

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тульский государственный университет»**

На правах рукописи

ТРЕЩЕВА Ольга Витальевна



**РАЗРАБОТКА МЕТОДА РАСЧЕТА ОБДЕЛОК ТОННЕЛЕЙ
КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, СООРУЖАЕМЫХ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ЗАЩИТНЫХ ЭКРАНОВ ИЗ ТРУБ**

*Специальность: 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика*

**диссертация
на соискание ученой степени кандидата технических наук**

**Научный руководитель –
д-р техн. наук, доцент
Анциферов Сергей Владимирович**

Тула – 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	12
1.1 Практика применения защитных экранов из труб при проходке тоннелей в сложных горно-геологических условиях	12
1.2 Обзор существующих методов оценки напряженно-деформированного состояния грунта, обделок тоннелей и труб защитного экрана.....	21
Выводы по главе 1.....	35
2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ОБДЕЛКА ТОННЕЛЯ – МАССИВ ГРУНТА – ТРУБЫ ЗАЩИТНОГО ЭКРАНА».....	38
2.1 Основные положения и задачи выполняемого исследования.....	38
2.2 Постановка задачи геомеханики о взаимодействии обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитного экрана из труб, с массивом грунта	40
2.3 Расчетные схемы плоской задачи теории упругости	42
2.4 Граничные условия плоской задачи теории упругости.....	45
2.5 Учет технологических и реологических факторов, влияющих на формирование напряженно-деформированного состояния элементов геомеханической системы	46
Выводы по главе 2.....	46
3 РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	48
3.1 Граничные условия краевой задачи ТФКП.....	48
3.2 Определение функций $f_1(t_1)$ и $f_m(t_m)$	51
3.3 Определение главных векторов внешних усилий на контурах L_1 и L_m	53
3.4 Представление комплексных потенциалов	54
3.5 Аналитическое продолжение функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ через границу полуплоскости.....	56
3.7 Преобразование граничных условий.....	60

3.8 Соотношения между коэффициентами разложений комплексных потенциалов в ряды в областях S_1 и S_1	65
3.9 Формирование разрешающих систем алгебраических уравнений	70
3.10 Определение коэффициентов $c_k^{(s)(0,m)}$ для $m = 2, \dots, N + 1$	73
3.11 Итерационный процесс решения задачи	77
3.12 Вычисление напряжений.....	78
Выводы по главе 3.....	82
4 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ, АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА РАСЧЁТА	83
4.1 Описание общих исходных данных, необходимых для расчета.....	83
4.2 Описание алгоритма расчета	84
4.3 Описание программы, реализующей разработанный метод расчета	93
4.4 Проверка точности удовлетворения граничных условий	94
Выводы по главе 4.....	95
5 ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ФОРМИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБДЕЛКИ ТОННЕЛЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СОЧЕТАНИЯХ ВЛИЯЮЩИХ ФАКТОРОВ	97
5.1 Примеры расчета	97
5.1.1 Влияние защитного экрана из труб на напряженное состояние массива грунта на контуре незакрепленной выработки	98
5.1.2 Влияние величины коэффициента бокового давления и расстояния до центров сечений труб на напряжения на контуре выработки.....	100
5.1.3 Влияние расстояния от труб защитного экрана до контура выработки на напряженное состояние обделки тоннеля и массива грунта.....	103
5.1.4 Влияние формы защитного экрана из труб на напряженное состояние массива грунта и обделки тоннеля	110
5.2 Зависимости напряженного состояния массива грунта и обделки тоннеля от основных влияющих факторов при различных формах экрана.....	114
5.2.1 Плоский экран из труб, расположенных горизонтально над выработкой	114

5.2.2 Экран из труб, расположенных вокруг выработки по замкнутому контуру.....	129
5.2.3 Зависимости напряжений в грунте и обделке тоннеля при П-образной форме защитного экрана	132
5.2.4 Сравнение влияния различных форм защитного экрана на напряженное состояние массива грунта и обделки тоннеля	137
Выводы по главе 5.....	148
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	150
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	153

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. При строительстве тоннелей закрытым способом вблизи земной поверхности в слабых грунтах на отдельных участках трасс тоннелей применяются технологии проходки, предусматривающие опережающее крепление грунта. В настоящее время в отечественном и зарубежном тоннелестроении широкое распространение получило обустройство экранов из труб, выполненных из различных материалов, размещаемых в грунте по контуру выработки вдоль или под некоторым малым углом к ее продольной оси путем продавливания, прокола, а также микротоннелирования.

Предварительно установленные защитные экраны позволяют свести к минимуму нарушения существующей наземной инфраструктуры, уменьшить осадки земной поверхности, способствуют безопасному выполнению проходческих работ в сложных горно-геологических условиях и обеспечивают устойчивость окружающего грунтового массива.

В существующих нормативно-технических документах по проектированию и строительству подземных сооружений различного назначения регламентируются методики определения напряжений и деформаций в трубах, использующие подходы строительной механики, косвенно учитывающие собственную несущую способность массива грунта.

Поскольку трубы экрана рассчитываются на так называемые "активные нагрузки", величина которых определяется априори с помощью различных эмпирических гипотез, использование имеющихся методик не позволяет выполнить геомеханическое обоснование рациональных параметров экрана, к которым можно отнести конфигурацию экрана, количество труб и размеры их поперечного сечения, необходимость дополнительного заполнения труб бетоном или железобетоном. Следует отметить, что в данных документах отсутствуют рекомендации по комплексному учету влияния перечисленных выше факторов на прочность и несущую способность непосредственно обделок сооружаемых тоннелей.

Степень разработанности темы исследования. Совершенствованию практики строительства тоннелей различного назначения с применением опережающего крепления посвящены работы Безродного К.П., Власова С.Н., Гречухина В.А., Деменкова П.А., Дормана И.Я., Ильичева В.А., Кавказского В.Н., Карасева М.А., Лебедева М.О., Маковского Л.В., Маслака В.А., Меркина В.Е., Пастушкова Г.П., Протосени А.Г., Фролова Ю.С., Шарифова С.А., Щекудова Е.В., Lunardi P. (Италия), Volkman G.M., Hoek E. (Зимбабве), Oke J., Vlachopoulos N., Diederichs M. (Канада), Janin J.P. (Франция), Nakoishi Y. (Япония) и др.

В настоящее время для расчета конструкций подземных объектов, сооруженных с использованием защитных экранов из труб, применяют пакеты специализированных компьютерных программ, реализующие численные методы решения геомеханических задач. Результаты определения напряженно-деформированного состояния конструкций подземных сооружений, полученные с их применением, требуют дополнительной верификации путем сравнения с данными аналитических расчетов, либо мониторинга состояния подземных конструкций.

Аналитических методов, позволяющих оценить влияние защитных экранов на напряженное состояние массива грунта и обделок тоннелей, до настоящего времени не имелось, как и отсутствовали необходимые для их разработки решения соответствующих задач геомеханики. Однако, результаты исследований Арамановича И.Г., Фотиевой Н.Н., Булычева Н.С., Анциферова С.В., Саммаля А.С., Деева П.В. и др. могут быть положены в основу разрабатываемого аналитического метода расчета обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитных экранов из труб.

Таким образом, разработка аналитического метода расчёта обделок тоннелей, сооружаемых закрытым способом вблизи земной поверхности с применением защитного экрана из труб, является актуальной задачей, решение которой имеет научную новизну и практическую ценность.

Содержание диссертации соответствует формуле специальности и пунктам 1, 2, 4, 5 направлений исследований, регламентированной паспортом

специальности 2.8.6. Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика.

Объект исследования – напряженное состояние массива грунта и обделок тоннелей, сооружаемых с применением опережающего крепления в виде защитных экранов из труб.

Предмет исследования – процессы взаимодействия обделок тоннеля с окружающим массивом грунта при наличии труб защитных экранов.

Целью работы является разработка метода расчета обделок тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных с применением экранов из труб, позволяющего установить закономерности формирования напряжённого состояния элементов геомеханической системы "массив грунта – трубы экрана – обделка тоннеля" и оценить прочность подземных конструкций, которая потребовала решения следующих **задач**:

- определение факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на напряженно-деформированное состояние обделок тоннелей и грунта;
- выбор и классификация расчетных схем, использованных при постановке задачи геомеханики, решение которой возможно с использованием методов математической теории упругости;
- обоснование возможности применения плоской задачи теории упругости и ее постановка, формулирование граничных условий на линиях контакта областей, моделирующих массив грунта, сечения обделки тоннеля и труб защитного экрана, при действии гравитационных сил;
- разработка математической модели взаимодействия массива грунта, обделки тоннеля и труб защитного экрана, включающей получение аналитического решения задачи теории упругости с использованием математического аппарата теории функций комплексного переменного (ТФКП) и комплексных рядов;
- разработка на основе результатов математического моделирования аналитического метода расчета обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитных экранов из труб;

- составление алгоритма вычислений и реализующей его компьютерной программы, позволяющей выполнять многовариантные расчеты обделок тоннелей.

Идея работы заключается в возможности определения напряженного состояния грунта и обделок тоннелей, сооружаемых под защитой экрана из труб, с использованием предложенного метода расчета.

Научная новизна исследования заключается в представленной математической модели взаимодействия обделки тоннеля, массива грунта и защитного экрана; разработанном методе расчета; установленных новых закономерностях формирования напряженного состояния элементов исследуемой геомеханической системы.

Математическая модель, использующая основные положения геомеханики, механики подземных сооружений и теории упругости, базируется на строгом решении задачи о взаимодействии массива грунта с обделкой тоннеля мелкого заложения кругового поперечного сечения при наличии защитных экранов различных форм, полученном с использованием математического аппарата ТФКП;

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в развитии теории аналитических методов расчета конструкций подземных сооружений и предложенном методе расчета обделок тоннелей, сооруженных под защитой экрана из труб, учитывающем влияние близко расположенной земной поверхности; физико-механических и деформационных характеристик массива грунта; неравнокомпонентного, в общем случае, поля начальных напряжений в массиве, обусловленных гравитационными силами в массиве грунта; количества и взаимного расположения труб защитного экрана относительно сечения выработки; диаметров поперечных сечений обделки тоннеля и труб экрана; деформационных характеристик материалов обделки и труб с возможным заполнением. Применение разработанного метода расчета в практике проектирования подземных сооружений будет способствовать принятию обоснованных конструктивных или технологических решений, способствующих

повышению прочности и надежности подземных сооружений различного назначения.

Методология и методы исследования включают анализ практики строительства подземных сооружений в слабых грунтах с применением опережающего крепления; выполнение математического моделирования взаимодействия элементов геомеханической системы "массив грунта – трубы защитного экрана – обделка тоннеля", формулирование и постановку соответствующей задачи геомеханики, а также получение ее аналитического решения методами ТФКП и потенциалов Колосова-Мухелишвили; разработку программного обеспечения; оценку достоверности получаемых результатов.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

- математическая модель взаимодействия массива грунта с обделкой тоннеля мелкого заложения кругового поперечного сечения при наличии труб защитных экранов различных форм, базирующаяся на аналитическом решении плоской задачи теории упругости, позволяет определять напряжённое состояние элементов исследуемой геомеханической системы с учетом влияния основных факторов;

- защитные экраны различных форм, их расположение вокруг выработки, деформационные характеристики грунта, материалов обделки и труб с возможным заполнением оказывают существенное влияние на формирование напряжённого состояния грунта и обделки тоннеля;

- установленные закономерности формирования напряженного состояния обделок тоннелей, сооружаемых под защитой экрана, могут быть использованы для оценки прочности конструкций подземных сооружений.

Достоверность результатов, выводов и рекомендаций подтверждается использованием теоретических положений геомеханики, аппарата математической теории упругости и ТФКП, получением строгого аналитического решения и достижением высокой точности удовлетворения граничных условий задачи теории упругости; согласованием результатов расчётов с данными, полученными другими авторами.

Апробация работы. Результаты работы обсуждались на научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава ТулГУ (Тула, 2018–2024); Межрегиональных научных сессиях молодых исследователей: "Промышленная революция 4.0: взгляд молодежи" (Тула, 2020 – 2023); XVI Всероссийской молодежной научно-практической конференции "Проблемы недропользования" (Екатеринбург, 2022); Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики "Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики" (Тула, 2022 – 2024); XII Международной научно-практической конференции молодых ученых и студентов "Опыт прошлого – взгляд в будущее" (Тула, 2022); 25-ой Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии» (Тула, 2024); Международном научном симпозиуме «Неделя Горняка» (Москва, 2021 – 2023); Всероссийской научной конференции с международным участием "Геодинамика и напряженное состояние недр земли" (Новосибирск, 2023); XII Всероссийской конференции "Молодежная наука в развитии регионов" (Березники, 2022 – 2024) и др.

Реализация работы. Теоретические результаты и разработанное программное обеспечение используются в базовых учебных курсах при подготовке студентов по специальности «Горное дело», магистрантов по направлению "Строительство", профиль "Основания и фундаменты, подземные сооружения", а также планируются к использованию при выполнении договорных и госбюджетных НИР в Тульском государственном университете.

Личный вклад автора заключается в выполнении анализа научных публикаций по теме исследования; разработке математической модели, включающей обоснование расчётных схем, постановку и получение решения соответствующей задачи теории упругости; разработке алгоритма и метода расчета, реализованных в виде программного обеспечения; установлении закономерностей формирования напряженного состояния обделок и массива грунта при различных сочетаниях влияющих факторов.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 18 печатных работ, из них 2 статьи в журнале, рекомендованном ВАК, и 13 в рецензируемых изданиях.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 152 страницах машинописного текста; состоит из введения, 5 разделов, содержащих 74 рисунков и 7 таблиц, заключения и списка литературы.

1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

При сооружении тоннелей в сложных горно-геологических условиях из-за возникающего временного интервала между обнажением поверхности выработки и ее закреплением, связанного с отставанием возведения конструкции обделки от забоя, нередко возникают проблемы с устойчивостью грунтового обнажения [1]. Это обуславливает применение технологий сооружения тоннелей, предусматривающих предварительное крепление грунта до раскрытия выработки, например, путем его стабилизации с использованием предварительно установленных экранов из труб.

1.1 Практика применения защитных экранов из труб при проходке тоннелей в сложных горно-геологических условиях

Опыт строительства подземных сооружений различного назначения в России и за рубежом свидетельствует о том, что применение защитных экранов целесообразно при проходке тоннелей закрытым способом на небольших глубинах под железнодорожными или автомобильными магистралями, на застроенной городской территории, т.е. в случаях, когда использование открытого способа сооружения тоннелей затруднительно.

Проходка тоннелей с применением защитных экранов различных форм получили достаточно широкое использование, поскольку обладают рядом преимуществ перед другими способами, одним из которых является высокая адаптивность к изменяющимся инженерно-геологическим условиям. Защитные экраны обеспечивают устойчивость грунтового массива, способствуют уменьшению деформаций поверхности, позволяют свести к минимуму влияние подземных работ на существующую инфраструктуру [106 – 108, 113, 116].

Под защитой экрана из труб возможно сооружение тоннелей любых форм и размеров поперечного сечения. Виды защитных экранов определяются в зависимости от протяженности участков нарушенных скальных, слабоустойчивых и не-

устойчивых мягких водоносных грунтов по трассам тоннелей, физико-механических свойств грунтов, а также способов установки труб защитного экрана. Экраны различаются по материалу и формам труб (круглые, прямоугольные, трапециевидные), по размерам их поперечного сечения и необходимости внутреннего заполнения.

Технологии применения защитных экранов различаются местами установки труб – непосредственно из забоя выработки, из котлованов, шахтных стволов; направлением продавливания (вдоль или поперек тоннеля); способом удаления грунта из полости труб и т. п. [1, 24, 27, 47, 103].

В зависимости от инженерно-геологических и гидрологических условий экраны из труб могут быть замкнутыми по контуру выработки; П-образными, без нижнего лоткового экрана; линейными горизонтальными, устраиваемые только в зоне перекрытия тоннеля и др. В большинстве случаев трубы размещаются в один или два ряда вдоль оси тоннеля. Возможные варианты форм защитного экрана приведены на рисунке 1.1.

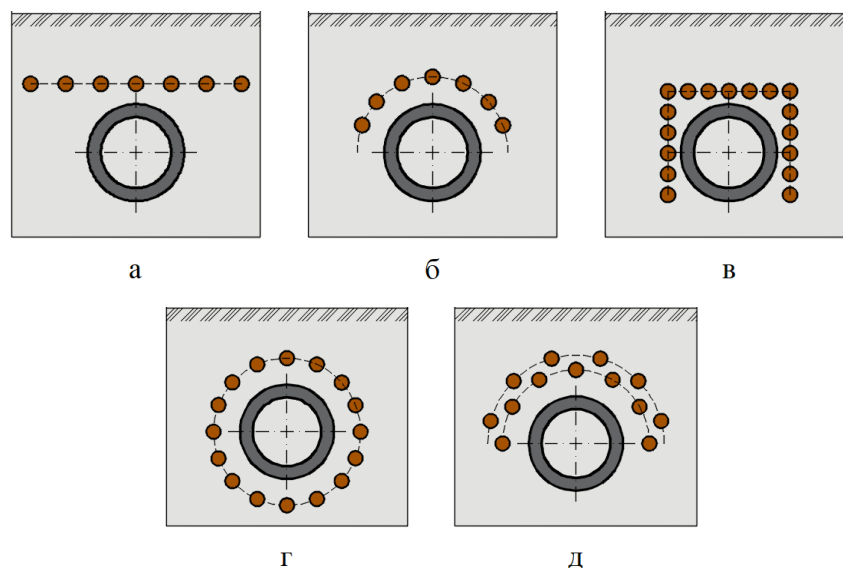


Рисунок 1.1 – Схемы расположения труб защитного экрана:

- а – плоского линейного; б – по части контура выработки; в – П-образного;
г – по замкнутому контуру; д – с перекрытием

При возведении экранов используются трубы, изготовленные из различных материалов – стали, железобетона, асбоцемента, полимерных или композитных материалов. Длина труб достигает 30...40 м; диаметр – 0,085...2,5 м [2, 23, 31, 37 46]. Трубы задавливаются с помощью домкратных установок отдельными звеньями непосредственно в массив грунта или в предварительно пробуренные в нем скважины. Звенья соединяются различными способами – при помощи сварки, хомутов, бандажей и пр., трубы экрана могут быть объединены между собой специальными замковыми устройствами различных типов. Применение замковых устройств, выполняющих роль направляющих, способствует повышению точности установки труб, сокращает поступление воды сквозь экран. В устойчивых грунтах трубы располагают с зазорами 15...20 см. При необходимости последующего заполнения их внутреннего объема монолитным или сборным железобетоном выполняется извлечение попавшего внутрь труб грунта.

В некоторых случаях возможно использование труб защитного экрана не только в качестве временной крепи, они могут входить в состав постоянной несущей конструкции [48 – 50, 120, 121].

При длине подземного сооружения до 30...40 м трубы задавливают с одной стороны, а при большей длине – из котлованов, расположенных с обеих сторон. При сооружении тоннелей небольшой протяженности трубы экрана продавливаются на всю длину параллельно направлению проходки, их торцы жестко заделываются с обеих сторон в припортальные стальные рамы или в железобетонные порталы. При расположении тоннеля в непосредственной близости от фундаментов зданий или других подземных сооружений создаются экраны из труб, задавливаемых в поперечном направлении. Трубы могут опираться на заранее возведенные траншейные стены и в дальнейшем входить в состав конструкции перекрытия [52, 55, 56].

Разработку грунтового ядра тоннелей большого сечения, сооружаемых под защитой экрана из труб, производят сплошным забоем или по частям заходками по 5...10 м с применением тоннелепроходческих машин или тоннельных экскаваторов [24, 95].

На рисунке 1.2 приведена принципиальная схема расположения наклонных к продольной оси выработки скважин, через которые с целью создания защитного экрана производится инъецирование грунта цементными растворами [78].

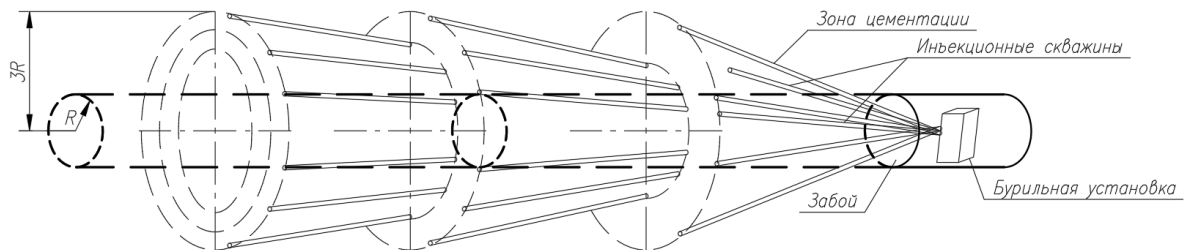


Рисунок 1.2 – Схема расположения наклонных скважин

Описанные выше технологии предусматривают устройство экрана из труб за пределами контура подземного сооружения. Для увеличения продольных размеров экранов из труб без устройства промежуточных шахт или котлованов используются технологии создания опережающих экранов непосредственно из забоя подземной выработки путем бурения наклонных под углом $4...6^\circ$ к оси подземной выработки (реже горизонтальных) скважин и продавливания в них стальных труб. Экраны устраивают секциями по $10...15$ м с перекрытием соседних секций на $1...3$ м, при этом труба с одной стороны опирается на раму временного крепления, а другим – на ненарушенный грунт призабойной зоны. Длина труб защитного экрана зависит от протяженности нарушенных участков. Как отмечено в [80, 100, 101], для сокращения времени установки труб, уменьшения их отклонения от проектного положения и повышения качества работ по нагнетанию цементного раствора в грунт длина труб должна составлять от 12 м до 15 м.

Использование защитных экранов позволяет выполнять проходку выработок различных форм и сечений длиной до 100 м. Для увеличения длины экранов сооружаются дополнительные промежуточные котлованы, при этом проходку тоннеля в зонах нарушенных и неустойчивых грунтов под защитой экрана из труб ведут обычным горным способом отдельными заходками, не доходя до конца экрана на расстояние в 1 м. При разработке грунтового ядра трубы подкрепляют

стальными арками, постоянная обделка выполняется из монолитного бетона или набрызгбетона. Например, таким способом в Японии были пройдены два параллельных автодорожных тоннеля диаметром 10,5 м на глубине от 5 до 14 м от земной поверхности в мягком вулканическом туфе с включениями песка и гравия. Для секций экрана длиной по 10 м с помощью передвижной установки на рельсовом ходу забуривались скважины диаметром 216 мм [37].

В настоящее время [49, 50, 62, 68] перспективной является проходка необходимых для размещения труб защитного экрана опережающих выработок с применением микротоннельных технологий. Они позволяют создавать как временную, так и постоянную обделку тоннеля с использованием механизированных и автоматизированных микрощитовых комплексов соответствующих диаметров.

Наибольшее распространение эти технологии получили в Германии, Франции, Великобритании, США и Японии. Созданные щитовые комплексы позволяют осуществлять проходку выработок в весьма сложных инженерно-геологических условиях. В России и Белоруссии с применением таких комплексов построены тоннели в Москве, С. - Петербурге, Нижнем Новгороде, Перми, Сочи, Минске и других городах [37, 46, 49, 52, 55, 93, 97 – 99, 110].

Использование микротоннельных технологий (рисунок 1.3 а) возможно также при реконструкции подземных сооружений, когда по проектному контуру уширения проходятся дополнительные микротоннели, заполненные бетонной смесью. Тем самым создается предварительная обделка, под защитой которой разрабатывается грунт и демонтируется обделка существующего тоннеля, а затем возводится вторичная, например, из набрызгбетона. При строительстве тоннелей закрытым способом под насыпью железной дороги по периметру будущей конструкции сооружается экран из стальных труб, задавливаемых с помощью домкратной станции в пройденную микрощитом выработку (рисунок 1.3 б). Внутреннее пространство каждой трубы заполняется бетоном (рисунок 1.3 в). Грунт разрабатывается под защитой экрана из труб, усиленного стальными рамами (рисунок 1.3 г), затем выполняется выемка грунта в подэкранном пространстве с возведением несущей железобетонной обделки с омоноличиванием стальных рам.



а

б



в



г

Рисунок 1.3 – Использование технологии микротоннелирования
(изображения взяты из открытых источников)

В 2001 году в г. Перми под путями главного направления Транссибирской железной дороги дополнительно к существующему тоннелю 1907 года постройки с применением защитного экрана из труб был сооружен двухполосный автотранспортный тоннель общей длиной 53 м. Из-за наличия слабых грунтов основания по периметру будущей конструкции возведен экран из труб, заполненных бетоном.

Сооружение тоннелей [68, 99] осуществлялось в застроенной части города с развитой инфраструктурой. Условиями строительства тоннелей являлось сохранение движения поездов без перерыва; осадка и перекося путей не должны превы-

шать соответственно 25 мм и 20 мм; обеспечение скорости 120 км/ч для пассажирских и 80 км/ч для грузовых составов.

Обводненность грунтов и наличие слабого основания потребовало их инъекционного укрепления карбамидными растворами и грунтоцементными сваями, а также изменения конструкций защитного экрана и постоянной обделки с целью снижения нагрузок на грунты и порталы тоннеля.

Защитный экран выполнялся с применением технологии микротоннелирования, предусматривающей гидропригруз из бентонитовой суспензии, из стальных труб диаметром 1020 мм и толщиной стенки 14 мм. В процессе монтажа трубы соединяли замками, в результате чего забой тоннеля был ограничен по всему периметру сплошной металлоконструкцией с бетонным заполнением, рассчитанной на нагрузки от веса грунта насыпи и поездов. Используемая при строительстве тоннеля технология проходки под защитой экрана из труб показала свою высокую эффективность и безопасность. Проходка тоннеля выполнялась уступами, при этом устойчивость лба забоя обеспечивалась за счет угла естественного откоса закрепленного грунта; на этапе проходки устанавливались поддерживающие рамы из двутавровых балок, соединенных для обеспечения их совместной работы с трубами экрана сваркой. Концы труб защитного экрана замоноличивались в порталы, создавая жесткую пространственную конструкцию.

Наряду с экранами из труб применяются экраны из микросвай, расположенных по контуру будущего тоннеля, создаваемых с использованием струйной цементации грунтов («jet grouting»). Впервые такой способ опробован при строительстве тоннеля Кампиоло [2]. Этот метод закрепления основан на разрушении грунта высоконапорной струей цементного раствора, подаваемого с использованием специальных мониторов, и их перемешивания, в результате чего образуются грунтоцементные сваи диаметром 600...2000 мм, обладающие низкой водопроницаемостью, высокой прочностью и жесткостью.

По такой технологии сооружены участки автодорожных тоннелей в Австралии, Швейцарии, Чехии и др. [48, 98].

При строительстве в слабоустойчивых грунтах двух параллельных тоннелей мелкого заложения на кольцевой автомагистрали в г. Праге [124] для обеспечения нормативных смещений земной поверхности, помимо консолидирующего и компенсационного нагнетания, использовался защитный экран из стальных перфорированных труб диаметром 110 мм и толщиной стенки 6,3 мм, устанавливаемых с использованием специализированного бурового оборудования. В сечении тоннеля под углом 5° ... 6° к его продольной оси располагали от 18 до 25 труб. Длина труб составляла от 12 до 15 м, шаг установки – 400...500 мм с перекрытием соседних секций на 3...4 м. Через трубы в грунт нагнетался цементный раствор под давлением 0,2...0,5 МПа.

При строительстве магистрали "Дублер Курортного проспекта" в г. Сочи протяженностью 17 км и насчитывающей 9 автодорожных тоннелей общей длиной 2250 м также были применены технологии проходки с опережающим креплением [32, 38]. Необходимость обеспечения установленных сроков строительства потребовало внести ряд корректирующих изменений в применяемую схему проходки новоавстрийским методом. Для оценки параметров устойчивости и водообильности грунтового массива, наличия неоднородностей – пустот, трещин и разуплотнений, а также определения попикетной длины заходки выполнялся горно-геологический прогноз на глубину до 40 м от лба забоя вглубь массива геофизическими методами – сверхширокополосным зондированием, электро- и сейсморазведкой, акустическим профилированием. Это позволило, исходя из параметров устойчивости горных пород вмещающего массива, определять длину заходки при разработке грунта и способы укрепления грунтов в призабойном пространстве; рекомендовать методы и технологии разработки горной породы, а также назначать типы крепи горной выработки [41, 42]. При появлении деформаций, превышающих расчетные значения, определенные по результатам математического моделирования напряженно-деформированного состояния для конкретных инженерно-геологических условий, выполнялись мероприятия по усилению тоннельной обделки – увеличение армирования и толщины обделки, использование анкеров крепи и др.

Для обеспечения устойчивости лба забоя при проходке на полное сечение тоннелей 8 и 8а, сооружаемых методом «ADECO-RS» [93, 94, 97] на полное сечение предварительно бурились скважины не только в своде, но и по всему сечению выработок. В скважинах размещались пустотелые анкера из стекловолокна, в которые нагнетался укрепляющий раствор, что позволяло увеличить несущую способность грунтового массива. После установки опалубки, проведения изоляционных и арматурных работ бетонировалась обделка на полное сечение для каждой заходки. В [32] отмечается, что данный метод имеет ряд недостатков, обусловленных снижением скорости сооружения тоннелей (не более 45 м/мес), увеличением стоимости сооружения тоннелей по сравнению с традиционными методами, появлением в воздухе забоя выработки частиц стекловолокна.

В работе [51] описана экспериментальная методика оценки состояния опережающего крепления забоя выработки метрополитена, сооружаемой в протерозойских глинах, фибerglassовыми анкерами, а ее кровли – трубами защитного экрана. Результаты наблюдений за работой опережающей крепи с помощью струнных динамометров, размещаемых в процессе установки анкеров по их длине в нескольких местах, позволили установить возникающие в них усилия и определить смещения грунта в забое, а также оценить нагрузки на опережающую крепь в кровле выработки. Для оценки усилий в трубах защитного экрана на них были установлены динамометрические базы, оснащенные индикаторами часового типа. Полученные результаты позволили установить, что при заданных конструктивно-технологических параметрах крепления выработки устойчивость лба забоя обеспечена; зафиксировать изменение напряженного состояния труб и нагрузок на крепь от горного давления; определить при условии линейной деформации величины растягивающих и сжимающих напряжений в массиве, вызванных проходкой тоннеля, которые составили соответственно 0,693 МПа и 1,215 МПа (модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта приняты соответственно равными 270 МПа и 0,2). Максимальные смещения грунтового массива составили 11 мм. Результаты измерений, выполненных в ходе мониторинга, позволили оценить относительные удлинения растянутой части сечения труб, а также установить зависи-

мости горного давления на опережающую крепь кровли от величины удаления забоя от наблюдаемого участка. Одна из таких зависимостей, иллюстрирующая существенный рост нагрузки на обделку при увеличении расстояния от забоя, представлена на рисунке 1.4.

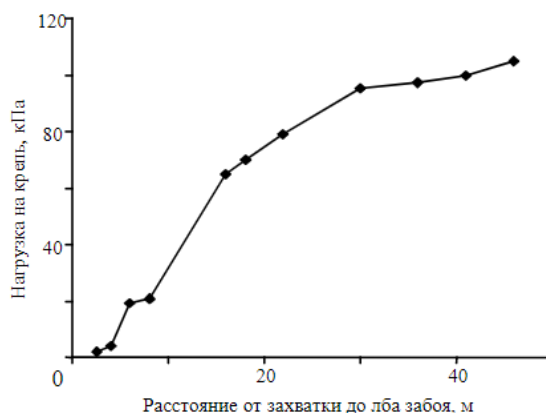


Рисунок 1.4 – Зависимость между нагрузкой на опережающую крепь кровли и величиной удаления от забоя [51]

Установлено, что устойчивость кровли выработки обеспечена – вывалы и значительные подвижки кровли отсутствуют.

Очевидно, что при сооружении тоннелей с использованием защитных экранов из труб в качестве предварительного крепления, на этапе проектирования необходима возможность количественной оценки их влияния на изменение напряженного состояния возводимых тоннельных обделок, которое в ряде случаев может оказаться достаточно существенным.

1.2 Обзор существующих методов оценки напряженно-деформированного состояния грунта, обделок тоннелей и труб защитного экрана

Для назначения параметров конструкций опережающего защитного экрана возможно использование результатов расчета его элементов методами строительной механики, либо результатов определения напряженно-деформированного состояния системы «крепь – массив», полученных из решения соответствующих за-

дач геомеханики аналитическими (при их наличии) [5, 66, 67, 69, 70, 92] или численными методами, например, методом конечных элементов (МКЭ) [4, 18, 28, 29, 34, 35, 63, 90].

В нормативных документах [54, 61, 62, 64, 64, 72 – 77] приведены методики расчета труб экрана, основанные на теоретических положениях строительной механики. Трубы экрана рассчитываются на так называемые "активные нагрузки", величина которых должна быть определена априори эмпирически с использованием различных гипотез сводообразования [16, 17, 19, 79].

Простейшей расчетной моделью, представленной на рисунке 1.5, является балка, один конец которой опирается на упругое основание, а другой – на поддерживающий элемент (арку), находящаяся под воздействием указанных выше нагрузок [61].

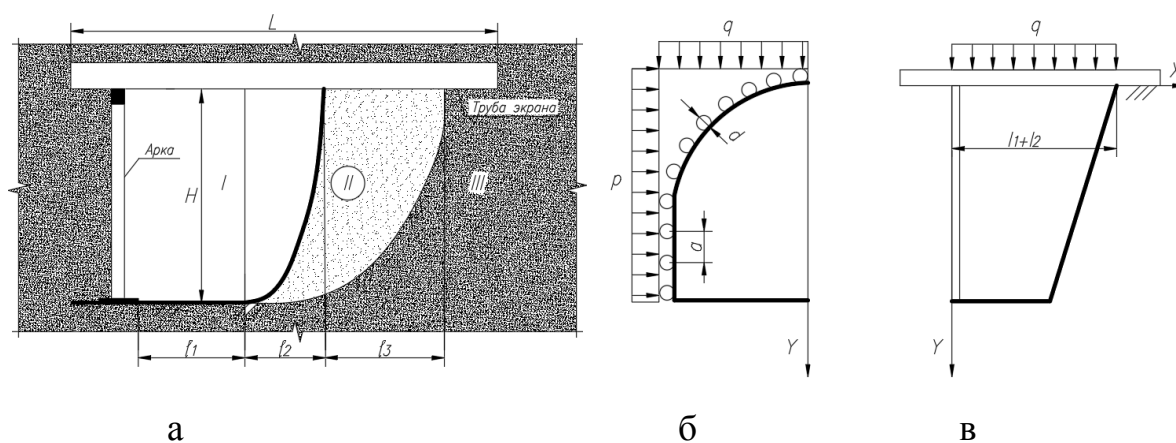


Рисунок 1.5 – Защитный экран из труб: а – плоская модель; б – расчетная схема поперечного сечения; в – расчетная схема продольного сечения

На рисунке 1.5 а показаны условные зоны обрушения грунта вблизи забоя (I), нарушенного (II) и ненарушенного (III) грунта; l_1 , l_2 , l_3 – размеры заходки, зоны обрушения и зоны нарушенного грунта. Нагрузки на трубу принимаются либо от веса вышележащего столба грунта, либо исходя из теорий сводообразования, например, по Протодьяконову М.М. [16].

Расчет защитного экрана из труб с использованием подходов строительной механики в зависимости от способа опирания на поддерживающие элементы и

грунт возможен по схеме балок на упругом основании или как многопролетных неразрезных балок [19, 20, 71]. В конечном итоге искомый размер поперечного сечения трубы зависит от выбранной расчетной схемы, величины внешней нагрузки и расстояния между временными несущими рамами. Методики расчета и описания технологий возведения защитного экрана из труб, приведенные в [61], не в полной мере учитывают собственную несущую способность массива грунта и не позволяют выполнить геомеханическое обоснование конфигурации экрана и определение напряженно-деформированного состояния массива грунта и подземных конструкций, рациональных параметров защитного экрана – количество труб, размеры их поперечных сечений, необходимость заполнения труб бетоном и т.д.

В отличие от указанных выше эмпирических методик, методы определения напряженно-деформированного состояния массива грунта и обделок тоннелей, базирующиеся на теоретических положениях геомеханики [60] и механики подземных сооружений, реализуют представление о совместной работе конструкций подземных сооружений и окружающего их массива грунта как элементов единой деформируемой системы [21].

Разработка аналитических методов расчета конструкций подземных сооружений предполагает, как правило, развитие уже имеющихся или построение новых математических моделей взаимодействия элементов геомеханической системы. Это требует выбора и обоснования наиболее адекватных расчетных схем – плоских или пространственных, определения основных факторов, оказывающих существенное влияние на напряженно-деформированное состояние подземных конструкций и окружающего массива грунта, постановки соответствующих задач геомеханики и получения их точных или приближенных решений.

Исходя из результатов анализа научно-технической литературы по теме исследования, в настоящее время методы расчета конструкций подземных сооружений, в основу которых положены строгие аналитические решения задач геомеханики в пространственной постановке, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние системы "массив грунта – трубы защитного экрана – конструкция подземного сооружения", отсутствуют. Причиной этого является не-

возможность получить решения соответствующих задач механики деформируемого твердого тела на современном уровне развития математических методов.

Наибольшую эффективность для решения плоских задач теории упругости, к расчетным схемам которых возможно сведение рассматриваемых задач геомеханики, несмотря на ряд специфических особенностей, показал математический аппарат, использующий потенциалы Колосова-Мусхелишвили [57] и методы теории функций комплексного переменного [43, 15, 105].

К настоящему времени разработан целый ряд методов, в основу которых положены новые решения плоских задач теории упругости с расчетными схемами, позволяющими учесть влияние основных факторов на формирование напряженно-деформированного состояния элементов геомеханических систем: расчет монолитных [69, 70, 92] и многослойных [5, 92] обделок одиночных или близко расположенных параллельных тоннелей глубокого и мелкого заложения кругового и некругового поперечного сечения на действие статических нагрузок – гравитационных сил в массиве грунта, давления грунтовых вод, сил тектонического происхождения, внутреннего напора, нагрузок, обусловленных весом расположенных на поверхности объектов или транспортных средств, а также на сейсмические воздействия землетрясений.

Разработанные аналитические методы реализованы в виде соответствующих алгоритмов и комплексов компьютерных программ, ряд методов после апробации при поверочных расчетах обделок тоннелей различного назначения были рекомендованы к использованию нормативно-техническими документами [54, 65, 66, 77].

Практика применения аналитических методов показывает, что они обладают определенными преимуществами перед методиками, использующими подходы строительной механики или сопротивления материалов: отсутствует необходимость априорного задания неизвестных нагрузок на подземную конструкцию на основе тех или иных гипотез сводообразования; возможен учет в более полной мере собственной несущей способности массива грунта и влияние на напряженное состояние подземной конструкции ее основных характеристик и параметров;

полученное напряженное состояние подземных конструкций является более благоприятным по сравнению с расчетом при заданных нагрузках, что позволяет обоснованно применять эффективные и экономически рациональные технические решения. Результаты расчетов, использующие строгие аналитические решения геомеханических задач, удовлетворительно согласуются с данными мониторинга состояния подземных объектов на этапах строительства или эксплуатации [22, 25, 40, 44, 51], а также лабораторных исследований с использованием методов фотоупругости или эквивалентных материалов [26, 33, 45, 53, 89, 91, 96].

Следует отметить, что аналитических методов расчета обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитного экрана из труб, до настоящего времени не имелось.

В связи с этим, наибольшее распространение в практике решения геомеханических задач получил метод конечных элементов (МКЭ) – приближенный численный метод решения задач механики сплошной среды и, в первую очередь, задач теории упругости, строгое аналитическое решение которых, как указано выше, встречает серьезные математические трудности или пока просто невозможно.

Практическому решению задач геомеханики с применением МКЭ посвящены работы многих отечественных – Ержанова Ж.С. [34], Фадеева А.Б. [4, 90], Чеботаева В.В. [98], Шейнина В.И. [104], Юфина С.А. [109], Деменкова П.А. [112, 113] и зарубежных исследователей [118 – 123, 125 – 126].

МКЭ позволяет при расчете учитывать пространственную компоновку элементов геомеханической системы; слоистость грунта, прочностные и свойства каждого из слоев; деформационные характеристики материала обделки; влияние технологии сооружения подземных выработок на любом этапе строительства, включая поэтапность разработки забоя и отставание возведения обделки от забоя. В отличие от аналитических методов решения задач геомеханики, реализующих решения уравнений равновесия и совместности деформаций в каждой точке рассматриваемой деформируемой области, в том числе, бесконечных размеров, при использовании МКЭ рассматривается конечная плоская или пространственная область, разбиваемая на множество элементов различного вида, поэтому условия

равновесия и совместности деформаций выполняются только в общих узлах элементов.

Численное моделирование взаимодействия элементов системы «тоннель – трубы экрана – массив» является в настоящее время единственным инструментом, способным дать достаточно адекватную качественную картину работы такой системы.

Для определения усилий и смещений в узлах, исходя из поставленных граничных условий в рассматриваемой конечно-элементной области, составляются уравнения равновесия и совместности деформаций, число которых соответствует количеству узлов расчетной схемы, поэтому точность полученного решения существенно зависит не только от размеров выделенной области, но и количества и размеров выделенных элементов. На практике сетка конечных элементов разбивается неравномерно, в областях, где ожидаются высокие градиенты изменения напряжений или смещений, она сгущается.

Необходимо отметить, что широкое распространение современных пакетов, реализующих МКЭ для получения решений задач геомеханики, обуславливает наличие достаточно мощных ЭВМ и требует, несмотря на автоматизацию части процессов, больших трудозатрат при подготовке конкретного конечно-элементного разбиения конструкции подземного сооружения и окружающего массива грунта. Полученные в результате численного моделирования результаты не обладают общностью и справедливы лишь для использованной конечно-элементной схемы. Поэтому применение МКЭ целесообразно для расчета сложных и ответственных конструкций, требующих детального учета пространственной компоновки подземных сооружений и условий работы подземных конструкций, особенностей применяемых технологий, строения массива грунта и его свойствах, включая принятые линейный или нелинейный, например, упругопластический, характеры деформаций, необходимости учета реологических свойств материалов, анизотропии и т.д.

Практика численного решения плоских задач теории упругости показывает, что изменения напряженно-деформированного состояния системы, вносимые по-

явлением отверстий в несомой плоскости, исчезают на расстоянии $2,5R$ от выработки, где R – приведенный радиус сечения. При появлении в окрестности выработки зон пластических деформаций это расстояние может возрастать до $3..4R$; ширина конечно-элементного фрагмента должна быть не менее $6R$ в задачах о линейно деформируемой среде и $7..8R$ в задачах с упругопластическим характером поведения среды. Нижняя граница фрагмента также должна располагаться на том же расстоянии; при наличии вблизи основания тоннеля более жестких и прочных грунтов это расстояние может быть уменьшено. Передняя и задняя границы фрагмента должны быть расположены на расстоянии не менее $3..4R$ от забоя сооружаемого тоннеля [120].

Как правило, на нижней грани расчетного фрагмента исключаются вертикальные смещения, на вертикальных гранях – горизонтальные. Для построения объемной модели рекомендуется использование четырехузловых конечных элементов пирамидальной формы. Построение фрагмента расчетной области осуществляется путем задания координат узловых точек. Затем узловые точки на плоскости объединяют в замкнутый контур линиями, фиксируют его, задавая размер конечного элемента, и на этой основе строят трехмерную область. После этого осуществляют закрепление точек на свободных гранях и прикладывают к узлам расчетной схемы действующие силы.

При необходимости учета достаточно сложной компоновки подземных сооружений, необходимости поэтапности разработки забоя, отставания возведения обделок от забоя и др. решения пространственных геомеханических задач, возникающих при сооружении тоннелей, главным образом, в зоне забоя, когда и не позволяют использовать плоские расчетные схемы, возможно применение пакетов конечно-элементного анализа PLAXIS 3D [111, 137], COSMOS/M [128], ABAQUS [59, 113, 115, 134], SolidWorks [36], ANSYS [135], LIRA [132, 136] и др.

Модуль GEOSTAR комплекса «COSMOS/M» включает автоматический трехмерный сеточный генератор для параметрического и автоматического построения конечно-элементной сетки сложных моделей, обладает расширенными возможностями автоматической проверки ее качества, задания граничных усло-

вий и формирования нагрузок, выделения для более детального анализа критичных областей, а также обширным набором вариантов представления результатов анализа. Программный комплекс позволяет выполнить расчеты на прочность, жесткость и устойчивость конструкций подземных сооружений при действии различных нагрузок, в том числе – собственного веса. Свойства материалов могут быть как линейными, так и нелинейными. Совместное использование модулей NSTAR и GEOSTAR позволяет получать решения задач статики и динамики сред с геометрической и физической нелинейностями, приводящими к большим перемещениям и деформациям, с учетом пластичности с использованием критериев Мизеса, Треска или Друкера-Прагера, ползучести материалов и т.д. Одна из важнейших особенностей программы «COSMOS/M» – снятие ограничений на размер конечно-элементной области (сетки) и количество линейных и поверхностных контактных областей.

В работах [101, 102] с использованием численных моделей, созданных в программном комплексе Midas GTS NX [133], выполнены исследования, позволяющие оценить закономерности формирования напряженно-деформированного состояния грунтового массива, обделки тоннеля и труб экрана в зонах тектонических разломов. В программном комплексе Midas GTS NX были разработаны две пространственные математические модели. Первая модель имитировала работу системы «тоннель – грунтовый массив», а вторая – «тоннель – экран – грунтовый массив». Грунты рассматривались как изотропные материалы при условии выполнения критерия Друкера-Прагера, а временная и постоянная крепь – как упругоизотропные материалы. Авторами на примере строительства тоннелей глубокого заложения рассмотрены два варианта устройства защитного экрана из труб. Первый вариант предусматривает бурение всех скважин, а затем продавливание в них труб; второй – обе операции производятся одновременно, что сокращает время на установку труб экрана в целом.

Рассмотрен случай возведения защитного экрана до проходки нарушенной зоны как вокруг отдельной части тоннельной выработки, так и по всему контуру.

Авторы предполагают, что трубы экрана, усиливая грунт, испытывают нагрузки за счет возникновения местного свода обрушения.

На рисунке 1.6 изображены пространственная схема (рисунок 1.6 а), поперечное сечение (рисунок 1.6 б) и вид сбоку (рисунок 1.6 в) геомеханической системы, а также приведены основные расчетные параметры защитного экрана: l_{mp} – длина трубы экрана; S_{mp} – расстояние между трубами; l_{np} – длина перекрытия труб экрана; α – угол установки труб; $\alpha_{эк}$ – охватывающий угол экрана; \varnothing_{mp} – диаметр трубы; t_{mp} – толщина стенок труб [100].

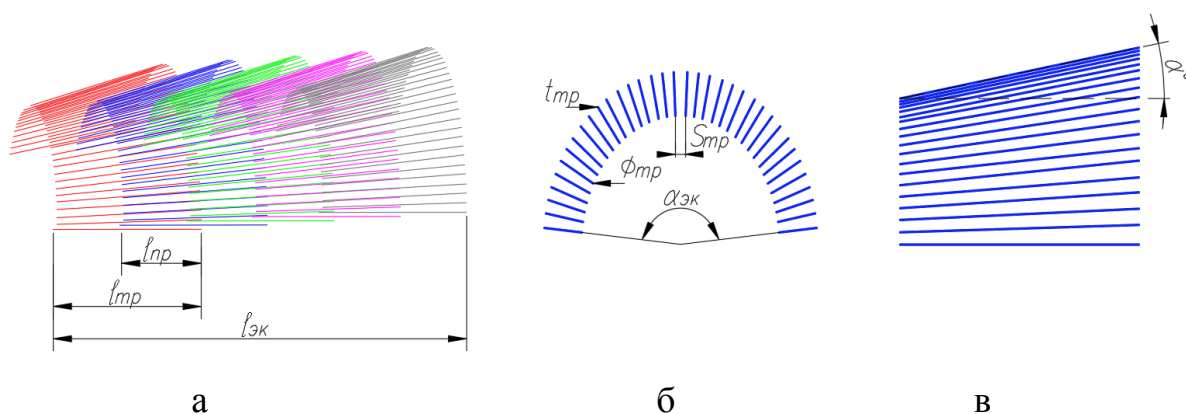


Рисунок 1.6 – Защитный экран из труб: а – пространственная схема; б – поперечное сечение; в – вид сбоку

В зоне разлома применена опережающая крепь, расположенная в области свода и стен тоннеля, в виде экрана из 39 труб $\varnothing_{mp} = 114$ мм и $t_{mp} = 12$ мм, поддерживаемых арками из стальных двутавров №20 с $\alpha_{эк} = 120^\circ$. Трубы экрана и арки моделировались упругоизотропным материалом. Моделирование выполнялось для участка экрана длиной 30 м, состоящего из 3 секций, длина расположенных под углом 5° к продольной оси тоннеля с перекрытием 3,0 м труб составляет 12 м, (рисунок 10 а), глубина заходки принята равной 3,0 м. Трубы моделировались балками с ограничением поворотов вокруг каждой из координатных осей.

Численный эксперимент включал 25 серий расчетов, различающихся методами разработки забоя, глубиной заходки, длиной перекрытия участков экрана, углом установки, охватывающим углом и длиной труб.

Исследование работы трубы в замковой части свода экрана при различных углах ее установки позволило определить углы наклона, при которых возникают наибольшие и наименьшие значения полных перемещений.

Изучено влияние защитного экрана на вертикальные перемещения в своде и лотке обделки тоннеля после проходки и результаты показаны на рисунке 1.7.

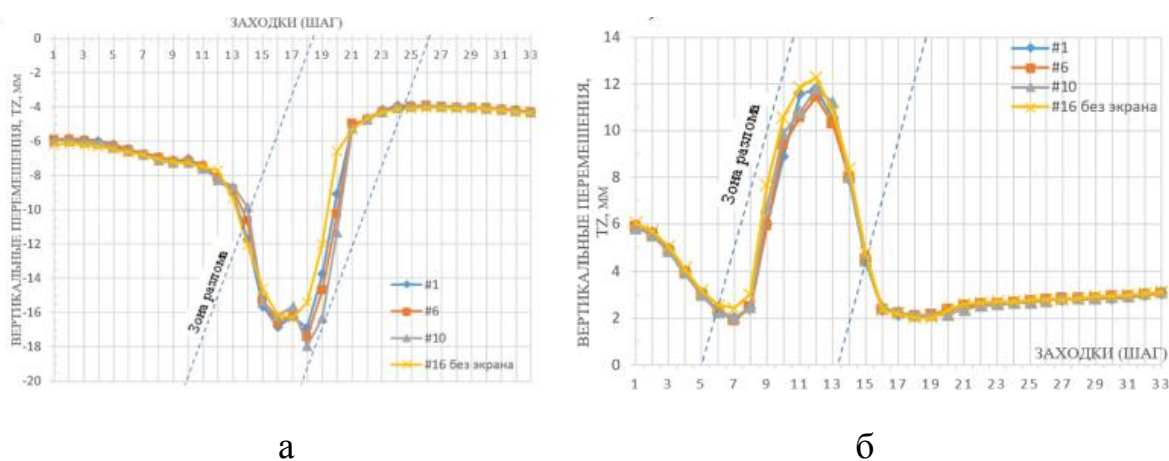


Рисунок. 1.7. Вертикальные перемещения в сводах тоннеля:

а – верхнем; б – обратном [100]

Исследования, выполненные авторами, позволили сделать ряд выводов, направленных на повышение эффективности применения защитных экранов:

- экран из труб малого диаметра незначительно влияет на полные перемещения в обделке тоннеля глубокого заложения;
- защитный экран предпочтительно устраивать из забоя под определенным углом, что обеспечивает возможность устройства соседних секций экрана, образующих веерную крепь конической формы;
- влияние защитного экрана на горизонтальные перемещения в наибольшей степени наблюдается в боковых стенах тоннеля;
- установлено существенное влияние способа проходки на устойчивость забоя выработки, заключающее в том, что при проходке способом сплошного забоя

без дополнительного закрепления лба забоя, защитный экран не может полностью обеспечивать устойчивость, а при выполнении ступенчатого забоя под защитой экрана из труб наблюдается минимальное забойное перемещение;

- рекомендован использование труб диаметром от 100 до 200 мм с толщиной стенок от 5 до 12 мм;

- для увеличения несущей способности труб необходимо их заполнять цементным раствором;

- в отдельных случаях рекомендуется располагать трубы в 2 ряда по высоте.

Угол сектора защитного экрана не должен быть менее 120° . В наиболее неблагоприятных условиях рекомендуется размещать трубы по контуру свода и стен тоннеля, т.е. увеличивать угол до 180° ;

- угол наклона труб к оси тоннеля не рекомендуется выполнять больше 10° , хотя с увеличением угла наклона труб в обделке тоннеля и трубах снижаются перемещения, однако большой угол установки труб приводит к увеличению породного целика, что, в свою очередь, вызывает увеличение поперечного сечения выработки и соответственно расходов;

- для достижения наименьшего отклонения труб защитного экрана от проектного положения рекомендуется применять трубы длиной не более 15 м с перфорацией для нагнетания стабилизирующего состава в нарушенный грунтовый массив;

- экран из труб предпочтительно устраивать непосредственно из забоя с наклоном от 2° до 10° относительно оси тоннеля, так как создание дополнительной камеры замедляет темпы проходки тоннеля.

В работе [58] приведены результаты определения напряженно-деформированного состояния элементов металлических защитных экранов (МЗЭ) с использованием программного комплекса SolidWorks. МЗЭ выполнены из базовых элементов в виде секций из полутруб, к которым приварены трубы с вырезанным сектором, образующие замково-направляющие соединения. Схематичный вид защитного экрана приведен на рисунке 1.8.

Диаметр направляющих труб составляет 1020 мм, толщина стенки 12 мм; к ним приварены прокатные уголки с шириной и толщиной полки соответственно 100 мм и 12 мм. Секции защитного экрана выполнены из полутруб радиусом 410 мм и толщиной стенок 12 мм.

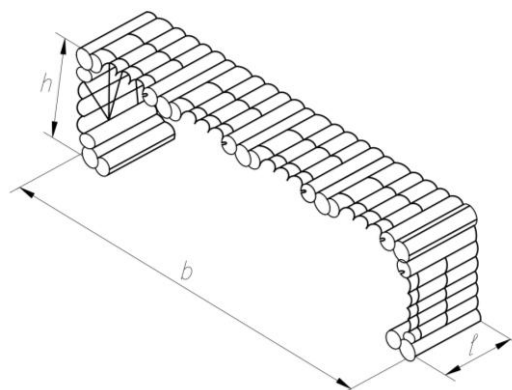


Рисунок 1.8 – Внешний вид защитного экрана

Для укрепления конструкции экрана перед выемкой грунта с двух сторон возводились железобетонные порталы, поэтому при расчетах принималось, что торцы труб по периметру заходки жестко закреплены. Оценка напряженно-деформированного состояния МЗЭ выполнялась на величину одной заходки после экскавации грунта. Удельный вес грунта принят равным $17,7 \text{ кН/м}^3$; предел текучести стали труб экрана – $2,45 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; длина заходки – 3,5 м.

Судя по представленным в [58] материалам, секция МЗЭ при расчете рассматривается как строительная конструкция вне массива грунта (насыпи), которая нагружена вертикальным и горизонтальным давлениями от веса насыпи, а также вертикальным давлением от подвижного состава, зависящим от скорости его перемещения. Расчетные значения нагрузок определены в соответствии с национальными нормативными документами. Установлено, что напряжения в трубах верхней части конструкции не превышают величину предела текучести стали. Максимальные вертикальные перемещения отдельных частей конструкции МЗЭ составляет 3,0 мм, что соответствует требованиям, предъявляемым при организации непрерывного движения поездов при проведении строительных работ. Максимальная относительная деформация элементов защитного экрана составила

$\varepsilon = 8,2 \cdot 10^{-4}$, что позволило сделать вывод о том, что жесткость конструкции допускает увеличение эксплуатационных нагрузок на МЗЭ.

В настоящее время при строительстве тоннелей закрытым способом распространение получает технология сооружения опережающего защитного экрана из труб с применением микротоннелепроходческого комплекса (МТПК). Обеспечивая минимальные осадки земной поверхности и сохранность зданий, сооружений и подземных коммуникаций в зоне строительства и сохраняя тем самым существующую схему движения наземного транспорта, она позволяет избежать применения специальных методов закрепления грунтов и исключает необходимость нахождения персонала в стесненных условиях забоя тоннелей малого диаметра.

В Японии с применением технологии, предусматривающей использование защитного экрана в сводовой части из стальных перфорированных труб, построен тоннель Сатсума Тагами длиной 3297 м [37, 114]. В пределах городской территории трасса тоннеля проходит на глубине от 25 до 70 м в сложных инженерно-геологических условиях. Для закрепления грунта применялось инъецирование в околотрубное пространство химически активных стабилизирующих составов. Наружный диаметр труб составлял 1020 мм. На рисунке 1.9 показано расположение труб экрана и зон химически закрепленного грунта в сводовой части тоннеля.

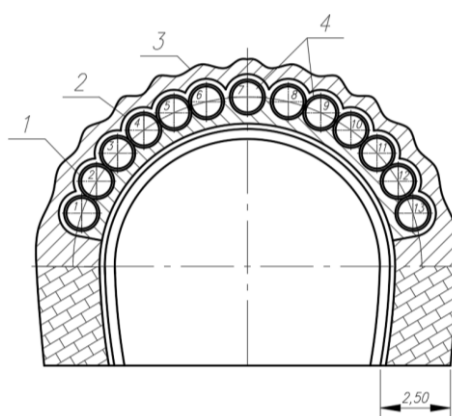


Рисунок 1.9 – Поперечное сечение тоннеля Сатсума Тагами:
 1 – заполнительное нагнетание; 2 – первичное закрепление;
 3 – вторичное закрепление; 4 – трубы экрана [37]

Прокладка труб экрана выполнялась с использованием микроцитов диаметром 0,8 м с бентонитовым пригрузом. Трубы длиной 2 м, поверхность которых была покрыта антифрикционным составом, продавливались с шагом 0,3 м по мере продвижения микроцитового комплекса. Массив грунта между трубами стабилизировался специальным составом путем двухстадийного инъецирования. В результате над экраном была создана зона закрепленного грунта толщиной до 1,5 м, его предел прочности достигал 1 МПа.

Оценка напряженно-деформированного состояния грунтового массива и прогноз возможных осадок выполнялись на основе результатов, полученных с использованием МКЭ для плоских моделей. Расчеты показали, что размеры возникающей мульды оседания не превышают допустимых пределов, что было подтверждено данными натурных измерений перемещений в массиве грунта.

Приведенный анализ состояния вопроса использования в практике строительства подземных сооружений защитных экранов из труб показал их достаточно высокую эффективность для сохранения устойчивости массива грунта при проходке тоннелей в сложных горно-геологических условиях, либо в городских условиях, при пересечении железнодорожных или автомобильных магистралей.

Дальнейшие исследования должны быть направлены на совершенствование имеющихся и разработку новых методов расчета обделок тоннелей, сооруженных в сложных горно-геологических условиях с применением предварительного крепления, базирующихся на результатах математического моделирования взаимодействия элементов геомеханической системы «массив грунта – обделка тоннеля – трубы защитного экрана». Это позволит, в конечном итоге, обеспечить прочность подземных конструкций, а также научно обосновать повышение эффективности применения опережающего крепления с использованием защитных экранов из труб на основе установленных новых закономерностей формирования напряженного состояния элементов геомеханической системы.

Выводы по главе 1

1. Сооружение тоннелей различного назначения в сложных горно-геологических условиях, а также в условиях городской застройки в ряде случаев приводит к необходимости обеспечения устойчивости грунтового обнажения, вызванного возникающим временным интервалом между обнажением поверхности выработки и ее закреплением, связанным с отставанием возведения конструкции обделки от забоя.

2. Для повышения устойчивости грунтовых обнажений в практике подземного строительства применяются технологии с использованием выполняемого до раскрытия сечения выработки предварительного укрепления грунта, предполагающего возведение контурной или забойной опережающей крепи в виде экранов из труб.

3. При проектировании тоннелей, сооружаемых с использованием в качестве предварительного крепления защитных экранов из труб, необходима возможность выполнения научно обоснованной оценки изменения напряженного состояния тоннельных обделок, которое может оказаться существенным и влияющим на выбор конструктивных решений.

4. Рекомендуемые действующими нормативными документами методики позволяют с использованием подходов, принятых в строительной механике, выполнить расчет труб защитного экрана на прочность и жесткость на так называемые "активные нагрузки", определяемые с использованием различных гипотез сводообразования; эти методики не в полной мере учитывают собственную несущую способность грунта и не могут быть применены для оценки напряженного состояния непосредственно обделок тоннелей, сооруженных с применением защитных экранов из труб.

5. Методы определения напряженно-деформированного состояния массива грунта и обделок тоннелей, базирующиеся на теоретических положениях геомеханики и механики подземных сооружений, использующие полученные строгие аналитические или численные решения соответствующих задач, реализуют пред-

ставление о совместной работе конструкций подземных сооружений и окружающего массива грунта как элементов единой деформируемой системы.

6. Наибольшее распространение в практике решения геомеханических задач получил метод конечных элементов (МКЭ) – приближенный численный метод решения задач механики сплошной среды и, в первую очередь, задач теории упругости, строгое аналитическое решение которых встречает серьезные трудности или невозможно на современном уровне развития математических методов. Данные методы, несмотря на неоспоримые достоинства, имеют ряд известных существенных недостатков.

7. Высокую эффективность при решении плоских задач теории упругости, к расчетным схемам которых возможно сведение рассматриваемых задач геомеханики, показал математический аппарат, использующий комплексные потенциалы Колосова-Мухелишвили, методы теории функций комплексного переменного и теории рядов. С их применением разработан целый ряд методов, в основу которых положены полученные строгие решения плоских задач теории упругости с расчетными схемами, позволяющими учесть влияние на формирование напряженно-деформированного состояния элементов геомеханических систем основных факторов.

8. Методы расчета конструкций подземных сооружений, сооруженных с применением защитных экранов из труб, в основу которых положены строгие аналитические решения задач геомеханики, позволяющие определить напряженно-деформированное состояние системы "массив грунта – трубы защитного экрана – конструкция подземного сооружения", в настоящее время отсутствуют.

9. Результаты выполненного научного исследования будут способствовать совершенствованию методов расчета обделок тоннелей, сооруженных с применением защитных экранов. Это позволит выполнить корректировку существующих и разработку новых нормативных документов, регламентирующих строительство подземных сооружений с использованием опережающего крепления и способствующих повышению эффективности их применения.

Цель и идея работы. Постановка задач исследования

Целью работы является разработка метода расчета обделок тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных с применением экранов из труб, позволяющего установить закономерности формирования напряжённого состояния элементов геомеханической системы "массив грунта – трубы экрана – обделка тоннеля" и оценить прочность подземных конструкций, которая потребовала решения следующих **задач**:

- определение факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на напряженно-деформированное состояние обделок тоннелей и грунта;

- выбор и классификация расчетных схем, использованных при постановке задачи геомеханики, решение которой возможно с использованием методов математической теории упругости;

- обоснование возможности применения плоской задачи теории упругости и ее постановка, формулирование граничных условий на линиях контакта областей, моделирующих массив грунта, сечения обделки тоннеля и труб защитного экрана, при действии гравитационных сил;

- разработка математической модели взаимодействия массива грунта, обделки тоннеля и труб защитного экрана, включающей получение аналитического решения задачи теории упругости с использованием математического аппарата теории функций комплексного переменного (ТФКП) и комплексных рядов;

- разработка на основе результатов математического моделирования аналитического метода расчета обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитных экранов из труб;

- составление алгоритма вычислений и реализующей его компьютерной программы, позволяющей выполнять многовариантные расчеты обделок тоннелей.

Идея работы заключается в возможности определения напряженного состояния грунта и обделок тоннелей, сооружаемых под защитой экрана из труб, с использованием предложенного метода расчета.

2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ОБДЕЛКА ТОННЕЛЯ – МАССИВ ГРУНТА – ТРУБЫ ЗАЩИТНОГО ЭКРАНА»

2.1 Основные положения и задачи выполняемого исследования

Ниже приведены основные теоретические положения геомеханики и механики подземных сооружений, позволяющие разработать математическую модель взаимодействия обделки тоннеля, сооружаемого с применением защитного экрана из труб, с окружающим массивом грунта в рамках рассмотрения единой деформируемой геомеханической системы.

Выполнение математического моделирования формирования напряженно-деформированного состояния геомеханической системы «обделка тоннеля – массив грунта – трубы защитного экрана» потребовало:

- обобщения теоретических основ управления состоянием и изменением свойств окружающих грунтов с целью обеспечения устойчивости горных выработок и подземных сооружений, предотвращающих опасные горно-геологические проявления;

- формулирования задачи геомеханики об изменении напряженно-деформированного состояния грунтов в связи со строительством подземных сооружений, предусматривающим использование для обеспечения устойчивости выработок опережающего крепления в виде защитных экранов из труб;

- обоснования возможности применения общей расчетной схемы соответствующей плоской задачи теории упругости о равновесии полубесконечной линейно деформируемой среды, ослабленной круговым отверстием, подкрепленным концентрическим кольцом, с учетом наличия произвольно расположенных сплошных шайб, моделирующих соответственно массив грунта, поперечное сечение обделки тоннеля, сооруженного закрытым способом вблизи земной поверхности, и сечения труб защитного экрана при действии гравитационных сил;

- формулирование граничных условий на свободной границе полуплоскости и на линиях контакта областей с различными деформационными характери-

стиками, моделирующих массива грунта, сечения обделки тоннеля и труб защитного экрана, при действии гравитационных сил в массиве грунта;

- обоснование возможности получения аналитического решения поставленной задачи теории упругости методами математической теории упругости с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили и аппарата ТФКП;

- осуществление перехода после введения комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили, характеризующих напряженно-деформированное состояние областей, моделирующих массива грунта, сечения обделки тоннеля и труб защитного экрана, от поставленной задачи теории упругости к краевой задаче ТФКП для многосвязной кусочно-однородной области;

- получение строгого аналитического решения краевой задачи ТФКП с применением процедуры аналитического продолжения комплексных потенциалов через границу полуплоскости, использованием свойств интегралов типа Коши и рядов Лорана;

- разработку на основе полученного решения метода расчета обделок тоннелей, сооружаемых закрытым способом вблизи земной поверхности с применением защитного экрана из труб, позволяющего определить напряженное состояние элементов геомеханической системы;

- разработку алгоритма расчета и реализующей его компьютерной программы, позволяющей выполнять многовариантные расчеты при проектировании тоннелей и в исследовательских целях;

- выполнения численных экспериментов, подтверждающих адекватность и точность получаемых результатов;

- проведения сравнения результатов расчетов с данными, полученными другими авторами для частных случаев;

- исследование на основе анализа результатов численных экспериментов закономерностей формирования напряженного состояния массива грунта и обделок тоннелей, сооруженных с применением защитных экранов из труб.

Таким образом, разработанный на основе предложенной математической модели новый аналитический метод расчета обделок тоннелей кругового поперечного сечения мелкого заложения, сооружаемых закрытым способом в непосредственной близости от земной поверхности с применением защитного экрана из труб, позволит установить закономерности влияния на напряженно-деформированное состояние обделок тоннелей и массива грунта изменения параметров защитного экрана – количества используемых труб; их диаметров и расположения относительно тоннеля; физико-механических характеристик грунта, материалов обделки и возможного заполнения труб экрана и др.

2.2 Постановка задачи геомеханики о взаимодействии обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитного экрана из труб, с массивом грунта

При разработке математической модели формирования напряженно-деформированного состояния массива грунта и обделки тоннеля, сооружаемого с использованием защитного экрана из труб вблизи земной поверхности, при действии собственного веса грунта использованы представления механики подземных сооружений [21] и геомеханики [39] о взаимодействии подземных конструкций и окружающего массива как элементов единой деформируемой системы.

Предварительно установленные защитные экраны, обеспечивая устойчивость окружающего грунтового массива и способствуя безопасному выполнению работ по проходке выработки и возведению обделки, позволяют свести к минимуму нарушения существующей наземной инфраструктуры, уменьшить осадки земной поверхности. Очевидно, что наличие защитного экрана оказывает влияние на напряженно-деформированное состояние обделок тоннелей, учет которого необходим на этапе проектирования конструкций подземных сооружений.

На рисунке 2.1 показана схематичная пространственная модель расположения труб защитного экрана, расположенных по части контура выработки.

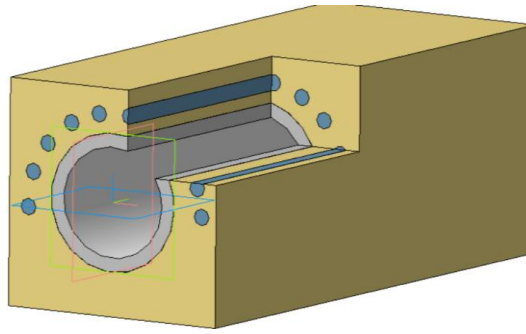


Рисунок 2.1 – Модель расположения труб защитного экрана

Разрабатываемый метод предназначен для расчета обделок тоннелей кругового поперечного сечения достаточно большой протяженности, сооруженных закрытым способом вблизи земной поверхности с применением опережающего крепления – под защитой экрана из труб, продавливаемых в грунт вокруг выработки параллельно или под некоторым малым углом к направлению ее проходки. Длина труб экрана в зависимости от применяемого оборудования может составлять до нескольких десятков метров.

Поскольку будет рассматриваться достаточно протяженный участок тоннеля, сооруженного под защитой экрана из труб, в основу математической модели положена расчетная схема плоской задачи теории упругости.

Используемые расчетные схемы, соответствующие различным формам поперечного сечения защитных экранов, позволяют учесть влияние на напряженное состояние обделки тоннеля и массива грунта, а также на характер деформаций земной поверхности следующих основных факторов:

- наличие близко расположенной земной поверхности;
- глубину заложения тоннеля (отсчитывается от центра поперечного сечения выработки до земной поверхности);
- физико-механические и геомеханические характеристики массива грунта;
- поле начальных напряжений в массиве, обусловленных гравитационными силами в массиве грунта;
- размеры поперечного сечения обделки тоннеля;
- деформационные характеристики материала обделки;
- количество труб защитного экрана;

- взаимное расположение и размеры поперечного сечения труб экрана;
- деформационные характеристики материала заполнения труб экрана;
- последовательность сооружения защитного экрана и тоннеля;
- отставание возведения обделки от забоя тоннеля.

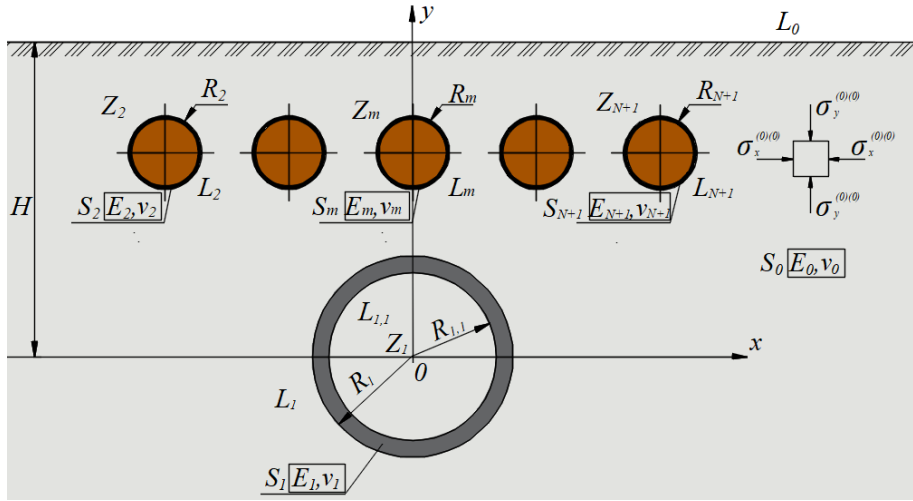
2.3 Расчетные схемы плоской задачи теории упругости

Математическая модель формирования напряженно-деформированного состояния массива грунта и обделки тоннеля, сооружаемого с использованием защитного экрана из труб вблизи земной поверхности, при действии собственного веса грунта построена на полученном аналитическом решении плоской задачи теории упругости для полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием, при наличии произвольно расположенных упругих шайб.

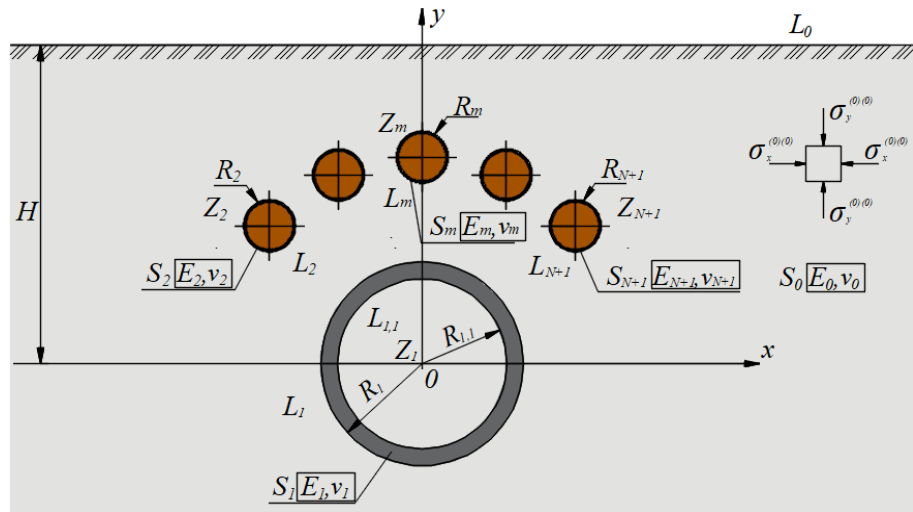
Некоторые возможные расчетные схемы задачи теории упругости, учитывающие расположение труб защитного экрана, приведены на рисунке 2.2.

В расчетных схемах рассматривается весома полубесконечная однородная линейно-деформируемая среда S_0 , моделирующая массив грунта. Среда ограничена горизонтальной прямой L_0 , контуром L_1 отверстия радиусом R_1 и конечным числом N контуров L_m сплошных круговых шайб с радиусами R_m ($m = 2, \dots, N+1$), моделирующими соответственно земную поверхность, поперечное сечение выработки тоннеля, сечения труб защитного экрана с заполнением.

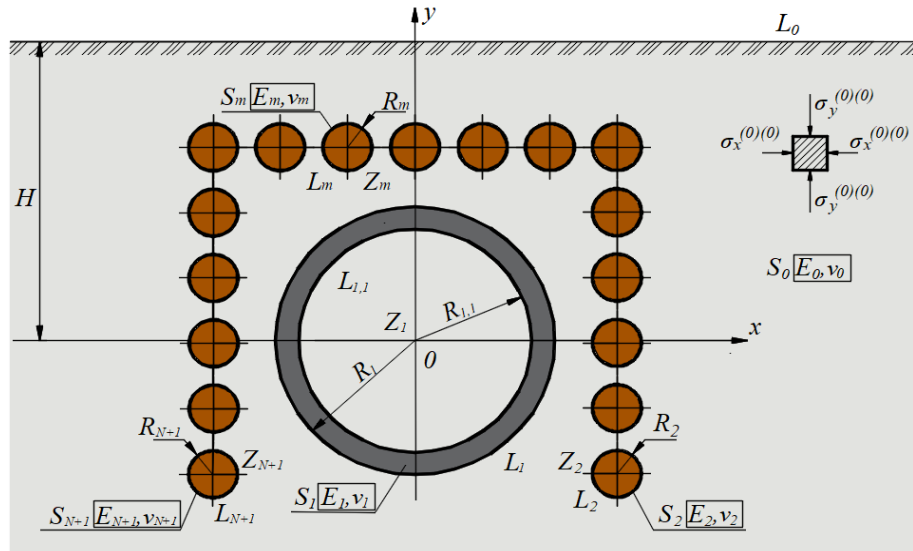
Координаты центров отверстия и сечений шайб в прямоугольной системе координат xOy , начало которой совмещено с центром отверстия, задаются комплексными числами $z_m = (x_m; y_m) = x_m + i y_m$ ($m = 1, \dots, N+1$) в комплексной плоскости. Центр отверстия расположен на расстоянии H от линии L_0 , таким образом, $z_1 = (x_1; y_1) = (0; 0)$.



а



б



в

Рисунок 2.2 – Расчетные схемы задачи для защитных экранов, трубы которых расположены: а – горизонтально; б – по части контура выработки; в – П – образно

Материал среды S_0 характеризуется коэффициентом бокового давления λ , определяемым экспериментально, а при отсутствии таких данных - по формуле Динника А.Н. [21], а также усредненными величинами объемного веса γ , модуля деформации E_0 и коэффициента Пуассона ν_0 .

Круговое отверстие подкреплено концентрическим кольцом S_1 , моделирующим поперечное сечение обделки тоннеля, с внутренним контуром $L_{1,1}$ радиусом $R_{1,1}$.

Материал кольца S_1 имеет деформационные характеристики E_1, ν_1 - модуль деформации и коэффициент Пуассона соответственно.

Сплошные шайбы S_m радиусами R_m ($m = 2, \dots, N+1$), моделирующие поперечные сечения труб защитного экрана, выполнены из материалов с приведенными деформационными характеристиками E_m, ν_m ($m = 2, \dots, N+1$), отличными от деформационных характеристик среды S_0 .

Собственным весом обделки и материалов шайб по сравнению с весом окружающего массива грунта пренебрегается.

Действие гравитационных сил в ненарушенном массиве грунта естественного залегания моделируются наличием в весомерой среде S_0 неравнокомпонентного поля начальных напряжений. В принятой системе координат начальные напряжения в любой точке среды с ординатой y определяются следующими соотношениями [5]:

$$\sigma_y^{(0)(0)} = -\gamma(H - y); \sigma_x^{(0)(0)} = \lambda\sigma_y^{(0)(0)} = -\lambda\gamma(H - y); \tau_{xy}^{(0)(0)} = 0, \quad (2.1)$$

учитывающими изменение напряжений по высоте выработки тоннеля мелкого заложения, что существенно при глубине заложения выработки, соизмеримой с ее поперечным размером.

Тогда, следуя [21], полные напряжения $\sigma_x^{(0)*}, \sigma_y^{(0)*}, \tau_{xy}^{(0)*}$ в области S_0 представляются в виде:

$$\sigma_x^{(0)*} = \sigma_x^{(0)(0)} + \sigma_x^{(0)}; \sigma_y^{(0)*} = \sigma_y^{(0)(0)} + \sigma_y^{(0)}; \tau_{xy}^{(0)*} = \tau_{xy}^{(0)(0)} + \tau_{xy}^{(0)}, \quad (2.2)$$

где $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$ – дополнительные напряжения, обусловленные наличием в среде S_0 подкрепленного отверстия и шайб и определяемые из решения соответствующей задачи теории упругости.

Начальные напряжения в областях S_m ($m=1,2,\dots,N+1$) отсутствуют, т.к. собственным весом обделки тоннеля и весом труб защитного экрана, как сказано ранее, пренебрегается. Тогда искомые дополнительные напряжения в областях S_m ($m=1,2,\dots,N+1$) являются по сути полными.

Смещения в областях S_m ($m=0,1,2,\dots,N+1$), моделирующих массив грунта, поперечное сечение обделки тоннеля и сечение труб экрана, рассматриваются только дополнительные.

2.4 Граничные условия плоской задачи теории упругости

Граница среды S_0 свободна от действия внешних сил, поэтому на линии L_0 полные вертикальные нормальные $\sigma_y^{(0)*}$ и касательные $\tau_{xy}^{(0)*}$ напряжения отсутствуют:

$$\sigma_y^{(0)*}\Big|_{L_0} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)*}\Big|_{L_0} = 0. \quad (2.3)$$

Предполагая совместное деформирование среды S_0 и областей S_m , на контурах L_m ($m=1,2,\dots,N+1$) выполняются условия непрерывности векторов полных напряжений и дополнительных смещений, возникающих в точках границ областей с различными деформационными характеристиками:

$$\begin{cases} \sigma_r^{(m)*}\Big|_{L_m} = \sigma_r^{(0)*}\Big|_{L_m}, \quad \tau_{r\theta}^{(m)*}\Big|_{L_m} = \tau_{r\theta}^{(0)*}\Big|_{L_m}; \\ u^{(m)}\Big|_{L_m} = u^{(0)}\Big|_{L_m}, \quad v^{(m)}\Big|_{L_m} = v^{(0)}\Big|_{L_m}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Внутренний контур $L_{1,1}$ кольца S_1 свободен от действия внешних сил:

$$\sigma_r^{(1)*}\Big|_{L_{1,1}} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(1)*}\Big|_{L_{1,1}} = 0. \quad (2.5)$$

В условиях (2.4), (2.5) напряжения $\sigma_r^{(m)*}$, $\tau_{r\theta}^{(m)*}$ – полные радиальные и касательные, а $u^{(m)}$, $v^{(m)}$ – радиальные и окружные смещения в точках границ соответствующих областей S_m ($m = 0, 1, \dots, N + 1$) в полярных системах координат, полюса которых совмещены с центрами поперечных сечений этих областей.

2.5 Учет технологических и реологических факторов, влияющих на формирование напряженно-деформированного состояния элементов геомеханической системы

Приближенный учет влияния последовательности сооружения подземных объектов и отставания возведения обделки тоннеля от его забоя выполняется на основе методики, предложенной в [92, 5], использующей эмпирически определяемые корректирующие множители α^* [21] и результаты последовательного решения соответствующих плоских задач теории упругости. Принципиальный алгоритм учета приведен в [92].

Учет вязко-упругого деформирования среды, моделирующей массив грунта, возможен на основе теории линейной наследственной ползучести с использованием метода переменных модулей, согласно которому входящие в решение задачи теории упругости деформационные характеристики грунта представляются как функции времени [3, 5], включающие параметры ползучести грунта, определяемые экспериментально.

Выводы по главе 2

1. Приведены основные теоретические положения геомеханики и механики подземных сооружений, использованные при разработке математической модели взаимодействия обделки тоннеля, сооружаемого с применением защитного экрана из труб, с окружающим массивом грунта в рамках рассмотрения единой деформируемой геомеханической системы.

2. Определен перечень задач, постановка и решение которых необходимы при разработке математической модели формирования напряженно-деформированного состояния геомеханической системы «обделка тоннеля – массив грунта – трубы защитного экрана».

2. Выполнена постановка задачи геомеханики о взаимодействии и совместной работе подземных конструкций и окружающего массива грунта как элементов единой деформируемой системы.

3. Определен перечень основных факторов, существенно влияющих на напряженно-деформированное состояние массива грунта и обделки тоннеля, сооружаемого с применением защитного экрана из труб.

4. Обоснована возможность использования в процессе решения рассматриваемой задачи геомеханики расчетных схем задачи теории упругости в плоской постановке.

5. Сформулированы граничные условия плоской задачи теории упругости, отражающие специфику взаимодействия элементов рассматриваемой геомеханической системы.

6. Предложено использование ранее разработанных эмпирических методик для учета влияния на формирование напряженно-деформированного состояния элементов геомеханической системы ряда технологических и реологических факторов, таких как последовательность сооружения объектов, отставание возведения обделки от забоя и упруго-пластическое деформирование массива грунта.

3 РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Аналитическое решение поставленной плоской задачи теории упругости после ее сведения к краевой задаче теории функций комплексного переменного (ТФКП) получено с использованием метода Арамановича И.Г. [15]. Данный метод предусматривает применение теории комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [57], характеризующих напряженно-деформированное состояние выделенных областей, и математического аппарата ТФКП, в том числе – аналитического продолжения потенциалов через границу полуплоскости, свойств интегралов типа Коши и теории рядов Лорана [57, 43], существенно модифицированный и обобщенный в работах [92, 5], показал высокую эффективность при решении задач для многосвязных кусочно-однородных областей.

3.1 Граничные условия краевой задачи ТФКП

Расчетная схема плоской задачи теории упругости для весомой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием, моделирующим поперечное сечение обделки тоннеля, вблизи которого произвольно расположены круговые включения (шайбы) из материалов с отличающимися, в общем случае, деформационными характеристиками, моделирующие сечения труб защитного экрана, приведена на рисунке 2.1.

Для решения поставленной задачи теории упругости с использованием математического аппарата ТФКП в рассмотрение, следуя работе [5], вводятся следующие группы (пары) комплексных потенциалов:

- функции $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, отвечающие за напряженно-деформированное состояние весомой полубесконечной среды S_0 , содержащей подкрепленное отверстие и шайбы, моделирующей массив грунта;

- функции $\tilde{\varphi}_1(z)$, $\tilde{\psi}_1(z)$, характеризующие напряженно-деформированное состояние невесомого концентрического кругового кольца S_1 , моделирующего обделку тоннеля;

- функции $\tilde{\varphi}_j(z)$, $\tilde{\psi}_j(z)$, характеризующие напряженно-деформированное состояние невесомых сплошных шайб S_j ($j=2,\dots,N+1$), моделирующих поперечные сечения труб защитного экрана с возможным заполнением.

Введенные функции, следуя [57, 5], связаны с компонентами напряжений и смещений в точках $z = x + iy$ областей S_p ($p = 0,1,2,\dots,N+1$) формулами Колосова

- Мусхелишвили [57], принимающими для данной задачи вид:

- в прямоугольной системе координат

$$\begin{cases} \sigma_x^{(p)} + \sigma_y^{(p)} = 4 \operatorname{Re} \tilde{\varphi}_p'(z); \\ \sigma_y^{(p)} - \sigma_x^{(p)} + 2i\tau_{xy}^{(p)} = 2 \left[\bar{z} \tilde{\varphi}_p''(z) + \tilde{\psi}_p'(z) \right]; \\ 2\mu_p \left[u^{(p)} + iv^{(p)} \right] = \mathfrak{a}_p \tilde{\varphi}_p(z) - \overline{z \tilde{\varphi}_p'(z)} - \overline{\tilde{\psi}_p'(z)} \end{cases} \quad (3.1)$$

- в полярных системах координат, полюса которых совмещены с началом прямоугольной системы координат, либо с центрами отверстия или шайб

$$\begin{cases} \sigma_r^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)} = 4 \operatorname{Re} \tilde{\varphi}_p'(z); \\ \sigma_\theta^{(p)} - \sigma_r^{(p)} + 2i\tau_{r\theta}^{(p)} = 2 \left[\bar{z} \tilde{\varphi}_p''(z) + \tilde{\psi}_p'(z) \right] e^{2i\theta}; \\ 2\mu_p \left[u^{(p)} + iv^{(p)} \right] = \left[\mathfrak{a}_p \tilde{\varphi}_p(z) - \overline{z \tilde{\varphi}_p'(z)} - \overline{\tilde{\psi}_p'(z)} \right] e^{-i\theta}. \end{cases} \quad (3.2)$$

В соотношениях (3.1), (3.2) использованы константы

$$\mathfrak{a}_p = 3 - 4\nu_p, \quad \mu_p = \frac{E_p}{2(1 + \nu_p)} \quad (p = 0,1,\dots,N+1); \quad (3.3)$$

символом « i » обозначена мнимая единица ($i^2 = -1$). Полярный угол θ отсчитывается от положительного направления горизонтальной оси Ox (рисунок 2.1) против хода часовой стрелки.

Ниже приведены граничные условия краевой задачи ТФКП, соответствующей плоской задаче теории упругости о действии гравитационных сил в массиве грунта (см. раздел 2), записанные с использованием введенных комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [5].

На прямолинейной границе L_0 среды S_0 , моделирующей земную поверхность, внешние нагрузки отсутствуют, следовательно

$$\overline{\tilde{\varphi}_0(t_0)} + t_0 \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_0)} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_0)} = 0. \quad (3.4)$$

В точках контура L_1 , являющегося границей сред с различающимися деформационными характеристиками, и, одновременно, наружным контуром кругового кольца S_1 , моделирующего поперечное сечение обделки тоннеля, выполняются условия непрерывности векторов полных напряжений и дополнительных смещений:

$$\begin{cases} \overline{\tilde{\varphi}_1(t_1)} + t_1 \overline{\tilde{\varphi}'_1(t_1)} + \overline{\tilde{\psi}_1(t_1)} = \overline{\tilde{\varphi}_0(t_1)} + t_1 \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_1)} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_1)} + f_1(t_1), \\ \alpha_1 \overline{\tilde{\varphi}_1(t_1)} - t_1 \overline{\tilde{\varphi}'_1(t_1)} - \overline{\tilde{\psi}_1(t_1)} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left[\alpha_0 \overline{\tilde{\varphi}_0(t_1)} - t_1 \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_1)} - \overline{\tilde{\psi}_0(t_1)} \right]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Граничное условие, отражающее отсутствие внешних нагрузок на внутреннем контуре $L_{1,1}$ кольца S_1 , имеет вид

$$\overline{\tilde{\varphi}_1(t_{1,1})} + t_{1,1} \overline{\tilde{\varphi}'_1(t_{1,1})} + \overline{\tilde{\psi}_1(t_{1,1})} = 0 \quad \text{на } L_{1,1}. \quad (3.6)$$

Условия на контурах L_m ($m = 2, \dots, N+1$), являющихся границами сред с различными деформационными характеристиками, и, одновременно, наружными контурами шайб S_m ($m = 2, \dots, N+1$), моделирующих поперечные сечения труб защитного экрана, отражают условия непрерывности векторов полных напряжений и дополнительных смещений

$$\begin{cases} \overline{\varphi_m(t_m)} + t_m \overline{\varphi'_m(t_m)} + \overline{\psi_m(t_m)} = \overline{\tilde{\varphi}_0(t_m)} + t_m \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_m)} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_m)} + f_m(t_m), \\ \alpha_m \overline{\varphi_m(t_m)} - t_m \overline{\varphi'_m(t_m)} - \overline{\psi_m(t_m)} = \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\alpha_0 \overline{\tilde{\varphi}_0(t_m)} - t_m \overline{\tilde{\varphi}'_0(t_m)} - \overline{\tilde{\psi}_0(t_m)} \right]. \end{cases} \quad (3.7)$$

Для аффиксов точек t_0 линии L_0 в условии (3.4) в декартовой системе координат xOy , начало которой совмещено с центром отверстия, моделирующего сечение тоннеля, справедливо представление

$$t_0 = x + iH; \quad (3.8)$$

аффиксы точек соответствующих контуров в условиях (3.5) – (3.7) представляются соотношениями, которые с учетом используемого далее обозначения $\sigma = e^{i\theta}$, представляющего собой аффикс точки единичной окружности, принимают вид:

$$t_1 = R_1 e^{i\theta} = R_1 \sigma, \quad t_{1,1} = R_{1,1} \sigma \text{ на контурах } L_1, L_{1,1}; \quad (3.9)$$

$$t_m = z_m + R_m e^{i\theta} = z_m + R_m \sigma \text{ на контурах } L_m \quad (m = 2, \dots, N+1). \quad (3.10)$$

Функция $f_1(t_1)$ в граничных условиях (3.5) на контуре L_1 и функции $f_m(t_m)$ в условиях (3.7) на контурах L_m ($m = 2, \dots, N+1$) обусловлены наличием в среде S_0 неравнокомпонентного поля начальных напряжений и, соответственно, действием на указанных контурах главных векторов внешних усилий $X^{(0,m)} + iY^{(0,m)}$ ($m = 1, 2, \dots, N+1$), отличных от нуля.

3.2 Определение функций $f_1(t_1)$ и $f_m(t_m)$

Для определения указанных функций на произвольном контуре используется известное соотношение [57]:

$$f(t) = i \int_0^t (X_n + iY_n) ds, \quad (3.11)$$

в котором t – произвольная точка элементарной дуги ds рассматриваемого контура; X_n, Y_n – компоненты внешнего усилия на контуре в системе координат xOy .

С учетом принятых ранее обозначений для аффиксов точек соответствующих контуров имеем

$$f_1(t_1) = i \int_0^{t_1} (X_n^{(0,1)(0)} + iY_n^{(0,1)(0)}) ds, \quad (3.12)$$

где $X_n^{(0,1)(0)}, Y_n^{(0,1)(0)}$ – компоненты внешних усилий, действующих в произвольной точке t_1 элементарной дуги ds контура L_1 в области S_0 . Данные компоненты вычисляются по формулам [57, 5]:

$$\begin{aligned} X_n^{(0,1)(0)} &= \sigma_x^{(0,1)(0)} \cos(n, x) + \tau_{xy}^{(0,1)(0)} \cos(n, y); \\ Y_n^{(0,1)(0)} &= \tau_{xy}^{(0,1)(0)} \cos(n, x) + \sigma_y^{(0,1)(0)} \cos(n, y), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\sigma_x^{(0,1)(0)}$, $\sigma_y^{(0,1)(0)}$, $\tau_{xy}^{(0,1)(0)}$ – начальные нормальные и касательные напряжения в среде S_0 в точках контура L_1 , определяемые соотношениями (2.1); n – внешняя нормаль к дуге ds контура L_1 . Направляющие косинусы при положительном направлении обхода контура L_1 задаются формулами [57]:

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}. \quad (3.14)$$

С учетом соотношений (2.1), (3.13), (3.14) подынтегральное выражение в (3.12) примет вид:

$$(X_n^{(0,1)(0)} + iY_n^{(0,1)(0)})ds = -\gamma R_1 \left(\frac{H}{R_1} - \frac{y}{R_1} \right) (\lambda dy - idx). \quad (3.15)$$

Для преобразования выражения (3.15) используются соотношения, которые несложно получить из (3.9):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{t_1}{R_1} = \frac{x}{R_1} + i \frac{y}{R_1}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{t}_1}{R_1} = \frac{x}{R_1} - i \frac{y}{R_1} = \sigma^{-1}; \quad d\bar{\sigma} = d(\sigma^{-1}) = -\sigma^{-2} d\sigma; \\ \frac{x}{R_1} &= \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^{-1}); \quad dx = \frac{R_1}{2}(1 - \sigma^{-2})d\sigma; \\ \frac{y}{R_1} &= -\frac{i}{2}(\sigma - \sigma^{-1}); \quad dy = -\frac{iR_1}{2}(1 + \sigma^{-2})d\sigma. \end{aligned} \quad (3.16)$$

С учетом (3.16) получим

$$\begin{aligned} (X_n^{(0,1)(0)} + iY_n^{(0,1)(0)})ds &= \\ &= i \frac{\gamma R_1^2}{2} \left(\frac{H}{R_1}(1 + \lambda) - \frac{H}{R_1}(1 - \lambda)\sigma^{-2} + i \frac{1 + \lambda}{2} \sigma - i\sigma^{-1} + i \frac{1 - \lambda}{2} \sigma^{-3} \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.17)$$

После интегрирования выражения (3.12) с учетом (3.17) окончательно имеем

$$f_1(t_1) = -\frac{\gamma R_1^2}{2} \left(-i \frac{1 - \lambda}{4} \sigma^{-2} + \frac{H}{R_1}(1 - \lambda)\sigma^{-1} + (1 + \lambda) \frac{H}{R_1} \sigma + i \frac{1 + \lambda}{4} \sigma^2 - i \ln \sigma \right). \quad (3.18)$$

Определение функций $f_m(t_m)$ ($m=2, \dots, N+1$) выполняется аналогичным образом и, в конечном итоге, они принимают вид

$$f_m(t_m) = -\frac{\gamma R_m^2}{2} \left(-i \frac{1-\lambda}{4} \sigma^{-2} + \frac{H_m}{R_m} (1-\lambda) \sigma^{-1} + (1+\lambda) \frac{H_m}{R_m} \sigma + i \frac{1+\lambda}{4} \sigma^2 - i \ln \sigma \right),$$

$$H_m = H - y_m \quad (m=2, \dots, N+1). \quad (3.19)$$

3.3 Определение главных векторов внешних усилий на контурах L_1 и L_m

Для определения главного вектора $X + iY$ внешних усилий, действующих на произвольном замкнутом контуре L , используется известное соотношение [57]

$$X + iY = \oint_L (X_n + iY_n) ds. \quad (3.20)$$

С учетом принятых обозначений и соотношения (3.17) из формулы (3.20) можно получить

$$X^{(0,1)} + iY^{(0,1)} = \frac{i}{4} \gamma R_1^2 \oint_{L_1} \left(2(1+\lambda) \frac{H}{R_1} + i(1+\lambda) \sigma - 2i \sigma^{-1} - \right. \\ \left. - 2 \frac{H}{R_1} (1-\lambda) \sigma^{-2} + i(1-\lambda) \sigma^{-3} \right) d\sigma. \quad (3.21)$$

Как известно [57, 43], интегралы по замкнутому контуру от таких функций, как константа или степенные функции σ , за исключением σ^{-1} , равны нулю; интеграл от σ^{-1} по $d\sigma$, равный $\ln \sigma$, при положительном обходе контура $L_{0,1}$ дает приращение $2\pi i$. Тогда выражение (3.21) принимает вид

$$X^{(0,1)} + iY^{(0,1)} = \frac{1}{2} \gamma R_1^2 \oint_{L_1} \sigma^{-1} d\sigma = \frac{1}{2} \gamma R_1^2 \cdot 2\pi i = 2\pi i K_1, \quad K_1 = \frac{\gamma R_1^2}{2}. \quad (3.22)$$

Аналогично определяются главные векторы $X^{(0,m)} + iY^{(0,m)}$ внешних усилий на контурах L_m включений, моделирующих сечения труб защитного экрана ($m=2, \dots, N+1$):

$$X^{(0,m)} + iY^{(0,m)} = 2\pi i K_m, \quad K_m = \frac{\gamma R_m^2}{2} \quad (m=2, \dots, N+1). \quad (3.23)$$

3.4 Представление комплексных потенциалов

Потенциалы $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, регулярные в полуплоскости S_0 вне отверстия с контуром L_1 и шайб с контурами L_m ($m=2, \dots, N+1$), с учетом неинвариантности функции $\tilde{\psi}_0(z)$ [57] представляются в виде [5]

$$\tilde{\varphi}_0(z) = \sum_{j=1}^{N+1} \tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j); \quad \tilde{\psi}_0(z) = \sum_{j=1}^{N+1} \left[\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j) - \overline{z_j} \tilde{\varphi}'_{0,j}(z - z_j) \right]. \quad (3.24)$$

Функции $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ являются регулярными в области S_0 соответственно вне каждого из контуров L_j ($j=1, 2, \dots, N+1$), включая бесконечно удаленную точку. Здесь, как и ранее, z_j ($j=1, 2, \dots, N+1$) – комплексные координаты центров отверстия и круговых включений. Далее при выполнении математических преобразований будет учтено, что $z_1 = (0; 0)$.

Для введенных в (3.24) функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ ($j=1, 2, \dots, N+1$) справедливы следующие представления [5]

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j) = \varphi_{0,j}^*(z - z_j) - \frac{iK_j}{1 + \alpha_0} \left[\ln(z - z_j) + \alpha_0 \ln(z - z_j - 2iH_j) \right]; \quad (3.25)$$

$$\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j) = \psi_{0,j}^*(z - z_j) - \frac{iK_j}{1 + \alpha_0} \left[\alpha_0 \ln(z - z_j) + \ln(z - z_j - 2iH_j) \right]. \quad (3.26)$$

В свою очередь, функции $\varphi_{0,j}^*(z - z_j)$, $\psi_{0,j}^*(z - z_j)$ являются регулярными в полуплоскости S_0 вне контуров L_j ($j=1, 2, \dots, N+1$), включая бесконечно удаленную точку.

Для потенциалов $\tilde{\varphi}_m(z)$, $\tilde{\psi}_m(z)$, регулярных в областях S_m ($m=1, 2, \dots, N+1$), справедливы соотношения

$$\tilde{\varphi}_m(z) = \varphi_m(z - z_m), \quad \tilde{\psi}_m(z) = \psi_m(z - z_m) - \overline{z_m} \varphi'_m(z - z_m). \quad (3.27)$$

Граничные условия (3.4) - (3.7) с учетом (3.24), (3.27), (3.18) и (3.19) приобретают вид ($m=1, \dots, N+1$):

$$\sum_{j=1}^{N+1} \left(\tilde{\varphi}_{0,j}(t_0 - z_j) + \overline{(t_0 - z_j) \tilde{\varphi}'_{0,j}(t_0 - z_j)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_0 - z_j)} \right) = 0 \text{ на линии } L'_0; \quad (3.28)$$

- на контуре L_1 ($t_1 = R_1 \sigma$)

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1) + \overline{t_1 \varphi'_1(t_1)} + \overline{\psi_1(t_1)} = \\ = \sum_{j=1}^{N+1} \left(\tilde{\varphi}_{0,j}(t_1 - z_j) + \overline{(t_1 - z_j) \tilde{\varphi}'_{0,j}(t_1 - z_j)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_1 - z_j)} \right) - \\ - \frac{\gamma R_1^2}{2} \left(-i \frac{1-\lambda}{4} \sigma^{-2} + \frac{H}{R_1} (1-\lambda) \sigma^{-1} + (1+\lambda) \frac{H}{R_1} \sigma + i \frac{1+\lambda}{4} \sigma^2 - i \ln \sigma \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \varphi_1(t_1) - \overline{t_1 \varphi'_1(t_1)} - \overline{\psi_1(t_1)} = \\ = \frac{\mu_1}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left(\alpha_0 \tilde{\varphi}_{0,j}(t_1 - z_j) - \overline{(t_1 - z_j) \tilde{\varphi}'_{0,j}(t_1 - z_j)} - \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_1 - z_j)} \right); \end{aligned} \quad (3.30)$$

- на контуре $L_{1,1}$ ($t_{1,1} = R_{1,1} \sigma$)

$$\varphi_1(t_{1,1}) + \overline{t_{1,1} \varphi'_1(t_{1,1})} + \overline{\psi_1(t_{1,1})} = 0; \quad (3.31)$$

- на контурах L_m ($t_m = z_m + R_m \sigma$)

$$\begin{aligned} \varphi_m(t_m - z_m) + \overline{(t_m - z_m) \varphi'_m(t_m - z_m)} + \overline{\psi_m(t_m - z_m)} = \\ = \sum_{j=1}^{N+1} \left(\tilde{\varphi}_{0,j}(t_m - z_j) + \overline{(t_m - z_j) \tilde{\varphi}'_{0,j}(t_m - z_j)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_m - z_j)} \right) - \\ - \frac{\gamma R_m^2}{2} \left(-i \frac{1-\lambda}{4} \sigma^{-2} + \frac{H}{R_m} (1-\lambda) \sigma^{-1} + (1+\lambda) \frac{H}{R_m} \sigma + i \frac{1+\lambda}{4} \sigma^2 - i \ln \sigma \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \alpha_m \varphi_m(t_m - z_m) - \overline{(t_m - z_m) \varphi'_m(t_m - z_m)} - \overline{\psi_m(t_m - z_m)} = \\ = \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left(\alpha_0 \tilde{\varphi}_{0,j}(t_m - z_j) - \overline{(t_m - z_j) \tilde{\varphi}'_{0,j}(t_m - z_j)} - \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_m - z_j)} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.5 Аналитическое продолжение функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j)$

через границу полуплоскости

Далее, следуя Арамановичу И.Г., необходимо выполнить аналитическое продолжение комплексных потенциалов $\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j)$, каждый из которых является функцией, регулярной в полуплоскости S_0 соответственно вне отверстия или шайб с контурами L_j ($j=1,2,\dots,N+1$), через прямолинейную границу L_0 в верхнюю полуплоскость, дополняющую область S_0 до полной плоскости [5].

Процедура аналитического продолжения предусматривает использование теоремы Сохоцкого-Племеля и свойств интегралов типа Коши [57, 15], что позволяет, как показано в работе [5], получить необходимые представления функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j)$ ($j=1,2,\dots,N+1$) в виде рядов Лорана по положительным и отрицательным степеням переменной z .

Для этого в рассмотрение вводятся функции $\varphi_{0,j}(z-z_j)$, $\psi_{0,j}(z-z_j)$ ($j=1,2,\dots,N+1$), являющиеся регулярными в полной плоскости вне контуров L_j ($j=1,2,\dots,N+1$), и представляемые в виде рядов с неизвестными коэффициентами по отрицательным степеням переменной z ($j=1,2,\dots,N+1$). Для удобства дальнейших преобразований эти ряды имеют вид

$$\varphi_{0,j}(z-z_j) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-k}, \quad (3.34)$$

$$\psi_{0,j}(z-z_j) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-k}. \quad (3.35)$$

Результатом аналитического продолжения функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j)$ ($j=1,2,\dots,N+1$) через прямолинейную границу L_0 являются соотношения, аналогичные представленным в [5]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j) = & \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{kc_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_j} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-k} + \frac{2K_j h_j}{1+\alpha_0} \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} - \\ & - \frac{iK_j}{1+\alpha_0} \left[\ln \frac{z-z_j}{R_j} + \alpha_0 \ln \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right) \right]; \quad (3.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j) = & \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_j} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ & + \frac{2K_j h_j}{1+\alpha_0} \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} - \frac{iK_j}{1+\alpha_0} \left[\alpha_0 \ln \frac{z-z_j}{R_j} + \ln \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right) \right]. \quad (3.37) \end{aligned}$$

В соотношениях (3.37), (3.38) введено обозначение

$$h_j = \frac{H_j}{R_j}; \quad (3.38)$$

и опущены константы, которые, согласно формулам (3.1), (3.2), не потребуются при определении напряжений.

Для получения единообразных форм записи функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z-z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z-z_j)$ ($j=1, \dots, N+1$) в точках контуров L_m ($m=1, 2, \dots, N+1$) введем следующий коэффициент

$$\lambda_{j,m} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = m; \\ 0 & \text{при } j \neq m, \end{cases} \quad (3.39)$$

который позволит получить выражения вида ($j=1, 2, \dots, N+1$; $m=1, 2, \dots, N+1$):

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(t_m - z_j) = \lambda_{j,m} \tilde{\varphi}_{0,m}(t_m - z_m) + (1 - \lambda_{j,m}) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} \right)^{-k} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{t_m - z_j}{R_j} \cdot \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-k} + \\
& + \frac{K_j}{1 + \alpha_0} \left\{ 2h_j \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} - i \left[\ln \frac{t_m - z_j}{R_j} + \alpha_0 \ln \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right) \right] \right\}; \quad (3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_{0,j}(t_m - z_j) & = \lambda_{j,m} \tilde{\psi}_{0,m}(t_m - z_m) + (1 - \lambda_{j,m}) \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} \right)^{-k} - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-k} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{t_m - z_j}{R_j} \cdot \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-k} + \\
& + \frac{K_j}{1 + \alpha_0} \left\{ 2h_j \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} - i \left[\alpha_0 \ln \frac{t_m - z_j}{R_j} + \ln \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right) \right] \right\}. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Очевидно, что при $j \neq m$ ($j = 1, \dots, N+1$; $m = 1, \dots, N+1$) справедливо

$$\frac{t_m - z_j}{R_j} = \left(\frac{t_m - z_m}{R_m} + \frac{z_m - z_j}{R_m} \right) \cdot \frac{R_m}{R_j} = \Delta_{m,j} (\varepsilon_{m,j}^{-1} + \sigma); \quad (3.42)$$

$$\left(\frac{t_m - z_j}{R_j} \right)^{-k} = \Delta_{m,j}^{-k} \varepsilon_{m,j}^k \sum_{n=0}^{\infty} C_{-k}^n \varepsilon_{m,j}^n \sigma^n = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,k}^{(m,j)} \sigma^n; \quad (3.43)$$

$$\left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-k} = \Delta_{m,j}^{-k} \varepsilon_{m,j}'^k \sum_{n=0}^{\infty} C_{-k}^n \varepsilon_{m,j}'^n \sigma^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} \sigma^n. \quad (3.44)$$

В (3.42) – (3.44) и далее использованы следующие соотношения

$$\Delta_{m,j} = \frac{R_m}{R_j}; \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{m,j} = \frac{R_m}{z_m - z_j}; \quad (3.46)$$

$$C_{-k}^n = (-1)^n \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!n!}; \quad I_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \Delta_{m,j}^{-k} \varepsilon_{m,j}^{n+k}; \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_{m,j}' = \left(\frac{z_m - z_j}{R_m} - 2ih_j \Delta_{m,j}^{-1} \right)^{-1}, \quad \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \Delta_{m,j}^{-k} \varepsilon_{m,j}'^{n+k}. \quad (3.48)$$

Для логарифмических функций, входящих в (3.40), (3.41), используются следующие представления в виде рядов [30], в которых опущены константы, не влияющие на вычисление напряжений

$$\ln \frac{t_m - z_j}{R_j} = \ln(1 + \varepsilon_{m,j} \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \Delta_{m,j}^k \sigma^k; \quad (3.49)$$

$$\ln \left(\frac{t_m - z_j}{R_j} - 2ih_j \right) = \ln \left[\Delta_{m,j} \left(\sigma + \varepsilon_{m,j}'^{-1} \right) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \varepsilon_{m,j}'^k \sigma^k. \quad (3.50)$$

Тогда функции $\tilde{\varphi}_{0,j}(t_m - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(t_m - z_j)$ ($j=1, \dots, N+1$) примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}(t_m - z_j) = & \lambda_{j,m} \tilde{\varphi}_{0,m}(t_m - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(1)(0,j)} + \right. \\ & \left. + n \Delta_{m,j} \left(\varepsilon_{m,j}'^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} + \tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right] \sigma^k + \\ & + \frac{K_j}{1 + \varepsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2h_j \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i \cdot \frac{(-1)^k}{k} \cdot \left(\varepsilon_{m,j}^k + \varepsilon_0 \varepsilon_{m,j}'^k \right) \right] \sigma^k; \quad (3.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{0,j}(t_m - z_j) = & \lambda_{j,m} \tilde{\psi}_{0,m}(t_m - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(2)(0,j)} - \right. \\ & \left. - (n+1) \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - n \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} + \right. \\ & \left. + n(n+1) \Delta_{m,j} \left(\varepsilon_{m,j}'^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} + \tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} \right] \sigma^k + \\ & + \frac{K_j}{1 + \varepsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2h_j \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i \frac{(-1)^k}{k} \left(\varepsilon_0 \varepsilon_{m,j}^k + \varepsilon_{m,j}'^k \right) \right] \sigma^k. \quad (3.52) \end{aligned}$$

Выражения (3.51), (3.52) для функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(t_m - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(t_m - z_j)$ запишем в следующем виде ($j=1, \dots, N+1$; $m=1, \dots, N+1$):

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(t_m - z_j) = \lambda_{j,m} \varphi_{0,m}(t_m - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(3)(m,j)} \sigma^k - \lambda_{j,m} \frac{iK_m}{1 + \varkappa_0} \ln \sigma; \quad (3.53)$$

$$\tilde{\psi}_{0,j}(t_m - z_j) = \lambda_{j,m} \psi_{0,m}(t_m - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(4)(m,j)} \sigma^k - \lambda_{j,m} \frac{iK_m}{1 + \varkappa_0} \varkappa_0 \ln \sigma, \quad (3.54)$$

В (3.53), (3.54) введены обозначения

$$C_k^{(3)(m,j)} = c_k^{(3)(m,j)} + \tilde{c}_k^{(3)(m,j)}; \quad C_k^{(4)(m,j)} = c_k^{(4)(m,j)} + \tilde{c}_k^{(4)(m,j)}; \quad (3.55)$$

в которых

$$c_k^{(3)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(1)(0,j)} + \right. \\ \left. + n \Delta_{m,j} \left(\tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + \varepsilon_{m,j}^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right]; \quad (3.56)$$

$$\tilde{c}_k^{(3)(m,j)} = \frac{K_j}{1 + \varkappa_0} \left\{ 2h_j \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i \frac{(-1)^k}{k} \left[(1 - \lambda_{m,j}) \varepsilon_{m,j}^k + \varkappa_0 \varepsilon_{m,j}'^k \right] \right\}; \quad (3.57)$$

$$c_k^{(4)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(2)(0,j)} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \left((n+1) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} + n \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right) + \right. \\ \left. + n(n+1) \Delta_{m,j} \left(\tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + \varepsilon_{m,j}^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} \right]; \quad (3.58)$$

$$\tilde{c}_k^{(4)(m,j)} = \frac{K_j}{1 + \varkappa_0} \left\{ 2h_j \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i \frac{(-1)^k}{k} \left[(1 - \lambda_{m,j}) \varkappa_0 \varepsilon_{m,j}^k + \varepsilon_{m,j}'^k \right] \right\}. \quad (3.59)$$

3.7 Преобразование граничных условий

С учетом (3.27), (3.24), (3.19) условия (3.5) - (3.7) примут вид:

- на контуре L_1 кольца S_1

$$\varphi_1(t_1) + t_1 \overline{\varphi_1'(t_1)} + \overline{\psi_1(t_1)} = \sum_{j=1}^{N+1} \left[\overline{\tilde{\varphi}_{0,j}(t_1 - z_j)} + (t_1 - z_j) \overline{\tilde{\varphi}_{0,j}'(t_1 - z_j)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_1 - z_j)} \right] - \\ - K_1 \left[-i \frac{1-\lambda}{4} \cdot \sigma^{-2} + \frac{H}{R_{0,1}} (1-\lambda) \cdot \sigma^{-1} + (1+\lambda) \frac{H}{R_{0,1}} \sigma + i \frac{1+\lambda}{4} \sigma^2 - i \ln \sigma \right], \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 \varphi_1(t_1) - t_1 \overline{\varphi_1(t_1)} - \overline{\psi_1(t_1)} = \\ = \frac{\mu_1}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left[\mathfrak{a}_0 \tilde{\varphi}_{0,j}(t_1 - z_j) - (t_1 - z_j) \overline{\tilde{\varphi}'_{0,j}(t_1 - z_j)} - \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_1 - z_j)} \right]; \end{aligned} \quad (3.61)$$

- на контуре $L_{1,1}$ кольца S_1

$$\varphi_1(t_{1,1}) + t_{1,1} \overline{\varphi_1(t_{1,1})} + \overline{\psi_1(t_{1,1})} = 0; \quad (3.62)$$

- на контурах L_m включений S_m ($m = 2, \dots, N+1$)

$$\begin{aligned} \varphi_m(t_m - z_m) + (t_m - z_m) \overline{\varphi_m(t_m - z_m)} + \overline{\psi_m(t_m - z_m)} = \\ = \sum_{j=1}^{N+1} \left[\tilde{\varphi}_{0,j}(t_m - z_j) + (t_m - z_j) \overline{\tilde{\varphi}'_{0,j}(t_m - z_j)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_m - z_j)} \right]; \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_m \varphi_m(t_m - z_m) - (t_m - z_m) \overline{\varphi_m(t_m - z_m)} - \overline{\psi_m(t_m - z_m)} = \\ = \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left[\mathfrak{a}_0 \tilde{\varphi}_{0,j}(t_m - z_j) - (t_m - z_j) \overline{\tilde{\varphi}'_{0,j}(t_m - z_j)} - \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_m - z_j)} \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

С учетом (3.53), (3.54) выражения (3.60) – (3.64) примут вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1) + t_1 \overline{\varphi_1(t_1)} + \overline{\psi_1(t_1)} = \varphi_{0,1}(t_1) + t_1 \overline{\varphi_{0,1}(t_1)} + \overline{\psi_{0,1}(t_1)} + \\ + \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1) \varepsilon_{1,j}^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(1,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(1,j)}} + \overline{C_k^{(4)(1,j)}} \right] \sigma^{-k} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k^{(3)(1,j)} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(1,j)}} \right] \sigma^k \right\} - \\ - \frac{K_1}{2} \left[-i \frac{1-\lambda}{2} \sigma^{-2} + 4h_1 \frac{1-\lambda}{2} \sigma^{-1} + 4h_1 \frac{1+\lambda}{2} \sigma + i \left(\frac{1+\lambda}{2} - \frac{2}{1+\mathfrak{a}_0} \right) \sigma^2 \right]; \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 \varphi_1(t_1) - t_1 \overline{\varphi_1(t_1)} - \overline{\psi_1(t_1)} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left(\mathfrak{a}_0 \varphi_{0,1}(t_1) - t_1 \overline{\varphi_{0,1}(t_1)} - \overline{\psi_{0,1}(t_1)} \right) + \\ + \frac{\mu_1}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[-(k+1) \varepsilon_{1,j}^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(1,j)}} - (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(1,j)}} - \overline{C_k^{(4)(1,j)}} \right] \sigma^{-k} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathfrak{a}_0 C_k^{(3)(1,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(1,j)}} \right] \sigma^k \right\} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{iK_1}{1+\mathfrak{a}_0} \sigma^2; \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \varphi_m(t_m - z_m) + (t_m - z_m) \overline{\varphi_m(t_m - z_m)} + \overline{\psi_m(t_m - z_m)} = \\ = \varphi_{0,m}(t_m - z_m) + (t_m - z_m) \overline{\varphi_{0,m}(t_m - z_m)} + \overline{\psi_{0,m}(t_m - z_m)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)\varepsilon_{m,j}^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] \sigma^{-k} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k^{(3)(m,j)} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right] \sigma^k \right\} - \\
& - \frac{K_m}{2} \left[-i \frac{1-\lambda}{2} \sigma^{-2} + 4h_m \frac{1-\lambda}{2} \sigma^{-1} + 4h_m \frac{1+\lambda}{2} \sigma + i \left(\frac{1+\lambda}{2} - \frac{2}{1+\alpha_0} \right) \sigma^2 \right]; \quad (3.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_m \varphi_m(t_m - z_m) - \overline{(t_m - z_m) \varphi_m(t_m - z_m) - \psi_m(t_m - z_m)} = \\
& = \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\alpha_0 \varphi_{0,m}(t_m - z_m) - \overline{(t_m - z_m) \varphi_{0,m}(t_m - z_m) - \psi_{0,m}(t_m - z_m)} \right] + \\
& + \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[-(k+1)\varepsilon_{m,j}^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} - (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} - \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] \sigma^{-k} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right] \sigma^k \right\} - \frac{\mu_m}{\mu_0} \frac{iK_m}{1+\alpha_0} \sigma^2. \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Соотношения (3.65) - (3.68) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t_1) + t_1 \overline{\varphi_1(t_1)} + \overline{\psi_1(t_1)} = \varphi_{0,1}(t_1) + t_1 \overline{\varphi_{0,1}(t_1)} + \overline{\psi_{0,1}(t_1)} + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1)(1)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(3)(1)} \sigma^k; \quad (3.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \varphi_1(t_1) - t_1 \overline{\varphi_1(t_1)} - \overline{\psi_1(t_1)} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left[\alpha_0 \varphi_{0,1}(t_1) - t_1 \overline{\varphi_{0,1}(t_1)} - \overline{\psi_{0,1}(t_1)} \right] + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(2)(1)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(4)(1)} \sigma^k; \quad (3.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_m(t_m - z_m) + \overline{(t_m - z_m) \varphi_m(t_m - z_m) + \psi_m(t_m - z_m)} = \\
= \varphi_{0,m}(t_m - z_m) + \overline{(t_m - z_m) \varphi_{0,m}(t_m - z_m) + \psi_{0,m}(t_m - z_m)} + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(3)(m)} \sigma^k; \quad (3.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_m \varphi_m(t_m - z_m) - \overline{(t_m - z_m) \varphi_m(t_m - z_m) - \psi_m(t_m - z_m)} = \\
= \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\alpha_0 \varphi_{0,m}(t_m - z_m) - \overline{(t_m - z_m) \varphi_{0,m}(t_m - z_m) - \psi_{0,m}(t_m - z_m)} \right] + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(2)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(4)(m)} \sigma^k, \quad (3.72)
\end{aligned}$$

где

$$L_k^{(1)(m)} = \sum_{j=1}^{N+1} \left[(k+1)\varepsilon_{m,j}^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] - \frac{K_m}{2} \cdot \frac{1-\lambda}{2} \cdot (4\lambda_{k,1}h_m - \lambda_{k,2}i); \quad (3.73)$$

$$L_k^{(2)(m)} = -\frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left[(k+1)\varepsilon_{m,j}^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right]; \quad (3.74)$$

$$L_k^{(3)(m)} = \sum_{j=1}^{N+1} \left(C_k^{(3)(m,j)} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \frac{K_m}{2} \left[4\lambda_{k,1}h_m \frac{1+\lambda}{2} + \lambda_{k,2}i \left(\frac{1+\lambda}{2} - \frac{2}{1+\varepsilon_0} \right) \right]; \quad (3.75)$$

$$L_k^{(4)(m)} = \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left(\varepsilon_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \lambda_{k,2} \frac{\mu_m}{\mu_0} \frac{iK_m}{1+\varepsilon_0}. \quad (3.76)$$

Соотношения (3.65), (3.66) совместно с уравнением (3.62) представляют собой граничные условия краевой задачи ТФКП для подкрепленного кругового отверстия в полной весомой плоскости при наличии в их правых частях дополнительных членов в виде рядов Лорана с неизвестными коэффициентами, определяемыми из (3.73) – (3.76) при $m=1$; соотношения (3.67), (3.68) являются граничными условиями задач для включений с центрами поперечных сечений в точках z_m ($m=2, \dots, N+1$) в полной плоскости при наличии в их правых частях дополнительных членов в виде рядов Лорана с неизвестными коэффициентами (3.73) – (3.76) при $m=2, \dots, N+1$. Коэффициенты (3.73) – (3.76), учитывающие влияние границы полуплоскости и остальных элементов единой деформируемой системы, определяются с использованием показавшего высокую эффективность итерационного процесса вычислений, предложенного в работе [5].

В результате линейных комбинаций уравнений (3.69) и (3.70), (3.71) и (3.72) получим следующие выражения:

$$\varphi_1(t_1) = r_1 \varphi_{0,1}(t_1) + d_1 \overline{G_{0,1}(t_1)} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(1)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(1)} \sigma^k, \quad (3.77)$$

$$\overline{G_1(t_1)} = s_1 \overline{\varphi_{0,1}(t_1)} + l_1 \overline{G_{0,1}(t_1)} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(1)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(1)} \sigma^k, \quad (3.78)$$

- при $m = 2, \dots, N+1$

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_m(t_m - z_m)} = r_m \overline{\varphi_{0,m}(t_m - z_m)} + d_m \overline{G_{0,m}(t_m - z_m)} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(m)} \sigma^k, \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \overline{G_m(t_m - z_m)} = s_m \overline{\varphi_{0,m}(t_m - z_m)} + l_m \overline{G_{0,m}(t_m - z_m)} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(m)} \sigma^k. \end{aligned} \quad (3.80)$$

В (3.77) – (3.80) для удобства выполнения дальнейших преобразований введены обозначения ($m = 1, 2, \dots, N+1$)

$$\overline{G_{0,1}(z)} = \overline{z} \overline{\varphi_{0,1}(z)} + \overline{\psi_{0,1}(z)}; \quad (3.81)$$

$$\overline{G_{0,m}(z - z_m)} = \overline{(z - z_m)} \overline{\varphi_{0,m}(z - z_m)} + \overline{\psi_{0,m}(z - z_m)}, \quad m = 2, \dots, N+1; \quad (3.82)$$

$$\overline{G_m(z - z_m)} = \overline{(z - z_m)} \overline{\varphi_m(z - z_m)} + \overline{\psi_m(z - z_m)} \quad (m = 1, \dots, N+1); \quad (3.83)$$

$$r_m = \frac{1 + \mathfrak{a}_0 \frac{\mu_m}{\mu_0}}{1 + \mathfrak{a}_m}, \quad d_m = \frac{1 - \frac{\mu_m}{\mu_0}}{1 + \mathfrak{a}_m}, \quad s_m = 1 - r_m, \quad l_m = 1 - d_m \quad (m = 1, \dots, N+1); \quad (3.84)$$

$$M_k^{(1)(m)} = \frac{L_k^{(1)(m)} + L_k^{(2)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}, \quad M_k^{(2)(m)} = \frac{\mathfrak{a}_m L_k^{(1)(m)} - L_k^{(2)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}, \quad (3.85)$$

$$M_k^{(3)(m)} = \frac{L_k^{(3)(m)} + L_k^{(4)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}, \quad M_k^{(4)(m)} = \frac{\mathfrak{a}_m L_k^{(3)(m)} - L_k^{(4)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}.$$

С учетом (3.83) условие (3.59) на контуре $L_{1,1}$ примет вид

$$\overline{\varphi_1(t_{1,1})} + \overline{G_1(t_{1,1})} = 0. \quad (3.86)$$

Выражения (3.77) и (3.78), (3.79) и (3.80) позволяют получить соотношения, связывающие коэффициенты разложений комплексных потенциалов в ряды в областях S_1 и S_0 , S_m ($m = 2, \dots, N+1$) и S_0 , а (3.86) – разрешающую систему линейных алгебраических уравнений относительно $c_k^{(1)(0,1)}$, $c_k^{(2)(0,1)}$ ($k = 1, \dots, \infty$).

3.8 Соотношения между коэффициентами разложений комплексных потенциалов в ряды в областях S_1 и S_1

Функции $\varphi_1(z - z_1)$, $\psi_1(z - z_1)$, регулярные в кольце S_1 , представляются в виде рядов Лорана с неизвестными комплексными коэффициентами, принимающими с учетом $z_1 = (0; 0)$ вид:

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(1)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(3)(1)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^k; \quad (3.87)$$

$$\psi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(1)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(4)(1)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^k. \quad (3.88)$$

Запишем представления функций, входящих в (3.77) – (3.80), пренебрегая константами, не влияющими на напряженное состояние областей:

- на контуре L_1 (при $z = t_1 = R_1 \sigma$)

$$\varphi_{0,1}(t_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,1)} \left(\frac{R_1 \sigma}{R_1} \right)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,1)} \sigma^{-k}; \quad (3.89)$$

$$\dot{\varphi}_{0,1}(t_1) = -\frac{1}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(1)(0,1)} \sigma^{-(k+1)}; \quad (3.90)$$

$$\overline{\dot{\varphi}_{0,1}(t_1)} = -\frac{1}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,1)}} \sigma^{k+1}; \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \overline{t_1 \dot{\varphi}_{0,1}(t_1)} &= -\frac{R_1 \sigma}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,1)}} \sigma^{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,1)}} \sigma^{k+2} = \\ &= -\sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,1)}} \sigma^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,1)}} \sigma^k; \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\psi_{0,1}(t_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(1)} \sigma^{-k}; \quad (3.93)$$

$$\overline{\psi_{0,1}(t_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(1)}} \sigma^k; \quad (3.94)$$

$$\overline{G_{0,1}(t_1)} = \overline{t_1 \varphi_{0,1}(t_1)} + \overline{\psi_{0,1}(t_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\delta_{2,k}(k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,1)}} + \overline{c_k^{(2)(1)}} \right] \sigma^k; \quad (3.95)$$

$$\varphi_1(t_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} c_k^{(1)(1)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k c_k^{(3)(1)} \sigma^k; \quad (3.96)$$

$$\overline{\varphi_1(t_1)} = \frac{1}{R_{1,1}} \left[- \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{-(k+1)} \overline{c_k^{(1)(1)}} \sigma^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1} \overline{c_k^{(3)(1)}} \sigma^{-(k-1)} \right]; \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} t_1 \overline{\varphi_1(t_1)} &= \frac{R_1}{R_{1,1}} \left[- \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{-(k+1)} \overline{c_k^{(1)(1)}} \sigma^{k+2} + \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1} \overline{c_k^{(3)(1)}} \sigma^{-(k-2)} \right] = \\ &= \rho \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,k}(k-2) \rho^{-(k-1)} \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} \sigma^k + \lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(1)}} \sigma + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \rho^{k+1} \overline{c_{k+2}^{(3)(1)}} \sigma^{-k} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_{k,1} \rho \overline{c_k^{(3)(1)}} - \delta_{2,k}(k-2) \rho^{-(k-2)} \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} \right] \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \rho^{k+2} \overline{c_{k+2}^{(3)(1)}} \sigma^{-k}; \quad (3.98) \end{aligned}$$

$$\psi_1(t_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} c_k^{(2)(1)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k c_k^{(4)(1)} \sigma^k; \quad (3.99)$$

$$\overline{\psi_1(t_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \overline{c_k^{(2)(1)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \overline{c_k^{(4)(1)}} \sigma^{-k}; \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \overline{G_1(t_1)} &= \overline{t_1 \varphi_1(t_1)} + \overline{\psi_1(t_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2) \rho^{k+2} \overline{c_{k+2}^{(3)(1)}} + \rho^k \overline{c_k^{(4)(1)}} \right] \sigma^{-k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_{k,1} \rho \overline{c_k^{(3)(1)}} - \delta_{2,k}(k-2) \rho^{-(k-2)} \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} + \rho^{-k} \overline{c_k^{(2)(1)}} \right] \sigma^k; \quad (3.101) \end{aligned}$$

- на контуре $L_{1,1}$ (при $z = t_{1,1} = R_{1,1}\sigma$)

$$\varphi_1(t_{1,1}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(1)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(3)(1)} \sigma^k; \quad (3.102)$$

$$\varphi_1'(t_{1,1}) = \frac{1}{R_{1,1}} \left[- \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(1)(1)} \sigma^{-(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(3)(1)} \sigma^{k-1} \right]; \quad (3.103)$$

$$\overline{\varphi_1(t_{1,1})} = \frac{1}{R_{1,1}} \left[- \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(1)}} \sigma^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(3)(1)}} \sigma^{-(k-1)} \right]; \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \overline{t_{1,1}\phi_1(t_{1,1})} &= -\sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(1)}} \sigma^{k+2} + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(3)(1)}} \sigma^{-(k-2)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} \right] \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(1)}} \sigma^{-k}; \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\psi_1(t_{1,1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(1)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(1)}} \sigma^k; \quad (3.106)$$

$$\overline{\psi_1(t_{1,1})} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(1)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(1)}} \sigma^{-k}; \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \overline{G_1(t_{1,1})} &= \overline{t_{1,1}\phi_1(t_{1,1})} + \overline{\psi_1(t_{1,1})} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} + \overline{c_k^{(2)(1)}} \right] \sigma^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(1)}} + \overline{c_k^{(4)(1)}} \right] \sigma^{-k}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Здесь и далее введены обозначения

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{при } k > n, \\ 0 & \text{при } k \leq n; \end{cases} \quad \rho = \frac{R_1}{R_{1,1}}. \quad (3.109)$$

После подстановки в (3.77), (3.78) представлений (3.96), (3.89), (3.95) и (3.101) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \overline{c_k^{(1)(1)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \overline{c_k^{(3)(1)}} \sigma^k &= r_1 \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(1)(0,1)}} \sigma^{-k} + \\ &+ d_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\overline{c_k^{(2)(0,1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,1)}} \right] \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{M_k^{(1)(1)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{M_k^{(3)(1)}} \sigma^k, \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_{k,1} \rho \overline{c_k^{(3)(1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \rho^{-(k-2)} \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} + \rho^{-k} \overline{c_k^{(2)(1)}} \right] \sigma^k + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2) \rho^{k+2} \overline{c_{k+2}^{(3)(1)}} + \rho^k \overline{c_k^{(4)(1)}} \right] \sigma^{-k} &= s_1 \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(1)(0,1)}} \sigma^{-k} + \\ + l_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\overline{c_k^{(2)(1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,1)}} \right] \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{M_k^{(2)(1)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{M_k^{(4)(1)}} \sigma^k. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Приравнявая в (3.110), (3.111) коэффициенты при одинаковых отрицательных и положительных степенях переменной σ , имеем ($k = 1, \dots, \infty$):

- при отрицательных степенях в (3.110)

$$\rho^{-k} c_k^{(1)(1)} = \eta_1 c_k^{(1)(0,1)} + M_k^{(1)(1)}; \quad (3.112)$$

- при положительных степенях в (3.110)

$$\rho^k c_k^{(3)(1)} = d_1 \left[\overline{c_k^{(2)(0,1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,1)}} \right] + M_k^{(3)(1)}; \quad (3.113)$$

- при отрицательных степенях в (3.111)

$$(k+2) \rho^{k+2} \overline{c_{k+2}^{(3)(1)}} + \rho^k \overline{c_k^{(4)(1)}} = s_1 c_k^{(1)(0,1)} + M_k^{(2)(1)}; \quad (3.114)$$

- при положительных степенях в (3.111)

$$\begin{aligned} \lambda_{k,1} \rho \overline{c_k^{(3)(1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \rho^{-(k-2)} \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} + \rho^{-k} \overline{c_k^{(2)(1)}} = \\ = l_1 \left[\overline{c_k^{(2)(0,1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,1)}} \right] + M_k^{(4)(1)}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Из (3.112), (3.113) имеем

$$c_k^{(1)(1)} = \rho^k \left(\eta_1 c_k^{(1)(0,1)} + M_k^{(1)(1)} \right); \quad (3.116)$$

$$c_{k-2}^{(1)(1)} = \rho^{k-2} \left(\eta_1 c_{k-2}^{(1)(0,1)} + M_{k-2}^{(1)(1)} \right); \quad (3.117)$$

$$c_k^{(3)(1)} = \rho^{-k} \left\{ d_1 \left[\overline{c_k^{(2)(0,1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,1)}} \right] + M_k^{(3)(1)} \right\}; \quad (3.118)$$

$$c_1^{(3)(1)} = \rho^{-1} \left(d_1 \overline{c_1^{(2)(0,1)}} + M_1^{(3)(1)} \right); \quad (3.119)$$

$$c_{k+2}^{(3)(1)} = \rho^{-(k+2)} \left[d_1 \left(\overline{c_{k+2}^{(2)(0,1)}} - k \overline{c_k^{(1)(0,1)}} \right) + M_{k+2}^{(3)(1)} \right]. \quad (3.120)$$

Из (3.114) и (3.115) получим:

$$c_k^{(4)(1)} = \rho^{-k} \left[s_1 \overline{c_k^{(1)(0,1)}} + \overline{M_k^{(2)(1)}} - (k+2) \rho^{k+2} c_{k+2}^{(3)(1)} \right]; \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} c_k^{(2)(1)} = \rho^k \left\{ l_1 \left[\overline{c_k^{(2)(0,1)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,1)}} \right] + \overline{M_k^{(4)(1)}} - \right. \\ \left. - \lambda_{k,1} \rho c_1^{(3)(1)} + \delta_{2,k} (k-2) \rho^{-(k-2)} \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Подставляя в (3.121), (3.122) выражения (3.120), (3.119), (3.117), получим

$$\begin{aligned}
c_k^{(4)(1)} &= \rho^{-k} \left[s_1 \overline{c_k^{(1)(0,1)}} + \overline{M_k^{(2)(1)}} - (k+2) \rho^{k+2} c_{k+2}^{(3)(1)} \right] = \\
&= \rho^{-k} \left\{ s_1 \overline{c_k^{(1)(0,1)}} + \overline{M_k^{(2)(1)}} - (k+2) \left[d_1 \left(\overline{c_{k+2}^{(2)(0,1)}} - k \overline{c_k^{(1)(0,1)}} \right) + \overline{M_{k+2}^{(3)(1)}} \right] \right\} = \\
&= \rho^{-k} \left\{ [s_1 + k(k+2)d_1] \overline{c_k^{(1)(0,1)}} - (k+2)d_1 \overline{c_{k+2}^{(2)(0,1)}} + \right. \\
&\quad \left. + \overline{M_k^{(2)(1)}} - (k+2) \overline{M_{k+2}^{(3)(1)}} \right\}; \quad (3.123)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_k^{(2)(1)} &= \rho^k \left\{ l_1 \left[\overline{c_k^{(2)(0,1)}} - \delta_{2,k} (k-2) c_{k-2}^{(1)(0,1)} \right] + \overline{M_k^{(4)(1)}} - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_{k,1} \rho c_1^{(3)(1)} + \delta_{2,k} (k-2) \rho^{-(k-2)} c_{k-2}^{(1)(1)} \right\} = \\
&= \rho^k \left\{ l_1 \left[\overline{c_k^{(2)(0,1)}} - \delta_{2,k} (k-2) c_{k-2}^{(1)(0,1)} \right] + \overline{M_k^{(4)(1)}} - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_{k,1} \left(\overline{d_1 c_k^{(2)(0,1)}} + \overline{M_k^{(3)(1)}} \right) + \delta_{2,k} (k-2) \left(r_1 c_{k-2}^{(1)(0,1)} + \overline{M_{k-2}^{(1)(1)}} \right) \right\} = \\
&= \rho^k \left\{ l_1 \overline{c_k^{(2)(0,1)}} - \delta_{2,k} (k-2) l_1 c_{k-2}^{(1)(0,1)} + \overline{M_k^{(4)(1)}} - \lambda_{k,1} \overline{d_1 c_k^{(2)(0,1)}} - \lambda_{k,1} \overline{M_k^{(3)(1)}} + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{2,k} (k-2) r_1 c_{k-2}^{(1)(0,1)} + \delta_{2,k} (k-2) \overline{M_{k-2}^{(1)(1)}} \right\} = \\
&= \rho^k \left\{ \delta_{2,k} (k-2) (r_1 - l_1) c_{k-2}^{(1)(0,1)} + l_1 \overline{c_k^{(2)(0,1)}} - \lambda_{k,1} \overline{d_1 c_k^{(2)(0,1)}} + \right. \\
&\quad \left. + \delta_{2,k} (k-2) \overline{M_{k-2}^{(1)(1)}} - \lambda_{k,1} \overline{M_k^{(3)(1)}} + \overline{M_k^{(4)(1)}} \right\}. \quad (3.124)
\end{aligned}$$

Соотношения (3.116), (3.124), (3.118), (3.123), полученные для $c_k^{(l)(1)}$ ($l=1, \dots, 4; k=1, \dots, \infty$), запишем в общем виде

$$c_k^{(l)(1)} = \rho^{e(l,k)} \left[\sum_{p=1}^2 \sum_{v=1}^{\infty} \left(P_{k,v}^{(p,l)} c_v^{(p)(0,1)} + Q_{k,v}^{(p,l)} \overline{c_v^{(p)(0,1)}} \right) + N_k^{(l)} \right], \quad (3.125)$$

где

$$e(l, k) = \begin{cases} k & \text{при } l = 1, 2, \\ -k & \text{при } l = 3, 4; \end{cases} \quad (3.126)$$

$$P_{k, \nu}^{(1,1)} = \lambda_{k, \nu} r_1, P_{k, \nu}^{(2,1)} = Q_{k, \nu}^{(1,1)} = Q_{k, \nu}^{(2,1)} = 0, N_k^{(1)} = M_k^{(1)(1)}; \quad (3.127)$$

$$P_{k, \nu}^{(1,2)} = \lambda_{k-2, \nu} (k-2)(r_1 - l_1), P_{k, \nu}^{(2,2)} = \lambda_{k, \nu} l_1, Q_{k, \nu}^{(1,2)} = 0, Q_{k, \nu}^{(2,2)} = -\lambda_{k,1} \lambda_{k, \nu} d_1, \quad (3.128)$$

$$N_k^{(2)} = \delta_{2,k} (k-2) M_{k-2}^{(1)(1)} - \lambda_{k,1} M_k^{(3)(1)} + \overline{M_k^{(4)(1)}};$$

$$P_{k, \nu}^{(1,3)} = P_{k, \nu}^{(2,3)} = 0; Q_{k, \nu}^{(1,3)} = -\lambda_{k-2, \nu} (k-2) d_1; Q_{k, \nu}^{(2,3)} = \lambda_{k, \nu} d_1, N_k^{(3)} = M_k^{(3)(1)}; \quad (3.129)$$

$$P_{k, \nu}^{(1,4)} = P_{k, \nu}^{(2,4)} = 0, Q_{k, \nu}^{(1,4)} = \lambda_{k, \nu} [s_1 + k(k+2)d_1], Q_{k, \nu}^{(2,4)} = -\lambda_{k+2, \nu} (k+2)d_1, \quad (3.130)$$

$$N_k^{(4)} = \overline{M_k^{(2)(1)}} - (k+2) M_{k+2}^{(3)(1)}.$$

Выделим в (3.125) действительные и мнимые части:

$$c_k^{(l)(1)*} = \rho^{e(l,k)} \left[\sum_{p=1}^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (P_{k, \nu}^{(p,l)} + Q_{k, \nu}^{(p,l)}) c_{\nu}^{(p)(0,1)*} + N_k^{(l)*} \right], \quad (3.131)$$

$$c_k^{(l)(1)**} = \rho^{e(l,k)} \left[\sum_{p=1}^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (P_{k, \nu}^{(p,l)} - Q_{k, \nu}^{(p,l)}) c_{\nu}^{(p)(0,1)**} + N_k^{(l)**} \right]. \quad (3.132)$$

Здесь и далее знаками «*» и «**» обозначены соответственно действительная и мнимая части комплексных величин.

3.9 Формирование разрешающих систем алгебраических уравнений

Подставляя в (3.86) выражения (3.102), (3.108), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k^{(1)(1)} + (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(1)}} + \overline{c_k^{(4)(1)}} \right] \sigma^{-k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k^{(3)(1)} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} + \overline{c_k^{(2)(1)}} + \lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(1)}} \right] \sigma^k = 0. \quad (3.133)$$

Приравнивая в (3.133) коэффициенты при одинаковых положительных и отрицательных степенях переменной σ , имеем:

$$c_k^{(3)(1)} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(1)}} + \overline{c_k^{(2)(1)}} + \lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(1)}} = 0; \quad (3.134)$$

$$c_k^{(1)(1)} + (k+2)c_{k+2}^{(3)(1)} + c_k^{(4)(1)} = 0. \quad (3.135)$$

Разделяя в (3.134), (3.135) действительные и мнимые части, получим

$$-\delta_{2,k}(k-2)c_{k-2}^{(1)(1)*} + c_k^{(2)(1)*} + (1+\lambda_{k,1})c_k^{(3)(1)*} = 0, \quad (3.136)$$

$$\delta_{2,k}(k-2)c_{k-2}^{(1)(1)**} - c_k^{(2)(1)**} + (1-\lambda_{k,1})c_k^{(3)(1)**} = 0; \quad (3.137)$$

$$c_k^{(1)(1)*} + (k+2)c_{k+2}^{(3)(1)*} + c_k^{(4)(1)*} = 0, \quad (3.138)$$

$$c_k^{(1)(1)**} - (k+2)c_{k+2}^{(3)(1)**} - c_k^{(4)(1)**} = 0. \quad (3.139)$$

Для выражений (3.136) – (3.139) используем общий вид ($k=1, \dots, \infty$):

$$\sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(l,q)} c_{\nu}^{(l)(1)*} = 0 \quad q=1,3, \quad (3.140)$$

$$\sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(l,q)} c_{\nu}^{(l)(1)**} = 0 \quad q=2,4, \quad (3.141)$$

где

$$\begin{aligned} T_{k,\nu}^{(1,1)} &= -\lambda_{\nu,k-2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(2,1)} = \lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(3,1)} = \lambda_{\nu,k}(1+\lambda_{k,1}), \quad T_{k,\nu}^{(4,1)} = 0; \\ T_{k,\nu}^{(1,2)} &= \lambda_{\nu,k-2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(2,2)} = -\lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(3,2)} = \lambda_{\nu,k}(1-\lambda_{k,1}), \quad T_{k,\nu}^{(4,2)} = 0; \\ T_{k,\nu}^{(1,3)} &= \lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(2,3)} = 0, \quad T_{k,\nu}^{(3,3)} = \lambda_{\nu,k+2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(4,3)} = \lambda_{\nu,k}; \\ T_{k,\nu}^{(1,4)} &= \lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(2,4)} = 0, \quad T_{k,\nu}^{(3,4)} = -\lambda_{\nu,k+2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(4,4)} = -\lambda_{\nu,k}. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Соотношения (3.131), (3.132) перепишем в виде

$$c_{\nu}^{(l)(1)*} = \rho^{e(l,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}) c_{\mu}^{(s)(0,1)*} + N_{\nu}^{(l)*} \right], \quad (3.143)$$

$$c_{\nu}^{(l)(1)**} = \rho^{e(l,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}) c_{\mu}^{(s)(0,1)**} + N_{\nu}^{(l)**} \right]. \quad (3.144)$$

После подстановки в (3.140), (3.141) выражений (3.143), (3.144), получим ($k=1, \dots, \infty$):

$$\sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(l,1)} \rho^{e(l,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}) c_{\mu}^{(s)(0,1)*} + N_{\nu}^{(l)*} \right] = 0; \quad (3.145)$$

$$\sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(l,2)} \rho^{e(l,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}) c_{\mu}^{(s)(0,1)**} + N_{\nu}^{(l)**} \right] = 0; \quad (3.146)$$

$$\sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(l,3)} \rho^{e(l,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}) c_{\mu}^{(s)(0,1)*} + N_{\nu}^{(l)*} \right] = 0; \quad (3.147)$$

$$\sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(l,4)} \rho^{e(l,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}) c_{\mu}^{(s)(0,1)**} + N_{\nu}^{(l)**} \right] = 0. \quad (3.148)$$

Соотношения (3.145) и (3.147), (3.146) и (3.148) образуют две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно соответственно действительных $c_{\mu}^{(s)(0,1)*}$ и мнимых $c_{\mu}^{(s)(0,1)**}$ частей коэффициентов $c_{\mu}^{(s)(0,1)}$ ($s = 1, 2$; $\mu = 1, \dots, \infty$).

Соотношения (3.145) – (3.148) запишем в виде ($k = 1, \dots, \infty$)

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} U_{k,\mu}^{(s,q)'} c_{\mu}^{(s)(0,1)*} = Y_k^{(q)'}, \quad q = 1, 2; \quad (3.149)$$

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} U_{k,\mu}^{(s,q)''} c_{\mu}^{(s)(0,1)**} = Y_k^{(q)''}, \quad q = 1, 2; \quad (3.150)$$

где

$$U_{k,\mu}^{(s,1)'} = \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,1)} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}); \quad (3.151)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)'} = \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,3)} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}); \quad (3.152)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,1)''} = \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,2)} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}); \quad (3.153)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)''} = \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,4)} (P_{\nu,\mu}^{(s,l)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,l)}); \quad (3.154)$$

$$Y_k^{(1)'} = - \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,1)} N_{\nu}^{(l)*}; \quad (3.155)$$

$$Y_k^{(2)'} = - \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,3)} N_{\nu}^{(l)*}; \quad (3.156)$$

$$Y_k^{(1)''} = - \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,2)} N_{\nu}^{(l)**}; \quad (3.157)$$

$$Y_k^{(2)''} = - \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,4)} N_{\nu}^{(l)**}. \quad (3.158)$$

3.10 Определение коэффициентов $c_k^{(s)(0,m)}$ для $m = 2, \dots, N+1$

Функции $\varphi_m(z - z_m)$, $\psi_m(z - z_m)$, регулярные в шайбах S_m ($m = 2, \dots, N+1$), отыскиваются в виде рядов с неизвестными комплексными коэффициентами по положительным степеням переменной z :

$$\varphi_m(z - z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(3)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_m} \right)^k; \quad \psi_m(z - z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(4)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_m} \right)^k. \quad (3.159)$$

Для определения коэффициентов $c_{\mu}^{(s)(0,m)}$ ($s = 1, 2; m = 2, \dots, N+1; \mu = 1, \dots, \infty$) будем использовать граничные условия (3.79) и (3.80).

Запишем представления функций на контурах L_m , т.е. при $z = t_m = z_m + R_m \sigma$ ($m = 2, \dots, N+1$):

$$\varphi_{0,m}(t_m - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k}; \quad (3.160)$$

$$\varphi'_{0,m}(t_m - z_m) = - \frac{1}{R_m} \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-(k+1)}; \quad (3.161)$$

$$\overline{\varphi'_{0,m}(t_m - z_m)} = - \frac{1}{R_m} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,m)}} \sigma^{k+1}; \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned}
\overline{(t_m - z_m)\varphi_{0,m}(t_m - z_m)} &= -\frac{t_m - z_m}{R_m} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,m)}} \sigma^{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,m)}} \sigma^{k+2} = \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} \sigma^k; \quad (3.163)
\end{aligned}$$

$$\overline{\psi_{0,m}(t_m - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \sigma^{-k}; \quad (3.164)$$

$$\overline{\psi_{0,m}(t_m - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \sigma^k; \quad (3.165)$$

$$\overline{G_{0,m}(t_m - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\overline{c_k^{(2)(0,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} \right] \sigma^k; \quad (3.166)$$

$$\overline{\varphi_m(t_m - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^k; \quad (3.167)$$

$$\overline{\varphi_m(t_m - z_m)} = \frac{1}{R_m} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^{k-1}; \quad (3.168)$$

$$\overline{\varphi_m(t_m - z_m)} = \frac{1}{R_m} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^{-(k-1)}; \quad (3.169)$$

$$\begin{aligned}
\overline{(t_m - z_m)\varphi_m(t_m - z_m)} &= \frac{t_m - z_m}{R_m} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^{-(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^{-(k-2)} = \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(m)}} \sigma^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(m)}} \sigma^{-k}; \quad (3.170)
\end{aligned}$$

$$\overline{\psi_m(t_m - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(m)}} \sigma^k; \quad (3.171)$$

$$\overline{\psi_m(t_m - z_m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(m)}} \sigma^{-k}; \quad (3.172)$$

$$\begin{aligned}
\overline{G_m(t_m - z_m)} &= \overline{(t_m - z_m)\varphi_m(t_m - z_m)} + \overline{\psi_m(t_m - z_m)} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(m)}} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(4)(m)}} \sigma^{-k} =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(m)}} + \overline{c_k^{(4)(m)}} \right] \sigma^{-k}. \quad (3.173)$$

Подставляя в (3.79), (3.80) представления (3.167), (3.173), (3.160), (3.166), имеем ($m = 2, \dots, N+1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^k &= r_m \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(1)(0,m)}} \sigma^{-k} + d_m \sum_{k=1}^{\infty} \left[\overline{c_k^{(2)(0,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} \right] \sigma^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(m)} \sigma^k, \quad (3.174) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(m)}} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(m)}} + \overline{c_k^{(4)(m)}} \right] \sigma^{-k} &= \\ &= s_m \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(1)(0,m)}} \sigma^{-k} + l_m \sum_{k=1}^{\infty} \left[\overline{c_k^{(2)(0,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} \right] \sigma^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(m)} \sigma^k. \quad (3.175) \end{aligned}$$

Приравнивая в (3.174), (3.175) коэффициенты при одинаковых положительных и отрицательных степенях переменной σ ($k = 1, \dots, \infty$), имеем ($m = 2, \dots, N+1$):

- при положительных степенях в (3.174)

$$\overline{c_k^{(3)(m)}} = d_m \left[\overline{c_k^{(2)(0,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} \right] + M_k^{(3)(m)}; \quad (3.176)$$

- при отрицательных степенях в (3.174)

$$r_m \overline{c_k^{(1)(0,m)}} + M_k^{(1)(m)} = 0; \quad (3.177)$$

- при положительных степенях в (3.175)

$$\lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(m)}} = l_m \left[\overline{c_k^{(2)(0,m)}} - \delta_{2,k} (k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} \right] + M_k^{(4)(m)}, \quad (3.178)$$

- при отрицательных степенях в (3.175)

$$(k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(m)}} + \overline{c_k^{(4)(m)}} = s_m \overline{c_k^{(1)(0,m)}} + M_k^{(2)(m)}. \quad (3.179)$$

Из (3.177) имеем ($m = 2, \dots, N+1$)

$$c_k^{(1)(0,m)} = -\frac{1}{r_m} M_k^{(1)(m)}. \quad (3.180)$$

Из (3.178) получим ($m = 2, \dots, N+1$)

$$c_k^{(2)(0,m)} = \lambda_{k,1} \frac{1}{l_m} c_1^{(3)(m)} + \delta_{2,k} (k-2) c_{k-2}^{(1)(0,m)} - \frac{1}{l_m} \overline{M_k^{(4)(m)}}. \quad (3.181)$$

Запишем (3.176) при $k=1$:

$$c_1^{(3)(m)} = d_m \overline{c_1^{(2)(0,m)}} + M_1^{(3)(m)}. \quad (3.182)$$

Представление (3.181) с учетом выражения (3.182) примет вид

$$\begin{aligned} c_k^{(2)(0,m)} &= \lambda_{k,1} \frac{1}{l_m} \left(d_m \overline{c_1^{(2)(0,m)}} + M_1^{(3)(m)} \right) + \delta_{2,k} (k-2) c_{k-2}^{(1)(0,m)} - \frac{1}{l_m} \overline{M_k^{(4)(m)}} = \\ &= \lambda_{k,1} \frac{d_m}{l_m} \overline{c_1^{(2)(0,m)}} + \delta_{2,k} (k-2) c_{k-2}^{(1)(0,m)} + \lambda_{k,1} \frac{1}{l_m} M_1^{(3)(m)} - \frac{1}{l_m} \overline{M_k^{(4)(m)}}. \end{aligned} \quad (3.183)$$

Из (3.183) получим:

$$\begin{aligned} c_k^{(2)(0,m)} - \lambda_{k,1} \frac{d_m}{l_m} \overline{c_1^{(2)(0,m)}} &= \\ &= \delta_{2,k} (k-2) c_{k-2}^{(1)(0,m)} + \lambda_{k,1} \frac{1}{l_m} M_1^{(3)(m)} - \frac{1}{l_m} \overline{M_k^{(4)(m)}}. \end{aligned} \quad (3.184)$$

Разделяя в (3.184) действительные и мнимые части комплексных величин, имеем:

- при $k=1$

$$\left(1 - \frac{d_m}{l_m} \right) c_1^{(2)(0,m)*} = \frac{1}{l_m} \left(M_1^{(3)(m)*} - M_1^{(4)(m)*} \right); \quad (3.185)$$

$$\left(1 + \frac{d_m}{l_m} \right) c_1^{(2)(0,m)**} = \frac{1}{l_m} \left(M_1^{(3)(m)**} + M_1^{(4)(m)**} \right); \quad (3.186)$$

откуда

$$c_1^{(2)(0,m)*} = \frac{M_1^{(3)(m)*} - M_1^{(4)(m)*}}{l_m - d_m}; \quad (3.187)$$

$$c_1^{(2)(0,m)**} = \frac{M_1^{(3)(m)**} + M_1^{(4)(m)**}}{l_m + d_m}; \quad (3.188)$$

- при $k = 2$

$$c_2^{(2)(0,m)*} = -\frac{1}{l_m} M_2^{(4)(m)*}; \quad (3.189)$$

$$c_2^{(2)(0,m)**} = \frac{1}{l_m} M_2^{(4)(m)**}; \quad (3.190)$$

- при $k \geq 3$

$$c_k^{(2)(0,m)} = (k-2)c_{k-2}^{(1)(0,m)} - \frac{1}{l_m} \overline{M_k^{(4)(m)}}. \quad (3.191)$$

Из (3.179) получим

$$c_k^{(4)(m)} = s_m \overline{c_k^{(1)(0,m)}} - (k+2)c_{k+2}^{(3)(m)} + \overline{M_k^{(2)(m)}}. \quad (3.192)$$

3.11 Итерационный процесс решения задачи

Следуя работе [5], задача в целом решается итерационным методом, показавшим хорошую сходимость, на каждом шаге которого рассматривается соответственно задача для одного подкрепленного отверстия, либо шайбы в полной плоскости при граничных условиях, содержащих дополнительные члены, отвечающие за влияние прямолинейной границы и остальных концентраторов напряжений.

В первом приближении все коэффициенты $c_k^{(1)(0,m)}$ и $c_k^{(2)(0,m)}$ полагаются равными нулю, т.е. $c_k^{(1)(0,m)} = c_k^{(2)(0,m)} = 0$ ($k = 1, \dots, \infty$).

С их использованием находятся величины $c_k^{(3)(m,j)}$, $c_k^{(4)(m,j)}$, $C_k^{(3)(m,j)}$, $C_k^{(4)(m,j)}$ ($m = 1, \dots, N+1$; $j = 1, \dots, N+1$). Затем вычисляются коэффициенты: $L_k^{(l)(0,m)}$ ($l = 1, \dots, 4$; $m = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, \infty$); $M_k^{(l)(m)}$ ($l = 1, \dots, 4$; $m = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, \infty$) и $N_k^{(l)}$ ($l = 1, \dots, 4$; $k = 1, \dots, \infty$), что позволяет определить коэффициенты $Y_k^{(p)'}$, $Y_k^{(1)''}$ ($p = 1, \dots, 4$; $k = 1, \dots, \infty$) столбцов свободных членов обеих систем линейных алгеб-

раических уравнений (см. п. 3.9) на каждой итерации (в данном случае – на нулевой).

Полученные системы уравнений решаются методом Гаусса относительно неизвестных действительных $c_{\mu}^{(s)(0,1)*}$ и мнимых $c_{\mu}^{(s)(0,1)**}$ частей комплексных коэффициентов $c_{\mu}^{(s)(0,1)}$ ($s=1,2; \mu=1,\dots,N_s$). Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса определяются текущие значения действительных и мнимых частей коэффициентов $c_{\mu}^{(1)(0,1)}$ и $c_{\mu}^{(2)(0,1)}$ ($\mu=1,\dots,\infty$).

С использованием полученных в п. 3.10 соотношений вычисляются коэффициенты $c_k^{(l)(0,m)}$ ($l=1,2; m=2,\dots,N+1; k=1,\dots,\infty$).

Уточненные текущие коэффициенты $c_k^{(l)(0,m)}$ ($l=1,2; m=1,2,\dots,N+1; k=1,\dots,\infty$) позволяют повторить итерационный процесс.

Как показывают проведенные вычислительные эксперименты, предложенный процесс вычислений обладает свойством сходимости: он продолжается до тех пор, пока значения коэффициентов $c_{\mu}^{(1)(0,m)}$ и $c_{\mu}^{(2)(0,m)}$ ($\mu=1,\dots,\infty$) в двух последовательных итерациях не будут различаться на величину, меньшую наперед заданной достаточно малой величины, например, 10^{-6} .

3.12 Вычисление напряжений

Дополнительные напряжения в области S_0 , моделирующей массив грунта, определяются на основе приведенных в п. 3.1 формул Колосова-Мусхелишвили, которые в рассматриваемой задаче приобретают вид [5]:

- в декартовой системе координат xOy

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N+1} \left[2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) - \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) - \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right], \\
\sigma_y^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N+1} \left[2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) + \overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right], \\
\tau_{xy}^{(0)} &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^{N+1} \left[\overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right];
\end{aligned} \tag{3.193}$$

- в полярной системе координат $rO\theta$ на контурах L_m ($m=1, \dots, N+1$)

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) - \left[\overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}; \\
\sigma_\theta^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) + \left[\overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}; \\
\tau_{r\theta}^{(0)} &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \left[\overline{(z-z_j)}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.194}$$

Здесь и далее полярный угол θ отсчитывается от положительного направления оси OX против хода часовой стрелки.

Для вычисления значений дополнительных напряжений в области S_0 используем следующие соотношения, входящие в (3.193), (3.194):

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) &= -\frac{1}{R_j} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-(k+1)} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} \left\{ c_k^{(1)(0,j)} \left[1 - (k+1) \frac{z-z_j}{R_j} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} \right] + c_k^{(2)(0,j)} \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{R_j} \frac{K_j}{1 + \alpha_0} \left\{ 2h_j \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-2} + i \left[\left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-1} + \alpha_0 \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\} \right\rangle; \tag{3.195} \\
\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) &= \frac{1}{R_j^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-(k+2)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left[(k+2) \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right) \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} - 2 \right] \overline{c_k^{(1)(0,j)} - c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \times \\
& \times \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \left. \right\} + \frac{4K_j h_j}{(1+\alpha_0)R_j^2} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-3} + \\
& + \frac{iK_j}{(1+\alpha_0)R_j^2} \left[\left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-2} + \alpha_0 \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-2} \right]; \quad (3.196)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_j} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[-k c_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-(k+1)} + \right. \right. \\
& + k \left(2(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} + k c_k^{(2)(0,j)} \right) \times \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\
& \left. \left. - k(k+1)^2 \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_j} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{2K_j h_j}{1+\alpha_0} \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-2} - \frac{iK_j}{1+\alpha_0} \left[\alpha_0 \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-1} + \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\}. \quad (3.197)
\end{aligned}$$

Для вычисления полных напряжений в точках области S_0 , моделирующей массив грунта, к найденным дополнительным напряжениям прибавляются соответствующие начальные напряжения, определяемые соотношениями (2.1).

Формулы для напряжений, возникающих в кольце S_1 , моделирующем обделку тоннеля, в полярной системе координат имеют вид [5]:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \operatorname{Re} \left\{ 2\phi_1'(z) - \left[\overline{z\phi_1''(z)} + \psi_1'(z) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\
\sigma_\theta &= \operatorname{Re} \left\{ 2\phi_1'(z) + \left[\overline{z\phi_1''(z)} + \psi_1'(z) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\
\tau_{r\theta} &= \operatorname{Im} \left\{ \left[\overline{z\phi_1''(z)} + \psi_1'(z) \right] e^{2i\theta} \right\}.
\end{aligned} \quad (3.198)$$

Таким образом, для вычисления компонент тензора напряжений в полярной системе координат в точках наружного L_1 ($z = R_1 e^{i\theta}$) и внутреннего $L_{1,1}$ ($z = R_{1,1} e^{i\theta}$) контуров, ограничивающих кольцо S_1 , моделирующее обделку тоннеля, используются выражения (3.198) и приведенные ниже соотношения:

$$\varphi_1'(z) = \frac{1}{R_{1,1}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[-c_k^{(1)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(3)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{k-1} \right]; \quad (3.199)$$

$$\varphi_1''(z) = \frac{1}{R_{1,1}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[(k+1) c_k^{(1)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{-(k+2)} + (k-1) c_k^{(3)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{k-2} \right]; \quad (3.200)$$

$$\psi_1'(z) = \frac{1}{R_{1,1}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[-c_k^{(2)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(4)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{k-1} \right]. \quad (3.201)$$

Приведенное решение составляет основу разработанного метода расчета обделок тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом вблизи земной поверхности с использованием предварительного крепления массива грунта в виде защитного экрана из труб, расположенных за контуром сечения выработки параллельно продольной оси тоннеля или под малым углом к ней, на действие собственного веса грунта.

В разработанном методе расчета, реализованном в виде компьютерной программы, в отличие от приведенного выше строгого аналитического решения используются разложения комплексных потенциалов в ряды с конечным числом удерживаемых членов, обеспечивающих необходимую достаточно высокую точность удовлетворения граничных условий поставленной задачи теории упругости в целом.

Данный метод с применением подходов [92, 5] позволяет учесть ряд технологических факторов, оказывающих влияние на напряженное состояние обделок тоннелей - последовательность сооружения тоннеля по отношению к предварительно установленному экрану из труб, а также отставание возведения обделки от забоя выработки.

Выводы по главе 3

1. Обосновано применение для решения поставленной задачи теории упругости математического аппарата ТФКП, предусматривающего использование потенциалов Колосова-Мусхелишвили.

2. Выполнен переход от поставленной задачи теории упругости к соответствующей краевой задаче ТФКП: приведены граничные условия задачи; введены необходимые комплексные потенциалы, характеризующие напряжённо-деформированное состояние рассматриваемых областей.

3. Получено строгое аналитическое решение краевой задачи с использованием теории аналитического продолжения комплексных потенциалов через границу полуплоскости, свойств интегралов типа Коши и рядов Лорана.

4. При решении использован сходящийся итерационный процесс, на каждом шаге которого решается задача для одного подкрепленного отверстия, либо шайбы в полной плоскости при граничных условиях, содержащих дополнительные члены, отвечающие за влияние прямолинейной границы и остальных концентраторов напряжений.

5. Аналитическое решение, использующее разложения комплексных потенциалов в ряды с неограниченным числом удерживаемых членов, обеспечивает достижение необходимой достаточно высокой точности удовлетворения граничных условий поставленной задачи теории упругости в целом.

4 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ, АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА РАСЧЁТА

4.1 Описание общих исходных данных, необходимых для расчета

Исходными данными для расчёта обделок тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом вблизи земной поверхности с использованием защитного экрана из труб, на действие собственного веса грунта являются:

N – количество труб защитного экрана ($1 \leq N \leq 60$); возможно увеличение этого числа, оно определяется, в основном, характеристиками используемого компьютера;

H, m – глубина заложения тоннеля, отсчитываемая от центра поперечного сечения выработки (рисунок 2.1);

$E_0, МПа$ – модуль деформации грунта;

ν_0 – коэффициент Пуассона грунта;

λ – коэффициент бокового давления в ненарушенном массиве грунта;

$\gamma, МН/м^3$ – удельный вес грунта;

$\Delta\theta$, град. – приращение угла θ , определяющего положение радиального сечения обделки тоннеля, в точках которого вычисляются напряжения; угол отсчитывается от положительного направления оси OX против хода часовой стрелки;

ε – величина погрешности, определяющая прекращение итерационного процесса решения задачи ($\varepsilon < 10^{-6}$);

K_c – число удерживаемых членов разложений в ряды используемых комплексных потенциалов, обеспечивающее достижения удовлетворительной точности выполнения граничных условий ($\leq 5\%$);

I_{\max} – максимальное число выполняемых шагов итерационного процесса, при котором ожидается достижение точности результатов расчетов, задаваемой величиной погрешности ε ;

$x_1 = 0, y_1 = 0$ – координаты центра поперечного сечения тоннеля.

В алгоритме расчета, также как и в приведенном в разделе 3 решении, для обделки тоннеля принят номер $j = 1$, нумерация труб защитного экрана начинается с $j = 2$.

Для поперечного сечения обделки тоннеля и труб защитного экрана задаются:

x_j, y_j, m – координаты центра поперечного сечения j -той трубы ($j = 2, \dots, N + 1$);

R_j, m – наружные радиусы поперечных сечений выработки тоннеля ($j = 1$) или труб экрана ($j = 2, \dots, N + 1$);

$R_{1,1}, m$ – внутренний радиус поперечного сечения обделки тоннеля;

$E_j, МПа$ – модуль деформации материала обделки или заполнения труб защитного экрана ($j = 1, \dots, N + 1$), для труб экрана в качестве E_j ($j = 2, \dots, N + 1$) указывается приведенные значения модуля деформации материала трубы и возможного заполнения;

ν_j – коэффициент Пуассона материалов обделки или заполнения труб экрана ($j = 1, \dots, N + 1$).

4.2 Описание алгоритма расчета

Алгоритм вычислений предусматривает выполнение следующих операций.

1. Определение количества уравнений в разрешающих системах:

$$K_u = 2 \cdot K_c + 2. \quad (4.1)$$

2. Координаты центров поперечных сечений тоннелей в комплексном виде и геометрические параметры

$$z_j = x_j + iy_j; h_j = \frac{H - y_j}{R_j} \quad (j = 1, \dots, N + 1). \quad (4.2)$$

Здесь и далее используется комплексное число i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

3. Вычисление величин:

$$K_j = \frac{\gamma R_j^2}{2} \quad (j = 1, \dots, N + 1). \quad (4.3)$$

4. Вычисление упругих констант для материалов массива грунта

$$\alpha_0 = 3 - 4\nu_0; \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}; \quad (4.4)$$

и заполнения труб:

$$\alpha_m = 3 - 4\nu_m; \quad \mu_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad (m = 1, \dots, N + 1). \quad (4.5)$$

5. Вычисляются коэффициенты ($m = 1, \dots, N + 1$):

$$r_m = \frac{1 + \alpha_0 \frac{\mu_m}{\mu_0}}{1 + \alpha_m}, \quad d_m = \frac{1 - \frac{\mu_m}{\mu_0}}{1 + \alpha_m}; \quad s_m = 1 - r_m, \quad l_m = 1 - d_m. \quad (4.6)$$

6. Для всех сочетаний чисел $m = 1, \dots, N + 1$ и $j = 1, \dots, N + 1$ определяются величины

$$\varepsilon_{m,j} = \frac{R_m}{z_m - z_j}; \quad \Delta_{m,j} = \frac{R_m}{R_j}; \quad \varepsilon'_{m,j} = \frac{1}{\varepsilon_{m,j}^{-1} - 2i \frac{H_j}{R_j} \Delta_{m,j}^{-1}} \quad (j \neq m). \quad (4.7)$$

7. С использованием рекуррентных соотношений вычисляются массивы чисел ($k = 1, \dots, K_c + 4$, $n = 0, 1, \dots, K_c + 3$):

$$C_{-k}^0 = 1; \quad C_{-k}^{n+1} = -\frac{k+n}{n+1} C_{-k}^n. \quad (4.8)$$

8. Вычисляются массивы чисел ($m = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, K_c + 2$; $n = 1, \dots, K_c + 2$):

$$I_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \Delta_{m,j}^{-k} \varepsilon_{m,j}^{n+k}; \quad \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \Delta_{m,j}^{-k} \varepsilon'_{m,j}{}^{n+k}. \quad (4.9)$$

9. Далее будут использоваться следующие величины, зависящие от соотношения чисел m и j или n и k

$$\lambda_{m,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = j, \\ 0, & \text{если } m \neq j; \end{cases} \quad \delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{при } k > n, \\ 0 & \text{при } k \leq n; \end{cases} \quad e^{(l,k)} = \begin{cases} k & \text{при } l = 1, 2, \\ -k & \text{при } l = 3, 4. \end{cases} \quad (4.10)$$

10. Определяются величины ($m = 1, \dots, N + 1$; $j = 1, \dots, N + 1$; $k = 1, \dots, K_c + 2$):

$$\tilde{c}_k^{(3)(m,j)} = \frac{K_j}{1 + \alpha_0} \left\{ 2 \frac{H_j}{R_j} \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i K_j \frac{(-1)^k}{k} \left[(1 - \lambda_{m,j}) \varepsilon_{m,j}^k + \alpha_0 \varepsilon_{m,j}'^k \right] \right\}; \quad (4.11)$$

$$\tilde{c}_k^{(4)(m,j)} = \frac{K_j}{1 + \alpha_0} \left\{ 2 \frac{H_j}{R_j} \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i \frac{(-1)^k}{k} \left[(1 - \lambda_{m,j}) \alpha_0 \varepsilon_{m,j}^k + \varepsilon_{m,j}'^k \right] \right\}. \quad (4.12)$$

11. Вычисляются коэффициенты $P_{k,n}^{(p,l)}$, $Q_{k,n}^{(p,l)}$ ($p = 1, 2$; $l = 1, \dots, 4$;

$k = 1, \dots, K_c + 2$; $\nu = 1, \dots, K_c + 2$):

$$P_{k,\nu}^{(1,1)} = \lambda_{k,\nu} \eta_1, \quad P_{k,\nu}^{(2,1)} = Q_{k,\nu}^{(1,1)} = Q_{k,\nu}^{(2,1)} = 0; \quad (4.13)$$

$$P_{k,\nu}^{(1,2)} = \lambda_{k-2,\nu} \nu (\eta_1 - l_1), \quad P_{k,\nu}^{(2,2)} = \lambda_{k,\nu} l_1, \quad Q_{k,\nu}^{(1,2)} = 0, \quad Q_{k,\nu}^{(2,2)} = -\lambda_{k,1} \lambda_{k,\nu} d_1; \quad (4.14)$$

$$P_{k,\nu}^{(1,3)} = P_{k,\nu}^{(2,3)} = 0; \quad Q_{k,\nu}^{(1,3)} = -\lambda_{k-2,\nu} (k-2) d_1; \quad Q_{k,\nu}^{(2,3)} = \lambda_{k,\nu} d_1; \quad (4.15)$$

$$P_{k,\nu}^{(1,4)} = P_{k,\nu}^{(2,4)} = 0, \quad Q_{k,\nu}^{(1,4)} = \lambda_{k,\nu} [s_1 + k(k+2) d_1], \quad Q_{k,\nu}^{(2,4)} = -\lambda_{k+2,\nu} (k+2) d_1, \quad (4.16)$$

$$N_k^{(4)} = \overline{M_k^{(2)(1)}} - (k+2) M_{k+2}^{(3)(1)}.$$

12. Вычисляются коэффициенты $T_{k,\nu}^{(p,q)}$ ($p = 1, \dots, 4$; $q = 1, \dots, 4$; $k = 1, \dots, K_c + 2$;

$\nu = 1, \dots, K_c + 2$):

$$T_{k,\nu}^{(1,1)} = -\lambda_{\nu,k-2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(2,1)} = \lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(3,1)} = \lambda_{\nu,k} (1 + \lambda_{k,1}), \quad T_{k,\nu}^{(4,1)} = 0;$$

$$T_{k,\nu}^{(1,2)} = \lambda_{\nu,k-2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(2,2)} = -\lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(3,2)} = \lambda_{\nu,k} (1 - \lambda_{k,1}), \quad T_{k,\nu}^{(4,2)} = 0;$$

$$T_{k,\nu}^{(1,3)} = \lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(2,3)} = 0, \quad T_{k,\nu}^{(3,3)} = \lambda_{\nu,k+2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(4,3)} = \lambda_{\nu,k}; \quad (4.17)$$

$$T_{k,\nu}^{(1,4)} = \lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(2,4)} = 0, \quad T_{k,\nu}^{(3,4)} = -\lambda_{\nu,k+2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(4,4)} = -\lambda_{\nu,k}$$

13. Формируются матрицы двух систем из K_u линейных алгебраических уравнений относительно искомым действительных $c_\mu^{(s)(0,1)*}$ и мнимых $c_\mu^{(s)(0,1)**}$

($s=1,2$) частей комплексных коэффициентов разложений $c_\mu^{(1)(0,1)}$ ($\mu=1,\dots,K_c$) и $c_\mu^{(2)(0,1)}$ ($\mu=1,\dots,K_c+2$):

$$U_{k,\mu}^{(s,1)'} = \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{K_c+2} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,1)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,l)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,l)} \right) \quad k=1,\dots,K_c+2; \quad (4.18)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)'} = \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{K_c+2} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,3)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,l)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,l)} \right) \quad k=1,\dots,K_c; \quad (4.19)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,1)''} = \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{K_c+2} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,2)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,l)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,l)} \right) \quad k=1,\dots,K_c+2; \quad (4.20)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)''} = \sum_{l=1}^4 \sum_{\nu=1}^{K_c+2} \rho^{e(l,\nu)} T_{k,\nu}^{(l,4)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,l)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,l)} \right) \quad k=1,\dots,K_c; \quad (4.21)$$

где

$$\rho = \frac{R_1}{R_{1,1}}. \quad (4.22)$$

На каждом шаге итерационного процесса осуществляется формирование столбцов свободных членов двух систем уравнений и их решение.

14. На первом шаге процесса полагается:

$$c_n^{(p)(1)} = 0 \quad (p=1,2; \quad n=1,\dots,K_c+2). \quad (4.23)$$

15. Вычисляются коэффициенты ($m=1,\dots,N+1; \quad j=1,\dots,N+1;$

$k=1,\dots,K_c+2$):

$$c_k^{(3)(m,j)} = \sum_{n=1}^{K_c+2} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(1)(0,j)} + \right. \\ \left. + n \Delta_{m,j} \left(\tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + \varepsilon_{m,j}^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right]; \quad (4.24)$$

$$c_k^{(4)(m,j)} = \sum_{n=1}^{K_c+2} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(2)(0,j)} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \left((n+1) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} + n \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right) + \right.$$

$$+ n(n+1)\Delta_{m,j} \left[\tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + \varepsilon_{m,j}^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right] \overline{c_n^{(1)(0,j)}}. \quad (4.25)$$

16. Вычисляются коэффициенты:

$$C_k^{(p)(m,j)} = c_k^{(p)(m,j)} + \tilde{c}_k^{(p)(m,j)} \quad (p=3,4; m, j=1, \dots, N+1; k=1, \dots, K_c+2). \quad (4.26)$$

17. Вычисляются коэффициенты $L_k^{(l)(0,m)}$ ($l=1, \dots, 4; m=1, \dots, N+1; k=1, \dots, K_c+2$):

$$L_k^{(1)(m)} = \sum_{j=1}^{N+1} \left[(k+1)\varepsilon_{m,j}^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] - \frac{K_m}{2} \cdot \frac{1-\lambda}{2} \cdot (4\lambda_{k,1}h_m - \lambda_{k,2}i), \quad (4.27)$$

$$L_k^{(2)(m)} = -\frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left[(k+1)\varepsilon_{m,j}^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right]; \quad (4.28)$$

$$L_k^{(3)(m)} = \sum_{j=1}^{N+1} \left(C_k^{(3)(m,j)} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \frac{K_m}{2} \left[4\lambda_{k,1}h_m \frac{1+\lambda}{2} + \lambda_{k,2}i \left(\frac{1+\lambda}{2} - \frac{2}{1+\varepsilon_0} \right) \right]; \quad (4.29)$$

$$L_k^{(4)(m)} = \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^{N+1} \left(\varepsilon_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \lambda_{k,2} \frac{\mu_m}{\mu_0} \frac{iK_m}{1+\varepsilon_0}. \quad (4.30)$$

18. Определяются величины ($p=0,1; k=1, \dots, K_c+2; m=1, \dots, N+1$):

$$M_k^{(1)(m)} = \frac{L_k^{(1)(m)} + L_k^{(2)(m)}}{1+\varepsilon_m}, \quad M_k^{(2)(m)} = \frac{\varepsilon_m L_k^{(1)(m)} - L_k^{(2)(m)}}{1+\varepsilon_m}, \quad (4.31)$$

$$M_k^{(3)(m)} = \frac{L_k^{(3)(m)} + L_k^{(4)(m)}}{1+\varepsilon_m}, \quad M_k^{(4)(m)} = \frac{\varepsilon_m L_k^{(3)(m)} - L_k^{(4)(m)}}{1+\varepsilon_m}.$$

19. Определяются величины ($p=0,1; m=1, \dots, N+1; k=1, \dots, K_c+2$)

$$N_k^{(1)} = M_k^{(1)(1)}; N_k^{(2)} = \delta_{2,k} (k-2) M_{k-2}^{(1)(1)} - \lambda_{k,1} M_k^{(3)(1)} + \overline{M_k^{(4)(1)}}; \quad (4.32)$$

$$N_k^{(3)} = M_k^{(3)(1)}; N_k^{(4)} = \overline{M_k^{(2)(1)}} - (k+2) M_{k+2}^{(3)(1)}.$$

20. Вычисляются элементы столбцов свободных членов двух систем уравнений:

$$Y_k^{(1)'} = - \sum_{l=1}^4 \sum_{v=1}^{K_c+2} \rho^{e(l,v)} T_{k,v}^{(l,1)} N_v^{(l)*}; \quad (4.33)$$

$$Y_k^{(2)'} = - \sum_{l=1}^4 \sum_{v=1}^{K_c+2} \rho^{e(l,v)} T_{k,v}^{(l,3)} N_v^{(l)*}; \quad (4.34)$$

$$Y_k^{(1)''} = - \sum_{l=1}^4 \sum_{v=1}^{K_c+2} \rho^{e(l,v)} T_{k,v}^{(l,2)} N_v^{(l)**}; \quad (4.35)$$

$$Y_k^{(2)''} = - \sum_{l=1}^4 \sum_{v=1}^{K_c+2} \rho^{e(l,v)} T_{k,v}^{(l,4)} N_v^{(l)**}. \quad (4.36)$$

21. Полученные системы уравнений решаются методом Гаусса относительно неизвестных действительных $c_\mu^{(s)(0,1)*}$ и мнимых $c_\mu^{(s)(0,1)**}$ частей комплексных коэффициентов $c_\mu^{(s)(0,1)}$ ($s=1,2$; $\mu=1,\dots,N_s$). Величина N_s определяется из соотношений

$$N_s = \begin{cases} K_c & \text{при } s=1; \\ K_c + 2 & \text{при } s=2. \end{cases} \quad (4.37)$$

22. Вычисляются коэффициенты ($m=2,\dots,N+1$)

$$c_k^{(1)(0,m)} = - \frac{1}{r_m} M_k^{(1)(m)}; \quad (4.38)$$

$$c_1^{(2)(0,m)*} = \frac{M_1^{(3)(m)*} - M_1^{(4)(m)*}}{l_m - d_m}; \quad (4.39)$$

$$c_1^{(2)(0,m)**} = \frac{M_1^{(3)(m)**} + M_1^{(4)(m)**}}{l_m + d_m}; \quad (4.40)$$

$$c_2^{(2)(0,m)*} = - \frac{1}{l_m} M_2^{(4)(m)*}; \quad (4.41)$$

$$c_2^{(2)(0,m)**} = \frac{1}{l_m} M_2^{(4)(m)**}; \quad (4.42)$$

$$c_k^{(2)(0,m)} = (k-2)c_{k-2}^{(1)(0,m)} - \frac{1}{l_m} \overline{M_k^{(4)(m)}} \text{ при } k \geq 3. \quad (4.43)$$

23. С использованием вычисленных действительных $c_\mu^{(s)(0,m)*}$ и мнимых $c_\mu^{(s)(0,m)**}$ частей формируются комплексные значения коэффициентов $c_\mu^{(s)(0,m)}$ ($s=1,2; \mu=1,\dots,N_s$):

$$c_\mu^{(s)(0,m)} = c_\mu^{(s)(0,m)*} + i c_\mu^{(s)(0,m)**}. \quad (4.44)$$

24. Определяются абсолютные значения разностей между коэффициентами $c_\mu^{(s)(0,m)*}$, $c_\mu^{(s)(0,m)**}$ ($s=1,2; \mu=1,\dots,N_s$), полученными в двух последовательных приближениях.

Вычисления повторяются вновь, начиная с п. 15, до тех пор, пока абсолютные значения разностей не станут меньше заданной величины ε (например, $\varepsilon = 10^{-6}$). Если заданная точность достигнута, вычисления продолжают далее с п. 24. Если число выполняемых шагов итерационного процесса превысит I_{\max} , то вычислительный процесс прекращается.

25. Определяется необходимое количество коэффициентов $c_k^{(l)(1)}$ с учетом

$$l = 1, \dots, 4; k = 1, \dots, N_l; N_l = \begin{cases} K_c & \text{при } l = 1, 4; \\ K_c + 2 & \text{при } l = 2, 3; \end{cases}; N_p = \begin{cases} K_c & \text{при } p = 1; \\ K_c + 2 & \text{при } p = 2 \end{cases}$$

$$c_k^{(l)(1)} = \rho^{e(l,k)} \left[\sum_{p=1}^2 \sum_{v=1}^{N_p} \left(P_{k,v}^{(p,l)} c_v^{(p)(0,1)} + Q_{k,v}^{(p,l)} \overline{c_v^{(p)(0,1)}} \right) + N_k^{(l)(0,m)} \right]. \quad (4.45)$$

26. Для вычисления напряжений в точках контура L_1 задаётся значение угла θ от 0° до 360° с шагом $\Delta\theta$ и определяются координаты точек соответствующих контуров в комплексном виде, а так же координата y

$$z = R_1 e^{i\theta}, \quad y = \text{Im} z. \quad (4.46)$$

27. Начальные напряжения в точках z на контуре L_1 в полярной системе координат, полюс которой совпадает с центром отверстия, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(0)(0)} &= -\gamma(H-y)(\lambda \cos^2 \theta + \sin^2 \theta); \\ \sigma_\theta^{(0)(0)} &= -\gamma(H-y)(\lambda \sin^2 \theta + \cos^2 \theta); \\ \tau_{r\theta}^{(0)(0)} &= -\gamma(H-y)(1-\lambda) \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}\quad (4.47)$$

28. В точках с координатами z определяются величины ($j=1, \dots, N+1$):

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) &= -\frac{1}{R_j} \sum_{k=1}^{K_c+2} k \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-(k+1)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} \left\{ \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left[1 - (k+1) \frac{z-z_j}{R_j} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} \right] + \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R_j} \cdot \frac{K_j}{1+\alpha_0} \cdot \left\{ 2h_j \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \left[\left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-1} + \alpha_0 \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\} \right\rangle. \quad (4.48)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) &= \frac{1}{R_j^2} \sum_{k=1}^{K_c+2} k(k+1) \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left[(k+2) \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right) \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} - 2 \right] \overline{c_k^{(1)(0,j)}} - \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right\rangle + \frac{4K_j h_j}{(1+\alpha_0)R_j^2} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-3} + \\ &\quad \left. + \frac{iK_j}{(1+\alpha_0)R_j^2} \left[\left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-2} + \alpha_0 \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-2} \right]; \quad (4.49)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_j} \left\{ \sum_{k=1}^{K_c+2} \left[-kc_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-(k+1)} + \right. \right. \\
& + k \left(2(k+1)\overline{c_k^{(1)(0,j)}} + kc_k^{(2)(0,j)} \right) \times \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\
& \left. \left. - k(k+1)^2 \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_j} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{2K_j h_j}{1+\alpha_0} \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-2} - \frac{iK_j}{1+\alpha_0} \left[\alpha_0 \left(\frac{z-z_j}{R_j} \right)^{-1} + \left(\frac{z-z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\}. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

29. Дополнительные радиальные $\sigma_r^{(0)}$, нормальные тангенциальные $\sigma_\theta^{(0)}$ и касательные $\tau_{r\theta}^{(0)}$ напряжения в точках контура L_1 в области S_0 (массив грунта) определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) - \left[\overline{(z-z_j)\tilde{\varphi}''_{0,j}}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}; \\
\sigma_\theta^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) + \left[\overline{(z-z_j)\tilde{\varphi}''_{0,j}}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}; \quad (4.51) \\
\tau_{r\theta}^{(0)} &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \left[\overline{(z-z_j)\tilde{\varphi}''_{0,j}}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}.
\end{aligned}$$

30. Полные напряжения в точках контура L_1 со стороны массива грунта вычисляются по формулам:

$$\tilde{\sigma}_r^{(0)} = \sigma_r^{(0)} + \sigma_r^{(0)(0)}; \quad \tilde{\sigma}_\theta^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)(0)}; \quad \tilde{\tau}_{r\theta}^{(0)} = \tau_{r\theta}^{(0)} + \tau_{r\theta}^{(0)(0)}. \quad (4.52)$$

31. В точках с координатами z , как в п. 27, определяются величины:

$$\varphi_1'(z) = \frac{1}{R_{1,1}} \sum_{k=1}^{K_c+2} \left[-c_k^{(1)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(3)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{k-1} \right]; \quad (4.53)$$

$$\varphi_1''(z) = \frac{1}{R_{1,1}^2} \sum_{k=1}^{K_c+2} \left[(k+1)c_k^{(1)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{-(k+2)} + (k-1)c_k^{(3)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{k-2} \right]; \quad (4.54)$$

$$\psi_1'(z) = \frac{1}{R_{1,1}} \sum_{k=1}^{K_c+2} k \left[-c_k^{(2)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(4)(2)} \left(\frac{z}{R_{1,1}} \right)^{k-1} \right]. \quad (4.55)$$

32. Радиальные σ_r , нормальные тангенциальные σ_θ и касательные $\tau_{r\theta}$ напряжения в кольце, моделирующем обделку, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi_1'(z) - \left[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \sigma_\theta &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi_1'(z) + \left[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \operatorname{Im} \left\{ \left[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z) \right] e^{2i\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

4.3 Описание программы, реализующей разработанный метод расчета

Приведенный выше алгоритм положен в основу компьютерной программы, реализующей разработанный аналитический метод расчета обделок тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом с применением защитного экрана из труб на действие собственного веса грунта.

Программа предназначена для определения напряженного состояния обделки тоннеля достаточно большой протяженности, сооруженного закрытым способом.

Обделка тоннеля – монолитная, сборная из железобетонных тюбингов или блоков, чугунных тюбингов, а также комбинированная (многослойная) моделируется однородным концентрическим кольцом из материала с приведенными деформационными характеристиками, подкрепляющим круговое отверстие в полубесконечной среде, моделирующей массив грунта.

Поперечные сечения труб экрана с возможным заполнением моделируются сплошными шайбами, расположенными вне контура выработки.

Программа позволяет учесть следующие факторы: наличие близко расположенной поверхности; диаметр и глубину заложения тоннеля; размеры и располо-

жение поперечных сечений труб защитного экрана с отличающимися деформационными характеристиками; физико-механические и деформационные характеристики массива грунта, материалов обделки и труб экрана; поле начальных напряжений в массиве грунта; отставание возведения обделки от забоя выработки.

Функциональные возможности программы – определение компонент тензора напряжений в массиве грунта и в обделке тоннеля.

Программа составлена на языке программирования FORTRAN в среде WIN32 для компьютеров стандарта IBM PC. Операционная система – Windows 7 и выше. Объем программы для ЭВМ – не более 100 Кб.

Для эксплуатации разработанной программы специальных условий не требуется, используемая стандартная подпрограмма решения систем линейных алгебраических уравнений включена непосредственно в текст программы.

Программа позволяет эффективно выполнять многовариантные расчеты конструкций подземных сооружений при практическом проектировании и при проведении научных исследований с целью уточнения известных и установления новых закономерностей формирования напряженного состояния обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитного экрана из труб.

4.4 Проверка точности удовлетворения граничных условий

В основу разработанного метода расчета положено аналитическое решение задачи теории упругости, полученное с использованием математического аппарата ТФКП. Напряженное состояние элементов геомеханической системы определяется с использованием потенциалов Колосова-Мухелишвили, представляемых в виде бесконечных рядов Лорана.

Очевидно, что точность получаемых результатов зависит от таких параметров, как количество удерживаемых членов в рядах, относительные размеры поперечных сечений выработки и сечений труб экранов, относительные расстояния от центров сечений труб экрана до контура выработки, соотношения дефор-

мационных характеристик массива грунта, материалов обделок и труб с возможным заполнением.

Результаты многовариантных расчётов с использованием разработанной программы позволили установить минимальное число K_c , обеспечивающее достижение необходимой точности расчета. Проверка точности удовлетворения граничных условий решаемой задачи позволила установить:

- тождественное равенство нулю нормальных σ_y и касательных τ_{xy} напряжений на прямолинейной границе весомой полуплоскости, моделирующей массив грунта;

- на наружном контуре кольца, моделирующего поперечное сечение обделки тоннеля различие между радиальными σ_r и касательными $\tau_{r\theta}$ напряжениями в смежных точках кольца и среды не превышает 5% для наиболее близких возможных расстояний от центра шайб, моделирующих поперечные сечения труб защитного экрана, до контура отверстия (выработки) при $N = 20$;

- на внутреннем контуре кольца, моделирующего обделку тоннеля, - тождественное равенство нулю радиальных σ_r и касательных $\tau_{r\theta}$ напряжений (отсутствие нагрузок).

Также получены результаты, позволяющие сделать вывод о том, что дальнейшее увеличение числа удерживаемых членов ряда для повышения точности удовлетворения граничных условий нецелесообразно, поскольку оно приводит к нарушению на этапе вычислений условий сходимости используемых рядов при имеющихся достаточно больших соотношениях поперечных размеров сечений выработки, обделки и труб экрана. Величины нормальных тангенциальных напряжений σ_θ изменяются при этом весьма незначительно.

Выводы по главе 4

1. Приведено описание исходных данных, необходимых для выполнения расчетов по определению напряженного состояния обделок тоннелей, сооружаемых под защитой экранов.

2. Составлен полный алгоритм расчета, предназначенный для разработки соответствующего программного обеспечения.

3. На языке программирования FORTRAN в среде WIN32 составлена компьютерная программа, позволяющая определять напряженное состояние массива грунта и обделок тоннелей.

4. По результатам вычислительных экспериментов определено необходимое число удерживаемых членов в используемых при получении решения задачи теории упругости рядах Лорана, обеспечивающее удовлетворение граничных условий с погрешностью, не превышающей 5% .

5 ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ФОРМИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБДЕЛКИ ТОННЕЛЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СОЧЕТАНИЯХ ВЛИЯЮЩИХ ФАКТОРОВ

Компьютерная программа, реализующая разработанный метод, позволила выполнить расчеты, иллюстрирующие его возможности при определении напряженного состояния обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитных экранов из труб, и окружающего массива грунта, а также провести вычислительные эксперименты, по результатам которых установлены закономерности формирования напряженного состояния элементов геомеханической системы "массив грунта – трубы защитного экрана – обделка тоннеля", необходимые для принятия обоснованных рациональных решений на этапе практического проектирования подземных сооружений.

5.1 Примеры расчета

Ниже приведены примеры определения напряженного состояния массива грунта вокруг неподкрепленной выработки и обделки тоннеля, сооружаемых под защитой экрана из труб в грунтах с различными физико-механическими характеристиками.

Приведенные результаты соответствуют случаю мгновенного появления в среде отверстия, подкрепляющего его отверстия и шайб, что является наиболее неблагоприятным с позиций оценки напряженного состояния элементов геомеханической системы.

Полученные результаты, как указано выше, позволяют с использованием известных методик [5] учесть влияние особенностей конкретных технологий строительства, в том числе – влияние отставания обделки от забоя выработки.

5.1.1 Влияние защитного экрана из труб на напряженное состояние массива грунта на контуре незакрепленной выработки

На рисунке 5.1 представлена расчетная схема, принятая при определении напряженного состояния массива грунта на поверхности незакрепленной выработки при расположении труб защитного по замкнутому контуру. Для сравнения приведены результаты расчета для выработки, пройденной без защитного экрана.

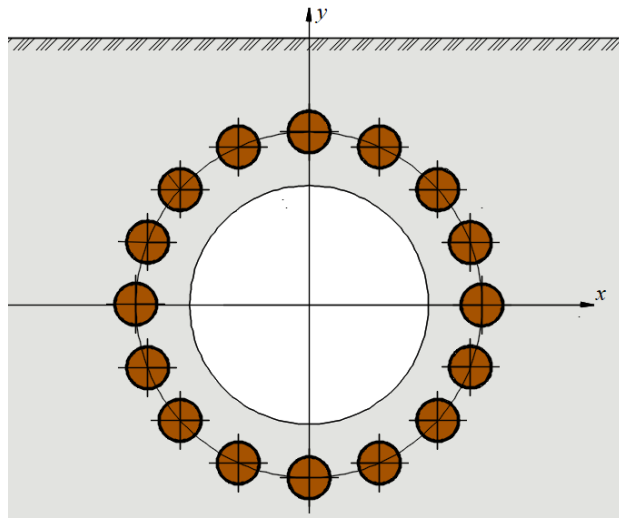


Рисунок 5.1 – Расчетная схема

Расчеты выполнялись при следующих исходных данных: радиус выработки – 3 м; модуль деформации массива грунта – 20 МПа, коэффициент Пуассона – 0,3; коэффициент бокового давления в ненарушенном массиве грунта – 0,2; удельный вес – 0,020 МН/м³. Защитный экран состоит из 60 одинаковых труб с радиусами поперечных сечений 0,125 м, равномерно распределенных по замкнутому круговому контуру, расположенному на расстоянии 0,3 м от контура выработки. Модуль деформации и коэффициент Пуассона материала заполнения труб приняты равными соответственно 100000 МПа и 0,2.

На рисунке 5.2 а, б приведены эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках поверхности выработки, пройденной без защитного экрана (рисунок 5.2 а) и под защитой экрана (рисунок 5.2 б).

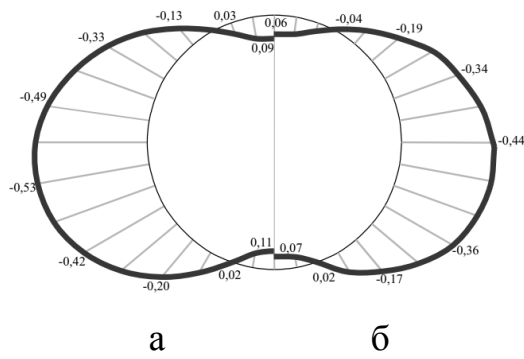


Рисунок 5.2 – Эпюры напряжений σ_θ , МПа на контуре выработки:

а – без защитного экрана; б – при наличии экрана

Из представленных результатов следует, что при принятых исходных данных в точках поверхности выработки, пройденной под защитой экрана, наблюдается существенное снижение как растягивающих (положительных) – практически в 1,5 раза, так и сжимающих (отрицательных) напряжений – на 17%.

На рисунке 5.3 приведены результаты – эпюры нормальных тангенциальных напряжений, возникающих на контуре поперечного сечения выработки, пройденной без применения и с применением защитного экрана, – для незакрепленной выработки.

Исходные данные: глубина заложения выработки 10 м; радиус поперечного сечения выработки 3,0 м; используются 35 труб, равномерно расположенных по верхней половине контура выработки на расстоянии от центров поперечных сечений труб до контура выработки, равном 0,13 м; радиусы поперечных сечений труб 0,125 м; удельный вес грунта 0,02 МН/м³; модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта соответственно 50 МПа и 0,3; приведенный модуль деформации материала шайб 10000 МПа, коэффициент Пуассона – 0,2. Расчеты выполнены для двух значений коэффициента бокового давления в ненарушенном массиве грунта – 0,5 и 0,7.

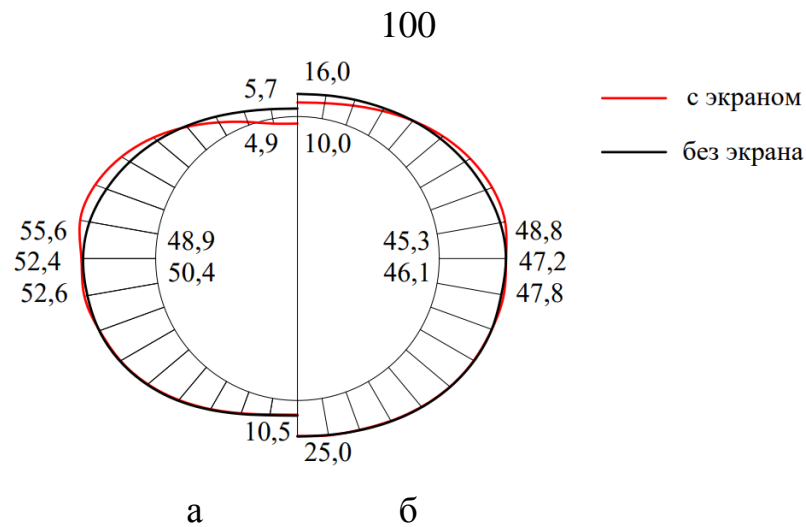


Рисунок 5.3 – Эпюры нормальных тангенциальных напряжений $100\sigma_{\theta}, МПа$ на контуре поперечного сечения выработки при λ , равном: а – 0,5; б – 0,7

5.1.2 Влияние величины коэффициента бокового давления и расстояния до центров сечений труб на напряжения на контуре выработки

Используемая расчетная схема аналогична представленной на рисунке 5.1, но трубы экрана расположены по верхней половине контура сечения тоннеля.

Результаты расчета соответствуют наиболее неблагоприятному случаю – одновременному появлению отверстия и шайб, моделирующих сечения выработки и труб защитного экрана.

Исходные данные, принятые при расчетах: глубина заложения выработки $H = 10 м$; радиус поперечного сечения выработки $R_1 = 3,0 м$; используются 35 труб защитного экрана, равномерно расположенных вблизи контура выработки, расстояние от контура сечения выработки до центров поперечных сечений труб δ изменяется в диапазоне $0,13...2,2 м$; радиусы поперечных сечений труб $R_m = 0,125 м$; удельный вес грунта $\gamma = 0,020 МН / м^3$; модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта $E_0 = 50 МПа$, $\nu_0 = 0,3$; коэффициент бокового давления λ изменяется в диапазоне $0...1,0$; приведенный модуль деформации труб с заполнением $E_m = 10000 МПа$, коэффициент Пуассона $\nu_m = 0,3$.

На рисунке 5.4 представлены расчетные эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , возникающих в грунте на контуре выработки при $\lambda = 0,3$ (рисунок 5.4 а) и при $\lambda = 0,7$ (рисунок 5.4 б).

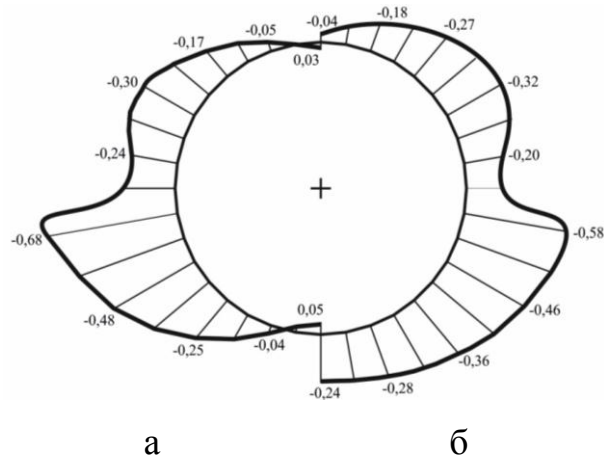


Рисунок 5.4 – Эпюры напряжений σ_θ , МПа на контуре выработки при коэффициенте бокового давления: а – $\lambda = 0,3$; б – $\lambda = 0,7$

Из результатов, приведенных на рисунок 5.4, следует, что при $\lambda = 0,3$ в своде и подошве выработки возникают растягивающие (положительные) нормальные тангенциальные напряжения σ_θ , величина которых составляет соответственно $+0,03$ МПа и $+0,05$ МПа (рисунок 5.4 а); на контуре выработки при $\lambda = 0,7$ растягивающие напряжения отсутствуют (рисунок 5.4 б). Максимальные сжимающие (отрицательные) напряжения, составляющие $-0,68$ МПа при $\lambda = 0,3$ (рисунок 5.4 а) и $-0,58$ МПа при $\lambda = 0,7$ (рисунок 5.4 б), при обоих значениях λ возникают в радиальных сечениях ниже горизонтального диаметра приблизительно на 10° .

В таблице 5.1 приведены значения нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа в характерных точках контура сечения выработки, расположенных на горизонтальном и вертикальном диаметрах сечения выработки, а также значения максимальных сжимающих и растягивающих напряжений σ_θ с указанием углов θ , определяющих положения соответствующих радиальных сечений, при

изменении величины λ в принятом диапазоне и фиксированном расстоянии от контура выработки до центра сечения труб $\delta = 0,13$ м.

Таблица 5.1 – Нормальные тангенциальные напряжения σ_θ , МПа в точках контура сечения выработки при изменении величины λ

λ	Радиальные сечения			$\sigma_{\theta, max}^{сж}$	$\sigma_{\theta, max}^{раст}$
	$\theta = 0^\circ$ (180°)	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 270^\circ$		
0	-0,25	0,08	0,27	-0,75 ($\theta = 190^\circ$)	0,27 ($\theta = 90^\circ$)
0,1	-0,23	0,07	0,20	-0,73 ($\theta = 190^\circ$)	0,20 ($\theta = 270^\circ$)
0,2	-0,22	0,05	0,12	-0,70 ($\theta = 190^\circ$)	0,12 ($\theta = 270^\circ$)
0,3	-0,21	0,03	0,05	-0,68 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
0,4	-0,20	0,01	-0,02	-0,65 ($\theta = 190^\circ$)	0,01 ($\theta = 90^\circ$)
0,5	-0,19	-0,01	-0,09	-0,63 ($\theta = 190^\circ$)	-
0,6	-0,18	-0,03	-0,17	-0,61 ($\theta = 190^\circ$)	-
0,7	-0,16	-0,04	-0,24	-0,58 ($\theta = 190^\circ$)	-
0,8	-0,15	-0,06	-0,31	-0,56 ($\theta = 190^\circ$)	-
0,9	-0,14	-0,08	-0,39	-0,54 ($\theta = 190^\circ$)	-
1,0	-0,13	-0,10	-0,46	-0,51 ($\theta = 190^\circ$)	-

В таблице 5.2 приведены значения напряжений σ_θ , МПа в тех же характерных радиальных сечениях контура выработки – на горизонтальном диаметре ($\theta = 0^\circ; 180^\circ$), вертикальном диаметре ($\theta = 90^\circ$ и $\theta = 270^\circ$), а также максимальные значения сжимающих и растягивающих напряжений с указанием положения соответствующих радиальных сечений – при изменении расстояния между контуром выработки и центрами сечений труб от $\delta = 0,20$ м до $\delta = 0,60$ м ($\lambda = 0,3$), при котором влияние защитного экрана на напряженное состояние грунта на контуре выработки практически исчезает.

Таблица 5.2 – Нормальные тангенциальные напряжения σ_θ , МПа
в точках контура сечения выработки при изменении величины δ

δ , м	Радиальные сечения			$\sigma_{\theta, max}^{сж}$	$\sigma_{\theta, max}^{раст}$
	$\theta = 0^\circ (180^\circ)$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 270^\circ$		
0,20	-0,46	0,01	0,05	-0,63 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
0,25	-0,50	0,02	0,05	-0,60 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
0,30	-0,51	0,03	0,05	-0,58 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
0,35	-0,52	0,03	0,05	-0,57 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
0,40	-0,53	0,04	0,05	-0,56 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
0,45	-0,53	0,04	0,05	-0,55 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
0,50	-0,54	0,04	0,05	-0,55 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
0,55	-0,54	0,05	0,05	-0,55 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
0,60	-0,54	0,05	0,05	-0,55 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 270^\circ$)
экран отсутствует	-0,56	0,05	0,04	-0,56 ($\theta = 190^\circ$)	0,05 ($\theta = 90^\circ$)

5.1.3 Влияние расстояния от труб защитного экрана до контура выработки на напряженное состояние обделки тоннеля и массива грунта

При расчетах модуль деформации грунтов принимался равным $E_0 = 12 \text{ МПа}$ (супесь с гравием или галькой) и $E_0 = 300 \text{ МПа}$ (тонкослоистые твердые глины); коэффициент Пуассона – $\nu_0 = 0,3$; удельный вес грунта – $\gamma = 0,020 \text{ МН/м}^3$; коэффициент бокового давления – $\lambda = 0,5$. Глубина заложения тоннеля $H = 10 \text{ м}$; радиус поперечного сечения выработки $R_1 = 3,0 \text{ м}$. При проходке используется защитный экран из 36 труб с бетонным заполнением равномерно расположенных вокруг всего контура выработки. Радиусы поперечных сечений труб $R_m = 0,125 \text{ м}$, приведенный модуль деформации материала шайб, моделирующих сечения труб с заполнением, – $E_m = 70000 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона принят равным $\nu_m = 0,2$.

Толщина обделки тоннеля составляет $\Delta = 0,2 \text{ м}$; модуль деформации бетона обделки $E_1 = 27000 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0,2$.

Схема взаимного расположения поперечного сечения обделки тоннеля и труб экрана, принятая при выполнении расчетов, приведена на рисунке 5.5.

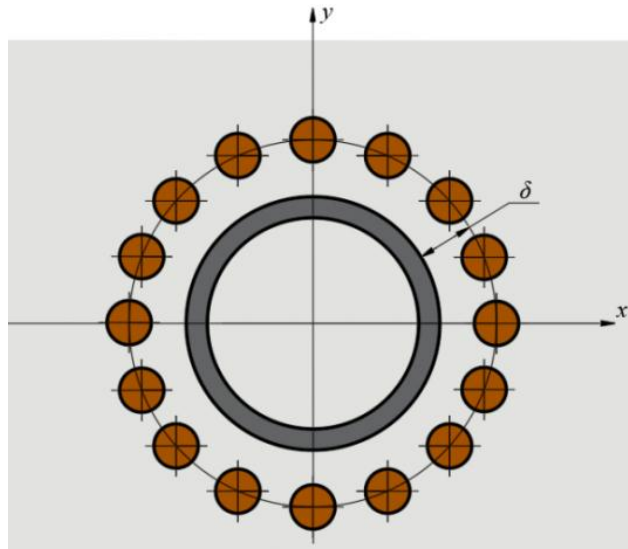


Рисунок 5.5 – Взаимное расположение тоннеля и труб экрана

В качестве параметра, влияющего на напряженное состояние грунта и обделки тоннеля, использовано расстояние δ от контура выработки до центров поперечных сечений труб, изменяющееся в диапазоне 0,21 ... 1,0 м; дополнительно выполнены расчеты для подкрепленной выработки, пройденной без применения защитного экрана.

Здесь и далее угол θ отсчитывается от горизонтали против хода часовой стрелки, таким образом, углы $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$ соответствуют точкам горизонтального диаметра сечения выработки, а углы $\theta = 90^\circ$ и $\theta = 270^\circ$ – соответственно верхней и нижней точкам вертикальных диаметров сечения.

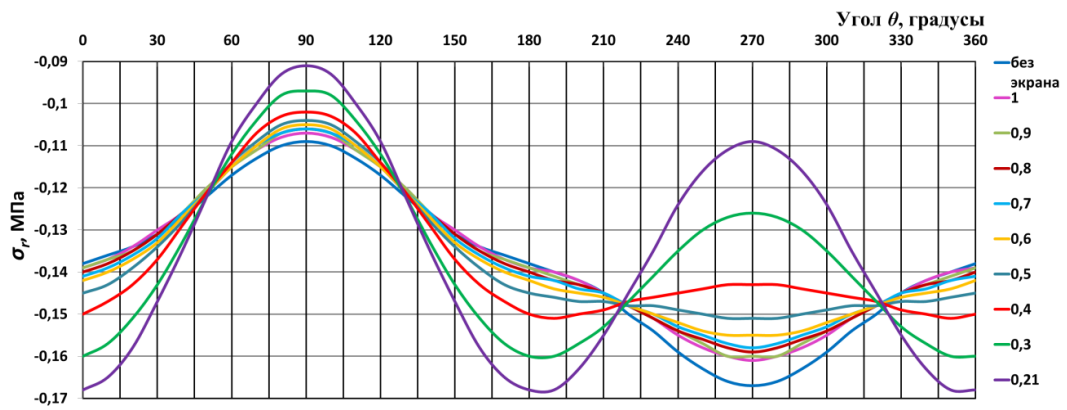
На рисунке 5.6 а, б, в представлены развертки расчетных эпюр радиальных напряжений σ_r в массиве грунта на контуре обделки (рисунок 5.6 а), нормальных тангенциальных напряжений σ_θ на наружном (рисунок 5.6 б) и внутреннем (рисунок 5.6 в) контурах сечения обделки тоннеля, сооруженного в грунтах при $E_0 = 12 \text{ МПа}$.

Из рисунка 5.6 а следует, что на контуре выработки при всех рассмотренных значениях параметра δ , а также при отсутствии защитного экрана возникают только сжимающие (отрицательные) радиальные напряжения σ_r , которые можно рассматривать в качестве нормальной, т.е. перпендикулярной к поверхности обделки нагрузки (горного давления на обделку).

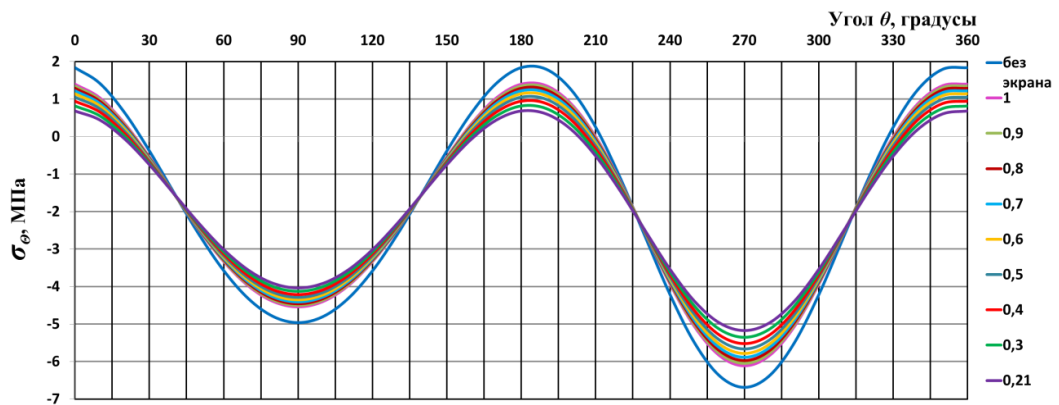
При отсутствии экрана, как следует из рисунка 5.6 а, максимальные по модулю радиальные напряжения возникают в нижней точке вертикального диаметра сечения выработки и не превышают $\sigma_r = -0,167 \text{ МПа}$, при этом в верхней точке вертикального диаметра радиальные напряжения составляют $\sigma_r = -0,109 \text{ МПа}$. В точках горизонтального диаметра радиальные напряжения равны $\sigma_r = -0,138 \text{ МПа}$.

При наличии труб защитного экрана максимальные по модулю радиальные напряжения установлены в точках чуть ниже горизонтального диаметра ($\theta = 190^\circ$ и, в силу симметрии, $\theta = 350^\circ$). Так, при значении $\delta = 0,30 \text{ м}$ радиальные напряжения в этих точках равны $\sigma_r = -0,161 \text{ МПа}$, а в нижней точке вертикального диаметра сечения выработки – $\sigma_r = -0,126 \text{ МПа}$.

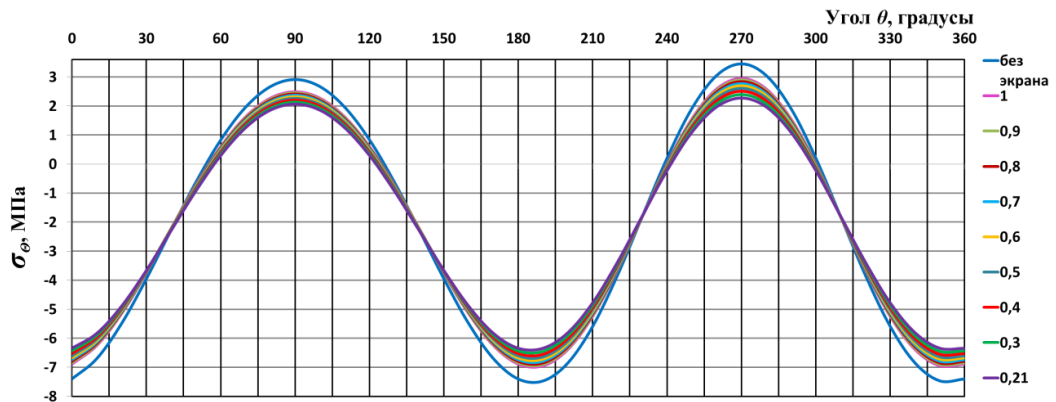
С уменьшением расстояния δ в пределах принятого диапазона для радиальных напряжений в грунте на контуре выработки в верхней ($\theta = 90^\circ$) и в нижней ($\theta = 270^\circ$) точках вертикального диаметра наблюдается снижение радиальных нагрузок на обделку, например, при $\delta = 0,21 \text{ м}$ снижение составляет соответственно 15,7% и 35,3%. В точках при $\theta = 190^\circ$ и $\theta = 350^\circ$ (ниже горизонтального диаметра выработки) наблюдается монотонное увеличение значений радиальных напряжений, составляющее до 16,7% при уменьшении расстояния от $\delta = 1,00 \text{ м}$ до $\delta = 0,21 \text{ м}$.



а



б



в

Рисунок 5.6 – Развертки эпюр напряжений при $E_0 = 12 \text{ МПа}$:

а – радиальные напряжения в грунте на контуре выработки;

б, в – нормальные тангенциальные напряжения соответственно на наружном и внутреннем контурах обделки

Как следует из рисунка 5.6 б ($E_0 = 12 \text{ МПа}$) в точках наружного контура сечения обделки возникают нормальные тангенциальные напряжения σ_θ как сжи-

мающие (на вертикальном диаметре), так и растягивающие (на горизонтальном диаметре) при всех принятых значениях параметра δ , включая случай отсутствия защитного экрана.

Наибольшие значения растягивающих напряжений σ_θ на наружном контуре поперечного сечения обделки тоннеля установлены в точках, расположенных ниже горизонтального диаметра ($\theta = 190^\circ$ и $\theta = 350^\circ$) в случае отсутствия защитного экрана. При сооружении тоннеля под защитой экрана наблюдается монотонное уменьшение этих напряжений с уменьшением расстояния δ .

Сжимающие нормальные тангенциальные напряжения σ_θ в крайних точках вертикального диаметра сечения обделки уменьшаются по абсолютной величине с изменением расстояния δ от 1,0 м до 0,21 м: в верхней точке диаметра на 11%; в нижней – на 18%.

Из рисунка 5.6 в следует, что в слабых грунтах ($E_0 = 12 \text{ МПа}$) в точках внутреннего контура поперечного сечения обделки возникают как растягивающие, так и сжимающие нормальные тангенциальные напряжения σ_θ .

Сравнение результатов проведенных исследований напряженного состояния обделки тоннеля, сооружаемого без предварительно установленного экрана, с данными для обделки тоннеля под защитой экрана из труб, расположенных по всему контуру выработки на различных расстояниях, показало уменьшение по абсолютной величине максимальных как растягивающих (свод и лоток тоннеля), так и сжимающих (бока тоннеля) напряжений, напряжения в лотке тоннеля превышают значения напряжений в его своде.

С изменением расстояния от $\delta = 1,0 \text{ м}$ до $\delta = 0,21 \text{ м}$ напряжения σ_θ уменьшаются в своде тоннеля ($\theta = 90^\circ$) с $\sigma_\theta = 2,5 \text{ МПа}$ до $\sigma_\theta = 2,0 \text{ МПа}$, т.е. на 20%; в лотке тоннеля ($\theta = 270^\circ$) – с $\sigma_\theta = 3,0 \text{ МПа}$ до $\sigma_\theta = 2,3 \text{ МПа}$, т.е. на 23%; в точках при $\theta = 190^\circ$ и $\theta = 350^\circ$ (ниже горизонтального диаметра сечения выработки) – до 10%.

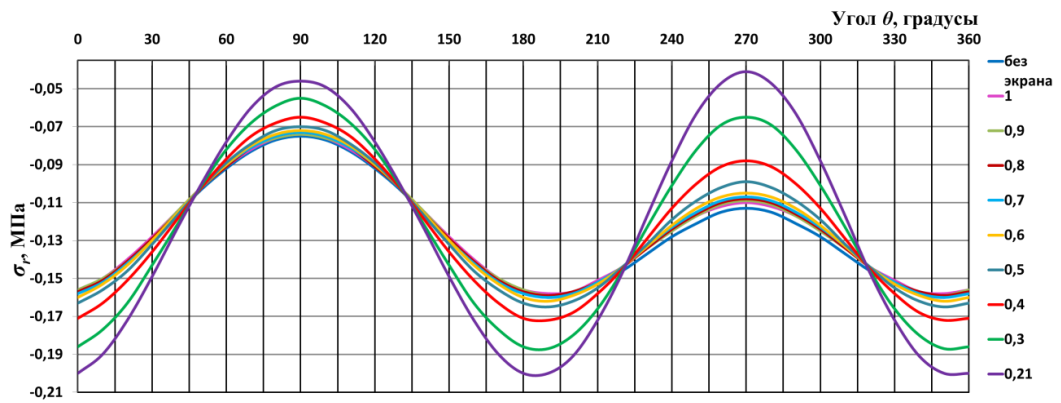
На рисунках 5.7 а, б, в приведены развертки расчетных эпюр радиальных напряжений σ_r в массиве грунта на контуре выработки (рисунок 5.7 а), нормальных тангенциальных напряжений σ_θ на наружном (рисунок 5.7 б) и внутреннем (рисунок 5.7 в) контурах поперечного сечения обделки тоннеля в более прочных грунтах, характеризующихся модулем деформации $E_0 = 300 \text{ МПа}$.

Сравнение результатов расчетов, приведенных на рисунке 5.6 и рисунке 5.7 позволяет сделать следующие выводы:

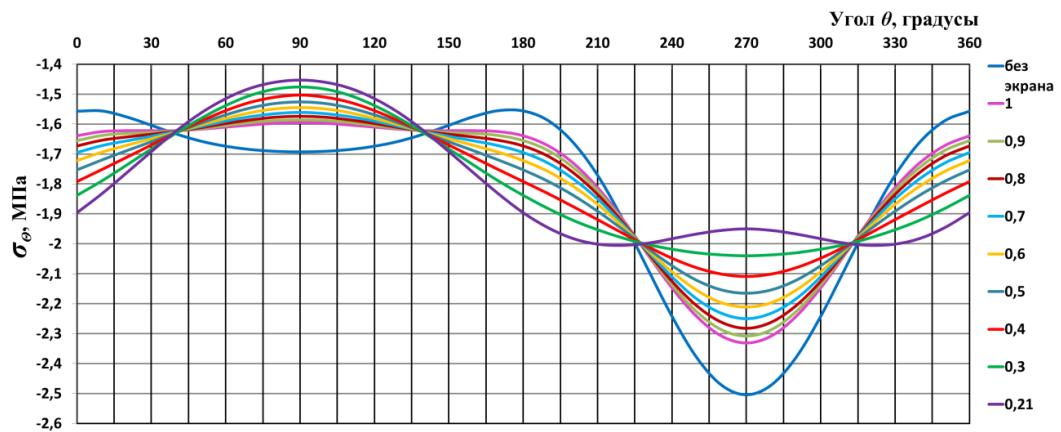
- радиальные напряжения σ_r на контуре выработки в прочных грунтах ($E_0 = 300 \text{ МПа}$) принимают более высокие значения как для тоннеля, пройденного без экрана, так и для тоннеля, сооруженного под его защитой, по сравнению со слабыми грунтами ($E_0 = 12 \text{ МПа}$). Так, максимальные значения по модулю радиальных напряжений при $E_0 = 300 \text{ МПа}$ составляют не менее $\sigma_r = -0,20 \text{ МПа}$, что на 20% превышает соответствующие значения при $E_0 = 12 \text{ МПа}$ (рисунок 5.6 а и рисунок 5.7 а);

- расчетные нормальные тангенциальные напряжения σ_θ на наружном контуре поперечного сечения обделки тоннеля, пройденного в более прочных грунтах как без экрана, так и при его использовании являются только сжимающими и изменяющимися в более узком, по сравнению с сооружением тоннеля в слабых грунтах, диапазоне от $\sigma_\theta = -1,45 \text{ МПа}$ при расположении труб экрана на расстоянии $\delta = 0,21 \text{ м}$ до $\sigma_\theta = -2,51 \text{ МПа}$ при отсутствии экрана (рисунок 5.7 б);

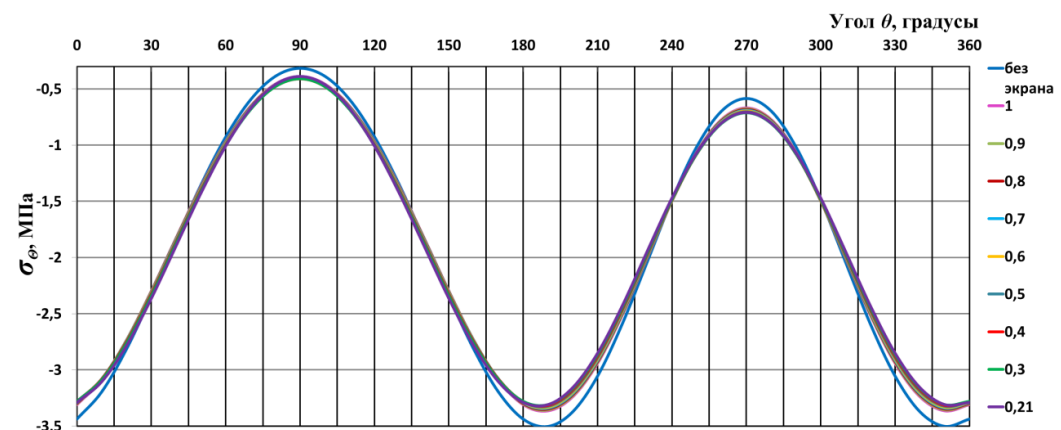
- в точках внутреннего контура поперечного сечения обделки, сооруженного в массиве грунта при $E_0 = 300 \text{ МПа}$ (рисунок 5.7 в), возникают только сжимающие нормальные тангенциальные напряжения σ_θ , причем их величины превышают соответствующие напряжения на наружном контуре (рисунок 5.7 б). Отмечая общую тенденцию к уменьшению напряжений σ_θ в обделке тоннеля, сооружаемого с применением защитного экрана, по сравнению с тоннелем при отсутствии экрана, снижение напряжений σ_θ в точках внутреннего контура сечения обделки не превышает 6%;



а



б



в

Рисунок 5.7 – Развертки эпюр напряжений при $E_0 = 300 \text{ МПа}$:

а – радиальные напряжения в грунте на контуре выработки;

б, в – нормальные тангенциальные напряжения соответственно на наружном и внутреннем контурах обделки

- использование защитного экрана при сооружении тоннелей в более прочных грунтах менее эффективно, о чем свидетельствуют величины нормальных

тангенциальных напряжений σ_θ , возникающих на внутреннем контуре поперечного сечения обделки тоннеля.

Полученные результаты исследования, в котором в качестве параметра использовано расстояние от контура выработки до центров сечений труб экрана, позволяют выполнить количественную оценку изменения напряженного состояния обделки в поперечных сечениях по длине заходки при размещении труб экрана под углом к продольной оси выработки.

5.1.4 Влияние формы защитного экрана из труб на напряженное состояние массива грунта и обделки тоннеля

Далее приведены результаты определения напряженного состояния массива грунта и обделки тоннеля, сооруженного под защитой экрана из труб в слабых грунтах, характеризующихся модулем деформации $E_0 = 12 \text{ МПа}$, коэффициентом Пуассона $\nu_0 = 0,3$, удельным весом $\gamma = 0,020 \text{ МН/м}^3$, коэффициентом бокового давления $\lambda = 0,43$ (твердая супесь). Глубина заложения $H = 10 \text{ м}$; радиус поперечного сечения выработки $R_1 = 3,0 \text{ м}$; толщина бетонной обделки $\Delta = 0,20 \text{ м}$, т.е. внутренний радиус поперечного сечения обделки составляет $R_{1,1} = 2,80 \text{ м}$, модуль деформации и коэффициент Пуассона бетона соответственно $E_1 = 27000 \text{ МПа}$, $\nu_0 = 0,2$ (бетон класса В20); радиусы поперечных сечений труб $R_m = 0,125 \text{ м}$, приведенный модуль деформации материала шайб, моделирующих сечения стальных труб с бетонным заполнением $E_m = 70000 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\nu_m = 0,3$.

Выполнены расчеты для двух форм экранов, вид поперечных сечений которых приведены на рисунке 5.8.

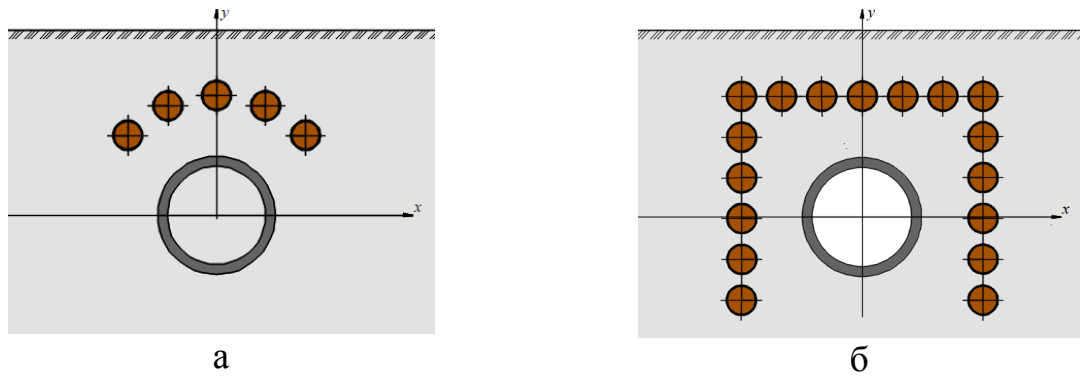


Рисунок 5.8 – Принципиальные расчетные схемы экрана:

а – по части контура выработки; б – П - образный

В первом варианте (рисунок 5.8 а) используются 19 труб защитного экрана, расположенных вдоль верхней части контура выработки, а во втором (рисунок 5.8 б) используются трубы в количестве 61, из них по 21 трубе расположено на каждой вертикали, 21 труба – на горизонтали.

На рисунке 5.9, в силу симметрии, представлены эпюры расчетных нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , возникающих в точках внутреннего контура сечения обделки по варианту 1 (рисунок 5.9 а) и по варианту 2 (рисунок 5.9 б). Для сравнения пунктирными линиями показаны эпюры напряжений, возникающих на внутреннем контуре обделки при сооружении тоннеля без защитного экрана; штрихпунктирными – при расстоянии от контура выработки до центров труб экрана $\delta = 0,8 м$; сплошными – $\delta = 0,4 м$.

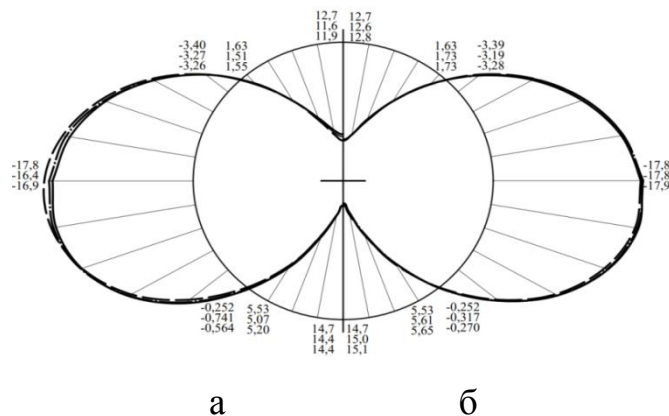


Рисунок 5.9 – Эпюры напряжений σ_θ на внутреннем контуре обделки:

а – экран по части контура; б – П-образный экран

Как следует из рисунков 5.9 а, б защитный экран из 19 труб, расположенных по части контура над сводом выработки, оказывает бóльшее влияние на уменьшение максимальных значений напряжений, возникающих в сечении обделки (сжимающих в точках горизонтального и растягивающих – в точках вертикального диаметров), по сравнению с П-образным экраном из 61 трубы.

На рисунке 5.10 приведены развертка эпюры радиальных напряжений σ_r , возникающих в массиве грунта на контуре сечения неподкрепленной выработки (рисунок 5.10 а), а также увеличенные фрагменты разверток эпюр вблизи характерных точек сечения выработки – вблизи свода (рисунок 5.10 б) и в боках выработки (рисунок 5.10 в). Защитный экран из 19 равномерно распределенных труб расположен по контуру выработки выше ее горизонтального диаметра на расстоянии δ , изменяющемся в диапазоне от 0,34 м до 0,8 м. Такое расположение позволяет учесть влияние труб на напряженное состояние массива грунта вблизи выработки при наклонном расположении труб по отношению к ее продольной оси. Для сравнения приведены результаты при отсутствии защитного экрана.

Исходные данные для расчета: $H = 10$ м, $E_0 = 50$ МПа, $\nu_0 = 0,3$, $\gamma = 0,020$ МН/м³, $\lambda = 0,43$, $R_1 = 3,0$ м, $R_m = 0,125$ м, приведенный модуль деформации материала шайб, моделирующих сечения стальных труб с бетонным заполнением $E_m = 70000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu_m = 0,3$ ($m = 2, \dots, 20$). Угол θ отсчитывается от горизонтали против хода часовой стрелки, таким образом, углы $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$ соответствуют точкам горизонтального диаметра сечения выработки, а углы $\theta = 90^\circ$ и $\theta = 270^\circ$ – соответственно верхней и нижней точкам вертикального диаметра.

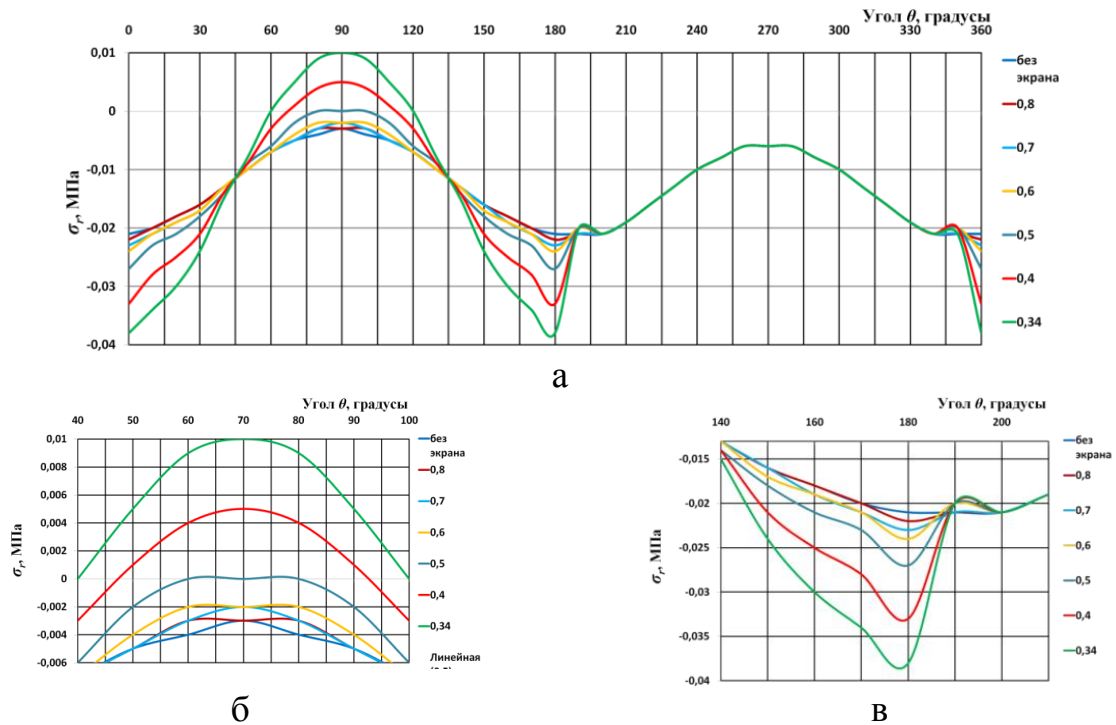


Рисунок 5.10 – Эпюры (развертки) напряжений σ_r в грунте на контуре выработки: а – по всему контуру; б – вблизи свода; в – в боках

Из представленных на рисунке 5.10 результатов следует, что на контуре выработки преобладают сжимающие (отрицательные) радиальные напряжения σ_r , которые можно рассматривать в качестве нормальной нагрузки на обделку тоннеля. Наличие труб защитного экрана на расстоянии δ в диапазоне от 0,34 м до 0,50 м приводит к возникновению в верхней части поверхности выработки незначительных растягивающих радиальных напряжений, не превышающих +0,01 МПа (рисунок 5.10 б). При отсутствии экрана, как следует из рисунка 5.10 а, максимальные (по модулю) радиальные напряжения, составляющие $\sigma_r = -0,38$ МПа возникают вблизи точек горизонтального диаметра сечения выработки. Вблизи лотка выработки радиальные напряжения не превышают $\sigma_r = -0,05$ МПа.

Полученные результаты позволяют дать рекомендации по расположения труб экрана и выбору величин расстояний от них до выработки так, чтобы максимальные растягивающие и сжимающие нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре сечения обделки не превышали расчетных сопротивлений

материала обделки (бетона) осевому сжатию и растяжению (при наличии растягивающих напряжений).

5.2 Зависимости напряженного состояния массива грунта и обделки тоннеля от основных влияющих факторов при различных формах экрана

5.2.1 Плоский экран из труб, расположенных горизонтально над выработкой

Расчетная схема, использованная при проведении численных исследований, приведена на рисунке 2.2 а.

Исходные данные, принятые при расчетах:

- количество труб защитного экрана $N = 23$;
- глубина заложения тоннеля $H = 10$ м;
- удельный вес, модуль деформации, коэффициент Пуассона грунта и коэффициент бокового давления в ненарушенном массиве грунта соответственно $\gamma = 0,022$ МН/м³, $E_0 = 12$ МПа, 50 МПа, 150 МПа, 300 МПа; $\nu_0 = 0,3$; $\lambda = 0,43$;
- наружный и внутренний радиусы поперечного сечения обделки тоннеля соответственно $R_1 = 3,0$ м, $R_{1,1} = 2,8$ м;
- радиусы поперечных сечений труб экрана $R_j = 0,125$ м ($j = 2, \dots, 24$);
- модуль деформации и коэффициент Пуассона материала обделки (бетон В20) $E_1 = 27000$ МПа, $\nu_1 = 0,2$;
- приведенные значения модуля деформации и коэффициент Пуассона материала заполнения труб защитного экрана $E_j = 70000$ МПа, $\nu_j = 0,2$ ($j = 2, \dots, 24$);
- расстояние от свода выработки до линии, на которой расположены центры сечений труб защитного экрана $\delta = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$.

Координаты центров поперечных сечений обделки тоннеля и труб защитного экрана при $\delta = 0,4$ приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 – Координаты центров поперечных сечений тоннеля и труб

	Тоннель	Трубы защитного экрана						
		1	2	3	...	19	20	23
$x_j, м$	0,0	-3,35	-3,05	-2,74	...	2,74	3,05	3,35
$y_j, м$	0,0	3,4	3,4	3,4	...	3,4	3,4	3,4

Ниже на рисунках 5.11 – 5.16 представлены эпюры напряжений в массиве грунта (рисунок 5.11) и обделке тоннеля (рисунки 5.12 – 5.16) при $E_0 = 12 \text{ МПа}$.

Эпюры (развертки) радиальных напряжений $\sigma_r, \text{ МПа}$, возникающих в грунте на контуре выработки, при различных расстояниях от линии, на которой расположены трубы горизонтального экрана до свода, приведены на рисунке 5.11.

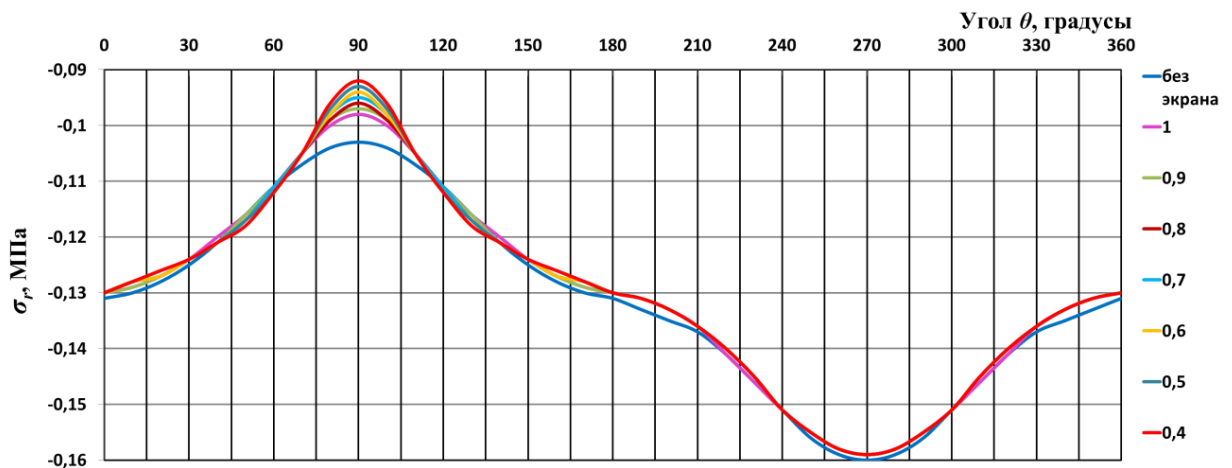


Рисунок 5.11 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки

Здесь и далее угол θ отсчитывается от положительного направления оси Ox против хода часовой стрелки.

Для возможности детального анализа изменения напряжений на рисунке 5.12 приведены фрагменты эпюр напряжений вблизи свода (рисунок 5.12 а), лотка (рисунок 5.12 б) и в боках выработки (рисунок 5.12 в).

Из рисунков 5.11, 5.12 следует, что радиальные напряжения σ_r в точках контура выработки являются сжимающими (отрицательными). С изменением рас-

стояния от труб экрана до контура выработки от 1 м, включая случай полного отсутствия экрана, до 0,4 м радиальные напряжения вблизи свода выработки (горное давление) уменьшаются по абсолютной величине от 0,103 МПа до 0,092 МПа, максимальные напряжения возникают в лотке выработки, на которые защитный экран не оказывает существенного влияния, также как и на напряжения в боках выработки.

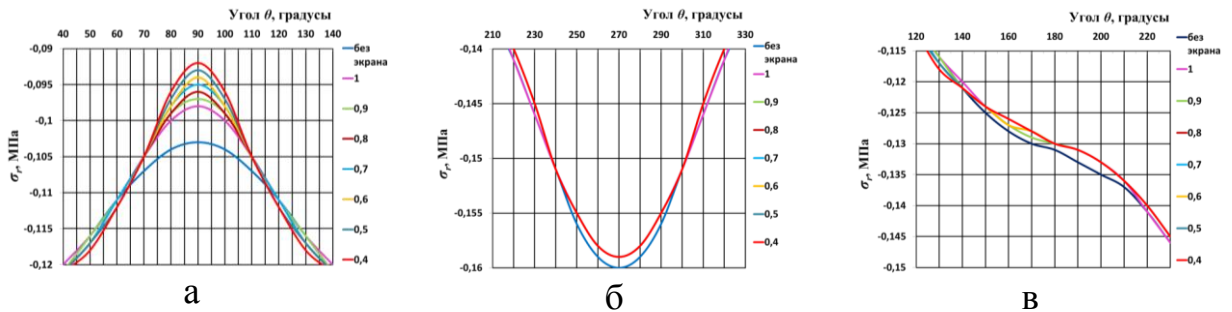


Рисунок 5.12 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки вблизи верхнего (а), нижнего (б) концов вертикального диаметра и в концах горизонтального диаметра (в)

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_{θ} , МПа, возникающих на наружном контуре поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.13.

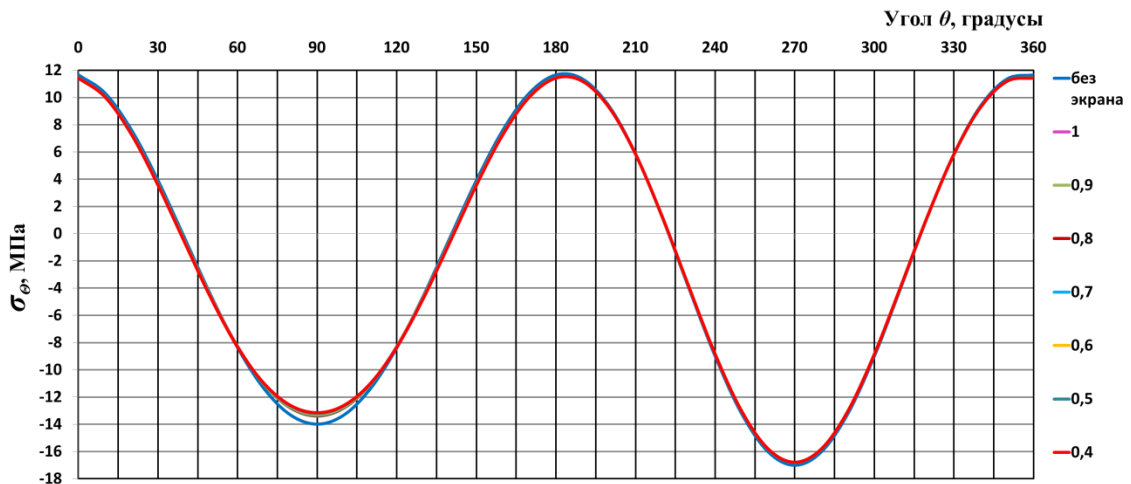


Рисунок 5.13 – Нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре сечения обделки

На рисунке 5.14 приведены фрагменты эпюр вблизи верхнего (рисунок 5.14 а), нижнего (рисунок 5.14 б) концов вертикального диаметра и в концах горизонтального диаметра (рисунок 5.14 в) наружного контура сечения обделки.

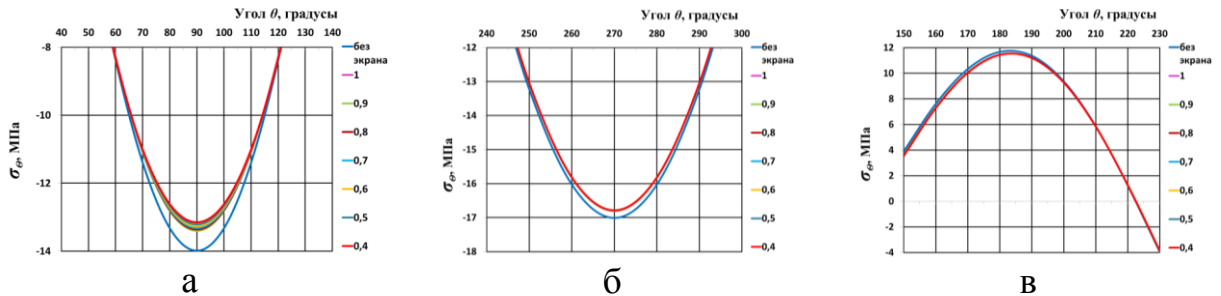


Рисунок 5.14 – Напряжения на наружном контуре обделки вблизи верхнего (а), нижнего (б) концов вертикального диаметра и в концах горизонтального диаметра (в)

Из эпюр, представленных на рисунках 5.13, 5.14, можно сделать вывод о том, что нормальные тангенциальные напряжения σ_{θ} , отвечающие за деформации растяжения-сжатия, в точках наружного контура сечения обделки являются как растягивающими (вблизи концов горизонтального диаметра), так и сжимающими (вблизи концов вертикального диаметра). Максимальные значения растягивающих напряжений достигают достаточно большой для бетона величины $\sim 11,7 \text{ МПа}$, максимальные сжимающие – не более $17,0 \text{ МПа}$. Изменение расстояния от труб экрана до контура выработки не оказывает влияния на напряжения во всех точках наружного контура сечения обделки, за исключением напряжений в своде, которые уменьшаются на 6% при изменении расстояния от 1 м до 0,4 м.

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_{θ} , МПа, возникающих в точках внутреннего контура поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.15.

На рисунке 5.16 приведены фрагменты эпюр вблизи свода (рисунок 5.16 а) и лотка (рисунок 5.16 б) обделки тоннеля.

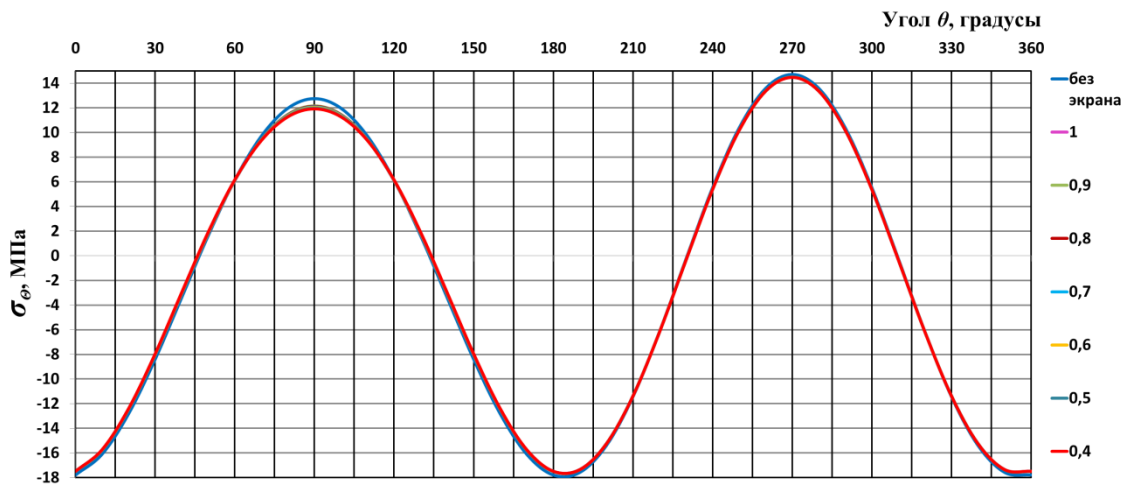


Рисунок 5.15 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре сечения обделки

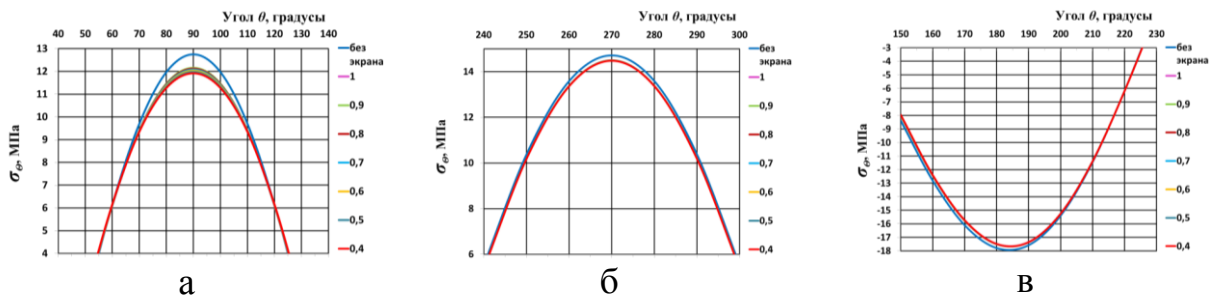


Рисунок 5.16 – Напряжения на внутреннем контуре обделки вблизи свода (а), лотка (б) и боков (в) обделки

Из эпюр, представленных на рисунках 5.15, 5.16, следует, что нормальные тангенциальные напряжения σ_θ в точках внутреннего контура сечения обделки являются как растягивающими (в боках), так и сжимающими (в своде и лотке). Максимальные значения растягивающих напряжений не превышают $\sim 12,0$ МПа, максимальные сжимающие – не более $17,0$ МПа. Изменение расстояния от труб экрана до контура выработки от 1 м до $0,4$ м приводит к снижению напряжений в точках внутреннего контура сечения обделки, наиболее интенсивно (приблизительно на $6,53\%$) это наблюдается в своде обделки.

На рисунках 5.17 – 5.22 представлены эпюры напряжений в массиве грунта и обделке тоннеля при $E_0 = 50$ МПа.

Эпюры радиальных напряжений σ_r , МПа, возникающих в грунте на контуре выработки, приведены на рисунке 5.17.

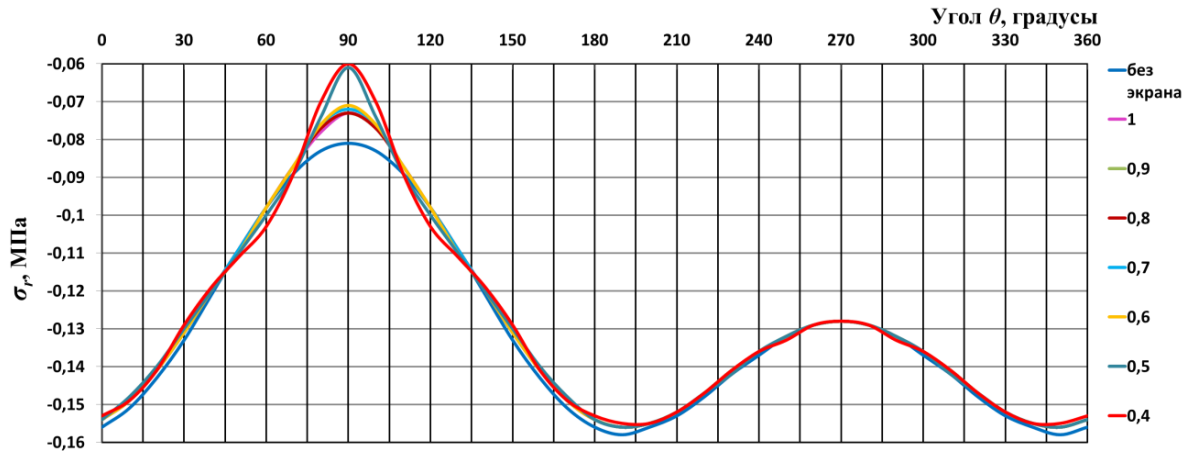


Рисунок 5.17 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки

На рисунке 5.18 приведен фрагмент эпюр напряжений в массиве грунта вблизи свода выработки.

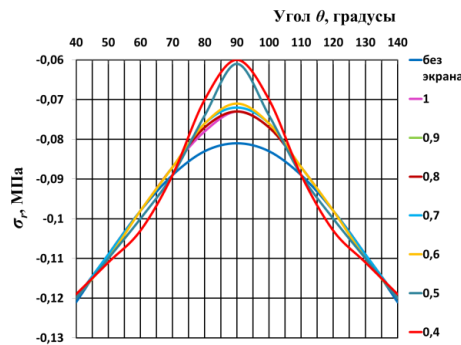


Рисунок 5.18 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки вблизи свода

Эпюры напряжений σ_θ , МПа на наружном контуре поперечного сечения обделки приведены на рисунке 5.19.

На рисунке 5.20 приведены фрагменты эпюр вблизи верхнего конца вертикального диаметра наружного контура сечения обделки.

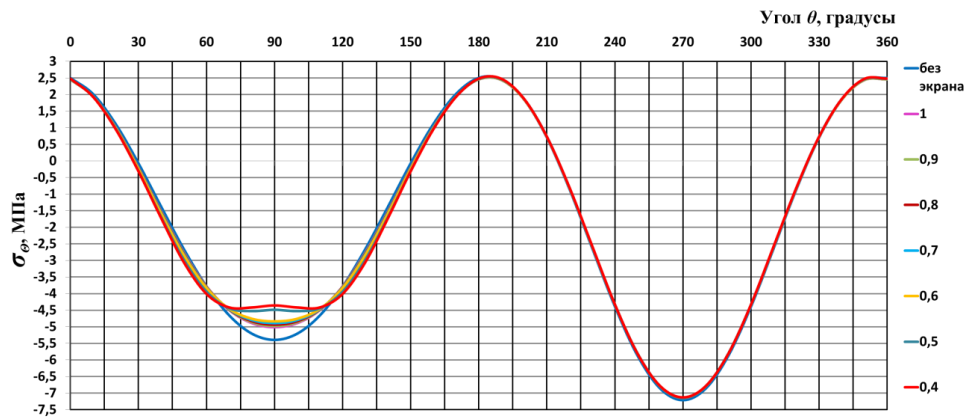


Рисунок 5.19 – Нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре сечения обделки

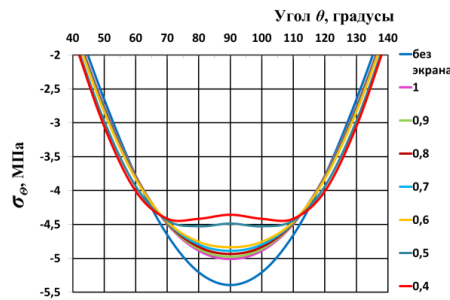


Рисунок 5.20 – Напряжения на наружном контуре обделки вблизи верхнего конца вертикального диаметра

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках внутреннего контура поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.21.

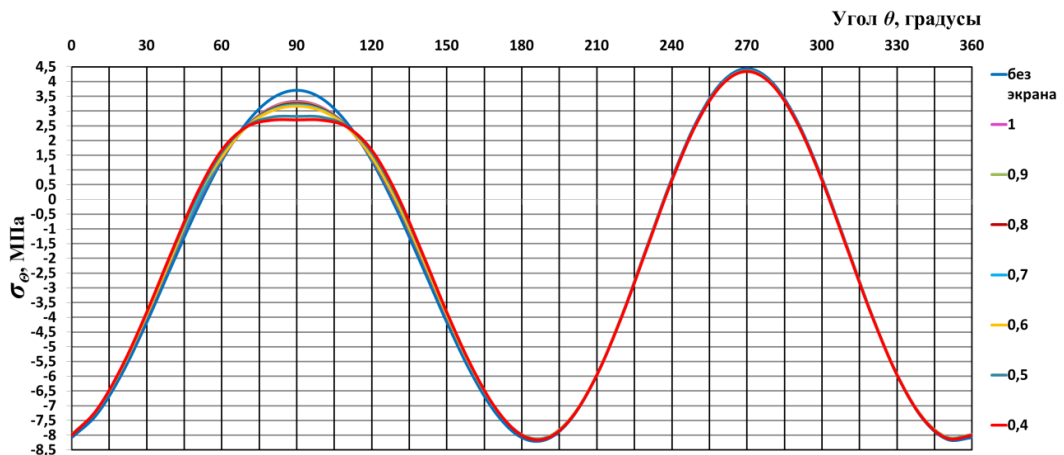


Рисунок 5.21 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре сечения обделки

На рисунке 5.22 приведены эпюры напряжений вблизи свода обделки тоннеля.

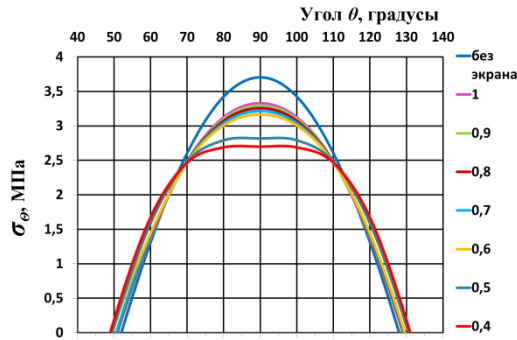


Рисунок 5.22 – Напряжения в своде обделки

На рисунках 5.23 – 5.28 представлены эпюры напряжений в массиве грунта и обделке тоннеля при $E_0 = 150 \text{ МПа}$.

Эпюры радиальных напряжений $\sigma_r, \text{ МПа}$, возникающих в грунте на контуре выработки, приведены на рисунке 5.23.

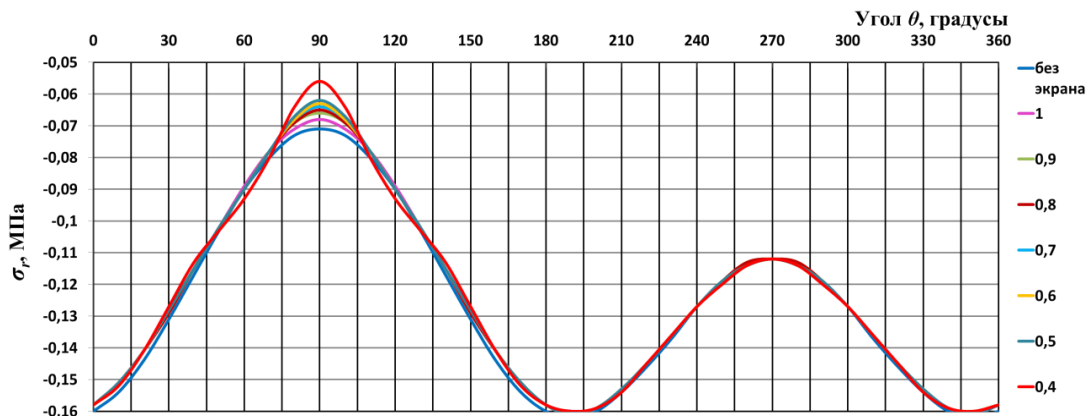


Рисунок 5.23 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки

На рисунке 5.24 приведены фрагменты эпюр напряжений вблизи свода (рисунок 5.24 а), лотка (рисунок 5.24 б) и в боках выработки (рисунок 5.24 в).

Эпюры напряжений $\sigma_\theta, \text{ МПа}$ на наружном контуре поперечного сечения обделки приведены на рисунке 5.25.

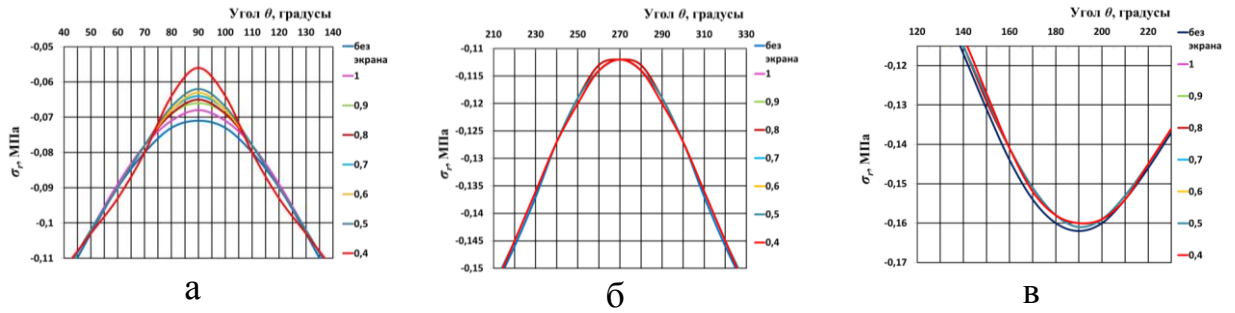


Рисунок 5.24 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки:
а – вблизи свода; б – вблизи лотка; в – в боках

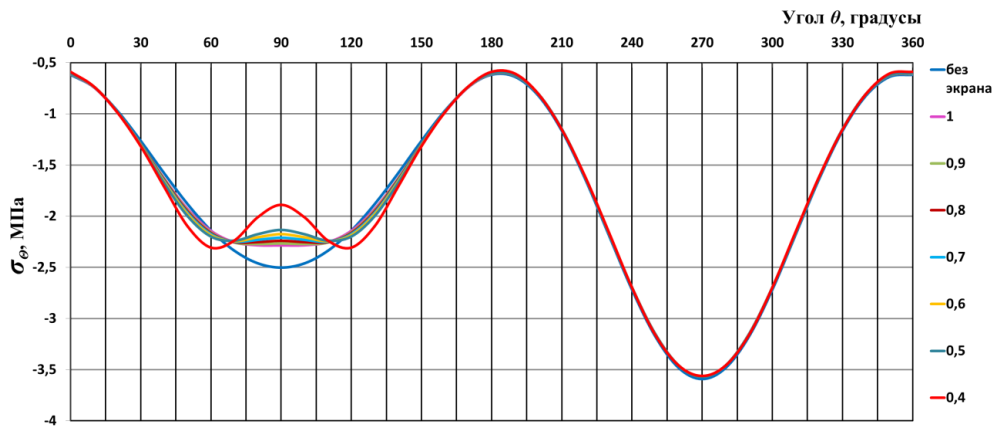


Рисунок 5.25 – Нормальные тангенциальные напряжения
на наружном контуре сечения обделки

На рисунке 5.26 приведены фрагменты эпюр вблизи верхнего (рисунок 5.26 а) и нижнего (рисунок 5.26 б) концов вертикального диаметра наружного контура сечения обделки.

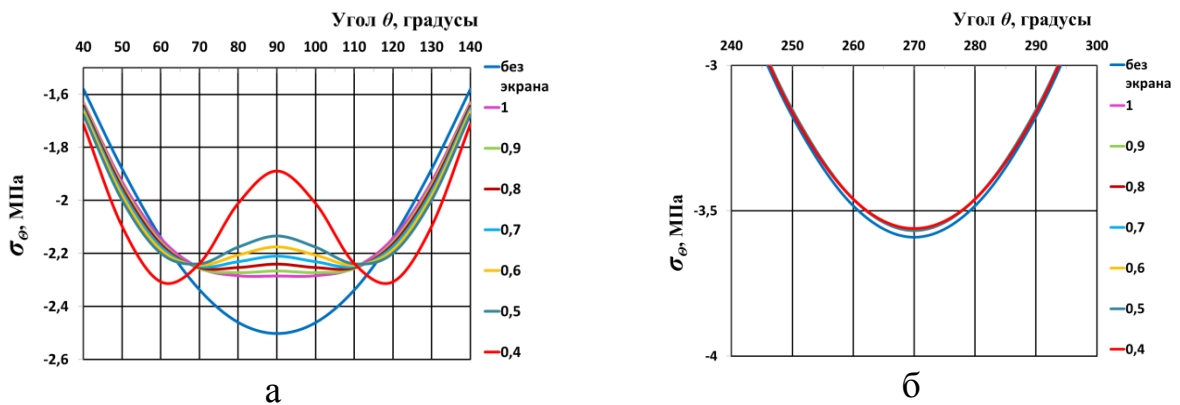


Рисунок 5.26 – Напряжения на наружном контуре обделки
вблизи верхнего (а) и нижнего (б) концов вертикального диаметра

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках внутреннего контура поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.27.

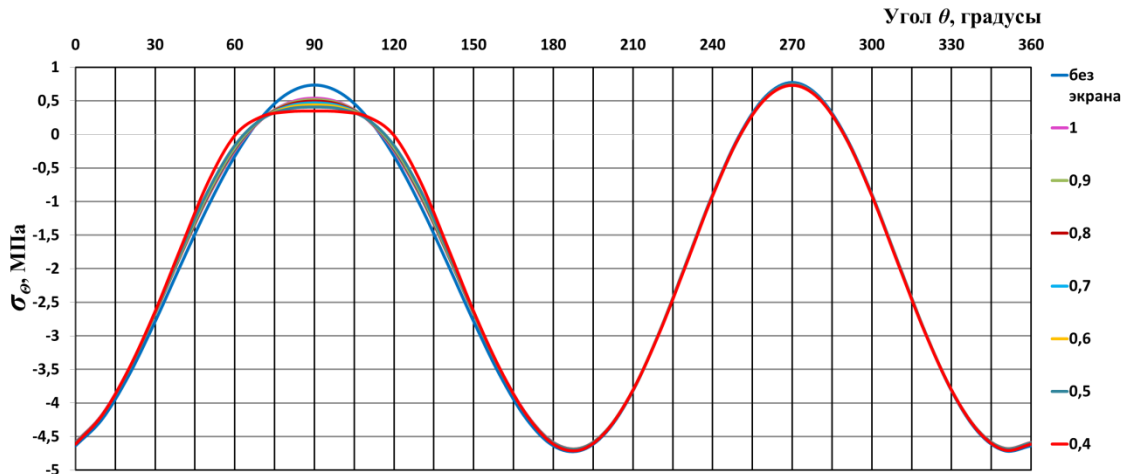


Рисунок 5.27 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре сечения обделки

На рисунке 5.28 приведены эпюры напряжений вблизи свода (а) и лотка (б) обделки тоннеля.

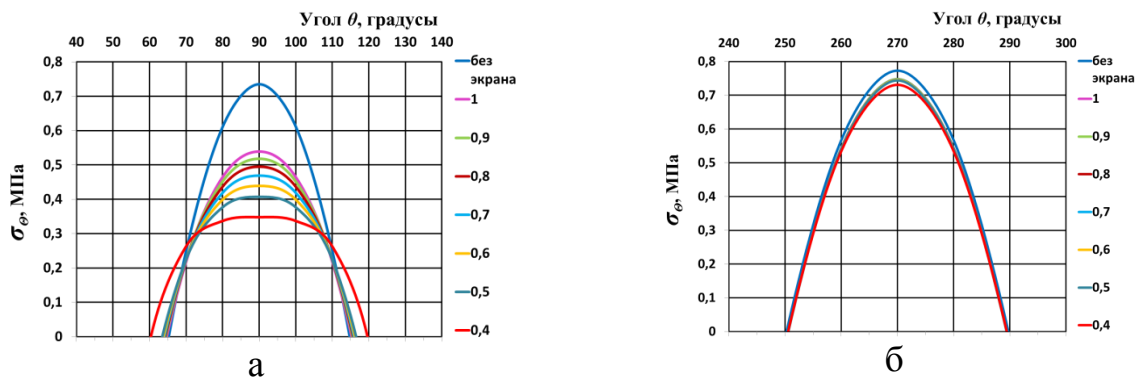


Рисунок 5.28 – Напряжения в своде (а) и лотке (б) обделки

На рисунках 5.29 – 5.35 представлены эпюры напряжений в массиве грунта и обделке тоннеля при $E_0 = 300$ МПа.

Эпюры радиальных напряжений σ_r , МПа, возникающих в грунте на контуре выработки, приведены на рисунке 5.29.

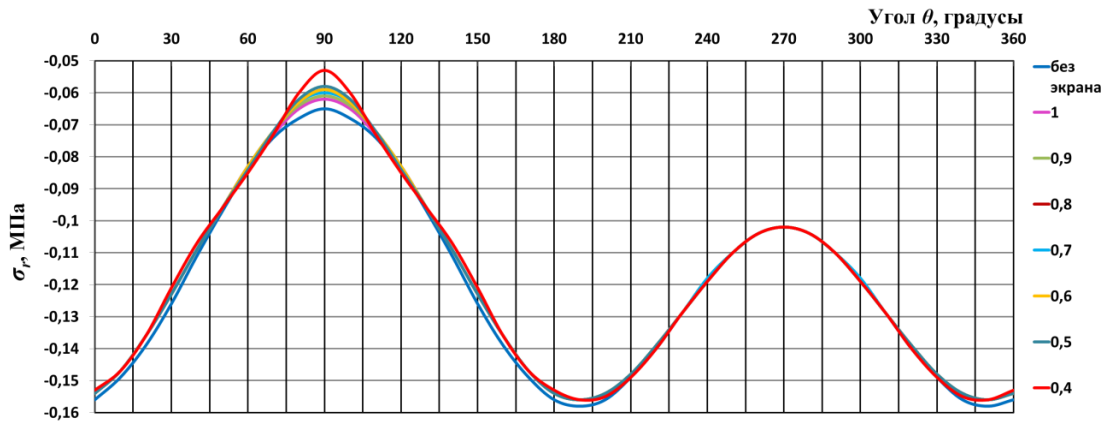


Рисунок 5.29 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки

На рисунке 5.30 приведены фрагменты эпюр напряжений вблизи свода (рисунок 5.30 а), лотка (рисунок 5.30 б) и в боках выработки (рисунок 5.30 в).

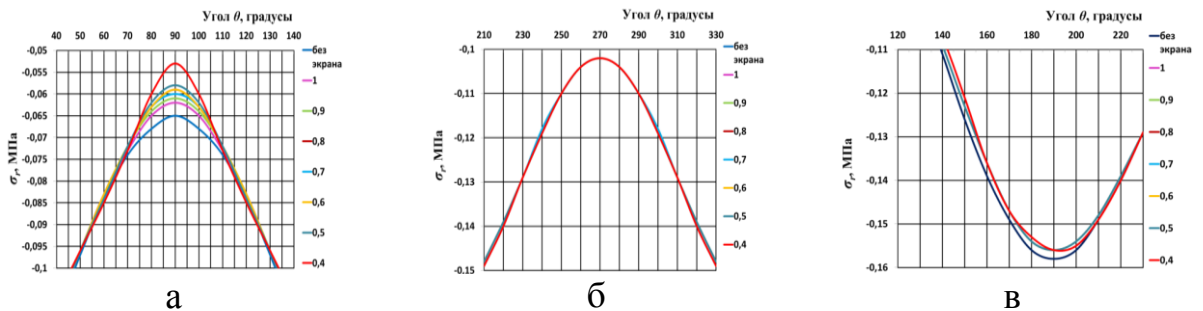


Рисунок 5.30 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки:
а – вблизи свода; б – вблизи лотка; в – в боках

Эпюры напряжений σ_θ , МПа на наружном контуре поперечного сечения обделки приведены на рисунке 5.31.

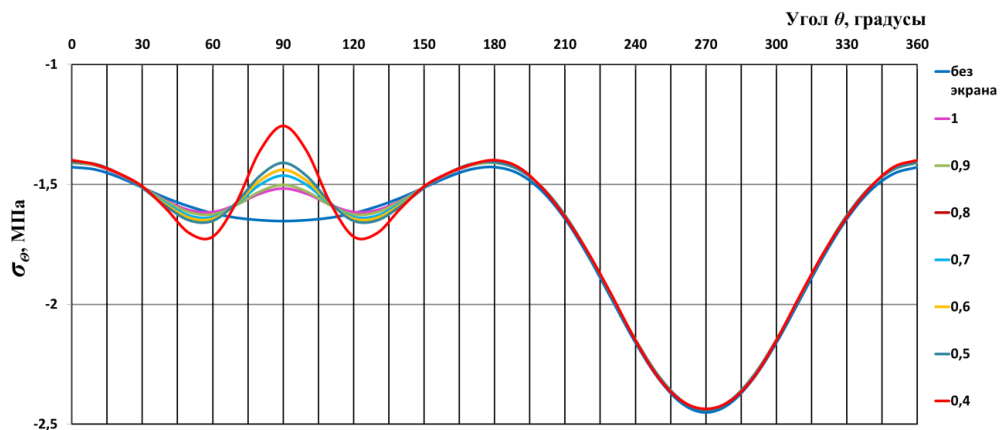


Рисунок 5.31 – Нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре сечения обделки

На рисунке 5.32 приведены фрагменты эпюр вблизи верхнего (рисунок 5.32 а) и нижнего (рисунок 5.32 б) концов вертикального диаметра наружного контура сечения обделки.

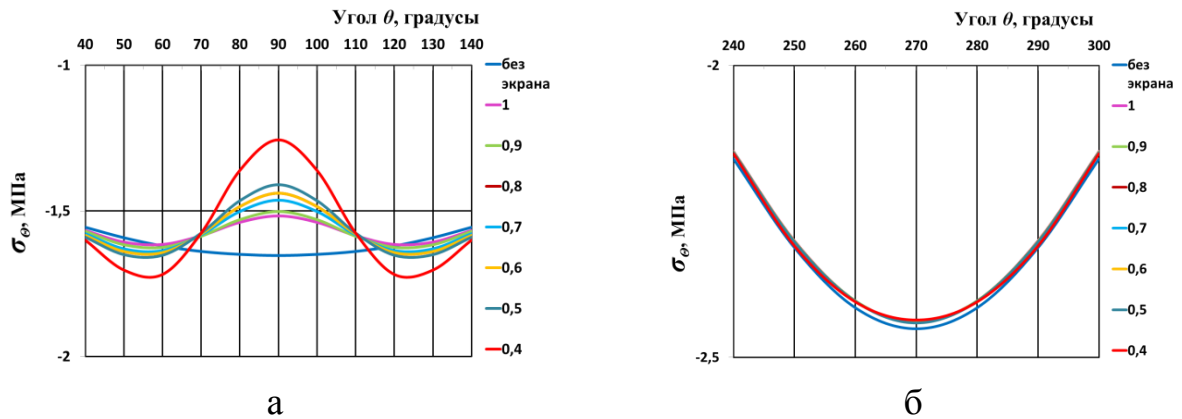


Рисунок 5.32 – Напряжения на наружном контуре обделки вблизи верхнего (а) и нижнего (б) концов вертикального диаметра

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках внутреннего контура поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.33.

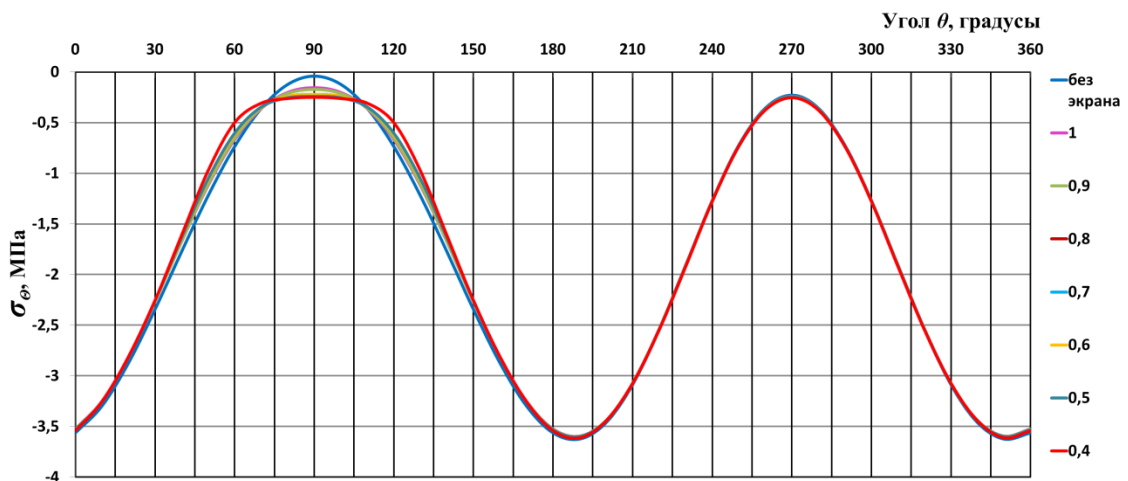


Рисунок 5.33 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре сечения обделки

На рисунке 5.34 приведены эпюры напряжений в своде обделки тоннеля.

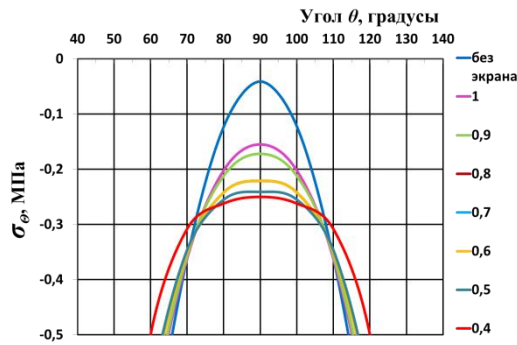


Рисунок 5.34 – Напряжения в своде обделки

На рисунках 5.35 – 5.40 представлены результаты расчетов для обделки тоннеля, сооружаемого в грунте при $E_0 = 12 \text{ МПа}$ и $\lambda = 0,3$.

Эпюры радиальных напряжений $\sigma_r, \text{ МПа}$ в грунте на контуре выработки при различных расстояниях от линии, на которой расположены трубы горизонтального экрана, до свода приведены на рисунке 5.35.

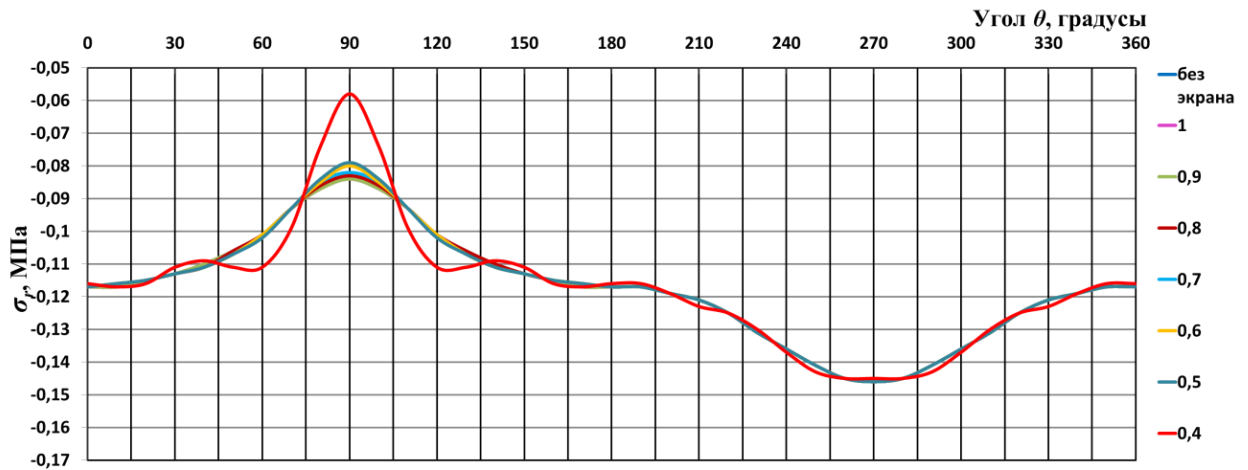


Рисунок 5.35 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки

На рисунке 5.36 приведен фрагмент эпюры радиальных напряжений вблизи свода выработки.

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений $\sigma_\theta, \text{ МПа}$, возникающих на наружном контуре поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.37.

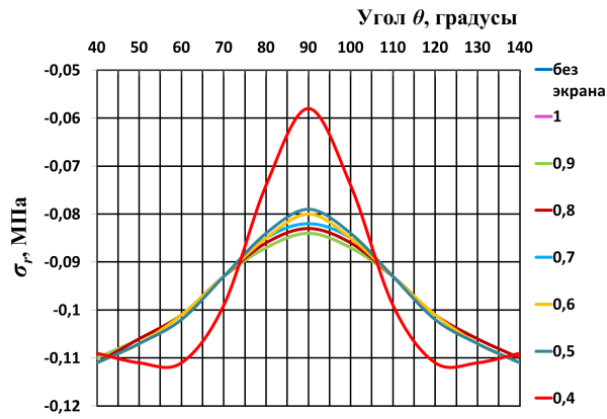


Рисунок 5.36 – Радиальные напряжения в грунте вблизи свода выработки

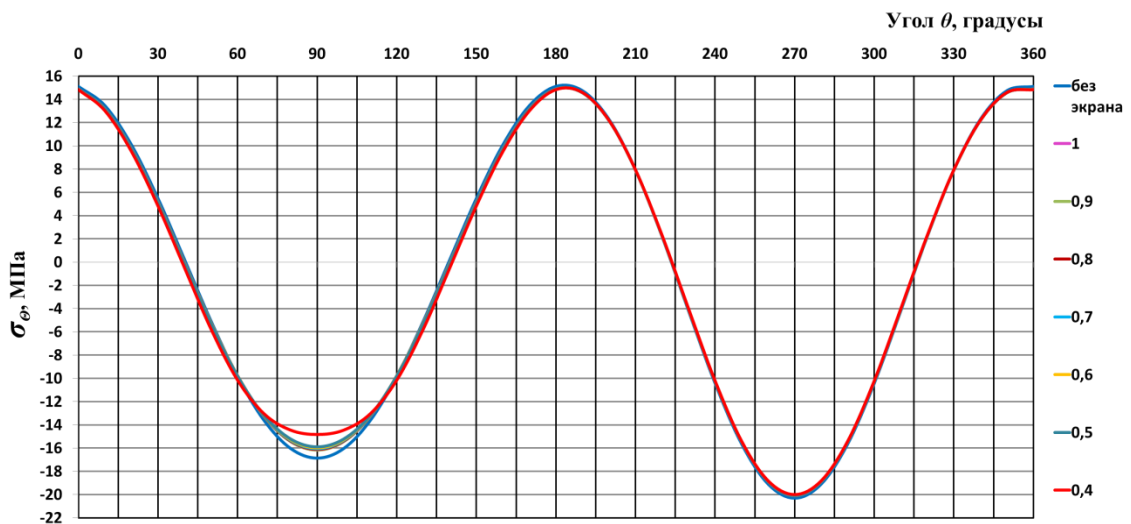


Рисунок 5.37 – Нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре сечения обделки

На рисунке 5.38 приведены фрагменты эпюр вблизи вертикального (рисунок 5.38 а) и горизонтального (рисунок 5.38 б) диаметров наружного контура сечения обделки.

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_{θ} , МПа, возникающих в точках внутреннего контура поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.39.

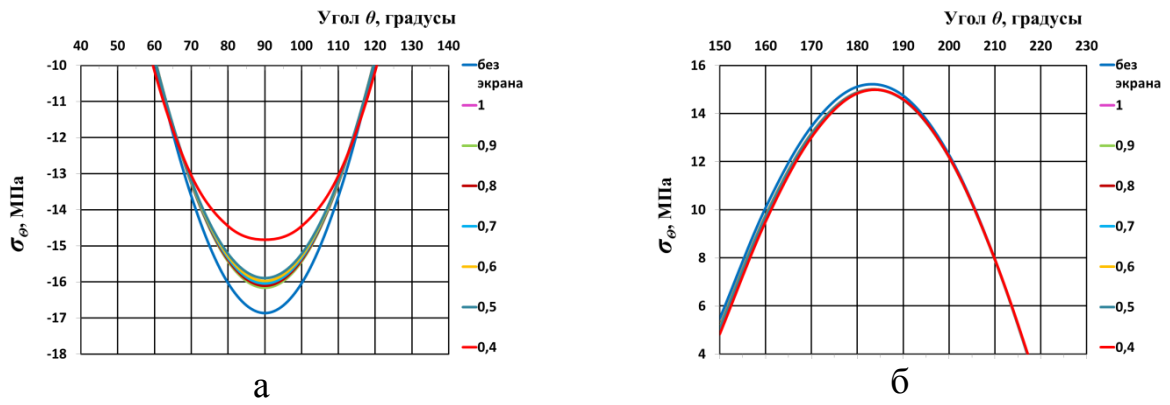


Рисунок 5.38 – Напряжения на наружном контуре обделки вблизи диаметров: а – вертикального; б – горизонтального

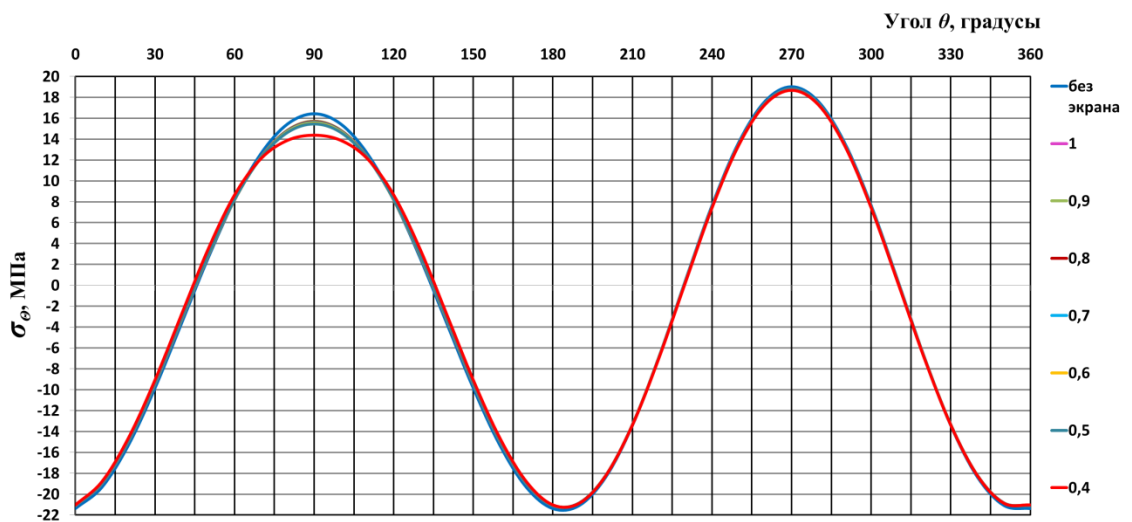


Рисунок 5.39 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре сечения обделки

На рисунке 5.40 приведены фрагменты эпюр вблизи свода обделки.

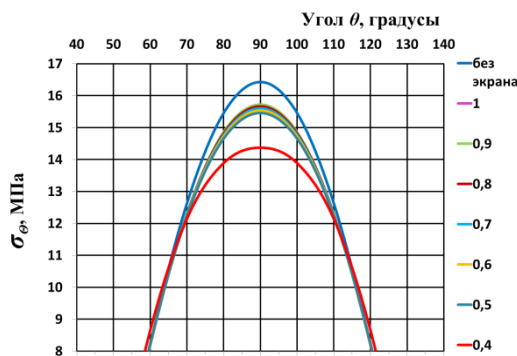


Рисунок 5.40 – Напряжения вблизи свода обделки

5.2.2 Экран из труб, расположенных вокруг выработки по замкнутому контуру

Расчетная схема, использованная при проведении численных исследований, приведена на рисунке 5.5.

Исходные данные, принятые при расчетах, остаются теми же, что и в п. 5.2.1, за исключением количества труб защитного экрана – $N = 36$.

Координаты центров поперечных сечений труб защитного экрана при $\delta = 0,4$ приведены в таблице 5.4.

Таблица 5.4 – Координаты центров поперечных сечений труб

	Трубы защитного экрана								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_j, м$	3,40	3,35	3,20	2,95	2,60	2,19	1,70	1,16	0,59
$y_j, м$	0,0	0,59	1,16	1,70	2,19	2,60	2,95	3,20	3,35

Продолжение таблицы 5.4

Трубы	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x_j, м$	0,0	-0,59	-1,16	-1,70	-2,19	-2,61	-2,95	-3,20	-3,35
$y_j, м$	3,40	3,35	3,20	2,95	2,61	2,19	1,70	1,16	0,59

Продолжение таблицы 5.4

Трубы	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$x_j, м$	-3,40	-3,35	-3,20	-2,95	-2,61	-2,19	-1,70	-1,16	-0,59
$y_j, м$	0,0	-0,59	-1,16	-1,70	-2,19	-2,61	-2,95	-3,20	-3,35

Продолжение таблицы 5.4

Трубы	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$x_j, м$	0,0	0,59	1,16	1,70	2,19	2,61	2,95	3,20	3,35
$y_j, м$	-3,40	-3,35	-3,20	-2,95	-2,61	-2,19	-1,70	-1,16	-0,59

Ниже представлены результаты расчетов для относительно слабых грунтов, характеризующихся модулем деформации $E_0 = 12 \text{ МПа}$ и $\lambda = 0,43$.

Эпюры радиальных напряжений σ_r , МПа, возникающих в грунте на контуре выработки, при различных расстояниях от линии, на которой расположены трубы экрана до контура выработки, приведены на рисунке 5.41.

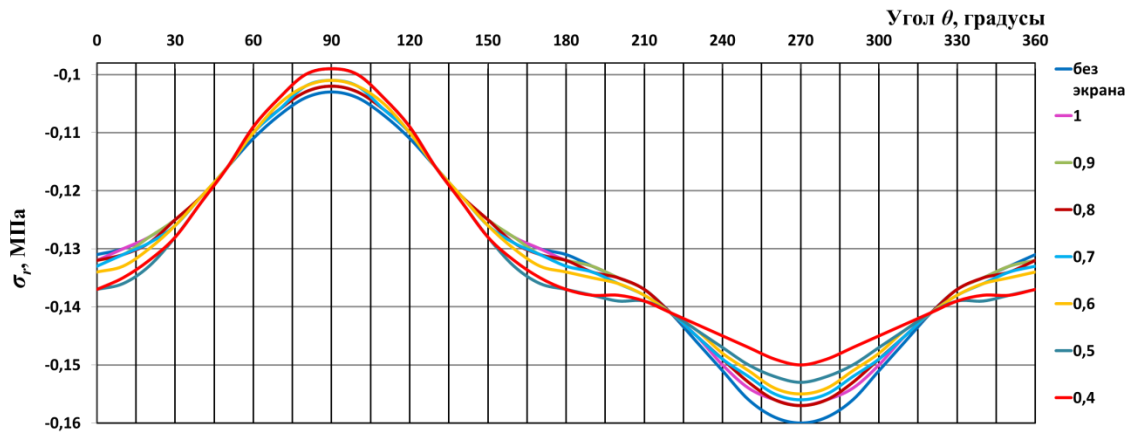


Рисунок 5.41– Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки

На рисунке 5.42 приведены фрагменты эпюр напряжений в массиве грунта - вблизи верхнего (рисунок 5.42 а), нижнего (рисунок 5.42 б) концов вертикального диаметра сечения выработки, а также горизонтального диаметра (рисунок 5.42 в).

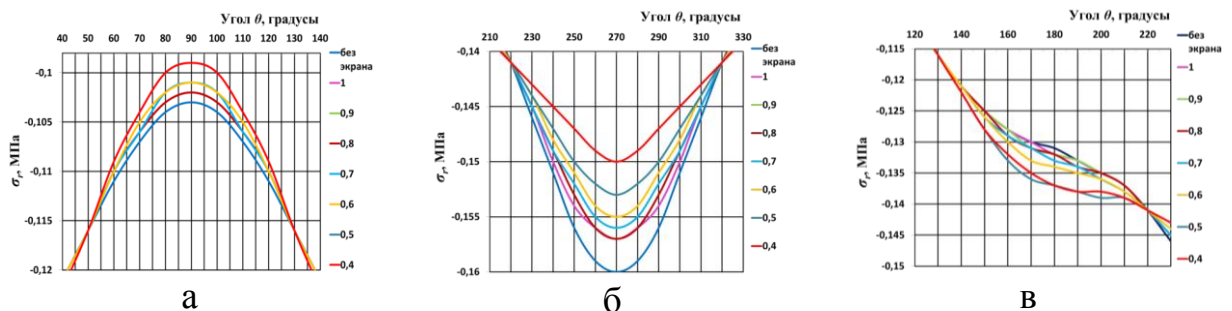


Рисунок 5.42 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки вблизи верхнего (а), нижнего (б) концов вертикального диаметра и в концах горизонтального диаметра (в)

Из рисунков 5.41, 5.42 следует, что радиальные напряжения σ_r в точках контура выработки являются сжимающими. Указанные напряжения вблизи верхней точки вертикального диаметра сечения выработки уменьшаются по абсолют-

ной величине от 0,103 МПа до 0,098 МПа, максимальные напряжения возникают в лотке выработки и составляют $\sim -0,16$ МПа.

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих на наружном контуре поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.43.

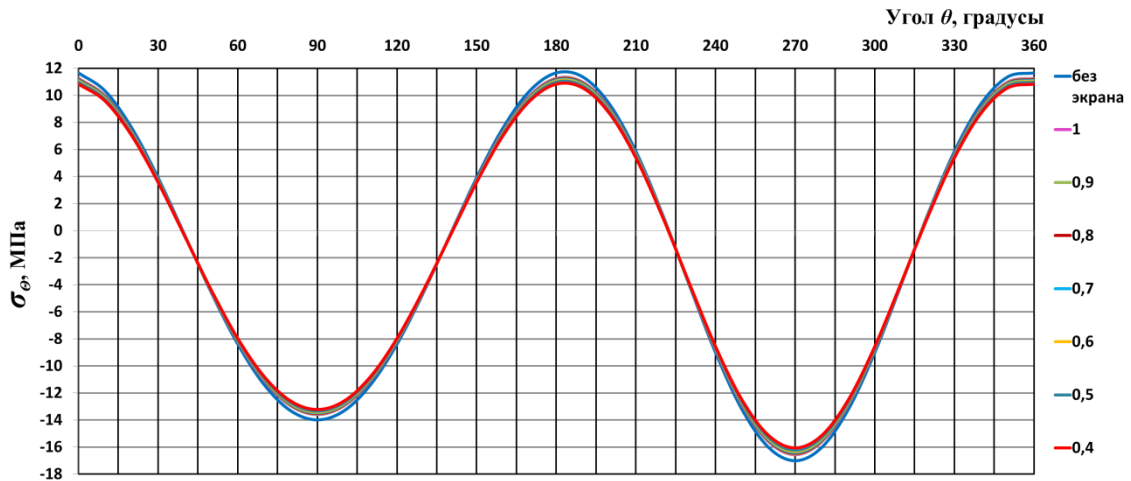


Рисунок 5.43 – Нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре сечения обделки

На рисунке 5.44 приведены фрагменты эпюр вблизи верхнего (рисунок 5.44 а), нижнего (рисунок 5.44 б) концов вертикального диаметра и в концах горизонтального диаметра (рисунок 5.44 в) наружного контура сечения обделки.

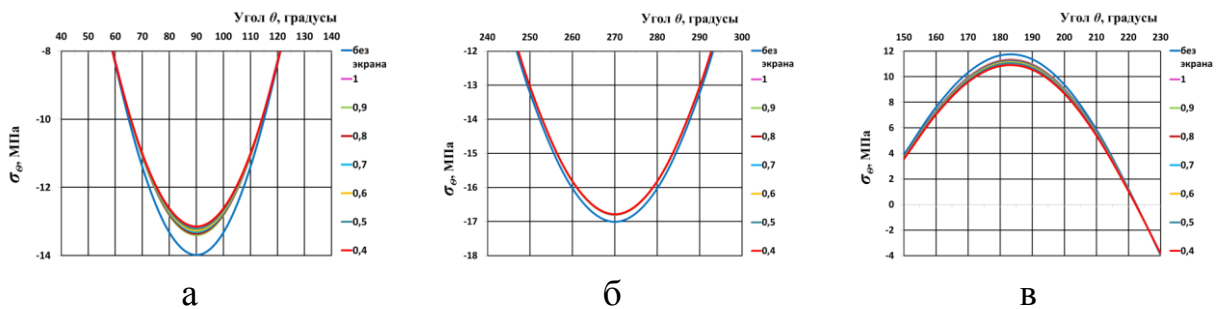


Рисунок 5.44 – Напряжения на наружном контуре обделки вблизи верхнего (а), нижнего (б) концов вертикального диаметра и в концах горизонтального диаметра (в)

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках внутреннего контура поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.45.

На рисунке 5.46 приведены фрагменты эпюр вблизи свода (рисунок 5.46 а), лотка (рисунок 5.46 б) и боков (рисунок 5.46 в) обделки тоннеля.

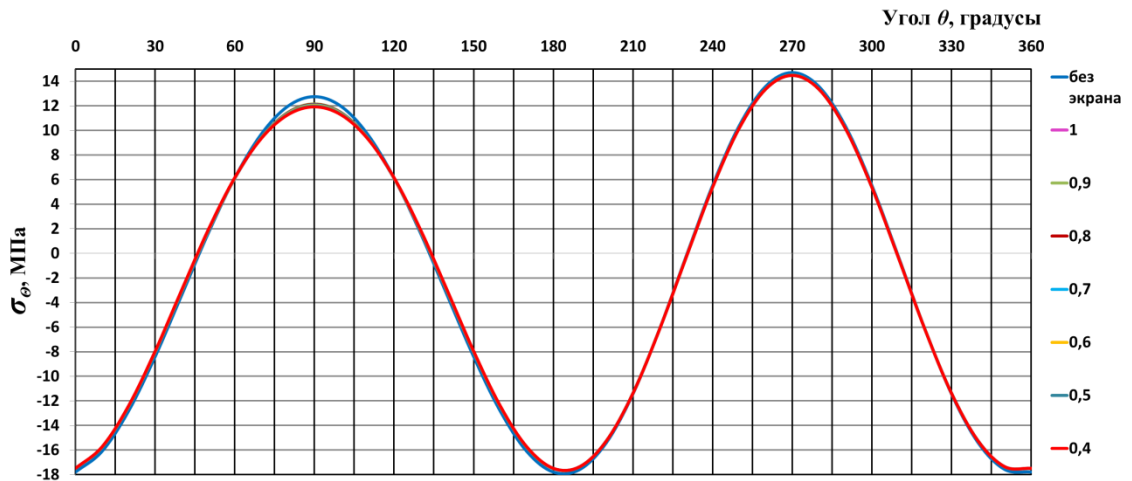


Рисунок 5.45 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре сечения обделки

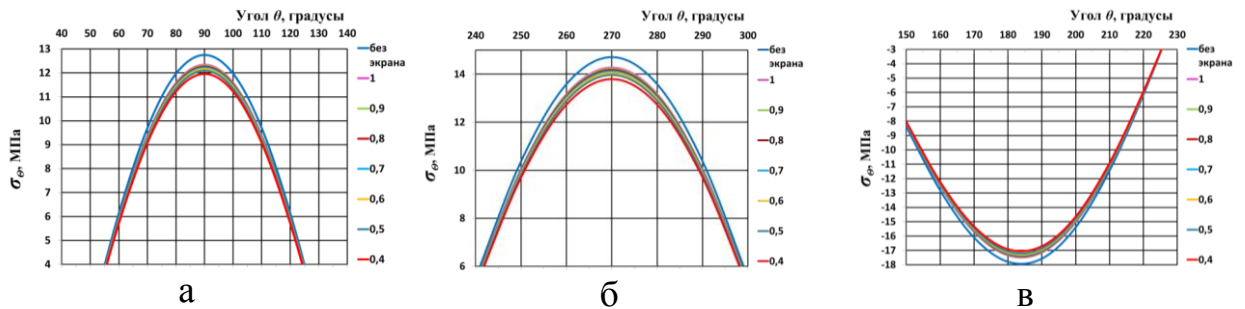


Рисунок 5.46 – Напряжения на внутреннем контуре обделки вблизи: а – свода; б – лотка; в – боков

5.2.3 Зависимости напряжений в грунте и обделке тоннеля при П-образной форме защитного экрана

Расчетная схема, использованная при проведении численных исследований, приведена на рисунке 5.8 б.

Таблица 5.7 – Координаты центров поперечных сечений труб
на левом вертикальном участке экрана

	Трубы защитного экрана										
	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
$x_j, м$	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40
$y_j, м$	3,40	3,08	2,76	2,44	2,12	1,80	1,48	1,16	1,84	0,52	0,20

Продолжение таблицы 5.7

Трубы	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
$x_j, м$	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40	-3,40
$y_j, м$	-0,12	-0,44	-0,76	-1,08	-1,40	-1,72	-2,04	-2,36	-2,68	-3,0

Ниже представлены результаты расчетов для грунтов, характеризующихся модулем деформации $E_0 = 12 \text{ МПа}$ и $\lambda = 0,43$.

Эпюры радиальных напряжений $\sigma_r, \text{ МПа}$, возникающих в грунте на контуре выработки, при различных расстояниях от линии, на которой расположены трубы экрана до контура выработки, приведены на рисунке 5.47.

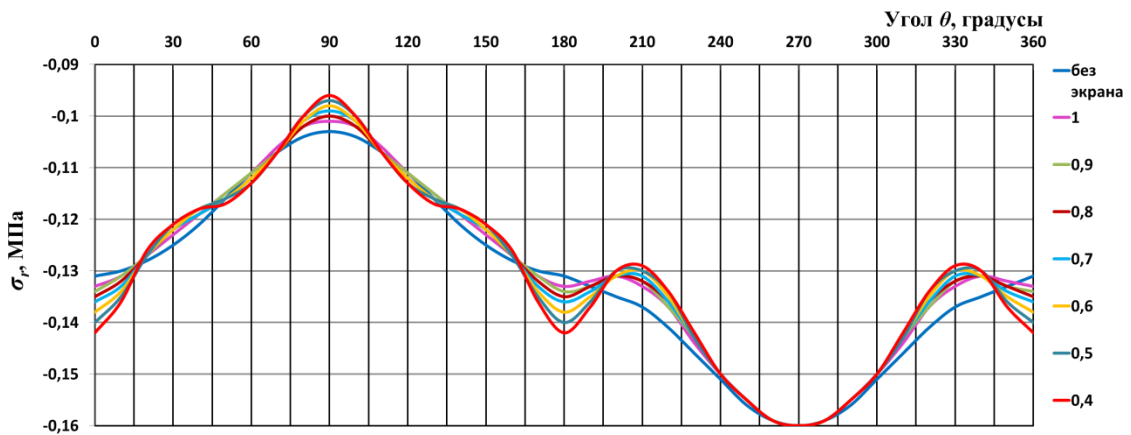


Рисунок 5.47 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки

На рисунке 5.48 приведены фрагменты эпюр напряжений в массиве грунта – вблизи верхнего (рисунок 5.48 а), нижнего (рисунок 5.48 б) концов вертикального диаметра сечения выработки, а также горизонтального диаметра (рисунок 5.48 в).

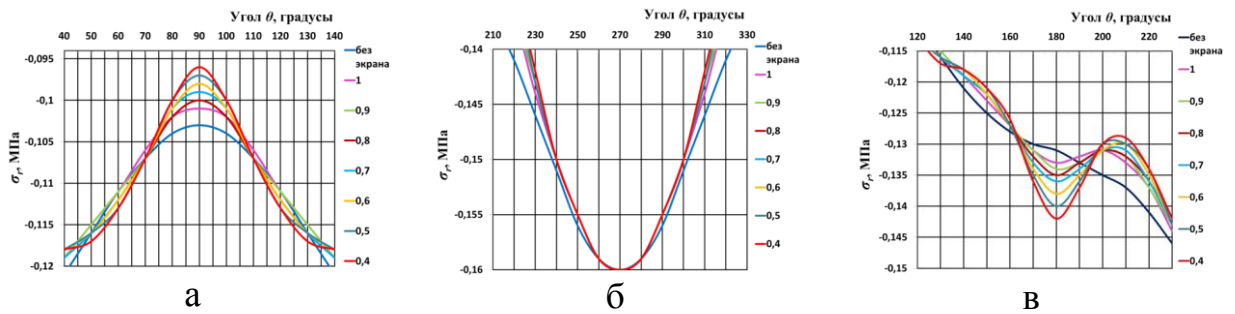


Рисунок 5.48 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки вблизи верхнего (а), нижнего (б) концов вертикального диаметра и в концах горизонтального диаметра (в)

Из рисунков 5.47, 5.48 следует, что радиальные напряжения σ_r в точках контура выработки являются сжимающими. Указанные напряжения вблизи верхней точки вертикального диаметра сечения выработки уменьшаются по абсолютной величине от 0,103 МПа до 0,96 МПа, максимальные напряжения возникают в лотке выработки, где защитный экран не оказывает существенного влияния, и составляют $\sim -0,16$ МПа. В боках наличие близкорасположенных труб экрана приводит к увеличению напряжений от 0,131 МПа до 0,142 МПа.

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих на наружном контуре поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.49.

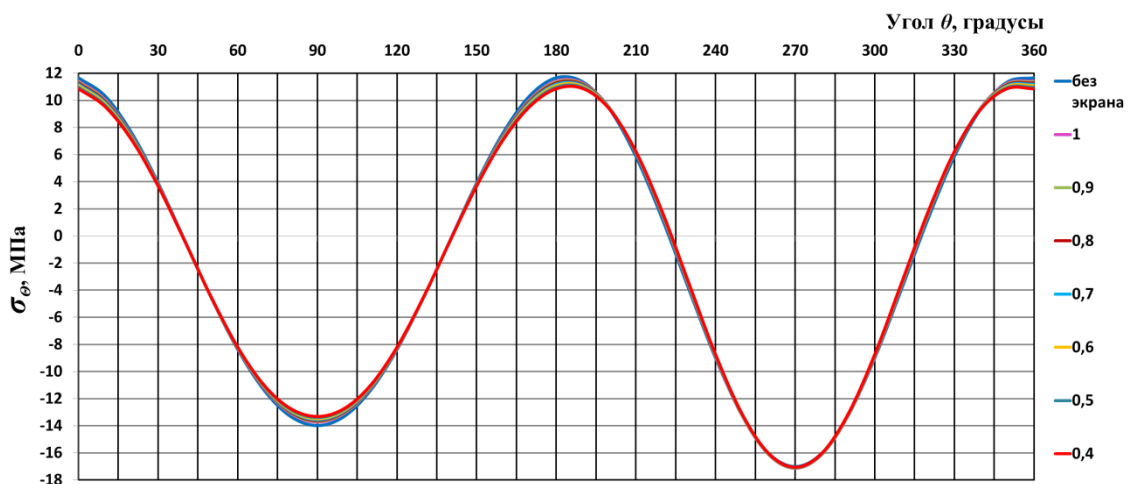


Рисунок 5.49 – Нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре сечения обделки

На рисунке 5.50 приведены фрагменты эпюр вблизи верхнего (рисунок 5.50 а), нижнего (рисунок 5.50 б) концов вертикального диаметра и в концах горизонтального диаметра (рисунок 5.50 в) наружного контура сечения обделки.

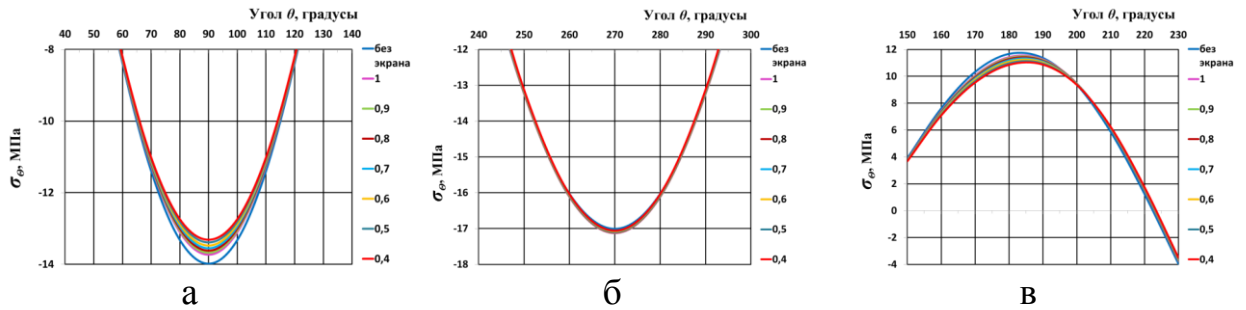


Рисунок 5.50 – Напряжения на наружном контуре обделки вблизи верхнего (а), нижнего (б) концов вертикального диаметра и в концах горизонтального диаметра (в)

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках внутреннего контура поперечного сечения обделки, при различных расстояниях до труб экрана приведены на рисунке 5.51.

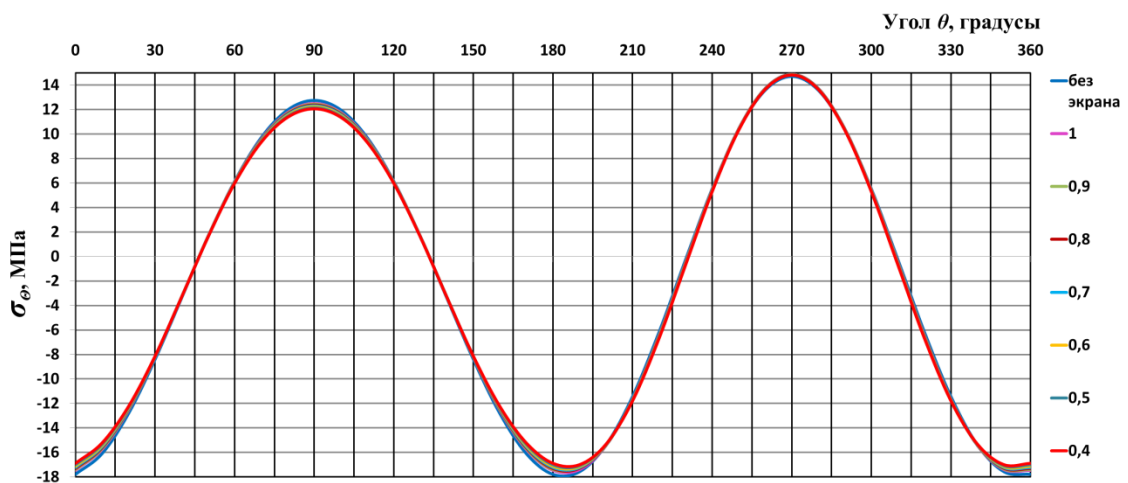


Рисунок 5.51 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре сечения обделки

На рисунке 5.52 приведены фрагменты эпюр вблизи свода (рисунок 5.52 а), лотка (рисунок 5.52 б) и боков (рисунок 5.52 в) обделки тоннеля.

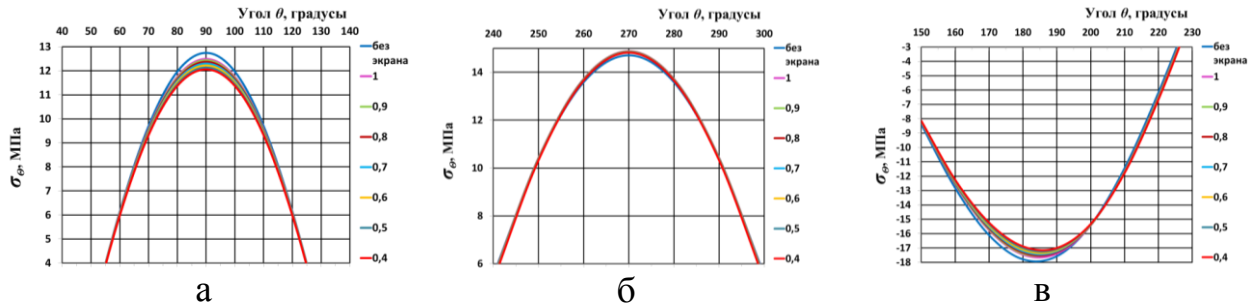


Рисунок 5.52 – Напряжения на внутреннем контуре обделки

вблизи: а – свода; б – лотка; в – боков

Из эпюр, представленных на рисунках 5.49, 5.52, следует, что возникающие при нормальные тангенциальные напряжения σ_θ , в точках наружного контура сечения обделки вблизи свода – сжимающие (-14 МПа), вблизи концов горизонтального диаметра – растягивающие ($11,7$ МПа). В точках внутреннего контура в своде – значительные для бетона растягивающие (12 МПа), в боках – сжимающие (18 МПа) напряжения. При применении защитного экрана из труб напряжения σ_θ снижаются на 5–7% в своде и в боках, как на внутреннем контуре, так и на наружном. На напряжения σ_θ в лотке применение защитного экрана существенного влияния не оказывает.

5.2.4 Сравнение влияния различных форм защитного экрана на напряженное состояние массива грунта и обделки тоннеля

На рисунках 5.53, 5.54 представлены результаты определения напряженного состояния массива грунта – эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа – на контурах незакрепленных выработок, сооружаемых в грунтах с модулем деформации $E_0 = 300$ МПа и коэффициентом Пуассона – $\nu = 0,3$, при отсутствии экрана и при его различных формах – плоской, по всему контуру выра-

ботки и П-образной. Коэффициент бокового давления в ненарушенном массиве $\lambda = 0,43$; расстояние от контура выработки до линии, на которой расположены центры труб защитного экрана $\delta = 0,4$ м. Аналогичные результаты для незакрепленной выработки, пройденной под защитой экранов различных форм, были получены и для грунтов с модулем деформации $E_0 = 12$ МПа, 50 МПа, 150 МПа при $\lambda = 0,43$.

Как следует из представленных на рисунке 5.53 эпюр, в точках контура выработки напряжения σ_θ являются сжимающими.

Напряжения, минимальные по абсолютной величине, возникают на контуре вблизи свода выработки (рисунок 5.54 а): при отсутствии защитного экрана $\sigma_\theta = -0,022$ МПа; при использовании защитного экрана, расположенного по контуру выработки, напряжения увеличиваются на 27%, а при использовании плоского или П-образного экрана – увеличиваются в 1,5 раза. При использовании плоского или П-образного экрана вблизи свода выработки установлены радиальные сечения при $\theta = 80^\circ$ (с учетом симметрии $\theta = 100^\circ$), в которых напряжения σ_θ уменьшаются по модулю до величин $-0,002$ МПа.

В лотке выработки (рисунок 5.54 б) влияние плоского экрана весьма незначительно; экран, расположенный по контуру выработки, увеличивает напряжения приблизительно на 18%; П-образный экран снижает напряжения на 7,6%.

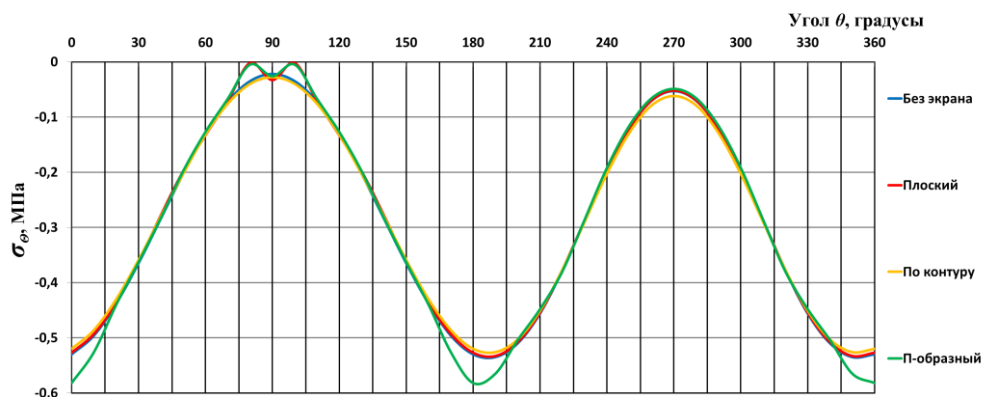


Рисунок 5.53 – Нормальные тангенциальные напряжения в грунте на контуре выработки при модуле деформации грунта $E_0 = 300$ МПа

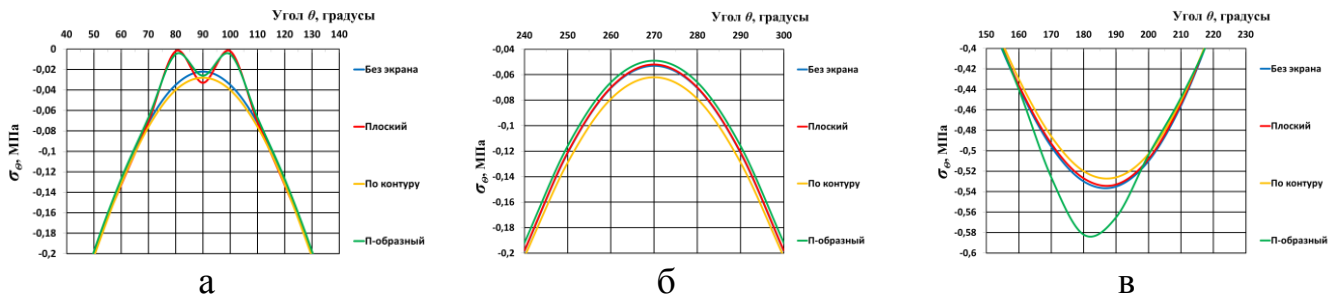
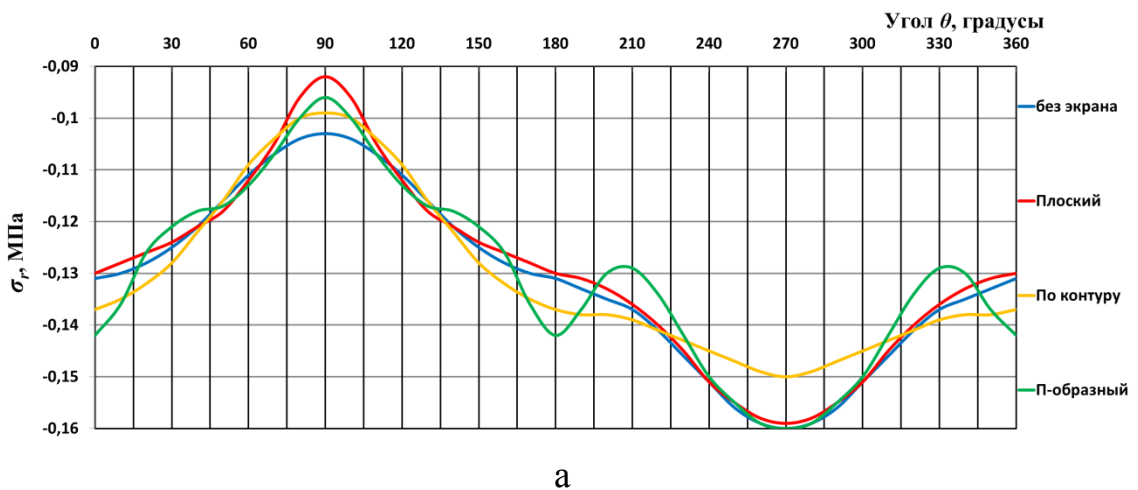


Рисунок 5.54 – Нормальные тангенциальные напряжения в грунте на контуре выработки: а – в своде, б – в лотке; в – в боках при $E_0 = 300 \text{ МПа}$

Необходимо отметить, что в боках неподкрепленной выработки (рисунок 5.54 в) в радиальных сечениях, определяемых углами θ в диапазоне от 150° до 225° , возникают максимальные по абсолютной величине значения напряжений σ_θ . Применение плоского защитного экрана или экрана, расположенного по контуру выработки, приводит к незначительному снижению напряжений (не более 2%), а П-образного экрана – к увеличению на 9,8% по сравнению с соответствующими напряжениями на контуре выработки, пройденной без применения экрана.

Эпюры радиальных напряжений σ_r , МПа, возникающих в грунте на контуре выработки, для различных форм экрана приведены на рисунке 5.55.



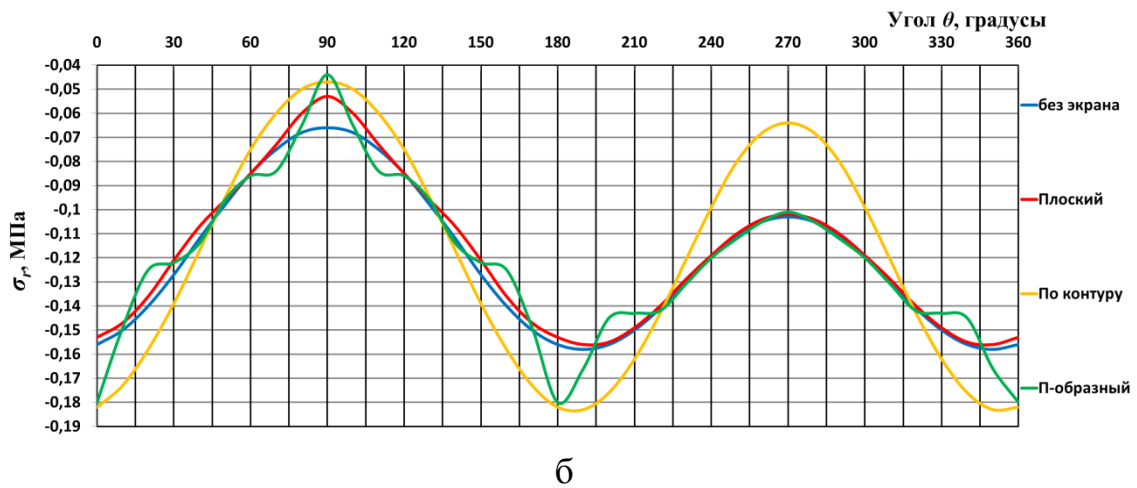


Рисунок 5.55 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки при модуле деформации грунта: а – $E_0 = 12$ МПа; б – $E_0 = 300$ МПа

На рисунках 5.55 – 5.63 представлены результаты определения напряжений σ_r в массиве грунта на контурах выработок и напряжений σ_θ в поперечных сечениях обделок тоннелей при отсутствии экрана и при его различных формах – плоской, по всему контуру выработки и П-образной, сооружаемых в слабых ($E_0 = 12$ МПа) и относительно прочных ($E_0 = 300$ МПа) грунтах; коэффициент Пуассона – $\nu = 0,3$, коэффициент бокового давления в ненарушенном массиве $\lambda = 0,43$ при минимальном расстоянии до центров труб экрана $\delta = 0,4$ м.

Как следует из представленных на рисунках 5.55 а, б эпюр, при отсутствии защитного экрана максимальные значения радиальных напряжений σ_r , не превышающие $-0,16$ МПа (по абсолютной величине), возникают в грунте с модулем деформации $E_0 = 12$ МПа в нижней части поверхности выработки; в своде выработки напряжения составляют $-0,103$ МПа; в боках выработки – $-0,133$ МПа. В грунте с модулем деформации $E_0 = 300$ МПа максимальные радиальные напряжения $\sigma_r = -0,158$ МПа возникают в боках выработки, при этом в нижней части выработки напряжения не превышают величины $-0,103$ МПа (по абсолютной величине). В своде выработки радиальные напряжения составляют $-0,066$ МПа.

На рисунках 5.56, 5.57 приведены фрагменты эпюр напряжений в массиве грунта – вблизи верхнего (рисунок 5.56 а, 5.57 а), нижнего (рисунок 5.56 б, 5.57 б) концов вертикального диаметра сечения выработки, а также горизонтального диаметра (рисунки 5.56 в, 5.57 в) при модуле деформации грунта $E_0 = 12 \text{ МПа}$ и $E_0 = 300 \text{ МПа}$.

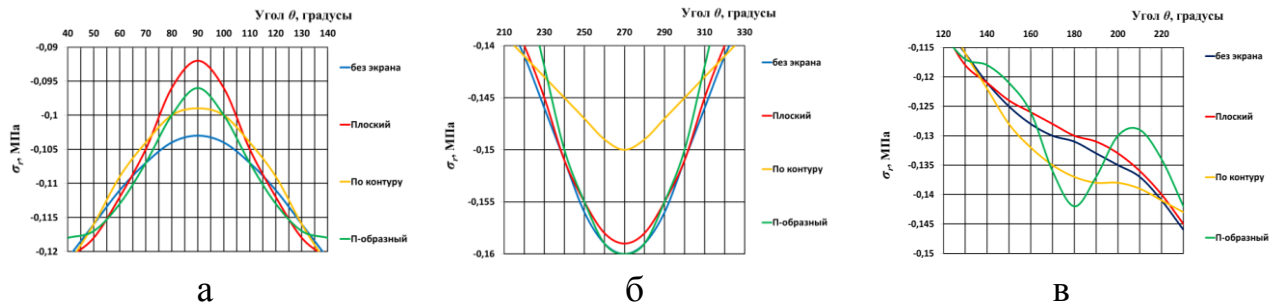


Рисунок 5.56 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки при $E_0 = 12 \text{ МПа}$: а – вблизи верхнего, б – нижнего концов вертикального диаметра, в – на концах горизонтального диаметра

Сооружение тоннеля с применением защитного экрана в слабых грунтах (рисунок 5.56 а), характеризующихся модулем деформации $E_0 = 12 \text{ МПа}$, приводит к снижению радиальных напряжений в своде выработки на 9,7% при плоском, на 6,8% – при П-образном и на 4,9% для экрана, расположенного по всему контуру выработки. В нижней части поверхности выработки (рисунок 5.56 б) радиальные напряжения уменьшаются при использовании экрана, расположенного по всему контуру выработки, не менее чем на 6,3%, влияние экранов остальных форм не существенно. В боках выработки (рисунок 5.56 в) влияние формы экрана (плоского или расположенного по всему контуру) незначительно, за исключением П-образного экрана, который приводит к увеличению радиальных напряжений на 7,7%.

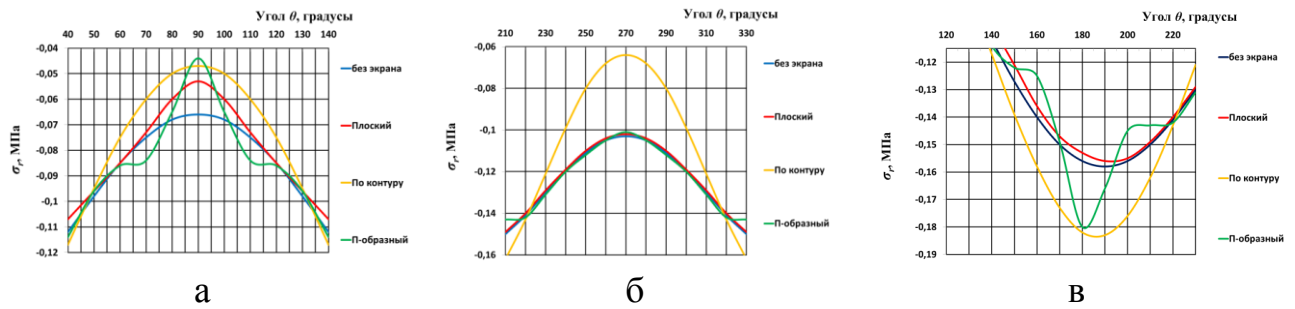


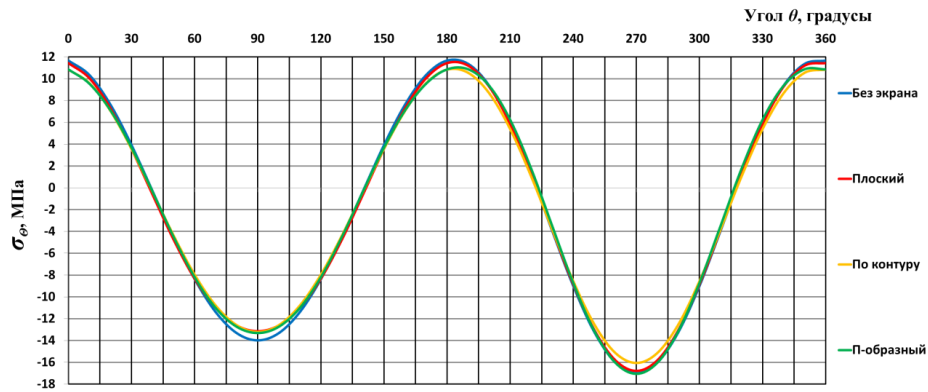
Рисунок 5.57 – Радиальные напряжения в грунте на контуре выработки при $E_0 = 300 \text{ МПа}$: а – вблизи верхнего, б – нижнего концов вертикального диаметра, в – на концах горизонтального диаметра

Сооружение тоннеля с применением защитного экрана в грунтах с модулем деформации $E_0 = 300 \text{ МПа}$ (рисунок 5.55 б) приводит к снижению радиальных напряжений в своде выработки (рисунок 5.57 а) на 19,4% при плоском, на 34,3% – при П-образном и на 28,4% для экрана, расположенного по всему контуру выработки. Экран, расположенный по контуру выработки, в отличие от плоского и П-образного, приводит к существенному уменьшению радиальных напряжений в грунте в нижней части выработки (рисунок 5.57 б), оно составляет не менее 7,7%. При использовании экрана, расположенного по всему контуру выработки, в ее нижней части радиальные напряжения уменьшаются на 6,3%, влияние экранов остальных форм не существенно. На радиальные напряжения в боках выработки (рисунок 5.57 в) наиболее существенное влияние оказывает экран, расположенного по всему контуру, их увеличение составляет не менее 16,5%; плоский экран приводит к незначительному уменьшению (не более 1,3%) напряжений.

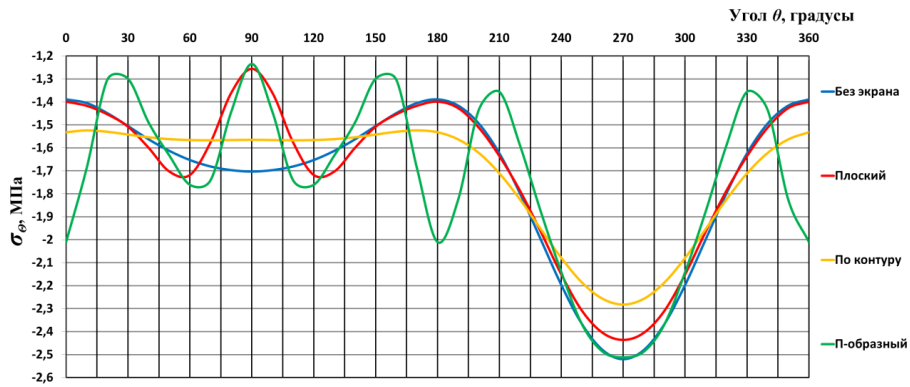
Эпюры нормальных тангенциальных напряжений $\sigma_\theta, \text{ МПа}$, возникающих на наружном контуре обделки, для различных форм экрана приведены на рисунках 5.58 а, б.

На рисунках 5.59, 5.60 приведены фрагменты эпюр напряжений на наружном контуре сечения обделки – вблизи свода (рисунки 5.59 а, 5.60 а), лотка (ри-

сунки 5.59 б, 5.60 б), а также боков (рисунки 5.59 в, 5.60 в) при модуле деформации грунта $E_0 = 12 \text{ МПа}$ и $E_0 = 300 \text{ МПа}$ соответственно.

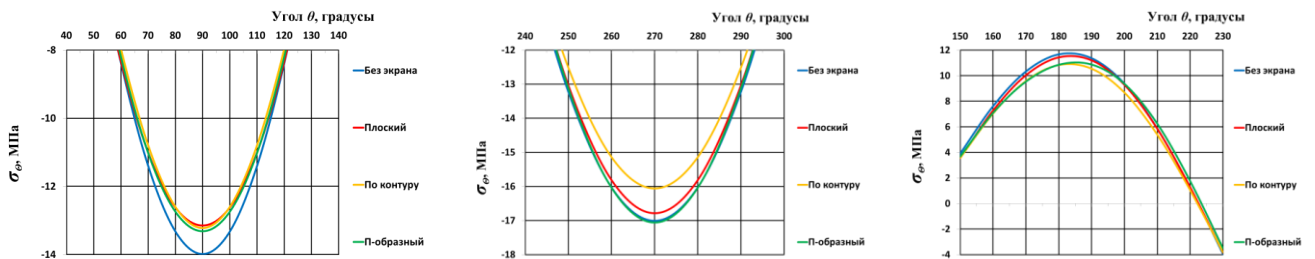


а



б

Рисунок 5.58 – Нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре обделки: а – $E_0 = 12 \text{ МПа}$; б – $E_0 = 300 \text{ МПа}$



а

б

в

Рисунок 5.59 – Нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре обделки при $E_0 = 12 \text{ МПа}$: а – в своде, б – в лотке, в – в боках

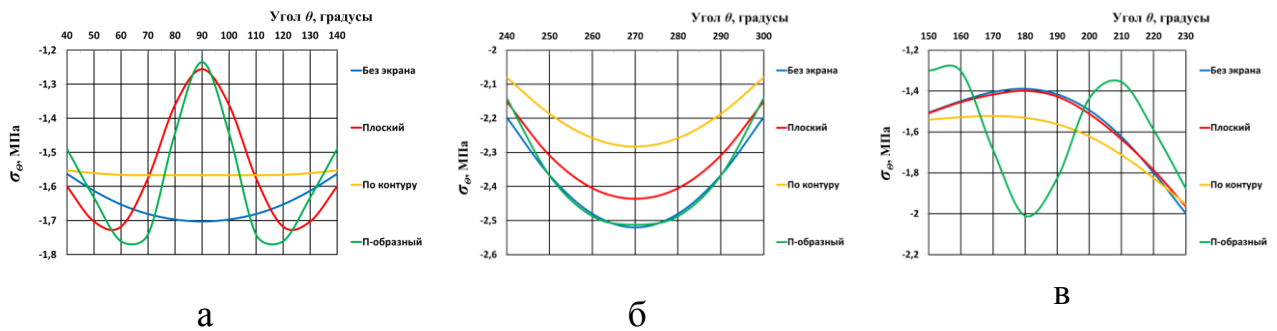


Рисунок 5.60 – Нормальные тангенциальные напряжения на наружном контуре обделки при $E_0 = 300 \text{ МПа}$: а – в своде, б – в лотке, в – в боках

Как следует из рисунка 5.58 а ($E_0 = 12 \text{ МПа}$), в точках наружного контура сечения обделки возникают как растягивающие – в боках (рисунок 5.59 в), так и сжимающие в своде (рисунок 5.59 а) и лотке (рисунок 5.59 б) напряжения. Максимальное значение растягивающих напряжений не превышает 12 МПа для тоннеля, сооруженного без защитного экрана. Общим для этих напряжений является их уменьшение при использовании экранов – наибольшее снижение (не менее 7%) наблюдается для П-образного и экрана, расположенного по контуру выработки. Максимальные сжимающие напряжения, величина которых достигает -17 МПа без экрана и -16 МПа при наличии экрана, расположенного по контуру выработки, возникают в нижней части наружного контура обделки (рисунок 5.59 б). В верхней части наружного контура обделки (рисунок 5.59 а) напряжения не превышают -14 МПа и уменьшаются при использовании защитных экранов. Наибольшее снижение (до -13 МПа) наблюдается при использовании плоского экрана.

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений на наружном контуре обделки тоннеля в грунтах с модулем деформации $E_0 = 300 \text{ МПа}$ (рисунок 5.58 б и рисунок 5.60 а, б, в) свидетельствует о том, что возникают только сжимающие нормальные тангенциальные напряжения. Их наибольшие (по модулю) значения возникают в нижней части контура обделки (рисунок 5.60 б) – при отсутствии

экрана они составляют $-2,52 \text{ МПа}$; применение экрана П-образной формы весьма незначительно снижает это значение (до $-2,51 \text{ МПа}$), плоский экран – до $-2,44 \text{ МПа}$, наиболее существенное снижение наблюдается при использовании экрана, расположенного по всему контуру (до $-2,28 \text{ МПа}$).

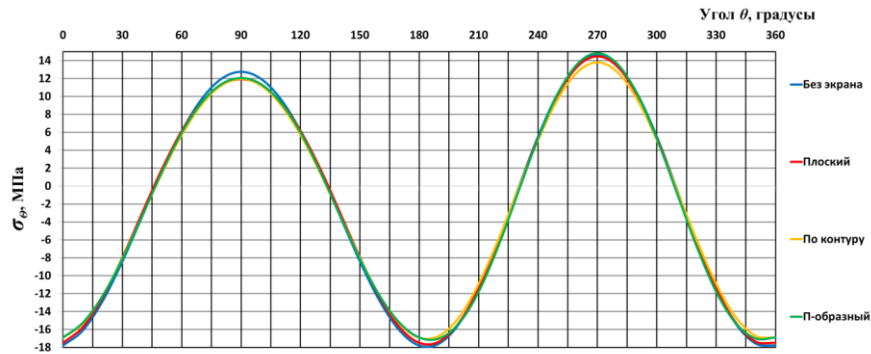
Непосредственно в верхней части наружного контура (рисунок 5.60 а) применение защитного экрана приводит к снижению напряжений по сравнению с вариантом проходки тоннеля без использования экрана. Напряжения σ_θ уменьшаются на 8,1% при экране, расположенном по всему контуру выработки плоском, на 26,3% – при плоском и 27,5% при П-образном. Наблюдается незначительное увеличение (не более 6,5%) напряжений в радиальных сечениях при $\theta = 50^\circ \dots 70^\circ$ (с учетом симметрии – $\theta = 110^\circ \dots 130^\circ$). В боковых точках наружного контура обделки (рисунок 5.60 в) применение защитных экранов рассматриваемых форм приводит к увеличению сжимающих напряжений, оно составляет 0,7% для плоского, 10,3% для экрана по контуру и не менее 44,7% при использовании П-образного экрана.

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений $\sigma_\theta, \text{ МПа}$, возникающих на внутреннем контуре обделки, для различных форм экрана приведены на рисунке 5.61.

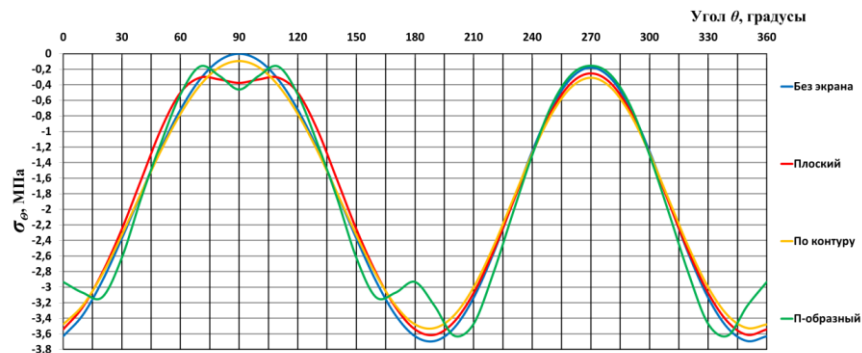
На рисунках 5.62, 5.63 приведены фрагменты эпюр напряжений на внутреннем контуре сечения обделки – вблизи свода (рисунок 5.62 а, 5.63 а), лотка (рисунок 5.62 б, 5.63 б), а также боков (рисунок 5.62 в, 5.63 в) при модуле деформации грунта $E_0 = 12 \text{ МПа}$ и $E_0 = 300 \text{ МПа}$.

Из рисунка 5.61 а следует, что в точках наружного контура сечения обделки возникают как растягивающие – в своде (рисунок 5.62 а) и в лотке (рисунок 5.62 б), так и сжимающие в боках (рисунок 5.62 в) напряжения. Максимальное значение растягивающих напряжений не превышает $14,7 \text{ МПа}$ для тоннеля, сооруженного без защитного экрана и при экранах плоском или П-образном. При использо-

вании экрана, расположенного по контуру выработки, напряжения уменьшаются на 6,2%.

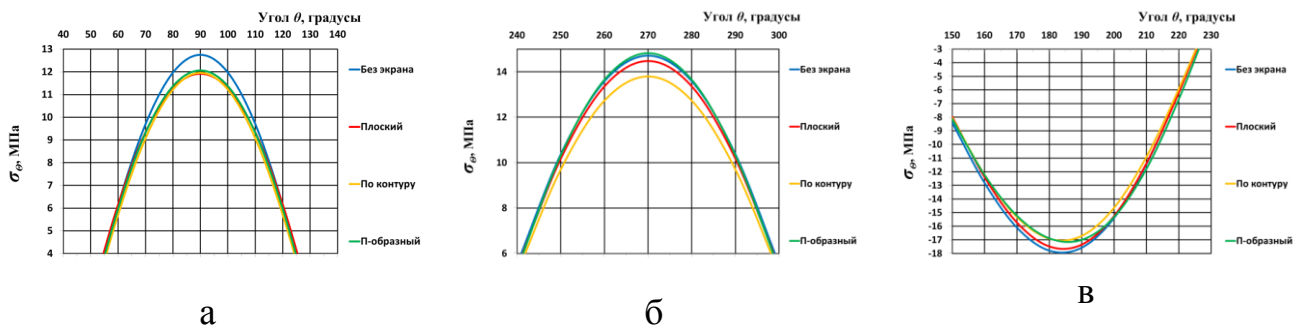


а



б

Рисунок 5.61 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре обделки: а – при $E_0 = 12 \text{ МПа}$; б – при $E_0 = 300 \text{ МПа}$



а

б

в

Рисунок 5.62 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре обделки при $E_0 = 12 \text{ МПа}$: а – в своде, б – в лотке, в – в боках

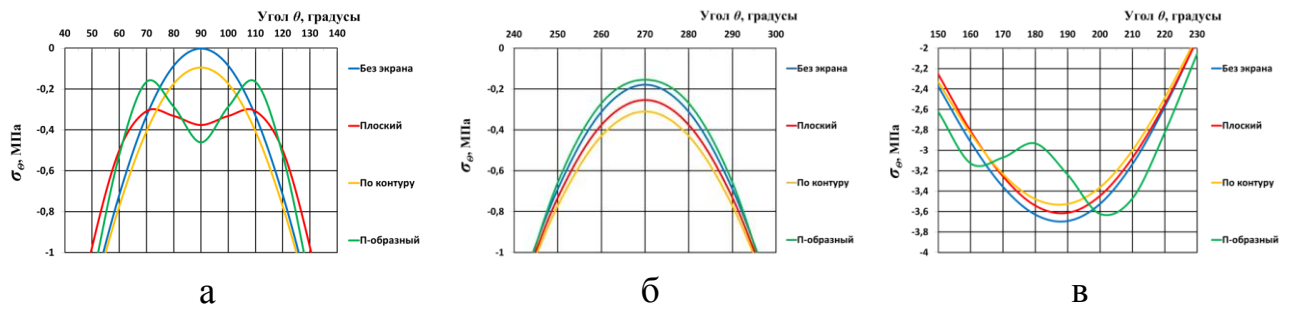


Рисунок 5.63 – Нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем контуре обделки при $E_0 = 300 \text{ МПа}$: а – в своде, б – в лотке, в – в боках

Максимальные сжимающие напряжения, величина которых достигает $-17,8 \text{ МПа}$ без экрана и $-16,9 \text{ МПа}$ при наличии экранов П-образного и расположенного по контуру выработки, возникают в боках обделки (рисунок 5.62 в). В своде обделки (рисунок 5.62 а) растягивающие напряжения не превышают $12,8 \text{ МПа}$ и уменьшаются при применении защитных экранов. Использование защитных экранов любых форм приводит к снижению напряжений до $11,9 \text{ МПа}$, т.е. на 6,5%.

Как следует из эпюр, приведенных на рисунке. 5.61 б и рисунке. 5.63 а, б, в, на внутреннем контуре обделки тоннеля, сооруженного в грунтах с модулем деформации $E_0 = 300 \text{ МПа}$ возникают только сжимающие нормальные тангенциальные напряжения. Наибольшие (по модулю) значения напряжений возникают в боках обделки (рисунок 5.63 в) – при отсутствии экрана они составляют $-3,69 \text{ МПа}$; применение экрана П-образной формы снижает до $-2,93 \text{ МПа}$, при плоском экране – до $-3,61 \text{ МПа}$ при $\theta = 190^\circ$ (с учетом симметрии при $\theta = 350^\circ$).

В своде обделки (рисунок. 5.63 а) применение защитных экранов приводит к увеличению напряжений по сравнению с вариантом сооружения тоннеля без использования экрана. Напряжения σ_θ увеличиваются до $-0,1 \text{ МПа}$ при экране, расположенном по всему контуру выработки, до $-0,38 \text{ МПа}$ при плоском и до $-0,46 \text{ МПа}$ при П-образном экранах. При использовании экрана по контуру и П-

образного экрана в сечениях $\theta \approx 70^\circ$ ($\theta \approx 100^\circ$ с учетом симметрии) локальные экстремумы – уменьшение напряжений до $-0,17 \text{ МПа}$ для П-образного и до $-0,31 \text{ МПа}$ для плоского экрана.

Различно влияние защитных экранов различных форм на напряжения в лотке обделки тоннеля. П-образный экран снижает напряжения на 13,5%, а применение плоского экрана или экрана, расположенного по контуру выработки, увеличивает напряжения в 1,4 и в 1,7 раза соответственно по сравнению с отсутствием защитного экрана.

Выводы по главе 5

1. Разработанный метод расчета позволяет определять напряженное состояние массива грунта и обделки тоннеля, сооруженного с применением защитных экранов различных форм из труб круглого поперечного сечения с возможным заполнением.

2. Применение защитных экранов приводит, как правило, к снижению величин нормальных тангенциальных напряжений в массиве грунта на поверхности выработки – растягивающих практически в 1,5 раза, сжимающих – на 17% по сравнению с соответствующими напряжениями, возникающими на контуре выработки, пройденной без опережающего крепления.

3. С ростом коэффициента бокового давления в массиве грунта растягивающие нормальные тангенциальные напряжения в грунте на поверхности выработки исчезают, максимальные значения сжимающих напряжений существенно уменьшаются.

4. Уменьшение расстояния от труб защитного экрана до контура выработки, например, при наклонном расположении труб экрана к продольной оси выработки, в ряде случаев может приводить к увеличению максимальных значений как растягивающих, так и сжимающих нормальных тангенциальных напряжений.

5. Влияние защитного экрана проявляется в бóльшей мере в относительно слабых грунтах в точках контура выработки или обделки тоннеля, расположенных на минимальных расстояниях от труб экрана. Влияние экрана, расположенного в верхней (сводовой) части выработки, практически не влияет на напряженное состояние грунта или обделки тоннеля вблизи лотка.

6. На контуре выработки в прочных грунтах радиальные напряжения принимают более высокие значения как для тоннеля, пройденного без экрана, так и для тоннеля, сооруженного под его защитой, по сравнению с тоннелем, сооруженным в относительно слабых грунтах. Нормальные тангенциальные напряжения, отвечающие за деформации растяжения и сжатия, в более прочных грунтах принимают мéньшие значения, растягивающие напряжения зачастую исчезают.

7. Применение плоского защитного экрана приводит к снижению абсолютных значений напряжений в массиве грунта и в обделке вблизи свода тоннеля. В грунтах с более высокими прочностными характеристиками влияние защитного экрана весьма незначительно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В научно-квалификационной работе выполнено решение актуальной научной задачи, заключающейся в разработке нового аналитического метода расчета обделок тоннелей, сооруженных вблизи земной поверхности с применением опережающего крепления массива грунта в виде защитных экранов из труб. Метод расчета базируется на предложенной математической модели, достаточно полно и адекватно учитывающей основные факторы, влияющие на формирование напряженного состояния массива грунта и обделок тоннелей. В основу модели положены современные теоретические положения геомеханики, механики подземных сооружений и механики деформируемого твердого тела, позволяющие выполнить постановку и получить строгое аналитическое решение соответствующей задачи теории упругости. Метод расчета, использующий полученное решение, реализованный в виде компьютерной программы, дает возможность на основе выполненных многовариантных расчетов установить и исследовать новые и уточнить известные закономерности формирования напряженного состояния элементов геомеханической системы «массив грунта – защитный экран - обделка тоннеля» при различных сочетаниях их механических и геометрических параметров.

Использование выявленных закономерностей на этапе проектирования будет способствовать принятию научно обоснованных рациональных конструктивных и технологических решений, обеспечивающих устойчивость грунта и прочность конструкций подземных сооружений.

Применение разработанного метода совместно с использованием численных методов решения геомеханических задач делает возможным более полное и детальное изучение геомеханических процессов в грунтах при использовании защитных экранов, что позволяет прогнозировать возможность возникновения опасных ситуаций при строительстве тоннелей различного назначения в сложных горно-геологических условиях.

Основные научные и практические результаты диссертации заключаются в следующем:

Основные научные и практические результаты научно-квалификационной работы заключаются в следующем:

1. Разработана математическая модель взаимодействия массива грунта, труб защитного экрана и обделок тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом вблизи земной поверхности, базирующаяся на теоретических положениях геомеханики и механики подземных сооружений о совместной работе элементов единой деформируемой геомеханической системы "массив грунта □ обделка тоннеля □ трубы экрана".

2. Обоснована и выполнена постановка соответствующей задачи геомеханики, аналитическое решение которой после перехода от плоской задачи теории упругости к соответствующей краевой задаче теории функций комплексного переменного о напряженном состоянии полубесконечной многосвязной кусочно-однородной линейно-деформируемой среды.

3. Решение задачи теории упругости, полученное с применением математического аппарата ТФКП, позволяет определять компоненты напряженного состояния элементов рассматриваемой геомеханической системы. Аналитическое решение отличает возможность удовлетворения поставленных граничных условий с достаточно высокой заданной точностью; при практических расчетах погрешность не превышает 5%.

5. Разработан аналитический метод расчета обделок тоннелей, сооруженных под защитой экрана из труб, при действии собственного веса грунта, учитывающий основные влияющие факторы.

6. Составлены алгоритм и реализующая его компьютерная программа, позволяющая эффективно производить многовариантные расчеты конструкций подземных сооружений с целью определения их напряженного состояния при практическом проектировании и при проведении научных исследований.

7. Выполненное сравнение позволило установить удовлетворительное согласие результатов расчетов по разработанному методу с данными, полученными другими авторами аналитическими методами для частных случаев. Прове-

дены расчеты обделок тоннелей, иллюстрирующие возможность учета различных форм защитного экрана.

8. На основе компьютерного моделирования с использованием разработанного программного обеспечения уточнены известные и установлены новые закономерности формирования напряженного состояния обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитных экранов из труб, при различных сочетаниях основных влияющих факторов, использование которых при практическом проектировании позволит принимать научно обоснованные решения, обеспечивающие устойчивость окружающего грунтового массива, прочность обделок и способствующие безопасному выполнению работ в сложных горно-геологических условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамчук В.П., Власов С.Н., Мостков В.М. Подземные сооружения. – М.: ТА Инжиниринг. – 2005. – 464 с.
2. Алексеев А.В., Головин Д.Т. Применение защитных экранов в подземном строительстве. – М.: Academy № 6 (9). Научно-методический журнал. Изд-во «Проблемы науки». – 2016. – С. 2 – 6.
3. Амусин Б.З., Линьков А.М. Об использовании метода переменных модулей для решения одного класса задач линейной наследственной ползучести. – Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – №6. – С.162 –166.
4. Амусин Б.З., Фадеев А.Б. Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики. – М.: Недра. – 1975. – 144 с.
5. Анциферов С.В. Метод расчета многослойных обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения мелкого заложения: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2014. – 298 с.
6. Анциферов С.В., Деев П.В., Трещева О.В. Разработка математической модели взаимодействия обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитного экрана из труб, с массивом грунта// В сборнике: Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики. Материалы 18-ой Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2022. – С. 109 – 116.
7. Анциферов С.В., Трещева О.В. Деев П.В. Исследование напряженного состояния массива грунта и обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитного экрана из труб// Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – Тула: Издательство ТулГУ. – 2024. – № 2. – С. 506 – 519.
8. Анциферов С.В., Трещева О.В. Математическое моделирование взаимодействия массива грунта и обделок тоннелей кругового поперечного сечения, сооружаемых с применением защитного экрана из труб// Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – Тула: Издательство ТулГУ. – 2024. – № 1. – С. 547 – 562.

9. Анциферов С.В., Трещева О.В. О влиянии защитного экрана из труб на напряженное состояние массива грунта вокруг выработки мелкого заложения// *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* – Новосибирск: ИГД СО РАН. – 2023. Т. 10. № 3. – С. 3 – 10.
10. Анциферов С.В., Трещева О.В. Разработка математической модели формирования напряженного состояния массива грунта и обделки тоннеля, сооружаемого с применением защитного экрана из труб// В сборнике: 59-я Научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава ТулГУ с всероссийским участием. Сборник докладов конференции. В 2-х частях. Ч. 1. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2023. – С. 214 – 220.
11. Анциферов С.В., Трещева О.В., Феклин А.А. Математическое моделирование напряженного состояния обделки тоннеля, сооружаемого с применением защитного экрана// *Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики. Материалы 16-ой Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики.* Том 1. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2020 г. – С. 240 – 247.
12. Анциферов С.В., Трещева О.В., Феклин А.А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния геомеханической системы "массив грунта – обделка тоннеля – защитный экран из труб". В сборнике: *Проектирование, строительство и эксплуатация комплексов подземных сооружений.* Труды VI Международной конференции. – Екатеринбург: УГГУ. – 2019. – С. 68–74.
13. Анциферов С.В., Трещева О.В., Феклин А.А. Напряженно-деформированное состояние системы "массив грунта – обделка тоннеля – защитный экран из труб"// *Chronos: естественные и технические науки.* – 2019. – № 4 (26). – С. 15 – 21.
14. Анциферов С.В., Трещева О.В., Феклин А.А., Кудрявцев М.А. Влияние защитного экрана из труб на напряженное состояние обделок тоннелей// В сборнике: 56-я Научно-практическая конференция профессорско-преподавательского со-

- става ТулГУ с всероссийским участием. Сборник докладов. В двух частях. Ч. 1. – Тула, Изд-во ТулГУ. – 2020. – С. 186 – 195.
15. Араманович И.Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием// Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 104. – №3. – М.: – С. 372 – 375.
16. Баклашов И.В. Геомеханика: Учебник для вузов. – М.: Издательство МГГУ. – 2004. – Т.1. Основы геомеханики. – 208 с.
17. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика подземных сооружений и конструкций крепей. – М.: Недра. – 1992. – 200 с.
18. Бате К., Вилсон С. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат. – 1982. – 446 с.
19. Богомоллов Г.М., Голицынский Д.М., Сеславинский С.И. Справочник инженера – тоннельщика/ Под редакцией Меркина В.Е., Власова С.Н., Макарова О.Н. – М.: Транспорт. – 1993. – 390с.
20. Бодров Б.П., Матэри Б.Ф. Кольцо в упругой среде// Метропроект/ Отдел типового проектирования. – 1936. – Бюл. № 24.
21. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений: учебник для вузов. М.: Недра. – 1994. – 382 с.
22. Виноградов Б.Н. Опыт измерения давления горных пород на тоннельные обделки мессдозами// Сб. ЦНИИС. – М. – 1959. – №31. – С. 1 – 47.
23. Власов С.Н., Ходош В.А., Черняховская С.Э. Применение экранов из труб при строительстве тоннелей. – М.: Транспортное строительство. – 1980. – №5. – С. 51 – 53.
24. Волков В. П., Наумов С. Н. Тоннели и метрополитены. М.: Транспорт. – 1975. – С. 337 – 340.
25. Воробьев Л.А., Щекудов Е.В. Рабочая инструкция РИ05 «Мониторинг напряженно-деформированного состояния крепи при строительстве тоннеля под действующей магистралью с применением защитного экрана из труб». – М.: ЦНИИС. – 2001. – 15с.

26. Глушихин Ф.П., Кузнецов Г.Н. и др. Моделирование в геомеханике. – М.: Недра. – 1991. – 240 с.
27. Голицынский Д.М., Фролов Ю.С. и др. Строительство тоннелей и метрополитенов. – М.: Транспорт. – 1989. – 319 с.
28. Городецкий А.С., Заборицкий В.И., Лантух-Лященко А.И., Рассказов А.О. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. – М.: Транспорт. – 1981. – 143 с.
29. Городецкий А.С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. – М.: Транспорт. – 1981. – 233 с.
30. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: "Наука". – 1973. – 228 с.
31. Долгих А. Ю. Оценка роли защитного экрана при строительстве транспортных тоннелей// Метро и тоннели. – 2023. – № 3. – С.
32. Дубровская Л. Тоннели Дублера Курортного проспекта в городе Сочи. Подземный эксперт. <https://undergroundexpert.info>
33. Дюрелли А., Райли У. Введение в фотомеханику (поляризационно-оптический метод). Пер. с англ. – М.: Мир. – 1970. – 430 с.
34. Ержанов Ж. С., Каримбаев Т. Д. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород. – Алма-Ата: «Наука» КазССР. – 1975.
35. Зенкевич О.К., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. – М.: Недра. – 1974. – 240 с.
36. Зиновьев Д. В. Основы моделирования в SolidWorks. Практическое руководство по освоению программы в кратчайшие сроки / Электронная книга
37. Инновационные конструктивно-технологические решения в транспортном тоннелестроении// Обзорная информация. ФГУП "Информационный центр по автомобильным дорогам". – Вып. 1. – 2005.
38. Итальянцы в России. Проектирование тоннелей. Метод ADECO-RS/ Отраслевая медиа-корпорация "Держава"// Дорожная держава. – 2010. – № 27. – С. 18 – 21. http://www.dor.spb.ru/wp-content/uploads/publication/dd_italy_2010_27.pdf

39. Каспарьян Э.В., Макаров А.Б., Козырев А.А., Иофис М.А. Геомеханика: Учеб. пособие/ – М.: Высш. шк. – 2006. – 503 с.
40. Кассирова Н.А., Скворцова А.Е., Татарникова Е.Г. Метод натурных наблюдений за работой подземных сооружений// Гидротехническое строительство. – 1996. – №1. – С. 10 – 15.
41. Коньков А. Н., Кавказский В. Н., Иванес Т. В., Хомутов В. И. Оценка влияния опережающей крепи кровли и лба забоя на устойчивость выработки при проходке автодорожного тоннеля в городе Сочи// Промышленное и гражданское строительство. – 2012. – №6. – С. 23 – 26.
42. Кужель В.Н. Сооружение тоннелей на «дублере курортного проспекта» по методу ADECO// Дорожная держава. – 2011. – № 37. – С. 34–36. http://www.dor.spb.ru/wp-content/uploads/publication/dd_sochi_2011_37.pdf
43. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. – 1973. – 736 с.
44. Лебедев М. О., Безродный К. П., Шляев С. А. Оценка и прогнозирование технического состояния обделки при эксплуатации транспортных тоннелей// Путь и путевое хозяйство. – М.: 2019. – № 7. – С. 20 – 25.
45. Лиманов Ю.А. Моделирование статической работы туннельных обделок методом эквивалентных материалов – М.: Труды Гидропроекта. – Сб. 18. – 1979. – С. 46 – 54.
46. Львова О.М., Павлович К.Ю. Применение защитных экранов из труб при строительстве подземных сооружений в Санкт-Петербурге// Инженерно-строительный журнал. – С.-Петербург. – №7. – 2009. – С. 6 – 9.
47. Маковский Л. В. Городские подземные транспортные сооружения. –М.: Стройиздат. – 1985. – С. 339 – 343.
48. Маковский Л. В., Чеботарев С. В. Новые технологии устройства опережающей крепи в тоннелестроении// Транспорт: наука, техника, управление. – М. – 2012. – № 6. – С. 40 – 45.

49. Маковский Л.В. Современные технологии проходки в сложных инженерно-геологических условиях// Метро и тоннели. – М. – 2002. – №5. – С. 21 – 23.
50. Маковский, Л.В. Реконструкция транспортных тоннелей с применением опережающих крепей// Метро и тоннели. – М. – 2016. – №2. – С. 8 – 10.
51. Маслак В. А. Опыт обеспечения устойчивости забоя и кровли при строительстве выработок в протерозойских глинах – С-Петербург.: Записки Горного института. – 2009. – Т. 183. – С. 297 – 299.
52. Меркин В.Е., Маковский Л.В. Проходка тоннелей под транспортными магистралями с применением защитных экранов из труб. Новые технологии и материалы в подземном строительстве. – М.: ТИМР. – 1995. – № 1. – С. 13 – 23.
53. Метод фотоупругости. Решение задач статики сооружений. Метод оптически чувствительных покрытий. Оптически чувствительные материалы. Под ред. Хесина Г.Л. – Т. 1. – М.: Стройиздат. – 1975. – 460 с.
54. Методические рекомендации по расчету временной крепи тоннельных выработок / В.Е. Меркин, Д.И. Колин, В.Ф. Сарабеев, Л.Л. Старчевская, С.Ю. Хазанов, Л.А. Воробьев, М.Е. Рыжевский, С.Н. Власов, В.В. Чеботаев, Р.И. Касапов, Н.С. Булычев, Н.Н. Фотиева, Д.М. Голицинский, Б.З. Амусин, Б. С. Кузнецов – М.: Министерство транспортного строительства СССР. – 1984. – 62 с.
55. Миллерман С.И., Гоглидзе Л.В., Синицкий Г.М., Четыркин Н.С. Автодорожный тоннель под ж.-д. путями Рижского направления МЖД на пересечении Волоколамского шоссе с улицей Свободы. – М.: Метро и тоннели, №6. – 2001. – С. 22 – 23.
56. Муравин Г.И., Власов С.Н., Бессолов В.А. Опережающие экраны – новая технология для проходки тоннелей. – М.: Горный журнал. – 1999. – №11. – С. 36 – 38.
57. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука. – 1966. – 707 с.

58. Прибыльская Н. М., Гречухин В. А. Напряженно-деформированное состояние защитного экрана из труб и базовых элементов в подземном строительстве. – М.: Метро и тоннели. – 2022. – №1. – С. 9 – 12.
59. Протосеня А.Г., Деменков П.А., Карасев М.А., Беляков Н.А., Безродный К.П., Маслак В.А. Проектирование конструкций пилонной станции метрополитена с малоосадочной технологией строительства. – С-Петербург: Записки Горного института. - 2012. – Т.195. – С. 124 – 128.
60. Протосеня А.Г., О.В. Тимофеев. Геомеханика: учебное пособие. – С-Петербург.: Санкт-Петербургский горный институт им. Г.В. Плеханова. – 2008. – 117 с.
61. Рекомендации по применению опережающих экранов из труб при сооружении транспортных тоннелей. – М.: ЦНИИС. – 1988. – 47 с.
62. Рекомендации по проектированию и устройству опережающих защитных экранов из труб с применением микротоннелепроходческих комплексов при строительстве тоннелей. – М.: Корпорация «Трансстрой». Тоннельная ассоциация России. – 2003. – 55 с.
63. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. . – М.: Стройиздат. – 1977. – 132 с.
64. Руководство по комплексному освоению подземного пространства крупных городов. Под ред. Ильичева В.А. – Российская академия архитектуры и строительных наук. – М.: ГУП НИАЦ. – 2004. – 206 с.
65. Руководство по проектированию подземных горных выработок и расчету крепи. – М.: Стройиздат. – 1983. – 273 с.
66. Руководство по проектированию подземных сооружений в сейсмических районах// Дорман И.Я., Кузьмин А.В., Фотиева Н.Н. и др. – М.: ТИМР. – 1996. – 80 с.
67. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Институт механики АН УССР. – Киев: Наукова думка. – 1965. – 888 с.

68. Сайтгареев М.Р. Сооружение при строительстве тоннелей опережающего защитного экрана из труб с применением микротоннелепроходческого комплекса. – С.-Петербург: Записки Горного института. – Т.159. – Ч. 1. – С. 89 – 91.
69. Саммаль А.С., Анциферов С.В., Деев П.В. Аналитические методы расчета подземных сооружений: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2013. – 111 с.
70. Саммаль А.С., Анциферов С.В., Деев П.В. и др. Расчет многослойных обделок подземных сооружений: монография. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2022. – 256 с.
71. Сорочан Е.А., Трофименков Ю.Г., Горбунов-Посадов М.И., Ильичев В.А., Крутов В.И. Основания, фундаменты и подземные сооружения: справочник проектировщика. – М.: Стройиздат. – 1985. – 480 с.
72. СП 120.13330.2012 Метрополитены. Актуализированная редакция СНиП 32-02-2003 (с Изменением №1). – М.: Минрегион России. – 2012. – 269 с.
73. СП 122.13330.2012 Тоннели железнодорожные и автодорожные. Актуализированная редакция СНиП 32-04-97. – М.: Минрегион России. – 2012. – 132 с.
74. СП 22.13330.2016 Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83*. – М.: Минрегион России. – 2016. – 220 с.
75. СП 23.13330.2011 Основания гидротехнических сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.02-85. – М.: Минрегион России. – 2011. – 115с.
76. СП 248.1325800.2016 Сооружения подземные. Правила проектирования. Официальное издание. – М.: Стандартинформ. – 2017. – 83 с.
77. СП 268.1325800.2016 Транспортные сооружения в сейсмических районах. Правила проектирования. Официальное издание. – М.: Стандартинформ. – 2016. – 107 с.
78. Стаканов И. В. Современные технологии возведения защитных экранов временной крепи при преодолении тоннелем нарушенных и ослабленных зон породного массива// Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края [Электронный ресурс]. – Красноярск: Сибирский федеральный ун-т. –

2014. – Режим доступа: <http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2014/directions.html>, свободный
79. Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов: учебное пособие. – М.: изд-во Ассоциации строительных вузов. – 2005. – 488 с.
80. Тимченко Р.А., Попов С.О., Кришко Д.А., Мацышин С.О. Защитный экран из труб для тоннелей в городской застройке – Донецк: Гірничий вісник. – Вип. 103. – 2018. – С. 142 – 147.
81. Трещева О.В. К расчету обделок тоннелей мелкого заложения, сооружаемых под защитой экрана из труб // В сборнике: Современная механика в цифровую эпоху: проблемы и перспективы. Материалы II Всероссийской молодежной научно-практической конференции. Оренбург. – 2023. – С. 362 – 366.
82. Трещева О.В. Математическое моделирование взаимодействия обделки тоннеля, сооружаемого с применением защитного экрана, и массива грунта. В книге: Промышленная революция 4.0: взгляд молодежи. Тезисы докладов II Межрегиональной научной конференции. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2020. – С. 51 – 52.
83. Трещева О.В., Анциферов С.В. Аналитический метод расчета обделок тоннелей, сооружаемых с применением защитного экрана из труб// Молодежная наука в развитии регионов. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – 2024. – С. 295 – 299.
84. Трещева О.В., Анциферов С.В., Медведева М.М. Исследование взаимодействия грунта и обделки тоннеля, сооруженного под защитой экрана из труб // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сборник материалов 25-ой Международной научно-технической конференции. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2024. – С. 146 – 154
85. Трещева О.В., Медведева М.М. Влияние формы защитного экрана из труб на напряженное состояние массива грунта на поверхности выработки мелкого заложения // В сборнике: Промышленная революция 4.0: взгляд молодежи. Тезисы докладов Юбилейной 5-ой межрегиональной научной сессии молодых исследователей. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2023. – С. 235 – 237.

86. Трещева О.В., Медведева М.М., Трещева А.А. О влиянии защитного экрана из труб на напряженное состояние обделок тоннелей, сооружаемых в слабых грунтах // 12 Международная научно-практическая конференция молодых ученых и студентов "Опыт прошлого – взгляд в будущее". Материалы конференции. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2022. – С. 93–97.
87. Трещева О.В., Трещева А.А., Анциферов С.В. Математическое моделирование взаимодействия обделки тоннеля, пройденного под защитой экрана из труб, с массивом грунта// Молодежная наука в развитии регионов: материалы Всероссийской научно-практической конференции студентов и молодых ученых (Березники, 26 апреля 2023г). – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та – 2023. – 309 – 314 с.
88. Трещева О.В., Трещева А.А., Газаров А.Р., Анциферов С.В. Математическое моделирование взаимодействия массива грунта и обделок тоннелей, сооружаемых под защитой экрана из труб// Сборник научных трудов по материалам всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Строительство и техносферная безопасность», г. Антрацит, 15–17 февраля 2024 г. – Луганск, 2024. – С. 99 – 103.
89. Трумбачев В.Ф., Славин О.К. Методика моделирования горных пород методами фотомеханики. – М.: Наука. – 1974. – 99 с.
90. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра. – 1987. – 221 с.
91. Филатов Н.А., Беляков В.Д., Иевлев Г.А. Фотоупругость в горной геомеханике. – М.: Недра. – 1975. – 184 с.
92. Фотиева Н.Н., Козлов А.Н. Расчет крепи параллельных выработок в сейсмических районах. – М.: Недра. – 1992. – 231 с.
93. Фролов Ю.С. Обеспечение эксплуатационной надежности железнодорожного тоннеля при проходке над ним автотранспортного тоннеля на трассе-дублере Курортного проспекта в г. Сочи // Промышленное и гражданское строительство. – 2012. №6. – С. 21 – 23.

94. Фролов Ю.С., Иванес Т.В., Кавказский В.Н., Коньков А.Н. Решение задач геомеханики при строительстве автотранспортных тоннелей в олимпийском Сочи // Транспорт Российской Федерации. – 2013. – № 6 (49). – С.12 – 18.
95. Фролов Ю.С., Ларионов А.А. Устойчивость выработки, пройденной с опережающей крепью кровли и лба забоя в протерозойских глинах // Метро и тоннели. – 2008. – №2. – С. 24 – 26.
96. Хесин Г.Л., Дмоховский А.В. Исследование методом фотоупругости напряженного состояния подземных сооружений в условиях первой и второй смешанной задачи теории упругости// Труды Гидропроекта. – М.: Недра. – 1970. – № 18. – С. 103 – 120.
97. Хомутов В.И., Сладковский Д.С. Новое для Сочи// Отраслевая медиа-корпорация "Держава"/ Дорожная держава. – 2010. – № 24. – С. 25 – 27 http://www.dor.spb.ru/wp-content/uploads/publication/dd_novoedlasochi_2010_24.pdf
98. Чеботаев В.В., Щекудов Е.В. Сооружение тоннелей под действующими магистралями с помощью защитного экрана из труб. Сборник научных трудов ЦНРШС. – М. – 2000. – С. 191–198.
99. Черняков А.В., Адуйский Е.А., Веселовский В.Н., Меркин В.Г., Миллерман С.И. Тоннель под железной дорогой в Перми. – М.: Метро и тоннели. – №3. – 2001.
100. Шарифов С.А. Применение опережающих крепей при проходке автодорожных тоннелей в сложных горно-геологических условиях Республики Таджикистан // Вестник МАДИ. – 2017. – №2. – С. 90 – 95.
101. Шарифов С.А. Прогнозирование напряжений и деформаций обделки тоннеля в зоне тектонических разломов/ С.А. Шарифов, Л.В. Маковский// Наука и техника в дорожной отрасли. – 2018. – №2. – С. 32 – 35.
102. Шарифов С.А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния грунтового массива при строительстве горных тоннелей в тектонически нарушенных зонах// Вестник МАДИ. – 2018. – №1. – С. 90 – 95.

103. Шахтное и подземное строительство: Учеб. для вузов. В 2 т./ Б.А. Картозия, Б.И. Федунец, М.Н. Щуплик и др. – М.: Изд-во Академии горных наук. – 2001. – Т. 2. – 582 с.
104. Шейнин В.И. Геомеханика в расчетах и проектировании малозаглубленных подземных сооружений (особенности и проблемы)// Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1992. – №3.
105. Шерман Д.И. Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы// Докл. АН СССР. – 1961. – Т.27. – С. 527 – 563.
106. Щекудов Е.В. Научно-техническое сопровождение строительства тоннелей, сооружаемых под защитой экранов из труб// Актуальные проблемы мостостроения и тоннелестроения: Сборник научных трудов. – М.: МАДИ, – 2001. – С.98–108.
107. Щекудов Е.В. Взаимодействие защитных экранов из труб с грунтовым массивом при строительстве тоннелей мелкого заложения: дис. канд. техн. наук: 05.23.11 – М. – 2003. – 181 с.
108. Щекудов Е.В. Опыт сооружения тоннелей с применением защитного экрана из труб под действующими транспортными магистралями// Исследования конструкций и материалов для метро- и тоннелестроения: Сборник научных трудов. – М.: ЦНИИС. – 2002. – С. 38 – 62.
109. Юфин С. А., Циммерманн Т. Численное моделирование в подземном строительстве современные требования и возможности// Метро и тоннели. – 2005. – № 2. – С. 36–38.
110. Яковлев А.А., Пастушков В.Г., Пастушков Г.П. Устройство защитного экрана линии метрополитена мелкого заложения при строительстве транспортной развязки в г. Минске// Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе. 2016. – Т.1. – С. 330–334.
111. Brinkgreve R.B.J., Kumarswamy S., Swolfs W.M., Foria F. PLAXIS 3D. Руководство пользователя// ООО «НИП-Информатика». – 2017. – 816 p.

112. Demenkov P.A., Potseshkovskaya I.V., Trushko O.V. Numerical experiments on the modeling of compensatory injection for the protection of buildings during tunneling// *ARNP Journal of Engineering and Applied Sciences*, № 23. - V. 13. - 2018. – P. 9161 - 9169.
113. Demenkov P.A., Petrov D.N., Karasev M.A. Predicting land-surface deformations during the construction of underground facilities of complex spatial configuration// *International Journal of Civil Engineering and Technology*. - № 8. – V. 11. - 2017. – P. 1161 – 1171.
114. Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground //Proceedings of the Tenth International Symposium on Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground, IS. – Cambridge 2022. – 27 – 29 June 2022.
115. Hakoishi Y., Usui T., Seki S., Nagai H., Iwamura I. Construction and field observation of twin tunnels in sandy soil with confined water// *Reclaiming the Underground Space*. V. 2. Edition 1. – 2003.
116. Helwany S. Applied soil mechanics: with ABAQUS applications// *Applied Soil Mechanics: With ABAQUS Applications*. – John Wiley & Sons, Inc. – 2007. – 398 p. – doi:10.1002/9780470168097.
117. Hoek E. Tunnels in weak rock// *Practical Rock Engineering*. Course notes by Evert Hoek. North Vancouver. – 1998. – P. 220 – 221.
118. Janin J.-P. Tunnels en milieu urbain: Prévisions des tassements avec prise en compte des effets des pré-soutènements (renforcement du front de taille et voûte-parapluie): Doctoral thesis. – Lyon. – 2012. – 267 p.
119. Kavvadas M. Prediction of Face Stability in Unsupported Tunnels using 3D Finite Element Analyses/ M. Kavvadas, G. Prountzopoulos, K. Tzivakos// *EURO:TUN 2009*. – Bochum: Aedificatio Publishers, 2009. – № September – P. 1–4.
120. Lunardi P. Design and construction of tunnels// *Analysis of controlled deformation in rocks and soils (ADECO-RS)*. Springer. – 2008. – P. 105 – 117
121. Lunardi P., Calcerano G. A New Construction Method For Widening Highway and Railway Tunnels// *Proceeding of the Aites – ITA World Tunnels Congress*. – Milan. Italy. – 2011. – VIII – P. 665–671

122. Oke J., Vlachopoulos N., Diederichs M. Improvement to the convergence-confinement method: inclusion of support installation proximity and stiffness// Rock mechanics and rock engineering. – V. 51. – P. 1495-1519.
123. Proceeding of the Aites-ITA 2001 World Tunnel Congress. Vol. FT. – Milan, Italy. – 2001. – P. 337–344
124. Proceedings of the Conference on Progress in Tunnelling after 2000. – Milan, Italy – 2001. – P. 477–485
125. Volkmann G.M., Button E.A., Schubert W. A contribution to the design of tunnels supported by a pipe roof // Proc. 41st U.S. Rock Mechanics Association, June 17–21 2006. – Golden. CO
126. A. Guillou, Jean-Bernard Kazmierczak, A. Kurdts, G. Regal. Strength and method of tunnel working faces: a stress-strain analytical approach. French Revue de Geotechnique. – 2004. – 109. – pp. 23–37
127. Zh.P. Janin, H. Le Bissonnet, A. Guillou, D. Diaz, R. Kastner et al. South Toulon Pipe: Three-dimensional numerical inverse analysis of in situ measurements. Geotechnical aspects of underground construction in soft soils – Proceedings of the 8th Int. Symposium on Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Soils, TC204 ISSMGE – IS-SEOUL 2014. – Seoul, South Korea. – 2014. – pp. 87–90
128. http://www.albea.ru/products/cad/soft/SRAC/Cosmos_M.html
129. <https://cyberleninka.ru/>
130. <https://docs.cntd.ru/>
131. <https://elibrary.ru/>
132. <https://lira-soft.com/>
133. <https://midasoft.ru/>
134. <https://www.3ds.com/ru/produkty-i-uslugi/simulia/produkty/abaqus/>
135. <https://www.ansys.com/>
136. <https://www.lirasapr.com/>
137. <https://www.plaxis.ru/>