

На правах рукописи



ЛЕВИН АРТЁМ СЕРГЕЕВИЧ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
СТЕРЖНЕВЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ
С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Тула – 2025

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет».

Научный руководитель

БАРАНОВ Виктор Леопольдович

доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты

Гордон Владимир Александрович

доктор технических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Орловский государственный
университет имени И.С. Тургенева»,
г. Орёл, профессор

Горяйнов Виталий Валерьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, ФГБОУ ВО «Воронежский госу-
дарственный технический университет»,
г. Воронеж, доцент

Ведущая организация

ФГБУН Институт теоретической и при-
кладной механики им. С.А. Христиановича
Сибирского отделения Российской акаде-
мии наук, г. Новосибирск

Защита состоится «30» сентября 2025 года в 14 часов 00 минут на заседа-
нии диссертационного совета 24.2.417.02, созданного на базе федерального
государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образо-
вания «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, г. Тула,
проспект Ленина, д. 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский
государственный университет» и на сайте:

<https://tulsu.ru/science/dissertation/diss-24-2-417-02/levin-as-24-2-417-02>.

Автореферат разослан « 1 » августа 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Соколова
Марина Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Задача эффективного расчёта параметров амортизационных устройств на стадиях их проектирования, отработки и эксплуатации актуальна в различных отраслях машиностроения и приборостроения. Амортизационные устройства применяются в автомобильной, авиационной технике, медицинском оборудовании, измерительных приспособлениях, стрелковом и артиллерийском оружии и прочих механизмах, работающих на основе упругого изгибного деформирования стержневых элементов.

Существует широкое многообразие механизмов, где именно амортизаторы являются «лимитирующими» звеньями, от характеристик которых зависят интенсивность и темп работы устройства, поэтому создание комплексных математических моделей изгибного деформирования их упругих стержневых элементов, а также программных комплексов и инженерных методик, позволяющих надёжно прогнозировать их квазистатические и динамические характеристики, актуально в настоящее время.

Широкие диапазоны варьирования параметров внешних воздействий для одних и тех же амортизирующих устройств в процессе их эксплуатации требуют оперативного изменения и адаптации квазистатических и динамических характеристик их упругих элементов без изменения их конструкции. Одним из методов изменения характеристик упругих элементов является использование зафиксированных в их структуре сосредоточенных масс, в связи с чем разработка и реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов динамического изгибного деформирования стержневых элементов амортизаторов с сосредоточенными массами как варьируемыми параметрами их конструкции является актуальной задачей.

Анализ различных современных систем автоматизации процессов проектирования и расчётов, в числе которых: SolidWorks Simulation, ANSYS, Логос, Abaqus, показывает широкую возможность их применения в рамках задач механики деформируемого твёрдого тела, существующие системы работают на основе метода конечных элементов и позволяют решать широкий спектр задач. Недостатком проведения расчётов в существующих автоматизированных системах является большая трудоёмкость, высокие требования к оборудованию вычислительной машины и обязательное наличие необходимых компетенций у инженера – исполнителя расчёта.

Общим недостатком существующих расчётных автоматизированных систем является отсутствие возможностей встраивания созданных и численно реализованных моделей в структуру более крупных программных комплексов, например, при создании востребованных в различных отраслях «цифровых двойников».

В качестве недостатка моделирования в расчётных автоматизированных системах можно также отметить невозможность создания сложных моделей для решения сопряженных задач «сквозного» проектирования, вследствие чего созданные в расчётных автоматизированных системах модели имеют более низкий потенциал масштабирования, чем классические конечно-разностные вари-

анты их реализации.

Таким образом, задача создания современных машиноориентированных инженерных методик, позволяющих проводить расчёты стержневых элементов амортизаторов с варьируемыми сосредоточенными массами без существенной трудоёмкости, является актуальной с точки зрения ее научной и практической значимости.

Область исследований диссертации соответствует пунктам 2, 3 и 8 паспорта специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»: «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»; «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента»; «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Степень разработанности темы. Задачи оценки различных физических характеристик стержневых упругих элементов являются одними из наиболее старейших задач механики. Комплексную задачу моделирования процесса изгиба упругих стержневых элементов можно разложить на три основных части: квазистатическую, динамическую и контактно-волновую.

В задаче расчёта статики упругих стержневых элементов наибольшее распространение в настоящее время получили модели Эйлера-Бернулли и С.П. Тимошенко, фундаментальными являются исследования: Я. Бернулли, Л. Эйлера, Г. Кирхгофа, С.П. Тимошенко, А.И. Лурье, Е.П. Попова, В.А. Светлицкого, В.З. Власова, А.А. Илюхина, П.А. Жилина.

Из современных авторов, занимающихся проблемой статики стержней можно выделить работы: Н.В. Пустового, В.Е. Левина, К.Г. Охоткина, Д.М. Зудева, К.Н. Анахаева, S. Bouadjadjaа, А.М. Dehrouyeh-Semnani, Н. Weia, Q.X. Pan.

Проблема динамики изгиба стержневых упругих элементов рассматривалась в большом количестве работ, как отдельный процесс, так и в контексте общего рассмотрения процесса колебаний. В качестве основных исследований можно отметить работы: В.А. Светлицкого, М.Н. Серазутдинова, Н. Weia, W. Sumelka, P. Stempin.

Современными авторами, рассматривающими решения контактно-волновой задачи для стержневых упругих элементов являются: А.А. Локтев, А.В. Залетдинов, S. Abrate.

Задача динамики стержневого упругого элемента с сосредоточенными массами решалась в работах: В.А. Светлицкого, W. Ji, V.C. Meesala, X. Du, J. Zhang.

В результате анализа существующих работ был сделан вывод об отсутствии комплексной модели динамического изгиба стержневых упругих элементов и актуальности темы диссертации.

Цель диссертационной работы: разработка математической модели, позволяющей создать инженерно-ориентированный комплекс программ для

проведения вычислительных экспериментов по комплексному динамическому изгибному деформированию стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами.

Задачи, решаемые в работе:

1. Создание численных программно-ориентированных математических моделей квазистатического изгиба стержневых упругих элементов амортизаторов переменного сечения на основе уравнения Эйлера-Бернулли.

2. Разработка математических моделей динамики процесса взаимодействия стержневых элементов и амортизируемых ими тел, и их программная реализация.

3. Предложение контактно-волновой модели начальной стадии процесса соударения стержневых упругих элементов и амортизируемых ими тел путем введения волновых процессов в общие уравнения энергобаланса с целью повышения точности расчётов кинематических и силовых характеристик упругих элементов, а также для оценки влияния фронтов поперечных волн на прочность материала в их опасных сечениях.

4. Разработка комплексных моделей динамики стержневых элементов с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами с целью разработки инженерных методик, позволяющих анализировать влияние величин сосредоточенных масс и их геометрического положения в конструкции на лимитирующие эксплуатационные характеристики упругих элементов амортизаторов. Реализация полученных методик в виде комплексов программ, позволяющих проводить априорные прогностические расчёты динамики стержневых элементов с зафиксированными сосредоточенными массами.

Научная новизна исследования.

1. Создана и реализована оригинальная математическая модель нелинейного изгиба стержневых упругих элементов амортизаторов на основе уравнения Эйлера-Бернулли, отличающаяся от существующих использованием в ней метода минимизации целевой функции для уменьшения трудоёмкости решения.

2. Разработана методика расчёта динамического изгиба стержневых элементов амортизаторов, отличающаяся возможностью многократного использования однократно рассчитанных силовых характеристик стержневых элементов при расчёте параметров ударяющих амортизируемых тел с различными массами и начальными скоростями.

3. Разработана комплексная методика расчёта квазистатического и динамического изгибного деформирования стержневых элементов с зафиксированными сосредоточенными массами, в отличии от существующих методов учитывающая контактно-волновые явления и использующая метод многомерной минимизации, позволяющая эффективно с низкой трудоёмкостью производить численное решение.

4. Создана новая экспериментальная установка и на ее базе самостоятельно выполнены эксперименты, позволяющие верифицировать предложенные расчётные зависимости времен первого останова и изгибных амплитуд стержневых элементов с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами при амортизации ими ударяющего тела.

Теоретическая значимость диссертации. Результаты, полученные в виде математических моделей изгибного деформирования стержневых упругих элементов амортизаторов с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами и их реализации, дополняют и обобщают существующие исследования в части создания комплексных моделей динамики изгиба стержневых упругих элементов амортизаторов.

Практическая значимость работы состоит: в создании комплексного инженерного инструментария, позволяющего эффективно проектировать узлы амортизирующих устройств, связанных со стержневыми упругими элементами, с учетом разработанных моделей их деформирования в квазистатической, динамической и контактно-волновой постановке; в разработанных и зарегистрированных программных комплексах, внедрённых на АО «СКБ» (г. Пермь) и используемых в проектировании образцов амортизирующих устройств; в разработанных математических моделях и программно-вычислительных комплексах, внедрённых в учебный процесс ТулГУ.

Методы и методология исследования. Исследование базируется на современных методах исследования теории упругости, механики и волновой динамики стержневых упругих элементов. В процессе исследования применяются современные машинно-ориентированные численные методы, такие как метод Рунге-Кутты 4-го порядка с адаптивным шагом, с использованием коэффициентов Дормана-Принса; метод конечных разностей; метод численной минимизации целевой функции «Differential Evolution»; метод полиномиальной интерполяции. Вычисления проводились с использованием современных ПЭВМ с использованием разработанных программных комплексов на языке Python и математического пакета Matlab. В исследовании применяется авторский экспериментальный метод верификации разработанных моделей динамического изгибного деформирования стержневых элементов амортизаторов.

Объектами исследования настоящей работы являются стержневые упругие элементы амортизаторов, имеющие переменное поперечное сечение, с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами.

Предметом исследования настоящей работы является комплексный (квазистатический, динамический, контактно-волновой) процесс изгиба стержневых элементов амортизаторов переменного поперечного сечения с зафиксированными сосредоточенными массами.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математическая модель динамического изгиба стержневых элементов амортизаторов, позволяющая производить многократный расчёт с использованием одной и той же силовой характеристики для амортизируемых тел с различными параметрами массы и скорости.

2. Комплексная математическая модель квазистатического, динамического и ударно-волнового изгибного деформирования стержневых элементов амортизаторов с зафиксированными варьируемыми сосредоточенными массами.

3. Алгоритмы решения системы ОДУ второго порядка на основе уравнения Эйлера-Бернулли, включающего предложенные варианты целевых функ-

ций, зависящих от схем приложения внешней нагрузки и позволяющих создавать численную реализацию для расчёта и анализа квазистатического процесса изгибного деформирования стержневых элементов амортизаторов.

Достоверность основных научных положений и выводов обеспечивается: применением апробированных классических и современных численных методов анализа; положительными результатами сравнения решений, полученных с использованием новых методик, представленных в данной работе, и методик других авторов; объёмом натурных и численных авторских экспериментов, анализ результатов которых демонстрирует достоверность разработанных методик расчёта; положительными решениями Федеральной службы по интеллектуальной собственности Российской Федерации о Государственной регистрации программ для ЭВМ, разработанных автором.

Апробация результатов исследования. Результаты исследования докладывались на научно-практических конференциях с Всероссийским участием «Техника XXI века глазами молодых учёных и специалистов» (2020,...,2024 гг.); «Научно-практических конференциях профессорско-преподавательского состава ТулГУ с Всероссийским участием» (2021,...,2023 гг.), проводимых на базе Тульского государственного университета; на Всероссийской конференции «Проблемы развития стрелковой отрасли в Российской Федерации» в городе Ижевск (2024 год).

Результаты работы были удостоены II-го места на XXI Всероссийской научно-технической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Техника XXI века глазами молодых ученых и специалистов», проводимой на базе ТулГУ в 2023 году.

Публикации. По теме диссертации автором: опубликовано 17 статей в различных сборниках и научно-технических журналах, из которых 2 статьи в научных изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, общим объёмом 6,3 п.л. с авторским вкладом 3,4 п.л.; получено 4 свидетельства о Государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора: автором разработана серия проблемно-ориентированных программных комплексов по расчёту квазистатических и динамических характеристик стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами; представленные в диссертации модели процессов динамического изгибного деформирования стержневых упругих элементов амортизаторов с зафиксированными сосредоточенными массами и связанные с ними исследования, включая численные расчеты и их анализ, выполнены автором лично; автор осуществлял организацию проведения комплекса экспериментальных работ и принимал непосредственное участие в их проведении, а также в анализе и использовании их результатов.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы (116 наименований) и двух приложений. Изложена на 145-ти страницах машинописного текста и содержит 54 рисунка и 7 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обоснование актуальности темы исследования,

определены предмет и объект исследования, обозначены цели и задачи, рассматривается научная новизна работы, а также теоретическая и практическая значимость работы, приведена информация об апробации результатов работы, достоверности, положениях, выносимых на защиту, публикациях по теме работы и структуре диссертации.

В первой главе представлен обзор области применения стержневых упругих элементов и приводится критический анализ исследований других авторов по теме работы. Анализируются основные системы уравнений рассматриваемых работ, указываются их преимущества и недостатки, в том числе и проблемы их машинной ориентированности для практического использования. В связи с существованием большого количества работ были выделены и рассмотрены основные из них, написанные следующими авторами: Е.В. Поповым, В.А. Светлицким, К.Г. Охоткиным, Н.В. Пустовым, В.Е. Левиным, Д.М. Зуевым, К.Н. Анахаевым, S. Bouadjadja, A.M. Dehrouyeh-Semnani, H. Weia, Q.X. Pan, М.Н. Серазутдиновым, W. Sumelka, P. Stempin, A.A. Локтевым, А.В. Залетдиновым, S. Abrate, W. Ji, V.C. Meesala, X. Du, J. Zhang.

Установлено отсутствие комплексной модели стержневых упругих элементов с сосредоточенными варьируемыми зафиксированными массами, учитывающей все три компонента процесса деформирования: квазистатический, динамический и контактно-волновой.

Во второй главе рассматривается задача определения силовых характеристик упругих элементов амортизаторов в приложении к различным схемам внешнего нагружения (рисунок 1). Рассматриваются случаи безперегибного изгибного деформирования упругих элементов.

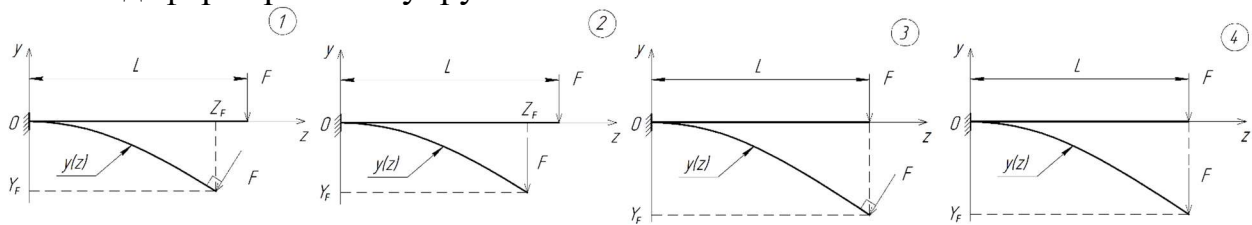


Рисунок 1 - Схемы приложения внешней нагрузки:

1 - неслызающая следящая; 2 - неслызающая неслызающая;

3 - слызающая следящая; 4 - слызающая неслызающая

Разработаны модели расчёта (1) - (4) квазистатических характеристик на основе уравнения изгиба геометрически неоднородного стержневого элемента Эйлера-Бернулли (рисунок 1):

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \frac{M_{u32}(z)}{E \cdot I_x(w(z))}, \quad (1)$$

$$\left(1 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$M_{u32}(z) = F \cdot (Y_F - y(z)) \cdot \sin(\arctg(-C_F)) + F \cdot (z - Z_F) \cdot \cos(\arctg(-C_F)), \quad (2.1)$$

$$\frac{dw(z)}{dz} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}, \quad (3) \quad y(0) = 0; \quad \left.\frac{dy(z)}{dz}\right|_{z=0} = 0; \quad w(0) = 0, \quad (4)$$

где $y(z)$ – нейтральная линия стержневого элемента; z – горизонтальная коор-

дината; $M_{uz}(z)$ – изгибающий момент в поперечном сечении с горизонтальной координатой z ; E – модуль упругости; $I_x(w(z))$ – момент инерции в сечении с горизонтальной координатой z ; F – величина нагрузки; Z_F , Y_F – горизонтальная и вертикальная координата точки нагружения; C_F – значение первой производной нейтральной линии в точке нагружения; $w(z)$ – длина упругого элемента в точке с горизонтальной координатой z , с началом отсчёта в точке крепления элемента $w(0) = 0$.

Уравнение (2.1) соответствует скользящей следящей схеме нагружения (1) на рисунке 1, для иных схем нагружения соответствующие уравнения изгибающего момента будут выглядеть следующим образом:

$$M_{uz}(z) = F \cdot (z - Z_F), \quad (2.2)$$

$$M_{uz}(z) = F \cdot (Y_F - y(z)) \cdot \sin(\arctg(-C_F)) + F \cdot (z - L) \cdot \cos(\arctg(-C_F)), \quad (2.3)$$

$$M_{uz}(z) = F \cdot (z - L), \quad (2.4)$$

где L – расстояние от точки закрепления до точки нагружения в недеформированном состоянии упругого элемента.

Из свойств дифференциальных уравнений следует, что существует единственное решение $y(z)$, соответствующее условиям (4) и (5):

$$Y_F = y(Z_F), \quad C_F = \left. \frac{dy(z)}{dz} \right|_{z=Z_F}. \quad (5)$$

С целью сокращения трудоемкости решения предлагается искать константы Z_F , Y_F , C_F , не «прямым» перебором различных вариантов, а как величины, минимизирующие безразмерные целевые функции в соответствии со схемами внешнего нагружения (рисунок 1).

В ходе исследований было проработано большое количество вариантов целевых функций, наилучшие результаты показали целевые функции (6.1) и (6.2), представленные ниже:

$$\begin{aligned} f(Z_F, Y_F, C_F) &= \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)| + |L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} + |C_F - \tilde{y}'(Z_F)| & f(Z_F, Y_F, C_F) &= \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|} + \frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} + \frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|} \\ f(Z_F, Y_F) &= \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)| + |L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} & f(Z_F, Y_F) &= \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|} + \frac{|L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} \\ f(Z_F, Y_F, C_F) &= \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{L} + |C_F - \tilde{y}'(Z_F)| & f(Z_F, Y_F, C_F) &= \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)|}{|Y_F|} + \frac{|C_F - \tilde{y}'(Z_F)|}{|C_F|} \end{aligned} \quad (6.1) \quad (6.2)$$

где $\tilde{y}(Z_F)$, $\tilde{y}'(Z_F)$, $\tilde{w}(Z_F)$ – значение прогиба, первой производной и длины нейтральной линии в точке нагружения на данной итерации.

Для случая скользящей неследящей нагрузки целевая функция не требуется, так как достаточно стандартного решения.

Система ОДУ (1) – (4) решалась с помощью численного метода Рунге-Кутты 4-го порядка с адаптивным шагом с коэффициентами Дормана-Принса. В работе были апробированы различные методы численной минимизации, и в качестве основного был выбран метод «Differential evolution». Для численной реализации использовались языки программирования Python и Matlab в виде авторских программных комплексов, прошедших процедуру Государственной регистрации программ для ЭВМ.

На рисунках 2 и 3 представлен пример расчёта нейтральной линии и силовых характеристик стержня с использованием предложенных выражений (1) – (6.2) для стержневого элемента длиной $L = 0,3$ м из стали 60С2А. Упругий элемент имеет прямоугольное поперечное сечение с шириной $b = 0,05$ м, и высотой сечения, изменяющейся по линейному закону $h = 0,02 - 0,02 \cdot w$ (м). Упругий элемент нагружен нескользящей следящей нагрузкой.

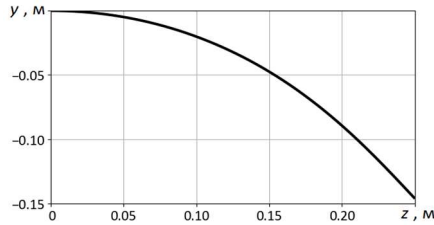


Рисунок 2 - Нейтральная линия

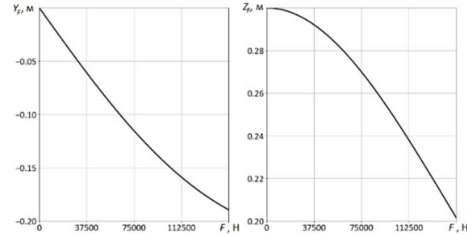


Рисунок 3 - Силовая характеристика

В результате сравнения результатов расчётов, полученных с использованием предложенного метода с результатами расчётов по методу эллиптических параметров, теории Кирхгофа и метода конечных элементов, реализованного в системе SolidWorks Simulation, сделан вывод о высокой точности предложенного в данной работе метода.

Получен закон сохранения энергии в квазистатической постановке, выражение для расчёта текущего значения скорости амортизируемого тела:

$$E_0 = E_{к.м} + E_a, \quad V_1 = \sqrt{V_0^2 - \frac{2E_a}{m}}; \quad T = \int_0^R \frac{dr}{V_1(r)},$$

где E_0 - начальная кинетическая энергия амортизируемого тела; $E_{к.м}$ - кинетическая энергия тела в данный момент; E_a - потенциальная энергия упругого элемента, V_0 - начальная скорость амортизируемого тела; m - масса амортизируемого тела; R - перемещение тела в данный момент времени T ; r - перемещение точки приложения внешней нагрузки; $V_1(r)$ - скорость тела, соответствующая перемещению.

В третьей главе предложен метод расчёта динамики изгибного деформирования стержневого элемента под воздействием амортизируемого тела (рисунок 5) на основе закона сохранения энергии:

$$E_0 = E_{к.м} + E_a + E_{к.а}, \quad (7)$$

где $E_{к.а}$ - кинетическая энергия упругого элемента в данный момент.

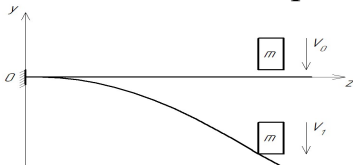


Рисунок 4 – Движение амортизируемого тела

- для нескользящих схем нагружения:

$$V_1 = \left(\left(mV_0^2 - 2 \int_0^R F_r dr \right) \cdot \left(m + \rho \int_0^L S(w) \cdot K_r^2(w) dw \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad K_r(w) = \frac{v(w)}{v_h} \approx \frac{\Delta r(w)}{\Delta r_h}, \quad (8.1)$$

- для скользящих схем нагружения:

$$V_1 = \left(\left(mV_0^2 - 2 \int_0^R F_r dr \right) \cdot \left(m + \frac{\rho}{\cos^2(\arctg(-C))} \int_0^{L_{\max}} S(w) \cdot K_r^2(w) dw \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8.2)$$

В результате были предложены выражения (8.1) и (8.2) для расчёта текущих значений скорости амортизируемого тела:

где $K_r(w)$ - отношение скорости элемента в точке с координатой w по его длине к скорости в точке нагружения; $v(w)$ и $r(w)$ - скорость и перемещение элемента в точке с координатой w по длине; v_H и r_H - скорость и перемещение элемента в точке нагружения; ρ - плотность материала; F_r - проекция вектора F на вектор перемещения точки нагружения r ; $L_{\max}$ - длина (для скользящих схем); $S(w)$ - площадь поперечного сечения элемента в точке с координатой w .

На рисунке 5 приведены результаты расчётов изменения скорости амортизируемого тела массой 1 кг и с начальной скоростью 8 м/с для элемента со схемой нагружения (2.1) из стали 60С2А длиной 0,4 м прямоугольного сечения с $b = 0,02$ (м) и $h = 0,01 - 0,005 \cdot w$.

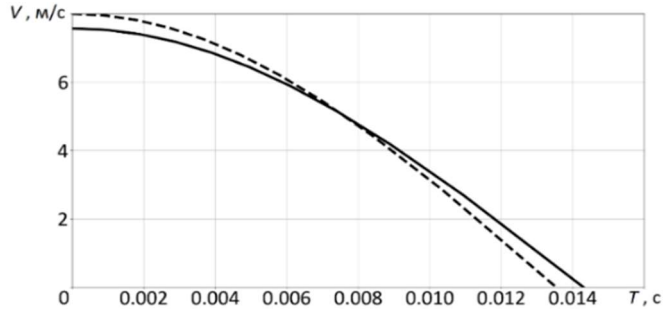


Рисунок 5 – Изменение скорости тела во времени:
пунктир – квазистатика; сплошная – динамика

В четвёртой главе предложена модель контактно-волнового взаимодействия упругого элемента и амортизируемого тела, основанная на предположении о переходе фронта продольной волны в поперечную волну, использующая модифицированное уравнение энергобаланса.

Энергия продольной волны $E_{n.б}$ и уравнение энергобаланса:

$$E_{n.б} = \frac{\sigma_k^2 S_k h_k}{2E} ; \quad E_0 = E_{к.м} + E_a + E_{к.а} + E_{n.б} ,$$

где σ_k - напряжение в зоне контакта; S_k - площадь контакта; h_k - средняя толщина упругого элемента под зоной контакта.

Принятая модель поперечной волны и касательные напряжения τ_{zy} :

$$\rho S(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k G S(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) ; \quad \tau_{zy} = G \frac{\partial u}{\partial z} ,$$

где $S(z)$ - площадь сечения в точке с координатой z ; t - время; $u(z, t)$ - вертикальное перемещение; k - сдвиговой коэффициент С.П. Тимошенко, для прямоугольного сечения $k = 0,833$; G - модуль сдвига; z - абсцисса неизогнутого элемента.

На рисунке 6 показаны результаты расчётов для стержневого элемента длиной $L = 0,4$ м из стали 60С2А. Элемент имеет прямоугольное сечение с $b = 0,005$ м и $h = -0,005 \cdot w + 0,005$ (м). Амортизируемое тело массой $m = 1$ кг, $V_0 = 1$ м/с. Центр соударения находится на расстоянии 0,2 м от места закрепления элемента, протяжённость участка соударения 0,05 м.

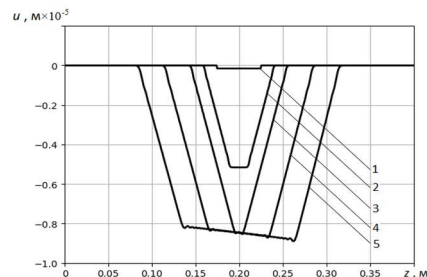


Рисунок 6 - Профили поперечной волны:
1 – начало процесса; 2 – $5,01 \times 10^{-6}$ с;
3 – 1×10^{-5} с; 4 – 2×10^{-5} с; 5 – 3×10^{-5} с.

В пятой главе представлена модель и результаты расчётов квазистатических и динамических характеристик для стержневых упругих элементов с за-

фиксированными сосредоточенными массами.

Изгиб стержневого элемента с сосредоточенными массами будет описываться уравнением Эйлера-Бернулли (1), согласно расчётной схеме (рисунок 7). Изгибающий момент будет соответствовать выражениям (9.1) – (9.4):

$$M_{u3z}(z) = F \cdot (Y_F - y(z)) \cdot \sin(\arctg(-C_F)) + F \cdot (z - Z_F) \cdot \cos(\arctg(-C_F)) + M_{c.m.}(z), \quad (9.1); M_{u3z}(z) = F \cdot (z - Z_F) + M_{c.m.}(z), \quad (9.2)$$

$$M_{u3z}(z) = F \cdot (Y_F - y(z)) \cdot \sin(\arctg(-C_F)) + F \cdot (z - L) \cdot \cos(\arctg(-C_F)) + M_{c.m.}(z), \quad (9.3); M_{u3z}(z) = F \cdot (z - L) + M_{c.m.}(z), \quad (9.4)$$

$$M_{c.m.}(z) = \sum_{i=1}^{N_m} f_m(Y_{m_i} - y(z)) m_i \cdot |\bar{g}| \cdot \cos(\bar{g} \wedge \bar{k}) + \sum_{i=1}^{N_m} f_m(z - Z_{m_i}) m_i \cdot |\bar{g}| \cdot \cos(\bar{g} \wedge (-\bar{j})),$$

где N_m – количество сосредоточенных масс; m_i – i -я сосредоточенная масса; Y_{m_i} и Z_{m_i} – ордината и абсцисса i -ой сосредоточенной массы; $\bar{g}$ – вектор ускорения свободного падения; $\bar{j}$ и $\bar{k}$ – направляющие векторы осей координат; $f_m(x)$ – специальная функция, $f_m(x) = x, x \leq 0$; $f_m(x) = 0, x > 0$.

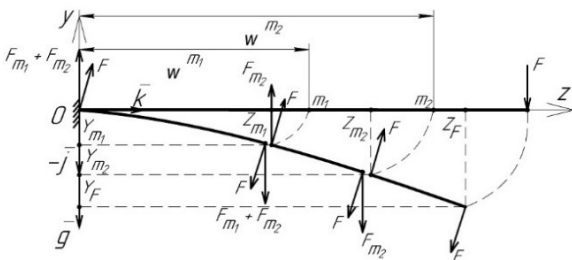


Рисунок 7 – Расчётная схема упругого элемента с сосредоточенными массами

В результате проведенного анализа, для расчётов изгибов стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами получены целевые функции, ниже приведён пример модификации целевой функции (6.1) и целевая функция для скользящей неследящей схемы нагружения:

$$f(Z_F, Y_F, C_F) = \frac{|Y_F - \tilde{y}(Z_F)| + |L - \tilde{w}(Z_F)|}{L} + |C_F - \tilde{y}'(Z_F)| + f_{er}; \quad f(Y_F) = f_{er}; \quad f_{er} = \sum_{i=1}^{N_M} \left| \frac{\tilde{w}(Z_{m_i}) - w^{m_i}}{w^{m_i}} \right| + \left| \frac{\tilde{y}(Z_{m_i}) - Y_{m_i}}{w^{m_i}} \right|.$$

Закон сохранения энергии:

$$E_0 = E_{к.м} + E_a + E_{к.а} + E_{н.в} + E_{к.м},$$

где $E_{к.м}$ – кинетическая энергия сосредоточенных масс.

Получены выражения для расчёта скорости амортизируемого тела для нескользящих и скользящих схем нагружения соответственно:

$$V_1 = \left(\left(m l_0^2 - 2 \int_0^R F_r dr \right) \left(m + \sum_{i=1}^{N_m} m_i \cdot K_r^2(w^{m_i}) + \rho \int_0^L S(w) \cdot K_r^2(w) dw \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad V_1 = \left(\left(m l_0^2 - 2 \int_0^R F_r dr \right) \left(m + \frac{1}{\cos^2(\arctg(-C))} \sum_{i=1}^{N_m} m_i \cdot K_r^2(w^{m_i}) + \frac{\rho}{\cos^2(\arctg(-C))} \int_0^{L_{\max}} S(w) \cdot K_r^2(w) dw \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

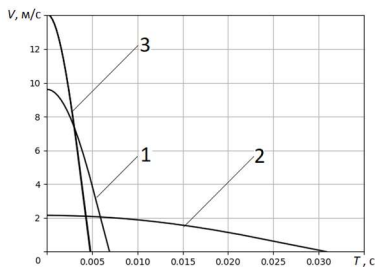


Рисунок 8 – Изменение скорости амортизируемого тела

- 1 – без сосредоточенных масс;
- 2 – с сосредоточенными массами;
- 3 – квазистатический расчёт

На рисунке 8 изображены результаты расчётов изменения скоростей амортизируемого тела во времени. Рассматривается упругий элемент из стали 60С2А с длиной $L = 0,2$ м, прямоугольным сечением с $b = 0,0185$ м и $h = -0,001 \cdot w + 0,0025$ (м). На элементе зафиксированы две сосредоточенные массы: $m_1 = 1$ кг с $w^{m1} = 0,07$ м и $m_2 = 1,5$ кг с $w^{m2} = 0,15$ м. Анализируется скользящая следящая схема нагружения для $m = 0,001$ кг, со скоростью $V_0 = 14$ м/с.

Для анализа результатов расчётов, проведённых согласно выражениям, представленным в данной работе, была проведена серия экспериментов на базе АО «НПО «СПЛАВ» им. А.Н. Ганичева» (рисунок 9).

На рисунке 10 представлены результаты трёх опытов с грузом массой $m = 2,2 \text{ кг}$, сбрасываемым с высоты $H = 0,2 \text{ м}$ на стержневой упругий элемент из стали 60С2А, $L = 0,17 \text{ м}$, $h = 0,0025 \text{ м}$, $b = 0,018 \text{ м}$.

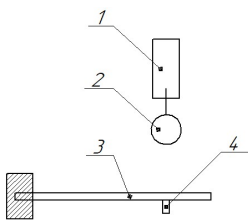


Рисунок 9 – Экспериментальная установка

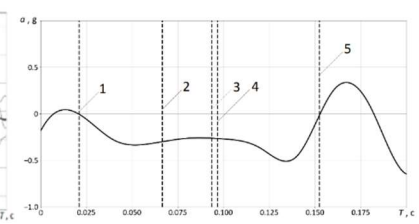
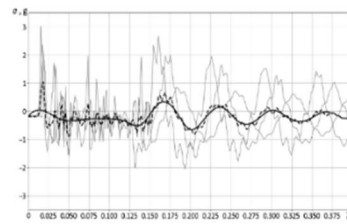


Рисунок 10 – Данные акселерометра и результаты расчетов

На рисунке 10 серыми линиями обозначены данные, полученные с акселерометра, пунктирной линией обозначено среднее арифметическое по ускорению, сплошной линией обозначены значения, полученные после использования фильтра в виде «бегущего» среднего арифметического.

Середина первого полупериода соответствует времени первого останова. Получены значения относительных ошибок: для квазистатического метода – 23,3%; для динамического – 11,5%; для расчета с учетом контактно-волновой поправки – 7,9 %.

В опытах (рисунки 11 и 12), используется упругий элемент, аналогичный предыдущему, с длиной $L = 0,24 \text{ м}$. Амортизируемое тело имеет массу $m = 0,105 \text{ кг}$ и сбрасывается с высоты $H = 0,5 \text{ м}$. Оцениваются результаты 20 одинаковых опытов. Получены значения относительных ошибок: для квазистатического метода – 7,2%; для динамического – 5,1%; для расчета с учетом контактно-волновой поправки – 2,6 %.

На рисунке 12 показаны результаты расчетов для элемента с закреплённой на нём массой $m_1 = 0,878 \text{ кг}$ на расстоянии $w^{m_1} = 0,2 \text{ м}$. Полученные относительные ошибки: для квазистатического метода – 36,2%; для динамического – 23,2%; для расчета с учетом контактно-волновой поправки – 17,4 %.

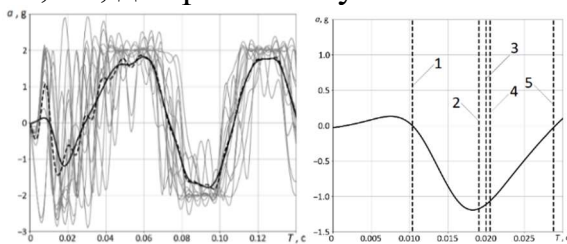


Рисунок 11 – Данные акселерометра и результаты расчетов

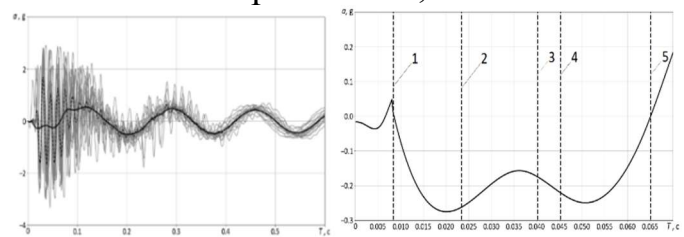


Рисунок 12 – Данные акселерометра и результаты расчетов

На рисунках 10 – 12 пунктирные линии с позициями обозначают: 1 – начало первого полупериода; 2 – результат квазистатического расчета; 3 – результат расчета с учетом контактно-волновой поправки; 4 – результат динамического расчета; 5 – конец первого полупериода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итогом проведенной теоретической и экспериментальной работы, являются следующие результаты и выводы:

1. Разработана методика расчета квазистатических характеристик стержневых упругих элементов амортизаторов на основе уравнения изгиба

Эйлера-Бернулли, для элементов, подверженных большим прогибам:

а) предложено теоретическое описание статической задачи изгиба стержневых упругих элементов переменного сечения на основе уравнения изгиба Эйлера-Бернулли для четырёх основных схем нагружения;

б) проанализировано применение различных методов оптимизации минимизации и предложены различные виды целевых функций;

в) разработаны схемы численного решения сформированной системы дифференциальных уравнений на основе применения методов минимизации целевых функций и последующего решения вспомогательных задач Коши, приведены примеры расчётов различных квазистатических характеристик;

г) показано преимущество применения разработанной методики расчёта по сравнению с существующими методами расчётов;

д) разработаны и зарегистрированы программные комплексы для расчёта квазистатических характеристик стержневых упругих элементов на языках программирования MATLAB и QBasic.

2. Разработана методика по расчёту динамики стержневых упругих элементов с учётом влияния их массы:

а) получены теоретические выражения для расчёта динамических характеристик стержневых упругих элементов на основе использования закона сохранения энергии для системы и результатов расчётов квазистатических характеристик;

б) представлена численная реализация предложенных теоретических выражений, приведены примеры расчётов и их анализ;

в) разработан и зарегистрирован программный комплекс по расчёту динамических характеристик стержневых упругих элементов на языке программирования MATLAB.

3. Разработана методика расчёта динамики стержневого упругого элемента с учётом контактно-волнового взаимодействия ударяющегося (амортизируемого) тела и упругого элемента:

а) предложен подход к анализу начального этапа контактно-волнового взаимодействия и зарождению фронта поперечной волны;

б) приведена численная реализация выражений распространения поперечной волны в стержневых упругих элементах переменного сечения и приведены примеры расчётов;

в) разработана модель расчёта динамических характеристик стержневых упругих элементов с учётом затрат энергии на начальное контактно-волновое взаимодействие;

г) зарегистрирован программный комплекс по расчёту динамических характеристик стержневых упругих элементов на языке программирования Python.

4. На основе предложенных в главах 2 - 4 методик расчёта квазистатических и динамических характеристик разработана методика расчёта характеристик для стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами:

а) предложены теоретические выражения для расчёта квазистатических

характеристик стержневых упругих элементов с зафиксированными сосредоточенными массами;

б) разработана численное решение приведённой системы дифференциальных уравнений на основе использования метода минимизации модифицированных целевых функций;

в) предложена методика расчёта динамических характеристик стержневых упругих элементов переменного сечения с зафиксированными сосредоточенными массами, представлены результаты расчётов и проведен анализ их результатов;

г) продемонстрирована практическая применимость разработанной методики посредством согласованности результатов экспериментальной работы и результатов расчётов;

д) полученные решения и рекомендации доведены до уровня их практического использования в исследовательской и инженерной практике, и используются на предприятиях отрасли, в частности в АО «СКБ» (г. Пермь).

В ходе работы были выявлены дополнительные перспективные направления дальнейших исследований:

1. Анализ динамического изгибного деформирования стержневого упругого элемента с зафиксированными сосредоточенными массами показал, что динамическими характеристиками упругого элемента можно управлять с помощью варьирования величинами сосредоточенных масс и координат крепления. В результате чего была создана и отправлена заявка по патенту на изобретение – «Способ управления колебательными характеристиками стержневого амортизатора путём формирования корректирующего воздействия посредством сосредоточенных масс» (заявка № 2024131941). Исследования в данном направлении являются перспективными.

2. В ходе исследований, связанных с анализом учёта влияния контактно-волнового взаимодействия, было отмечено, что в существующей теории начальная фаза процесса взаимодействия ударяющегося тела и стержневого упругого элемента описана частично, при этом отсутствует полное аналитическое решение контактно-волновой задачи и последующего распространения поперечных волн напряжения в стержнях переменного сечения.

3. В данной работе рассматриваются процессы динамического взаимодействия при относительно малых скоростях ударного взаимодействия, поэтому не учитывалась возможность возникновения вязко-пластичных изменений в амортизирующем элементе, что является одним из возможных направлений дальнейших исследований.

По результатам диссертационной работы опубликовано 17 статей и зарегистрировано 4 программных комплекса, основными из которых являются:

Публикации в рецензируемых изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации:

1. Левин А.С. Моделирование квазистатического изгибного деформирования стержневых упругих элементов с сосредоточенными массами / В.Л. Баранов, А.С. Левин, С.Д. Нефедов // Южно-Сибирский научный вестник. - 2024.- № 4 (56). - С. 27 - 30.

2. Левин А.С. Влияние использования сосредоточенных масс на изменение изгибных динамических характеристик стержневых упругих элементов / В.Л. Баранов, А.С. Левин,

С.Д. Нефедов // Южно-Сибирский научный вестник. - 2024. - №4 (56). - С. 23 - 27.

Свидетельства об официальной регистрации программ для ЭВМ:

3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023686003 РФ. Программа расчета кинетики параметров напряженно-деформированного и кинематического состояний ударно нагруженных стержневых элементов амортизаторов с учетом возникающих в них волновых процессов: № 2023685355: заявл. 21.11.2023: опубл. 01.12.2023 / В.Л. Баранов, А.С. Левин, Р.А. Тер-Данилов; заявитель ФГБОУ ВО ТулГУ.

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019662955 РФ. Программа расчета параметров напряжённо-деформированного состояния ударно-нагруженных неоднородных стержней из упруго-вязкопластических материалов: № 2019662003: заявл. 30.09.2019; опубл. 07.10.2019 / В.Л. Баранов, Н.П. Смирнов, Р.А. Тер-Данилов, А.С. Левин; заявитель ФГБОУ ВО ТулГУ.

5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019616355 РФ. Программа расчета характеристик упругих элементов: № 2019615021: заявл. 06.05.2019: опубл. 22.05.2019 / В.Л. Баранов, А.С. Левин, Р.А. Тер-Данилов; заявитель ФГБОУ ВО ТулГУ.

6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021663947 РФ. Программа динамического расчёта параметров напряженно-деформированного и кинематического состояний и силовых характеристик упругих элементов амортизаторов: №2021662908: заявл. 12.08.2021: опубл. 26.08.2021 / В.Л. Баранов, А.С. Левин, Р.А. Тер-Данилов; заявитель ФГБОУ ВО ТулГУ.

Публикации в других журналах и сборниках научных трудов:

7. Левин А.С. Динамическое деформирование стержневых элементов амортизаторов стрелкового оружия для следящей нескользящей схемы внешнего нагружения / В.Л. Баранов, А.С. Левин // Известия ТулГУ. Технические науки. - 2020. - № 11. - С. 41 - 46.

8. Левин А.С. Методы многомерной минимизации целевых функций при анализе изгибного деформирования стержневых упругих элементов амортизаторов / В.Л. Баранов, А.С. Левин // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2023. – № 3(359).– С. 8 - 13.

9. Левин А.С. Силовые характеристики упругих элементов амортизаторов стрелкового оружия для нескользящей следящей схемы внешнего нагружения / В.Л. Баранов, А.С. Левин // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2018. – № 11. – С. 124 - 129.

10. Левин А.С. Сравнительный анализ результатов моделирования амортизации СПВ при выстреле в квазистатической и динамической постановках/ В. Л. Баранов, А.С. Левин // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии, № 6 (344), Орёл, И.: ОГУ им. И.С. Тургенева, ISSN: 2073-7408, 2020. - С. 24 - 28.

11. Левин А.С. Экспериментальное исследование динамического поперечного изгиба упругих стержневых элементов амортизаторов / В.Л. Баранов, А.С. Левин, Р.А. Тер-Данилов // Известия ТулГУ. Технические науки. - 2023.- №1.- С. 38 - 43.

12. Левин А.С. Квазистатическое и динамическое изгибное деформирование стержневых упругих элементов амортизаторов с сосредоточенными массами / В.Л. Баранов, А.С. Левин // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*, № 6 (362), Орёл, И.: ОГУ им. И.С. Тургенева, ISSN: 2073-7408, 2024. - С. 11 - 19.

Авторское редактирование

Подписано в печать 02.07.2025

Формат бумаги 70x100 1/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,3. Тираж 100 экз. Заказ 060к

Отпечатано в Издательстве ТулГУ. 300012, г. Тула, просп. Ленина, 95