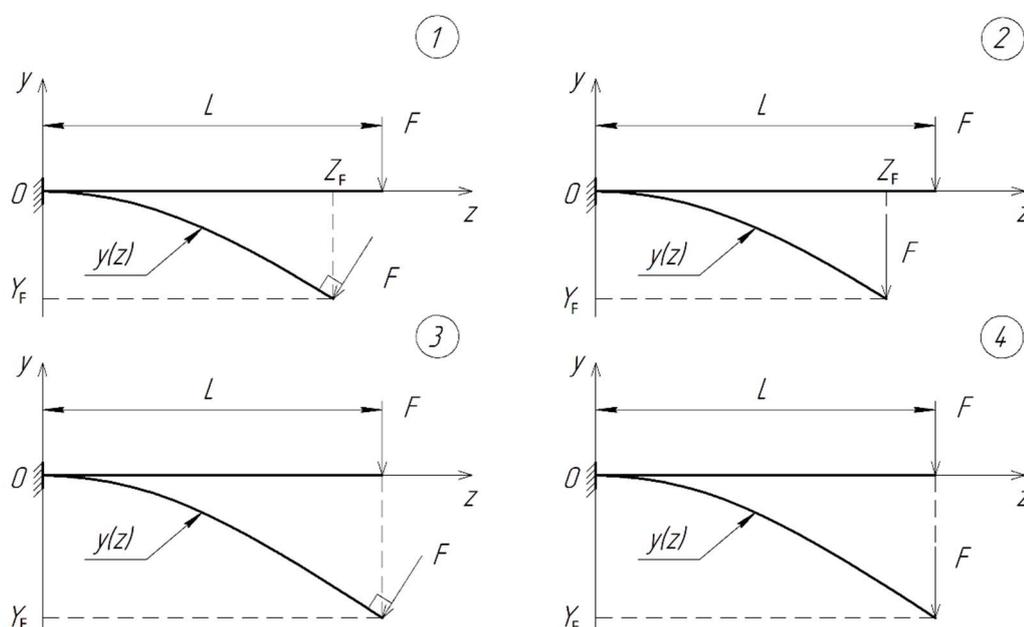


Рисунок 2.2 - Схемы приложения внешней нагрузки

1 - скользящая следящая; 2 – скользящая неследящая;

3 – скользящая следящая; 4 – скользящая неследящая

Уравнение изгиба стержней (2.1), известное из теории упругости, является результатом использования свойства о равенстве геометрической кривизны упругой линии и кривизны, полученной из уравнений теории упругости [72]. Оно является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка и устанавливает соответствие между значением изгибающего момента

$M_{изг}(z)$ и функцией $y(z)$, описывающей нейтральную линию изогнутого стержня:

$$\frac{\frac{d^2 y(z)}{dz^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_{изг}(z)}{E \cdot I_x(w(z))}, \quad (2.1)$$

где z – координата по оси абсцисс; $M_{изг}(z)$ – изгибающий момент от действия силы F (рисунок 2.3) в сечении с координатой z ; E – модуль упругости материала (модуль Юнга); $I_x(w(z))$ – осевой момент инерции сечения изогнутого элемента с горизонтальной координатой z ; $w(z)$ – длина упругого изогнутого элемента в точке с горизонтальной координатой z .

Изгибающий момент в произвольном сечении с координатой z , $z \in [0, L]$, зависит от схемы приложения внешней нагрузки и для схемы 1, приведенной на рисунке 2.2 (нескользящая следящая), вычисляется так:

$$M_{изг}(z) = F \cdot (Y_F - y(z)) \cdot \sin(\arctg(-C_F)) + F \cdot (z - Z_F) \cdot \cos(\arctg(-C_F)), \quad (2.2.1)$$

где F – величина внешней силы; Y_F – прогиб упругого элемента в точке приложения внешней силы, является априори неизвестной величиной, так как непосредственно связан с функцией $y(z)|_{z=Z_F}$, описывающей изогнутую нейтральную линию упругого элемента; Z_F – абсцисса свободного конца упругого элемента в точке приложения внешней силы в его изогнутом состоянии, она также изначально неизвестна, в случаях скользящих схем $Z_F = L$ в любой момент времени процесса; C_F – величина, соответствующая тангенсу текущего значения уг-

лаклонения вектора внешней силы в случае следящей схемы внешнего нагружения $\left. \frac{dy(z)}{dz} \right|_{z=Z_F} = C_F$ (третья неизвестная в уравнении (2.2.1)), в случаях не следящих схем нагружения величина C_F равна нулю по определению.

Уравнение (2.2.1) представлено в форме, соответствующей нескользящей следящей схеме нагружения, для иных схем нагружения уравнения изгибающих моментов будут выглядеть следующим образом (в уравнениях (2.2.1) – (2.2.4) последний индекс соответствует схеме нагружения на рисунке 2.2):

$$M_{uz2}(z) = F \cdot (z - Z_F), \quad (2.2.2)$$

$$M_{uz2}(z) = F \cdot (Y_F - y(z)) \cdot \sin(\arctg(-C_F)) + F \cdot (z - L) \cdot \cos(\arctg(-C_F)), \quad (2.2.3)$$

$$M_{uz2}(z) = F \cdot (z - L). \quad (2.2.4)$$

где L – расстояние от точки закрепления до точки нагружения в недеформированном состоянии стержневого упругого элемента.

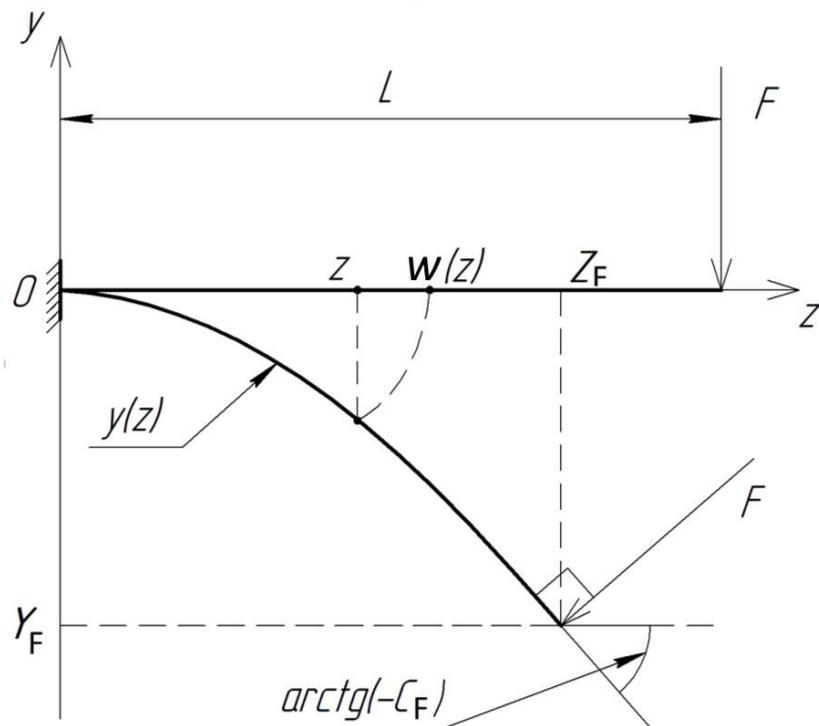


Рисунок 2.3 - Расчётная схема и принятые обозначения

В зависимости от схемы приложения внешней нагрузки (рисунок 2.2), величины Z_F и C_F (рисунок 2.3) могут принимать фиксированные значения, что в свою очередь изменит уравнение (рисунок 2.2). Проведенный анализ показал, что в рамках принятых к рассмотрению схем внешнего нагружения возможны следующие варианты:

1) Нескользкая следящая схема:

$$Y_F, Z_F, C_F - \text{константы, неизвестные априори};$$

2) Нескользкая неследящая схема:

$$Y_F, Z_F - \text{константы, неизвестные априори}; C_F = 0;$$

3) Скользящая следящая схема:

$$Y_F, C_F - \text{константы, неизвестные априори}; Z_F = L;$$

4) Скользящая неследящая схема:

$$Y_F - \text{константы, неизвестная априори}; Z_F = L; C_F = 0.$$

Как видно из расчётной схемы, изображённой на рисунке 2.3, верхние слои поперечных сечений изогнутого упругого элемента являются растянутыми, а нижние слои - сжатыми, что согласно принятым правилам [72] говорит о том, что знак изгибающего момента в правой части уравнения должен быть отрицательным. Из анализа уравнений (2.2.1) - (2.2.4) видно, что обе составляющие суммы, выражающей изгибающий момент, имеют отрицательное значение, поэтому результирующий изгибающий момент также получается отрицательным, что не противоречит принятому правилу знака моментов.

Осевой момент инерции I_x является зависимым от геометрических параметров поперечного сечения стержневого элемента. В инженерной практике априори задают зависимость параметров поперечного сечения от длины стержневого элемента в рассматриваемой точке, таким образом осевой момент инерции

является функционалом от функции длины элемента в точке с абсциссой z или $I_x(w(z))$.

При расчёте осевых моментов инерции $I_x(w(z))$ сечений изогнутого элемента с координатой z , необходимо предварительно вычислить длину упругого элемента левее точки с координатой z , для чего используется формула длины кривой [73] в произвольной точке $z = c$:

$$w(c) = \int_0^c \sqrt{1 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2} dz,$$

или записанное в рабочей – дифференциальной форме:

$$\frac{dw(z)}{dz} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2}, \quad (2.3)$$

где $w(z)$ - длина изогнутого упругого между точкой закрепления и точкой с координатой z .

Уравнение (2.3) позволяет связать значение абсциссы и длины изогнутого упругого элемента, после чего рассчитать осевой момент инерции в определенном сечении.

Начальные условия для задачи формируются, исходя из свойств консольно закрепленного упругого элемента в точке его закрепления: прогиб и изгиб отсутствуют; длина упругого элемента равна нулю:

$$y(0) = 0; \left. \frac{dy(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0; w(0) = 0. \quad (2.4)$$

Дифференциальные уравнения (2.1) - (2.3) образуют систему, для которой начальные условия (2.4) корректно формулируют задачу Коши.

Для удобства запишем моделирующую задачу полную систему уравнений:

$$\frac{\frac{d^2 y(z)}{dz^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_{uz\varrho}(z)}{E \cdot I_x(w(z))},$$

$$\frac{dw(z)}{dz} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2},$$

$$y(0) = 0; \left. \frac{dy(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0; w(0) = 0.$$

Для расчёта изгибающего момента $M_{uz\varrho}(z)$ необходимо априори знать прогиб Y_F , абсциссу Z_F и значение первой производной C_F в точке приложения нагрузки.

Таким образом, для решения задачи Коши недостаёт трёх априорных начальных условий одновременно являющихся и краевыми условиями.

Для определённого значения и направления нагрузки (при учёте безперегибной формы) существует один набор значений Y_F , Z_F , C_F позволяющих получить решение системы дифференциальных уравнений.

Проведенный анализ показал, что полный многомерный перебор всех вариантов Y_F , Z_F , C_F не позволяет решать задачу в рамках приемлемой трудоёмкости. Предлагается для уменьшения трудоёмкости решения применить численную минимизацию целевой функции, зависящей от значений набора Y_F , Z_F , C_F .

2.3 Численное решение основной системы уравнений

2.3.1 Численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Представленную в подразделе 2.2 систему уравнений (2.1) - (2.3) предлагается решать численно с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка с набором коэффициентов Дормана-Принса с адаптивным шагом [93].

Для решения исходной системы уравнений предварительно проводится понижение ее порядка [38]. В результате система (2.1) - (2.3) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{dy(z)}{dz} &= f_y(q) = q \\ \frac{dl}{dz} &= f_l(q) = \sqrt{1+q^2} \\ \frac{dq}{dz} &= f_q(z, y, q) = \frac{M_{узг}(z)}{E \cdot I_x(l)} \cdot \left(1+q^2\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

где q – первая производная функции $y(z)$ по z ; l – длина упругого элемента ;
 $f_y(\dots), f_l(\dots), f_q(\dots)$ – обозначение функций, записанные для удобства дальнейших вычислений.

Предлагается использовать реализацию метода Рунге-Кутты 4-го порядка с набором коэффициентов Дормана-Принса, представленную в языке программирования Matlab и модуле SciPy для языка программирования Python.

2.3.2 Решение методом минимизации целевой функции

Из анализа физической модели задачи и свойств формализующих ее дифференциальных уравнений следует, что система уравнений (2.1) – (2.3) применительно к анализируемой схеме консольного закрепления упругого элемента амортизатора имеет три инвариантных начальных условия (2.4):

$$y(0) = 0; \left. \frac{d y(z)}{d z} \right|_{z=0} = 0; w(0) = 0$$

то есть задача Коши является определенной, и она будет иметь единственное решение.

Проведенный анализ показывает, что в зависимости от варианта схемы приложения внешней нагрузки возможны ситуации, когда априори неизвестны величины Y_F , Z_F , C_F , входящие в структуру рабочих формул, описывающих численное решение задачи Коши (2.1) – (2.4). Решение задачи в таких условиях возможно только путем целенаправленного априорного варьирования численными значениями параметров Y_F , Z_F , C_F с последующим многократным решением вспомогательных задач Коши для каждой комбинации варьируемых констант до тех пор, пока будет найдено такое решение задачи в виде $y = y(z)$, которое в точке $z = Z_F$ для определённого значения внешней нагрузки даст параметры амплитудно изогнутого упругого элемента амортизатора в точке приложения внешней нагрузки, совпадающие с изначально использованной комбинацией их значений Y_F , Z_F , C_F .

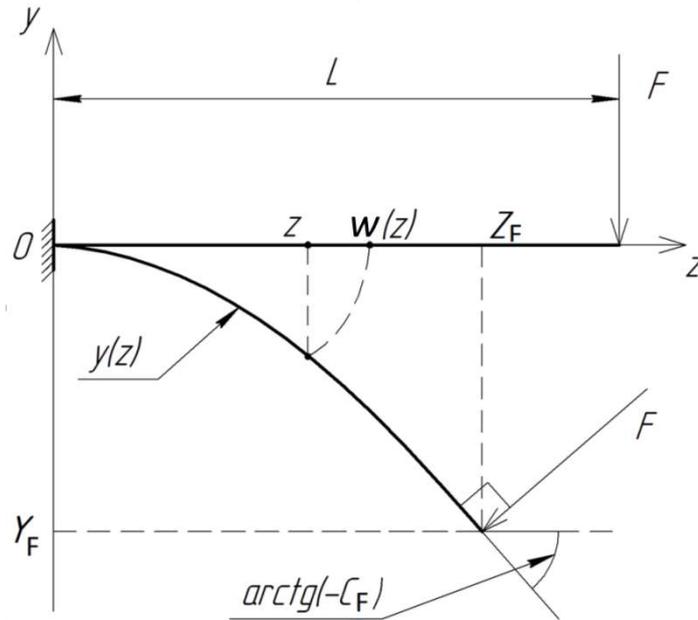


Рисунок 2.4 - Расчётная схема

Прямой перебор величин Y_F , Z_F , C_F и соответствующее ему многократное решение вспомогательных задач Коши требует значительных временных затрат. Для оптимизации процесса перебора величин Y_F , Z_F , C_F и, как следствие, для уменьшения трудоемкости реализации решаемой задачи предлагается формулировать специальные целевые функции и проводить решение вспомогательных задач Коши в рамках их минимизации.

Нескользящие схемы приложения внешней нагрузки отличаются от скользящих фиксированным расстоянием от точки крепления упругого элемента амортизатора до точки его нагружения, вследствие чего в структуру предлагаемых ниже целевых функций вводится элемент $\frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L}$.

Отличием следящей нагрузки от неследящей является непрерывная ортогональность вектора внешней нагрузки по отношению к касательной к изогнутой оси упругого элемента в точке ее приложения, в результате чего в структуру целевых функций входят элементы $|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|$ или $\frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{C_F}$.

В модели всех схем нагружения входит априори неизвестная величина прогиба $y(Z_F)$, влияние которой в дальнейшем предлагается оценивать с помощью безразмерных элементов $\frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{L}$ или $\frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|}$.

В предложенных компонентах целевых функций: $\tilde{y}(Z_F)$, $\tilde{y}'(Z_F)$, $\tilde{w}(Z_F)$ - значения прогиба, первой производной нейтральной линии и длины стержневого элемента в точке нагружения, полученные после решения системы дифференциальных уравнений (2.1) – (2.3) с заданными значениями Y_F , Z_F , C_F .

Таким образом, решение рассматриваемой задачи проводилось с помощью целевых функций различного вида:

1. Первый вид:

1.1 Для нескользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)| + |L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} + |C_F - \tilde{y}'(Z_F)|.$$

1.2 Для нескользящей неследящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)| + |L - \tilde{w}(Z_F)|}{L}.$$

1.3 Для скользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{L} + |C_F - \tilde{y}'(Z_F)|.$$

2. Второй вид:

2.1 Для нескользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|} + \frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} + \frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|} .$$

2.2 Для нескользящей неследящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|} + \frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} .$$

2.3 Для скользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|} + \frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|} .$$

3. Третий вид:

3.1 Для нескользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \exp\left(\frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|}\right) + \exp\left(\frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L}\right) + \exp\left(\frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|}\right) .$$

3.2 Для нескользящей неследящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F) = \exp\left(\frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|}\right) + \exp\left(\frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L}\right) .$$

3.3 Для скользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \exp\left(\frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|}\right) + \exp\left(\frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|}\right) .$$

4. Четвёртый вид:

4.1 Для нескользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \left(1 + \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|}\right) \left(1 + \frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L}\right) \left(1 + \frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|}\right).$$

4.2 Для нескользящей неследящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F) = \left(1 + \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|}\right) \left(1 + \frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L}\right).$$

4.3 Для скользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \left(1 + \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|}\right) \left(1 + \frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|}\right).$$

В представленных выше целевых функциях отсутствует элемент, содержащий абсциссу точки приложения внешней нагрузки Z_F , что связано с особенностями решения системы дифференциальных уравнений (2.1) – (2.3), а именно то, что система решается в заданном интервале по координате абсцисс от 0 до Z_F .

Для неследящей скользящей схемы нагружения абсцисса Z_F и угол наклона внешней нагрузки (нагрузка направлена вертикально) в процессе деформирования упругого элемента амортизатора априори детерминированы и остаются неизменными, следовательно в данном случае сформулированной выше система дифференциальных уравнений (2.1) – (2.3) решается стандартными численными методами.

Если для набора Y_F, Z_F, C_F значение целевой функции $f(\dots)$ меньше, чем 10^{-6} , то считаем, что найдено истинное решение системы дифференциальных уравнений и $y(Z_F) = \tilde{y}(Z_F)$, $y'(Z_F) = \tilde{y}'(Z_F)$, $w(Z_F) = \tilde{w}(Z_F)$.

С целью отбора наиболее точных целевых функций из предложенных вариантов, на базе разработанного и зарегистрированного авторского программного

комплекса [65] проведена серия расчётов. Результаты численного решения сформулированных выше задач в зависимости от схемы внешнего нагружения и величины внешней нагрузки представлены в таблице 2.1. Решение проводилось для упругого элемента из стали 60С2А с различными схемами приложения внешней нагрузки с начальным расстоянием от точки нагружения до точки крепления $L = 0,4$ м, с прямоугольным сечением упругого элемента шириной $b = 0,02$ м и переменной толщиной, изменяющейся по линейному закону $h = -0,005 \cdot w + h_0$, где $h_0 = 0,01$ м, модуль упругости $E = 212 \cdot 10^9$ МПа.

Анализ результатов решения (таблица 2.1) показывает, что целевые функции третьего вида дают в результате минимизации неверные решения и использование данного вида целевых функций для решения задачи нецелесообразно.

Для численной минимизации применялись методы, используемые в расчётах для таблицы 2.2, в таблице 2.1 отображены наиболее точные результаты.

Таблица 2.1 - Сравнительный анализ эффективности использования различных вариантов целевых функций

Схема нагружения	Величина нагружения, Н	Вид целевой функции	Итерации подбора	Значение целевой функции	Рассчитанные значения, м				Разности параметров		
					Y_F	C_F	Z_F	L	$\tilde{y}(Z_F) - Y_F$	$\tilde{y}'(Z_F) - C_F$	$\tilde{w}(Z_F) - L$
1	2000	1	118	0	- 0,1264	-	0,3743	-	0	-	0
1	2000	2	116	0	- 0,1264	-	0,3743	-	0	-	0
1	2000	3	16	0,9068	- 0,0032	-	0,4	-	0	-	0,039
1	2000	4	15	1,00067	- 0,1266	-	0,3745	-	$7,63 \times 10^{-13}$	-	- 0,00027
2	2000	1	219	$5,21 \times 10^{-16}$	- 0,1353	- 0,625	0,3701	-	- $2,77 \times 10^{-17}$	- $1,11 \times 10^{-16}$	- $5,55 \times 10^{-17}$
2	2000	2	211	$5,21 \times 10^{-16}$	- 0,1353	- 0,625	0,3701	-	- $2,77 \times 10^{-17}$	- $1,11 \times 10^{-16}$	- $5,55 \times 10^{-17}$
2	2000	3	39	0,9070	- 0,0044	- 0,002	0,3999	-	0,1576	0,6937	0,03902
2	2000	4	40	1,00207	- 0,1356	- 0,626	0,3701	-	- 0,0002	- 0,0003	- $1,87 \times 10^{-5}$
3	2000	1	138	$1,86 \times 10^{-16}$	- 0,3410	- 2,404	-	0,5629	- $5,51 \times 10^{-17}$	$4,44 \times 10^{-16}$	-
3	2000	2	114	$1,84 \times 10^{-16}$	- 0,3410	- 2,404	-	0,5629	0	$4,44 \times 10^{-16}$	-
3	2000	3	41	0	- $5,2 \times 10^{-5}$	- 2,902	-	0,4390	0,1620	0,6965	-
3	2000	4	15	1,00063	- 0,3413	- 2,411	-	0,5634	0,0002	$1,31 \times 10^{-8}$	-
1	1000	1	105	$1,73 \times 10^{-15}$	- 0,0688	-	0,3926	-	- $1,38 \times 10^{-17}$	-	$5,51 \times 10^{-17}$
1	1000	2	116	$3,40 \times 10^{-16}$	- 0,0688	-	0,3926	-	- $1,38 \times 10^{-17}$	-	$5,51 \times 10^{-17}$
1	1000	3	13	0,9799	- 0,0052	-	0,3998	-	0,0678	-	0,00809
1	1000	4	17	1,0007	- 0,0690	-	0,3928	-	- $4,44 \times 10^{-9}$	-	0,00031
2	1000	1	154	$1,27 \times 10^{-15}$	- 0,0702	- 0,289	0,3922	-	- $5,51 \times 10^{-17}$	- $7,21 \times 10^{-16}$	- $1,66 \times 10^{-16}$
2	1000	2	199	$2,05 \times 10^{-15}$	- 0,0702	- 0,289	0,3922	-	- $1,27 \times 10^{-17}$	- $5,55 \times 10^{-17}$	- $6,66 \times 10^{-16}$
2	1000	3	36	0,9796	- 0,0047	- 0,003	0,4	-	0,0684	0,2923	- 0,008
2	1000	4	32	1,0043	- 0,0701	- 0,289	0,3918	-	- 0,0001	- 0,0005	- 0,0004
3	1000	1	152	$1,46 \times 10^{-15}$	- 0,0751	- 0,304	-	0,4086	0	$1,94 \times 10^{-15}$	-
3	1000	2	102	$6,37 \times 10^{-15}$	- 0,0751	- 0,304	-	0,4086	0	$1,94 \times 10^{-15}$	-
3	1000	3	37	0	- $8,55 \times 10^{-5}$	- 3×10^{-4}	-	0,4082	0,0731	0,2955	-
3	1000	4	23	1,0007	- 0,0751	- 0,305	-	0,4086	- $8,38 \times 10^{-6}$	- 0,0002	-

В программном комплексе [65] были использованы целевые функции первого и второго вида. Целевые функции первого вида приняты основными, но в случае большого значения целевых функций, автоматически используется второй вид целевой функции.

Используемый численный метод решения систем дифференциальных уравнений [92] предполагает адаптационную корректировку шага в зависимости от локальной ошибки.

Для численного решения задачи минимизации целевой функции можно использовать метод прямого перебора, однако данный метод крайне трудоёмок и неэффективен.

Были проанализированы и апробированы различные методы численной оптимизации процессов минимизации нелинейных функций.

В решении задач минимизации целевых функций хорошо зарекомендовали себя методы нелинейного программирования, основанные на частичной линеаризации нелинейных функций и последующем решении данной задачи с помощью методов «внутренней точки». Также были проанализированы и другие методы глобальной минимизации, реализованные с использованием языка программирования Python.

Реализация методов проводилась в системе Matlab и пакете SciPy для языка программирования Python.

В системе Matlab метод «внутренней точки» [25], [87] реализован в пакете Optimization toolbox («interior point algorithm»). В процессе решений с помощью этого алгоритма проведена оценка их трудоёмкостей в сопоставлении со значениями целевых функций (таблица 2.2).

Метод «Trust-region» из пакета SciPy для языка программирования Python. Программная реализация метода представлена в модуле `scipy.optimize.minimize` для параметра `method = 'trust-constr'` [88]. Результаты применения данного метода также иллюстрирует таблица 2.2.

Была проведена апробация метода «SHGO» («simplicial homology global optimization») для глобальной минимизации целевой функции с границами для аргументов [95]. Программная реализация метода представлена в пакете SciPy (Python) в модуле `scipy.optimize.shgo`, результаты применения данного метода продемонстрированы в таблице 2.2.

Рассматривался вариант применения алгоритма «Differential evolution» («DE») [90], [112]. Программная реализация метода представлена в пакете SciPy (Python) в модуле `scipy.optimize.differential_evolution` и позволяет находить глобальный минимум функций для определённой области определения. Результаты применения метода «Differential evolution» представлены в таблице 2.2. Отметим, что применение алгоритмов «SHGO» и «Differential evolution», в отличие от методов «внутренней точки», не требует введения начального значения аргументов для оптимизации.

В таблице 2.2: IP – метод «внутренней точки», реализации Matlab; trust-constr – алгоритм «внутренней точки», реализации Python; SHGO–алгоритм «simplicial homology global optimization», реализации Python; DE–алгоритм «Differential evolution», реализации Python. Приведены результаты расчетов для стержневого упругого элемента, нагруженного по скользящей схеме. Вновь рассматривались прямоугольные поперечные сечения постоянной ширины $b = 0,01$ м и переменной высоты h , изменяющейся по линейному закону $h = -0,01 \cdot w + h_0$ (м), где $h_0 = 0,05$ м. Модуль упругости материала стержня $E = 212 \cdot 10^9$ Па.

В результате сравнения результатов расчётов, представленных в таблице 2.2, исходя из критерия минимального значения целевой функции, в качестве основного метода минимизации был выбран метод «Differential evolution» (DE).

Таблица 2.2 - Сравнение методов минимизации

Метод	Величина нагрузки, Н	Вид целевой функции	Начальная точка, x_0	Значение целевой функции	Трудоёмкость, с	Z_F, Y_F, C_F
IP	10^2	1	(0,4 ; 0 ; 0)	$2,9994 \cdot 10^{-5}$	1,337	$3,9998 \cdot 10^{-1}; -1,028 \cdot 10^{-4}; -3,93735 \cdot 10^{-4}$
trust-constr	10^2	1	(0,4 ; 0 ; 0)	0,0001574	0,308	$3,9993 \cdot 10^{-1}; -1,027 \cdot 10^{-4}; -3,93698 \cdot 10^{-5}$
SHGO	10^2	1	-	$1,4401 \cdot 10^{-8}$	0,230	$3,9999 \cdot 10^{-1}; -1,028 \cdot 10^{-5}; -3,93834 \cdot 10^{-4}$
DE	10^2	1	-	$1,5285 \cdot 10^{-15}$	2,5335	$3,9999 \cdot 10^{-1}; -1,028 \cdot 10^{-5}; -3,93831 \cdot 10^{-4}$
IP	10^3	1	(0,4 ; 0 ; 0)	$9,9091 \cdot 10^{-4}$	1,324	0,39960; -0,00102; -0,003929
trust-constr	10^3	1	(0,4 ; 0 ; 0)	0,000796	1,118	0,39967; -0,00102; -0,003931
SHGO	10^3	1	-	$4,0056 \cdot 10^{-8}$	0,268	0,39999; -0,00102; -0,003937
DE	10^3	1	-	$1,1546 \cdot 10^{-16}$	2,591	0,39999; -0,00102; -0,003937
IP	10^4	1	(0,4 ; 0 ; 0)	$2,0819 \cdot 10^{-6}$	1,748	0,39983; -0,01027; -0,039397
trust-constr	10^4	1	(0,4 ; 0 ; 0)	0,00954	6,408	0,39714; -0,01038; -0,03684
SHGO	10^4	1	-	$1,8601 \cdot 10^{-8}$	0,336	0,39983; -0,01027; -0,03939
DE	10^4	1	-	$2,2178 \cdot 10^{-15}$	2,817	0,39983; -0,10033; -0,03939
IP	10^5	1	(0,4 ; 0 ; 0)	$6,0752 \cdot 10^{-8}$	2,119	0,38433; -0,10035; -0,41292
trust-constr	10^5	1	(0,4 ; 0 ; 0)	0,05226	2,338	0,36714; -0,08555; -0,36566
SHGO	10^5	1	-	$1,67692 \cdot 10^{-8}$	0,359	0,38432; -0,10035; -0,41297
DE	10^5	1	-	$1,4155 \cdot 10^{-14}$	3,776	0,38432; -0,10035; -0,41297
IP	$4 \cdot 10^5$	1	(0,4 ; 0 ; 0)	0,0239	4,254	0,22313; -0,27779; -5,5423
trust-constr	$4 \cdot 10^5$	1	(0,4 ; 0 ; 0)	0,69061	7,049	0,29386; -0,05460; -0,6239
SHGO	$4 \cdot 10^5$	2	-	0,00019	18,16	0,21502; -0,29028; -8,4776
DE	$4 \cdot 10^5$	2	-	$1,15279 \cdot 10^{-14}$	18,18	0,21496; -0,29038; -8,5140

2.4 Сравнение результатов различных методов расчёта

Проведем сравнение [42] полученных с помощью предложенных алгоритмов результатов численного анализа, с соответствующими результатами, полученными с помощью метода эллиптических параметров [55], теории Кирхгофа [37] и метода конечных элементов, реализованных в расчётной автоматизированной с системе SolidWorks Simulation [105]. Расчёт проведём для стержней, аналогичных рассматривавшимся выше (таблица 2.2), но с постоянным поперечным сечением шириной b и высотой h .

Из результатов расчётов, представленных в таблице 2.3, следует, что разработанный в данной работе метод имеет качественно различные отклонения по отношению к методу эллиптических параметров и методу Кирхгофа, причем величины этих отклонений зависят от величины внешней нагрузки. Но в целом сравнение полученных результатов говорит о высокой точности предложенного метода при его значительном преимуществе, заключающемся в возможности расчёта без использования сложных эллиптических интегралов. Преимуществом предложенного метода является возможность его применения к расчёту изгиба для геометрически неоднородных стержней, результаты такого расчёта представлены на рисунках 2.5 и 2.6.

Следует отметить, что метод эллиптических параметров описывает нагруженное состояние упругих элементов с большой точностью. К недостаткам метода можно отнести наличие больших погрешностей при малых значениях нагрузки, вызывающих малые прогибы упругих элементов, что, как видно из расчётов, приводит к результатам, выходящим за физические границы упругого изгибного деформирования для нескользящей следящей схемы нагружения, а именно, к получению величины абсциссы точки нагружения большей, чем длина упругого элемента.

Результаты расчёта показывают, что метод Кирхгофа обладает высокой точностью при малых значениях нагрузки и прогибов упругого элемента. Но результатов расчётов видно, что при значительных прогибах метод Кирхгофа обладает низкой точностью и его результаты расчетов значительно расходятся с соответствующими результатами по предложенным методам и методу эллиптических параметров.

Таблица 2.3 - Сравнение методов расчёта

Величина нагрузки, Н	Координаты точки нагружения, Z_F и Y_F		
	предложенный метод	метод эллиптических параметров	теория Кирхгофа
$b = 0,01 \text{ м} ; h = 0,05 \text{ м}$			
$5 \cdot 10^4$	0,39651; -0,04805	0,39625; -0,04759	0,39658; -0,04759
$10 \cdot 10^4$	0,38625; -0,09464	0,38645; -0,09469	0,38724; -0,09138
$20 \cdot 10^4$	0,34795; -0,17827	0,34790; -0,17828	0,35898; -0,16048
$25 \cdot 10^4$	0,32185; -0,21334	0,32182; -0,21337	0,34358; -0,18605
$b = 0,02 \text{ м} ; h = 0,01 \text{ м}$			
10^3	0,39457; -0,05989	0,39586; -0,06011	0,39473; -0,05902
$1,5 \cdot 10^3$	0,38789; -0,08894	0,38808; -0,08790	0,38866; -0,08621
$2 \cdot 10^3$	0,37875; -0,11696	0,37935; -0,01173	0,38097; -0,11107
$2,5 \cdot 10^3$	0,36733; -0,14364	0,36680; -0,14326	0,37220; -0,13340
$b = 0,01 \text{ м} ; h = 0,01 \text{ м}$			
$0,5 \cdot 10^3$	0,39457; -0,05989	0,39586; -0,06011	0,39473; -0,05902
10^3	0,37875; -0,11696	0,37935; -0,11731	0,38097; -0,11107
$1,5 \cdot 10^3$	0,35386; -0,16873	0,35406; -0,16892	0,36282; -0,15321
$2 \cdot 10^3$	0,32185; -0,21334	0,32182; -0,21337	0,34357; -0,18605
$b = 0,05 \text{ м} ; h = 0,01 \text{ м}$			
10^3	0,39912; -0,02411	0,40462; -0,02772	0,39913; -0,02406
10^4	0,32185; -0,21334	0,32182; -0,21337	0,34357; -0,18606
$1,5 \cdot 10^4$	0,24561; -0,27752	0,24558; -0,27755	0,30796; -0,23121
$1,6 \cdot 10^4$	0,22963; -0,28629	0,22962; -0,28633	0,30160; -0,23789
$b = 0,05 \text{ м} ; h = 0,05 \text{ м}$			
10^4	0,39999; -0,00193	0,41148; -0,00859	0,39999; -0,00193
10^5	0,39944; -0,01930	0,40625; -0,02249	0,39944; -0,01927
$5 \cdot 10^5$	0,38625; -0,09464	0,38642; -0,09469	0,38724; -0,09138
10^6	0,34795; -0,17827	0,34790; -0,17828	0,35898; -0,16048

В таблице 2.4 представлены результаты расчётов координат точек нагружения, сделанных с использованием предложенного метода и метода конечных элементов, реализованного в системе автоматических расчётов SolidWorks Simulation. Для анализа результатов расчётов в таблице приведена относительная разность результатов, рассчитываемая по выражению:

$$\delta = \frac{\sqrt{(Y_F^{n.m} - Y_F^{МКЭ})^2 + (Z_F^{n.m} - Z_F^{МКЭ})^2}}{\sqrt{(Y_F^{МКЭ})^2 + (Z_F^{МКЭ})^2}} \times 100 \%,$$

где $Y_F^{n.m}$, $Z_F^{n.m}$ - ордината и абсцисса точки нагружения, рассчитанные с помощью предложенного метода; $Y_F^{МКЭ}$, $Z_F^{МКЭ}$ - ордината и абсцисса точки нагружения, рассчитанные с помощью метода конечных элементов.

Таблица 2.4 – Результаты расчётов

Величина нагрузки, Н	Координаты точки нагружения, Z_F и Y_F		
	предложенный метод	метод конечных элементов	относительная разность δ , %
$b = 0,01 \text{ м} ; h = 0,05 \text{ м}$			
$5 \cdot 10^4$	0,39651; -0,04805	0,39545; -0,04875	0,31
$10 \cdot 10^4$	0,38625; -0,09464	0,39015; -0,09750	1,20
$20 \cdot 10^4$	0,34795; -0,17827	0,34924; -0,19013	3,00
$25 \cdot 10^4$	0,32185; -0,21334	0,32593; -0,24372	7,52
$b = 0,02 \text{ м} ; h = 0,01 \text{ м}$			
10^3	0,39457; -0,05989	0,39888; -0,05946	1,07
$1,5 \cdot 10^3$	0,38789; -0,08894	0,39432; -0,08919	1,59
$2 \cdot 10^3$	0,37875; -0,11696	0,38683; -0,11893	2,05
$2,5 \cdot 10^3$	0,36733; -0,14364	0,37825; -0,14864	3,00
$b = 0,01 \text{ м} ; h = 0,01 \text{ м}$			
$0,5 \cdot 10^3$	0,39457; -0,05989	0,39716; -0,05918	0,66
10^3	0,37875; -0,11696	0,38241; -0,11837	0,97
$1,5 \cdot 10^3$	0,35386; -0,16873	0,36029; -0,17755	2,71
$2 \cdot 10^3$	0,32185; -0,21334	0,33187; -0,23674	6,24

Максимальная полученная относительная разность (таблица 2.4) равна 7,52 % , что не превышает инженерной погрешности. Анализируя получен-

ные результаты, можно сделать вывод о корректности предложенного метода.

На рисунках 2.5 и 2.6 представлены результаты расчётов, где L – начальная длина элемента (горизонтальное плечо нагружения); b , h – ширина и высота прямоугольного сечения у основания; E – модуль упругости; F – величина нагружения; A – коэффициент в уравнении $h = A \cdot w + h_0$ изменяющейся высоты прямоугольного сечения.

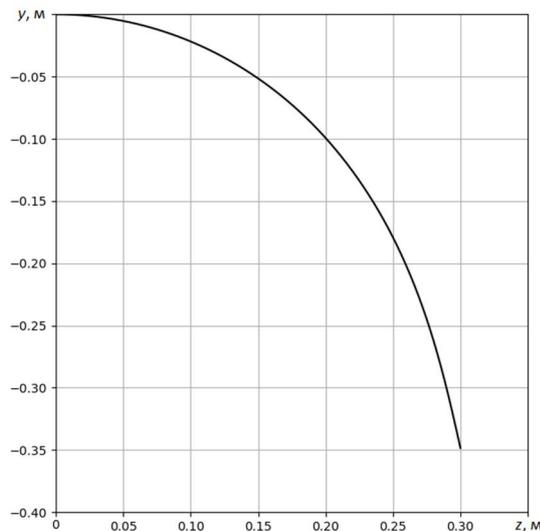


Рисунок 2.5 - Прогиб упругого элемента с параметрами:
 $L = 0,3$ м , $b = 0,05$ м , $h_0 = 0,02$ м , $A = - 0,02$, $E = 212 \cdot 10^9$ Па,
нагруженного по скользящей неследящей схеме силой $F = 100$ кН

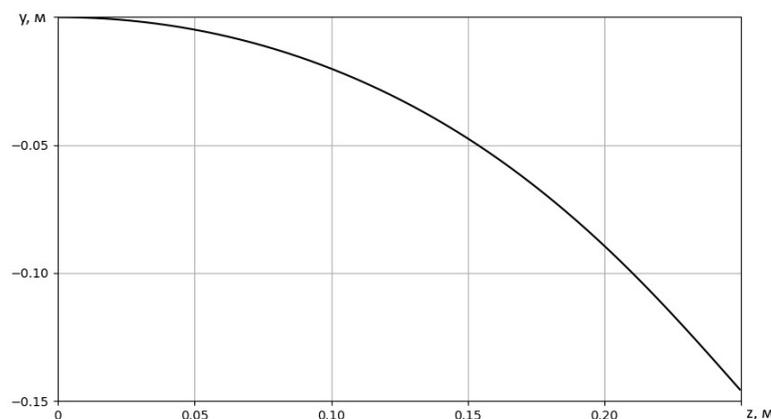


Рисунок 2.6 - Прогиб упругого элемента с параметрами:
 $L = 0,3$ м , $b = 0,05$ м , $h_0 = 0,02$ м , $A = - 0,02$, $E = 212 \cdot 10^9$ Па,
нагруженного по нескользящей следящей схеме силой $F = 100$ кН

2.5 Построение силовых характеристик

Предложенная в разделе 2.3 схема численного решения основной системы уравнений (2.1) – (2.3) [15, 42], позволяет получить значения Y_F , Z_F , C_F для определённых значений внешней нагрузки F . В результате, итерируя значения нагрузки F , получаем силовую характеристику для:

$$F = \{0, \dots, N_F \cdot F_{step}\},$$

где F – значение итерируемой нагрузки; N_F - количество итераций; F_{step} - величина шага одной итерации.

Силовая характеристика представляет из себя множество значений итерируемой нагрузки F и соответствующие им значения координаты Z_F , Y_F точки нагружения. Полученный массив значений может быть использован в процессе анализа изгибного деформирования упругого элемента амортизатора, пример расчёта силовой характеристики представлен на рисунках 2.7 – 2.9.

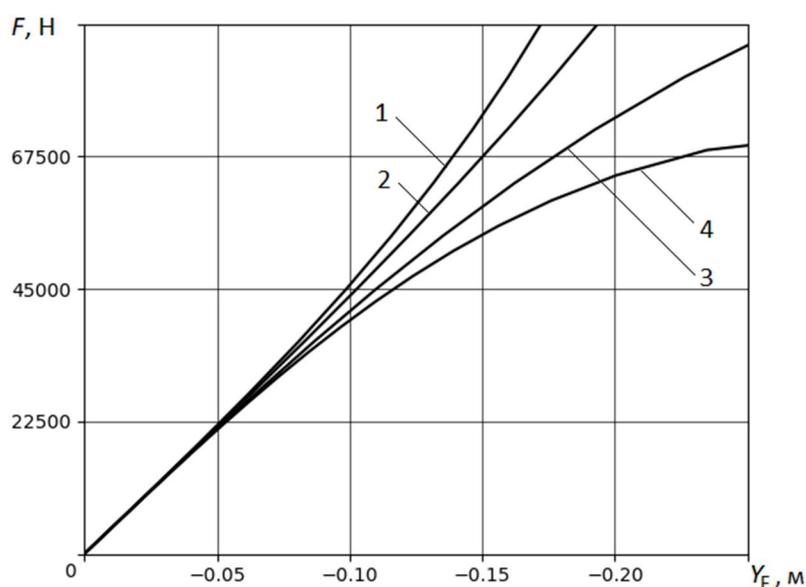


Рисунок 2.7 - Силовая характеристика для элемента:
 $A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $h_0 = 0,02$ м, $L = 0,4$ м

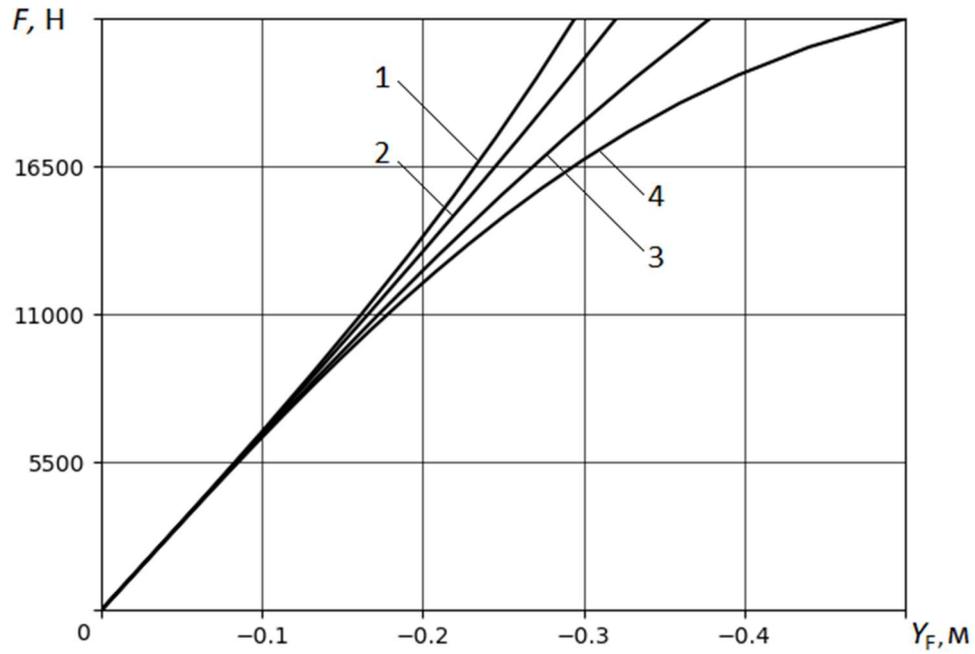


Рисунок 2.8 - Силовая характеристика для элемента:
 $A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $h_0 = 0,02$ м, $L = 0,8$ м

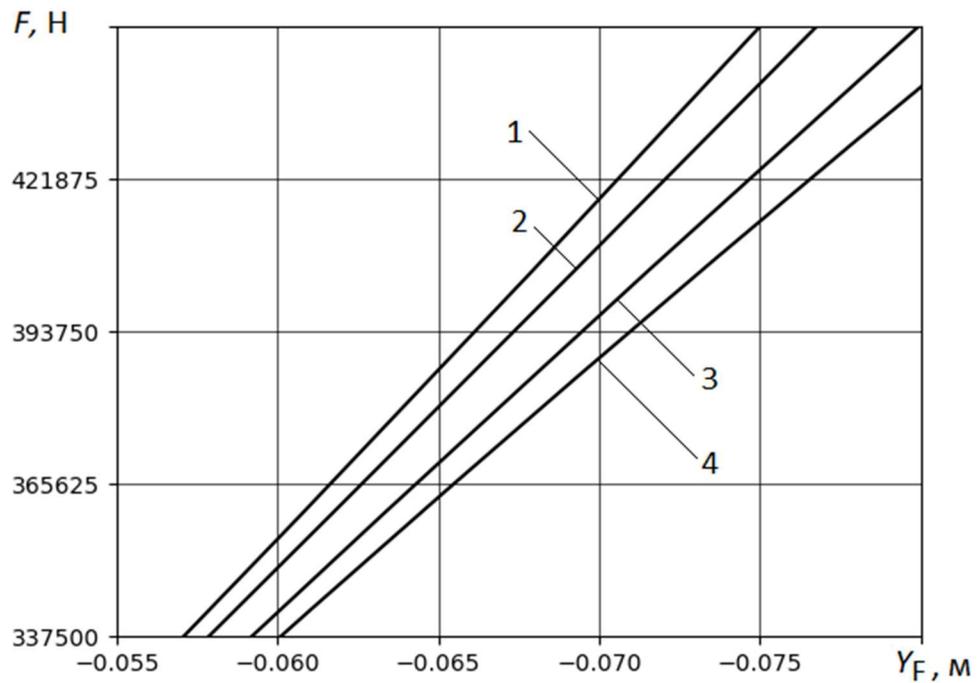


Рисунок 2.9 - Участок силовой характеристики для элемента:
 $A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $h_0 = 0,05$ м, $L = 0,4$ м

На рисунках 2.7 - 2.9 цифрами обозначены варианты схем внешнего нагружения: 1 – нескользящая неследящая; 2 – нескользящая следящая; 3 – скользящая неследящая; 4 – скользящая следящая. Обозначения на рисунках

2.7 - 2.9 аналогичны обозначениям на рисунках 2.5 и 2.6. Высота сечения описывается выражением $h = A \cdot w + h_0$.

Полученные с помощью программного комплекса [65] силовые характеристики (рисунки 2.7 - 2.9) позволяют производить сравнительный качественный и количественный анализ последствий внешнего нагружения упругих элементов по различным схемам.

Анализ расчётов показывает, что наиболее быстро нагрузка относительно прогиба возрастает в случае использования несскользящей неследящей схемы нагружения, медленнее всего нагрузка увеличивается в случае использования скользящей следящей схемы нагружения.

Использование графиков, подобных представленным на рисунках 2.7 и 2.9, позволяет инженеру на этапе проектного проектирования определять требуемую схему нагружения в зависимости от допустимого прогиба упругого элемента, а также решать обратную задачу, что значительно упрощает процесс проектирования устройств на основе стержневых упругих элементов.

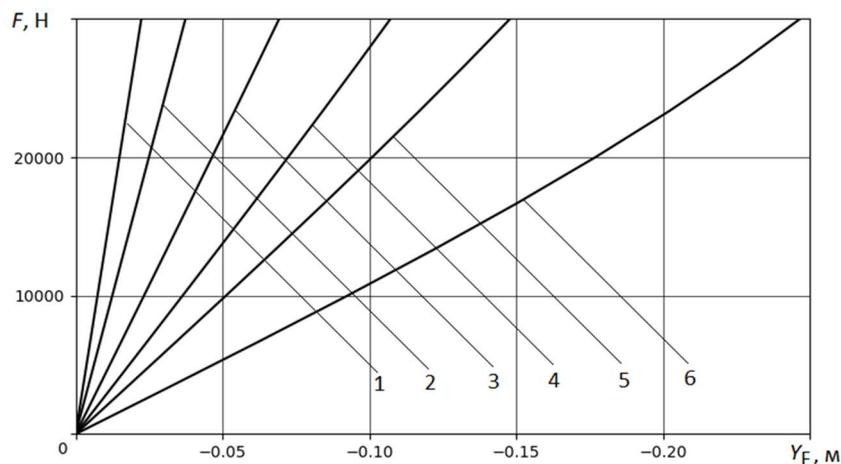


Рисунок 2.10 - Силовая характеристика для следящей несскользящей схемы для элементов:

$$A = 0,02, b = 0,05 \text{ м}, L = 0,4 \text{ м} \text{ и переменным } h_0:$$

1 – 0,03 м; 2 – 0,025 м; 3 – 0,02 м; 4 – 0,017 м; 5 – 0,015 м; 6 – 0,012 м

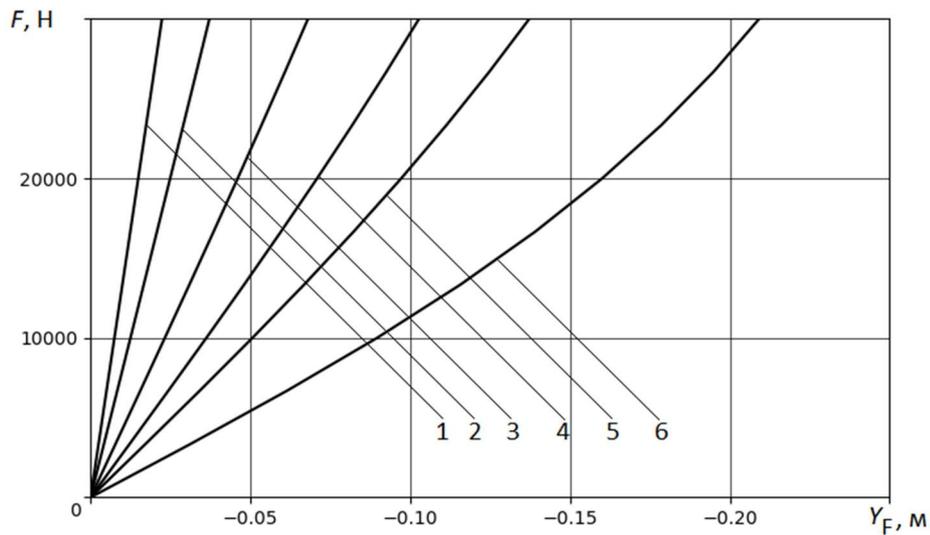


Рисунок 2.11 - Силовая характеристика для неследящей нескользящей схемы
для элементов:

$A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $L = 0,4$ м и переменным h_0 :

1 – 0,03 м; 2 – 0,025 м; 3 – 0,02 м; 4 – 0,017 м; 5 – 0,015 м; 6 – 0,012 м

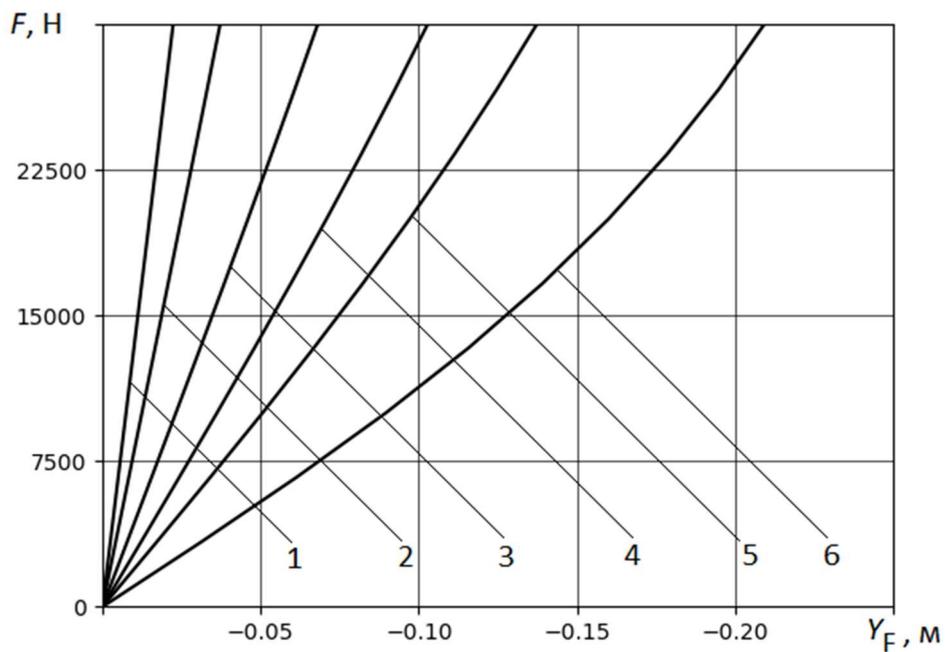


Рисунок 2.12 - Силовая характеристика для неследящей нескользящей схемы
для элементов:

$A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $L = 0,4$ м и переменным h_0 :

1 – 0,03 м; 2 – 0,025 м; 3 – 0,02 м; 4 – 0,017 м; 5 – 0,015 м; 6 – 0,012 м

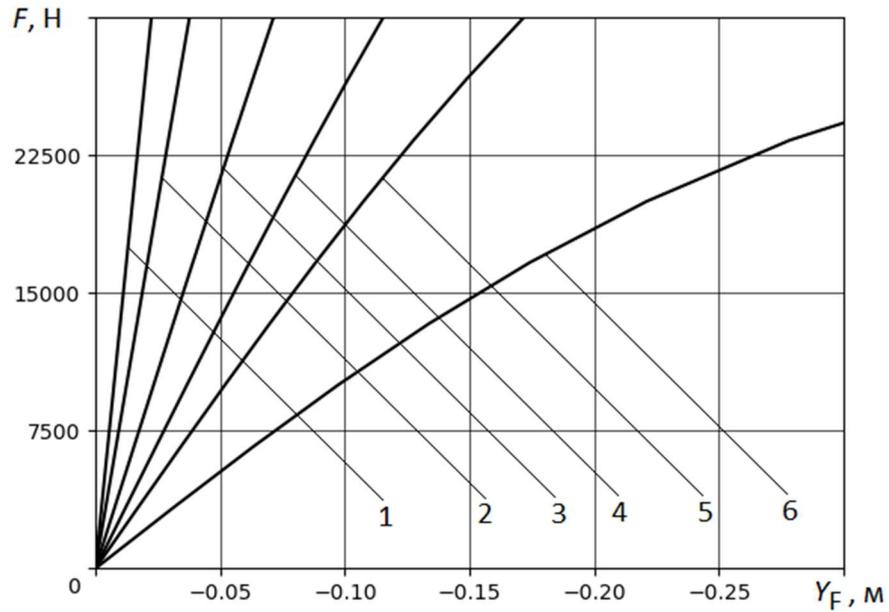


Рисунок 2.13 - Силовая характеристика для неследящей скользящей схемы
для элементов:

$A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $L = 0,4$ м и переменным h_0 :

1 – 0,03 м; 2 – 0,025 м; 3 – 0,02 м; 4 – 0,017 м; 5 – 0,015 м; 6 – 0,012 м

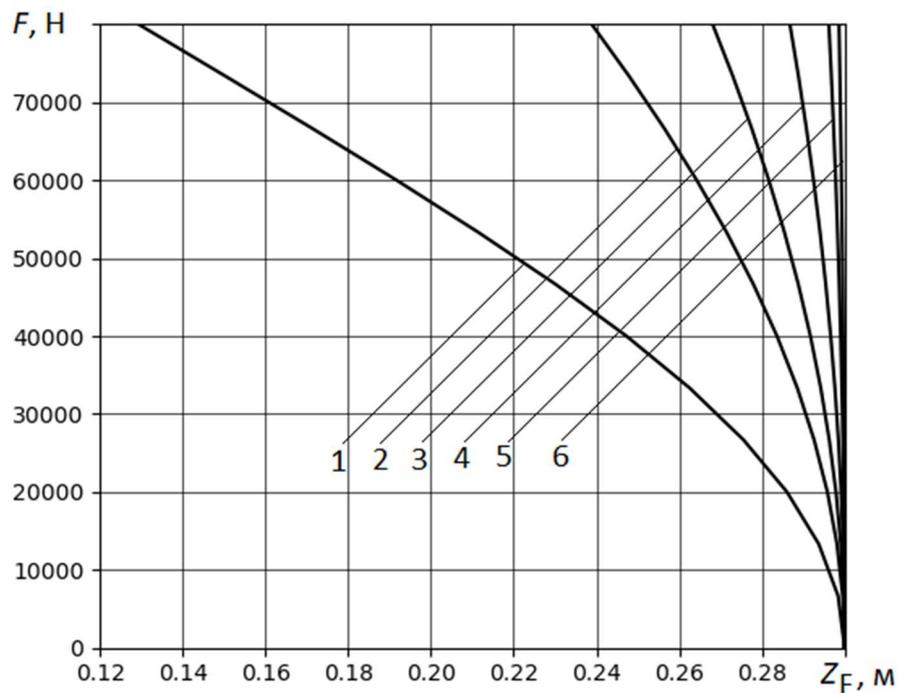


Рисунок 2.14 - Силовая характеристика для неследящей скользящей схемы
для элементов:

$A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $L = 0,4$ м и переменным h_0 :

1 – 0,03 м; 2 – 0,025 м; 3 – 0,02 м; 4 – 0,017 м; 5 – 0,015 м; 6 – 0,012 м

На рисунках 2.10 – 2.14 изображены силовые характеристики для различных схем нагружения и площадей сечения упругих элементов. Из анализа графиков следует, что с увеличением высоты поперечного сечения уменьшается влияние скорости возрастания нагрузки на изгибные прогибы упругих элементов.

Варьируя площади поперечного сечения и длины элементов, можно получить широкий спектр силовых характеристик, что позволяет инженеру производить предварительный ориентировочный выбор подлежащих определению в рамках выполняемого задания конструктивных параметров упругого элемента, а затем переходить к более точным и трудоёмким расчётам для нахождения их оптимальных значений.

2.6 Потенциальная энергия стержневых упругих элементов

Получаемые в рамках квазистатической модели силовые характеристики упругих элементов амортизаторов позволяют в процессе их нагружения и деформирования параллельно оценивать накапливаемую ими потенциальную энергию по следующему выражению [14, 39]:

$$E_a = \int_0^R F_r dr , \quad (2.5)$$

где F_r - модуль проекции вектора нагрузки на вектор перемещения \vec{r} ; r – модуль вектора перемещения; R - перемещение точки приложения внешней нагрузки, соответствующее максимальной, заданной в данном расчёте нагрузке; F_{\max} - предельная величина нагрузки до которой в данном случае проводится расчёт.

Выражение (2.5) в рабочем виде выглядит следующим образом:

$$E_a = \int_0^{Y_F} F_y dy + \int_0^{Z_F} F_z dz, \quad (2.6)$$

где Y_F, Z_F – ордината и абсцисса точки нагружения, соответствующая максимальной нагрузке; F_y, F_z – проекции нагрузки F на соответствующие индексам оси; y и z – текущие значения ординаты и абсциссы точки нагружения в процессе деформирования.

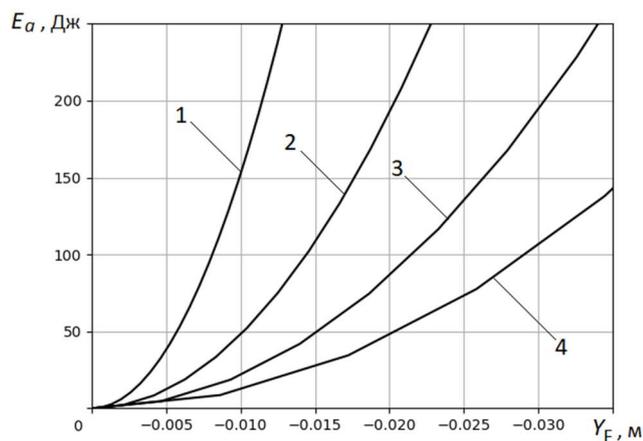


Рисунок 2.15 - Потенциальная энергия для элементов следящей нескользящей схемы нагружения от координаты Y_F :
 $A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $h_0 = 0,02$ м и переменным L :
 1 – 0,2 м; 2 – 0,3 м; 3 – 0,4 м; 4 – 0,5 м

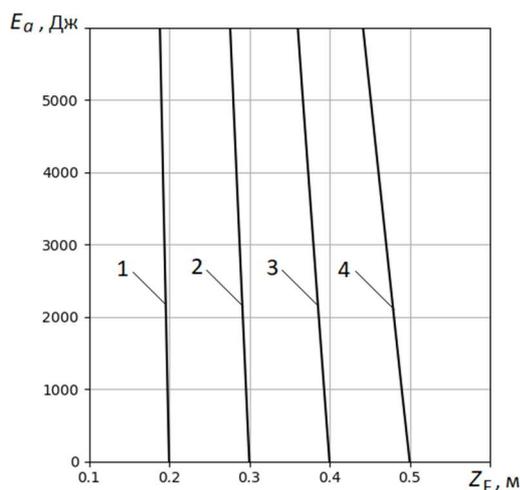


Рисунок 2.16 - Потенциальная энергия для элементов следящей нескользящей схемы нагружения от координаты Z_F :
 $A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $h_0 = 0,02$ м и переменным L :
 1 – 0,2 м; 2 – 0,3 м; 3 – 0,4 м; 4 – 0,5 м

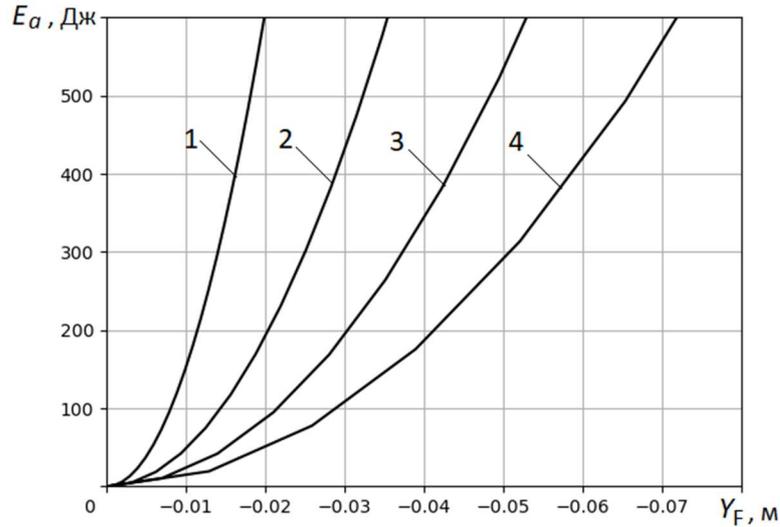


Рисунок 2.17 - Потенциальная энергия для элементов несledящей скользящей схемы нагружения от координаты Y_F :

$A = 0,02$, $b = 0,05$ м, $h_0 = 0,02$ м и переменным L :

1 – 0,2 м; 2 – 0,3 м; 3 – 0,4 м; 4 – 0,5 м

Из анализа результатов расчётов, приведённых на рисунках 2.15 - 2.17, следует, что для меньшей длины упругого элемента характерно более резкое накопление потенциальной энергии при его изгибе.

Пренебрегая влиянием массы упругого элемента на процесс амортизации, можно представить упрощённую квазистатическую постановку задачи анализа амортизации. Закон сохранения энергии для квазистатической постановки будет выглядеть следующим образом:

$$E_0 = E_{к.м} + E_a , \quad (2.7)$$

где E_0 - начальная кинетическая энергия амортизируемого тела; $E_{к.м}$ - кинетическая энергия тела в данный момент; E_a - потенциальная энергия упругого элемента.

Развёрнутая форма закона сохранения энергии в квазистатической постановке задачи:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + E_a , \quad (2.8)$$

где m – масса амортизируемого тела; V_0 - начальная скорость амортизируемого тела; V_1 - скорость амортизируемого тела в произвольный момент времени; E_a - потенциальная энергия амортизатора, рассчитываемая по выражению (2.6).

Выражая из (2.8) скорость V_1 в произвольный момент времени, получим:

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 - \frac{2E_a}{m}}. \quad (2.9)$$

Время прохождения процесса рассчитывается по стандартному кинематическому выражению:

$$T = \int_0^R \frac{dr}{V_1(r)}, \quad (2.10)$$

где R – перемещение ударяющегося тела в данный момент; r – переменная интегрирования, перемещение точки нагружения; $V_1(r)$ - скорость тела, соответствующая перемещению.

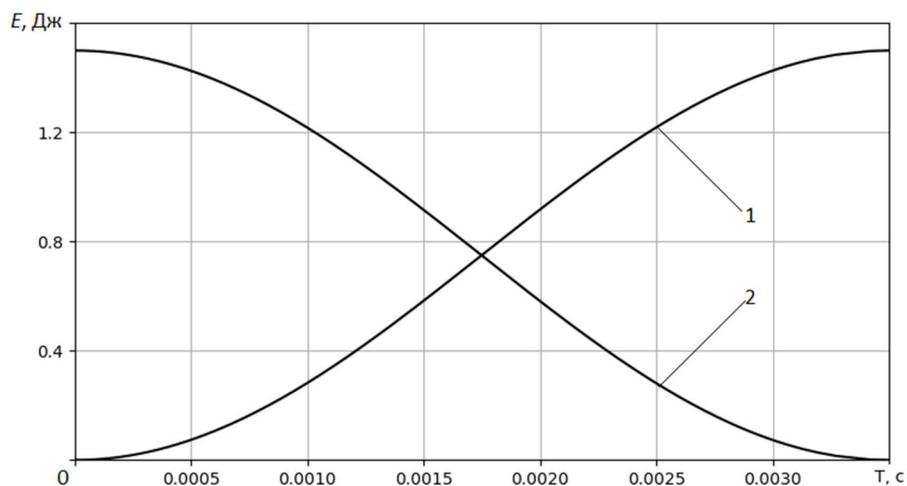


Рисунок 2.18 - Кинетика изменения энергобаланса системы «амортизатор - ударяющее тело» для упругого элемента $A = -0,02$ м, $b = 0,05$ м, $h = 0,02$ м, $L = 0,3$ м для скользящей неследящей схемы нагружения, при ударе тела массой 2 кг со скоростью 1 м/с:
 1 – потенциальная энергия амортизатора;
 2 – кинетическая энергия амортизируемого тела

Очевидно, что в инженерной практике возможны различные ситуации, когда представленная квазистатическая интерпретация расчёта не удовлетворяет требованиям по точности, и в этих случаях рекомендуется использовать более сложную, комплексную динамическую постановку, описывающую процесс упругого изгибного деформирования упругих элементов амортизаторов (этому посвящена глава 3 настоящей работы).

2.7 Выводы по главе 2

1 В главе 2 сформирована математическая модель стержневого упругого элемента в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка (2.1) - (2.3) на основе уравнения изгиба стержня Эйлера-Бернулли, описаны основные гипотезы и применяемые в модели расчётные схемы.

2 Приведена методика численного решения системы дифференциальных уравнений второго порядка. Использован метод решения системы дифференциальных уравнений на основе применения современных машиноориентированных методов минимизации. Сформированы минимизируемые целевые функции, проанализирована эффективность и трудоёмкость различных методов минимизации. В главе описана методика расчёта потенциальной энергии амортизатора. Приведены примеры расчётов для различных вариантов стержневых упругих элементов амортизаторов.

3 Проанализированы результаты расчётов изгиба стержневых упругих элементов, полученных с помощью разработанной методики численного решения. Сравниваются результаты, полученные с применением методов эллиптических параметров, методов Кирхгофа и метода конечных элементов, реализованного в автоматизированной расчётной системе SolidWorks Simulation, с результатами расчётов, полученных согласно разработанной методики. Показано преимущество разработанного метода относительно прочих.

3 Динамическое деформирование стержневых упругих элементов амортизаторов

Функционирование стержневых упругих элементов амортизаторов связано со «скоростным» - динамическим нагружением, существенно отличающимся от квазистатического [26].

Под динамическим нагружением понимается такое воздействие на амортизирующий элемент, в котором скорость взаимодействия не позволяет представить происходящий процесс квазистатическим, как последовательную смену статических положений нагруженного изогнутого упругого элемента, а требует при расчёте учёта воздействия на процесс массы движущегося упругого элемента.

В данной работе процесс динамического изгиба упругого элемента упрощенно заменяется ударом движущегося тела о стержневой упругий элемент с последующим его торможением посредством сопротивления изгибающегося упругого элемента.

Процесс соударения твёрдого тела и амортизатора (рисунок 3.1) сопровождается расходом кинетической энергии удара не только на изгибное деформирование, но и, в отличие от квазистатической схемы, на движение массы стержневого упругого элемента.

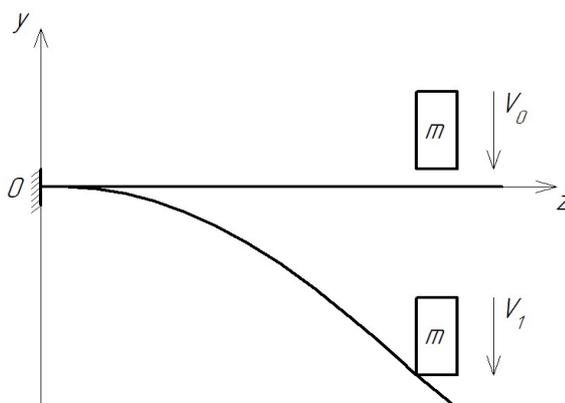


Рисунок 3.1 - Удар амортизируемой массы по упругому
стержневому элементу

В главе 2 (раздел 2.6) приведена методология расчёта времени первого останова на основе закона сохранения энергии с точки зрения квазистатического представления процесса деформирования упругого элемента. Квазистатическое представление задачи не учитывает влияние массы упругого элемента на динамику процесса амортизации, следовательно, не позволяет получить требуемые в отдельных конструкторских задачах динамические характеристики.

Как будет показано далее, встречаются случаи, когда учёт влияния массы упругого элемента вносит значительную поправку в результаты расчётов, и в таких случаях необходим расчёт с использованием динамической интерпретации процесса амортизации.

3.1 Основная система уравнений для описания динамики процесса

Предлагаемая модель динамики упругого элемента основывается на законе сохранения энергии, где составными частями являются: кинетическая энергия амортизируемого (ударяющегося) тела, кинетическая энергия массы упругого элемента и потенциальная энергия деформирующегося элемента:

$$E_0 = E_{к.т} + E_a + E_{к.а} \quad (3.1)$$

где E_0 - начальная (доударная) кинетическая энергия амортизируемого тела; $E_{к.т}$ - кинетическая энергия амортизируемого тела в данный момент; E_a и $E_{к.а}$ - потенциальная и кинетическая энергия упругого элемента в данный момент.

В процессе столкновения и последующего совместного движения упругого элемента и ударяющейся амортизируемой массы происходят различные явления, связанные с неравномерностью соприкосновения контура

тела и поверхности упругого элемента, также в процессе движения может возникать взаимное проскальзывание, трение и т.п. явления. В данной работе явления, связанные с соприкосновением контуров соударяющихся тел, не рассматриваются, и в качестве упрощения принимается допущение о равномерном соприкосновении тел после начала совместного движения системы без трения.

В описываемой модели для динамики системы, состоящей из упругого элемента и ударяющейся массы, принимаются допущения:

1) После переходного процесса (удара): в вариантах несскользящих схем нагружения ударяющееся тело неподвижно и устойчиво закреплено в определённой контактной точке; в вариантах скользящих схем ударяющееся тело движется по вертикальной траектории без трения.

2) В любой момент времени амортизируемое тело одинаковым образом контактирует с поверхностью упругого элемента, исключая явления проскальзывания и качения.

3) В процессе амортизации, в зависимости от схемы нагружения, вектор скорости контактной точки амортизатора может не совпадать с вектором скорости амортизируемого тела (например, в случае скользящей несследящей схемы внешнего нагружения, когда скорость амортизируемого тела направлена вниз и при одновременном криволинейном движении упругого элемента и последовательной сменой точек контакта из-за скольжения нагрузки по оси упругого элемента), что вносит погрешность при расчёте влияния амортизирующего элемента на тело. В рамках данной работы принимается допущение о том, что данная погрешность будет иметь небольшую величину. Учёт выше описанной поправки из-за несовпадения векторов скоростей возможен, но для этого потребуются вносить в структуру динамических уравнений дополнительные элементы, описывающие движение упругого элемента относительно линии воздействия силы и смены точек контакта, что потребует увеличения трудоёмкости расчётов в программном комплексе. Для устранения

лишней трудоёмкости и упрощения расчётов вводится допущение: вся энергия изгибного деформирования стержневого упругого элемента уходит на торможение ударяющегося тела.

Распишем по составным частям представленный в (3.1) закон сохранения энергии для системы "стержневой упругий элемент – амортизируемое тело" [14, 16].

Начальная кинетическая энергия амортизируемого тела E_0 (3.2) является единственным внешним источником энергии в системе. После удара кинетическая энергия перераспределяется по всей системе, и она затрачивается на движение массы амортизатора и его изгибное деформирование.

$$E_0 = \frac{mV_0^2}{2}, \quad (3.2)$$

где m – масса ударяющегося тела; V_0 – начальная скорость ударяющегося тела.

Кинетическая энергия амортизируемого тела рассчитывается согласно стандартному выражению.

$$E_{к.м} = \frac{mV_1^2}{2}, \quad (3.3)$$

где V_1 – текущая скорость ударяющегося тела в данный момент времени.

Выражение для расчёта кинетической энергии массы амортизирующего элемента, будет выглядеть следующим образом:

$$E_{к.а} = \int_0^{M_{\max}} \frac{v^2(w)}{2} dM = \frac{\rho}{2} \int_0^{L_{\max}} S(w) \cdot v^2(w) dw, \quad (3.4)$$

где $v(w)$ - мгновенная скорость точки амортизатора с координатой w по длине упругого элемента; $S(w)$ - площадь поперечного сечения упругого элемента амортизатора с координатой w (в рамках рассматриваемой прямой задачи прочностного проектирования данная функция задана априори); ρ - плотность материала упругого элемента; L_{\max} - осевой габарит упругого элемента в его недеформированном состоянии; dM - элемент движущейся массы амортизатора; M_{\max} - масса упругого элемента.

Для упрощения преобразования выражения (3.4) и последующих численных расчётов в структуру выражения (3.4) предлагается ввести коэффициент расчёта скорости произвольной точки упругого элемента $K_r(w)$, отображающий отношения скорости в произвольной точке к скорости в точке нагружения в данный момент времени [41].

Использовалось следующее выражение коэффициента $K_r(w)$:

$$\begin{aligned} K_r(w) &= \frac{v(w)}{v_H}; \quad \frac{v(w)}{v_H} = \frac{\dot{r}(w)}{\dot{r}_H}; \\ \frac{dr(w)}{dt} \cdot \frac{dt}{dr_H} &= \frac{dr(w)}{dr_H}; \\ \frac{v(w)}{v_H} &= \frac{dr(w)}{dr_H}; \\ K_r(w) &= \frac{\Delta r(w)}{\Delta r_H}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $K_r(w)$ - отношение скорости упругого элемента в точке с координатой w по длине к скорости в точке нагружения; $v(w)$ и $r(w)$ - скорость и перемещение упругого элемента в точке с координатой w по длине упругого элемента; v_H и r_H - скорость и перемещение упругого элемента в точке нагружения (точке контакта движущейся массы и упругого элемента).

Силовая характеристика, используемая для решения уравнений динамики упругого элемента, рассчитывается относительно определённой величины нагружения (силы воздействия на упругий элемент), следовательно $\Delta r(w)$ и Δr_H , рассчитанные между соседними значениями итераций величины нагружения, взятых с малым шагом, можно принять за величины линейных приращений $r(w)$ и r_H .

Отметим, что коэффициент K_r введён для удобства численного расчёта и, как показано выше (3.5), может быть заменён отношением скоростей разных точек упругого элемента.

Выразим через коэффициент K_r кинетическую энергию массы упругого стержневого элемента (3.4), соответствующую скользящей схеме внешнего нагружения:

$$E_{к.а} = \frac{\rho \cdot v_H^2}{2} \int_0^{L_{\max}} S(w) \cdot K_r^2(w) dw, \quad (3.6)$$

где L_{\max} – длина стержневого упругого элемента.

Для скользящих схем внешних нагрузок, в точке контакта скорости амортизируемого тела и упругого элемента равны:

$$V_1 = v_H, \quad (3.7)$$

Для скользящих схем внешних нагрузок скорость тела будет представлять собой вертикальную составляющую мгновенной скорости точки соприкосновения амортизируемого тела и упругого элемента:

$$V_1 = v_H \cdot \cos(\arctg(-C)), \quad (3.8)$$

Потенциальная энергия деформирующегося амортизатора E_a рассчитывается с использованием силовой характеристики амортизатора. Подробно

расчёт потенциальной энергии амортизатора и его силовой характеристики описан в главе 2 настоящей работы, выражение (2.6).

Текущее положение упругого элемента в пространстве зависит от решения системы уравнений (2.1) – (2.3), в структуру которой входят геометрические и физические параметры деформируемого упругого элемента, а также параметры и схема внешнего нагружения амортизируемой массой.

Запишем полную форму закона сохранения энергии для всей системы, с использованием выражений (3.1) – (3.8) для нескользящих схем внешнего нагружения:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \int_0^R F_r dr + \frac{\rho V_1^2 L}{2} \int_0^L S(w) K_r^2(w) dw . \quad (3.9)$$

$$V_1 = \left[\left(mV_0^2 - 2 \int_0^R F_r dr \right) \cdot \left(m + \rho \int_0^L S(w) \cdot K_r^2(w) dw \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (3.10)$$

Аналогично для скользящих схем нагружения:

$$V_1 = \left[\left(mV_0^2 - 2 \int_0^R F_r dr \right) \cdot \left(m + \frac{\rho}{\cos^2(\arctg(-C))} \int_0^{L_{\max}} S(w) \cdot K_r^2(w) dw \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (3.11)$$

Запишем кинематическое выражение для нахождения времени соответствующего определённому перемещению амортизатора в точке контакта:

$$T = \int_0^R \frac{dr}{V_1(r)} , \quad (3.12)$$

где R – перемещение ударяющегося тела в данный момент; r – переменная интегрирования, перемещение точки нагружения; $V_1(r)$ – скорость тела, соответствующая перемещению r амортизируемого тела.

3.2 Численное решение задачи динамики упругих элементов

Для численного решения задачи динамики упругих элементов, необходимо вначале получить силовую характеристику для упругого элемента, после чего, зная плотность упругого элемента, начальную скорость и массу амортизируемого груза, найти динамические характеристики.

Из анализа уравнения (3.1) следует, что в момент первого останова (момент, когда скорость амортизируемой массы впервые достигает нуля) кинетическая энергия массы упругого элемента $E_{к.а}$ и кинетическая энергия амортизируемого тела будут равны нулю E_0 , из чего следует, что в уравнении энергодоланса останется единственная составляющая – потенциальная энергия амортизатора E_a :

$$E_0 = E_a . \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) справедливо как для квазистатической, так и для динамической постановки задачи. Из уравнения (3.13) следует, что в момент первого останова начальная кинетическая энергия амортизируемого тела полностью переходит в потенциальную энергию упругого элемента. Поэтому, используя уравнение (3.13), можно получить прогиб упругого элемента, соответствующий моменту первого останова.

Используя силовую характеристику и зная решения системы (2.1) – (2.3) для различных начальных количественных параметров внешнего нагружения, можно получить значение коэффициента K_r для последующего использования его в уравнениях (3.10), (3.11) с целью расчёта текущей кинетической энергии.

тической энергии массы амортизатора, соответствующей определённому значению величины нагружения и перемещения точки нагружения.

Расчёт силовой характеристики, описанный в главе 2, позволяет найти кривую образующей стержня путём организации цикла итераций, заключающегося в последовательной подстановке значений нагрузки F в основную систему уравнений (2.1) – (2.3) и её многократного решения.

3.2.1 Расчёт коэффициента отношения скоростей

Расчёт коэффициента K_r связан с определением перемещения различных участков упругих элементов для различных значений величины нагрузки и последующей подстановкой полученных данных в выражения (3.10) и (3.11).

В программном комплексе [66] реализована схема в которой, для определённого упругого элемента априори задаётся произвольное значение максимума действующей нагрузки, затем рассчитывается силовая характеристика, соответствующая элементу под воздействием итерированной нагрузки с заданным предельным значением.

В программном комплексе [68] присутствует функция автоматического подбора максимума действующей нагрузки посредством применения биномиального поиска.

Результатом квазистатического расчёта является массив данных, содержащий информацию о перемещениях точек упругого элемента и, как следствие, информацию о кривой в точке нагружения, в которую входят значения: Z_F (абсцисса точки нагружения); Y_F (ордината точки нагружения); C_F (значение первой производной для кривой нейтральной линии упругого элемента); F (нагрузка, соответствующая данному прогибу), то есть четырехмерный массив (Z_F, Y_F, C_F, F) .

На рисунках 3.2 и 3.3 изображены силовые характеристики упругого элемента из стали 60С2А, имеющей модуль упругости $E = 212 \cdot 10^9$ Па, полученные для различных схем приложения внешней нагрузки. Упругий элемент на рисунке 3.2 обладает сечением шириной $b = 0,01$ м и переменной высотой h , изменяющейся по линейному закону $h = -0,005 \cdot w + 0,01$ и длину $L = 0,4$ м, на рисунке 3.3 сечением шириной $b = 0,03$ м и переменной высотой h , изменяющейся по линейному закону $h = -0,005 \cdot w + 0,02$ и длину $L = 0,5$ м.

После получения силовой характеристики упругого элемента рассчитывают потенциальную энергию, соответствующую различным значениям итерированной нагрузки. Получив значение потенциальной энергии упругого элемента по выражению (3.13), определяем, остановится ли амортизируемое тело под действием упругого элемента, хватит ли потенциальной энергии элемента для остановки амортизируемого тела.

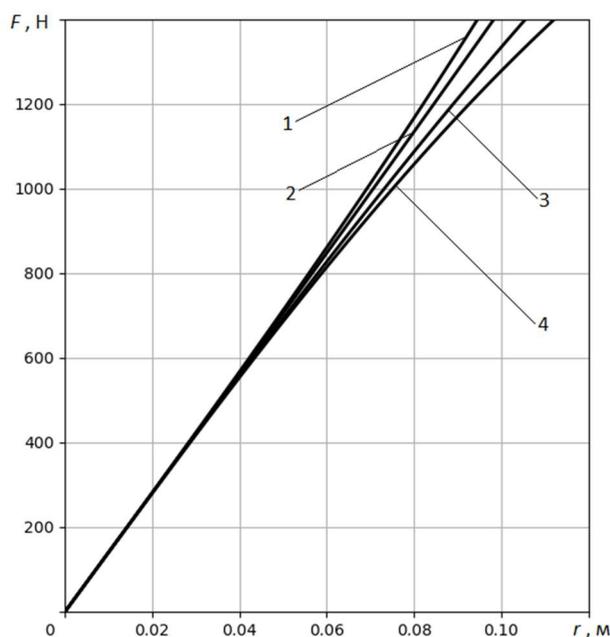


Рисунок 3.2 - Нагрузка и перемещение точки нагружения
 1 – нескользкая неследящая; 2 – нескользкая следящая;
 3 – скользящая неследящая; 4 – скользящая следящая

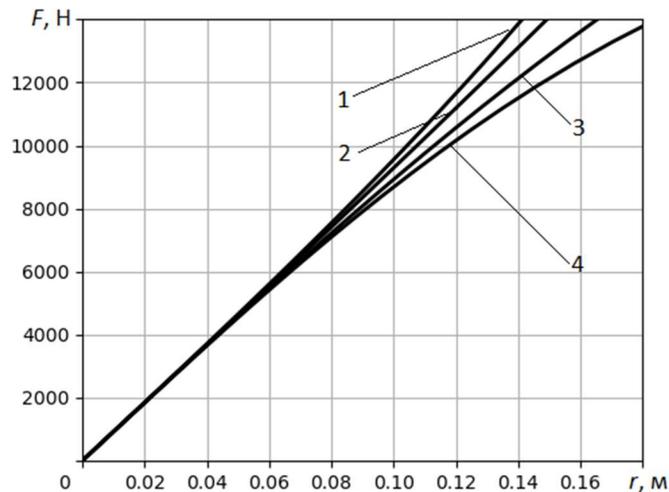


Рисунок 3.3 - Нагрузка и перемещение точки нагружения
 1 – несколькользящая неследящая; 2 – несколькользящая следящая;
 3 – несколькользящая неследящая; 4 – несколькользящая следящая

В случае, если потенциальной энергии упругого элемента не хватает для остановки амортизируемого тела, то максимальное значение итерируемой нагрузки подбирают вплоть до значения, позволяющего набрать необходимое количество кинетической энергии для остановки тела, либо до возникновения больших значений после минимизации целевой функции (что означает невозможность точной численной минимизации целевой функции имеющимися средствами или в физическом смысле - изгиб упругого элемента вышел за пределы допустимых для данной физической модели).

Информация о квазистатике упругого стержневого элемента, полученная после численного расчёта, имеет дискретный характер. Параметры произвольной точки изогнутого упругого элемента рассчитываются с помощью интерполяции [110].

Результатом численного расчёта квазистатики упругого элемента является крупный массив данных, поэтому от использования различных подходов к интерполяции зависит трудоёмкость расчётов. В ходе отработки различных схем решений, было предложено использовать полиномиальную схему интерполяции, а именно готовое решение, предлагаемое в качестве класса `InterpolatedUnivariateSpline` в модуле `scipy.interpolate` из пакета SciPy для язы-

ка программирования Python, как наиболее отработанную и предоставляющую удовлетворительную точность вне зависимости от количества рассчитанных точек первоначальной кривой. Работа использованного алгоритма сплайн-интерполяции подробно описана в [110].

Силовая характеристика и информация о перемещениях массы упругого элемента интерполируется с помощью полиномов, таким образом для произвольного значения по длине упругого элемента W , можно найти перемещения, соответствующие определённому значению нагрузки.

Для расчёта перемещения каждого фрагмента массы упругого элемента, элемент разбивается на N отрезков каждый определённой массы m_i . Количество выделенных фрагментов предлагается брать более 10000, таким образом можно не учитывать геометрическую неоднородность сечения отдельного фрагмента, принимая координатами центров масс середины длин выделенных фрагментов.

Зависимость получаемых параметров расчета динамики упругого элемента от количества выделенных фрагментов иллюстрирует таблица 3.1.

В таблице 3.1 расчёт проводится для упругого элемента длиной $L = 0,4$ м, с прямоугольным сечением, высота которого измеряется в метрах и меняется по линейному закону $h = -0,005 \cdot w + 0,01$, ширина сечения $b = 0,01$ м. Материалом упругого элемента является пружинная сталь 60С2А, обладающая модулем упругости $E = 212 \cdot 10^9$ Па и плотностью $\rho = 7680$ кг/м³. Ударяющийся груз, масса m которого отображена в таблице, воздействует на элемент согласно следящей скользящей схеме нагружения. Используемая силовая характеристика построена для нагрузки 0 до 2000 Н (рисунок 3.4) с 100 шагами итерации.

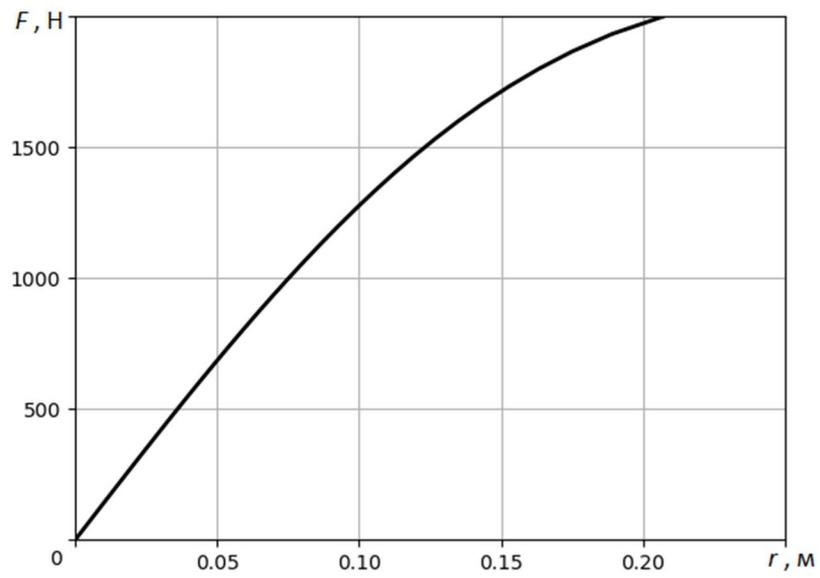


Рисунок 3.4 - Силовая характеристика упругого элемента

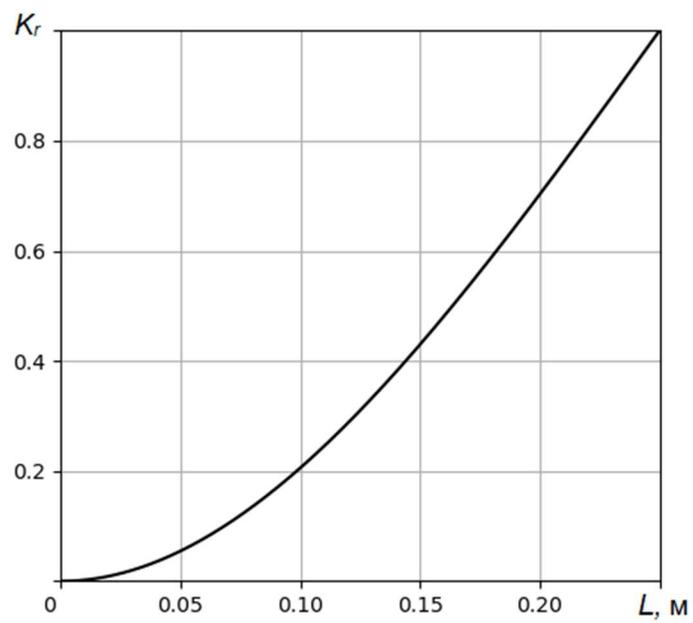


Рисунок 3.5 - Расчёт коэффициента K_r

Таблица 3.1. Расчёты времени до останова и трудоёмкости.

№	Количество фрагментов	Скорость, м/с	Масса, кг	Время до первого останова, с	Трудоёмкость, с
1	2	5	5	0,0317484331	0,1047203540
2	10	5	5	0,0318993931	0,1087083816
3	100	5	5	0,0319709772	0,1436152458
4	1000	5	5	0,0319787229	0,4790072441
5	2000	5	5	0,0319791562	0,8018867969
6	3000	5	5	0,0319793008	1,1672711372
7	4000	5	5	0,0319793730	1,4889793395
8	5000	5	5	0,0319794164	1,9115288257
9	6000	5	5	0,0319794453	2,1831886768
10	7000	5	5	0,0319794660	2,6129209995
11	8000	5	5	0,0319794815	3,1276462078
12	9000	5	5	0,0319794935	3,2433497905
13	10000	5	5	0,0319795031	3,5704848766
14	20000	5	5	0,0319795465	7,0153558254
15	50000	5	5	0,0319795725	17,494246006
16	100000	5	5	0,0319795812	34,704888820
17	2	5	10	0,0481741992	0,1396267414
18	10	5	10	0,0483001696	0,1815145015
19	100	5	10	0,0483605478	0,1914870738
20	1000	5	10	0,0483670951	0,6083986759
21	2000	5	10	0,0483674614	1,0711600780
22	3000	5	10	0,0483675836	1,5229554176
23	4000	5	10	0,0483676447	1,9807124137
24	5000	5	10	0,0483676814	2,4185597896

Продолжение таблицы 3.1.

№	Количество фрагментов	Скорость, м/с	Масса, кг	Время до первого останова, с	Трудоёмкость, с
25	6000	5	10	0,0483677058	2,9232106208
26	7000	5	10	0,0483677233	3,3640036582
27	8000	5	10	0,0483677364	3,8109033107
28	9000	5	10	0,0483677466	4,2884840965
29	10000	5	10	0,0483677547	4,7831530570
30	20000	5	10	0,0483677914	9,4548125267
31	50000	5	10	0,0483678134	23,153589010
32	100000	5	10	0,0483678207	46,350396394
33	2	10	5	0,0408137902	0,1495997905
34	10	10	5	0,0411456676	0,1575784683
35	100	10	5	0,0413061302	0,2064480781
36	1000	10	5	0,0413235431	0,6822030544
37	2000	10	5	0,0413245174	1,1934309005
38	3000	10	5	0,0413248423	1,7044630050
39	4000	10	5	0,0413250048	2,1935789585
40	5000	10	5	0,0413251023	2,7325000762
41	6000	10	5	0,0413251674	3,2913787364
42	7000	10	5	0,0413252138	3,8570485115
43	8000	10	5	0,0413252486	4,3824343681
44	9000	10	5	0,0413252757	4,8061778545
45	10000	10	5	0,0413252974	5,3965973854
46	20000	10	5	0,0413253949	10,497927188
47	50000	10	5	0,0413254534	25,953939437
48	100000	10	5	0,0413254730	53,033299446

На рисунке 3.5 изображён график рассчитанного коэффициента K_r для упругого элемента из пружинной стали 60С2А плотностью 7680 кг/м^3 с модулем упругости $E = 212 \cdot 10^9 \text{ Па}$ постоянного прямоугольного сечения длиной $0,25 \text{ м}$, толщиной $0,0025 \text{ м}$, шириной $0,019 \text{ м}$ при нескользящей следящей нагрузке величиной 80 Н .

По графику на рисунке 3.5. отслеживается постепенное увеличение коэффициента K_r от 0 у точки заделки упругого элемента до 1 в точке нагружения.

Получив значения коэффициента K_r в определённых точках по длине упругого элемента, интерполируем полученные значения с помощью полиномов и получаем выражение для расчёта K_r в любой точке на длине элемента, далее используем полученные расчётные зависимости для расчёта согласно уравнениям (3.10) или (3.11).

3.2.2 Расчёт изменения скорости во времени

Рассчитав интерполированные результаты квазистатических расчётов и характеристики ударяющегося тела, выполняют расчёт изменения скорости контактной точки приложения внешней нагрузки.

На рисунке 3.6 приведены результаты расчёта изменения скорости во времени для упругого стержневого элемента из стали 60С2А длиной $0,5 \text{ м}$ прямоугольного сечения шириной $0,02 \text{ м}$, с высотой сечения, изменяющейся по уравнению $b = -0,005 \cdot w + 0,01$, для скользящей неследящей схеме нагружения. Начальная скорость ударяющегося тела 10 м/с , масса 2 кг .

Рисунок 3.7 иллюстрирует расчёт изменения скорости во времени для упругого стержневого элемента из стали 60С2А длиной $0,4 \text{ м}$, прямоугольного сечения высотой $0,01 \text{ м}$ и шириной $0,02 \text{ м}$, с высотой сечения изменяющейся по уравнению $h = -0,005 \cdot w + 0,01$, для скользящей неследящей схеме нагружения. Начальная скорость ударяющегося тела 5 м/с , масса 2 кг .

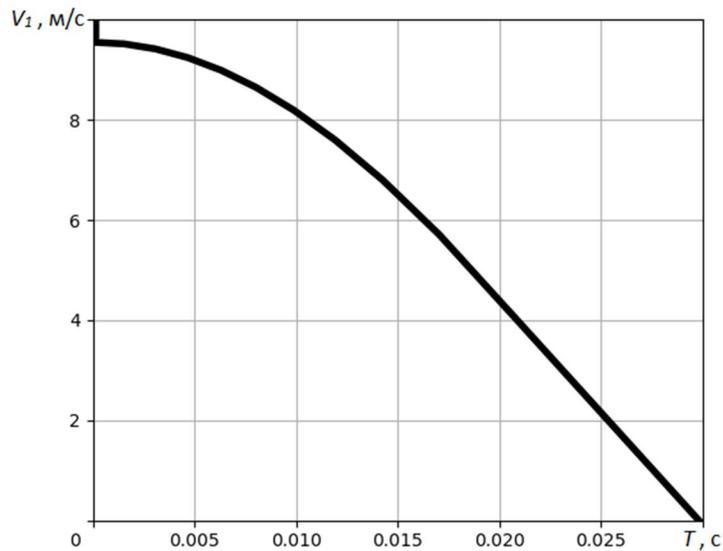


Рисунок 3.6 – Изменение скорости точки нагружения во времени

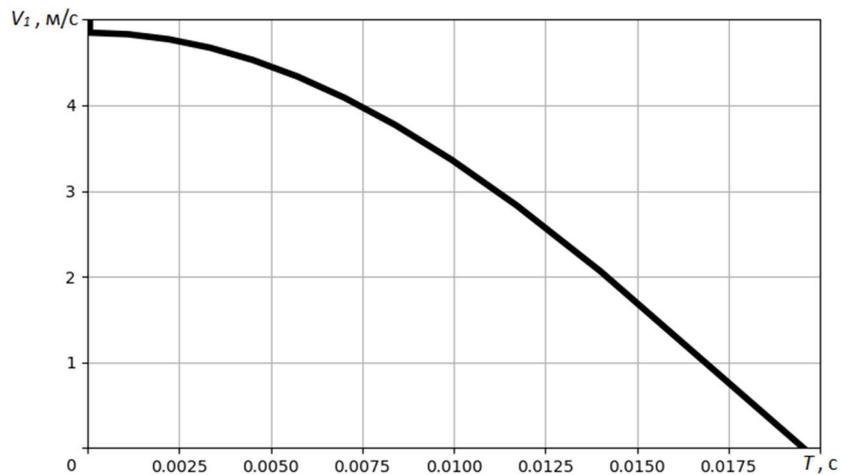


Рисунок 3.7 – Изменение скорости точки нагружения во времени

В численных расчётах динамики процесса амортизации ударяющегося тела, изображённого на графиках рисунков 3.6 и 3.7, в начале кривых линий присутствует «скачок» скорости. Согласно физике решаемой задачи предлагается ассоциировать данное явление с процессом начального постударного перераспределения кинетической энергии от массы ударяющегося тела к массе упругого стержневого элемента.

Глубокое рассмотрение природы начального «скачка» скорости приводит к волновой природе распространения воздействия удара тела о упругий элемент и является актуальным материалом для дальнейших исследований, выходящим за пределы данной работы.

3.3 Сравнение результатов расчётов для квазистатической и динамической постановок задачи

3.3.1 Сравнение времени первого останова

Из формы записи законов сохранения энергии для квазистатического (2.7) и динамического (3.1) вариантов следует, что между данными выражениями существует разница в элементе $E_{к.а}$, отражающая учёт влияния массы упругого элемента на процесс амортизации.

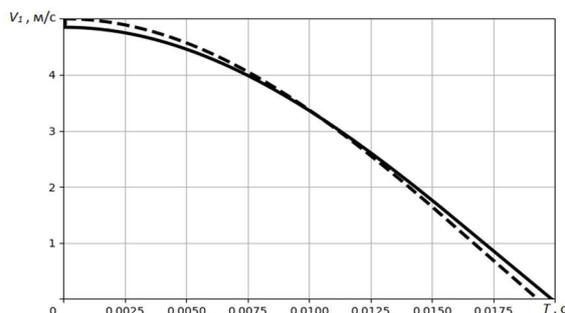


Рисунок 3.8 – Влияние варианта расчёта на результат

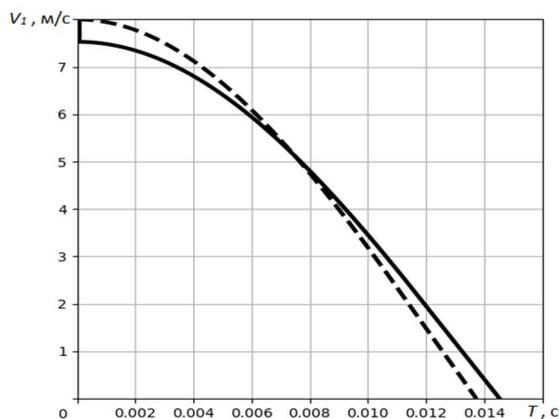


Рисунок 3.9 - Влияние варианта расчёта на результат

На рисунках 3.8 и 3.9 приведены результаты расчётов изменений скоростей амортизируемого тела во времени для упругого стержневого элемента со следящей скользящей схемой нагружения, сделанного из стали 60С2А длиной 0,4 м, прямоугольного сечения шириной 0,02 м и переменной высотой изменяющейся по закону $h = -0,005w + 0,01$. Рисунок 3.8 отображает расчёт скорости амортизируемого тела с массой 2 кг и начальной скоростью 5 м/с, рисунок 3.9 для амортизируемого тела массой 1 кг и начальной скоростью 8 м/с. Сплошной линией отображены результаты расчётов в рамках динамического варианта расчёта, пунктирной - в рамках квазистатического варианта.

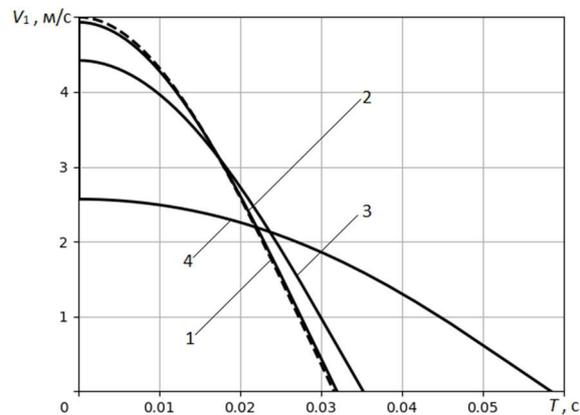
Анализ показывает, что в зависимости от значений массы и начальной скорости ударяющегося об один и тот же упругий элемент тела изменяется величина начального значения постударной скорости (величина «скачка») и итоговое значение времени первого останова.

На величину постударной скорости существенное влияние будет оказывать масса упругого элемента, для демонстрации этого приведём ниже несколько гипотетических расчётов.

На рисунке 3.10 приводятся результаты расчётов изменений скоростей амортизируемого тела во времени для упругих элементов, одинаковых по своим упругим свойствам, однако различающихся друг от друга плотностью материала [13]. Пунктирной линией 1 на рисунке 3.10 изображён квазистатический расчёт. Цифрами 2, 3 и 4 обозначены динамические расчёты для плотностей материала 7680 кг/м³, 76800 кг/м³ и 768000 кг/м³ соответственно. Расчёты выполнены для упругого элемента с геометрическими параметрами, совпадающими с расчётами на рисунке 3.7, для скользящей следящей схемы нагружения и ударяющего тела массой 5 кг с начальной скоростью соударения 5 м/с.

Анализируя графики на рисунке 3.10, можно сделать вывод о весомом значении массовой составляющей упругого элемента при расчёте времени его первого останова, следовательно можно утверждать от том, что существуют такие слу-

чаи расчётов, когда замена полного динамического расчёта квазистатическим вариантом невозможна, так как приведёт к неверному результату.



1 – квазистатический расчёт; 2 - плотность 7680 кг/м^3 ;

3 – плотность 76800 кг/м^3 ; 4 - 768000 кг/м^3

Рисунок 3.10 – Изменение скорости во времени

3.4 Выводы по главе 3

1 В главе 3 сформированы основные уравнения для расчёта динамических характеристик стержневых упругих элементов амортизаторов с учётом описанных в главе гипотез. Разработаны выражения для учёта влияния массы упругих элементов в процессе динамической изгибной деформации.

2 Анализируются результаты численных расчётов, выполненных с применением разработанной методики. Показан положительный эффект от применения динамического расчёта относительно стандартного квазистатического. Проводится сравнение динамического расчёта с различными вариантами деления стержневого элемента по массам с точки зрения трудоёмкости и точности.

4 Начальное контактно-волновое взаимодействие

Начальная фаза взаимодействия амортизируемого тела и упругого стержневого элемента характеризуется зарождением фронта поперечной волны и дальнейшим его распространением на всю длину упругого элемента.

Для учета этого эффекта в данной работе будет использоваться модель, предложенная J. Bielak, представленная в работах [21], [83].

4.1 Модель возникновения и распространения поперечной волны в стержневых упругих элементах

Начальный момент ударно-волнового взаимодействия амортизируемых тел и стержневых упругих элементов характеризуется обладанием некой начальной скорости амортизируемого тела и покоем упругого элемента. В результате столкновения в физической структуре рассматриваемого процесса возникает «разрыв» (ударное воздействие), который сопровождается дальнейшим распространением в материалах стержневых упругих элементов волн различного характера.

Для стержневых упругих элементов с переменным сечением существуют варианты конструкции, при которых прочность определённого сечения, не выдерживает напряжений, вызываемых фронтом поперечной волны, возникающих при ударе массы амортизируемого тела, движущегося с определённой скоростью к стержневому упругому элементу, что может привести к откольному разрушению элемента.

Исходя из конструкторских потребностей, длины упругих стержневых элементов амортизаторов в большинстве случаев значительно больше толщины сечения элемента, в результате чего движение волны от стенки к стенке и отражения волн в толще массы упругого элемента предлагается не рассматривать и принять допущение о незначительном влиянии данных явлений в процессе изгибной деформации.

Согласно [44], в общем случае в зоне контакта (рис.4.1) возникнет сферическая волна, распространяющаяся в толщине упругого элемента, однако если поперечные габариты нагружаемого упругого элемента и габариты поверхности контакта малы по сравнению с продольными габаритами амортизатора, то нормальная относительно поверхности контакта составляющая волны напряжений может быть представлена в виде стандартной упругой продольной волны.

Напряжения, возникающие в зоне контакта в момент начала удара $t = 0$ с и формирующие передний фронт волны, определяются согласно выражению [46]:

$$\sigma_{\kappa} = -\sqrt{\rho E} V_0, \quad (4.1)$$

где ρ - плотность материала упругого элемента; E – модуль упругости; V_0 - скорость амортизируемого тела в момент соударения.

Зная геометрические параметры зоны контакта, можно определить геометрические параметры зоны воздействия продольных волн и рассчитать затраченную на контактную деформацию энергию [20]:

$$E_{n.в} = \frac{\sigma_{\kappa}^2 S_{\kappa} h_{\kappa}}{2E}, \quad (4.2)$$

где S_{κ} - площадь пятна контакта; h_{κ} - средняя толщина упругого элемента под площадью контакта; E – модуль упругости.

Скорость амортизируемого тела после затраты энергии на начальное взаимодействие:

$$V_0 = \sqrt{\frac{mV_n^2 - 2E_{n.в}}{m}}, \quad (4.3)$$

где m – масса амортизируемого тела; V_n - начальная ударная скорость тела; $E_{n.в}$ - энергия, затраченная на контактную деформацию.

Общее уравнение энергодбаланса (3.1) преобразуется следующим образом:

$$E_0 = E_{к.м} + E_a + E_{к.а} + E_{н.в} , \quad (4.4)$$

где E_0 - начальная ударная энергия амортизируемого тела; $E_{к.м}$ - кинетическая энергия тела; E_a - потенциальная энергия амортизируемого упругого элемента; $E_{к.а}$ - кинетическая энергия учитываемой массы упругого элемента; $E_{н.в}$ - энергия продольной волны.

Распространение поперечной волны предлагается описывать посредством уравнения из [21] , [83]:

$$\rho S(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k G S(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) , \quad (4.5)$$

где ρ - плотность материала упругого элемента; $S(z)$ - площадь поперечного сечения в контактной элемента; t - время; $u(z,t)$ - вертикальное перемещение; k - сдвиговой коэффициент С.П. Тимошенко, зависящий от формы сечения балки, для прямоугольного сечения $k = 0,833$; G - модуль сдвига; z - координата абсцисс неизогнутого стержня.

Ниже на рисунке 4.1 изображена схема контакта тела и упругого элемента.

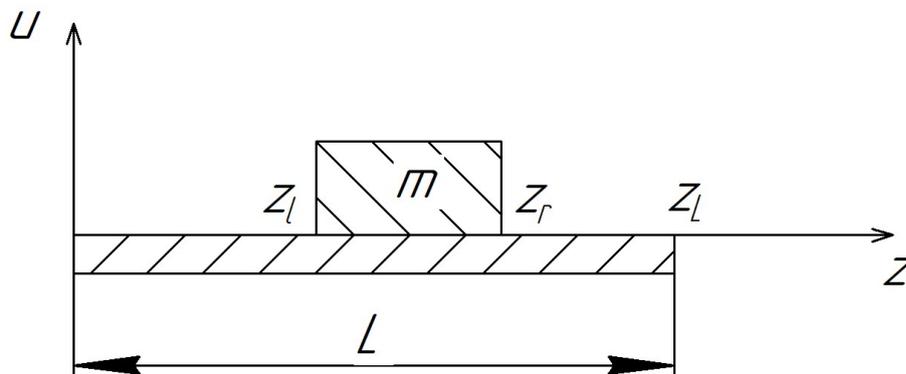


Рисунок 4.1 - Зона контакта

На рисунке 4.1: z_l, z_r – абсциссы левого и правого края зоны контакта; z_L – абсцисса свободного конца упругого элемента; L – длина элемента; u – вертикальное перемещение частиц элемента; m – масса амортизируемого тела.

Для решения уравнения (4.5) предлагается задавать следующие из физического смысла задачи начальные условия:

$$u(z,0) = 0; \text{ для } z \notin [z_l, z_r]; \quad (4.6.1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{t=0} = \frac{\sigma_k}{E}, \text{ для } z \in \{z_l, z_r\}; \quad (4.6.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{t=0} = 0, \text{ для } z \notin \{z_l, z_r\}; \quad (4.6.3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = V_0, \text{ для } z \in [z_l, z_r]; \quad (4.6.4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \text{ для } z \notin [z_l, z_r]; \quad (4.6.5)$$

$$u(0,t) = 0; \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (4.6.6)$$

Выражение (4.6.1) соответствует условию покоя стержня амортизатора до начала воздействия его взаимодействия с амортизируемой массой. Из-за начального воздействия, описанного выражением (4.1), в участке контакта возникают нормальные напряжения, которые при рассмотрении поперечного движения частиц стержня переходят в касательные, что позволяет описать условия (4.6.2) и (4.6.3). Воздействие амортизируемого тела на область контакта позволяет сформировать условия (4.6.4) и (4.6.5). Условие (4.6.6) моделирует консольное закрепление стержневого упругого элемента.

Решение уравнения (4.5) позволяет рассчитать максимальные касательные напряжения τ_{zy} , возникающее в сечении стержневого упругого элемента, что

позволяет контролировать недопустимую возможность перехода его материала в неупругое состояние.

Величину касательных напряжений τ_{zy} , предлагается рассчитывать, согласно следующему выражению [103]:

$$\tau_{zy} = G \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (4.7)$$

4.2 Численные расчеты

Для численного расчёта по выражениям (4.1) и (4.2) требуются физические параметры материала, из которого сделан упругий элемент, а также начальная скорость V_0 и масса m ударяющегося тела, средняя толщина упругого элемента в области контакта h_k . Площадь контактной области S_k задаётся для каждого случая индивидуально.

На рисунке 4.2 изображены результаты расчётов изгибного деформирования упругого элемента с учётом поправки на начальное взаимодействие согласно выражению (4.4).

Расчеты проводились для упругого элемента длиной $L = 0,3$ м, с постоянным прямоугольным сечением высота которого составляет $h = 0,0025$ м, ширина сечения $b = 0,02$ м. Материалом упругого элемента является пружинная сталь 60С2А, обладающая модулем упругости $E = 212 \cdot 10^9$ Па и плотностью $\rho = 7680$ кг/м³. Амортизируемый груз массой $m = 0,04$ кг имеет начальную скорость $V_0 = 4$ м/с. В процессе амортизации площадь контакта $S_k = 9.25 \cdot 10^{-5}$ м².

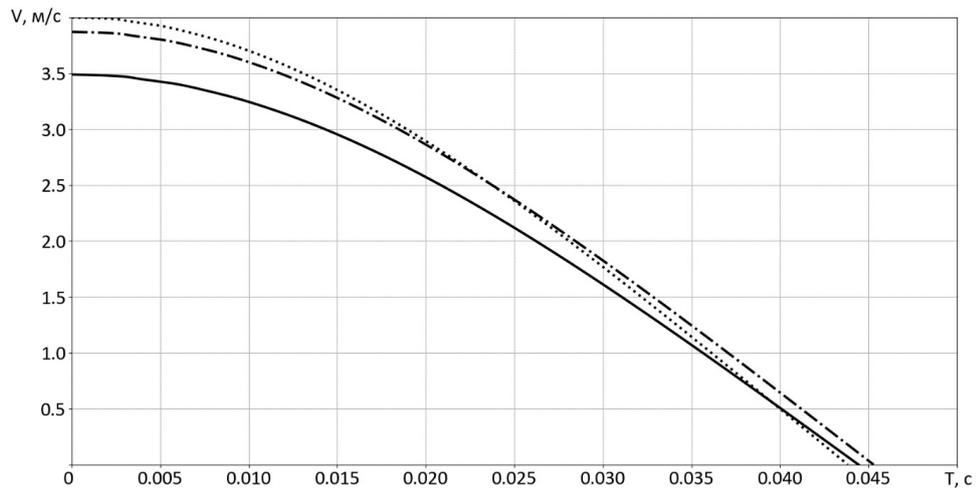


Рисунок 4.2 – Изменение скорости ударяющегося тела во времени:

точечная линия – квазистатический расчёт;

штрихпунктирная линия – динамический расчёт;

сплошная линия – волновая поправка

В результате расчётов, изображённых на рисунке 4.2, получены следующие длительности процессов изгиба стержневого упругого элемента до его первого останова:

$$T_{kc} = 0,0438 \text{ с}; T_{en} = 0,0444 \text{ с}; T_{\partial} = 0,0453 \text{ с},$$

где T_{kc} - время первого останова, рассчитанное в рамках квазистатической постановки (2.10); T_{∂} - время первого останова, рассчитанное в рамках динамической постановки (3.1); T_{en} - время первого останова, рассчитанное в рамках динамической постановки с поправкой на контактное взаимодействие (4.4).

Уравнение (4.5) представляет собой классическое волновое дифференциальное уравнение второго порядка. Для его решения воспользуемся рекуррентной конечно-разностной схемой:

$$\begin{aligned} \rho S_i \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta t^2} = kG \frac{S_{i-1} - S_{i+1}}{2\Delta z} \cdot \frac{u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}{2\Delta z} + \\ + kGS_i \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta z^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В результате решения уравнений (4.8) находят величины вертикальных изгибных перемещений стержня амортизатора на временном шаге $j + 1$.

$$u_{i,j+1} = \frac{kG \frac{S_{i-1} - S_{i+1}}{2\Delta z} \cdot \frac{u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}{2\Delta z} + kGS_i \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta z^2}}{\rho S_i} \Delta t^2 + \quad (4.9)$$

$$+ 2u_{i,j} - u_{i,j-1},$$

где i, j – коэффициенты, соответствующие изменению номеров шагов движущегося элемента по длине и по времени.

Для расчёта длина упругого элемента делится на участки с шагом Δz , временной промежуток расчёта делится на шаг Δt .

$$z \in \{z_0 = 0, z_1 = \Delta z, z_2 = 2\Delta z, \dots, z_i = i \cdot \Delta z\}$$

$$t \in \{t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \dots, t_j = j \cdot \Delta t\}$$

Из условий (4.6) находят ключевые значения величин:

$$u_{i,0} = 0, \text{ для } z \notin [z_l, z_r];$$

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta z} = \frac{\sigma_k}{E}, \text{ для } z_i \in \{z_l, z_r\};$$

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\Delta t} = V_0, \text{ для } z_i \in [z_l, z_r].$$

Для касательного напряжения конечно-разностное выражение будет выглядеть следующим образом:

$$\tau_{zy} = G \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta z}, \text{ для } z = z_0;$$

$$\tau_{zy} = G \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta z}, \text{ для } z = z_L;$$

$$\tau_{zy} = G \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta z}, \text{ для } z \notin \{0, z_L\}.$$

На рисунках 4.2 и 4.3 изображены результаты расчётов в виде профиля поперечной волны. Упругий стержневой элемент длиной $L = 0,4$ м, рассматриваемый в расчётах, сделан из материала 60С2А, который имеет плотность $\rho = 7680$ кг/м³, модуль упругости $E = 212 \cdot 10^9$ Па и модуль сдвига $G = 82 \cdot 10^9$ Па. Элемент имеет прямоугольное поперечное сечение с шириной $b = 0,005$ м и постоянной высотой $h = 0,005$ м на рисунке 4.2 и высотой, изменяющейся по линейному закону $h = -0,005 \cdot z + 0,005$ (м) на рисунке 4.3. Амортизируемое тело массой $m = 1$ кг ударяется в упругий элемент со скоростью $V_0 = 1$ м/с. Центр соударения находится на расстоянии 0,2 м от консольного закрепления элемента, протяжённость контактного участка соударения 0,05 м.

Позиции на рисунках 4.2. и 4.3 соответствуют определённому времени процесса: 1 – начало процесса; 2 – $5,01 \times 10^{-6}$ секунд; 3 – 1×10^{-5} секунд; 4 – 2×10^{-5} секунд; 5 – 3×10^{-5} секунд.

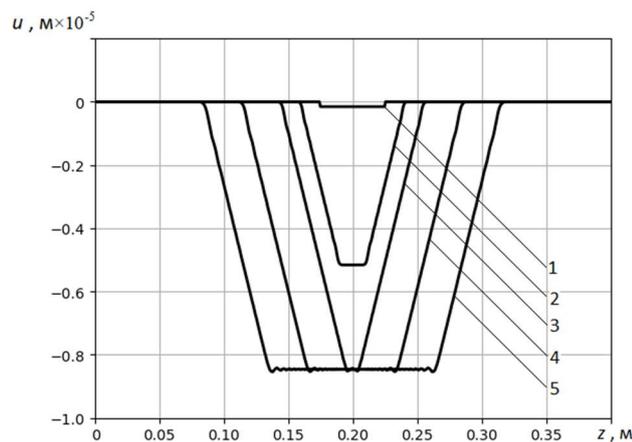


Рисунок 4.2 - Профиль поперечной волны

Изображённые на рисунках профили поперечной волны напряжений демонстрируют различие результатов для постоянного и переменного сечения. В случае

переменного сечения изображения профиля поперечной волны имеет небольшой уклон в сторону уменьшения сечения (рисунок 4.3).

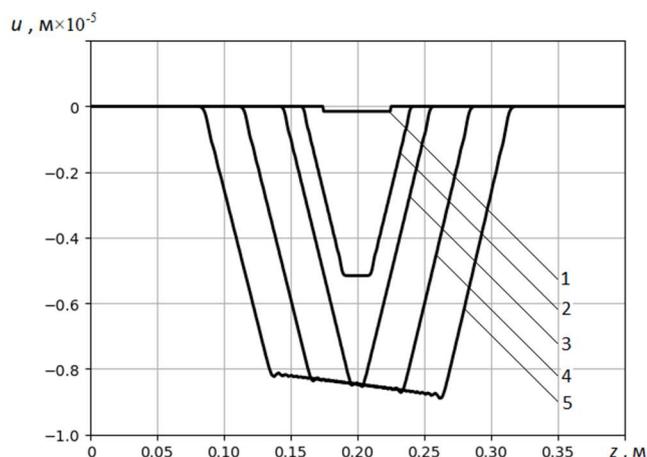


Рисунок 4.3 - Профиль поперечной волны

В результате расчётов было получено максимальное касательное напряжение, возникающее в сечении элемента $\tau_{zy} = 18,1$ МПа, что значительно меньше предела упругости материала $\tau_y = 510$ МПа. В результате расчётов получено, что предельная скорость соударения для элемента и условий взаимодействия, приводящая к неупругому деформированию составляет для упругих элементов на рисунке 4.2 – 61 м/с ; на рисунке 4.3 – 60 м/с.

4.3 Выводы по главе 4

1. Предложена модель контактно-волнового взаимодействия на основе перехода фронта продольной волны в поперечную волну.
2. Разработаны выражения учёта влияния энергии поперечной волны на параметры динамического деформирования стержневых упругих элементов.
3. Представлена практическая реализация приведённых теоретических уравнений на основе использования рекуррентных разностных схем. Приведены и проанализированы результаты расчётов для различных вариантов динамического деформирования стержневых упругих элементов.

5 Стержневые упругие элементы с зафиксированными сосредоточенными массами

Возможности изменения характеристик изгибного деформирования стержневых упругих элементов в квазистатической и динамической постановках не ограничиваются только варьированием их геометрических параметров и механических характеристик их материалов. В данной главе показано, что достижение необходимых характеристик возможно за счёт использования сосредоточенных масс, расположенных в фиксированных точках на упругих элементах.

Представленные выражения расчёта квазистатических характеристик для стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами имеют в своей основе приведённую в разделе 2 методику расчёта квазистатических характеристик, дополненную уравнениями в основной системе и дополнительным элементом в структурах целевых функций.

Расчёт динамических характеристик стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами, как и в разделе 3, проводится на основе применения закона сохранения энергии. Приведённые выражения расчёта динамических характеристик отличаются наличием дополнительных элементов, позволяющих учесть влияние сосредоточенных масс на энергобаланс системы.

5.1 Квазистатическое деформирование стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами

5.1.1 Основная система уравнений

Расчётная схема упругого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами (рисунок 5.1) может быть представлена аналогично схеме с несколькими внешними нагрузками согласно [55].

В расчётах принимается, что сосредоточенные массы закреплены жестко и неподвижно и априори известны места крепления сосредоточенных масс по длине упругих элементов. При этом схема крепления сосредоточенных масс в каждом поперечном сечении, в котором она расположена, не изменяет начальной прямолинейности нейтральной оси упругого элемента амортизатора.

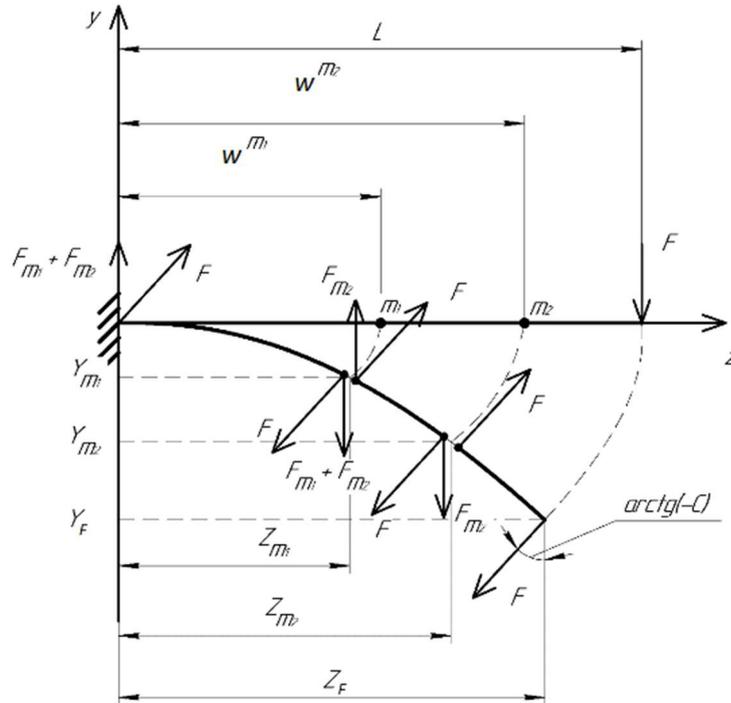


Рисунок 5.1 - Расчётная схема упругого элемента амортизатора с зафиксированными сосредоточенными массами, нагруженный несльзящей следящей внешней нагрузкой

Общий вид основного уравнения изгиба нейтральной линии [62] аналогичен использовавшемуся в подразделе 2.2, присутствует в модели упругого стержневого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами. При этом зафиксированные сосредоточенные массы вносят поправки в уравнение изгибающего момента $M_{изг}(z)$, входящее в его правую часть:

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \frac{M_{изг}(z)}{E \cdot I_x(z)} \cdot \left(1 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (5.1)$$

$$M_{u_{3z}}(z) = F \cdot (Y_F - y(z)) \cdot \sin(\arctg(-C_F)) + F \cdot (z - Z_F) \cdot \cos(\arctg(-C_F)) + M_{c.m.}(z), \quad (5.2.1)$$

$$M_{u_{3z}}(z) = F \cdot (z - Z_F) + M_{c.m.}(z) \quad (5.2.2)$$

$$M_{u_{3z}}(z) = F \cdot (Y_F - y(z)) \cdot \sin(\arctg(-C_F)) + F \cdot (z - L) \cdot \cos(\arctg(-C_F)) + M_{c.m.}(z), \quad (5.2.3)$$

$$M_{u_{3z}}(z) = F \cdot (z - L) + M_{c.m.}(z), \quad (5.2.4)$$

$$M_{c.m.}(z) = \sum_{i=1}^{N_m} f_m(Y_{m_i} - y(z)) m_i \cdot |\bar{g}| \cdot \cos(\bar{g} \wedge \bar{k}) + \sum_{i=1}^{N_m} f_m(z - Z_{m_i}) m_i \cdot |\bar{g}| \cdot \cos(\bar{g} \wedge (-\bar{j})), \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} f_m(x) &= x, x \leq 0 \\ f_m(x) &= 0, x > 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

где N_m – количество сосредоточенных масс; m_i – i -тая сосредоточенная масса; Y_{m_i} и Z_{m_i} – текущие значения ординаты и абсциссы i -той сосредоточенной массы; \bar{g} – вектор ускорения свободного падения; \bar{j} и \bar{k} – направляющие векторы осей координат (рисунок 5.2); $f_m(x)$ – специальная функция; $M_{u_{3z}}(z)$ – изгибающий момент (5.2), варианты (5.2.1) – (5.2.4) соответствуют схемам нагружения, изображённым на рисунке 2.2; $M_{c.m.}(z)$ – изгибаемый момент созданный сосредоточенными массами.

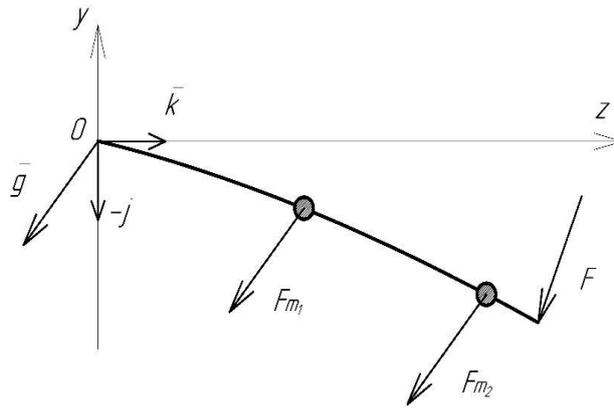


Рисунок 5.2 – Расчётная схема

Специальная функция $f_m(x)$, входящая в (5.3), введена для удобства численных расчётов, что позволяет при расчётах пользоваться единым уравнением (5.3) во всех точках стержневого упругого элемента.

Из структуры уравнений (5.1) и (5.2) следует, что в уравнении изгибающего момента возникают вызванные наличием сосредоточенных масс разрывы. Для их устранения предлагается левый край искомых кривых воспринимать как стартовую точку для решения дифференциальных уравнений с начальными условиями.

Рассматривая численное решение задачи с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка с коэффициентами Дормана-Принса, для устранения проблемы разрывов достаточно, чтобы точки устраняемого разрыва совпадали с краями расчётных участков рассматриваемых расчётных шагов. В случае, если край расчётного участка не совпадает с точкой разрыва, но размер шага мал по отношению к длине упругого элемента, то считается, что погрешность расчёта мала и не требует интерполяционных выравниваний краёв расчётного участка.

Учитывая, что в структуре уравнений изгибающих моментов появляется новая группа априори неизвестных величин, для решения задачи предлагается использовать решение на основе ранее описанного в подразделе 2.3.2. метода с использованием минимизации целевой функции.

5.1.2 Численное решение уравнения изгиба стержня с зафиксированными сосредоточенными массами

Численное решение основной системы уравнений (5.1), (5.2) с помощью метода Рунге-Кутты возможно только после определения всей группы априори неизвестных величин таких как Z_F , Y_F , C_F (их конкретная комбинация различается в зависимости от вида схемы внешнего нагружения) и группы неизвестных величин, состоящей из абсцисс Z_{m_i} и ординат Y_{m_i} зафиксированных сосредоточенных масс изогнутого упругого стержневого.

Изначально определить априори неизвестные величины невозможно, поэтому для решения основной системы уравнений предлагается использовать оптимизированный перебор неизвестных величин, которые в последующем максимально минимизируют целевую функцию аналогично методу, описанному в подразделе 2.3.2.

Для учёта новой группы неизвестных предлагается отредактировать минимизируемые целевые функции, добавив в их структуру новый безразмерный элемент, учитывающий зависимость предполагаемых абсцисс зафиксированных сосредоточенных масс и длин упругих элементов в точках данных абсцисс:

$$f_{er} = \sum_{i=1}^{N_M} \left| \frac{\tilde{w}(Z_{m_i}) - w^{m_i}}{w^{m_i}} \right| + \left| \frac{\tilde{y}(Z_{m_i}) - Y_{m_i}}{w^{m_i}} \right|, \quad (5.5)$$

где w^{m_i} - длина упругого стержневого элемента от точки закрепления до точки фиксации сосредоточенной массы m_i .

В результате использования нового элемента (5.5) целевые функции первого и второго вида будут представлены следующим образом:

1 Первый вид:

1.1 Для несскользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)| + |L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} + |C_F - \tilde{y}'(Z_F)| + f_{er},$$

1.2 Для несскользящей неследящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)| + |L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} + f_{er},$$

1.3 Для скользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{L} + |C_F - \tilde{y}'(Z_F)| + f_{er}.$$

2 Второй вид:

2.1 Для несскользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|} + \frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} + \frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|}.$$

2.2 Для несскользящей неследящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|} + \frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} + f_{er}.$$

2.3 Для скользящей следящей нагрузки:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|} + \frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|} + f_{er}.$$

В случае нагружения согласно скользящей неследящей схеме нагружения применяется безразмерная целевая функция вида:

$$f(Z_m) = f_{er}.$$

Воспользуемся результатами отбора методом минимизации из раздела 2.3.2. и примем в качестве используемого метод «Differential evolution» («DE») [112].

5.1.3 Результаты численных расчётов

Согласно выражениям в подразделе 5.1.2 была реализована методика, позволяющая рассчитывать квазистатические характеристики упругого стержневого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами.

Применение предлагаемой методики расчёта позволяет получать различные квазистатические характеристики и, как показано ниже, результаты расчётов (рисунки 5.7, 5.8), полученных с помощью программного комплекса, не противоречат физической логике исследуемой задачи.

Один из выводов, полученных с помощью результатов расчёта, показывает, что варьирование величинами сосредоточенных масс, зафиксированных на стержневом упругом элементе, позволяет изменять квазистатические характеристики элемента. Например, на рисунках 5.3 и 5.4 представлены результаты расчётов упругого стержневого элемента с различными сосредоточенными массами.

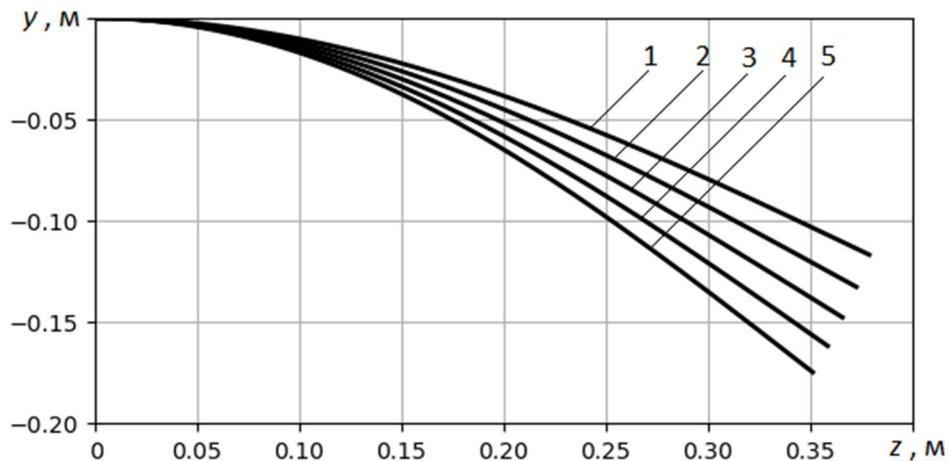


Рисунок 5.3 - Упругие элементы с сосредоточенной массой:

1 – 0 кг; 2 – 50 кг; 3 – 100 кг; 4 – 150 кг; 5 – 200 кг

На рисунке 5.3 изображены результаты расчёта изгиба для упругого элемента, сделанного из пружинной стали 60С2А, имеющей модуль упругости $E = 212 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$, длиной $L = 0,4 \text{ м}$ и прямоугольное постоянное сечение шириной $b = 0,02 \text{ м}$ и высотой $h = 0,01 \text{ м}$. Упругий элемент нагружен согласно нескольззящей следящей схеме нагрузкой $F = 2000 \text{ Н}$. Упругий элемент в недеформированном состоянии располагается перпендикулярно вектору ускорения свободного падения. Рассматриваемые упругие элементы содержат одну варьируемую сосредоточенную массу, зафиксированную на удалении $0,3 \text{ м}$ от точки закрепления упругого элемента в недеформированном состоянии, величина сосредоточенной массы зависит от варианта расчёта.

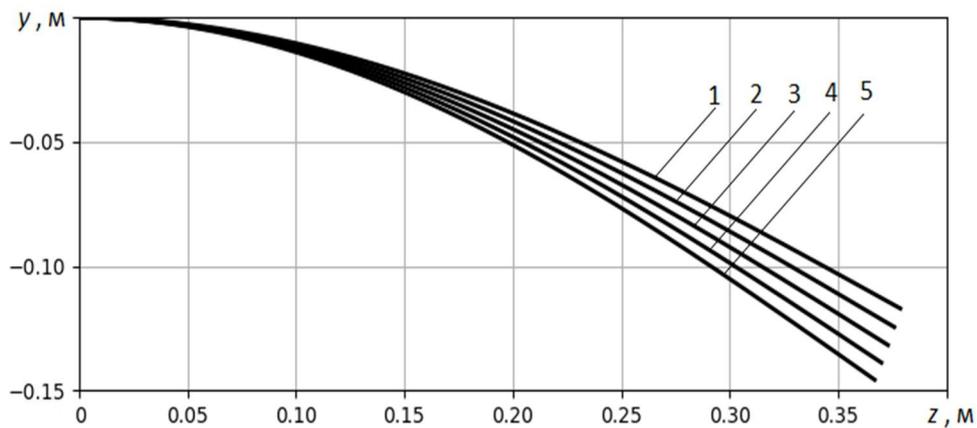


Рисунок 5.4 - Упругие элементы с двумя сосредоточенными массами:

1 – 0 кг; 2 – 20 кг; 3 – 40 кг; 4 – 60 кг; 5 – 80 кг

На рисунке 5.4 изображены результаты расчёта изгиба для упругого элемента аналогичного по геометрическим параметрам, как в используемом на расчётах рисунке 5.3. Упругий элемент нагружен согласно нескольззящей следящей схеме нагрузкой $F = 2000 \text{ Н}$. Рассматриваемые упругие элементы содержат две одинаковые зафиксированные сосредоточенные массы на удалении $0,1 \text{ м}$ и $0,3 \text{ м}$ от точки закрепления упругого элемента в недеформированном состоянии, величины сосредоточенных масс зависят от варианта расчёта.

Как видно из результатов расчётов, изображённых на рисунках 5.5 и 5.6, применение сосредоточенной массы позволяет достичь одинакового прогиба

упругого элемента при разной нагрузке. при этом использование сосредоточенных масс изменяет характер изгиба оси упругого стержневого элемента при одинаковом прогибе.

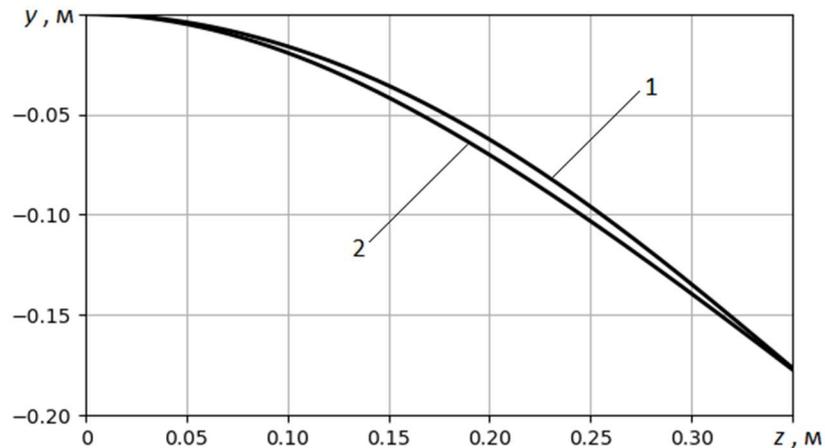


Рисунок 5.5 – Влияние сосредоточенной массы на изгиб упругих элементов

На рисунке 5.5 изображен результат расчёта изгиба для упругого элемента, аналогичного по геометрическим параметрам используемому в расчётах рисунке 5.3. Упругий элемент в первом случае (позиция 1) нагружен по скользящей следящей схеме нагрузкой $F = 3150$ Н. Во втором случае (позиция 2) упругий элемент нагружен по скользящей следящей схеме нагрузкой $F = 2000$ Н, а также сосредоточенной массой 400 кг, зафиксированной на расстоянии 0,2 м от точки закрепления элемента в недеформированном состоянии.

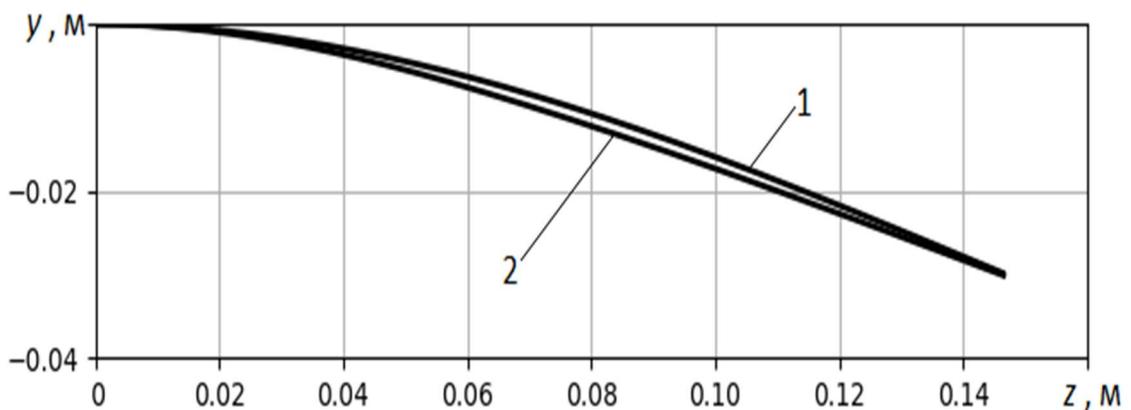


Рисунок 5.6 Влияние сосредоточенной массы на изгиб упругих элементов

На рисунке 5.6 изображены результаты расчёта изгиба упругого элемента, сделанного из пружинной стали 60С2А, длиной $L = 0,15$ м и с постоянным прямоугольным сечением шириной $b = 0,005$ м и высотой $h = 0,002$ м. Упругий элемент без сосредоточенной массы (позиция 1) нагружен согласно нескользвящей следящей схемы нагрузкой $F = 20$ Н. Упругий элемент на позиции 2 нагружен сосредоточенной массой 3,4 кг на расстоянии 0,075 м от точки закрепления в недеформированном состоянии элемента, кроме того, данный упругий элемент нагружен по нескользвящей следящей схеме нагрузкой $F = 10$ Н.

Аналогично методике, описанной в подразделе 2.5, возможно построение полной квазистатической силовой характеристики упругого элемента. Разница между методикой, описанной в подразделе 2.5, и рассчитанными ниже силовыми характеристиками состоит в добавлении зафиксированных сосредоточенных масс и учёте их влияния на решение основной системы уравнений.

На рисунках 5.7 и 5.8 приведены результаты расчётов силовых характеристик для стержневого упругого элемента из пружинной стали 60С2А длиной $L = 0,15$ м. Элемент имеет прямоугольное постоянное сечение шириной $b = 0,005$ м и высотой $h = 0,002$ м. На рисунке 5.7 изображены результаты расчётов упругого элемента, нагруженного согласно нескользвящей следящей схеме нагружения, на рисунке 5.8 – скользящей несledящей схеме. Упругие элементы на рисунках 5.7 и 5.8 нагружаются нагрузкой и двумя сосредоточенными массами, масса которых зависит от варианта расчёта, на рисунках обозначены позициями: 1 – 0 кг; 2 – 1 кг; 3 – 1,5 кг; 4 – 2 кг. Сосредоточенные массы располагаются на расстоянии 0,05 м и 0,1 м от точки закрепления в недеформированном состоянии упругого элемента.

Анализ результатов расчётов на рисунках 5.7 и 5.8 показывает, что использование сосредоточенных масс позволяет уменьшать скорость возрастания силовой характеристики, данное свойство может быть полезным при решении различных специфических задач конструкторского проектирования, например при создании какой-либо измерительной аппаратуры.

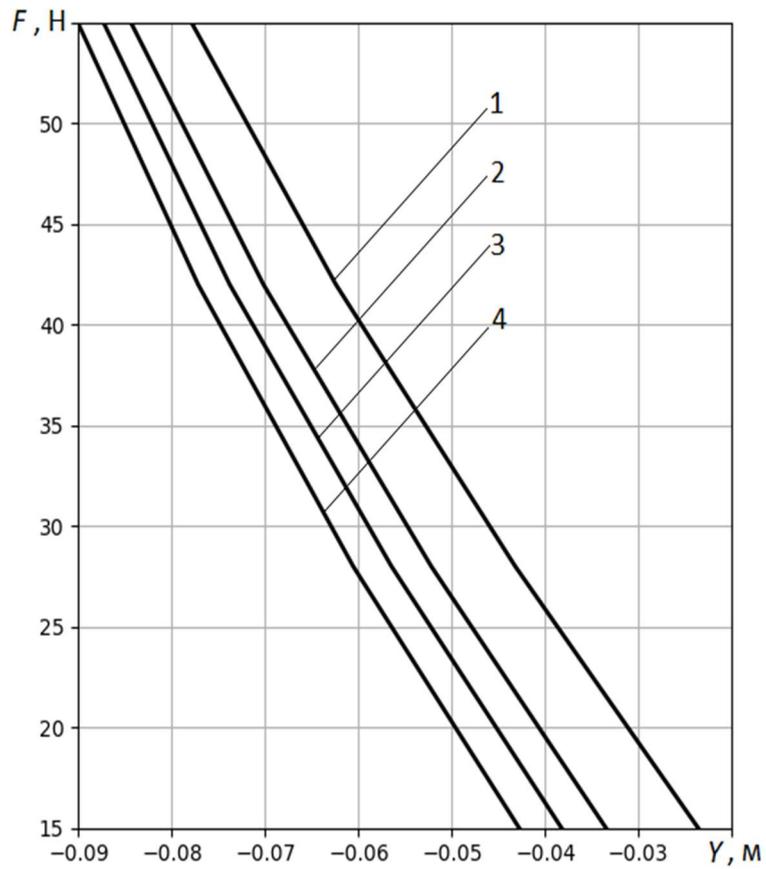


Рисунок 5.7 – Влияние сосредоточенных масс на силовые характеристики

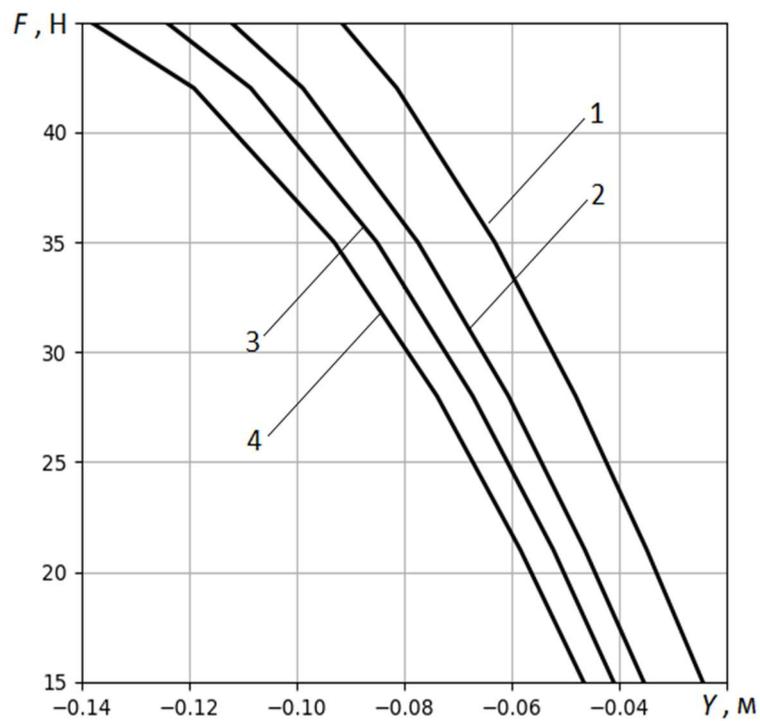


Рисунок 5.8 - Влияние сосредоточенных масс на силовые характеристики

Полученные силовые характеристики позволяют рассчитать количество потенциальной энергии (рисунок 5.9), которую накапливает упругий стержневой элемент. Расчёт потенциальной энергии упругого элемента с сосредоточенными массами проводится по выражению (2.9).

$$E_a = \int_0^{Y_F} F_y dy + \int_0^{Z_F} F_z dz.$$

На рисунке 5.9 изображены результаты расчётов потенциальной энергии упругого стержневого элемента E_a , которую он накапливает при достижении прогиба Y_F . Расчёты на рисунке 5.9 выполнены для упругого элемента, аналогичного использованному в расчётах на рисунках 5.7 и 5.8. Упругие элементы на рисунках 5.7 и 5.8 нагружаются согласно скользящей неследящей схеме нагружения и двумя сосредоточенными массами, масса которых зависит от варианта расчёта, на рисунках обозначены позициями: 1 – 0 кг; 2 – 1 кг; 3 – 1,5 кг; 4 – 2 кг. Сосредоточенные массы зафиксированы на расстоянии 0,05 м и 0,1 м от точки закрепления в недеформированном состоянии упругого элемента.

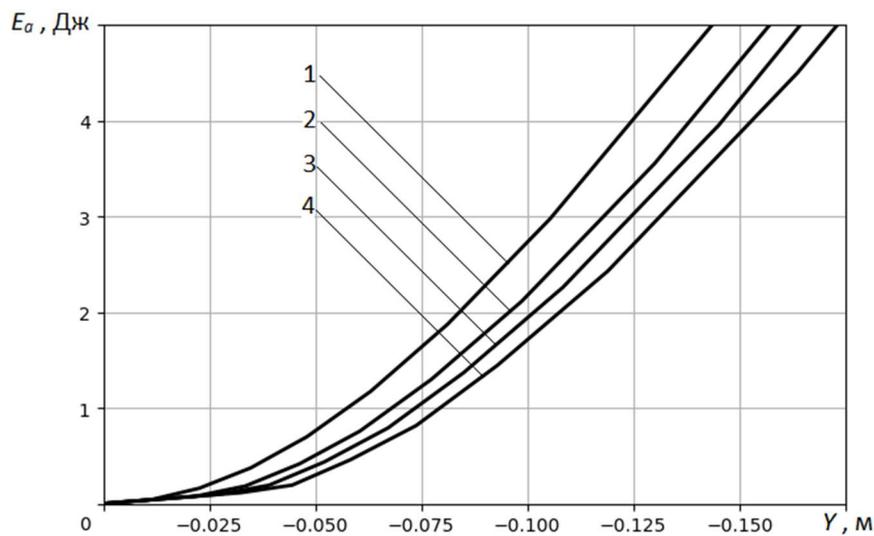


Рисунок 5.9 - Потенциальная энергия амортизатора в зависимости от прогиба

Из анализа результатов расчётов, изображённых на рисунке 5.9, следует, что использование сосредоточенных масс существенно влияет на энергетические характеристики упругого стержневого элемента.

Использование сосредоточенных масс, как видно из результатов расчётов на рисунках 5.3 - 5.9, ведёт к изменению различных характеристик упругого элемента, следовательно варьирование величинами точечных масс как управляющими конструкторскими параметрами позволит достичь требуемых квазистатических характеристик при решении конкретных конструкторских задач, не прибегая к изменению геометрических характеристик упругого стержневого элемента.

5.2 Динамическое деформирование упругого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами

5.2.1 Основные уравнения

Моделирование динамики стержневого упругого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами основано на применении закона сохранения энергии, аналогично разделу 3. Отличием является – учёт энергобаланса сосредоточенных масс в законе сохранения энергии (5.6).

В случае если на упругом элементе неподвижно закреплены сосредоточенные массы, то закон сохранения энергии, с учётом выражений (3.1) и (4.4) будет выглядеть следующим образом:

$$E_0 = E_{к.т} + E_a + E_{к.а} + E_{п.в} + E_{к.м}, \quad (5.6)$$

где E_0 - начальная доударная энергия амортизируемого тела; $E_{к.т}$ - кинетическая энергия тела; E_a - потенциальная энергия амортизирующего упругого элемента; $E_{к.а}$ - кинетическая энергия массы упругого элемента; $E_{п.в}$ - энергия продольной волны; $E_{к.м}$ - кинетическая энергия сосредоточенных масс.

Скорость закреплённой на упругом элементе сосредоточенной массы будет равна скорости упругого элемента в точке крепления, следовательно кинетическая энергия сосредоточенной массы $E_{к.м}$:

$$E_{к.м} = \frac{m_i \cdot v^2(w^{m_i})}{2} ,$$

где m_i – величина i - той закреплённой сосредоточенной массы; $v(w^{m_i})$ - скорость i - той сосредоточенной массы с координатой w^{m_i} по длине.

Переходя к расчёту с помощью коэффициента K_r (3.5), получаем выражение для кинетической энергии:

$$E_{к.м} = \frac{m_i \cdot K_r^2(w^{m_i}) \cdot v^2(w^{m_i})}{2} .$$

Для кинетической энергии сосредоточенной массы получены следующие выражения:

а) для несскользящих схем нагружения:

$$E_{к.м} = \frac{m_i \cdot K_r^2(w^{m_i}) \cdot V_1^2}{2} . \quad (5.7)$$

б) для скользящих схем нагружения:

$$E_{к.м} = \frac{m_i \cdot K_r^2(w^{m_i}) \cdot V_1^2}{2 \cdot \cos^2(\text{arctg}(-C_F))} . \quad (5.8)$$

Аналогично (3.10) и (3.11), получены выражения для расчёта скорости амортизируемого тела с учётом воздействия на упругий элемент сосредоточенных масс:

а) для скользящих схем нагружения:

$$V_1 = \left(mV_0^2 - 2 \int_0^R F_r dr \right) \cdot \left(m + \sum_{i=1}^{N_m} m_i \cdot K_r^2(w^{m_i}) + \right. \\ \left. + \rho \int_0^L S(w) \cdot K_r^2(w) dw \right)^{-1} \frac{1}{2}. \quad (5.9)$$

б) для скользящих схем нагружения:

$$V_1 = \left(mV_0^2 - 2 \int_0^R F_r dr \right) \cdot \left(m + \frac{1}{\cos^2(\arctg(-C))} \sum_{i=1}^{N_m} m_i \cdot K_r^2(w^{m_i}) + \right. \\ \left. + \frac{\rho}{\cos^2(\arctg(-C))} \int_0^L S(w) \cdot K_r^2(w) dw \right)^{-1} \frac{1}{2}. \quad (5.10)$$

5.2.2 Численный расчёт динамики стержневых упругих элементов с сосредоточенными массами

С помощью рассчитанной силовой характеристики и выражений (5.9), (5.10) рассчитывается динамическая характеристика (рисунки 5.10 и 5.11) стержневого упругого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами.

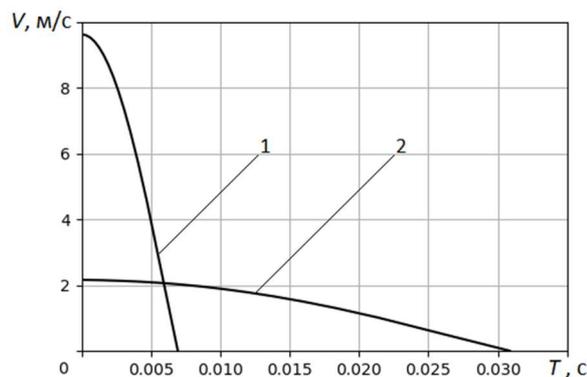


Рисунок 5.10 – Влияние сосредоточенных масс на изменение скорости точки нагружения во времени

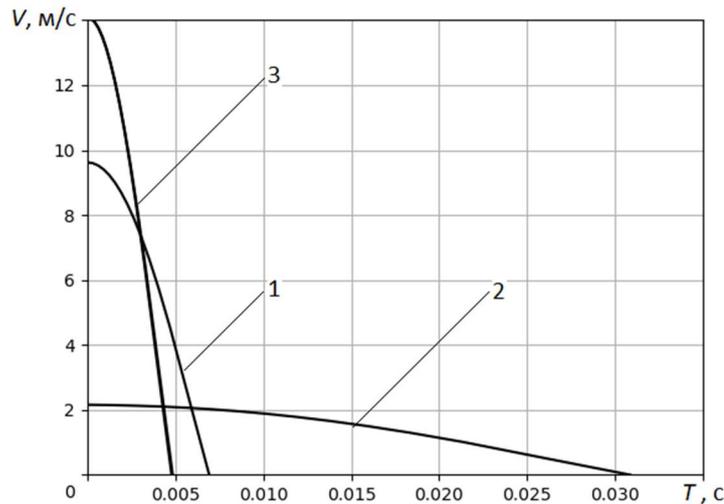


Рисунок 5.11 – Влияние сосредоточенных масс на изменение скорости точки нагружения во времени

На рисунках 5.10 и 5.11 изображены результаты расчётов скоростей амортизируемых тел во времени. Рассматривается упругий элемент из стали 60С2А. Длина рассчитываемого упругого элемента $L = 0,2$ м, элемент имеет прямоугольное сечение шириной $b = 0,0185$ м и переменной высотой, определяющейся выражением $h = -0,001 \cdot w + 0,0025$.

На упругом элементе зафиксированы две сосредоточенные массы: первая - $m_1 = 1$ кг на удалении $w^{m_1} = 0,07$ м; вторая - $m_1 = 1,5$ кг на удалении $w^{m_1} = 0,15$ м.

Воздействие на элемент происходит посредством скользящей следящей схемы внешнего нагружения. На рисунках 5.10 и 5.11 амортизируется тело массой $m = 0,001$ кг, движущуюся со скоростью $V_0 = 15$ м/с.

Позицией «1» на рисунках 5.10 и 5.11 отмечены расчёты изменения скорости амортизируемого тела во времени при расчёте согласно динамической постановке без учёта влияния сосредоточенных масс на динамику упругого элемента.

Позицией «2» на рисунках 5.10 и 5.11 отмечены расчёты изменения скорости амортизируемого тела во времени при расчёте динамики с учётом влияния зафиксированных сосредоточенных масс.

Позицией «3» на рисунке 5.11 отмечен расчёт скорости амортизируемого тела в квазистатической постановке расчёта.

Результаты расчётов, изображённых на рисунке 5.12, соответствуют динамическому деформированию стержневого упругого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами, аналогичного для расчётов, изображённых на рисунке 5.11.

Масса амортизируемого тела на рисунке 5.11 составляет $m = 1$ кг, доударная скорость $V_0 = 2$ м/с.

Позицией 1 отмечен динамический расчёт с учётом влияния зафиксированных сосредоточенных масс, позицией 2 - без их учёта.

Результаты расчётов, представленные на рисунках 5.10 – 5.12 демонстрирует важную в практическом смысле возможность существенного изменения динамических характеристик стержневых упругих элементов с помощью использования сосредоточенных масс.

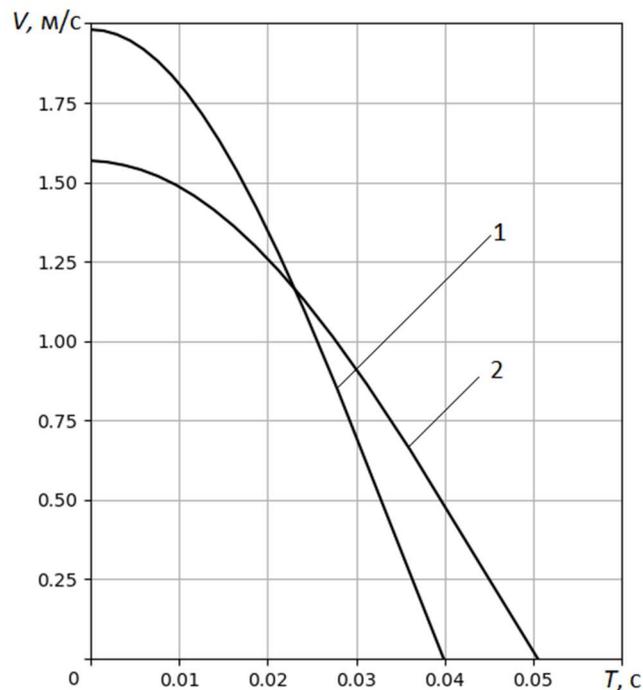


Рисунок 5.12 - Влияние сосредоточенных масс на изменение скорости точки нагружения во времени

Для анализа результатов расчётов, проведённых согласно выражениям, представленным в данной работе, была проведена серия экспериментов. Эксперименты выполнялись на базе АО «НПО «СПЛАВ» им. А.Н. Ганичева».

Экспериментальная установка (таблица 5.1), представленная на рисунке 5.13, основана на принципе использования кинетической энергии жесткой падающей массы. В процессе эксперимента по сигналу срабатывает размыкатель подвеса 1, и груз 2 в свободном падении ударяется о закреплённый консольно стержневой упругий элемент 3. Акселерометр 4 фирмы «Брюль и Къер» модели 4384-S, закреплённый на упругом элементе, передаёт свой сигнал в 4-канальный усилитель-формирователь «Брюль и Къер» NEXUS модели 2692-C, который, в свою очередь, транслирует сигнал в анализатор спектра фирмы ZETLab модели ZET017, из которого сигнал приходит в ЭВМ со специальным программным обеспечением, позволяющим записывать и визуализировать полученные данные.

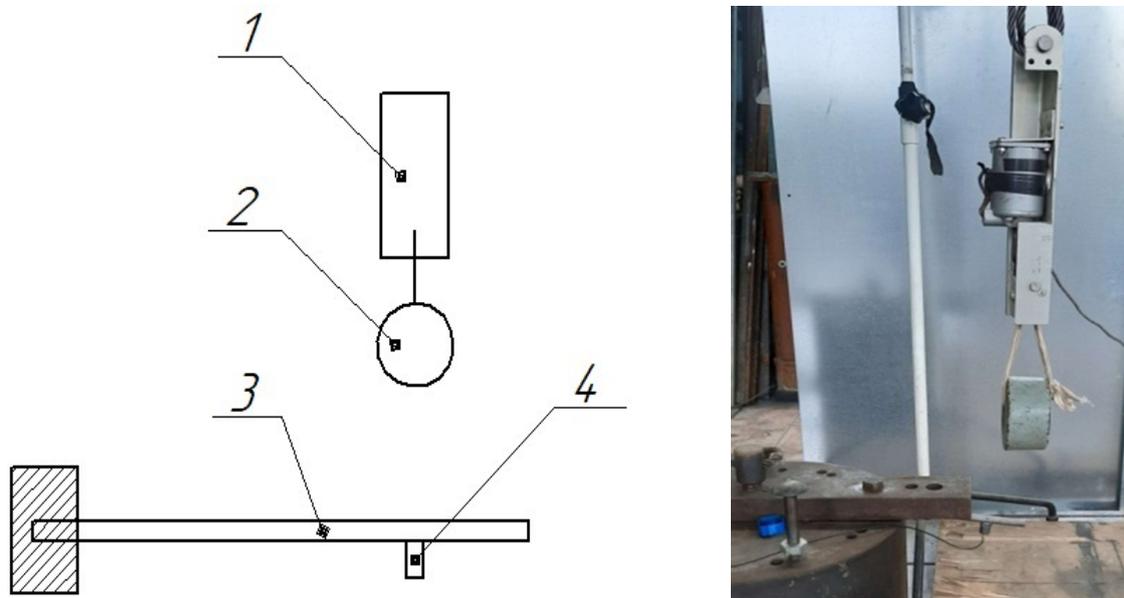


Рисунок 5.13 – Экспериментальная установка.

Таблица 5.1 – Составы экспериментальных установок

Установка №1		
№	Название	Изготовитель
1	Подвес	-
2	Груз	-
3	Упругий элемент	АвтоАЗ
4	Акселерометр 4384-S	Брюль и Кьер
5	Усилитель-формирователь NEXUS 2692-C	Брюль и Кьер
6	Анализатор спектра ZET017	ZETLab
7	Лабораторный источник питания Б5-71/1	ООО «КИП»
8	ЭВМ	-
Установка №2		
№	Название	Изготовитель
1	Груз	-
2	Сосредоточенная масса	-
3	Упругий элемент	АвтоАЗ
4	Акселерометр MPU-6050	Invensense
5	Микрокомпьютер Arduino Uno	Microchip
6	ЭВМ	-

На рисунках 5.14 и 5.15 представлены результаты трёх опытов с грузом массой $m = 2,2$ кг, сбрасываемым с высоты $H = 0,2$ м на стержневой упругий элемент из стали 60С2А, $L = 0,17$ м, $h = 0,0025$ м, $b = 0,018$ м.

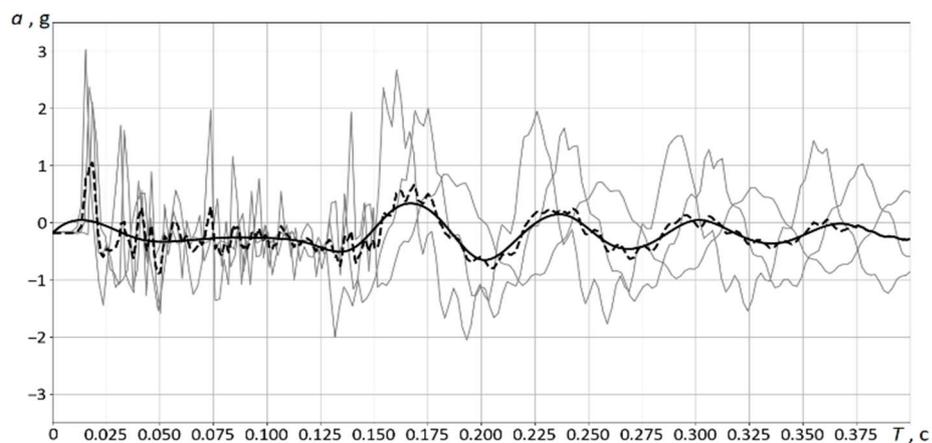


Рисунок 5.14 – Данные акселерометра

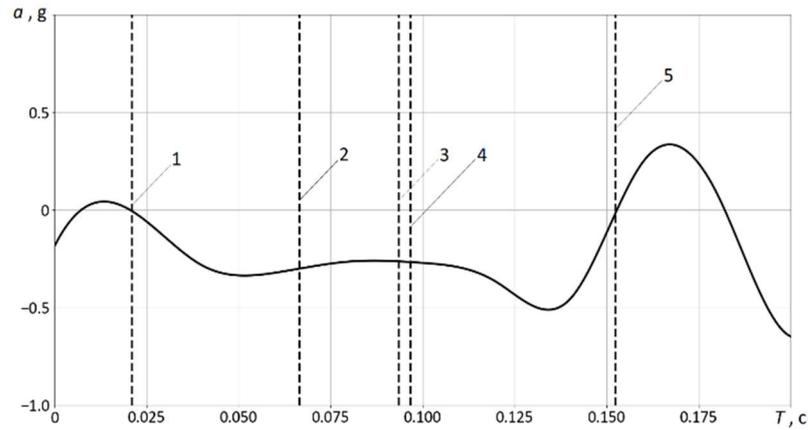


Рисунок 5.15 – Результаты расчётов

На рисунках 5.14, 5.16, 5.18 серыми линиями обозначены данные, полученные непосредственно с акселерометра, пунктирной линией обозначены средние арифметические по ускорению, сплошной линией обозначены значения, полученные после использования фильтра в виде бегущего среднего арифметического [22]. На рисунках 5.14 – 5.19 сплошными чёрными линиями обозначены отфильтрованные значения ускорения.

Середина первого полупериода соответствует времени первого останова. Получены следующие значения относительных ошибок (рисунок 5.15): для квазистатического метода – 23,3%; для динамического – 11,5%; для расчёта с учётом контактно-волновой поправки – 7,9 %.

Во второй серии опытов (рисунки 5.16 – 5.19) использовалась установка, сконструированная автором, состоящая из персонального компьютера, микрокомпьютера Arduino Uno и датчика акселерометра MPU 6050.

В опытах, результаты которых отражены на рисунках 5.16 – 5.19, используется упругий элемент, аналогичный предыдущему, длиной $L = 0,24$ м. Амортизируемое тело имеет массу $m = 0,105$ кг и сбрасывается с высоты $H = 0,5$ м. Оцениваются результаты 20 одинаковых опытов. Получены следующие значения относительных ошибок (рисунок 5.17): для квазистатического метода – 7,2%; для динамического – 5,1%; для расчёта с учётом контактно-волновой поправки – 2,6 %.

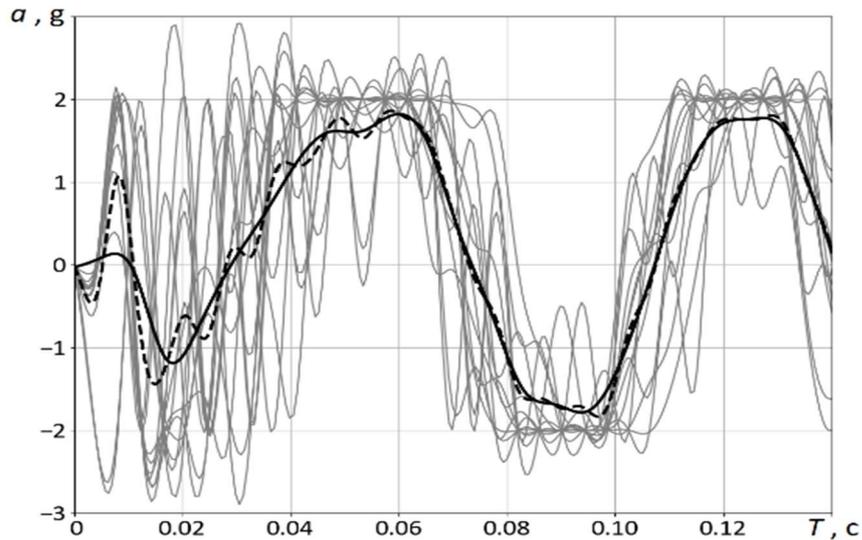


Рисунок 5.16 – Данные акселерометра

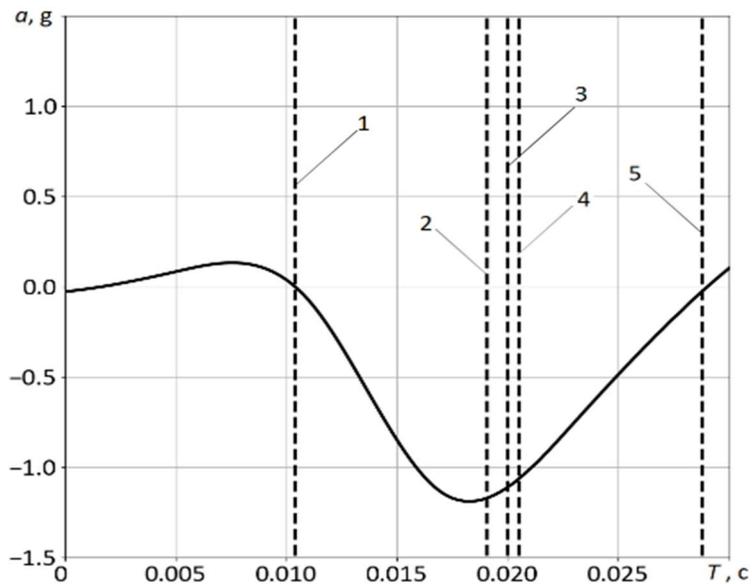


Рисунок 5.17 – Результаты расчётов

На рисунках 5.18 и 5.19 показаны результаты расчётов для стержневого упругого элемента с закреплённой на нём сосредоточенной массой $m_1 = 0,878$ кг на расстоянии $w^{m1} = 0,2$ м. Получены следующие значения относительной ошибки: для квазистатического метода – 36,2%; для динамического – 23,2%; для расчёта с учётом контактно-волновой поправки – 17,4 %.

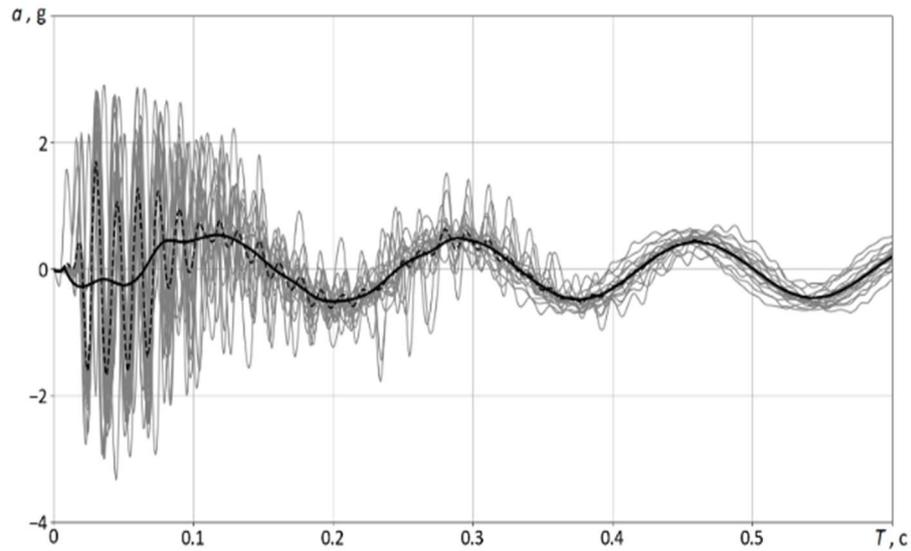


Рисунок 5.18 – Данные полученные акселерометром

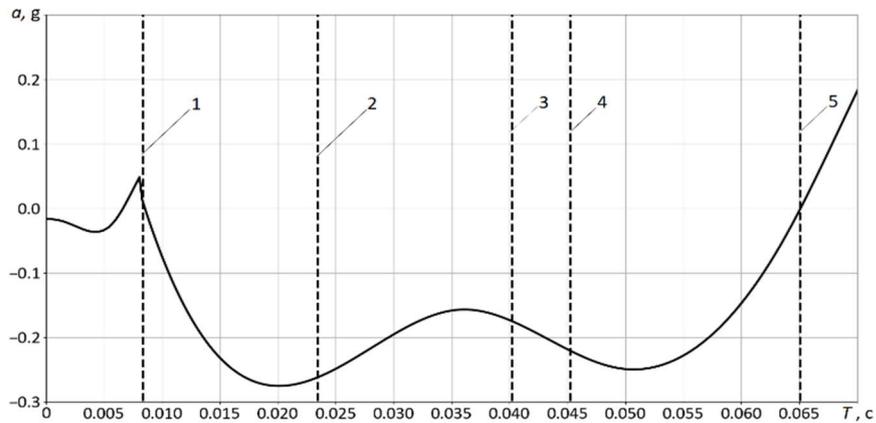


Рисунок 5.19 – Результаты различных вариантов расчётов

На рисунках 5.15, 5.17 и 5.19 пунктирные линии с позициями обозначают: 1 – начало первого полупериода; 2 – результат квазистатического расчёта; 3 – результат расчёта с учётом контактно-волновой поправки; 4 – результат динамического расчёта; 5 – конец первого полупериода.

Результаты экспериментальных исследований, представленные в таблице 5.2, позволяют сделать вывод о стабильном во всех случаях последовательном уменьшении относительной ошибки расчёта относительно экспериментальных результатов, при использовании предложенных методик расчёта.

Таблица 5.2 – Экспериментальные результаты

№	Кол-во опытов, шт	L , м	h , м	b , м	m , кг	m_1 , кг	w^{m_1}	H , м	T_3 , с	$T_{кс}$, с	T_d , с	T_b , с	$\delta_{кс}$, %	δ_d , %	δ_b , %
Установка №1															
1	3	0,17	0,0025	0,018	2,2	-	-	0,2	0,0866	0,0664	0,0966	0,0935	23,3	11,5	7,9
Установка №2															
2	20	0,24	0,0025	0,018	0,105	-	-	0,5	0,0195	0,0181	0,0205	0,0200	7,2	5,1	2,6
3	20	0,24	0,0025	0,018	0,105	0,878	0,2	0,2	0,0367	0,0234	0,0452	0,0430	36,2	23,2	17,4

5.3 Выводы по главе 5

1 В главе 5 приводится практически применимая методология расчёта, содержащая основные уравнения и примеры их численного решения относительно разных параметров упругих элементов, сосредоточенных масс и амортизируемого тела.

2 Приведённые примеры расчётов квазистатических и динамических характеристик для различных упругих элементов демонстрируют практическую применимость разработанных методик и широкие диапазоны варьирования итоговых характеристик элементов.

3 Показано, что использование зафиксированных сосредоточенных масс позволяет получать различные изгибные характеристики упругих элементов амортизаторов при неизменной величине внешней нагрузки, а это означает, что с помощью варьирования величинами сосредоточенных масс и координат их фиксированного расположения можно получать различные амплитудные характеристики изгибного деформирования для одного и того же упругого стержневого элемента (рисунки 5.3 и 5.4). Варьирование указанными параметрами существенно расширяет возможности и степени свободы конструктора при проектировании новых амортизирующих устройств.

4 В результате анализа результатов экспериментов можно сделать вывод о том, что получена модель, позволяющая производить расчёт стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами. Получен важный и перспективный вывод о возможности оперативного изменения квазистатических и динамических характеристик стержневых упругих элементов без изменения их конструкции за счет варьлируемых параметров сосредоточенных масс, существенно расширяющим возможности и степени свободы конструктора при проектировании новых и адаптации существующих амортизирующих устройств к изменяющимся условиям внешнего нагружения.

Заключение

Итогом проведённой теоретической и экспериментальной работы, являются следующие результаты и выводы:

1 Разработана методика расчёта квазистатических характеристик стержневых упругих элементов амортизаторов на основе уравнения изгиба Эйлера-Бернулли, для элементов, подверженных большим прогибам:

а) предложено теоретическое описание статической задачи изгиба стержневых упругих элементов переменного сечения на основе уравнения изгиба Эйлера-Бернулли для четырёх основных схем нагружения;

б) проанализировано применение различных методов оптимизации минимизации и предложены различные виды целевых функций;

в) разработаны схемы численного решения сформированной системы дифференциальных уравнений на основе применения методов минимизации целевых функций и последующего решения вспомогательных задач Коши, приведены примеры расчётов различных квазистатических характеристик;

г) показано преимущество применения разработанной методики расчёта по сравнению с существующими методами расчётов;

д) разработаны и зарегистрированы программные комплексы для расчёта квазистатических характеристик стержневых упругих элементов [65, 66] на языках программирования MATLAB и QBasic.

2 Разработана методика по расчёту динамики стержневых упругих элементов с учётом влияния их массы:

а) получены теоретические выражения для расчёта динамических характеристик стержневых упругих элементов на основе использования закона сохранения энергии для системы и результатов расчётов квазистатических характеристик;

б) представлена численная реализация предложенных теоретических выражений, приведены примеры расчётов и их анализ;

в) разработан и зарегистрирован программный комплекс по расчёту динамических характеристик стержневых упругих элементов [66] на языке программирования MATLAB;

3 Разработана методика расчёта динамики стержневого упругого элемента с учётом контактно-волнового взаимодействия ударяющегося (амортизируемого) тела и упругого элемента:

а) предложен подход к анализу начального этапа контактно-волнового взаимодействия и зарождению фронта поперечной волны;

б) приведена численная реализация выражений распространения поперечной волны в стержневых упругих элементах переменного сечения и приведены примеры расчётов;

в) разработана модель расчёта динамических характеристик стержневых упругих элементов с учётом затрат энергии на начальное контактно-волновое взаимодействие;

г) зарегистрирован программный комплекс по расчёту динамических характеристик стержневых упругих элементов [68] на языке программирования Python.

4 На основе предложенных в главах 2 - 4 методик расчёта квазистатических и динамических характеристик разработана методика расчёта характеристик для стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами:

а) предложены теоретические выражения для расчёта квазистатических характеристик стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами;

б) разработана численное решение приведённой системы дифференциальных уравнений на основе использования метода минимизации модифицированных целевых функций;

в) предложена методика расчёта динамических характеристик стержневых упругих элементов переменного сечения с зафиксированными сосредоточенными массами, представлены результаты расчётов и проведен анализ их результатов;

г) продемонстрирована практическая применимость разработанной методики посредством согласованности результатов экспериментальной работы и результатов расчётов;

д) полученные решения и рекомендации доведены до уровня их практического использования в исследовательской и инженерной практике, и используются на предприятиях отрасли, в частности в АО «СКБ» (г. Пермь).

В ходе работы были выявлены дополнительные перспективные направления дальнейших исследований:

1. Анализ динамического изгибного деформирования стержневого упругого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами показал, что динамическими характеристиками упругого элемента можно управлять с помощью варьирования величинами сосредоточенных масс и координат крепления. В результате чего была создана и отправлена заявка по патенту на изобретение – «Способ управления колебательными характеристиками стержневого амортизатора путём формирования корректирующего воздействия посредством сосредоточенных масс» (заявка № 2024131941). Исследования в данном направлении являются перспективными.

2. В ходе исследований, связанных с анализом учёта влияния контактно-волнового взаимодействия, было отмечено, что в существующей теории начальная фаза процесса взаимодействия ударяющегося тела и стержневого упругого элемента описана частично, при этом отсутствует полное аналитическое решение контактно-волновой задачи и последующего распространения поперечных волн напряжения в стержнях переменного сечения.

3. В данной работе рассматриваются процессы динамического взаимодействия при относительно малых скоростях ударного взаимодействия, поэтому не учитывалась возможность возникновения вязко-пластичных изменений в амортизирующем элементе, что является одним из возможных направлений дальнейших исследований.

Список литературы

1. Анахаев К. Н. К решению задачи нелинейного изгиба консоли / К. Н. Анахаев // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2022. – № 2(106). – С. 11-16.
2. Анфилофьев А. В. Геометрические свойства эластики стержня в разновидностях плоского изгиба / А. В. Анфилофьев // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313, № 2. – С. 12-17.
3. Афанасьев А. С. Влияние внешней воздействующей вибрации на микроэлектромеханические системы-акселерометры / А. С. Афанасьев, В. М. Полушкин, В. А. Соболев [и др.] // Лесной вестник. Forestry Bulletin. – 2019. – Т. 23, № 5. – С. 138-143.
4. Баранов В.Л. Влияние волновых процессов в стержневых амортизаторах СПВ на их изгибную деструкцию при выстреле / В.Л. Баранов, **А.С. Левин**, Р.А. Тер-Данилов // "58-я научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава ТулГУ с Всероссийским участием": Сборник докладов конференции. В 2-х частях, Часть 1. Изд-во: ТулГУ, г.Тула, 2022. - С. 44 - 49.
5. Баранов В.Л. Влияние использования сосредоточенных масс на изменение изгибных динамических характеристик стержневых упругих элементов / В.Л. Баранов, **А.С. Левин**, С.Д. Нефедов // Южно-Сибирский научный вестник. - 2024. - №4 (56). - С. 23 - 26.
6. Баранов В. Л. Влияние сосредоточенных масс как управляющих параметров на кинематику стержневых амортизаторов / В. Л. Баранов, **А. С. Левин**, Р. А. Тер-Данилов // 60-я Научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава ТулГУ с всероссийским участием: Сборник докладов. В 2-х частях, Тула, 05–09 февраля 2024 года. – Тула: Тульский государственный университет, 2024. – С. 24-34.
7. Баранов В.Л. Деформирование стержневого упругого элемента с учетом его начального волнового возмущения при поперечном ударном нагружении амортизируемой массой / В.Л. Баранов, **А.С. Левин**, В.М. Казаков, А.И. Петренко // "59-я Научно-практическая конференция профессорско-

преподавательского состава ТулГУ с Всероссийским участием": Сборник докладов конференции. В 2-х частях, Часть 1. Изд-во: ТулГУ, г. Тула, 2023. – Тула: – С. 50 - 56.

8. Баранов В.Л. Динамическое изгибное деформирование стержневых амортизаторов стрелково-пушечного вооружения / В.Л. Баранов, **А.С. Левин**, Р.А. Тер-Данилов // В сборнике: "Проблемы развития стрелковой отрасли в Российской Федерации". Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. - Ижевск, 2024 г.- С.114 - 121.

9. Баранов В.Л. Квазистатическое и динамическое изгибное деформирование стержневых упругих элементов амортизаторов с сосредоточенными массами / В.Л. Баранов, **А.С. Левин** // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии, № 6 (362), Орёл, И.: ОГУ им. И.С. Тургенева, ISSN: 2073-7408, 2024. - С. 11 - 19.

10. Баранов В.Л. Методы многомерной минимизации целевых функций при анализе изгибного деформирования стержневых упругих элементов амортизаторов / В.Л. Баранов, **А.С. Левин** // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2023. – № 3(359).– С. 8 – 13.

11. Баранов В.Л. Моделирование квазистатического изгибного деформирования стержневых упругих элементов с сосредоточенными массами / В.Л. Баранов, **А.С. Левин**, С.Д. Нефедов // Южно-Сибирский научный вестник. - 2024.- № 4 (56). - С. 27 - 30.

12. Баранов В.Л. Экспериментальное исследование динамического поперечного изгиба упругих стержневых элементов амортизаторов / В.Л. Баранов, **А.С. Левин**, Р.А. Тер-Данилов // Известия ТулГУ. Технические науки. - 2023.- №1, С. 38 - 43.

13. Баранов В. Л. Динамическое деформирование стержневых элементов амортизаторов стрелкового оружия для следящей нескользящей схемы внешнего нагружения / В. Л. Баранов, **А. С. Левин** // Известия ТулГУ. Технические науки.- 2020.-№ 11, С. 41-46.

14. Баранов В. Л. Моделирование амортизации СПВ в квазистатической и динамической постановках / В. Л. Баранов, **А. С. Левин**, Р. А. Тер-Данилов // 57-я Научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава ТулГУ с всероссийским участием : Сборник докладов в 2-х частях, Тула, 08–12 февраля 2021 года / Под редакцией М. С. Воротилина. – Тула: Тульский государственный университет, 2021. – С. 58-64.

15. Баранов В. Л. Силовые характеристики упругих элементов амортизаторов стрелкового оружия для нескользящей следящей схемы внешнего нагружения / В. Л. Баранов, **А. С. Левин** // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2018. – № 11. – С. 124-129.

16. Баранов В. Л. Сравнительный анализ результатов моделирования амортизации СПВ при выстреле в квазистатической и динамической постановках / В. Л. Баранов, **А. С. Левин** // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии, № 6 (344), Орёл, И.: ОГУ им. И.С. Тургенева, ISSN: 2073-7408, 2020 год.- С. 24-28.

17. Богданов М. Б. Способ уменьшения погрешностей бесплатформенной инерциальной навигационной системы / М. Б. Богданов, А. В. Прохорцов, В. В. Савельев [и др.] // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. – 2009. – № 2(60). – С. 31-34.

18. Богульский И. О. Численный анализ нелинейной краевой задачи плоской деформации стержня / И. О. Богульский // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. РАН. Сибирское отделение. Ин-т гидродинамики.- 1999.- Вып. 114.- С. 140 – 141.

19. Ваксман С. М. Определение контактной силы при интенсивном поперечном ударе по бесконечной балке / С. М. Ваксман, Е. Н. Курбацкий // Изв. ВНИИ гидротехники - 1986. -191. - С. 107-111.

20. Горелик, Г.С. Колебания и волны: введение в акустику, радиофизику и оптику / Г. С. Горелик. - Москва; Ленинград : Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. - 551 с.

21. Григолюк Э.И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек: Обзор / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. - Москва : [б. и.], 1973. - 271 с.
22. Гутников В.С. Фильтрация измерительных сигналов / В.С. Гутников – Ленинград: Энергоатомиздат, 1990. – 192 с.
23. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон; Пер. с англ. В. Э. Наумова, А. А. Спектора; Под ред. Р. В. Гольдштейна. - Москва: Мир, 1989. - 509 с.
24. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Доннелл; Пер. с англ. Л. Г. Корнейчука. - Москва : Наука, 1982. - 567 с.
25. Жадан В. Г. Допустимый двойственный метод внутренней точки для линейной задачи полуопределенного программирования / В. Г. Жадан, А. А. Орлов // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 2. – С. 25-40.
26. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней / П.А Жилин // Санкт-Петербург, Изд-во Политехнического университета.- 2007.- 100 с.
27. Залетдинов А. В. Математическое моделирование волновых процессов в твердых телах после ударного воздействия: специальность 05.13.18 "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Залетдинов Артур Вильевич. – Воронеж, 2014. – 138 с.
28. Захаров Ю. В. Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли / Ю. В. Захаров, А. А. Захаренко // Вычислительные технологии. – 1999. – Т. 4, № 1. – С. 48-54.
29. Захаров Ю. В. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней / Ю. В. Захаров, К. Г. Охоткин // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43, № 5(255). – С. 124-131.
30. Зельдович Я.Б. Элементы прикладной математики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 566 с.

31. Зуев Д. М. Модифицированные выражения для стрелы прогиба консоли в случае поперечной нагрузки / Д. М. Зуев, К. Г. Охоткин // Космические аппараты и технологии. – 2020. – Т. 4, № 1(31). – С. 28-35.
32. Зуев Д. М. Экспериментальное и аналитическое исследование геометрически-нелинейного изгиба консоли под действием распределенной нагрузки гравитационного типа / Д. М. Зуев, Д. Д. Макаров, К. Г. Охоткин // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 78. – С. 99-111.
33. Зуев Д. М. Экспериментальное и аналитическое исследование стрелы прогиба гибкого стержня под действием комбинированной нагрузки при больших деформациях изгиба / Д. М. Зуев, Д. Д. Макаров, К. Г. Охоткин // Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2021 : Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием, Томск, 17–21 ноября 2021 года. Под редакцией М.Ю. Орлова. – Томск: Национальный исследовательский Томский государственный университет, 2022. – С. 84-89.
34. Ионов В. Н. Прочность пространственных элементов конструкций / В. Н. Ионов, П. М. Огибалов. - Москва : Высш. школа, 1972.- 752 с.
35. Каган-Розенцвейг Л. М. О продольно-поперечном изгибе консольного стержня переменного сечения / Л. М. Каган-Розенцвейг // Вестник гражданских инженеров. – 2007. – № 4(13). – С. 14-17.
36. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах / Пер. с англ. В. С. Ленского. - Москва : Изд-во иностр. лит., 1955. - 192 с., 2 л. ил.
37. Лалин В. В. Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко / В. В. Лалин, М. О. Беляев // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – № 1(53). – С. 39-55.
38. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин / Дж. Н. Ланс.- Пер. с англ. И. А. Брина ; Под ред. В. М. Курочкина.- Москва : Изд-во иностр. лит., 1962. - 208 с.

39. **Левин А.С.** Расчёт динамических характеристик для различных схем нагружения упругих элементов амортизаторов СПВ / А.С. Левин // Сборник докладов конференции: «Техника XXI века глазами молодых учёных и специалистов». - 2021 год. - № 19. - С.144 - 151.

40. **Левин А.С.** Экспериментально-теоретический анализ ударно-волнового и динамического деформирования упругого элемента амортизатора / А.С. Левин // Сборник докладов конференции: «Техника XXI века глазами молодых учёных и специалистов. 2023». - № 22. - С. 104 -110.

41. **Левин А.С.** Влияние параметров подвижных частей СПВ на динамику стержневого амортизатора // Сборник статей «57-я научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава ТулГУ с всероссийским участием», Изд-во: ТулГУ, г.Тула, 2021 г., С. 64-68.

42. **Левин А.С.** Упругое изгибное деформирование элементов балочных амортизаторов для нескользящей следящей схемы внешнего нагружения // Сборник докладов конференции: «Техника XXI века глазами молодых учёных и специалистов». 2022. - № 21. - С 220-226.

43. **Левин В.Е.** Механика деформирования криволинейных стержней: монография / В. Е. Левин, Н. В. Пустовой. - Новосибирск : НГТУ, 2008. - 207 с.

44. **Локтев А. А.** Динамический контакт ударника и тонких тел с учетом волновых процессов: специальность 01.02.04 "Механика деформируемого твёрдого тела" : диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Локтев Алексей Алексеевич. – Москва, 2010.– 272 с.

45. **Мещеряков В. Б.** Поведение тонкостенных стержней при ударных нагрузках / В. Б. Мещеряков, З. Л. Аунг, Л. Ю. Соловьев // Известия Транссиба. – 2012. – № 3(11). – С. 113-123.

46. **Мещеряков В. Б.** Поведение тонкостенных стержней при ударных нагрузках / В. Б. Мещеряков, З. Л. Аунг, Л. Ю. Соловьев // Известия Транссиба. – 2012. – № 3(11). – С. 113-123.

47. **Новацкий В.К.** Волновые задачи теории пластичности / пер. с пол. В.А. Шачнева ; под ред. Г.С. Шапиро. - Москва : Мир, 1978. - 307 с. : ил.

48. Патент KZ A4 20671 Республика Казахстан МПК В60G 11/34, В60G 21/04. Подвеска полурессорная, независимая [Текст] / Вуйко А.А.; заявитель и патентообладатель Вуйко А.А. - № 2007/0485.1 ; заявл. 11.04.2007 ; опубл. 15.01.2009, Бюл. № 12 – 11 с.: ил.

49. Патент № RU2168144C1 Российская Федерация, МПК F41 C 23/06 (2006.01). Приклад для огнестрельного оружия: / Бондарев Л.В.; заявитель и патентообладатель ГУП КБП - № 99119626/02 ; заявл. 13.09.1999 ; опубл. 27.05.2001 - 4 с. : ил.

50. Патент RU 147475 U1 Российская Федерация, МПК В60R 3/00. Порог амортизирующий [Текст] / Валовой Г.А.; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВО Дальневосточный государственный аграрный университет – № 2014125948/11; заявл. 26.05.2014 ; опубл. 10.11.2014, Бюл. № 31 - 9 с.: ил.

51. Патент RU 164802 U1 Российская Федерация, МПК В60G 11/18, F16F 1/14. Межколесный регулятор собственной нагрузки транспортного средства [Текст] / Щитов С.В.; заявитель и патентообладатель ФГЮОУ ВО Дальневосточный государственный аграрный университет - № 2015155492/11 ; заявл. 23.12.2015 ; опубл. 20.09.2016 – 9 с.: ил.

52. Патент US 10485689 B1 США, МПК А61F 5/0125, А61Н 3/00. VRB cantilever-based unloaded brace assembly [Текст] / Walsh R., Tarlton P.B.; заявитель и патентообладатель Alliance Design and Development.- № 15/438367 ; заявл. 11.01.2012 ; опубл. 21.02.2017 - 58 с.: ил.

53. Патент US 7553165 B2 США, МПК H01R 12/00. Spring interconnect structures [Текст] / Mathieu G.L. , Eldridge B.N.; заявитель и патентообладатель Form Factor Inc. - № 12/120112 ; заявл. 13.05.2008 ; опубл. 30.06.2009 – 56 с. : ил.

54. Попов Е.П. Расчёт гибких брусьев при больших перемещениях / Е.П. Попов - Инженерный сборник, 1943, т.2, вып. 1, С. 48-66.

55. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней / Е. П. Попов. – Москва : Академический научно-издательский, производственно-полиграфический и книгораспространительский центр Российской Академии Наук "Издательство "Наука", 1986. – 296 с.

56. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней / Е.П. Попов – Л.; М.: Гостехиздат, 1948. – 170 с.
57. Прохорцов А. В. Обзор высокоточных акселерометров российских производителей / А. В. Прохорцов, О. В. Минина // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – № 10. – С. 301-305.
58. Прохорцов А. В. Результаты экспериментального исследования акселерометров АТ 1105 / А.В. Прохорцов, Н.Д. Юдакова // Известия Тульского государственного университета. Технические науки, 2019. Вып. 10. С. 286-291.
59. Пустовой Н. В. Алгоритм численного решения нелинейной краевой задачи динамического деформирования тонкого стержня / Н. В. Пустовой, В. Е. Левин, Д. А. Красноручский // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 168-199.
60. Сащенко М. А. Сравнительный анализ математических моделей балок Бернулли - Эйлера, Тимошенко, Шереметьева - Пелеха, Акавчи, Туаратье на примере контактной задачи / М. А. Сащенко, Д. А. Павлов, М. В. Жигалов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2022. – № 1(92). – С. 36-49.
61. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей / В. А. Светлицкий. – М.: Наука, 1978. – 222 с.
62. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб, для вузов. В 2-х ч, Ч. I. Статика / В. А. Светлицкий. – М.: Высш. школа, 1987.– 384 с.
63. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб, для вузов. В 2-х ч, Ч. II. Динамика / В. А. Светлицкий. – М.: Высш. школа, 1987.—304 с.
64. Светлицкий В.А. Упругие элементы машин / В. А. Светлицкий, О. С. Нарайкин.- М.: Машиностроение, 1989. – 264 с.
65. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019616355 Российская Федерация. Программа расчета характеристик упругих элементов : № 2019615021 : заявл. 06.05.2019 : опубл. 22.05.2019 / В. Л. Баранов, А. С. Левин, Р. А. Тер-Данилов ; заявитель Федеральное государственное бюд-

жетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (ТулГУ).

66. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021663947 Российская Федерация. Программа динамического расчёта параметров напряженно-деформированного и кинематического состояний и силовых характеристик упругих элементов амортизаторов : № 2021662908 : заявл. 12.08.2021 : опубл. 26.08.2021 / В. Л. Баранов, **А. С. Левин**, Р. А. Тер-Данилов; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет».

67. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019662955 Российская Федерация. Программа расчета параметров напряжённо-деформированного состояния ударно-нагруженных неоднородных стержней из упруго-вязкопластических материалов: № 2019662003 : заявл. 30.09.2019 : опубл. 07.10.2019 / В.Л. Баранов, Н.П. Смирнов, Р.А. Тер-Данилов, **А.С. Левин** ; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (ТулГУ).

68. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023686003 Российская Федерация. Программа расчета кинетики параметров напряженно-деформированного и кинематического состояний ударно нагруженных стержневых элементов амортизаторов с учетом возникающих в них волновых процессов : № 2023685355 : заявл. 21.11.2023: опубл. 01.12.2023 / В.Л. Баранов, **А.С. Левин**, Р.А. Тер-Данилов; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (ТулГУ).

69. Сгибнев М. Д. Динамика мачтовых и антенных сооружений при аварийном столкновении судна с препятствием / М. Д. Сгибнев, С. Н. Царенко // Техническая эксплуатация водного транспорта: проблемы и пути развития: Материалы Пятой международной научно-технической конференции, Петропавловск-Камчатский, 18–21 октября 2022 года. – Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный технический университет, 2022. – С. 23-26.

70. Серазутдинов М. Н. Статика и динамика криволинейных стержней на основе гипотез Бернулли и соотношений для прямолинейного стержня / М. Н. Серазутдинов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2023. – Т. 19, № 1. – С. 73-83.

71. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов / С.П. Тимошенко – Москва : «Государственное издательство технико-теоретической литературы», 1957. — 536 с.

72. Тимошенко С.П. Механика материалов: Учебник для вузов / С.П. Тимошенко, Дж. Гере // СПб.: Издательство: «Лань», 2002. - 672 с.

73. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 1 / Г. М. Фихтенгольц. – Санкт-Петербург : Наука, 1968. – 440 с.

74. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер; Пер. с англ. И. А. Кульчицкий, С. С. Филиппова; Под ред. С. С. Филиппова. - Москва : Мир, 1990. - 512 с.

75. Хамитов Т. К. Потеря устойчивости упругих стержней при продольном ударе силой, изменяющейся по линейному закону, при различных способах закрепления / Т. К. Хамитов, Ф. Г. Шигабутдинов // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2009. – № 1(37). – С. 200-205.

76. Царенко С. Н. Моделирование сейсмических воздействий на основе упругой одномассовой системы с нестационарной опорой / С. Н. Царенко, М. Д. Сгибнев // Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. – 2022. – № 3(155). – С. 47-54.

77. Цуканова Е. С. Анализ стержневых систем методом конечных элементов при ударной нагрузке с применением динамического элемента / Е. С. Цуканова // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2016. – № 2(50). – С. 68-77.

78. Цуканова Е. С. Применение динамических конечных элементов в расчетах стержневых систем, работающих при ударной нагрузке / Е. С. Цуканова,

Б. Г. Кеглин // Строительство и реконструкция. – 2017. – № 1(69). – С. 90-97.

79. Цуканова Е.С. Расчёт вынужденных колебаний стержневых систем методом конечных элементов с применением динамического конечного элемента / Е.С. Цуканова // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2015. - № 2(46). – С. 93 – 103.

80. Abbasi H. Implementation of Differential Transform Method (DTM) for Large Deformation Analysis of Cantilever Beam / H. Abbasi, A. Javed // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 899, No. 1. – P. 122 – 132.

81. Abrate S. Modeling of impacts on composite structures / S. Abrate // Composite Structures. – 2001. – Vol. 51, No. 2. – P. 129-138.

82. Bartels S. Numerical solution of a bending-torsion model for elastic rods / S. Bartels, P. Reiter // Numerische Mathematic (2020) 146.- P. 661-697.

83. Bielak J. Base moment for a class of linear systems / J. Bielak // Journal of the Engineering Mechanics Division.- Vol. 95, Issue 5., 1969. - P. 1053-1062.

84. Bogdanov M.B. Errors of accelerometer strapdown inertial navigation system in the conditions of aircraft longitudinal axis coning motion / A.V. Prohortsov, V.V. Savelyev, V.A. Smirnov // 20th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems: proceedings. Saint Petersburg, 2013.- P. 69-71.

85. Bouadjadja S. Analytical and experimental investigations on large deflection analysis of composite cantilever beams / S. Bouadjadja, A. Tatia, B. Guerira // Mechanics of advanced materials and structures. – Abington, 2022. – Vol. 29. – P. 118 – 126.

86. BPW Original spare parts. BPW Air suspension kits: catalog / BPW Bergische Achsen Kommanditgesellschaft, Wiehl, Germany, 2023. – 152 p.

87. Byrd R.H. Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming / R.H. Byrd, J.C. Gilbert, J.A. Nocedal // *Mathematical Programming*. – 2000. - Vol. 89. - № 1. - P. 149–185.

88. Conn A.R. Trust-Region Methods / A.R. Conn, I.M. Gould, P.L. Toint // Society for Industrial and Applied Mathematics.- 2000 – 959 p.
89. Dehrouyeh-Semnani A. M. On large deformation and stability of microcantilevers under follower load / A. M. Dehrouyeh-Semnani // International Journal of Engineering Science. – Amsterdam, 2021. – Vol. 168. – P. 1 – 17.
90. Deng W. An improved differential evolution algorithm and its application in optimization problem / W. Deng, Sh. Shang, X. Cai [et al.] // Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications. – 2021. – Vol. 25, No. 7. – P. 5277-5298.
91. Dill E. H. Kirchhoff's theory of rods / E.H. Dill // Archive for History of Exact Sciences, 44(1), 1992.- P. 1–23. 181-217.
92. Dormand J.R. A family of embedded Runge-Kutta formulae / J.R. Dormand, P.J. Prince // Journal of Computational and Applied Mathematics. – Amsterdam, 1980. – Vol. 6. No. 1 – P. 19 – 26.
93. Dormand J.R. Numerical Methods for Differential Equations: A Computational Approach / J.R. Dormand // CRC press - Boca Raton, 1996.- P. 82–84.
94. Du X. Dynamics Analysis of Rotating Cantilever Beams with Free End Mass / X. Du, J. Zhang, X. Guo [et al.] // Applied Sciences (Switzerland). – 2022. – Vol. 12, No. 15. – P. 7553 - 7570.
95. Endres S.C. A simplicial homology algorithm for Lipschitz optimization / S.C. Endres, C. Sandrock, W.W. Focke // Journal of Global Optimization.- 2018.- Vol. 72.- P. 181-217.
96. Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maxim minimize proprietate gaudentes sive Solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. / L. Euler. - Auctore Leonhardo Eulero. - Lausannae ; Genevae : Bousquet, 1744. – 322 p.
97. Farokhi H. Experimentally validated geometrically exact model for extreme nonlinear motions of cantilevers / H. Farokhi, Y. Xia, A. Erturk // Nonlinear Dynamics. – 2022. – Vol. 107, No. 1. – P. 457-475.

98. Giorgio I. A discrete formulation of Kirchhoff rods in large-motion dynamics / I. Giorgio // *Mathematics and Mechanics of Solids*. – 2020. – Vol. 25, No. 5. – P. 1081-1100.
99. Hongjin W. Discussion of the Improved Methods for Analyzing Beam Carrying a Tip-Mass under Base Excitation / W. Hongjin, M. Qingfeng, W. Feng // *Shock and Vibration*. – 2014. – Vol. 2.- P. 1 – 15.
100. Ji W. Dynamic characteristics analysis of a rotating flexible curved beam with a concentrated mass / W. Ji, Z. Dingguo, L. Liang [et al.] // *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. – Beijing, 2019. – Vol. 51.- P. 1134 – 1147.
101. Lalin V. V. New results in dynamics stability problems of elastic rods / V. V. Lalin, D. A. Kushova // *Applied Mechanics and Materials*. – 2014. – Vol. 617. – P. 181-186.
102. Lee U. Spectral Element Method in Structural Dynamics / U. Lee, J. Kim, A.Y.T. Leung // *The Shock and Vibration Digest*. – Cambridge, 2009. – Vol. 32.– P. 451 – 465.
103. Love A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity/ A. E. H. Love – Cambridge: University press.- 1927.- 369 p.
104. Meesala V. C. Parameter sensitivity of cantilever beam with tip mass to parametric excitation / V. C. Meesala, M. R. Hajj // *Nonlinear Dynamics*. – 2019. – Vol. 95, No. 4. – P. 3375-3384.
105. Mustapha K. B. Practical Finite Element Simulations with SOLIDWORKS 2022: An illustrated guide to performing static analysis with SOLIDWORKS Simulation / K.B. Mustapha.- Packt Publishing Ltd.- 2022.- 480 p.
106. Ou, Q. A two-mass cantilever beam model for vibration energy harvesting applications / Q. Ou, X. Q. Chen, A. Wood [et al.] // 2010 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering, CASE 2010, 21–24 августа 2010 года / sponsors: IEEE Robotics and Automation Society. – Toronto, ON, 2010. – P. 301-306.
107. Ou Q. An experimentally validated double mass piezoelectric cantilever model for broadband vibration-based energy harvesting / Q. Ou,

X. Chen, S. Gutschmidt [et al.] // Journal of Intelligent Material Systems and Structures.- 2012.- Vol. 23.- P. 117 – 126.

108. Ruiz A. Parametric Solutions to a Static Fourth-Order Euler–Bernoulli Beam Equation in Terms of Lamé Functions / A. Ruiz, C. Muriel, J. Ramírez // Recent advances in pure and applied Mathematics. – Cham, 2020.- Vol. 4. – P. 93 – 103.

109. Shao H. Accurately Solving Rod Dynamics with Graph Learning / H. Shao, T. Kugelstadt, T. Hädrich [et al.] // Advances in Neural Information Processing Systems.- 2021.- Vol. 34.- P. 4829-4842.

110. Späth H. One dimensional spline interpolation algorithms / H. Späth, A.K. Peters // Wellesley, Massachusetts, 1995.- 412 p.

111. Stempin P. Dynamics of Space-Fractional Euler–Bernoulli and Timoshenko Beam / P. Stempin, W. Sumelka // Materials. – Montreal, 2020. – Vol. 14. – P. 1817 – 1836.

112. Storn R. Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces / R. Storn, K. Price // Journal of Global Optimization. – 1997. – Vol. 11, No. 4. – P. 341-359.

113. Villermaux E. Mode Coarsening or Fracture: Energy Transfer Mechanisms in Dynamic Buckling of Rods / E. Villermaux, F. J. Ulm, N. Vandenberg [et al.] // Physical Review Letters. – 2021. – Vol. 126, No. 4. – P. 45 - 50.

114. Weia H. Dynamic large deformation analysis of a cantilever beam / H. Weia, Pan Q.X., Adetoro O.B. [et al.] // Mathematics and computers in simulation. – Amsterdam, 2020. – Vol. 174. – P. 183 – 204.

115. Yamamoto S. A study on lateral impact of Timoshenko beam / S. Yamamoto, K. Sato, H. Koseki // Computational Mechanics.- 1990.- Vol. 6, No. 2.- P. 101–108.

116. Zhang S. Y. Three kinds of nonlinear dispersive waves in elastic rods with finite deformation / S. Y. Zhang, Z. F. Liu // Applied Mathematics and Mechanics. – 2008. – Vol. 29, No. 7. – P. 909-917.

Приложение А
(рекомендуемое)

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU2019662955

**ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

Номер регистрации (свидетельства):
2019662955
Дата регистрации: 07.10.2019
Номер и дата поступления заявки:
2019662003 30.09.2019
Дата публикации и номер бюллетеня:
07.10.2019 Бюл. № 10
Контактные реквизиты:
300012, г. Тула, пр-кт Ленина, 92

Автор(ы):
Баранов Виктор Леопольдович (RU),
Смирнов Николай Павлович (RU),
Тер-Данилов Роман Арустамович (RU),
Левин Артём Сергеевич (RU)
Правообладатель(и):
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Тульский государственный
университет» (ТулГУ) (RU)

Название программы для ЭВМ:

«Программа расчета параметров напряжённно-деформированного состояния ударно-нагруженных неоднородных стержней из упруго-вязкопластических материалов»

Реферат:

Программа позволяет анализировать последствия распространения волн напряжений в геометрически неоднородных одномерных элементах конструкции из упруго-вязкопластических материалов. Область применения: волновое нагружение геометрически неоднородных стержневых конструкций; задачи контактной приработки поверхностей в случае их неоднократного ударного нагружения. Функциональные возможности программы: расчет деформаций в процессе нагружения по сечениям деформируемого элемента; расчет напряжений в процессе нагружения по сечениям деформируемого элемента; расчет остаточных деформаций по сечениям деформируемого элемента; расчет изменения геометрических параметров деформируемого элемента вследствие его нагружения. Тип реализующей ЭВМ: AMD Athlon(tm) II X2 215 Processor 2.70 GHz, 2,00 Гб ОЗУ и выше, 64-разрядная операционная система. Операционная система: Windows 7 SP1 и выше.

Язык программирования: qBasic

Объем программы для ЭВМ: 84 Кб

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**RU2019616355**

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2019616355 Дата регистрации: 22.05.2019 Номер и дата поступления заявки: 2019615021 06.05.2019 Дата публикации и номер бюллетеня: 22.05.2019 Бюл. № 6 Контактные реквизиты: нет	Автор(ы): Баранов Виктор Леопольдович (RU), Левин Артём Сергеевич (RU), Тер-Данилов Роман Арустамович (RU) Правообладатель(и): Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (ТулГУ) (RU)
--	---

Название программы для ЭВМ:
«Программа расчета характеристик упругих элементов»

Реферат:

Программа предназначена для расчета прогиба упругого элемента в зависимости от сечения и вида нагружения. Программа позволяет рассчитать силовую характеристику упругого элемента. Программа позволяет рассчитать в квазистатической постановке задачу торможения тела упругим элементом в зависимости от скорости и массы тела, рассчитать скорость и энергию в зависимости от прогиба. Область применения: расчетное определение прогиба упругих элементов, расчет силовых характеристик упругих элементов, расчет скорости и энергии врезавшегося в упругий элемент тела. Функциональные возможности программы: расчет прогиба упругого элемента в зависимости от вида нагрузки и сечения упругого элемента; расчет силовых характеристик упругих элементов; расчет скорости и энергии врезавшегося в упругий элемент тела; сохранение полученных графиков и расчетов.

Язык программирования: MATLAB

Объем программы для ЭВМ: 3,61 Мб

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**RU2021663947**

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2021663947 Дата регистрации: 26.08.2021 Номер и дата поступления заявки: 2021662908 12.08.2021 Дата публикации и номер бюллетеня: 26.08.2021 Бюл. № 9	Автор(ы): Баранов Виктор Леопольдович (RU), Левин Артём Сергеевич (RU), Тер-Данилов Роман Арустамович (RU) Правообладатель(и): Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (ТулГУ) (RU)
--	---

Название программы для ЭВМ:

«Программа динамического расчёта параметров напряженно-деформированного и кинематического состояний и силовых характеристик упругих элементов амортизаторов»

Реферат:

Программа позволяет проводить численную оценку изменения различных параметров упругих элементов амортизаторов в процессе их нагружения как во времени, так и в функции перемещения, в динамической постановке с учётом кинетической энергии массы упругого элемента. К их числу относятся силовые, кинематические и энергетические характеристики упругого элемента и амортизируемой массы. Варьируемые параметры - геометрические характеристики и материал упругого элемента, начальная кинетическая энергия амортизируемой массы. Область применения: определение времени полного торможения амортизируемой массы и прогибов упругих элементов амортизаторов; изучение кинетики их силовых, кинематических и энергетических характеристик в процессе торможения. Функциональные возможности программы: расчет перемещений упругого элемента в зависимости от вида нагрузки и сечения упругого элемента; расчет силовых и энергетических характеристик упругих элементов; расчет кинематических и динамических характеристик упругих элементов и тормозящего тела; визуализация результатов расчетов. Тип ЭВМ: IBM PC на базе процессора AMD Athlon; ОС: Windows 7 SP1 и выше.

Язык программирования: Matlab

Объем программы для ЭВМ: 4,05 МБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU2023686003

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2023686003

Дата регистрации: 01.12.2023

Номер и дата поступления заявки:
2023685355 21.11.2023

Дата публикации и номер бюллетеня:
01.12.2023 Бюл. № 12

Контактные реквизиты:
нет

Автор(ы):

Баранов Виктор Леопольдович (RU),
Левин Артём Сергеевич (RU),
Тер-Данилов Роман Арустамович (RU)

Правообладатель(и):

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Тульский государственный
университет» (ТулГУ) (RU)

Название программы для ЭВМ:

Программа расчета кинетики параметров напряженно-деформированного и кинематического состояний ударно нагруженных стержневых элементов амортизаторов с учетом возникающих в них волновых процессов

Реферат:

Программа позволяет решать задачи изучения кинетики прогибов упругих стержневых элементов с помощью современных численных методов решения дифференциальных уравнений и методов их оптимизации; рассчитывать параметры волновых процессов и анализировать влияние профиля фронта поперечной волны напряжений в упругих стержневых элементах амортизаторов на энергобаланс процесса их поперечного деформирования. Область применения: расчёты параметров напряженно-деформированного и кинематического состояний упругих стержневых элементов амортизаторов в режимах их квазистатического, динамического и волнового внешнего нагружения на этапе составления расчётно-конструкторской документации и научно-исследовательских работ. Функциональные возможности программы: расчет кинетики прогибов упругих стержневых элементов амортизаторов в зависимости от параметров и вида их внешнего нагружения; расчет силовых характеристик упругих стержневых элементов амортизаторов; расчет изменения скорости и энергии амортизируемого тела с учетом затрат энергии на начальное ударное контактное взаимодействие; расчёт кинетики профилей поперечных волн напряжений; сохранение полученных графиков и расчетов. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК на базе процессора 11th Gen Intel Core i5-11400F с тактовой частотой 2.60 ГГц. ОС: Windows 10 и выше.

Язык программирования: Python

Объем программы для ЭВМ: 138 КБ

Приложение Б
(рекомендуемое)

Акты о внедрении результатов



Акционерное общество
«СПЕЦИАЛЬНОЕ
КОНСТРУКТОРСКОЕ БЮРО»
(АО «СКБ»)

1905 года ул., д. 35/Ж, г. Пермь, 614014
Тел./факс: +7 (342) 260-73-01, 260-75-92
E-mail: sdg@mzperm.ru
ОКПО 44821531, ОГРН 1025901364026
ИНН/КПП 5906034720/590601001

№ _____

На № _____ от _____

УТВЕРЖДАЮ
Главный конструктор

«СД»  О.А. Падерин

2024 г.

(по Доверенности №139 от 21.21.2023 г.)



АКТ

о внедрении результатов

кандидатской диссертационной работы Левина Артёма Сергеевича
«Квазистатическое, динамическое и ударное изгибное деформирование стержневых
упругих элементов амортизаторов с сосредоточенными массами»

Комиссия в составе:

Председатель: Хоменок Д.В. - заместитель главного конструктора;

члены комиссии: Секлецов А.В. - главный конструктор по направлению РСЗО;

Емшанов И.Н. - начальник конструкторского отдела, секретарь
научно-технического совета;

составила настоящий акт о том, что результаты кандидатской диссертационной работы Левина А.С. в виде программного комплекса, реализующего модель стержневого упругого элемента с сосредоточенными массами, позволяющего рассчитывать квазистатические и динамические характеристики стержневых упругих элементов, используются в исследовательских работах АО «СКБ» при разработке технических предложений и проектных решений, связанных с разработкой амортизирующих устройств с управляемыми свойствами.

В рамках научно-технического сотрудничества были проведены вычислительные эксперименты по оценке квазистатических и динамических характеристик стержневых упругих элементов, которые позволили установить величину прогибов и времён первого останова упругих элементов амортизирующих устройств. Полученные в результате расчётов квазистатические и динамические характеристики стержневых упругих элементов близки к экспериментальным данным, что подтверждает возможность использования программного комплекса в практической разработке.

Председатель комиссии

Члены комиссии

 Д.В. Хоменок
А.В. Секлецов
И.Н. Емшанов

022.02.24



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
ФГБОУ ВО «Тульский
государственный университет», д.т.н.

В.В. Котов

АКТ

о внедрении результатов

кандидатской диссертационной работы Левина Артёма Сергеевича
«Моделирование изгибного деформирования стержневых упругих элементов
с сосредоточенными массами» в учебном процессе
Тульского государственного университета

Комиссия в составе начальника учебно-методического управления, к.т.н., доцента А.В. Моржова, и.о. директора ИВТС им. В.П. Грязева, д.т.н., доцента А.В. Прохорцова, и.о. заведующего кафедрой «Проектирование и производство стрелково-пушечного вооружения», д.т.н., доцента И.Е. Агуреева, доцента кафедры «Проектирование и производство стрелково-пушечного вооружения», к.т.н., доцента Р.А. Тер-Данилова составила настоящий акт о том, что в учебном процессе Тульского государственного университета использованы следующие результаты кандидатской диссертации Левина А.С.:

1. Математическая модель нелинейного изгиба стержневых упругих элементов амортизаторов на основе уравнения Эйлера-Бернулли.
2. Комплексная методика расчёта квазистатического и динамического изгибного деформирования стержневых элементов с зафиксированными сосредоточенными массами.
3. Программные комплексы по расчёту упругого изгибного деформирования стержневых упругих элементов амортизаторов с сосредоточенными массами.

Начальник учебно-методического
управления, к.т.н., доцент

А.В. Моржов

И.о. директора ИВТС им. В.П. Грязева
д.т.н., доцент

А.В. Прохорцов

И.о. зав. кафедрой ППСИВ
д.т.н., доцент

И.Е. Агуреев

Доцент кафедры ППСИВ
к.т.н., доцент

Р.А. Тер-Данилов