

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

На правах рукописи



Чернышов Данил Алексеевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ СО  
СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЮ  
НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., проф.  
Ковалев Алексей Викторович

Воронеж 2025

## Оглавление

Оглавление .....	2
Введение .....	3
Глава 1 Соотношения теории температурных напряжений в упрочняющихся упруговязкопластических телах .....	9
1.1 Общий вид замкнутой системы уравнений в теории температурных напряжений .....	9
1.2 Соотношения теории температурных напряжений для упруговязкопластического упрочняющегося материала в условиях сферической симметрии .....	14
1.3 Выводы по главе 1 .....	17
Глава 2 Термодеформирование упрочняющихся упруговязкопластических сплошного шара при нестационарном температурном воздействии .....	18
2.1 Решение задачи теплопроводности .....	18
2.2 Решение задачи механики деформируемого твердого тела .....	22
2.3 Численное моделирование .....	41
2.4 Сходимость функциональных рядов и оценка остаточного члена ряда .....	48
2.5 Деформирование сплошного шара с полиномиальной зависимостью предела текучести от температуры .....	56
2.6 Выводы по главе 2 .....	63
Глава 3 Пластическое течение полого шара при нестационарном нагреве внешней поверхности .....	65
3.1 Решение задачи теплопроводности .....	65
3.2 Решение задачи механики деформируемого твердого тела .....	68
3.3 Численное моделирование .....	92
3.4 Сходимость функциональных рядов и оценка остаточного члена ряда .....	99
3.5 Выводы по главе 3 .....	106
Заключение .....	107
Список литературы .....	108
Список иллюстративного материала .....	121

## Введение

### **Актуальность темы и степень ее разработанности.**

За последние десятилетия было разработано большое количество способов обработки материалов, каждый из которых служит для достижения определенных целей: обеспечение большей жесткости, улучшение прочностных характеристик изделия, увеличение сопротивляемости внешним и внутренним кратковременным, длительным и циклическим нагрузкам, в том числе при повышенных или пониженных температурах (например, при эксплуатации в районах вечной мерзлоты или в составе ракетных двигательных установок). В связи с этим дополнительно разрабатываются подходы и методы проведения моделирования поведения материалов при различных вариантах нагружения, которым посвящены работы Ю. Н. Работнова, А. А. Ильюшина, Д. Д. Ивлева, Г. И. Быковцева, А. Н. Спорыхина, Ю. Н. Шевченко, Г. Паркуса, Б. Боли [1–9].

С другой стороны, во всех отраслях отечественной промышленности подавляющее большинство инженерных расчетов и вычислительных экспериментов [10, 11] ведутся в предположении о линейно-упругом поведении используемых материалов. Это приводит к нецелесообразному расходу ресурсов при изготовлении изделий вследствие завышенных требований к их прочности. Зарубежная нормативная документация [12, 13] в свою очередь допускает возможность существования необратимых деформаций и регламентирует требования к допускаемому формоизменению конструкции. Данный аспект позволяет более корректно моделировать процессы, происходящие в изделиях, работающих в условиях сложных нагружений, и, как следствие, уменьшать экономические издержки производства. Таким образом, исследование моделей сред, содержащих все большее число реологических свойств, позволяет получить более точную оценку возможности применения отдельных допущений при проведении аналитических инженерных расчетов и вычислительных экспериментов.

Широкое распространение в рассматриваемом направлении получили модификации задачи о горячей посадке и деформировании при вращении цилиндрических изделий, изготовленных из материалов с различными реологическими свойствами (например, в работах А. А. Буренина, В. П. Радченко, А. В. Ткачевой, О. Н. Любимовой, М. А. Барботько, А. Н. Прокудина, И. К. Андрианова, U. Gamer, Z. Xue, B. Guan, F. Vivio, L. Vullo [14–31]), задачи моделирования процессов деформирования и разрушения горных пород, которые освещали А. Н. Спорыхин, Б. Д. Аннин, С. Н. Скоробейников, С. В. Лавриков, О. А. Микенина, Thorsten W. Becker [32–40], а также задачи возникновения необратимых деформаций в теле под действием различных комбинаций силовых и температурных нагрузок, что нашло отражение в статьях Е. В. Мурашкина, М. А. Артемова, Е. П. Даца, Д. М. Шишкина, М. П. Галанина, P. Oppermann, R. N. Haward, Y. H. Song, K. F. Zhang [41–49]. В перечисленных выше работах рассматриваются как материалы, характеризующиеся только одним механизмом деформирования (например, идеально-упругие и идеально-пластические), так и материалы со сложной реологической структурой, сочетающей сразу несколько таких механизмов (например, модели Кельвина-Фойгта, Максвелла, Ивлева-Спорыхина, Пойнтинга-Томпсона и др.). Согласно [5], введение в рассмотрение параметра вязкости наделяет модель сплошной среды свойствами внутренней неконсервативности, что в свою очередь приводит к возникновению дополнительных вычислительных сложностей в процессе решения рассматриваемой задачи.

Кроме того, известно, что механические свойства сплошной среды могут существенно изменяться при повышении или понижении температуры. Данный факт нашел применение в ряде технологических операций обработки материалов в процессе изготовления заготовок или конечных изделий и послужил основой для возникновения математического аппарата инженерных расчетов, позволяющих определить параметры той или иной операции для достижения требуемого результата и оценить влияние отклонения каждого из них.

При проведении исследований моделей материалов классическими стали задачи [50–81], постановка которых осуществляется для полуограниченных

пространств, в условиях плосконапряженного или плоскодеформированного состояния, или в условиях с осевой или сферической симметрией. Так в диссертационной работе Е. П. Даца [82] проводится рассмотрение упругопластических сплошного и полых шаров с условием пластичности Мизеса, а диссертация Е. Е. Абашкина [83] посвящена изучению напряженно-деформированного состояния пластины, изготовленной из упрочняющегося упруговязкопластического материала и подверженной высокотемпературному воздействию.

### **Цели и задачи.**

В данной работе объектом исследования являются сферические деформируемые твердые тела в условиях нестационарного температурного воздействия со стороны окружающей среды. Предметом исследования является влияние различных комбинаций реологических свойств материала, включая упрочнение и вязкость, и видов зависимости предела текучести от температуры на напряженно-деформированное состояние рассматриваемого тела.

Основной целью настоящей диссертационной работы является развитие математического аппарата теории температурных напряжений для упрочняющихся упруговязкопластических сред. Для достижения указанной цели были решены следующие задачи:

- постановка и решение краевых задач о нестационарном изменении температуры сплошного и полого шаров;
- разработка подхода к получению аналитических выражений температурных напряжений и перемещений в телах, изготовленных из упрочняющихся упруговязкопластических материалов, а также определению положения упругопластических границ, разделяющих области с различающимися реологическими свойствами, и самого эволюционного процесса развития зон обратимого и необратимого деформирования.
- верификация полученных аналитических зависимостей посредством проведения вычислительного эксперимента с применением систем конечно-элементного анализа.

**Научная новизна** работы заключается в том, что впервые:

- получены аналитические решения краевых задач теплопроводности в сплошном и полом шарах с заданной скоростью изменения температуры их внешней поверхности;
- определены выражения, описывающие температурные напряжения с учетом упрочняющегося и вязкого механизмов деформирования при линейной и полиномиальной зависимости предела текучести от температуры, а также совершены предельные переходы к упрощенным моделям среды;
- сформулирован подход к определению последовательности развития областей с различающимися реологическими свойствами и нахождению положения упругопластических границ между ними;
- представлены результаты верификации полученных результатов путем проведения вычислительного эксперимента, подтверждающие корректность рассматриваемых аналитических выражений, определяющих напряженно-деформированное состояние тел
- доказана сходимость применяемых в работе функциональных рядов и дана оценка достаточного количества их членов, необходимых для выполнения расчетов с заданной точностью.

### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Теоретическая значимость заключается в развитии методов аналитического решения сопряженных задач теплопроводности и механики деформируемого твердого тела для сред со сложной реологией.

Практическая ценность работы состоит в возможности применения полученных результатов для дальнейшей модификации инженерных расчетов напряженно-деформированного состояния конструкций, работающих в условиях нестационарного нагрева, а также для оптимизации технологических процессов, таких как термообработка и горячее формование. Кроме того, рассматриваемые задачи могут быть использованы при проведении верификационных тестов вновь разрабатываемых расчетных пакетов и систем, в том числе, в основе которых лежит метод конечных элементов.

### **Методология и методы исследования.**

В основе определения аналитических выражений для распределения температурного поля, а также напряжений и перемещений в телах лежит метод Фурье разделения переменных с последующей оценкой сходимости и величины остаточных членов функциональных рядов, полученных с его помощью, для обеспечения требуемой точности вычисляемых значений. Численное моделирование проводится с применением метода конечных элементов.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Аналитические решения краевых задач теплопроводности и термомеханики для сплошного и полого шаров из упрочняющегося упруговязкопластического материала с линейным и полиномиальным видом зависимости предела текучести от температуры.
2. Сформулированный метод определения положения упругопластических границ и эволюции зон обратимого и необратимого деформирования в условиях нестационарного температурного воздействия.
3. Результаты проведенной верификации полученных соотношений.
4. Оценка сходимости используемых в модели функциональных рядов и точности полученных решений.

### **Степень достоверности и апробация результатов.**

Теоретическая часть исследования строится на адекватно описывающей поведение упрочняющихся упруговязкопластических материалов модели Ивлева–Спориыхина. Применение соответствующего математического аппарата осуществляется с соблюдением строгости всех выкладок и преобразований. Кроме того, получаемые при совершении предельных переходов к упрощенным реологическим моделям результаты качественно совпадают с результатами и выводами, установленными другими авторами, а полученные аналитические результаты согласуются с результатами вычислительного эксперимента.

Полученные в процессе работы над диссертацией результаты были представлены на межвузовской научной конференций молодых ученых и студентов «Математика, информационные технологии, приложения» (Воронеж, 2021), всероссийской VI Дальневосточной конференции с международным участием

«Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении» (Комсомольск-на-Амуре, 2022) и международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2023). Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из которых 2 статьи в рецензируемых изданиях перечня ВАК [84–85], 2 – в изданиях, индексируемых в международных базах данных [86–87], и 4 публикации в сборниках трудов конференций [88-91].

Диссертационная работа включает в себя введение, 3 главы основного текста, заключение и список литературы из 103 наименований. Работа изложена на 122 страницах, содержит 30 рисунков и 5 таблиц.



# Глава 1 Соотношения теории температурных напряжений в упрочняющихся упруговязкопластических телах

## 1.1 Общий вид замкнутой системы уравнений в теории температурных напряжений

Рассмотрим в общем виде напряженно-деформированное состояние тела  $\Omega$ , подверженного температурному воздействию.

Уравнение теплопроводности в случае отсутствия тепловых источников имеет вид [92]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \vartheta \Delta T, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \in \Omega$  – радиус-вектор точки тела в выбранной системе координат;

$t$  – время;

$T = T(\mathbf{x}, t)$  – поле температуры;

$\vartheta$  – коэффициент температуропроводности;

$\Delta$  – оператор Лапласа.

В начальный момент времени  $t = t_0$  распределение температуры в теле определяется соотношением вида

$$T(\mathbf{x}, t_0) = T_0(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

где  $T_0(\mathbf{x})$  – функция пространственных координат.

В общем случае граничные условия для задачи теплопроводности описываются уравнением

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} + \alpha_2 T = \chi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1.3)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты ( $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ );

$\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности тела  $\partial\Omega$ ;

$\chi(\mathbf{x}, t)$  – непрерывная функция, определяющая изменение температуры на поверхности  $\partial\Omega$ .

Таким образом, уравнение (1.1) вместе с начальными (1.2) и граничными (1.3) условиями представляют собой краевую задачу Коши. Ее решение не зависит от напряженно-деформированного состояния тела и позволяет определить распределение поля температуры.

В общем случае уравнения движения записываются в форме [93]

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;

$\rho$  – плотность среды, принимаемая в рамках теории малых деформаций постоянной;

$F_i$  – компоненты вектора плотности распределения массовых сил, действующих на тело;

$u_i$  – компоненты вектора перемещений.

Рассмотрим случай, когда скорости деформаций, возникающие вследствие существования в теле температурного градиента, малы, что позволяет пренебречь инерционным слагаемым. Кроме того, в дальнейшем будем пренебрегать массовыми силами. Тогда уравнение равновесия (1.4) примет вид

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (1.5)$$

В рамках конечных деформаций компоненты тензора полных деформаций определяются через компоненты вектора перемещений по следующим формулам

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{i,j}^\circ + u_{j,i}^\circ + u_{k,i}^\circ u_{k,j}^\circ \right) = \frac{1}{2} \left( u_{i,j}^\wedge + u_{j,i}^\wedge - u_{k,i}^\wedge u_{k,j}^\wedge \right), \quad (1.6)$$

где  $e_{ij}$  – компоненты тензора полных деформаций;

$^\circ$  и  $^\wedge$  – символы, обозначающие связь компонент вектора перемещений с начальной и конечной метрикой пространства соответственно.

В дальнейшем будем рассматривать бесконечно малые относительные перемещения. В этом случае, третье слагаемое для обеих форм в (1.6) является

величиной более высокого порядка малости по сравнению с остальными слагаемыми. После их отбрасывания выражения для компонент тензора полных деформаций в начальной и конечной метрике пространства принимают одинаковый вид и приводят к соотношениям Коши:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.7)$$

Полные деформации, возникающие в теле, могут быть представлены как сумма обратимых  $e_{ij}^e$  (упругих) и необратимых  $e_{ij}^p$  (пластических). Упругие деформации связаны с компонентами тензора напряжений соотношением Дюамеля–Неймана, являющимся обобщением классического закона упругости Гука на случай термдеформирования:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0)\delta_{ij}, \quad (1.8)$$

где  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе;

$\alpha$  – коэффициент температурного расширения;

$T_0$  – начальная температура в теле;

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

В области необратимого деформирования должно выполняться условие пластичности, в общем случае имеющее вид

$$f_p(\sigma_{ij}) = 0 \quad (p = \overline{1, n}) \quad (1.9)$$

и описывающее в пространстве компонент тензора напряжений поверхность текучести. При выполнении условия пластичности вектор в пространстве, определяемом компонентами тензора напряжений, перемещается по данной поверхности вплоть до момента начала процесса разгрузки материала.

Согласно принципу максимума скорости диссипации механической энергии, скорость диссипации механической энергии в единице объема во время пластического деформирования для действительного напряженного состояния имеет максимальное значение среди всех напряженных состояний, допускаемых рассматриваемым условием пластичности. Тогда условие пластичности (1.9) является

пластическим потенциалом, из чего следует ассоциированный закон пластического течения

$$de_{ij}^p = d\xi_p \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.10)$$

где  $d\xi > 0$  – некоторый скалярный множитель.

В качестве условия пластичности могут быть рассмотрены следующие выражения:

– условие максимального приведенного напряжения (условие Треска):

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \quad (1.11)$$

где  $k$  – предел текучести материала;

$\sigma_i$  – главные компоненты тензора напряжений;

– условие максимального приведенного касательного напряжения (условие Ишлинского–Ивлева):

$$\max |\sigma_i - \sigma| = \frac{4}{3}k, \quad (1.12)$$

где  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ ;

– условие максимального октаэдрического напряжения (условие Мизеса):

$$S_{ij}S_{ji} = \frac{8}{3}k^2, \quad (1.13)$$

где  $S_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3)$  – девиатор тензора напряжений.

– прочие формы условия пластичности (в том числе, кусочные).

В [5–7] была предложена модификация Ивлева–Спориных условия пластичности Мизеса, учитывающая упрочнение и вязкость материала, которая будет использоваться в дальнейшем:

$$(S_{ij} - ce_{ij}^p - \eta \dot{e}_{ij}^p)(S_{ji} - ce_{ji}^p - \eta \dot{e}_{ji}^p) = \frac{8}{3}k^2, \quad (1.14)$$

где  $c$  – коэффициент упрочнения;

$\eta$  – коэффициент вязкости.

Следствием ассоциированного закона пластического течения (1.10) является пластическая несжимаемость материала, которой соответствует выражение

$$de_{kk}^p = 0. \quad (1.15)$$

Аналогично [82] предположим, что  $de_{ij}^p = e_{ij}^p - \underline{e}_{ij}^p$ , где  $\underline{e}_{ij}^p$  – пластические деформации в предыдущий момент времени. Пусть, кроме того, начальный момент времени был выбран таким образом, что  $\underline{e}_{ij}^p = 0$ . Тогда (1.15) примет вид

$$e_{kk}^p = 0. \quad (1.16)$$

Граничные условия на поверхности тела могут быть заданы как в напряжениях

$$\sigma_{ij}n_j = P_i, \quad (1.17)$$

где  $n_j$  – компоненты вектора нормали к поверхности;

$P_i$  – компоненты поверхностных сил,

так и в перемещениях

$$u_i = u_i^*, \quad (1.18)$$

где  $u_i^*$  – компоненты перемещений на поверхности.

Кроме того, в случае существования в теле сразу двух или более зон, отличающихся друг от друга реологическими свойствами, на границах между ними не должно нарушаться условие сплошности среды, т. е. должны выполняться условия сопряжения

$$\begin{aligned} [u_i]_{\gamma_k} &= 0, \\ [\sigma_{ij}n_j]_{\gamma_k} &= 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $[u_i]$  и  $[\sigma_{ij}n_j]$  – величины разрыва перемещений и напряжений соответственно в двух соседних зонах;

$\gamma_k$  – граница между двумя зонами.

Таким образом, система уравнений (1.5), (1.7), (1.8), (1.10), (1.14), (1.16) вместе с граничными условиями (1.17), (1.18), условиями сопряжения (1.19) и известным распределением температурного поля в теле представляет собой замкнутую

систему уравнений для определения напряженно-деформированного состояния тела. Дополненная уравнениями (1.1)–(1.3), данная система полностью описывает поведение твердого тела при его термдеформировании.

## 1.2 Соотношения теории температурных напряжений для упруговязкопластического упрочняющегося материала в условиях сферической симметрии

В рамках сферической системы координат приведенные выше соотношения можно существенно упростить, если имеет место сферическая симметрия. Вследствие этого все величины в азимутальном ( $\varphi$ ) и полярном ( $\theta$ ) направлениях оказываются идентичными. Кроме того, частные производные любой функции по угловым переменным  $\varphi$  и  $\theta$ , как и все компоненты вектора перемещений, кроме радиальной, тождественно обращаются в нуль:  $u = (u_r, 0, 0)$ .

Уравнение теплопроводности (1.1), начальные (1.2) и граничные (1.3) условия для случая сферической симметрии запишутся в виде

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \vartheta \cdot \left( \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} \right), \quad (1.20)$$

$$T(r, t_0) = T_0(r), \quad (1.21)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_2 T = \chi(r, t), \quad r \in \partial\Omega. \quad (1.22)$$

В соответствии с рассматриваемыми допущениями (1.5) примет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0. \quad (1.23)$$

Соотношения Коши (1.7) в условиях сферической симметрии имеют форму

$$\begin{aligned} e_r &= u_{r,r}, \\ e_\theta &= e_\varphi = \frac{u_r}{r}, \\ e_{r\theta} &= e_{r\varphi} = e_{\theta\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Выражению (1.8) эквивалентна система уравнений

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0), \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi = \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0), \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Для рассматриваемой модели условие пластичности (1.14) приводится к уравнению

$$(S_r - ce_r^p - \eta\dot{e}_r^p)^2 + 2(S_\varphi - ce_\varphi^p - \eta\dot{e}_\varphi^p)^2 = \frac{8}{3}k^2, \quad (1.26)$$

а ассоциированный закон пластического течения (1.10) запишется в форме

$$\begin{aligned}de_r^p &= \frac{4}{3}d\xi(\sigma_r - \sigma_\varphi - c(e_r^p - e_\varphi^p) - \eta(\dot{e}_r^p - \dot{e}_\varphi^p)), \\ de_\varphi^p &= de_\theta^p = -\frac{2}{3}d\xi(\sigma_r - \sigma_\varphi - c(e_r^p - e_\varphi^p) - \eta(\dot{e}_r^p - \dot{e}_\varphi^p)).\end{aligned}\quad (1.27)$$

Как указывалось выше, из (1.27) следует пластическая несжимаемость материала:

$$e_r^p + 2e_\varphi^p = 0. \quad (1.28)$$

Стоит заметить, что из (1.26) можно получить модификации для остальных форм классических условий пластичности. Проведем ряд преобразований:

$$\begin{aligned}& (S_r - ce_r^p - \eta\dot{e}_r^p)^2 + 2(S_\varphi - ce_\varphi^p - \eta\dot{e}_\varphi^p)^2 = \\ &= \frac{2}{3}((\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + 6(\sigma_r - \sigma_\varphi)(ce_\varphi^p + \eta\dot{e}_\varphi^p) + 9(ce_\varphi^p + \eta\dot{e}_\varphi^p)^2) = \\ &= \frac{2}{3}((\sigma_r - \sigma_\varphi) + 3(ce_\varphi^p + \eta\dot{e}_\varphi^p))^2 = \frac{2}{3}((\sigma_r - \sigma_\varphi) + (ce_\varphi^p + \eta\dot{e}_\varphi^p) - (ce_r^p + \eta\dot{e}_r^p))^2 = \\ &= \frac{2}{3}((\sigma_r - ce_r^p - \eta\dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - ce_\varphi^p - \eta\dot{e}_\varphi^p))^2 = \frac{8}{3}k^2.\end{aligned}$$

Таким образом, после приведения выражения к окончательному виду может быть получена модификация условия пластичности Треска (1.11):

$$|(\sigma_r - ce_r^p - \eta\dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - ce_\varphi^p - \eta\dot{e}_\varphi^p)| = 2k. \quad (1.29)$$

Выполним преобразования выражения (1.29) таким образом, чтобы в левой части выражения остался индекс, связанный только с одной из координат:

$$\begin{aligned}
& \left| (\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - (\sigma_\phi - ce_\phi^p - \eta \dot{e}_\phi^p) \right| = \\
& = \frac{1}{2} \left| 3(\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - 2(\sigma_\phi - ce_\phi^p - \eta \dot{e}_\phi^p) - (\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) \right| = \quad (1.30) \\
& = \frac{3}{2} \left| (\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - \sigma \right| = 2k \Rightarrow \left| (\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - \sigma \right| = \frac{4}{3}k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| (\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - (\sigma_\phi - ce_\phi^p - \eta \dot{e}_\phi^p) \right| = \\
& = \left| 3(\sigma_\phi - ce_\phi^p - \eta \dot{e}_\phi^p) - (\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - 2(\sigma_\phi - ce_\phi^p - \eta \dot{e}_\phi^p) \right| = \quad (1.31) \\
& = 3 \left| (\sigma_\phi - ce_\phi^p - \eta \dot{e}_\phi^p) - \sigma \right| = 2k \Rightarrow \left| (\sigma_\phi - ce_\phi^p - \eta \dot{e}_\phi^p) - \sigma \right| = \frac{2}{3}k.
\end{aligned}$$

Выбирая из (1.30) и (1.31) уравнение с наибольшей правой частью, получим модификацию условия максимального приведенного касательного напряжения (1.12):

$$\left| (\sigma_r - ce_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - \sigma \right| = \frac{4}{3}k. \quad (1.32)$$

Таким образом, выше было показано, что условия пластичности (1.26), (1.29) и (1.32), являющиеся модификациями классический условий пластичности (1.11), (1.12) и (1.13) соответственно и учитывающие механизмы вязкого деформирования и упрочнения, в условиях сферической симметрии эквивалентны друг другу. Для удобства вычислений далее будем проводить рассмотрение модифицированного условия Треска (1.29).

Условия сопряжения (1.19) моделей сред, различающихся реологическими свойствами, на упругопластических границах запишутся в виде

$$[u_r]_{\gamma_k} = [\sigma_r]_{\gamma_k} = [\sigma_\phi]_{\gamma_k} = 0. \quad (1.33)$$

Граничные условия в напряжениях (1.17) приводят к соотношению

$$\sigma_r = P, \quad (1.34)$$

а в перемещениях (1.18) – к уравнению

$$u_r = u_r^*. \quad (1.35)$$



Таким образом, замкнутая система уравнений теории температурных напряжений, описанная в разделе 1.1, преобразуется к системе (1.20), (1.23)–(1.25), (1.27)–(1.29) с начальными (1.21) и граничными (1.22), (1.34)–(1.35) условиями, а также условиями сопряжения на упругопластических границах (1.33).

### **1.3 Выводы по главе 1**

В данной главе были рассмотрены основные соотношения теории температурных напряжений, записанные в произвольной системе координат, а также в случае выполнения условия сферической симметрии.

В ходе проведения исследований была получена замкнутая система уравнений теории температурных напряжений. Кроме того, были рассмотрены модифицированные формы записи классических условий пластичности с учетом вязкого и упрочняющегося механизмов деформирования и показана их эквивалентность друг другу для случая сферической симметрии.

## Глава 2 Термодеформирование упрочняющихся упруговязкопластических сплошного шара при нестационарном температурном воздействии

Рассмотрим сплошной шар радиуса  $R$ . В начальный момент времени температура в теле постоянна и равна  $T_0$ . Поверхность шара нагревается со скоростью  $x$  до температуры  $T_m$ , причем справедливо выражение

$$\frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt}. \quad (2.1)$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние тела при температурном воздействии и отсутствии массовых и поверхностных сил. Аналогичная постановка задачи приводилась в [82] для упругопластической модели материала.

### 2.1 Решение задачи теплопроводности

Для поставленной задачи система уравнений, содержащая уравнение теплопроводности (1.20), начальное условие (1.21) и граничные условия (1.22) в центре шара и на его поверхности, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} &= \vartheta \cdot \left( \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} \right), \\ T(r, 0) &= T_0, \\ \frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} &= 1 - e^{-xt}, \\ \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Система уравнений (2.2) представляет собой замкнутую систему уравнений задачи теплопроводности относительно функции  $T(r, t)$ .

Преобразуем уравнение теплопроводности (1.20) к виду

$$r\dot{T} = \vartheta(rT)_{,rr}$$

и введем замену

$$\Psi(r, t) = r \frac{T(r, t) - T_m}{T_0 - T_m}. \quad (2.3)$$

Тогда уравнение теплопроводности, а также начальные и граничные условия относительно функции  $\Psi(r, t)$  запишутся в форме

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \vartheta \Psi_{,rr}, \\ \Psi(r, 0) &= r, \\ \Psi(0, t) &= 0, \\ \Psi(R, t) &= R e^{-xt}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Представим неизвестную функцию  $\Psi(r, t)$  в виде суммы функций  $U(r, t)$  и  $V(r, t)$ , причем  $U(r, t)$  должна удовлетворять только начальным и граничным условиям. Тогда для функции  $V(r, t)$  после ее выражения и подстановки в (2.4) будет справедлива система

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \vartheta V_{,rr} - [\dot{U} - \vartheta U_{,rr}], \\ V(r, 0) &= r - U(r, 0), \\ V(0, t) &= V(R, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пусть функция  $U(r, t)$  определяется соотношением

$$U(r, t) = r e^{-xt}.$$

Тогда система (2.5) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \vartheta V_{,rr} + x r e^{-xt}, \\ V(r, 0) &= 0, \\ V(0, t) &= V(R, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следуя [92], запишем решение задачи (2.6), представляющей собой неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных с однородными начальным и граничным условиями:

$$V(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{R} r\right)}{\frac{\pi n}{R}} \frac{x}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \left[ e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta t} - e^{-xt} \right]. \quad (2.7)$$

Возвращаясь к замене (2.3), приведем окончательное решение задачи теплопроводности в сплошном шаре в безразмерном виде

$$\Theta(\xi,t) = \frac{T(\xi,t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(-1)^n \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \frac{x}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \left[ e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta t} - e^{-xt} \right], \quad (2.8)$$

где  $\Theta(\xi,t)$  – безразмерная температура;

$\xi = r/R$  – безразмерная координата.

По полученным аналитическим зависимостям было построено распределение поля безразмерной температуры в теле в различных сечениях по времени, представленное на рисунке 1. Можно видеть, что областью с наибольшим температурным градиентом является поверхность шара, а также наблюдается постепенное уменьшение температурного градиента с течением времени вплоть до его полного исчезновения и установления во всем теле постоянной температуры.

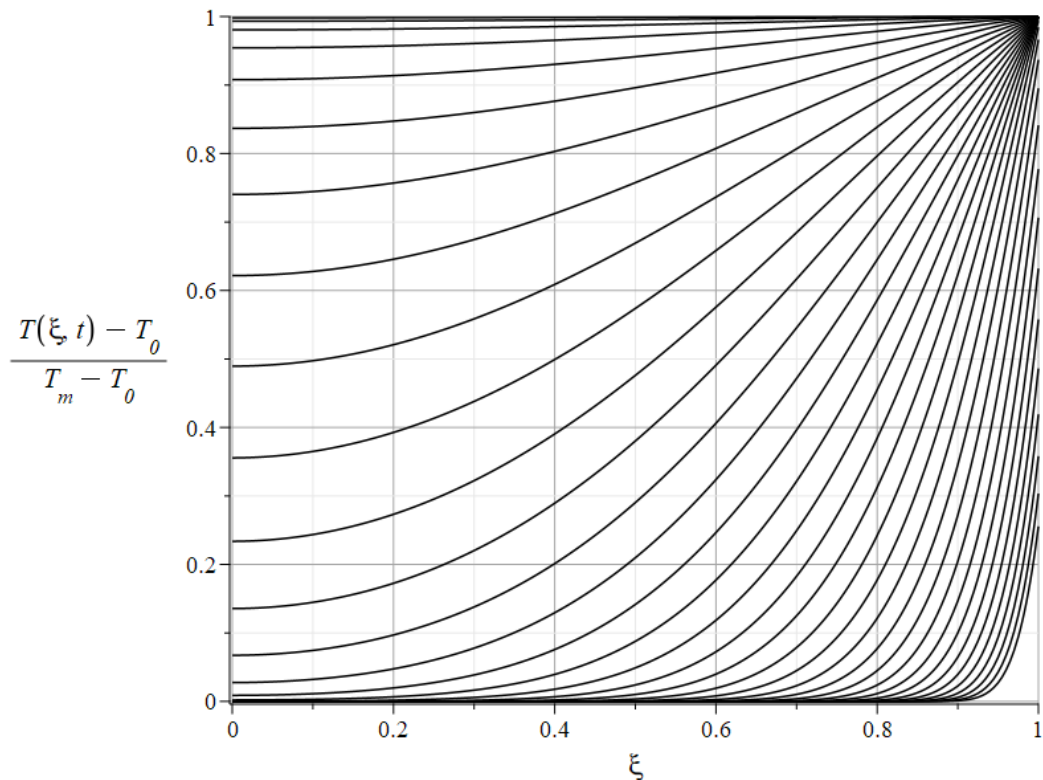


Рисунок 1 – Распределение поля безразмерной температуры

Аналогичный вывод о расположении в теле области с наибольшим температурным градиентом можно сделать, непосредственно проанализировав соотношение для безразмерной температуры (2.8).

Можно показать, что для случая мгновенного нагрева поверхности шара, т. е. при бесконечно большой скорости ее нагрева  $x \rightarrow \infty$ , решение (2.8) принимает вид, совпадающий с приведенным в [94, с. 105–107]:

$$\Theta(\xi, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \theta t}$$

Распределение поля безразмерной температуры для случая мгновенного нагрева шара в те же моменты времени, что и для случая нагрева шара с конечной скоростью, приведено на рисунке 2.

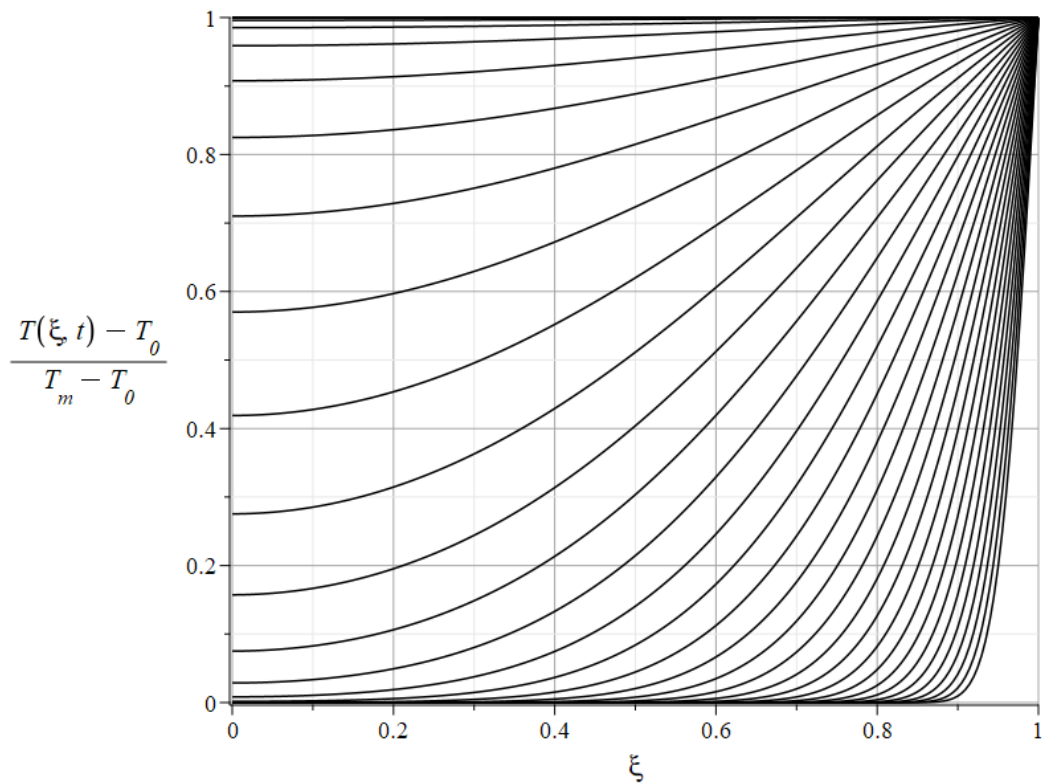


Рисунок 2 – Распределение поля безразмерной температуры при мгновенном нагреве поверхности

Очевидно, что при уменьшении скорости нагрева поверхности уменьшается скорость нагрева всего тела в целом, а для предельного случая  $x = 0$  изменения температуры не происходит.

## 2.2 Решение задачи механики деформируемого твердого тела

В разделе 1.2 были приведены основные соотношения теории температурных напряжений для упруговязкопластического упрочняющегося материала в условиях сферической симметрии. Предположим, что предел текучести материала, из которого изготовлен рассматриваемый сплошной шар, имеет линейную зависимость от температуры:

$$k(r, t) = k_0(1 - \gamma \Delta(r, t)), \quad (2.9)$$

где  $k_0$  – предел текучести материала при температуре  $T_0$ ;

$\gamma$  – коэффициент пропорциональности;

$$\Delta(r, t) = \alpha \cdot (T(r, t) - T_0).$$

Очевидно, что

$$\Delta(r, t) = \Delta_m \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right), \quad (2.10)$$

где  $\Delta_m = \alpha(T_m - T_0)$ .

Как указывалось ранее, введение в реологическую модель вязкостной составляющей приводит к возникновению частной производной по времени и, как следствие, возрастанию вычислительной сложности. Поэтому необходимо использовать неклассические подходы к решению данной задачи.

Исходя из того, что выражение для безразмерного поля температуры имеет вид (2.8), и температурный член в определяющих соотношениях имеет порядок не выше первого, отыскание неизвестных величин далее будет проводиться в предположении, что все они могут быть записаны в форме

$$F(r, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} F^{[n, j]}(r) e^{-h[n, j]t}, \quad (2.11)$$

где  $F(r, t)$  – рассматриваемая величина;

$[n, j]$  – индекс члена ряда по координате и времени соответственно;

$F^{[n, j]}(r)$  – функции, подлежащие определению;

$h^{[n,j]}$  – коэффициенты, определяемые соотношением

$$h^{[n,j]} = \begin{cases} \frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta & \text{при } j = 1, \\ x & \text{при } j = 2. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение функцию  $\delta(r, t) = 1$ . Очевидно, что для членов ее разложения (2.11) будет справедливо определение

$$\delta^{[n,j]} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \text{ и } j = 1, \\ 0 & \text{при } n \neq 0 \text{ или } j \neq 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Выражение для предела текучести (2.9) с учетом (2.11) и (2.12) примет вид

$$k(r, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} k_0 \left( \delta^{[n,j]} - \gamma \Delta^{[n,j]}(r) \right) e^{-h^{[n,j]} t}. \quad (2.13)$$

Нетрудно заметить, что уравнения (1.23)–(1.25), (1.27)–(1.29), граничные условия (1.34)–(1.35), а также условия сопряжения на упругопластических границах (1.33) после проведения разложения (2.11) могут быть приведены к форме

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} G^{[n,j]}(r) e^{-h^{[n,j]} t} = 0. \quad (2.14)$$

Вследствие того, что уравнения теории температурных напряжений выполняются в каждой точке тела  $0 \leq r \leq R$  на протяжении всего процесса  $t \geq 0$ , то в силу их произвольности из равенства нулю функциональных рядов (2.14) следует равенство нулю всех их членов

$$G^{[n,j]}(r) e^{-h^{[n,j]} t} = 0. \quad (2.15)$$

Поскольку экспонента величины  $h^{[n,j]} t$ , каждый из множителей которой есть действительное число, всегда принимает положительные значения и равна нулю только при  $t \rightarrow +\infty$ , то из (2.15) следует, что

$$G^{[n,j]}(r) = 0.$$

Приведенные выше рассуждения приводят к следующей системе уравнений относительно членов разложения неизвестных величин (здесь и далее для удобства изложения будут опущены индексы  $[n, j]$ ):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad (2.16)$$

$$\left| (\sigma_r - (c - \eta h)e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta h)e_\varphi^p) \right| = 2k(r), \quad (2.17)$$

$$e_r^p + 2e_\varphi^p = 0, \quad (2.18)$$

$$e_r^e + e_r^p = e_r = u_{r,r}, \quad (2.19)$$

$$e_\varphi^e + e_\varphi^p = e_\theta^e + e_\theta^p = e_\varphi = e_\theta = \frac{u_r}{r},$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu)\Delta(r), \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu)\Delta(r). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Граничными условиями, как следует из постановки задачи, являются отсутствие внешних нагрузок на поверхности шара и перемещений в его центре:

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=R} &= 0, \\ u_r \Big|_{r=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Полученная система уравнений (2.16)–(2.21) в каждый отдельный момент времени может рассматриваться как система, определяющая стационарную задачу о деформировании упрочняющегося упругопластического материала с коэффициентом упрочнения  $c - \eta h$ .

Пусть в начальный момент времени в теле полностью отсутствуют необратимые деформации, т. е. деформирование происходит в рамках теории упругих деформаций. Тогда из соотношений Коши (2.19) следует, что

$$e_r^e = (re_\varphi^e)_r \quad (2.22)$$

После подстановки выражения радиальной компоненты деформаций (2.22) в закон Дюамеля–Неймана (2.20) последнее с учетом уравнения равновесия (2.16) запишется в форме

$$(r\sigma_{r,r})_r + 3\sigma_{r,r} + 4\omega\Delta_{,r} = 0. \quad (2.23)$$

Уравнение (2.23) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение. Его непосредственное интегрирование приводит к выражению для



радиальной компоненты тензора напряжений, обратная подстановка которой в уравнение равновесия (2.16) позволяет определить окружную компоненту напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_r^e &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_e + \frac{B_e}{r^3} \right\}, \\ \sigma_\varphi^e &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_e - \frac{B_e}{2r^3} \right\},\end{aligned}\quad (2.24)$$

где  $\omega = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}$ .

Следствием соотношений Коши (2.19) является связь перемещений с окружной компонентой деформаций:

$$u_r = r e_\varphi. \quad (2.25)$$

Подстановка выражений напряжений (2.24) в закон Дюамеля–Неймана (2.20) и уравнение (2.25) приводит к выражению для радиальной компоненты вектора перемещений:

$$u_r^e = \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r A_e}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_e}{4\mu r^2} \right\}. \quad (2.26)$$

Для определения неизвестных постоянных следует воспользоваться граничными условиями на поверхности и в центре шара (2.21):

$$\begin{aligned}A_e &= \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\ B_e &= 0.\end{aligned}$$

Пусть нагрев шара происходит таким образом, что в некоторый момент времени  $t = t_p$  на его поверхности начинает выполняться условие пластичности (2.17) с положительным подмодульным выражением:

$$(\sigma_r - (c - \eta h) e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta h) e_\varphi^p) = 2k(r). \quad (2.27)$$

Тогда дальнейшее деформирование происходит в двух одновременно существующих областях: областью  $0 \leq r < a(t)$  обратимого деформирования и

областью  $a(t) \leq r \leq R$  – необратимого. Здесь и далее будем обозначать  $a(t)$  положение упругопластической границы, разделяющей указанные выше зоны.

Исключая из соотношений Коши (2.19) перемещения, можно получить связь упругих и пластических деформаций в теле:

$$e_r^e + e_r^p = \left[ r(e_\phi^e + e_\phi^p) \right]_{,r}. \quad (2.28)$$

Подстановка закона Дюамеля–Неймана (2.20) в соотношение (2.28) с учетом уравнения равновесия (2.16) приводит к уравнению

$$(r\sigma_{r,r})_{,r} + 3\sigma_{r,r} + 2\omega \left[ 2\Delta_{,r} - e_{r,r}^p - \frac{3e_r^p}{r} \right] = 0. \quad (2.29)$$

Решая его и полагая распределение пластических деформаций известным, получим выражение радиальной компоненты напряжений через необратимые деформации:

$$\sigma_r = 2\omega \int_a^r \frac{e_r^p(\rho, t)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega}{r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_p + \frac{B_p}{r^3}. \quad (2.30)$$

Используя уравнение равновесия (2.16) и условие пластической несжимаемости (2.18), приведем условие пластичности (2.27) к виду

$$r\sigma_{r,r} + 3(c - \eta h)e_r^p = 2k(r) \quad (2.31)$$

Подстановкой уравнения связи компонент напряжений и деформаций (2.30) в соотношение (2.31) получим линейное алгебраическое уравнение. Решая его, определим выражение для радиальной компоненты необратимых деформаций:

$$e_r^p = -\frac{4k(r)}{3\eta(\Omega - h)} + \frac{4\omega}{3\eta(\Omega - h)}\Delta(r) - \frac{4\omega}{\eta(\Omega - h)}\frac{1}{r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{\eta(\Omega - h)}\frac{B_p}{r^3}, \quad (2.32)$$

$$\text{где } \Omega = \frac{3c + 2\omega}{3\eta}.$$

При обратной подстановке (2.32) в (2.30) получается окончательное выражение для компонент напряжений в пластической области:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^p &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + A_p + \frac{B_p}{r^3} \right\} + \\
&+ \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)} \left[ -4 \int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{B_p}{r^3} \right], \\
\sigma_\phi^p &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_p - \frac{B_p}{2r^3} \right\} + \\
&+ \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)} \left[ -4 \int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - 2k(r) - \frac{2\omega}{r^3} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + 2\omega \Delta(r) + \frac{B_p}{2r^3} \right].
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Из соотношений Коши (2.19) следует, что

$$u_r = \left[ r(e_\phi^e + e_\phi^p) \right]_{,r}$$

или

$$\begin{aligned}
u_r^p &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + \frac{rA_p}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_p}{4\mu r^2} \right\} + \\
&+ \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)(3\lambda + 2\mu)} \left[ -4r \int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{B_p}{r^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Поскольку соотношения, используемые для определения поведения тела в зоне упругости, не изменились, то уравнения (2.24) и (2.26) также описывают напряжения и перемещения в данной области. Неизвестные интегрирования в выражениях (2.24), (2.26), (2.33) и (2.34) подлежат определению из граничных условий и условий сопряжения напряжений и перемещений на упругопластической границе  $a(t)$ :

$$\begin{aligned}
A_e &= \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \\
&+ \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{a^3} \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right], \\
A_p &= \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \\
&+ \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right], \\
B_e &= 0, \quad B_p = -4\omega \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho.
\end{aligned}$$

Для определения положения упругопластической границы  $a(t)$  можно использовать одно из приведенных ниже условий, являющимися эквивалентными и выбираемыми исходя из удобства формы их записи:

- отсутствие на границе пластических деформаций;
- достижение упругими напряжениями (2.24) уровня, соответствующего началу пластического течения и выполнению условия пластичности (2.27);
- выполнение условия сопряжения окружной компоненты напряжений на границе.

Можно показать, что все три приведенных выше условия сводятся к виду

$$\begin{aligned}
e_r^p(a, t) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( (-1)^{j+1} \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})} \times \right. \\
&\times \left. \left\{ 2\Delta^{[n,j]}(a) - \frac{2k^{[n,j]}(a)}{\omega} - \frac{6}{a^3} \int_0^a \rho^2 \Delta^{[n,j]}(\rho) d\rho \right\} e^{-h^{[n,j]}t} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Численное решение уравнения (2.35) в фиксированный момент времени  $t \geq t_p$  позволяет получить положение границы  $a(t)$ . Стоит отметить, поскольку положение границы  $a(t)$  должна определяться однозначно, то вместо решения уравнений для каждого члена разложения радиальной компоненты пластических деформаций, решается полное уравнение (2.35).

По мере нагревания шара градиент температуры в нем постепенно уменьшается, что приводит к уменьшению температурных напряжений и, как следствие, замедлению необратимого деформирования. Согласно ассоциированному закону, уровень накопленных деформаций в теле не может снижаться, т. е. скорость изменения пластических деформаций не может быть отрицательной.

Рассмотрим момент времени  $t = t_u$ , который соответствует прекращению процесса необратимого деформирования на поверхности шара и выполнению условия

$$\dot{\epsilon}_r^p = 0. \quad (2.36)$$

Таким образом, при  $t > t_u$  в теле существуют сразу три области: помимо уже развитых зон упругого и упруговязкопластического деформирования, разделенных границей  $a(t)$ , зарождается область разгрузки материала, отделяемая от пластической зоны границей  $b(t)$ . Области разгрузки характерно сохранение в каждой точке  $b(t) \leq r \leq R$  уровня накопленных необратимых деформаций  $\hat{\epsilon}^p$  без его увеличения.

Уравнение (2.29) в зоне разгрузки принимает вид

$$(r\sigma_{r,r})_{,r} + 3\sigma_{r,r} + 2\omega \left[ 2\Delta_{,r} - \hat{\epsilon}_{r,r}^p - \frac{3\hat{\epsilon}_r^p}{r} \right] = 0, \quad (2.37)$$

Поскольку в каждой точке шара известен уровень накопленных деформаций, решение уравнения (2.37) сразу приводит к окончательным выражениям для компонент напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r^u &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_u + \frac{B_u}{r^3} \right\} + 2\omega \int_b^r \frac{\hat{\epsilon}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho, \\ \sigma_\phi^u &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_u - \frac{B_u}{2r^3} \right\} + 2\omega \left[ \int_b^r \frac{\hat{\epsilon}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \hat{\epsilon}_r^p(r) \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

По аналогии с (2.34) для области разгрузки перемещения определяются выражением

$$u_r^u = \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r A_u}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_u}{4\mu r^2} \right\} + \frac{2\omega}{3\lambda + 2\mu} r \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho. \quad (2.39)$$

В уже существующих областях напряжения и перемещения определяются по формулам (2.24), (2.26), (2.33) и (2.34) с точностью до новых постоянных:

$$\begin{aligned} A_e &= \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \\ &+ \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{a^3} \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - \\ &- 2\omega \int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho, \\ A_p &= \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \\ &+ \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - 2\omega \int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho, \\ A_u &= \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho, \\ B_e &= 0, \quad B_p = -4\omega \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad B_u = -4\omega \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Координата упругопластической границы  $b(t)$  в процессе разгрузки определяется из условия отсутствия на ней приращения пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \dot{e}_r^p(b, t) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( (-1)^{j+1} \frac{-2h^{[n,j]}\omega}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})} \times \right. \\ &\times \left. \left\{ 2\Delta^{[n,j]}(b) - \frac{2k^{[n,j]}(b)}{\omega} - \frac{6}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta^{[n,j]}(\rho) d\rho \right\} e^{-h^{[n,j]}t} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Далее, необходимо обратиться к вопросу определения уровня накопленных деформаций  $\hat{e}^p$ . Поскольку положение границы  $b(t)$  определяется в каждый момент времени непрерывной и монотонно убывающей функцией, то существует обратная ей функция  $s(b)$ . Тогда уровень необратимых деформации в точке

определяется величиной пластической деформации при прохождении упругопластической границы  $b(t)$  через эту точку:

$$\hat{e}_r^p(r) = e_r^p(r, s(r)) \quad (2.41)$$

Поскольку величина  $\hat{e}_r^p$  определяет уровень накопленных необратимых деформаций и, как следствие, не изменяется при дальнейшем процессе деформирования, то из всех членов ее разложения в функциональный ряд остается единственное слагаемое:

$$\hat{e}_r^{p[n,j]}(r) = \begin{cases} \sum_{m=1}^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m+1} e_r^{p[l,m]}(r) e^{-h[l,m]s(r)} & \text{при } n=0 \text{ и } j=1, \\ 0 & \text{при } n \neq 0 \text{ или } j \neq 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

Тогда в уравнениях (2.38) и (2.39) слагаемые, содержащие накопленные деформации, присутствуют только для членов рядов с индексами  $[0, 1]$ .

В зависимости от уровня необратимых деформаций в теле и скорости его нагрева возможно существование момента  $t = t_r$ , который характеризуется возникновением на поверхности шара области повторной пластичности, для которого выполняется условие пластичности (2.17) с отрицательным подмодульным выражением:

$$(\sigma_r - (c - \eta h)e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta h)e_\varphi^p) = -2k(r). \quad (2.43)$$

Нетрудно видеть, что в новой области  $c(t) \leq r \leq R$  выражения для напряжений и перемещений совпадают с выражениями (2.33) и (2.34) из первой области пластического течения  $a(t) \leq r < b(t)$  с точностью до знака перед пределом интегрирования:

$$\begin{aligned}\sigma_r^r = & \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + A_r + \frac{B_r}{r^3} \right\} + \\ & + \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)} \left[ 4 \int_c^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^3} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{B_r}{r^3} \right],\end{aligned}\quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\phi^r = & \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_r - \frac{B_r}{2r^3} \right\} + \\ & + \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)} \left[ 4 \int_c^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + 2k(r) - \frac{2\omega}{r^3} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + 2\omega \Delta(r) + \frac{B_r}{2r^3} \right], \\ u_r^r = & \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + \frac{rA_r}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_r}{4\mu r^2} \right\} + \\ & + \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h)(3\lambda + 2\mu)} \left[ 4r \int_c^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \int_c^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{B_r}{r^2} \right].\end{aligned}\quad (2.45)$$

Выражения констант интегрирования для варианта нагружения, при котором на протяжении некоторого времени в теле присутствуют все четыре области деформирования, имеют вид

$$\begin{aligned}A_e = & \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \\ & + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{a^3} \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - \\ & - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_c^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{c^3} \int_0^c \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right], \\ A_p = & \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \\ & + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{b^3} \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - \\ & - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_c^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{c^3} \int_0^c \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right],\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
A_u &= \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho - \\
&\quad - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_c^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{1}{c^3} \int_0^c \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right], \\
A_r &= \frac{4\omega}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \\
&\quad - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)} \int_c^R \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)} \left[ \frac{1}{R^3} \int_0^R \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right], \\
B_e &= 0, \quad B_p = -4\omega \int_0^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad B_u = -4\omega \int_0^b \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad B_r = -4\omega \int_0^c \rho^2 \Delta(\rho) d\rho.
\end{aligned}$$

Положение границы  $c(t)$  определяется из соображений, аналогичных определению границы  $a(t)$ , однако вместо условия отсутствия пластических деформаций рассматривается условие равенства новых и накопленных деформаций:

$$\begin{aligned}
e_r^p(c, t) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( (-1)^{j+1} \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})} \times \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ 2\Delta^{[n,j]}(c) + \frac{2k^{[n,j]}(c)}{\omega} - \frac{6}{c^3} \int_0^c \rho^2 \Delta^{[n,j]}(\rho) d\rho \right\} e^{-h^{[n,j]}t} \right) = \hat{e}_r^p(c).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Поскольку упругопластические границы в теле двигаются с неодинаковыми скоростями, то в процессе деформирования существует такой момент времени  $t = t_d$ , при котором граница  $b(t_d)$  достигает положение границы  $a(t_d)$ , то есть первая область пластического течения перестает существовать. Тогда указанные упругопластические границы достигают своего предельного положения  $a(t_d) = b(t_d) = b'$ , и во всей области  $0 \leq r \leq c(t)$  наступает состояние разгрузки.

При полном нагреве тела вследствие достижения температурного равновесия с температурой  $T_m$  за характерное время  $t = t_m$  граница  $c(t)$  достигает своего предельного положения  $c'$ , и в области  $c' \leq r \leq R$  фиксируется уровень накопленных деформаций  $\tilde{e}_r^p$ , выражение для которых имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_r^p(r) &= e_r^p(r, t_m) = \\
&= \sum_{j=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( (-1)^{j+1} \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})} \left\{ 2\Delta_m^{[n,j]} + \frac{2k_m^{[n,j]}}{\omega} - \frac{6}{r^3} \int_0^r \rho^2 \Delta_m^{[n,j]} d\rho \right\} e^{-h^{[n,j]} t_m} \right) = (2.47) \\
&= \sum_{j=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{j+1} \frac{4k_0(\delta^{[n,j]} - \gamma\Delta_m^{[n,j]})}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})} e^{-h^{[n,j]} t_m} = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку при полном нагреве величина безразмерной температуры во всем теле достигает значения 1 и больше не зависит от времени, то величина  $\Delta_m$  имеет только нулевой член разложения. Тогда

$$\tilde{e}_r^p(r) = \frac{4k_0(1 - \gamma\Delta_m)}{3\eta\Omega}. \quad (2.48)$$

Для простоты дальнейших записей введем обобщенную функцию остаточных деформаций

$$\bar{e}_r^p(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < b', \\ \hat{e}_r^p(r), & b' \leq r < c', \\ \tilde{e}_r^p(r), & c' \leq r \leq R. \end{cases} \quad (2.49)$$

Пусть теперь шар охлаждают до начальной температуры. При полном остывании поле безразмерной температуры во всем теле становится равным 0. Следовательно,

$$\Delta(r, t) = 0. \quad (2.50)$$

Поскольку процесс остывания освобождает тело от внешних воздействий, то он влечет за собой разгрузку материала. Подстановка в (2.38) и (2.39) обобщенной функции остаточных деформаций (2.48) и условия остывания тела (2.50) позволяет получить выражения для определения остаточных напряжений и перемещений в теле

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_r &= 2\omega \int_R^r \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho, \\
\bar{\sigma}_\varphi &= 2\omega \int_R^r \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + 2\omega \bar{e}_r^p(r),
\end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\bar{u} = \frac{2\omega}{3\lambda + 2\mu} r \int_R^r \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho. \quad (2.52)$$

Стоит отметить, что рассуждения, представленные в данном разделе, справедливы и для процесса охлаждения тела с его дальнейшим нагревом. Поскольку поле температур рассматривалось в безразмерной форме, вид приведенных выше выражений не изменится.

С целью дальнейшего сравнения моделей, учитывающих отдельно взятые реологические свойства материала, следует совершить ряд предельных переходов.

Классическим методом для исключения из рассмотрения вязкостных характеристик материала является устремление времени процесса к бесконечности. Однако в случае нестационарного внешнего воздействия применение данного подхода не позволяет в должной мере оценить напряженно-деформированное состояние тела. Поэтому для достижения поставленной задачи следует устремить коэффициент вязкости  $\eta$  к нулю. Это приведет к преобразованию комбинации механически параметров типа  $3\eta(\Omega - h)$  к виду  $3c + 2\omega$ .

При необходимости рассмотрения модели материала, не учитывающей его упрочнение, следует приравнять коэффициент упрочнения  $c$  к нулю.

Несложно убедиться, что применение сразу обоих предельных переходов, описанных выше, позволяет получить выражения для напряжений и перемещений во всех областях деформирования для случая упругопластического материала, представленного в [82].

Дальнейшее исследование влияния реологических свойств материала на напряженно-деформированное состояние тела будем проводить для четырех моделей сплошных сред, обозначенных следующими индексами:

- $c\eta$  – модель упрочняющегося упруговязкопластического материала;
- $\eta$  – модель упруговязкопластического материала без упрочнения;
- $c$  – модель упрочняющегося упругопластического тела;
- $i$  – модель упругопластического тела.

В качестве примера рассматривается материал со следующими свойствами:  $\vartheta = 1,172 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $k_0 = 2,0 \cdot 10^8 \text{ Па}$ ,  $\lambda = 9,2 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 4,3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\eta = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\gamma = 70,6$ . Кроме того, зададимся размером шара и параметрами его нагрева:  $R = 0,2 \text{ м}$ ,  $\Delta_m = 8,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $x = 1 \text{ с}^{-1}$ .

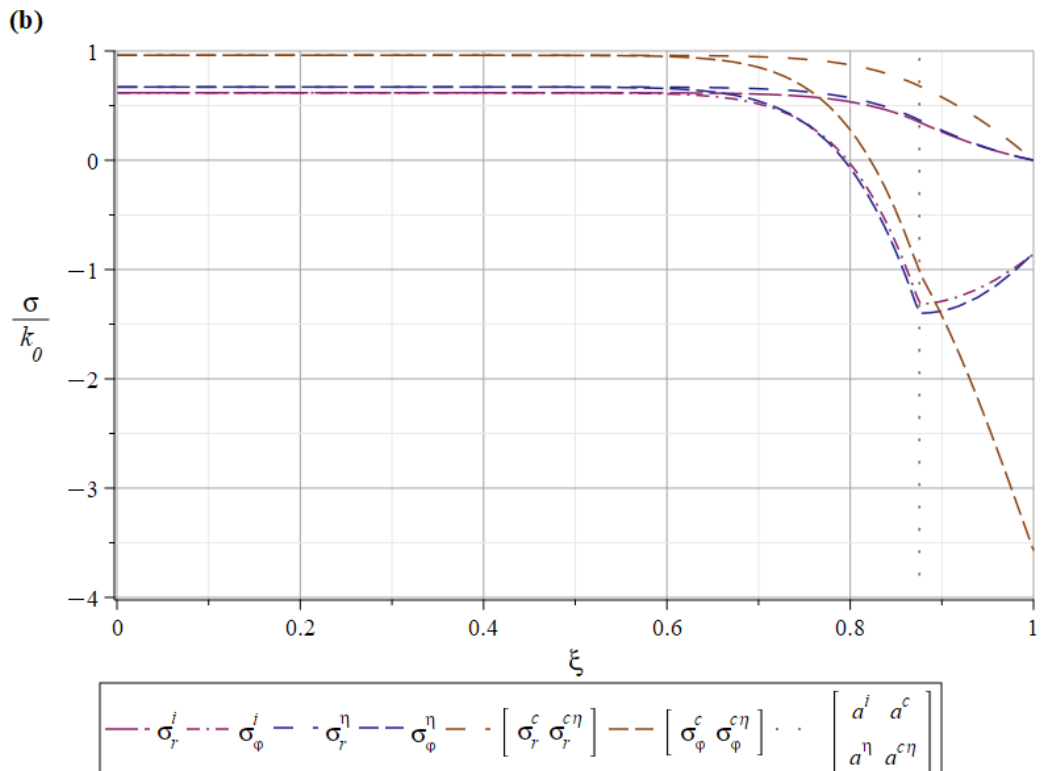
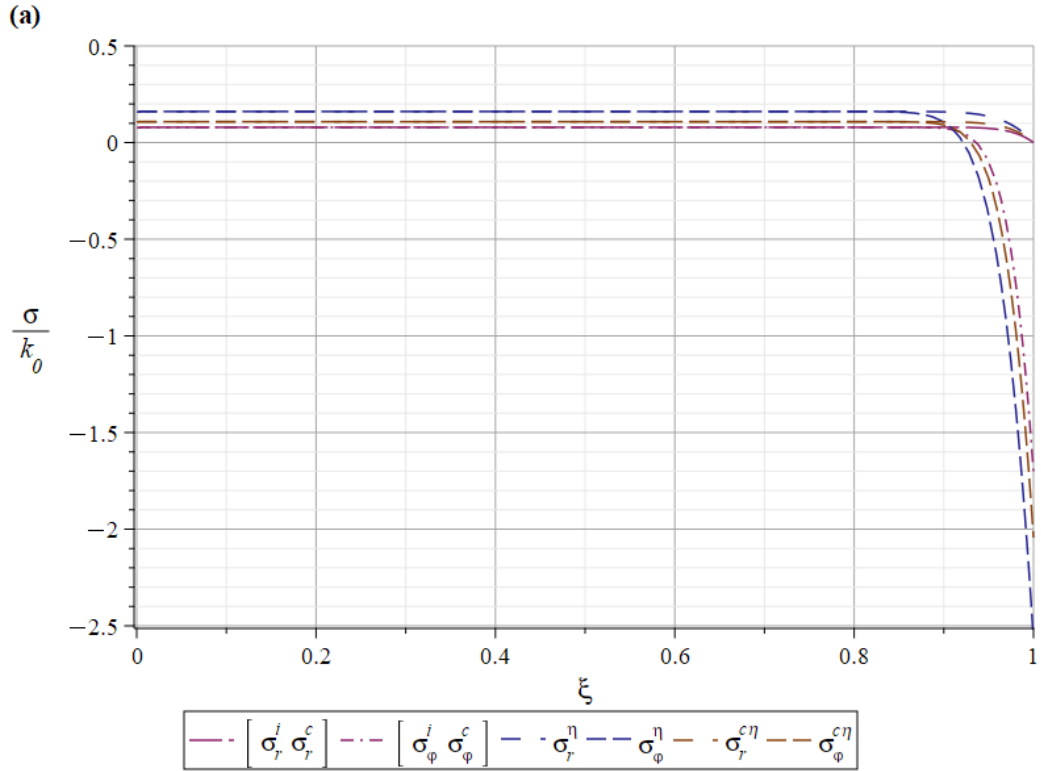
Как указывалось ранее, в процессе деформирования тела существуют несколько ключевых моментов времени, определяемых из конкретных условий. В таблице 1 приведены значения этих моментов, а также определены положения упругопластических границ для каждого из них и их относительные отклонения для различных моделей сред. Интересным фактом является то, что все значения, приведенные в столбцах для упругопластического и упрочняющегося упругопластического тела идентичны (см. столбец  $c - i$ ). Это связано с отсутствием для данных случаев в уравнениях механики твердого тела временного фактора в явном виде, в отличие от моделей с присутствующими вязкостными характеристиками.

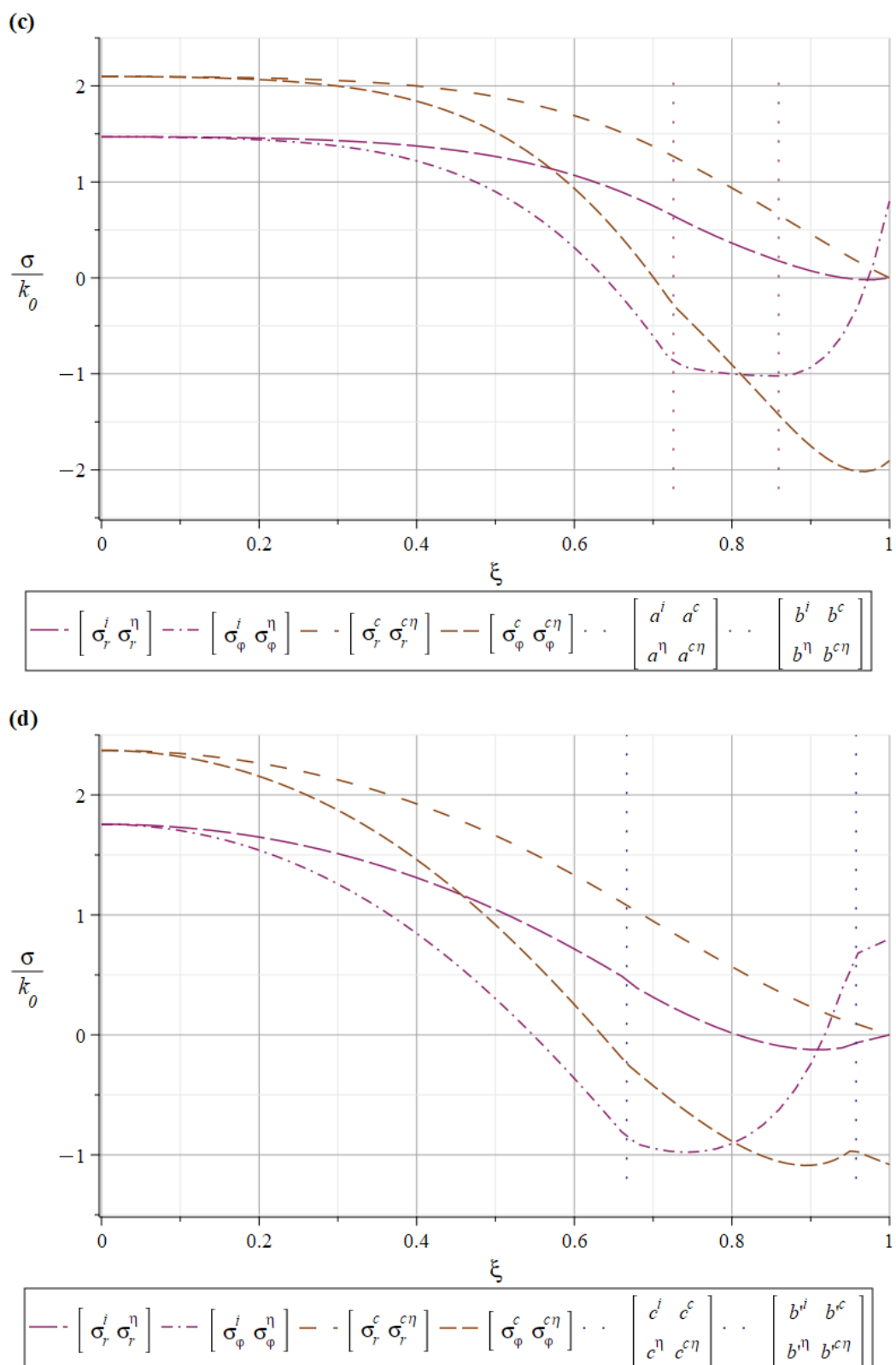
Таблица 1 – Значения характерных величин

Величина	Модель среды				Относительное отклонение, %				
	$i$	$c$	$\eta$	$c\eta$	$c - i$	$c\eta - \eta$	$\eta - i$	$c\eta - c$	$c\eta - i$
$t_p, \text{ с}$	0,282	0,282	0,475	0,352	0,000	25,94	68,76	24,98	24,98
$t_u, \text{ с}$	2,988	2,988	3,179	3,058	0,000	3,819	6,417	2,353	2,353
$t_r, \text{ с}$	11,76	11,76	11,97	11,83	0,000	1,158	1,801	0,622	0,622
$t_d, \text{ с}$	25,32	25,32	25,49	25,38	0,000	0,414	0,684	0,267	0,267
$a(t_u)$	0,876	0,876	0,875	0,876	0,000	0,046	0,054	0,008	0,008
$a(t_r)$	0,726	0,726	0,725	0,726	0,000	0,044	0,051	0,007	0,007
$b(t_r)$	0,859	0,859	0,859	0,859	0,000	0,049	0,057	0,008	0,008
$a' = b'$	0,666	0,666	0,667	0,666	0,000	0,002	0,002	0,000	0,000
$c(t_d)$	0,957	0,957	0,958	0,957	0,000	0,005	0,006	0,001	0,001
$c'$	0,790	0,790	0,790	0,790	0,000	0,001	0,003	0,001	0,001

На рисунке 3 представлены распределения радиальной и окружной компонент напряжений в шаре для всех моделей сред. Для упругопластического материала данные графики в точности совпадают с приведенными в [82]. Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что введение в рассмотрение параметра упрочнения приводит к существенному изменению величины напряжений, в то

время как влияние на них вязкостных характеристик материала быстро уменьшается с течением времени. Аналогичный вывод можно сделать, анализируя распределение остаточных напряжений в теле (рисунок 4), из которого, как и из формулы (2.48), следует, что величина остаточных напряжений при полном нагреве тела не зависит от вязкости в явном виде.





(a) – момент  $t_p$ ; (b) – момент  $t_u$ ; (c) – момент  $t_r$ ; (d) – момент  $t_d$

Рисунок 3 – Распределение безразмерных напряжений

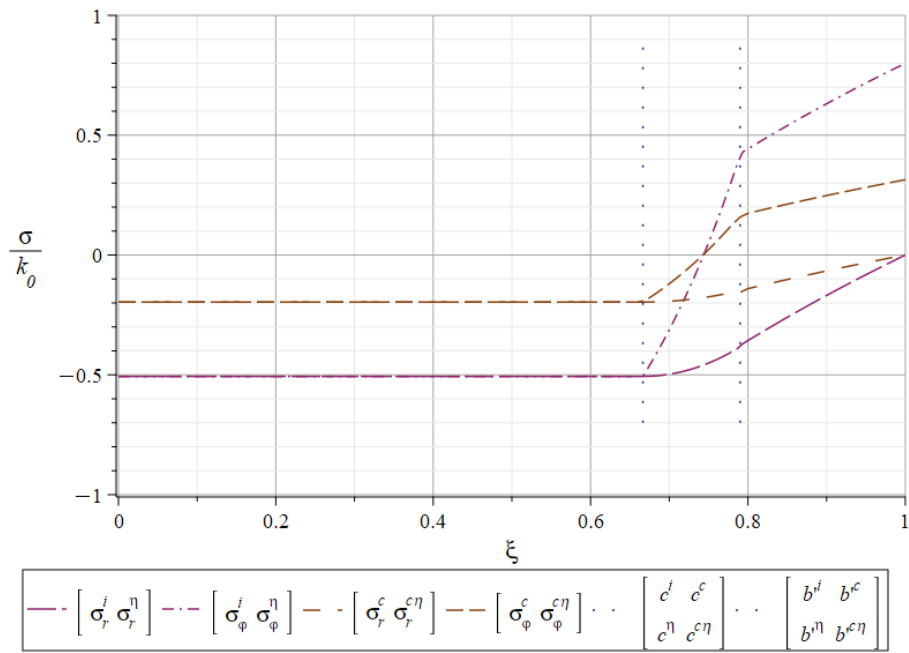


Рисунок 4 – Распределение безразмерных остаточных напряжений

Из рисунка 5 следует, что остаточные перемещения для моделей, проявляющих упрочняющееся поведение, по абсолютной величине существенно меньше, чем для моделей без упрочнения. Для наглядности на данном рисунке значения перемещений были увеличены в 10000 раз.

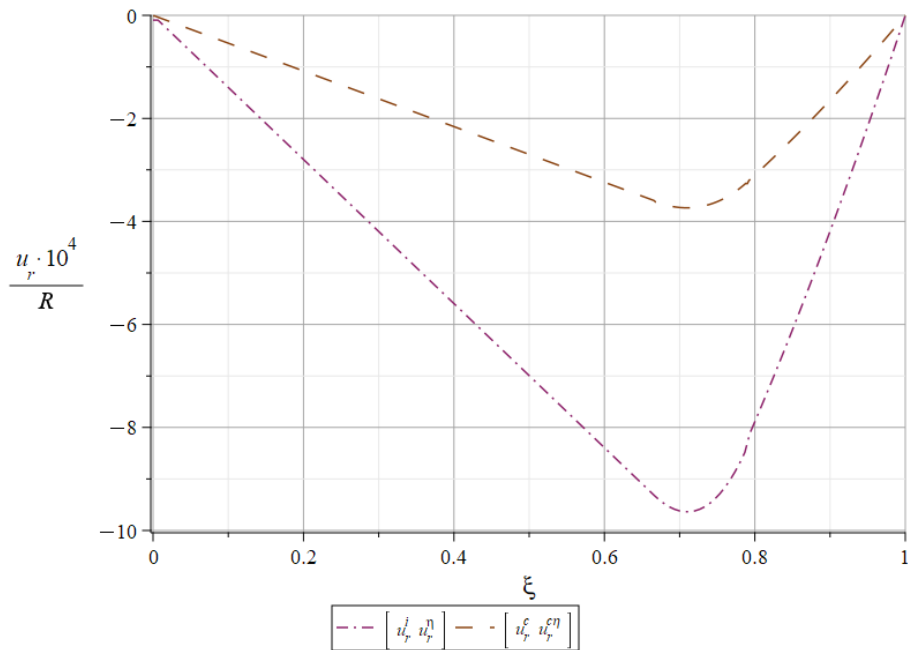


Рисунок 5 – Распределение безразмерных остаточных перемещений

Взаимное расположение упругопластических границ  $a(t)$  и  $b(t)$ , приведенное на рисунке 6, позволяет сформировать представление о размерах области первого пластического течения, ограниченной построенными кривыми, а также о ее расположении в теле в различные моменты времени. Нижняя область графика относится к области упругого деформирования, а верхняя – к зоне разгрузки. На данном рисунке видно, что зависимость положения границы  $b(t)$  от времени близка к линейной, а скорость ее движения выше, чем для границы  $a(t)$ , которая приближается к своему предельному положению более плавно.

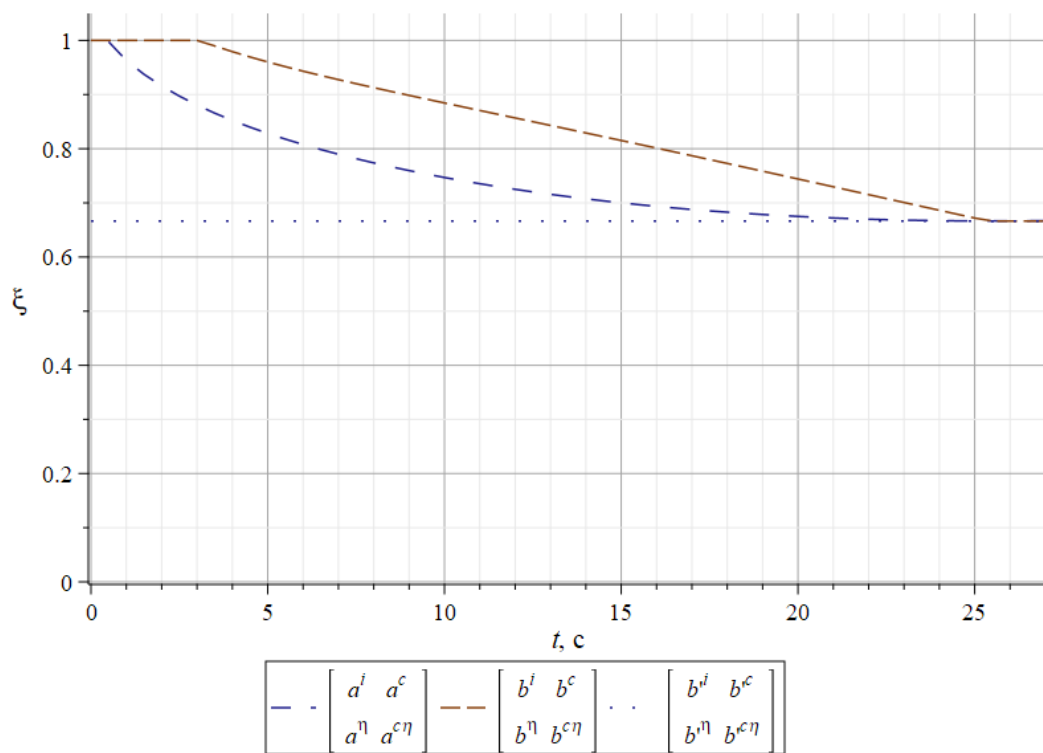


Рисунок 6 – Безразмерная координата упругопластических границ  $a(t)$  и  $b(t)$

Исходя из данных, приведенных в таблице 1 и на рисунке 6 можно сделать вывод, что для всех четырех реологических моделей сред предельное положение упругопластических границ имеет практически одинаковые радиальные координаты.



## 2.3 Численное моделирование

Далее, с целью верификации полученного аналитического решения выполним численное моделирование поставленной задачи. В современных пакетах и системах анализа методом конечных элементов в явном виде не представлена реологическая модель среды, рассматриваемая в настоящей работе. Однако, необходимые свойства могут быть получены путем комбинации других моделей. Рассмотрим две из них.

В качестве условия пластичности в модели кинематического упрочнения Шабоща (*Chaboche kinematic hardening*) [95–96, 98] рассматривается условие Мизеса в форме

$$\frac{3}{2}(\sigma' - \chi')^2 = \sigma_y^2, \quad (2.53)$$

а введение в рассмотрение скорости пластических деформаций в модели экспоненциального вязкого упрочнения (*exponential visco-hardening, EVH*) [98] осуществляется соотношением

$$\dot{e}_{eq}^p = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma - \bar{\sigma}_0}{K_i} \right)^{1/m_i}. \quad (2.54)$$

В (2.53)–(2.54)  $\sigma'$  и  $\chi'$  обозначают девиаторы тензоров действительных  $\sigma$  и остаточных  $\chi$  напряжений;

$\sigma_y$  – предел текучести;

$\bar{\sigma}_0$  – условный предел текучести;

$m_i$  – некоторые параметры, которые могут быть определены эмпирическим путем;

$K_i$  – параметры вязкости.

Величина  $\bar{\sigma}_0$  определяется по формуле

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_y + R_0 e_{eq}^p + R_\infty \left( 1 - e^{-be_{eq}^p} \right), \quad (2.55)$$

где  $R_0$  – коэффициент линейного упрочнения;

$R_\infty$  – коэффициент экспоненциального упрочнения;

$b$  – скорость насыщения.

Аналогом ассоциированного закона пластического течения для модели Шабоса является выражение

$$d\chi = \frac{2}{3} \bar{c} de^p - \varsigma \chi d\bar{e}^p, \quad (2.56)$$

где  $\bar{c}$  и  $\varsigma$  – параметры материала;

$\bar{e}^p$  – амплитуда изменения пластических деформаций.

Нетрудно видеть, что предельный переход  $\varsigma \rightarrow 0$  приводит к преобразованию модели Шабоса к модели линейного трансляционного упрочнения Ишлинского–Прагера [97], а при  $\bar{c} = 3c/2$  и  $\sigma_y = 2k(r, t)$  соотношения (2.53) и (2.56) в точности переходят в (1.26) при отсутствии вязкости ( $\eta = 0$ ).

Как и для модели кинематического упрочнения Шабоса, для модели экспоненциального вязкого упрочнения возможно совершить предельный переход к одной из модификаций модели среды, для которой проводилось аналитическое решение. Действительно, если задать значения коэффициентов  $n = 1$ ,  $m_1 = 1$ ,  $K_1 = \eta$ ,  $\sigma_y = 2k(r, t)$ ,  $R_0 = R_\infty = 0$ , соотношения (2.54)–(2.55) примут ту же форму, что и (1.26) без учета упрочнения ( $c = 0$ ).

Таким образом, модель для проведения вычислительного эксперимента строится на реологических моделях классического изотропного сжимаемого упругого тела, подверженного температурным воздействиям, модели кинематического упрочнения Шабоса (2.53), (2.56) и модели экспоненциального вязкого упрочнения (2.54), (2.55).

Правомерным допущением при проведении вычислительного эксперимента вследствие выполнения условия сферической симметрии является исследование на плоскости сектора  $90^\circ$  диаметрального сечения шара. Один из его радиусов может быть определен в модели в качестве оси вращения, а на втором дополнительно задается условие симметрии. На рисунке 7 приведена применяемая конечно-элементная модель, на которой зеленым обозначена ось вращения, желтым – ребро,

являющееся осью симметрии, красным – дуга, на которой задаются температурные граничные условия.

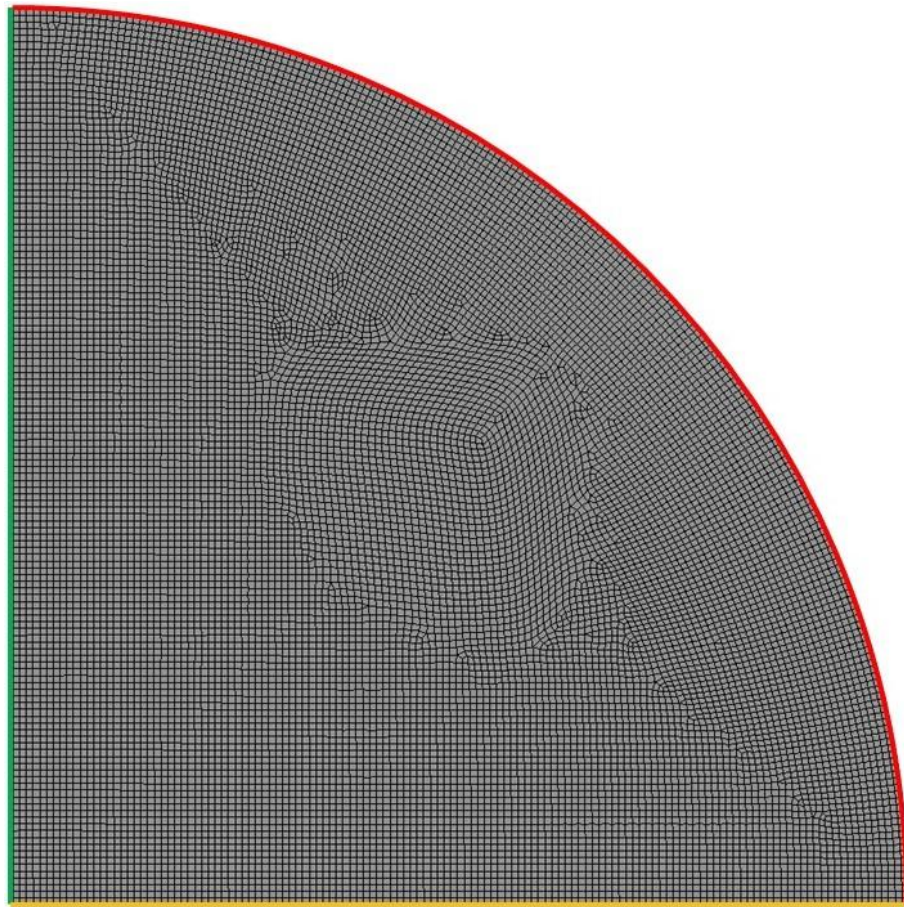


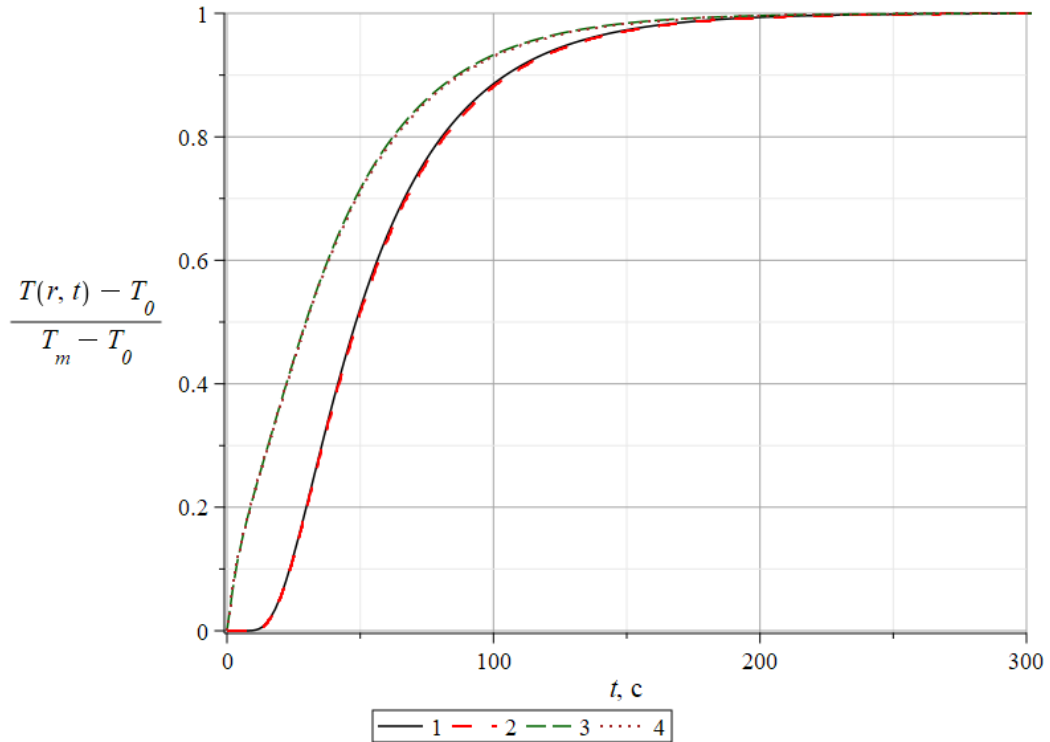
Рисунок 7 – Расчетная модель

Поскольку температура является функцией двух переменных, то для анализа полученных результатов целесообразно перейти от нее к функциям одной переменной, в частности, радиуса. Вследствие того, что значение температуры на поверхности задано в явном виде, ее сравнение не является информативным. Поэтому вместо нее рассмотрим значение в центре шара.

Ввиду того, что необходимо провести оценку результатов во всей геометрической области, дополнительно исследуем среднее интегральное значение температуры, определяемое выражением

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{R} \int_0^R T(r, t) dr. \quad (2.57)$$

График наложения перечисленных величин, полученных аналитическим (с верхним индексом  $A$ ) и численным (с верхним индексом  $Ч$ ) путем, представлен на рисунке 8.



$$1 - \bar{T}^A(t); 2 - \bar{T}^Ч(t); 3 - T^A(0,t); 4 - T^Ч(0,t)$$

Рисунок 8 – Распределение безразмерной температуры

Анализ графических зависимостей позволяет установить, что полученные аналитические выражения в достаточной мере адекватно описывают процесс нагрева тела.

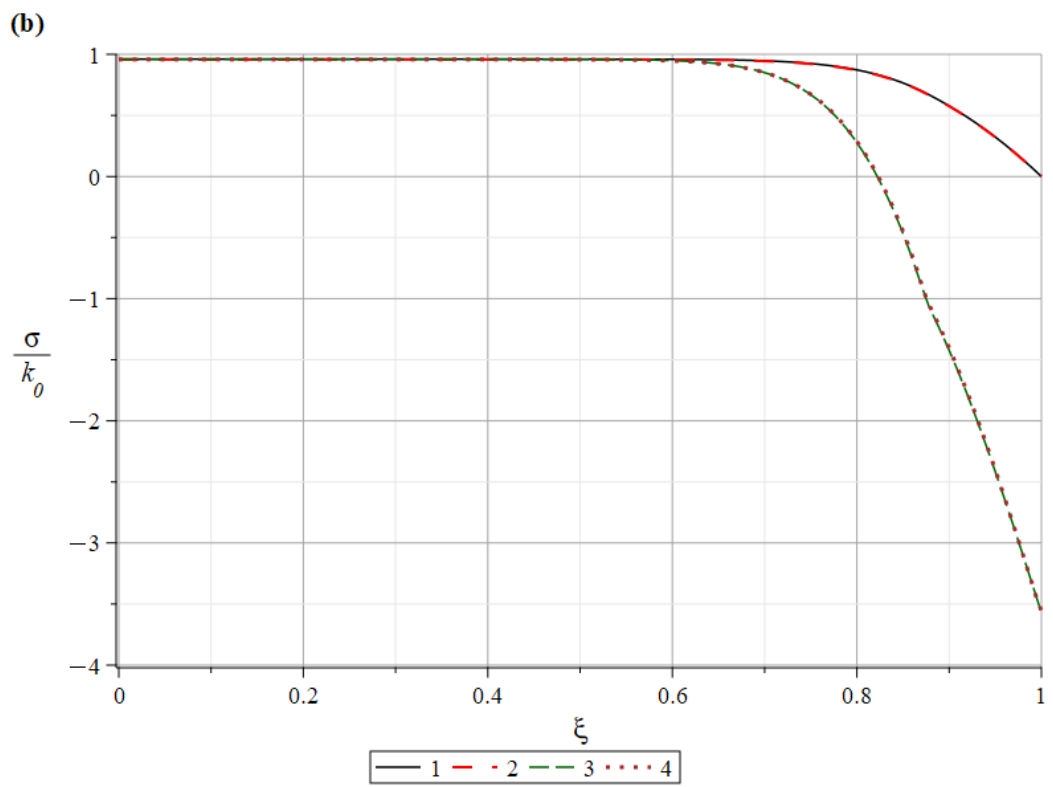
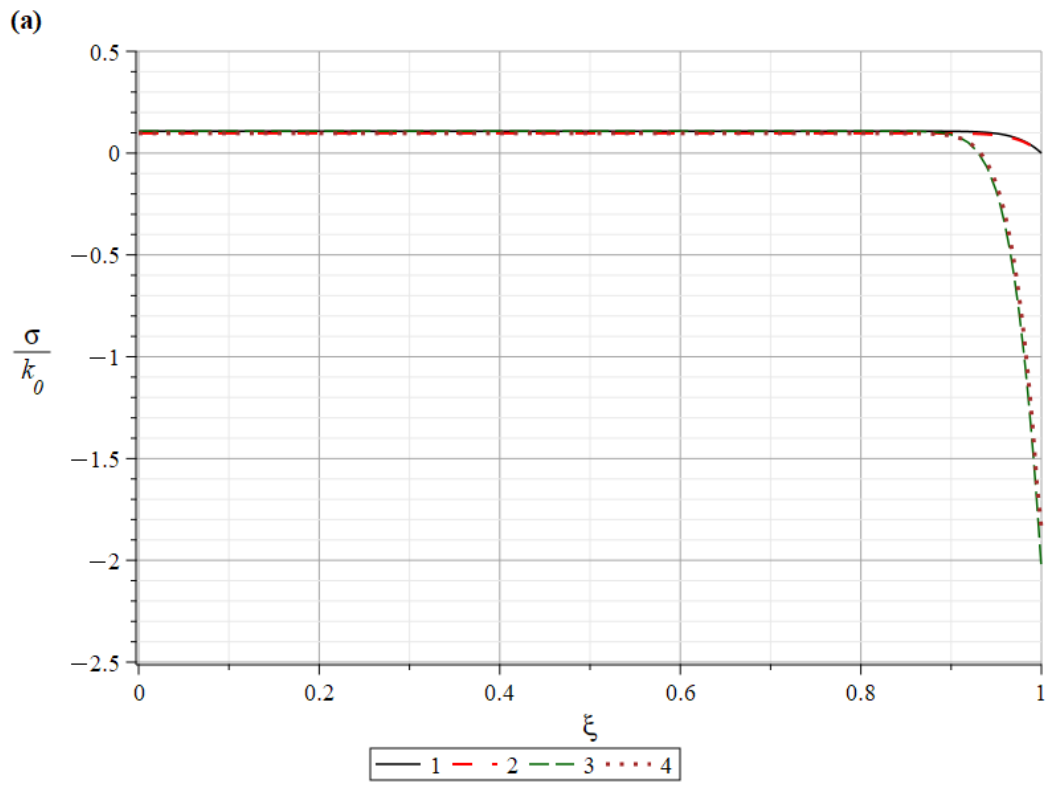
При аналитическом решении задачи механики деформируемого твердого тела были определены значения моментов времени возникновения и вырождения областей с различающимися реологическими свойствами, а также предельные положения упругопластических границ. Аналогичные величины были определены в ходе вычислительного эксперимента. Данные результаты вместе с относительным отклонением представлены в сравнительной таблице 2.

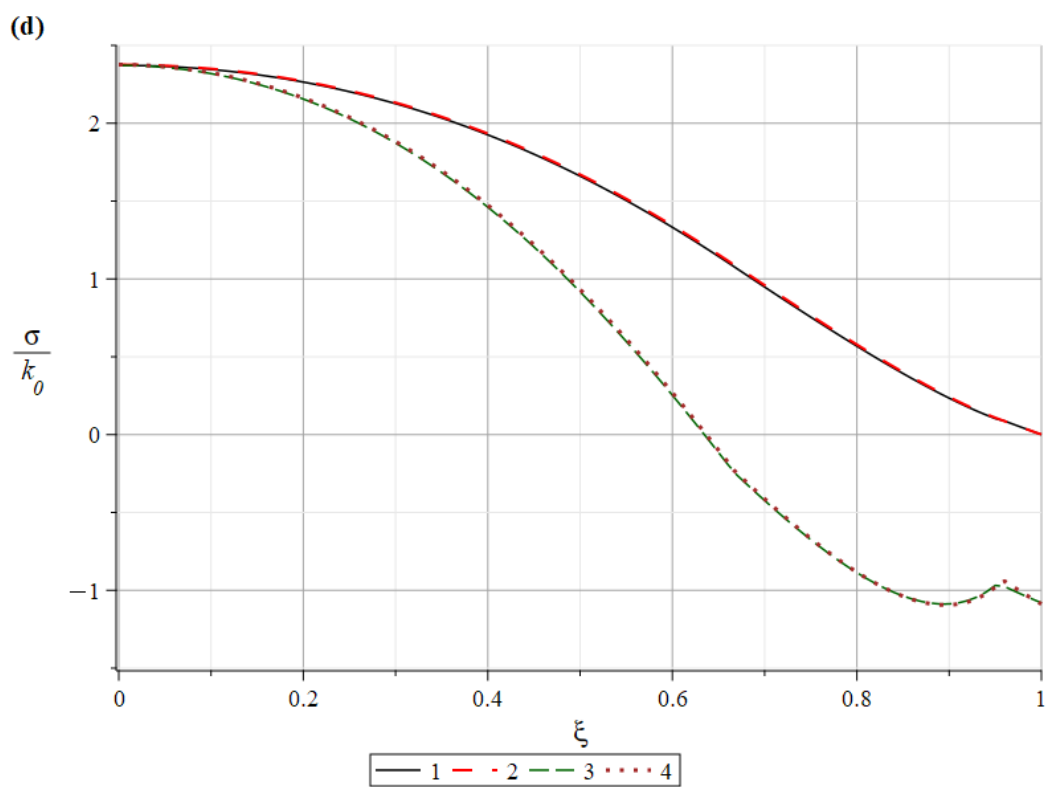
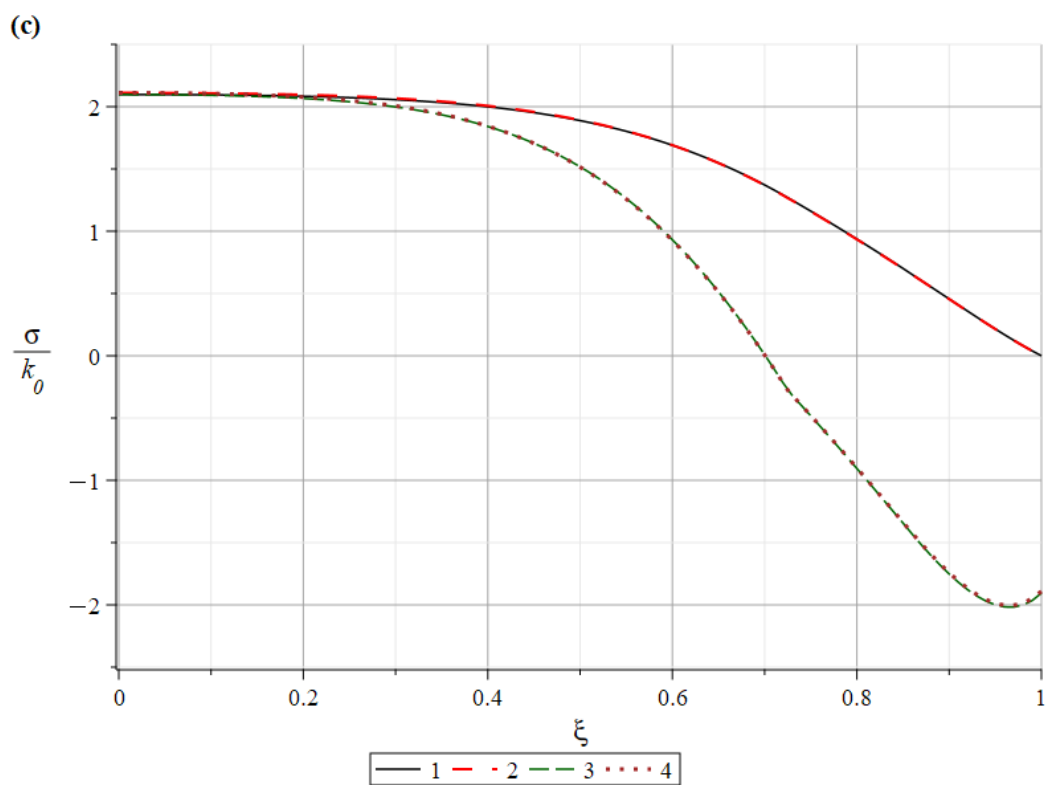
Таблица 2 – Сравнение результатов аналитического решения и численного моделирования

Величина	Аналитическое решение	Вычислительный эксперимент	Отклонение, %
$t_p, \text{с}$	0,352	0,302	14,36
$t_u, \text{с}$	3,058	3,052	0,19
$t_r, \text{с}$	11,829	11,930	0,86
$t_d, \text{с}$	25,383	25,453	0,28
$a' = b'$	0,6665	0,6667	0,02
$c'$	0,7900	0,7960	0,75

Величина относительного отклонения полученных результатов друг от друга для всех величин, кроме  $t_p$ , составляет менее 1 %, что свидетельствует о корректности применяемых моделей. Расхождения же в определении момента возникновения области пластического течения достаточно велики (~15 %). Данный факт не приводит к противоречию, поскольку в начальные моменты времени, когда длительность процесса еще не превышает 0,5 с, градиент температуры вблизи поверхности шара крайне высок, а в конечно-элементной модели присутствует особая зона (центр шара), в которой возникают дополнительные вычислительные погрешности.

После сравнения количественных показателей процесса, проведем качественное исследование поведения материала. В фиксированные моменты времени напряжения являются функциями одной (пространственной) переменной. Их безразмерное распределение на различных этапах нагрева представлено на рисунке 9, а после полного остывания тела – на рисунке 10. Нетрудно видеть, что результаты аналитического решения полностью согласуются с результатами численного моделирования.

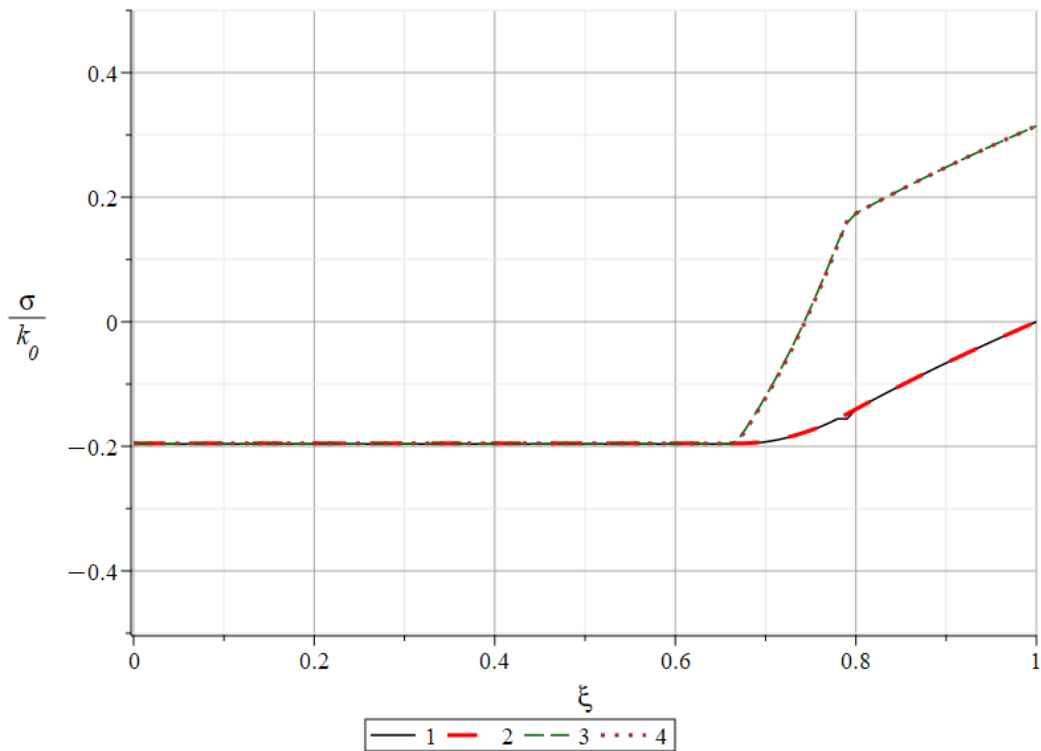




$$1 - \sigma_r^A; 2 - \sigma_r^U; 3 - \sigma_\phi^A; 4 - \sigma_\phi^U;$$

(a) – момент  $t_p$ ; (b) – момент  $t_u$ ; (c) – момент  $t_r$ ; (d) – момент  $t_d$

Рисунок 9 – Распределение безразмерных напряжений



$$1 - \sigma_r^A; 2 - \sigma_r^U; 3 - \sigma_\varphi^A; 4 - \sigma_\varphi^U$$

Рисунок 10 – Распределение безразмерных остаточных напряжений

Таким образом, было сопоставлено аналитическое решение задачи, приведенное в разделах 2.1–2.2, и проведенный вычислительный эксперимент для аналогичной постановки с применением моделей Шабоса и экспоненциального вязкого упрочнения. Анализ полученных результатов позволил сделать вывод об их сходимости относительно друг друга, а также необходимости использования существенно малого шага дискретизации по времени в начале процесса для уменьшения негативных эффектов, связанных с погрешностью методов, применяемых в процессе вычислительного эксперимента.

## 2.4 Сходимость функциональных рядов и оценка остаточного члена ряда

В основе метода Фурье при решении задачи теплопроводности в разделе 2.1 и, как следствие, применении полученных выражений в разделе 2.2 лежит предположение о применимости формулы Грина [92, с. 123] для рассматриваемых



соотношений. Данный факт требует дополнительной проверки сходимости полученных функциональных рядов.

Докажем равномерную сходимость функционального ряда (2.8), определяющего распределение безразмерной температуры в теле. Выполним оценку сверху членов его ряда  $u_n(\xi, t)$ ,  $n \geq 1$  по абсолютной величине:

$$\begin{aligned}
 |u_n(\xi, t)| &= \left| 2(-1)^n \cdot \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \cdot \frac{x \cdot \left[ e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} t} - e^{-xt} \right]}{x - \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \right| = \\
 &= 2x e^{-xt} \cdot \left| \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \right| \cdot \frac{\left| e^{-\left( \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right) t} - 1 \right|}{\left| \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Рассмотрим второй множитель в (2.58). Длина дуги окружности единичного радиуса с центральным углом  $\alpha > 0$  равна  $\alpha$ , в то время как катет треугольника, образованного хордой дуги, осью абсцисс и перпендикуляром к ней, равен  $\sin(\alpha)$ . Т. к. гипотенуза прямоугольного треугольника (в данном случае хорда дуги окружности) больше любого из его катетов (в частности, описанного перпендикуляра), а длина дуги окружности больше длины хорды, соединяющей ее концы, то

$$|\sin(\alpha)| < |\alpha| \Rightarrow \left| \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right| < 1.$$

Данное выражение в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  дает первый замечательный предел и равно единице.

Таким образом, установлено, что

$$\forall \xi \quad \left| \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \right| \leq 1. \tag{2.59}$$

В последнем множителе в правой части (2.58) введем замену

$$t \cdot \left( \Im \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right) = \rho$$

и проверим полученное выражение на разрыв в точке  $\rho = 0$ :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|e^{-\rho} - 1|}{|\rho|} \cdot t = t. \quad (2.60)$$

Поскольку предел в (2.60) существует и конечен, то точка  $\rho = 0$  является точкой устранимого разрыва.

Оценим теперь исследуемую функцию на предмет возрастания или убывания при  $\rho > -xt$ , что справедливо для  $\forall n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{|e^{-\rho} - 1|}{|\rho|} \cdot t \right) &= \frac{\operatorname{sgn}(e^{-\rho} - 1)(-e^{-\rho})|\rho| - |e^{-\rho} - 1|\operatorname{sgn}(\rho)}{|\rho|^2} \cdot t = \\ &= t \cdot \frac{1 - (\rho + 1)e^{-\rho}}{\rho^2} \cdot \operatorname{sgn}(\rho) \cdot \operatorname{sgn}(e^{-\rho} - 1) = \frac{t \cdot e^{-\rho}}{\rho^2} \cdot [e^{\rho} - (\rho + 1)] \cdot \begin{cases} 1 \cdot (-1), & \rho > 0 \\ (-1) \cdot 1, & \rho < 0 \end{cases} = (2.61) \\ &= \frac{t \cdot e^{-\rho}}{\rho^2} \cdot [(\rho + 1) - e^{\rho}] \end{aligned}$$

Очевидно, что дробь  $t \cdot e^{-\rho} / \rho^2$  принимает только неотрицательные значения.

Кроме того, при  $\rho = 0$  справедливо  $[(\rho + 1) - e^{\rho}] = 0$ , а также величина

$$\frac{d}{d\rho} ((\rho + 1) - e^{\rho}) = 1 - e^{\rho}$$

положительна при  $\rho < 0$  и отрицательна при  $\rho > 0$ . Следовательно,  $[(\rho + 1) - e^{\rho}]$  возрастает при  $\rho < 0$ , обращается в 0 при  $\rho = 0$  и убывает при  $\rho > 0$ , т. е. точка  $\rho = 0$  является точкой максимума функции  $[(\rho + 1) - e^{\rho}]$ , и для любого  $\rho$  справедливо неравенство  $[(\rho + 1) - e^{\rho}] \leq 0$ . Таким образом,

$$\frac{d}{d\rho} \left( \frac{|e^{-\rho} - 1|}{|\rho|} \cdot t \right) \leq 0. \quad (2.62)$$

Тогда максимум функции  $t \cdot |e^{-\rho} - 1| / |\rho|$  достигается на левом конце интервала, на котором определено  $\rho$ , т.е. при  $n = 1$ .

Таким образом, из (2.60)–(2.62) следует, что все множители в правой части (2.58) принадлежат множеству  $\mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$ . Поэтому можно временно исключить из рассмотрения первые  $n_0 - 1$  членов ряда, где  $n_0$  выбрано таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x > 0$ . При этом сумма конечного числа отброшенных членов ряда, которые являются конечными числами, также будет конечна. Тогда можно оценить правую часть в (2.58):

$$2xe^{-xt} \cdot \left| \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \right| \cdot \frac{\left| e^{-\left(\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x\right)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x \right|} \leq \frac{2xe^{-xt}}{\vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x} = 2e^{-xt} \cdot \frac{\frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}}{n^2 - \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}}. \quad (2.63)$$

Из вышеизложенного следует, что члены исходного функционального ряда, начиная с некоторого  $n_0$  могут быть промажорированы числовым рядом

$$|u_n(\xi, t)| \leq 2e^{-xt} \cdot \frac{\frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}}{n^2 - \frac{x}{\vartheta} \cdot \frac{R^2}{\pi^2}} = a_n e^{-xt} \leq a_n \quad (2.64)$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши–Маклорена [99, с. 26] для доказательства сходимости ряда  $a_n$ . Введем замену вида

$$\tau = \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}$$

и вычислим несобственный интеграл

$$I = \int_{n_0}^{+\infty} 2 \cdot \frac{\tau^2}{n^2 - \tau^2} dn = \tau \cdot \ln \left( \frac{n_0 + \tau}{n_0 - \tau} \right). \quad (2.65)$$

Для рассматриваемого процесса величина  $\tau$  является постоянной положительной конечной величиной. При этом при выборе номера  $n_0$  было задано условие  $n_0 - \tau > 0$ . Тогда натуральный логарифм в (2.65) существует, конечен и принимает значение больше единицы. Следовательно,  $I \in \mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$  как произведение положительный конечных величин, т.е. несобственный интеграл  $I$  сходится.

Таким образом, можно сделать заключение, что согласно интегральному признаку Коши–Маклорена сходится мажорантный ряд, и, как следствие, равномерно сходится исходный функциональный ряд согласно мажорантному признаку Вейерштрасса [99, с. 86]. Кроме того, данный функциональный ряд достаточное количество раз дифференцируем и интегрируем [99].

Подводя итог приведенных рассуждений, можно утверждать, что доказана равномерная сходимость рассматриваемого функционального ряда для температуры и, соответственно, применимость формулы Грина при решении задачи теплопроводности.

Проведем оценку остаточного члена функционального ряда. Пусть  $r_n$  – остаток мажорантного числового ряда,  $s_n$  – остаток исходного функционального ряда. Тогда

$$|u_n(\xi, t)| \leq a_n \Rightarrow r_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n(\xi, t)| \geq \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(\xi, t) \right| = |s_n|. \quad (2.66)$$

Следствием признака интегральной сходимости Коши–Маклорена [99, с. 26] является оценка остатка ряда. Наложим на него дополнительное требование о непревышении некоторой величины  $\varepsilon > 0$ :

$$r_n \leq I \leq \varepsilon.$$

В (2.64) последняя оценка, получаемая при отбрасывании множителя  $e^{-xt}$ , дает излишне завышенные значения. Поэтому далее будет рассматривать усиленное требование, что не противоречит предыдущим рассуждениям:

$$e^{-xt} r_n \leq e^{-xt} I \leq \varepsilon. \quad (2.67)$$

Подберем такой  $n_0$ , чтобы выполнялось условие (2.67):

$$e^{-xt} \tau \cdot \ln \left( \frac{n_0 + \tau}{n_0 - \tau} \right) \leq \varepsilon \Rightarrow n_0 \geq \left\lceil \frac{R}{\pi \sqrt{g}} \cdot \frac{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{\pi \sqrt{g}}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{\pi \sqrt{g}}} - 1} \right\rceil \quad (2.68)$$

Здесь и далее оператор  $\lceil \cdot \rceil$  будем обозначать округление вверх.

Оценка (2.68) полностью согласуется с выбором номера  $n_0$ .

Анализ выражений для напряжений, перемещений и деформаций в рассматриваемой задаче показывает, что каждое из них линейно зависит от величин

$$\Theta\left(\frac{r}{R}, t\right), \frac{1}{r_2^3} \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^2 \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right) dr, \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right) dr, \quad (2.69)$$

где  $[r_1, r_2] \subset [0, R]$ .

Последовательно применяя теорему о почленном интегрировании рядов [99, с. 99] и теорему о среднем [100, с. 604] для выражений (2.69), можно получить их верхнюю оценку.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{r_2^3} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \left[ r^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(\frac{r}{R}, t\right) \right] dr \right| &= \frac{1}{r_2^3} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{r_1}^{r_2} r^2 u_n\left(\frac{r}{R}, t\right) dr \right] \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{r_2^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{r_1}^{r_2} r^2 u_n\left(\frac{r}{R}, t\right) dr \right| = \frac{1}{r_2^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| r_c^2 u_n\left(\frac{r_c}{R}, t\right) \cdot (r_2 - r_1) \right| = \\ &= \frac{r_c^2 (r_2 - r_1)}{r_2^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n\left(\frac{r_c}{R}, t\right) \right| \leq \frac{r_2^2 \cdot r_2}{r_2^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(\frac{r}{R}, t\right) \right] dr \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot u_n\left(\frac{r}{R}, t\right) dr \right] \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot u_n\left(\frac{r}{R}, t\right) dr \right| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{r_c} \cdot u_n\left(\frac{r}{R}, t\right) \cdot (r_2 - r_1) \right| = \frac{r_2 - r_1}{r_c} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n\left(\frac{r_c}{R}, t\right) \right| \leq \frac{r_2}{r_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Здесь  $r_c \in [r_1, r_2]$  – некоторая точка.

Нетрудно видеть, что все функциональные ряды в (2.69) могут быть промажорированы тем же числовым рядом, что и функциональный ряд для температуры. Следовательно, они также сходятся равномерно. При этом для их остаточных членов справедливы оценки  $r_n$ ,  $r_n$  и  $r_n \cdot r_2/r_1$  соответственно.

Ранее было упомянуто, что напряжения, перемещения и деформация линейно зависят от функций (2.69). Тогда

$$\begin{aligned}
& \left| A_i \cdot \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right) + B_i \cdot \frac{1}{r_2^3} \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^2 \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right) dr + C_i \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right) dr \right| \leq \\
& \leq |A_i| \cdot \left| \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right) \right| + |B_i| \cdot \left| \frac{1}{r_2^3} \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^2 \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right) dr \right| + |C_i| \cdot \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \Theta\left(\frac{r}{R}, t\right) dr \right| \leq, \quad (2.72) \\
& \leq |A_i| \cdot r_n + |B_i| \cdot r_n + |C_i| \cdot r_n \cdot \frac{r_2}{r_1} \leq D_i r_n \leq \varepsilon e^{xt}
\end{aligned}$$

где  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  – некоторые числа, равные сумме коэффициентов при выражениях (2.69);

$$D_i = |A_i| + |B_i| + |C_i| \cdot \frac{r_2}{r_1} > 0 - \text{суммарный «передаточный» коэффициент.}$$

Задавшись требуемым значением величины  $\varepsilon$ , подберем соответствующее значение  $n_0$ :

$$D_i \tau e^{-xt} \cdot \ln\left(\frac{n_0 + \tau}{n_0 - \tau}\right) \leq \varepsilon \Rightarrow n_0 \geq \left[ \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{9}} \cdot \frac{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{D_i \cdot \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{9}}}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{D_i \cdot \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{x}{9}}}} - 1} \right]. \quad (2.73)$$

Пусть с некоторого момента времени  $t'$  справедливо, что  $e^{-xt'} \rightarrow 0$ ,  $e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{R^2} - x\right)t'} \rightarrow 0$ . Тогда из (2.58) следует, что для всех членов ряда  $u_n(\xi, t)$ , т. е. при  $n \geq 1$ , выполняется соотношение  $|u_n(\xi, t')| \rightarrow 0$ . Таким образом, все члены исходного ряда, начиная с  $n \geq 1$ , становятся много меньше нулевого члена, т. е. можно перейти к рассмотрению единственного члена ряда.

Количественная оценка остатка применяемых рядов при различных  $\tau$  и  $D_i$  приведена на рисунке 11. Обе оси графика построены в логарифмических координатах. Очевидным выводом является факт необходимости вычисления большего количества членов ряда для достижения лучшей точности. Кроме того, при прочих равных условиях увеличение значения комплекса  $\tau$  (например, за счет увеличения скорости нагрева) влечет за собой увеличение необходимого количества членов ряда для достижения той же точности вычислений.

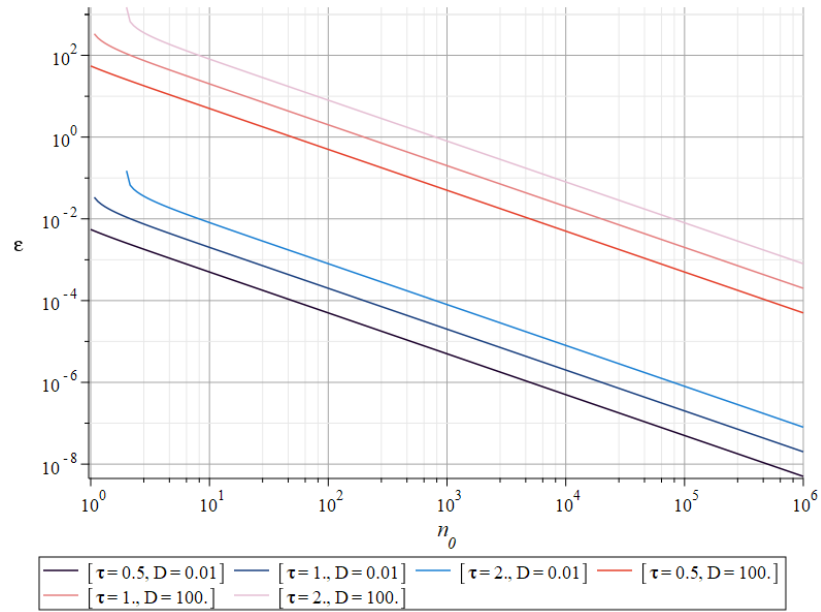


Рисунок 11 – Оценка остаточного члена ряда в момент  $t = 0$

На рисунке 12 представлена зависимость необходимого количества (2.68) членов функционального ряда от текущего момента времени для различных значений требуемой точности вычислений  $\varepsilon$  и комплекса  $\tau$ . Анализ полученных графических результатов показал, что комплекс  $\tau$  является определяющим фактором для асимптотического количества членов ряда при  $t > t'$ . Увеличение требуемой точности вычислений приводит к увеличению рассматриваемого количества членов ряда  $n_0$  только на отрезке  $t \in [0, t']$ , а далее не оказывает на него влияния.

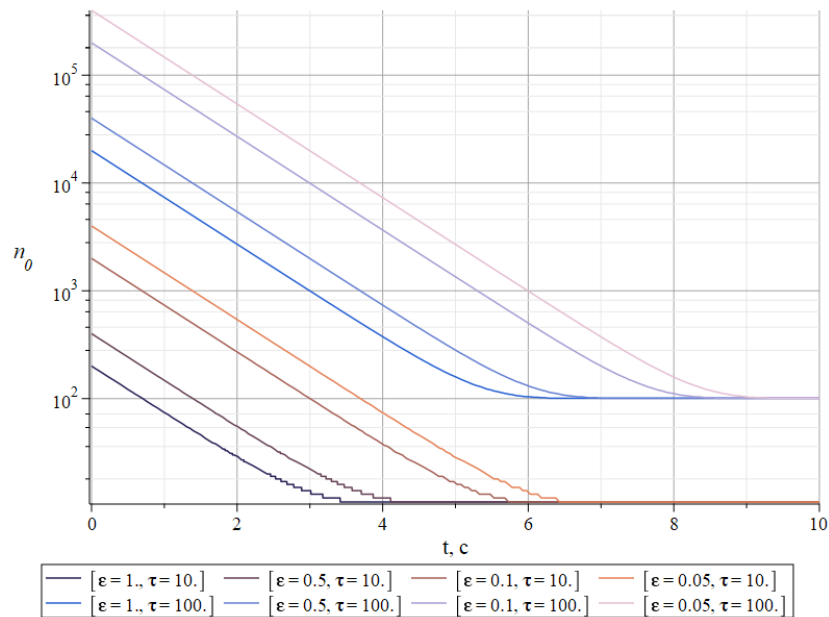


Рисунок 12 – Зависимость оценки необходимого количества членов ряда от времени

При малых  $t$  сходимость функциональных рядов (2.69) достигается при достаточно большом количестве членов вследствие околонулевого значения знаменателя в приведенных оценках. В этом случае решение (2.8) может быть преобразовано с использованием свойств тэта-функции Якоби [101], формулы суммирования Пуассона [102] или операторным методом [92]. Однако, начиная с момента времени  $t'$ , ряды вида (2.69) становятся настолько быстросходящимися, что их первый член преобладает над суммой всех остальных. В таком случае можно вернуться к оценке (2.58) и утверждать, что достаточно рассмотрения только одного члена ряда.

Таким образом, была доказана равномерная сходимость функциональных рядов, применяемых при определении напряженно-деформированного в задаче термомодеформирования сплошного шара, выполненного из упрочняющегося упруговязкопластического материала, вместе с их частными производными, что подтверждает выполнения условий применимости формулы Грина и, как следствие, корректность полученного решения. Кроме того, проведена оценка остаточных членов указанных рядов, и получено выражение для определения количества членов, достаточного для вычислений с заданной точностью.

## **2.5 Деформирование сплошного шара с полиномиальной зависимостью предела текучести от температуры**

В разделе 2.2 был рассмотрен случай линейной зависимости предела текучести материала от температуры. Однако данное допущение является справедливым лишь для узкого круга материалов. Например, на практике для различных марок сталей и сплавов, может быть справедлива полиномиальная форма зависимости предела текучести от температуры.

Пусть изменение предела текучести описывается полиномиальной функцией:



$$k(r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta^l(r, t), \quad (2.74)$$

где  $\beta_0 = 1$ ;

$\beta_l \left( l = \overline{1, m} \right)$  – коэффициенты, определяемые таким образом, чтобы  $k(r, t)$  оставалась неотрицательной монотонной убывающей функцией температуры.

Выражая величину  $\Delta(r, t)$  через поле безразмерной температуры (2.10), преобразуем выражение (2.74):

$$k(r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta_m^l \left[ \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \Theta^{[n, j]}(r) e^{-h[n, j]t} \right]^l. \quad (2.75)$$

Раскрытие скобок в соотношении (2.75) позволяет получить окончательной форму записи для предела текучести:

$$k(r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \left\{ \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 \beta_l \Delta_m^l \prod_{q=1}^l \Theta^{[n_q, j]}(r) e^{-h[n_q, j]t} \right\}. \quad (2.76)$$

В формуле (2.76) суммирование по  $n_1, \dots, n_l$  ведется в том смысле, что при  $l = 0$  выражение в фигурных скобках принимает значение 1.

По аналогии с (2.11) для всех величин  $F(r, t)$  дальнейшее рассмотрение следует проводить в форме

$$F(r, t) = \sum_{l=0}^m \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 F^{[l, n_1, \dots, n_l, j]}(r) \prod_{q=1}^l e^{-h[n_q, j]t},$$

однако поскольку для случая предела текучести, зависящего от температуры линейно, результаты уже были получены в разделе 2.2, то для упрощения дальнейших вычислений будет рассматриваться форма записи

$$\begin{aligned} F(r, t) = & \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 F^{[n, j]}(r) e^{-h[n, j]t} + \\ & + \sum_{l=2}^m \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 F^{[l, n_1, n_2, \dots, n_l, j]}(r) \prod_{q=1}^l e^{-h[n_q, j]t}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Суммирование во втором слагаемом соотношения (2.77) по  $l$  ведется в том смысле, что при значениях  $m < 2$  оно обращается в нуль. Величины  $F^{[n,j]}(r)$  первого слагаемого в данном случае рассматриваются как известные.

Аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.2, преобразуем уравнения (1.23)–(1.25), (1.27)–(1.29), (1.33)–(1.35) к виду

$$\sum_{l=0}^m \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 G^{[l,n_1,\dots,n_l,j]}(r) \prod_{q=1}^l e^{-h[n_q,j]t} = 0. \quad (2.78)$$

Поскольку, как и ранее, каждое из уравнений вида (2.78) справедливо во всем объеме тела  $0 \leq r \leq R$  на протяжении всего процесса  $t \geq 0$ , то для каждого члена функциональных рядов справедливы соотношения (2.16)–(2.21) с точностью до индексов  $[l, n_1, \dots, n_l, j]$  и  $[n_q, j]$ , которые в дальнейшем для удобства изложения были опущены.

Поскольку описывающая напряженно-деформированное состояние шара система уравнений, включая граничные условия и условия сопряжения, для рассматриваемой задачи совпадает с приведенной в разделе 2.2, то выражения, определяющие напряжения и перемещения, возникающие в теле в процессе деформирования, совпадают с (2.24), (2.26), (2.33), (2.34), (2.38), (2.39), (2.44) и (2.45) с точностью до положения упругопластических границ. Аналогичное заключение справедливо и для постоянных интегрирования.

С целью выполнения сравнительного анализа напряженно-деформированного состояния сред, зависимость предела текучести от температуры которых описывается полиномами разной степени, было проведено сравнение моделей сплошных сред, обозначенных следующими индексами:

- *const* – предел текучести, не зависящий от температуры;
- *I* – линейная зависимость предела текучести от температуры;
- *II* – квадратичная зависимость предела текучести от температуры;

Ниже рассматривается тело с размерами, физико-механическими свойствами и параметрами нагрева аналогичным представленным в разделе 2.2. Коэффициенты разложения  $\beta_l$  ( $l = \overline{1, m}$ ) удовлетворяют условиям

$$0 \leq \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta_m^l \leq 1$$

Значения моментов возникновения и вырождения областей пластичности, разгрузки и повторной пластичности, а также положение границ между ними, представлены в таблице 3. Для материала с постоянным пределом текучести, в отличие от остальных рассматриваемых моделей, для выбранного набора физико-механических свойств момент вырождения первой области пластического течения наступает еще до возникновения в теле области повторной пластичности. Кроме того, увеличение скорости изменения предела текучести приводит к увеличению скорости распространения в теле зон с различающимися реологическими свойствами и более глубокому их прониканию.

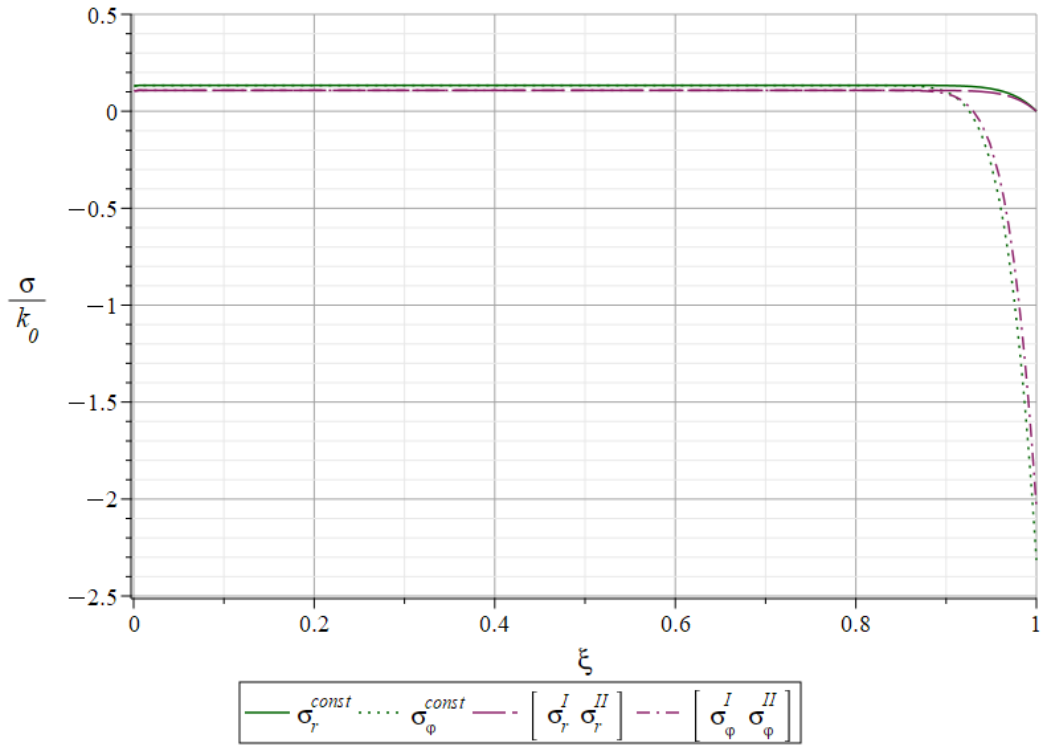
Таблица 3 – Значения характерных величин

Величина	Порядок полинома			Относительное отклонение, %	
	<i>const</i>	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>I – const</i>	<i>II – const</i>
$t_p, \text{с}$	0,413	0,352	0,347	14,76	1,34
$t_u, \text{с}$	2,859	3,058	3,185	6,96	4,15
$t_r, \text{с}$	43,338	11,828	6,867	72,71	41,95
$t_d, \text{с}$	14,598	25,383	31,837	73,88	25,43
$a(t_u)$	0,896	0,876	0,870	2,30	0,60
$a(t_r)$	0,777	0,726	0,787	6,60	8,48
$b(t_r)$	0,777	0,859	0,936	10,59	8,94
$a' = b'$	0,777	0,666	0,635	14,22	4,66
$c(t_d)$	–	0,957	0,905	–	5,50
$c'$	0,951	0,790	0,700	16,92	11,44

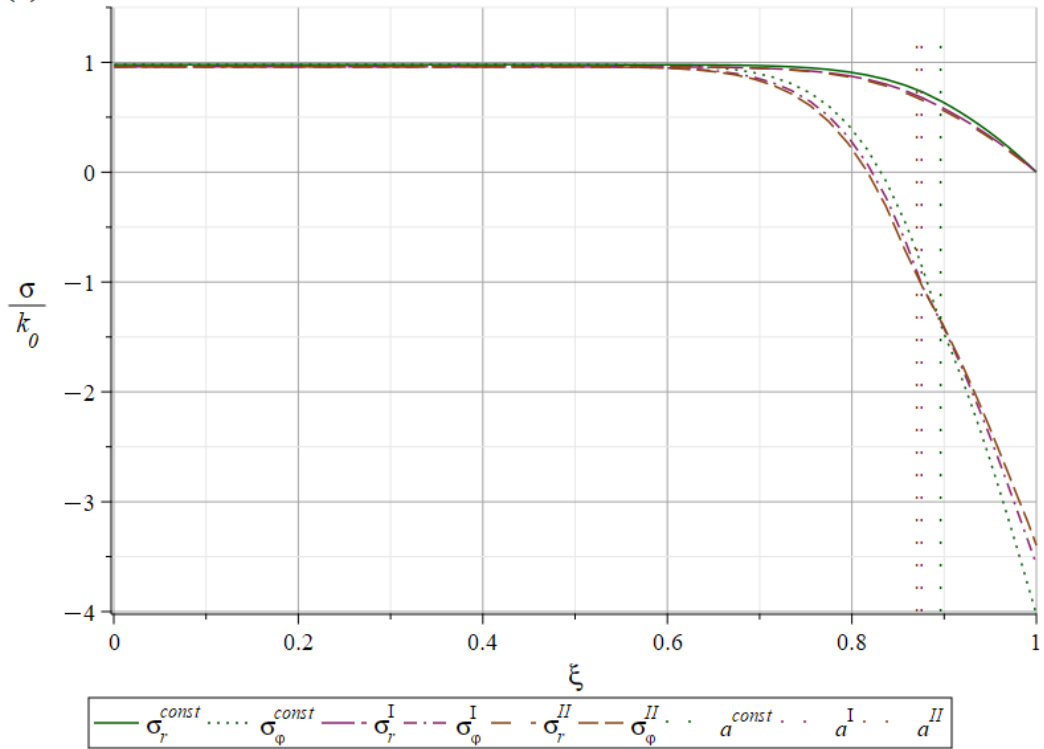
На рисунке 13 представлены распределения радиальной и окружной компонент напряжений в шаре для всех моделей сред. Анализируя полученные графические зависимости, можно сделать вывод, что при добавлении в функцию предела текучести слагаемых более высокого порядка качественная картина процесса деформирования не изменяется, однако это приводит к изменению уровня возникающих в теле напряжений. Аналогичный вывод следует из исследования графика распределения остаточных напряжений в теле, приведенного на рисунке 14, на

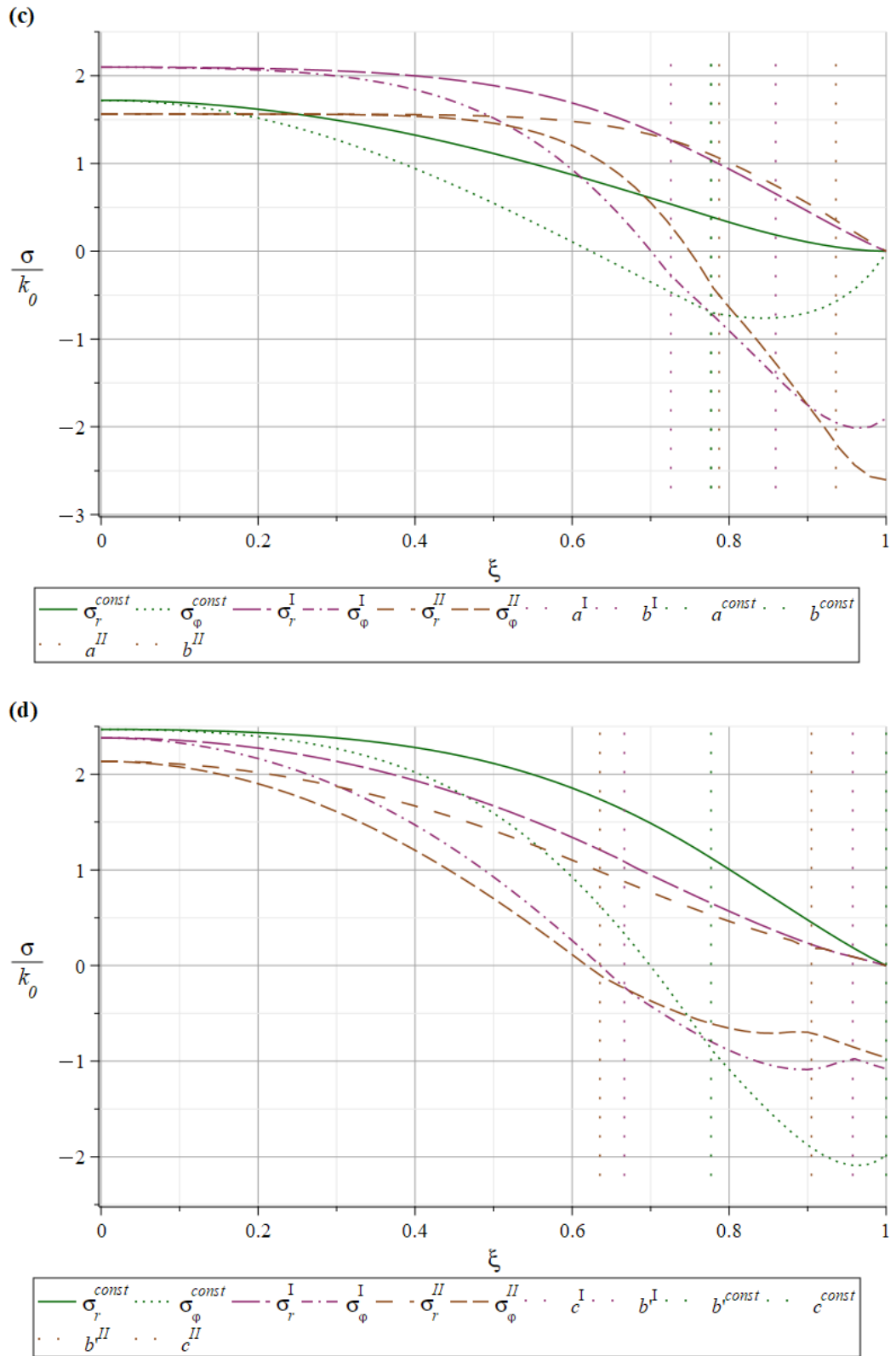
котором отчетливо видно, что уменьшение порядка полинома приводит к уменьшению остаточных напряжений по абсолютной величине.

(a)



(b)





(a) – момент  $t_p$ ; (b) – момент  $t_u$ ; (c) – момент  $t_r$ ; (d) – момент  $t_d$

Рисунок 13 – Распределение безразмерных напряжений

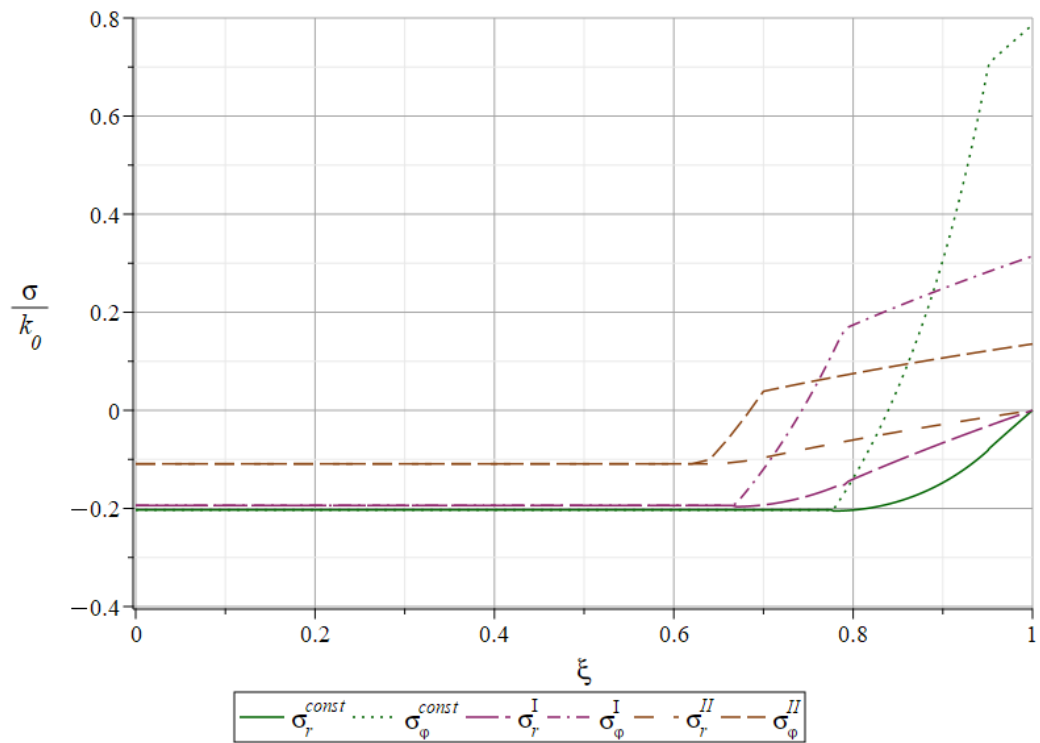


Рисунок 14 – Распределение безразмерных остаточных напряжений

По изображенным на рисунке 15 распределениям остаточных перемещений в теле можно сделать вывод, что увеличение скорости изменения предела текучести способствует уменьшению величины остаточных напряжений в теле.

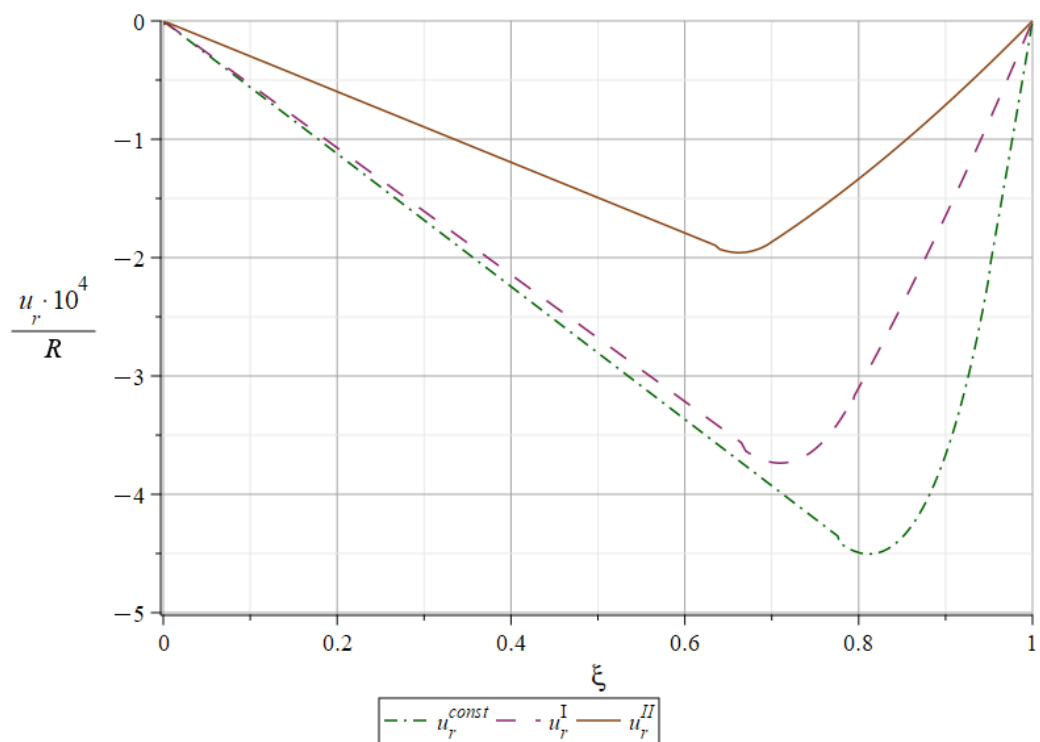


Рисунок 15 – Распределение безразмерных остаточных перемещений

Как уже отмечалось ранее, введение в рассмотрение слагаемых полиномов более высоких порядков приводит к существенному изменению времени деформирования и глубины проникания отдельных областей. Данный факт подтверждается при рассмотрении графиков положения упругопластических границ  $a(t)$  и  $b(t)$ , приведенных на рисунке 16. На них наглядно представлено, что глубина проникания области первого пластического течения, а также ее «время жизни» существенно меньше, чем для материала с пределом текучести, описываемым линейной функцией температурного поля. С другой стороны, отличие времени и глубины распространения первой пластической зоны для линейной и квадратичной функции менее выражено.

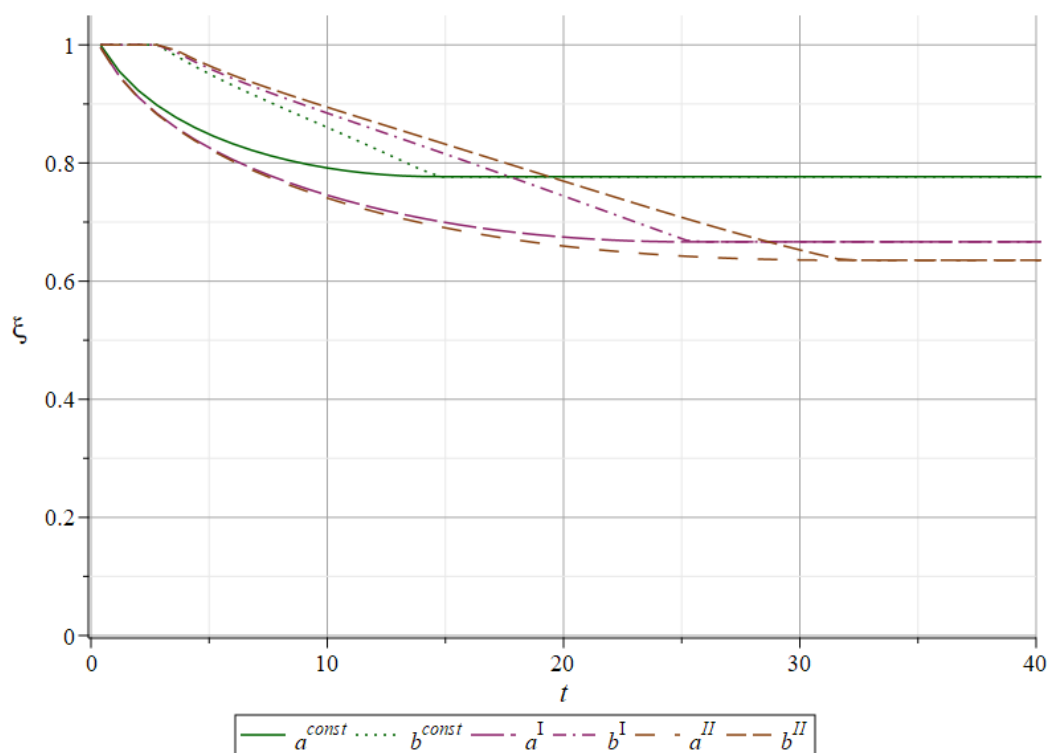


Рисунок 16 – Безразмерная координата упругопластических границ  $a(t)$  и  $b(t)$

## 2.6 Выводы по главе 2

В ходе исследования напряженно-деформированного состояния упрочняющегося упруговязкопластического сплошного шара были получены определяющие

соотношения в областях пластического течения, зоны разгрузки и области повторного пластического течения для случая линейной зависимости предела текучести от температуры и его обобщения – полиномиальной формы зависимости. Установлено, что возникновение, развитие и вырождение областей с различающимися реологическими свойствами зависят от скорости процесса нагрева (охлаждения) тела. В указанных соотношениях совершены предельные переходы к моделям упруго-пластического, упрочняющегося упругопластического и упруговязкопластического материалов, и выполнен сравнительный анализ указанных моделей сред.

Выполнено численное моделирование с применением моделей Шабоса и экспоненциального вязкого упрочнения с целью верификации полученных аналитических результатов, в ходе которого была выявлена сходимость указанных результатов относительно друг друга. Кроме того, доказана сходимость полученных функциональных рядов и, как следствие, выполнение условий применимости формулы Грина, а также получены оценки остаточного члена ряда и необходимого количества членов функциональных рядов для проведения расчетов с заданной точностью.



### Глава 3 Пластическое течение полого шара при нестационарном нагреве внешней поверхности

Пусть теперь в центре рассмотренного в главе 2 шара имеет место сферическая полость радиуса  $R_1$  с теплоизолированной поверхностью. Для удобства переобозначим через  $R_2$  радиус внешней поверхности шара, подверженной как и прежде нестационарному тепловому воздействию по закону (2.1). Начальная температура тела в каждой его точке равна  $T_0$ , а силовые нагрузки на обеих его поверхностях отсутствуют.

#### 3.1 Решение задачи теплопроводности

Для рассматриваемой задачи система уравнений, содержащая уравнение Фурье нестационарной теплопроводности (1.20), начальное условие (1.21) и граничные условия (1.22) на поверхностях шара, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} &= \vartheta \left( \frac{2}{r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} \right), \\ T(r,0) &= T_0, \\ \frac{T(R_2,t) - T_0}{T_m - T_0} &= 1 - e^{-\alpha t}, \\ \left. \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R_1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Введем в соотношения начально-краевой задачи (3.1) подстановку

$$\Psi(r,t) = r \cdot \frac{T(r,t) - T_0}{T_m - T_0} \quad (3.2)$$

и перейдем к безразмерным координатам:

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi} &= \hat{\vartheta} \Psi_{,\xi\xi}, \\
\Psi(\xi, 0) &= 0, \\
\Psi(1, t) &= R_2 (1 - e^{-xt}), \\
\left[ \frac{\partial \Psi(\xi, t)}{\partial \xi} - h \Psi(\xi, t) \right] \Big|_{\xi=0} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где  $\xi = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$  – безразмерная координата;

$\hat{\vartheta} = \frac{\vartheta}{(R_2 - R_1)^2}$  – приведенный коэффициент температуропроводности;

$$h = \frac{R_2 - R_1}{R_1}.$$

Представим неизвестную функцию  $\Psi(\xi, t)$  в виде суммы функций  $U(\xi, t)$  и  $V(\xi, t)$ , причем  $U(\xi, t)$  должна удовлетворять только начальным и граничным условиям. Тогда для функции  $V(\xi, t)$  после подстановки в (3.3) будет справедлива система

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \hat{\vartheta} V_{,\xi\xi} - [\dot{U} - \hat{\vartheta} U_{,\xi\xi}], \\
V(\xi, 0) &= -U(\xi, 0), \\
V(1, t) &= 0, \\
\left[ \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial \xi} - h V(\xi, t) \right] \Big|_{\xi=0} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Пусть функция  $U(\xi, t)$  определяется соотношением

$$U(\xi, t) = ((R_2 - R_1) \cdot \xi + R_1) \cdot (1 - e^{-xt}).$$

Тогда система (3.4) примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \hat{\mathfrak{g}} V_{,\xi\xi} - ((R_2 - R_1) \cdot \xi + R_1) x e^{-xt}, \\
V(\xi, 0) &= 0, \\
V(1, t) &= 0, \\
\left[ \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial \xi} - h V(\xi, t) \right]_{\xi=0} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Следуя [92], выпишем решение задачи (3.5)

$$V(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R_2}{\sin(\mu_n)} \cdot \frac{\mu_n \cos(\mu_n \xi) + h \sin(\mu_n \xi)}{\mu_n^2 + h^2 + h} \cdot \frac{x}{\hat{\mathfrak{g}} \mu_n^2 - x} \cdot \left[ e^{-\hat{\mathfrak{g}} \mu_n^2 t} - e^{-xt} \right],$$

где  $\mu_n$  – корни уравнения  $\tan(\mu_n) + \mu_n/h = 0$ .

Тогда окончательное выражение для безразмерной температуры примет вид

$$\begin{aligned}
\Theta(\xi, t) &= \frac{T(\xi, t) - T_0}{T_m - T_0} = \\
&= 1 - e^{-xt} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R_2}{\sin(\mu_n)} \cdot \frac{\mu_n \cos(\mu_n \xi) + h \sin(\mu_n \xi)}{(\mu_n^2 + h^2 + h) \cdot [\xi \cdot (R_2 - R_1) + R_1]} \cdot \frac{x \cdot \left[ e^{-\hat{\mathfrak{g}} \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 t} - e^{-xt} \right]}{\hat{\mathfrak{g}} \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 - x}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

По полученным аналитическим зависимостям было построено распределение поля безразмерной температуры в теле в различных сечениях по времени, представленное на рисунке 17. Можно видеть, что областью с наибольшим температурным градиентом является внешняя поверхность шара, а также имеет место постепенное уменьшение температурного градиента с течением времени вплоть до его полного исчезновения и установления во всем теле постоянной температуры.

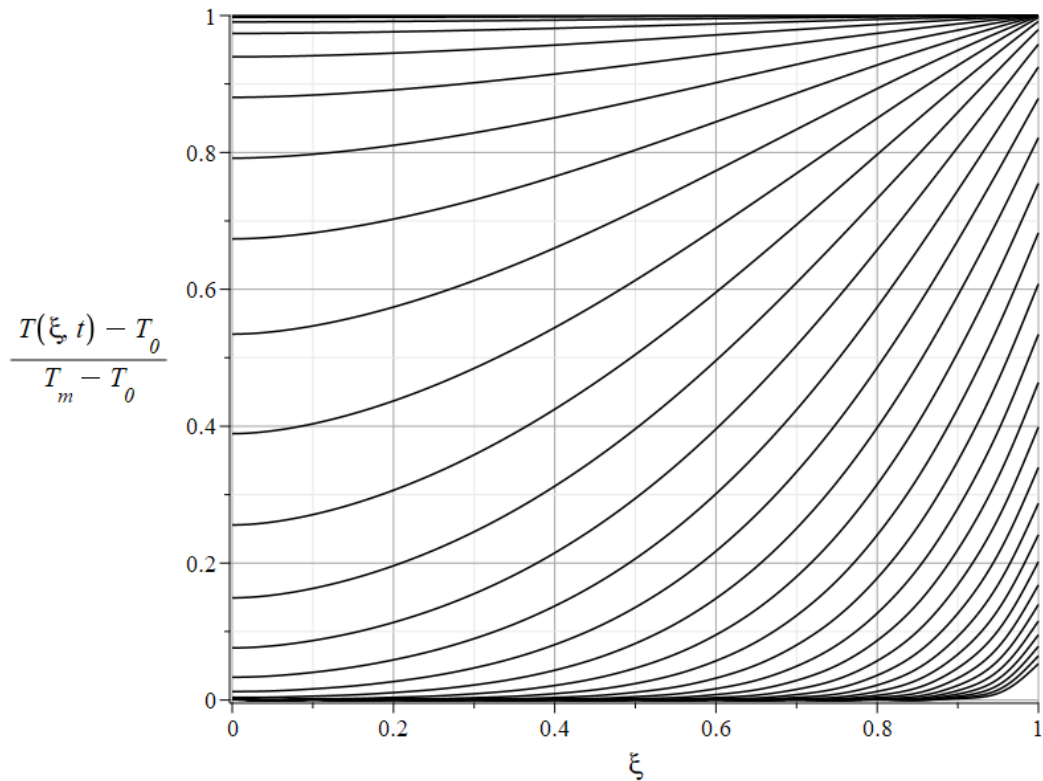


Рисунок 17 – Распределение поля безразмерной температуры

Аналогичный вывод о расположении в теле области с наибольшим температурным градиентом можно сделать, непосредственно проанализировав соотношение для безразмерной температуры (3.6).

### 3.2 Решение задачи механики деформируемого твердого тела

Как и в разделе 2.2 будем рассматривать линейно зависящий от температуры предел текучести (2.9). Исходя из тех же соображений, что и в главе 2, все неизвестные величины будет искать в форме (2.11) с точностью до  $h^{[n,j]}$ :

$$h^{[n,j]} = \begin{cases} 9 \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 & \text{при } j = 1, \\ x & \text{при } j = 2. \end{cases}$$

Как и ранее, можно показать, что уравнения (1.23)–(1.25), (1.27)–(1.29) после проведения разложения (2.11) приводятся к виду (2.14), а затем – к виду (2.16)–(2.20).

Граничными условиями, как следует из постановки задачи, являются отсутствие внешних нагрузок на внешней и внутренней поверхностях шара:

$$\sigma_r|_{r=R_1} = \sigma_r|_{r=R_2} = 0. \quad (3.7)$$

Поскольку система уравнений (2.16)–(2.20) соответствует системе, используемой в задаче о сплошном шаре, то выражения для напряжений, деформаций и перемещений будут иметь вид, аналогичный приведенному в разделе 2.2 с точностью вводимых констант, неизвестных интегрирования и упругопластических границ.

В зависимости от параметров нагрева и свойств материала, из которого изготовлен шар, зарождение и развитие зон пластичности, разгрузки и повторной пластичности может происходить не только на внешней поверхности, как это было для случая сплошного шара, но и на внутренней. Причем, если последовательность их развития во внутренней и внешней области независимо друг от друга очевидна: сперва возникает область пластического течения, затем зарождается зона разгрузки, а после появляется область повторного пластического течения – то согласованность этих процессов в двух указанных частях тела в явном виде отсутствует. Данный факт вносит существенную сложность в анализ напряженно-деформированного состояния и отражен на рисунке 18 в виде дерева эволюции зон с отличающимися реологическими свойствами, для которого приняты следующие обозначения:

- $E$  – упругая область;
- $P$  – области пластического течения;
- $U$  – зоны разгрузки;
- $R$  – области повторного пластического течения;
- желтая сплошная линия с кружками на концах – возникновение области пластического течения;
- зеленая пунктирная линия с кружками на концах – возникновение зоны разгрузки;

- синяя штрихпунктирная линия с кружками на концах – возникновение области повторного пластического течения;
- красная сплошная линия с крестиками на концах – вырождение области пластического течения.

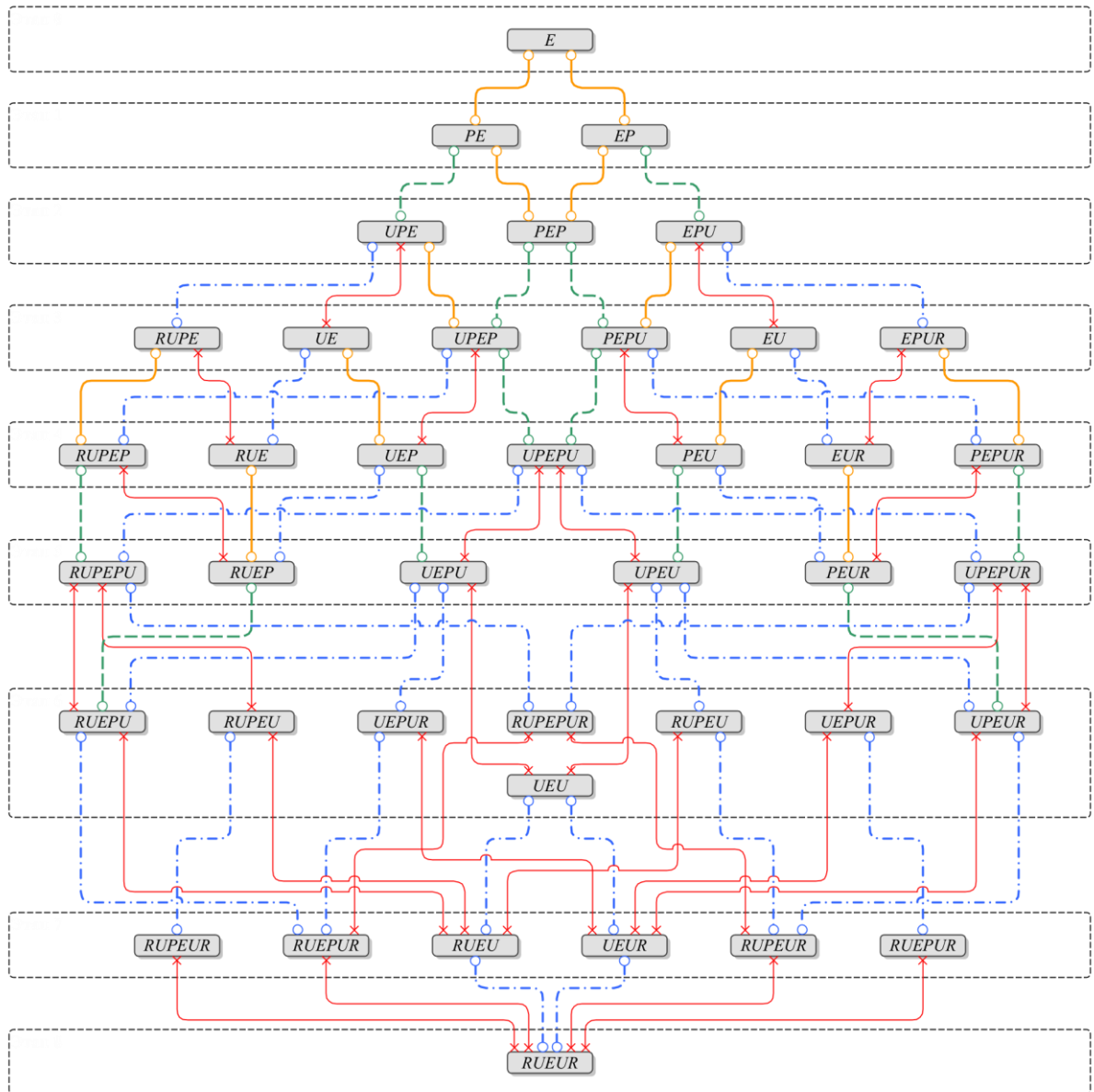


Рисунок 18 – Дерево эволюции зон с различающимися реологическими свойствами

Рассмотрим наиболее общий случай, когда в теле в течение некоторого времени существуют одновременно все семь зон  $\underline{RUPEP\hat{U}R}$ . Запишем для каждой из них выражения для напряжений, перемещений и пластических деформаций (если они существуют в рассматриваемой зоне), а также констант интегрирования:

– упругая область:

$$\sigma_r^e = -\frac{4\omega}{r^3} \cdot \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_e + \frac{B_e}{r^3},$$

$$u_r^e = \frac{\omega}{\mu r^2} \cdot \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{rA_e}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_e}{4\mu r^2},$$

$$\begin{aligned} A_e = & -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=4}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{R_1}^{\bar{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\bar{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\ & + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^3 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\bar{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \Big\} + \\ & + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=4}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\bar{c}}^{\bar{b}} \frac{\hat{\rho}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^3 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\bar{b}}^{\bar{c}} \frac{\hat{\rho}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} + \\ & + 4\omega K \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,4)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(3,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\ & + M \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \sum_{j=\max(i+1,4)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(3,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,4)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \cdot \sum_{j=1}^{\min(3,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \\ & - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\ B_e = & KR_2^3 \cdot \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\bar{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\bar{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\bar{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - H \cdot \left[ \int_{\bar{c}}^{\bar{b}} \frac{\hat{\rho}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\bar{b}}^{\bar{c}} \frac{\hat{\rho}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\ & + KR_2^3 \left\{ 2H \cdot \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \cdot \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

– внешняя область пластического течения

$$\widehat{\sigma}_r^p = -4K_0 \cdot \int_{\hat{a}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega(1-K_0)}{r^3} \cdot \int_{\hat{a}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \widehat{A}_p + \frac{\widehat{B}_p}{r^3},$$

$$\widehat{e}_r^{pp} = -\frac{4k(r)}{H} + 2K_0 \Delta(r) - \frac{6K_0}{r^3} \cdot \int_{\hat{a}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{3\widehat{B}_p}{Hr^3},$$

$$\widehat{u}_r^p = \frac{4K_0 r}{3\lambda + 2\mu} \cdot \int_{\hat{a}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \cdot \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \cdot \int_{\hat{a}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r\widehat{A}_p}{3\lambda + 2\mu} - \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \cdot \frac{\widehat{B}_p}{r^2},$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_p = & -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=5}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{R_1}^c \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\ & + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^4 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \Big\} + \\ & + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=5}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\hat{c}}^{\hat{b}} \frac{\widehat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^4 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\widehat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} + \\ & + 4\omega K \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,5)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(4,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\ & + M \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \sum_{j=\max(i+1,5)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(4,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,5)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \cdot \sum_{j=1}^{\min(4,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \\ & - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\ \widehat{B}_p = & KR_2^3 \cdot \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^c \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - H \cdot \left[ \int_{\hat{c}}^{\hat{b}} \frac{\widehat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\widehat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\ & + KR_2^3 \left\{ 2H \cdot \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \cdot \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\} - 4\omega \int_a^{\hat{a}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad (3.9) \end{aligned}$$



– внутренняя область пластического течения

$$\underline{\sigma}_r^p = -4K_0 \cdot \int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega(1-K_0)}{r^3} \cdot \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \underline{A}_p + \frac{\underline{B}_p}{r^3},$$

$$\underline{e}_r^{p,p} = -\frac{4k(r)}{H} + 2K_0 \Delta(r) - \frac{6K_0}{r^3} \cdot \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{3\underline{B}_p}{Hr^3},$$

$$\underline{u}_r^p = \frac{4K_0 r}{3\lambda + 2\mu} \cdot \int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \cdot \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \cdot \int_a^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r\underline{A}_p}{3\lambda + 2\mu} - \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \cdot \frac{\underline{B}_p}{r^2},$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_p = & -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=3}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{R_1}^{\underline{\epsilon}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\ & + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^2 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \Big\} + \\ & + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=3}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\underline{\epsilon}}^{\hat{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^2 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} + \\ & + 4\omega K \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,3)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(2,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\ & + M \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \sum_{j=\max(i+1,3)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(2,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,3)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \cdot \sum_{j=1}^{\min(2,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \\ & - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_p = & KR_2^3 \cdot \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\underline{\epsilon}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - H \cdot \left[ \int_{\underline{\epsilon}}^{\hat{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \quad (3.10) \\ & + KR_2^3 \left\{ 2H \cdot \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \cdot \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

– внешняя зона разгрузки

$$\hat{\sigma}_r^u = 2\omega \cdot \int_{\hat{b}}^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega}{r^3} \cdot \int_{\hat{b}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \hat{A}_u + \frac{\hat{B}_u}{r^3},$$

$$\hat{u}_r^u = \frac{2\omega r}{3\lambda + 2\mu} \cdot \int_{\hat{b}}^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{\omega}{\mu r^2} \cdot \int_{\hat{b}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r\hat{A}_u}{3\lambda + 2\mu} - \frac{\hat{B}_u}{4\mu r^2},$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_u = & -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=6}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{R_1}^{\hat{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\ & + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^5 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \Big\} + \\ & + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=6}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\hat{c}}^{\hat{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^5 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} + \\ & + 4\omega K \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,6)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(5,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\ & + M \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \sum_{j=\max(i+1,6)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(5,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,6)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \cdot \sum_{j=1}^{\min(5,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \\ & - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_u = & KR_2^3 \cdot \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\hat{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - H \cdot \left[ \int_{\hat{c}}^{\hat{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\ & + KR_2^3 \left\{ 2H \cdot \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \cdot \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\} - 4\omega \int_a^{\hat{b}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad (3.11) \end{aligned}$$

– внутренняя зона разгрузки

$$\underline{\sigma}_r^u = 2\omega \cdot \int_{\underline{b}}^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega}{r^3} \cdot \int_{\underline{b}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \underline{A}_u + \frac{\underline{B}_u}{r^3},$$

$$\underline{u}_r^u = \frac{2\omega r}{3\lambda + 2\mu} \cdot \int_{\underline{b}}^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{\omega}{\mu r^2} \cdot \int_{\underline{b}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r \underline{A}_u}{3\lambda + 2\mu} - \frac{\underline{B}_u}{4\mu r^2},$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_u = & -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=2}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{R_1}^{\underline{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\ & + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\bar{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \Big\} + \\ & + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=2}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\underline{c}}^{\bar{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\bar{b}}^{\bar{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} + \\ & + 4\omega K \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,2)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(1,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\ & + M \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \sum_{j=\max(i+1,2)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(1,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,2)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \cdot \sum_{j=1}^{\min(1,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \\ & - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\ \underline{B}_u = & KR_2^3 \cdot \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\underline{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\bar{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - H \cdot \left[ \int_{\underline{c}}^{\bar{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\bar{b}}^{\bar{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\ & + KR_2^3 \left\{ 2H \cdot \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \cdot \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\} + 4\omega \int_{\underline{b}}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \quad (3.12) \end{aligned}$$

– внешняя область повторного пластического течения

$$\widehat{\sigma}_r^r = 4K_0 \cdot \int_{\hat{c}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega(1-K_0)}{r^3} \cdot \int_{\hat{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \widehat{A}_r + \frac{\widehat{B}_r}{r^3},$$

$$\widehat{e}_r^{pr} = \frac{4k(r)}{H} + 2K_0 \Delta(r) - \frac{6K_0}{r^3} \cdot \int_{\hat{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{3\widehat{B}_r}{Hr^3},$$

$$\widehat{u}_r^r = -\frac{4K_0 r}{3\lambda + 2\mu} \cdot \int_{\hat{c}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \cdot \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \cdot \int_{\hat{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r\widehat{A}_r}{3\lambda + 2\mu} - \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \cdot \frac{\widehat{B}_r}{r^2},$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_r = & -\Lambda \left\{ [H - 2\omega] \cdot \left[ \int_{R_1}^{\hat{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\ & + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \Big\} + \\ & + K \left\{ [H - 2\omega] \cdot \int_{\hat{c}}^{\hat{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left[ H \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=0}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} \\ & + 4\omega K \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,7)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(6,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\ & + M \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \sum_{j=\max(i+1,7)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(6,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,7)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \cdot \sum_{j=1}^{\min(6,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \\ & - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{B}_r = & KR_2^3 \cdot \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\hat{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - H \cdot \left[ \int_{\hat{c}}^{\hat{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\ & + KR_2^3 \left\{ 2H \cdot \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \cdot \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\} - 4\omega \int_a^{\hat{c}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (3.13)$$

– внутренняя область повторного пластического течения

$$\underline{\sigma}_r^r = 4K_0 \cdot \int_{\underline{c}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{4\omega(1-K_0)}{r^3} \cdot \int_{\underline{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \underline{A}_r + \frac{\underline{B}_r}{r^3},$$

$$\underline{e}_r^{pr} = \frac{4k(r)}{H} + 2K_0 \Delta(r) - \frac{6K_0}{r^3} \cdot \int_{\underline{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{3\underline{B}_r}{Hr^3},$$

$$\underline{u}_r^r = -\frac{4K_0 r}{3\lambda + 2\mu} \cdot \int_{\underline{c}}^r \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \cdot \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \cdot \int_{\underline{c}}^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r\underline{A}_r}{3\lambda + 2\mu} - \left( \frac{1}{4\mu} + \frac{K_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \cdot \frac{\underline{B}_r}{r^2},$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_r = & -\Lambda \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=1}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \left[ \int_{R_1}^{\underline{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] + \right. \\ & + \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 [H - 2\omega] \cdot \left[ \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] \Big\} + \\ & + K \left\{ \left[ H - 2\omega R_2^3 \cdot \sum_{j=1}^7 \frac{(-1)^{7-i}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\underline{c}}^{\underline{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 [H - 2\omega] \cdot \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right\} + \\ & + 4\omega K \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \left( \frac{1}{R_2^3} - \sum_{j=\max(i+1,1)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \right) + \left( \frac{1}{R_1^3} - \sum_{j=1}^{\min(0,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right) \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} + \\ & + M \cdot \sum_{i=0}^6 \left\{ \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \cdot \sum_{j=\max(i+1,1)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} + \sum_{j=1}^{\min(0,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} - R_2^3 \sum_{j=\max(i+1,1)}^6 \frac{(-1)^j}{\gamma_i^3} \cdot \sum_{j=1}^{\min(0,i)} \frac{(-1)^{j+1}}{\gamma_i^3} \right] \cdot \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right\} - \\ & - \frac{2KH + M}{R_1^3} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \\ \underline{B}_r = & KR_2^3 \cdot \left\{ 4 \left[ \int_{R_1}^{\underline{c}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\underline{b}}^a \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho - \int_{\hat{c}}^{R_2} \frac{k(\rho)}{\rho} d\rho \right] - H \cdot \left[ \int_{\underline{c}}^{\underline{b}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \int_{\hat{b}}^{\hat{c}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \right\} + \\ & + KR_2^3 \left\{ 2H \cdot \left[ \frac{1}{R_1^3} \int_{R_1}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{1}{R_2^3} \int_a^{R_2} \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right] - 4\omega \left[ \sum_{i=0}^7 \left( \frac{(-1)^i}{\gamma_i^3} \cdot \int_{\gamma_i}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho \right) \right] \right\} + 4\omega \int_{\underline{c}}^a \rho^2 \Delta(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где нижняя  $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$  и верхняя  $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$  дуги обозначают принадлежность упруго-пластических границ к внешней и внутренней частям шара соответственно;

$\gamma = [R_1 \quad \underline{c} \quad \underline{b} \quad \underline{a} \quad \widehat{a} \quad \widehat{b} \quad \widehat{c} \quad R_2]$  – обобщенный вектор упругопластических границ, включающий также границы шара (радиусы его внутренней и внешней поверхностей). Индексация при этом начинается с нуля.

Дополнительно были деланы следующие замены для физико-механических параметров среды в выражениях (3.8)–(3.14):

$$\omega = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad H = 3c + 2\omega - 3\eta \cdot h, \quad K_0 = \frac{2\omega}{H}, \quad K = \frac{2\omega}{\Xi}, \quad \Lambda = \frac{4K}{H}, \quad M = 2\omega^2 \Lambda,$$

$$\Xi = H \cdot \left[ 1 - \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \right] + 2 \cdot \omega \cdot \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - \left( \frac{R_2}{\underline{c}} \right)^3 + \left( \frac{R_2}{\underline{b}} \right)^3 - \left( \frac{R_2}{\underline{a}} \right)^3 + \left( \frac{R_2}{\widehat{a}} \right)^3 - \left( \frac{R_2}{\widehat{b}} \right)^3 + \left( \frac{R_2}{\widehat{c}} \right)^3 - 1 \right].$$

Взаимное расположение областей деформирования вместе с упругопластическими границами между ними представлено на рисунке 19.

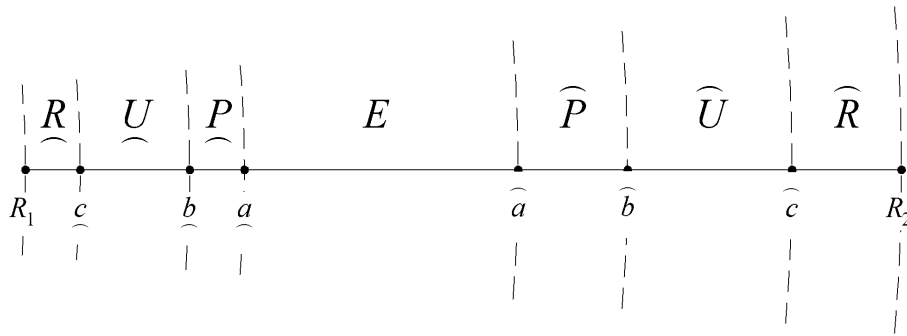


Рисунок 19 – Расположение областей с различающейся реологией и упругопластических границ при существовании всех семи зон

Для исключения из рассмотрения отдельных областей необходимо приравнять в (3.8)–(3.14) положение соответствующей упругопластической границы радиусам  $R_1$  или  $R_2$ :

- для исключения внутренней области повторного пластического течения –  $\underline{c} = R_1$ ;
- для исключения внутренней зоны разгрузки (вместе с внутренней областью повторного пластического течения) –  $\underline{b} = \underline{c} = R_1$ ;
- для исключения внутренней области пластического течения (вместе с внутренней зоной разгрузки и внутренней областью повторного пластического течения) –  $\underline{a} = \underline{b} = \underline{c} = R_1$ ;

- для исключения внешней области пластического течения (вместе с внешней зоной разгрузки и внешней областью повторного пластического течения) –  $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = R_2$ ;
- для исключения внешней зоны разгрузки (вместе с внешней областью повторного пластического течения) –  $\hat{b} = \hat{c} = R_2$ ;
- для исключения внешней области повторного пластического течения –  $\hat{c} = R_2$ ;

Положение упругопластических границ определяется согласно следующим условиям (если для границы приведено несколько условий, то любому из них вследствие их эквивалентности):

1. для границ  $\underline{a}, \hat{a}$ :
  - отсутствие пластических деформаций;
  - достижение упругими напряжениями уровня, соответствующего началу пластического течения;
  - выполнение условия сопряжения окружной компоненты напряжений.
2. для границ  $\underline{b}, \hat{b}$ :
  - равенство нулю скорости пластических деформаций;
3. для границ  $\underline{c}, \hat{c}$ :
  - равенство пластических и остаточных деформаций;
  - достижение напряжениями из зоны разгрузки уровня, соответствующего началу повторного пластического течения;
  - выполнение условия сопряжения окружной компоненты напряжений.

Через  $\underline{t}_p, \hat{t}_p$  обозначим моменты возникновения областей пластического течения, через  $\underline{t}_u, \hat{t}_u$  – моменты возникновения зон разгрузки, через  $\underline{t}_x, \hat{t}_r$  – моменты возникновения областей пластического течения,  $\underline{t}_d, \hat{t}_d$  – моменты вырождения областей пластического течения. Нижние и верхние дуги, как и для упругопластических границ, обозначают принадлежность внутренней и внешней части шара соответственно.

Запишем систему уравнений, соответствующую условиям, приведенным выше, для случая, когда в теле присутствуют все 7 зон, дополнив ее выражениями для остаточных деформаций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{e}_r^{p\,r}(\underline{c}(t), t) = \hat{e}_r^p(\underline{c}(t)), \\ \dot{\underline{e}}_r^{p\,p}(\underline{b}(t), t) = 0, \\ \underline{e}_r^{p\,p}(\underline{a}(t), t) = 0, \\ \hat{e}_r^{p\,p}(\hat{a}(t), t) = 0, \\ \dot{\hat{e}}_r^{p\,p}(\hat{b}(t), t) = 0, \\ \hat{e}_r^{p\,r}(\hat{c}(t), t) = \hat{e}_r^p(\hat{c}(t)), \\ \underline{\hat{e}}_r^p(r) = \underline{e}_r^{p\,p}(r, \underline{s}(r)), \\ \hat{\hat{e}}_r^p(r) = \hat{e}_r^{p\,p}(r, \hat{s}(r)), \end{array} \right. \quad (3.15)$$

где  $\underline{s}(r)$  и  $\hat{s}(r)$  – функции, обратные функциям  $\underline{b}(t)$  и  $\hat{b}(t)$  по аналогии с (2.41).

Стоит заметить, исходя из вида констант интегрирования (3.8)–(3.14), что в системе (3.15) в правых частях уравнений для остаточных деформаций содержится интеграл от их величины. Аналогично [82] будет производить вычисление данных интегралов по методу трапеций [103, с. 164]:

$$\begin{aligned} I_{i+1} &= \int_{\underline{c}_{i+1}}^{\underline{b}_{i+1}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho = I_i + \left( \frac{\hat{e}_r^p(\underline{b}_{i+1})}{\underline{b}_{i+1}} + \frac{\hat{e}_r^p(\underline{b}_i)}{\underline{b}_i} \right) \cdot \frac{\underline{b}_{i+1} - \underline{b}_i}{2} + \left( \frac{\hat{e}_r^p(\underline{c}_{i+1})}{\underline{c}_{i+1}} + \frac{\hat{e}_r^p(\underline{c}_i)}{\underline{c}_i} \right) \cdot \frac{\underline{c}_i - \underline{c}_{i+1}}{2}, \\ \hat{I}_{i+1} &= \int_{\hat{b}_{i+1}}^{\hat{c}_{i+1}} \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho = \hat{I}_i + \left( \frac{\hat{e}_r^p(\hat{b}_{i+1})}{\hat{b}_{i+1}} + \frac{\hat{e}_r^p(\hat{b}_i)}{\hat{b}_i} \right) \cdot \frac{\hat{b}_i - \hat{b}_{i+1}}{2} + \left( \frac{\hat{e}_r^p(\hat{c}_{i+1})}{\hat{c}_{i+1}} + \frac{\hat{e}_r^p(\hat{c}_i)}{\hat{c}_i} \right) \cdot \frac{\hat{c}_{i+1} - \hat{c}_i}{2}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $i$  и  $i+1$  – индексы текущего (известного) и следующего (искомое) состояния соответственно.

В качестве начального ( $i = 0$ ) положения границ  $\underline{b}$  и  $\hat{b}$  при  $\underline{t}_u$  и  $\hat{t}_u$  рассматриваются внутренняя и внешняя поверхности шара, а границы  $\underline{c}$  и  $\hat{c}$  не изменяют своего положения вплоть до соответствующих моментов возникновения зон повторной пластичности  $\underline{t}_r$  и  $\hat{t}_r$ . Таким образом, система (3.15) вместе с



интегралами (3.16) численно описывает процесс движения упругопластических границ в теле.

В моменты времени  $t_d$  границы  $a$  и  $b$  достигают своего предельного положения  $\underline{a}(t_d) = \underline{b}(t_d) = \underline{b}'$  и  $\widehat{a}(\widehat{t}_d) = \widehat{b}(\widehat{t}_d) = \widehat{b}'$ , и происходит вырождение областей пластического течения. Это может произойти как до, так и после возникновения областей повторного пластического течения в зависимости от свойств материала и параметров нагрева. В данном случае необходимо сделать соответствующую подстановку в систему (3.15).

Резюмируя приведенные выше рассуждения, можно записать алгоритм, позволяющий определить последовательность процессов при эволюции областей обратимого и необратимого деформирования:

1. Пусть тело в текущий момент времени тело находится в состоянии  $P_i$  (например,  $E$ ) в соответствии с рисунком 18.
2. На следующем этапе тело может перейти из состояния  $P_i$  в любое из его дочерних состояний  $S_{ij}$  (для  $P_0 = E$  возможен переход в состояния  $S_{01} = PE$  и  $S_{02} = EP$ ). Поэтому для каждого из состояний  $S_{ij}$  определяется момент времени  $t_{ij}$  (например,  $t_{01} = 12$  с и  $t_{02} = 3$  с), в который данное состояние наступит (т. е. выполнится соответствующее ему условие на поверхности).
3. Из всех возможных  $S_{ij}$  реализуется то  $S'_i$ , для которого  $t'_i$  является наименьшим из  $t_{ij}$  (т. е. из  $S_{01} = PE$  и  $S_{02} = EP$  реализуется  $S'_i = EP$ , поскольку  $t_{02} < t_{01}$ ).
4. Реализованное состояние  $S'_i$  становится  $P_{i+1}$ , и процесс повторяется, начиная с шага 1 до реализации конечного состояния (при возможности существования всех зон – до состояния  $\underline{R}\underline{U}\underline{E}\widehat{U}\widehat{R}$ ).

Как и в случае для сплошного шара, после полного нагрева тела температурный градиент в нем становится равным нулю, и процесс деформирования завершается. При этом упругопластические границы  $\underline{\epsilon}$  и  $\widehat{\epsilon}$  занимают предельные

положений  $\underline{c}'$  и  $\widehat{c}'$ , а в областях  $R_1 \leq r \leq \underline{c}'$  и  $\widehat{c}' \leq r \leq R_1$  фиксируется уровень накопленных деформаций  $\tilde{e}_r^p$ .

Для краткости далее будем использовать форму записи в виде кусочной функции для остаточных деформаций во всем теле:

$$\bar{e}_r^p(r) = \begin{cases} \tilde{e}_r^p(r), & R_1 \leq r \leq \underline{c}', \\ \hat{e}_r^p(r), & \underline{c}' < r \leq \underline{b}', \\ 0, & \underline{b}' < r < \widehat{b}', \\ \hat{e}_r^p(r), & \widehat{b}' \leq r < \widehat{c}', \\ \tilde{e}_r^p(r), & \widehat{c}' \leq r \leq R_2. \end{cases} \quad (3.17)$$

По аналогии с разделом 2.2 рассмотрим процесс полного остывания шара. Выражения для остаточных напряжений и перемещений, строго говоря, известны и совпадают с (3.11) или (3.12) с точностью до нижней границы интегрирования и констант, определяемых из условия свободных внутренней и внешней поверхностей шара:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= 2\omega \left[ \int_{R_1}^r \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \left( \frac{R_1^3}{r^3} - 1 \right) \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right], \\ \bar{u}_r &= \frac{2\omega r}{3\lambda + 2\mu} \left[ \int_{R_1}^r \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho - \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \left( 1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{4\mu} \frac{R_1^3}{r^3} \right) \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{\bar{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Предельные переходы от рассматриваемой реологической модели к более простым проводится так же, как и для сплошного шара, причем случай  $c = \eta = 0$  приводит к результатам [82]. Если же приравнять внутренние упругопластические границы внутреннему радиусу и устремить его к нулю  $\underline{a} = \underline{b} = \underline{c} = R_1 \rightarrow 0$ , в результате в точности будет получено решение задачи о сплошном шаре.

В качестве демонстрации рассмотрим тело со следующими свойствами:  $\vartheta = 1,172 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $k_0 = 2,0 \cdot 10^8 \text{ Па}$ ,  $\lambda = 9,2 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu = 4,3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\eta = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\gamma = 70,6$ . Кроме того, зададимся размером шара и параметрами его нагрева:  $R_1 = 0,025 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0,225 \text{ м}$ ,  $\Delta_m = 8,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $x = 0,1 \text{ с}^{-1}$ .

Для заданного набора величин реализуется процесс деформирования, обозначенный на рисунке 20.

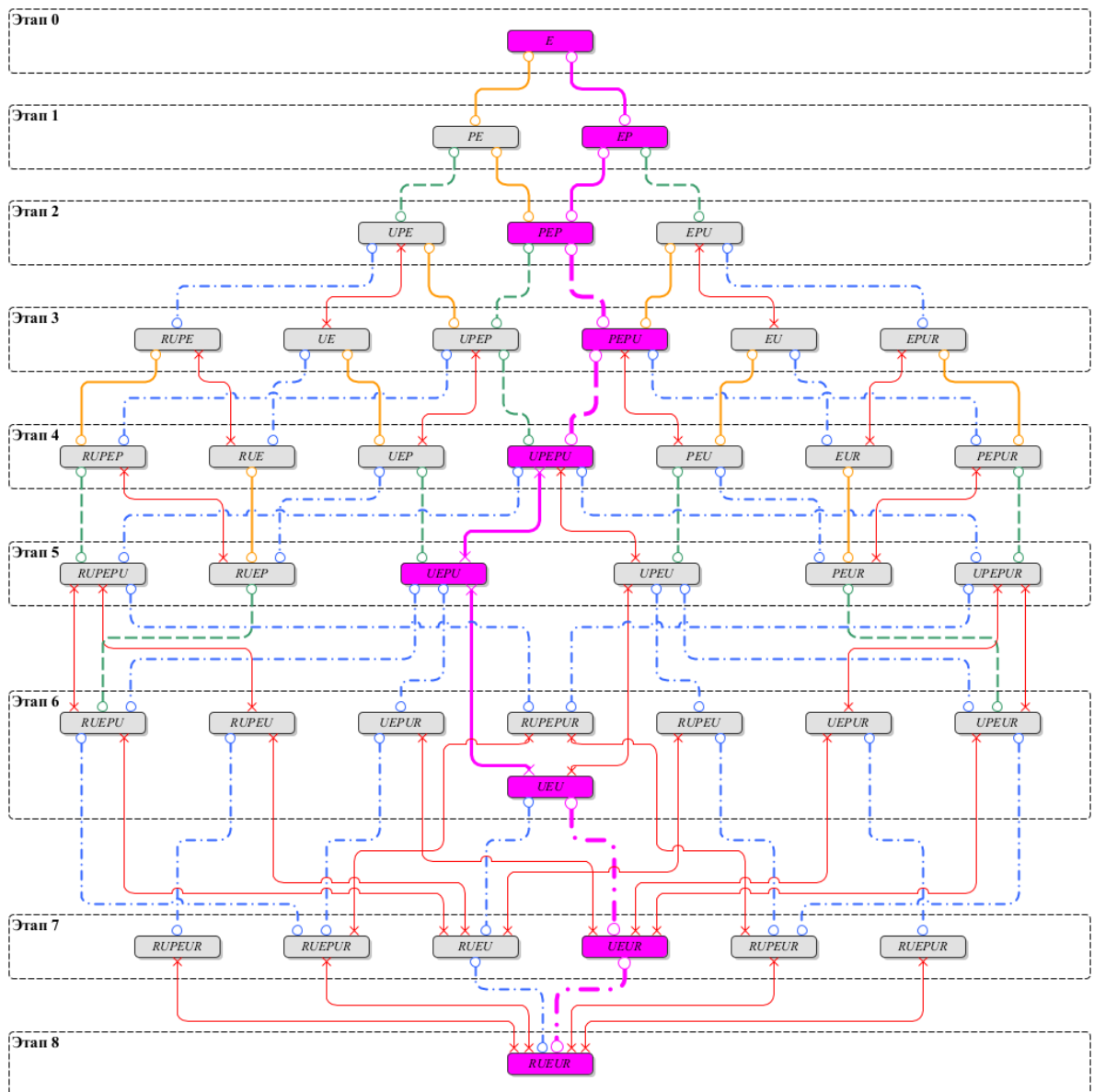


Рисунок 20 – Реализованная траектория развития областей в полном шаре

В таблице 4 приведены значения ключевых моментов времени в ходе процесса деформирования вместе с величинами относительного отклонения данных величин друг от друга. Стоит также обратить внимание на тот факт, что в отличие от случая сплошного шара (таблица 1), когда моменты возникновения и вырождения областей в теле и положение упругопластических границ для упругопластического и упрочняющегося упругопластического материалов совпадают (столбец  $c - i$ ), в полном шаре для указанных моделей совпал только момент возникновения области пластического течения на внешней поверхности.

Таблица 4 – Значения характерных моментов времени

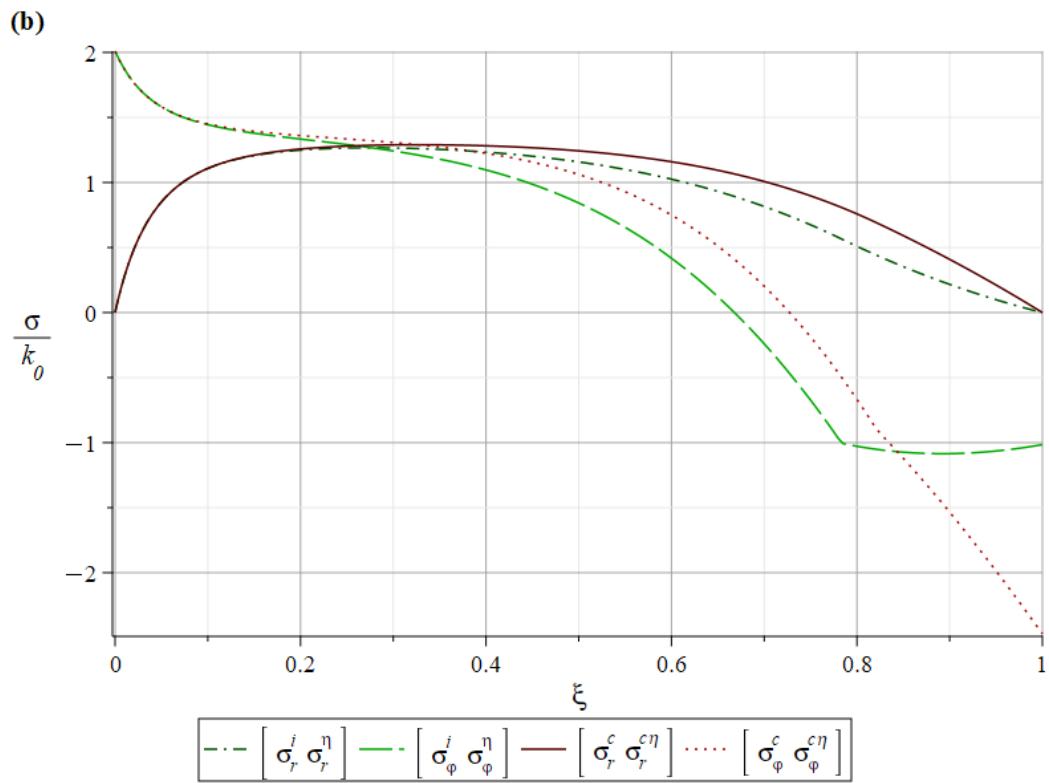
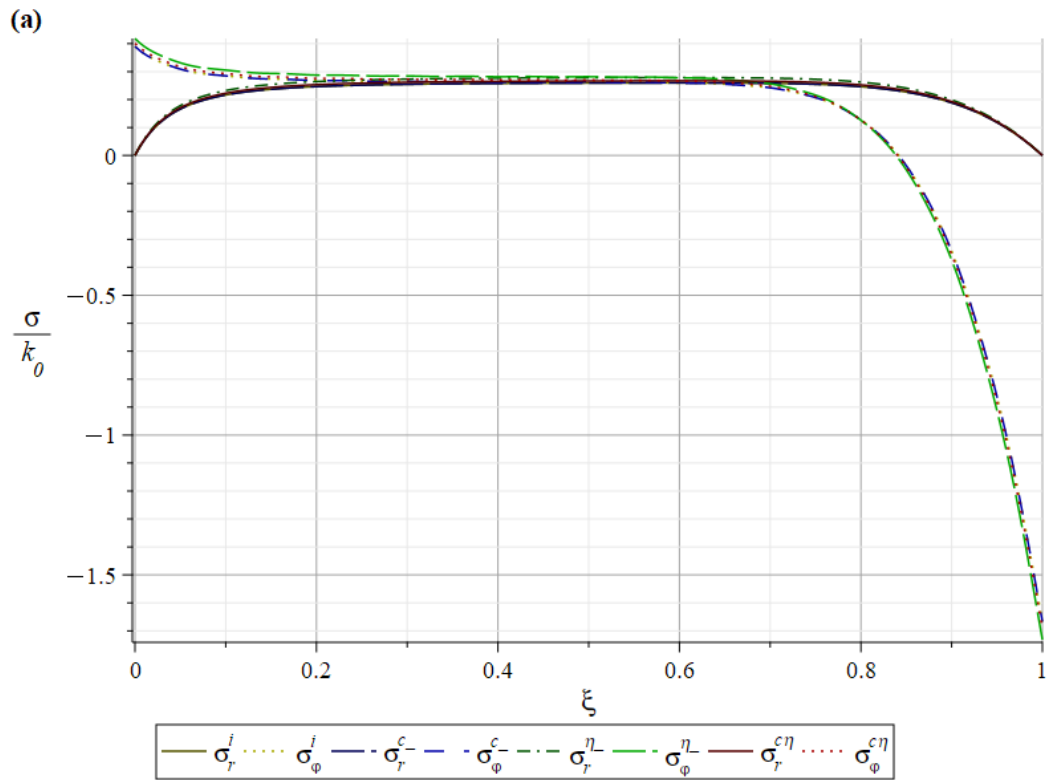
Величина	Модель среды				Относительное отклонение, %				
	$i$	$c$	$\eta$	$c\eta$	$c-i$	$c\eta-\eta$	$\eta-i$	$c\eta-c$	$c\eta-i$
$\hat{t}_p, \text{с}$	3,244	3,244	3,418	3,312	0,000	3,101	5,364	2,096	2,096
$\underline{t}_p, \text{с}$	17,19	13,82	17,28	13,87	19,62	19,70	0,510	0,410	19,29
$\hat{t}_u, \text{с}$	18,52	18,51	18,69	18,58	0,022	0,594	0,940	0,362	0,340
$\underline{t}_u, \text{с}$	37,93	37,99	38,19	38,07	0,161	0,309	0,683	0,211	0,372
$\underline{t}_d, \text{с}$	40,24	41,75	40,40	41,82	3,765	3,525	0,390	0,158	3,929
$\hat{t}_d, \text{с}$	43,47	43,43	43,64	43,49	0,090	0,332	0,398	0,154	0,064
$\hat{t}_r, \text{с}$	57,67	57,66	57,84	57,73	0,003	0,190	0,305	0,118	0,114
$\underline{t}_r, \text{с}$	121,8	115,9	122,0	116,0	4,860	4,928	0,123	0,052	4,811
$\underline{c}'$	0,013	0,015	0,013	0,018	17,50	44,24	0,005	22,76	44,25
$\underline{b}'$	0,023	0,031	0,023	0,032	36,73	40,64	0,007	2,867	40,65
$\hat{b}'$	0,657	0,657	0,657	0,657	0,078	0,086	0,001	0,009	0,087
$\hat{c}'$	0,810	0,810	0,810	0,810	0,004	0,001	0,001	0,003	0,002

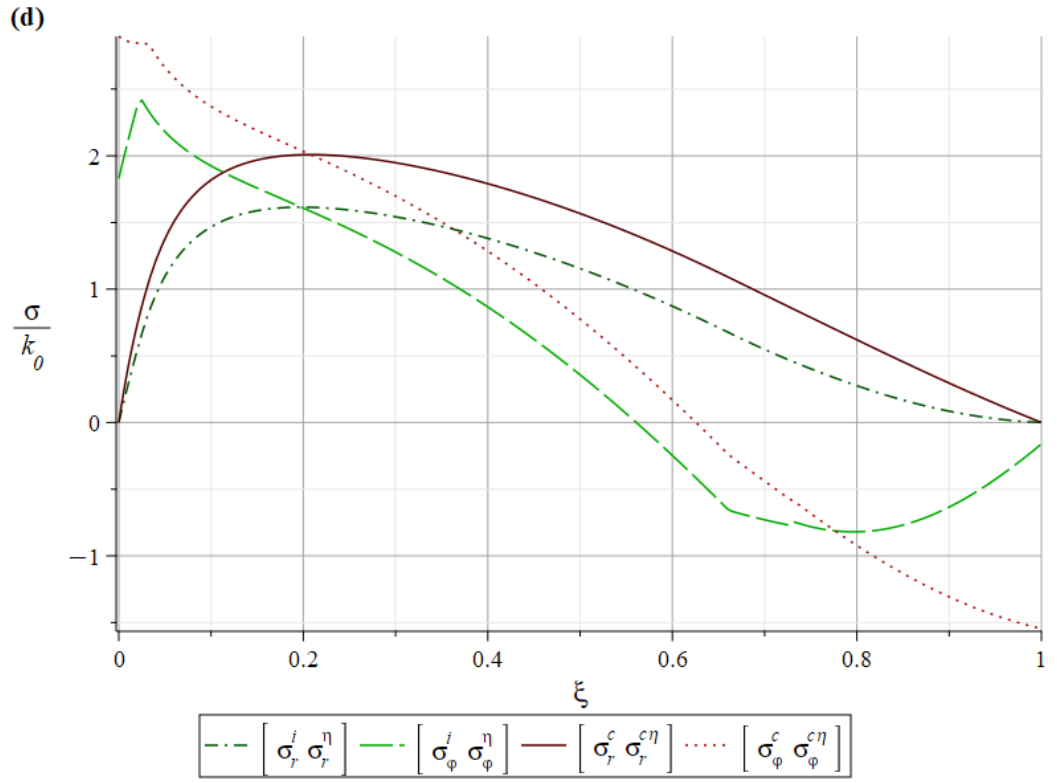
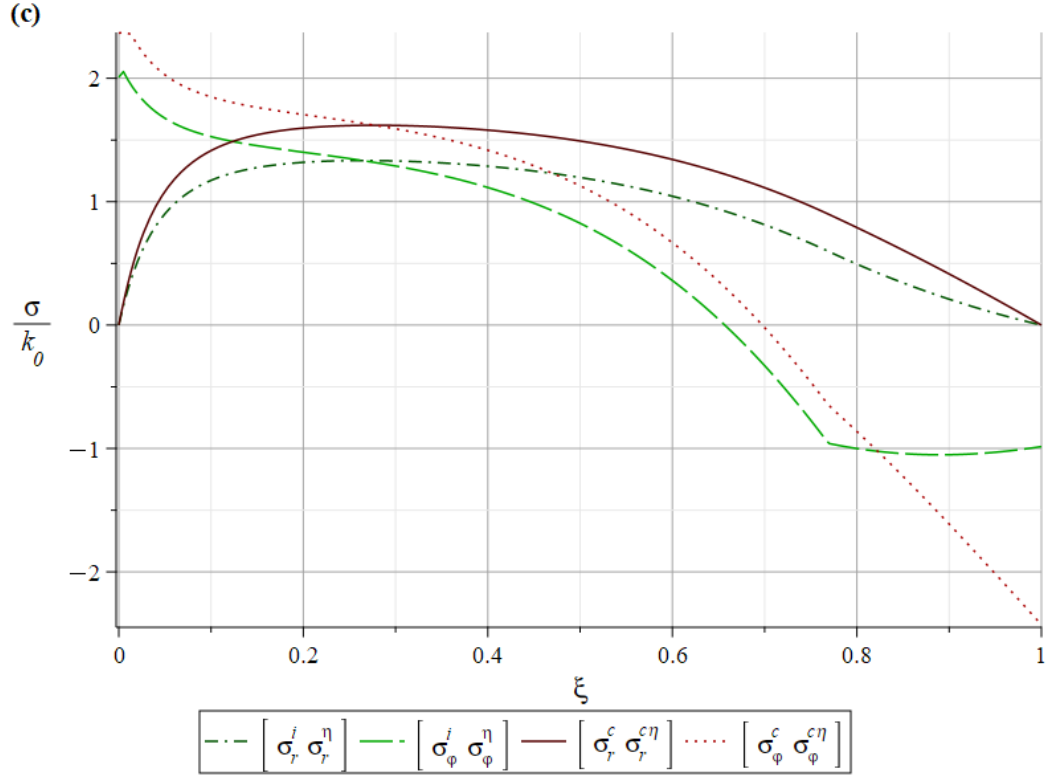
На рисунке 21 представлены распределения радиальной и окружной компонент напряжений в шаре для всех моделей сред в следующие моменты времени:

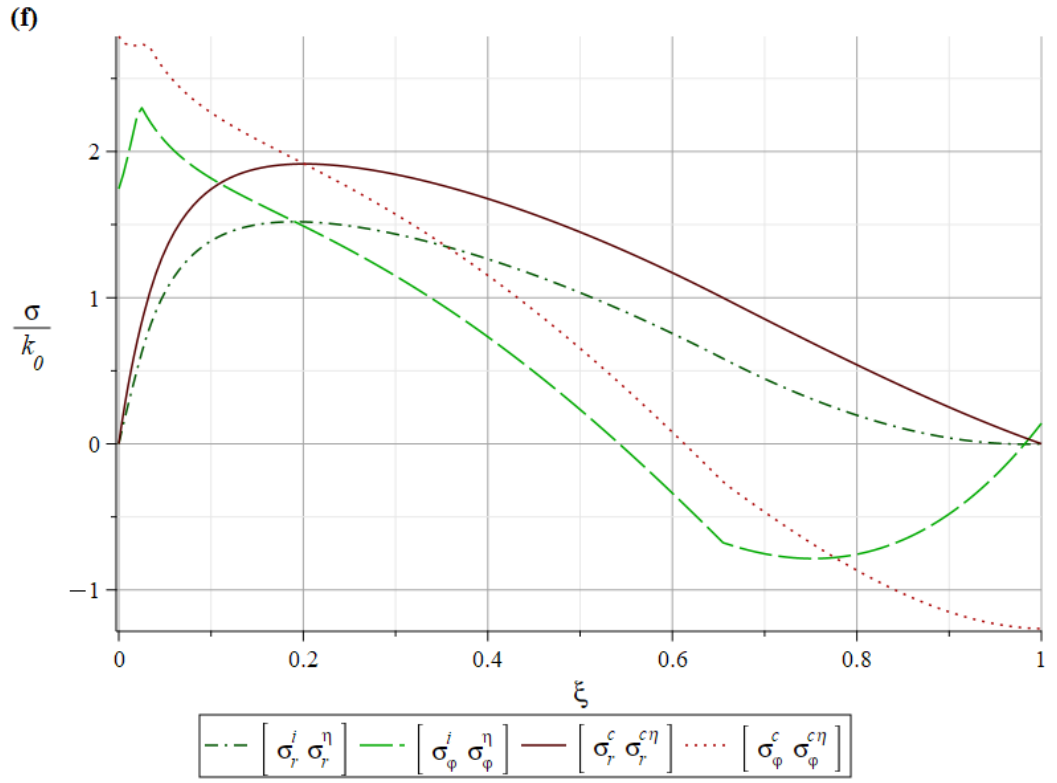
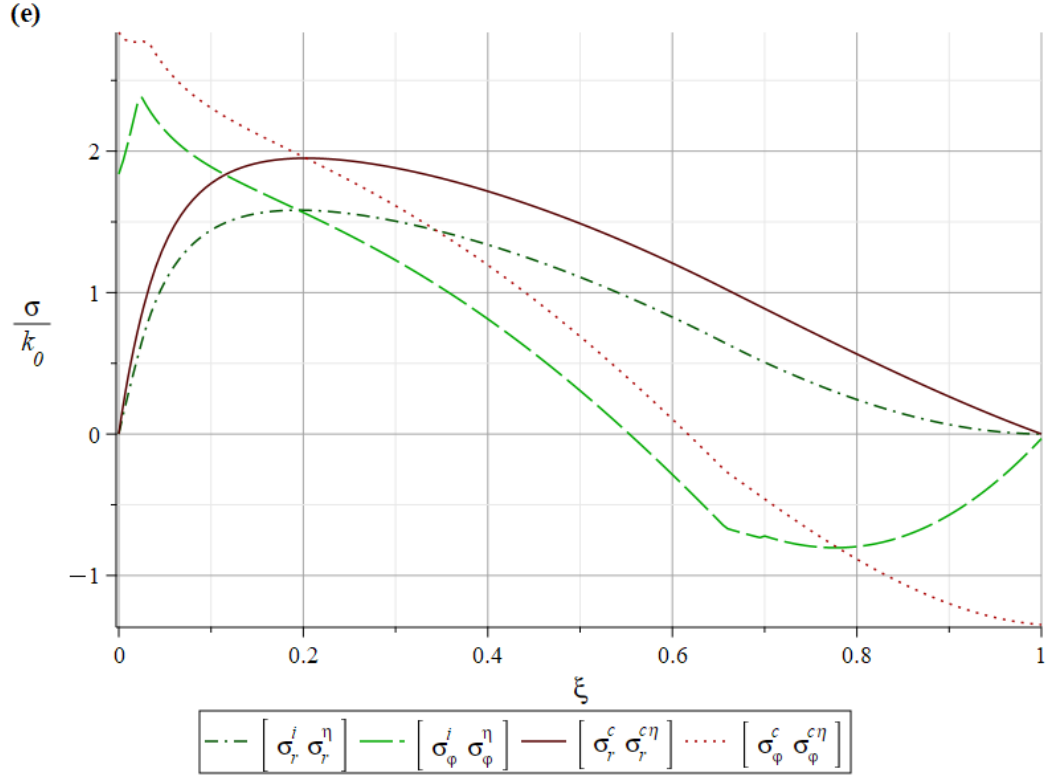
- (a) – момент возникновения внешней области пластического течения;
- (b) – момент возникновения внутренней области пластического течения;
- (c) – момент возникновения внешней зоны разгрузки;
- (d) – момент возникновения внутренней зоны разгрузки;
- (e) – момент вырождения внутренней области пластического течения;
- (f) – момент вырождения внешней области пластического течения;
- (g) – момент возникновения внешней области повторного пластического течения;
- (h) – момент возникновения внутренней области повторного пластического течения.

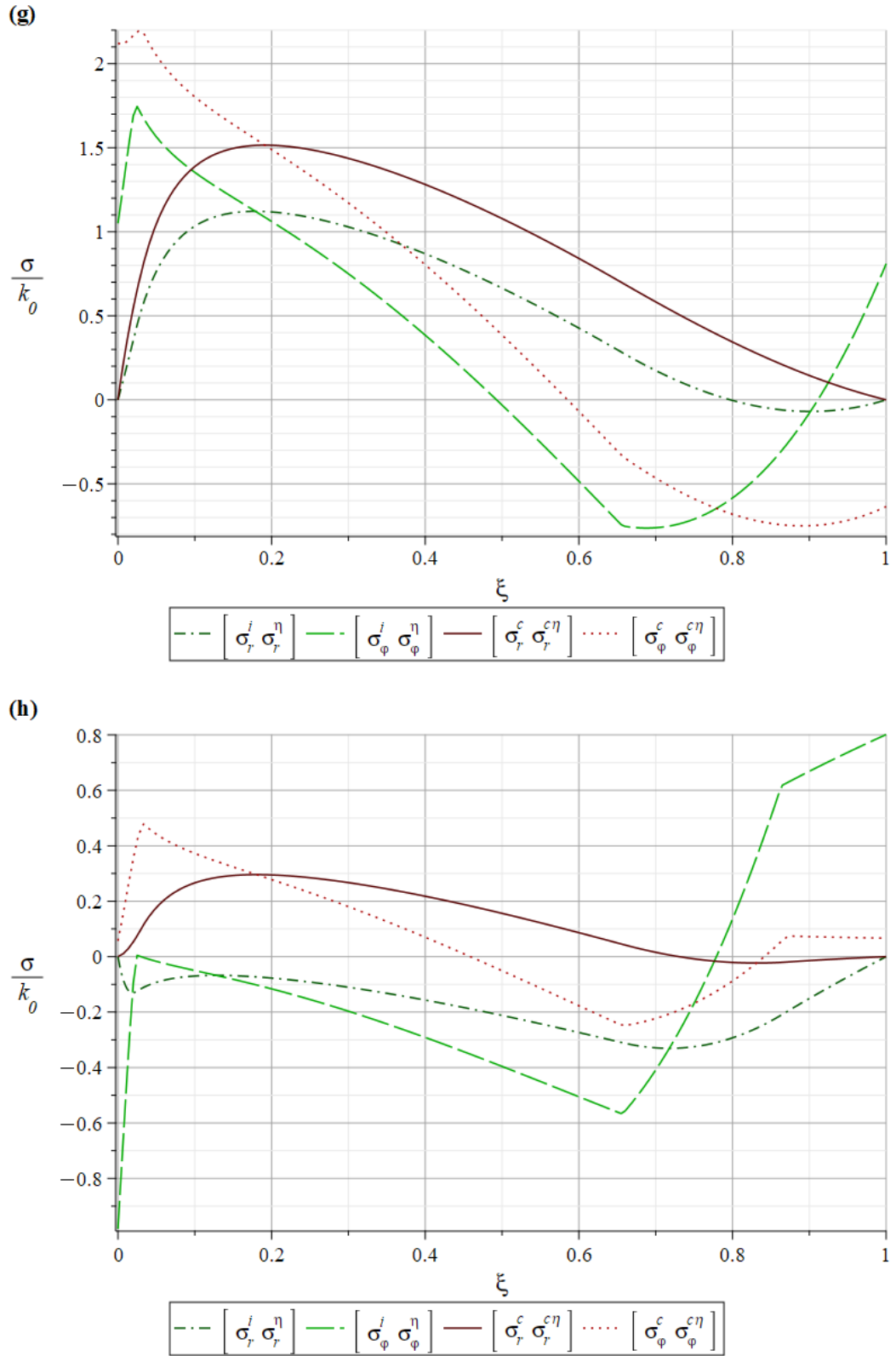
Анализ полученных данных показал, что, как и для случая сплошного шара, влияние вязкости на величину напряжений в теле быстро уменьшается со

временем. В тоже же время упрочняющийся механизм деформирования оказывает на них существенное влияние.









(a) – момент  $\hat{t}_p$ ; (b) – момент  $\hat{t}_p$ ; (c) – момент  $\hat{t}_u$ ; (d) – момент  $\hat{t}_u$ ;  
 (e) – момент  $\hat{t}_d$ ; (f) – момент  $\hat{t}_d$ ; (g) – момент  $\hat{t}_r$ ; (h) – момент  $\hat{t}_r$

Рисунок 21 – Распределение безразмерных напряжений



Как и в случае сплошного шара, анализ величины остаточных напряжений (рисунке 22) и остаточных перемещений (рисунок 23) показал, что изменение параметра вязкости при осуществлении цикла «нагревание-охлаждение» не оказывает влияния на напряженно-деформированное состояние, в то время как введение в рассмотрение упрочнения приводит к существенному изменению результатов (в приведенном примере видно, что остаточные напряжения отличаются более, чем в 2 раза, а для остаточных перемещений в некоторых областях тела разница значений составляет более 4 раз).

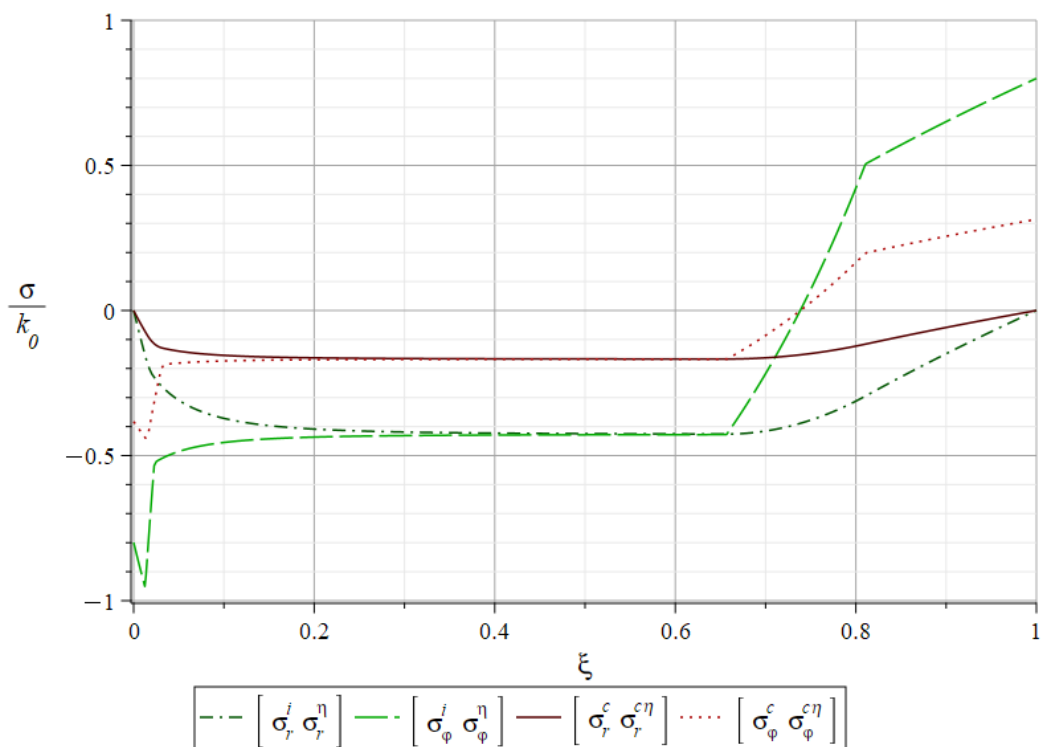


Рисунок 22 – Распределение безразмерных остаточных напряжений

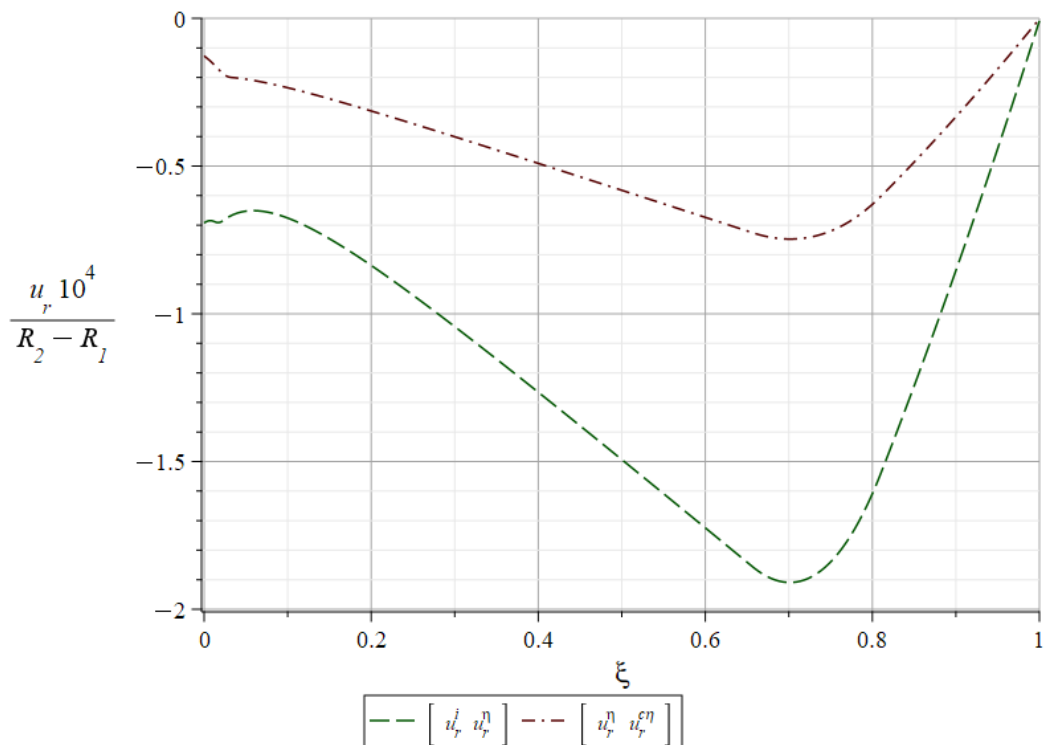
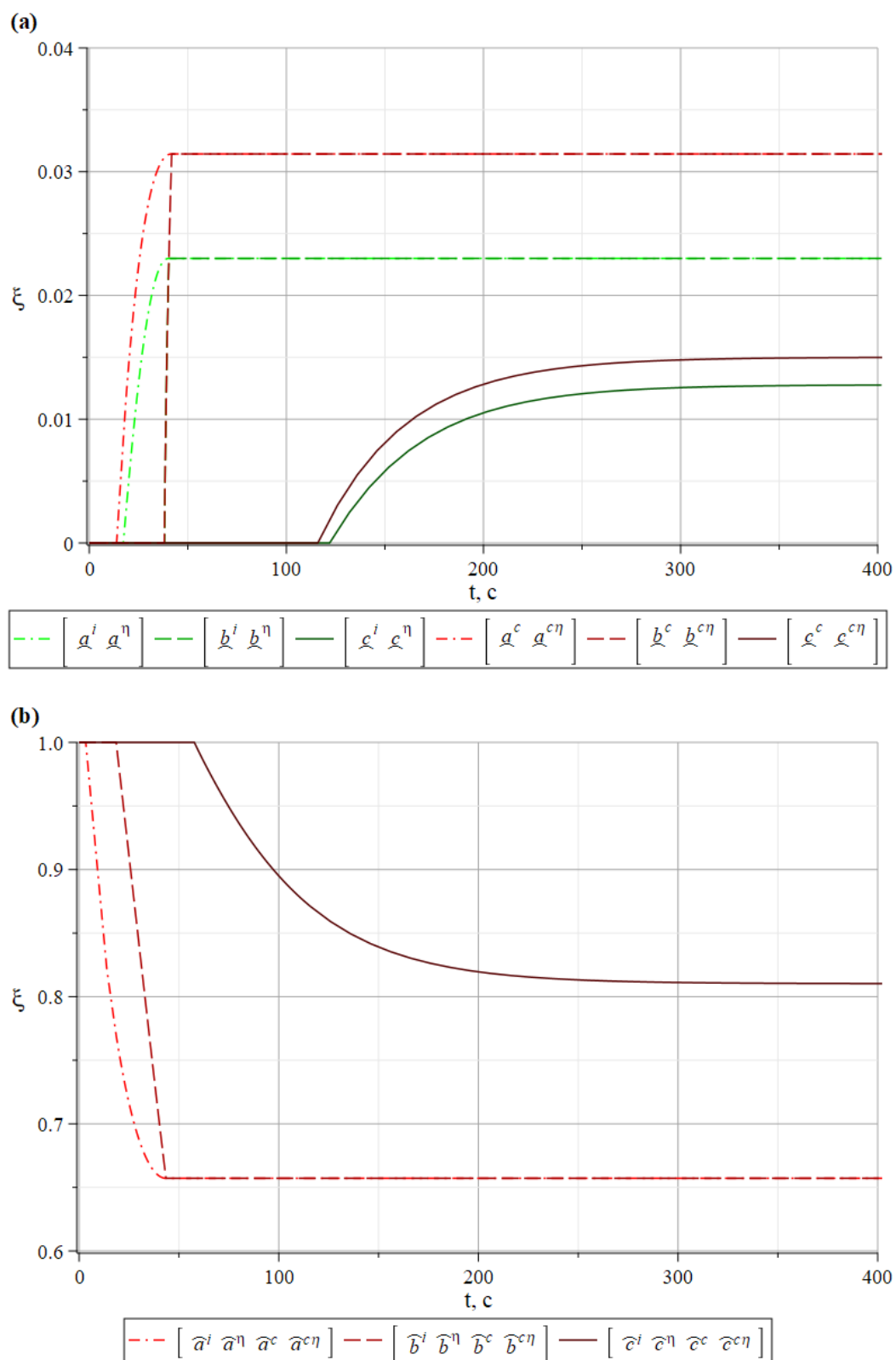


Рисунок 23 – Распределение безразмерных остаточных перемещений

Движение упругопластических границ во внутренней и внешней частях шара приведено на рисунке 24. Эти результаты подтверждают ранее сделанные наблюдения. Учет вязких деформаций практически не влияет на положение упругопластических границ. В свою очередь, рассмотрение упрочнения материала приводит к увеличению глубины проникания областей пластического и повторного пластического течения в наиболее удаленной от поверхности нагрева части шара. Данный факт полностью согласуется с результатами, представленными в таблице 4.



(a) – внутренняя часть шара, (b) – внешняя часть шара

Рисунок 24 – Безразмерная координата упругопластических границ

### 3.3 Численное моделирование

Далее, с целью верификации полученного аналитического решения выполним численное моделирование поставленной задачи. Как и в разделе 2.3, рассмотрим модель кинематического упрочнения (2.53), (2.56) и экспоненциального вязкого упрочнения (2.54)–(2.55).

Геометрическая модель для случая полого шара представляет собой плоский кольцевой сектор  $90^\circ$  диаметрального сечения шара. Один из его радиусов может быть определен в модели в качестве оси вращения, а на втором дополнительно задается условие симметрии. На рисунке 25 приведена применяемая конечно-элементная модель, на которой зеленым обозначена ось вращения, желтым – ребро, являющееся осью симметрии, красным – дуга, на которой задаются температурные граничные условия.

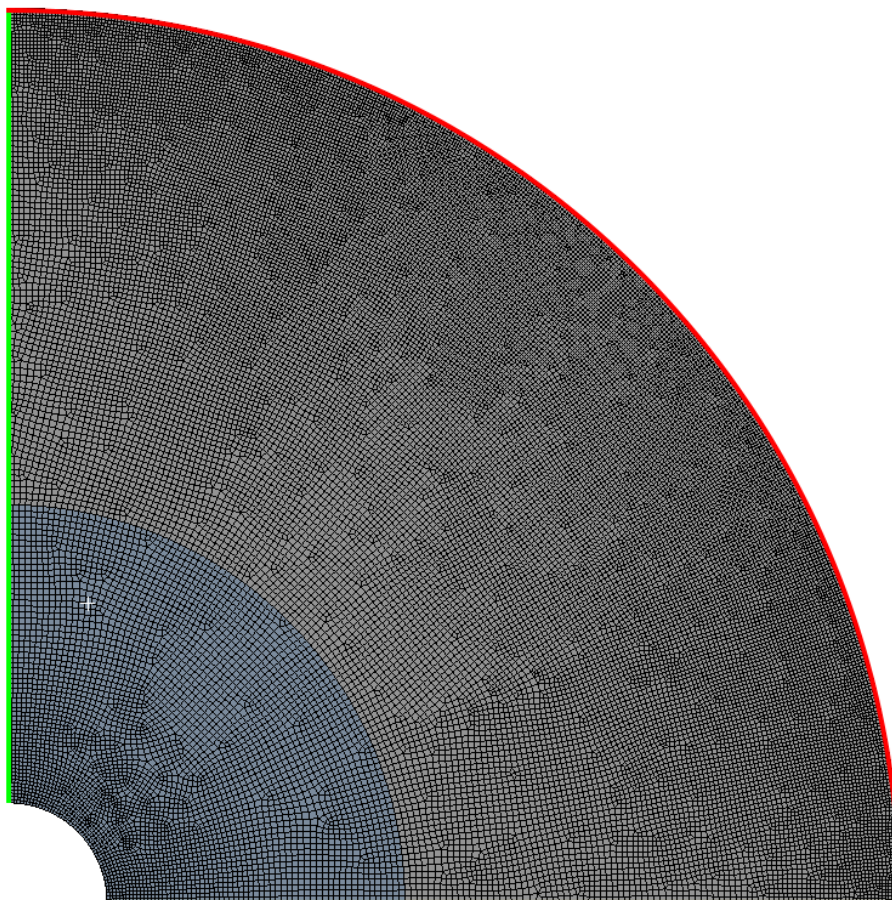


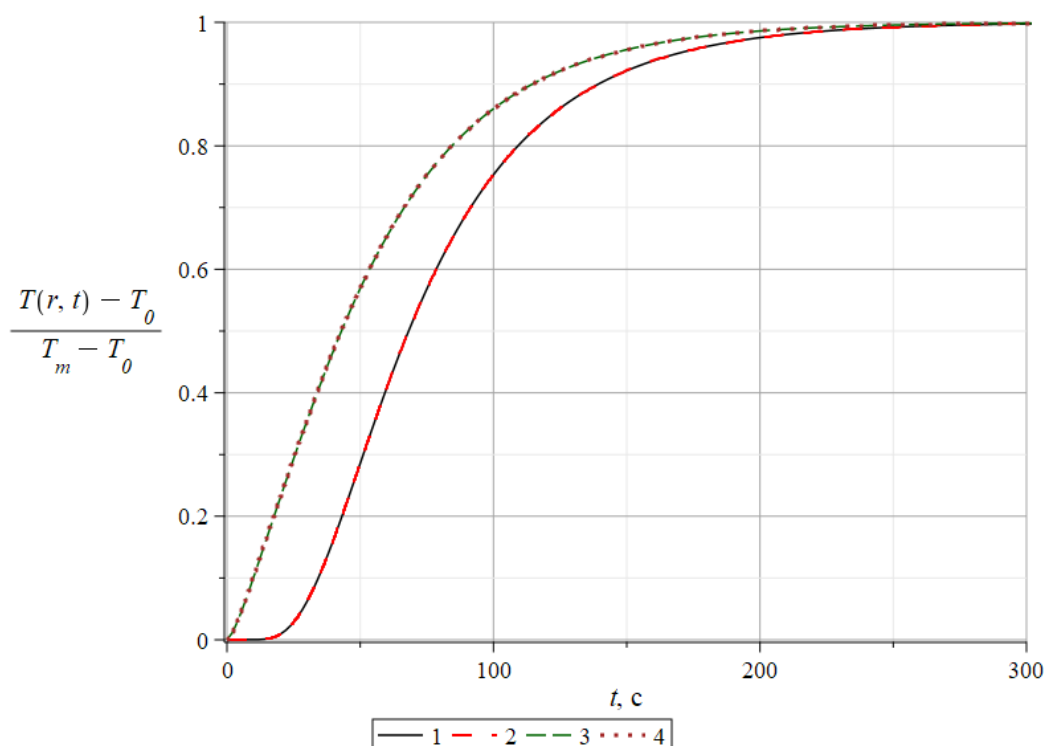
Рисунок 25 – Расчетная модель

Как и прежде, процесс верификации результатов будет разделен на два этапа.

Для случая полого шара выражение (2.57) среднего интегрального значения температуры принимает вид

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} T(r, t) dr. \quad (3.19)$$

График наложения перечисленных величин, полученных аналитическим (с верхним индексом  $A$ ) и численным (с верхним индексом  $Ч$ ) путем, представлен на рисунке 26.



$$1 - \bar{T}^A(t); 2 - \bar{T}^Ч(t); 3 - T^A(0, t); 4 - T^Ч(0, t)$$

Рисунок 26 – Распределение безразмерной температуры

Анализ графических зависимостей позволяет установить, что полученные аналитические выражения в достаточной мере адекватно описывают процесс нагрева тела.

При аналитическом решении задачи механики деформируемого твердого тела были определены значения моментов времени возникновения и вырождения областей с различающимися реологическими свойствами, а также предельные положения упругопластических границ. Аналогичные величины были определены в

ходе вычислительного эксперимента. Данные результаты вместе с относительным отклонением представлены в сравнительной таблице 5.

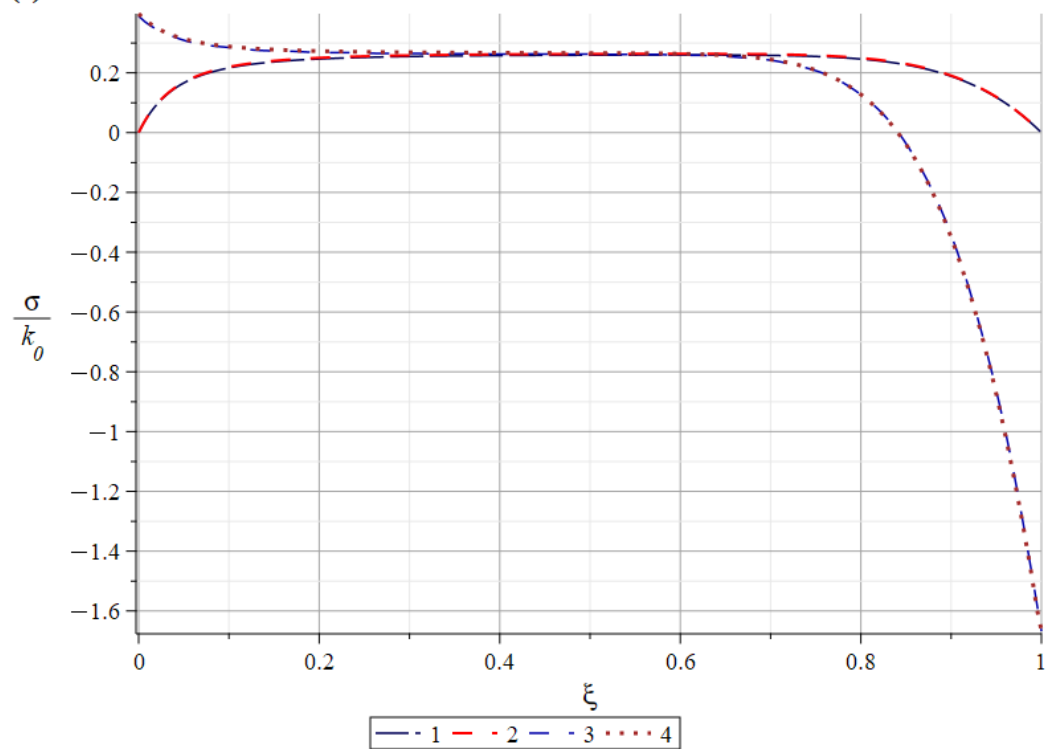
Таблица 5 – Сравнение результатов аналитического решения и численного моделирования

Величина	Аналитическое решение	Вычислительный эксперимент	Отклонение, %
$\hat{t}_p, \text{с}$	3,312	3,28	0,97
$\underline{t}_p, \text{с}$	13,87	14,1	1,64
$\hat{t}_u, \text{с}$	18,58	18,5	0,43
$\underline{t}_u, \text{с}$	38,07	38,1	0,07
$\underline{t}_d, \text{с}$	41,82	41,6	0,53
$\hat{t}_d, \text{с}$	43,49	43,4	0,22
$\hat{t}_r, \text{с}$	57,73	58,0	0,46
$\underline{t}_r, \text{с}$	116,0	118,3	1,97
$\underline{c}'$	0,0184	0,0187	1,63
$\underline{b}'$	0,0323	0,0317	1,86
$\hat{b}'$	0,6572	0,6518	0,82
$\hat{c}'$	0,8103	0,8159	0,69

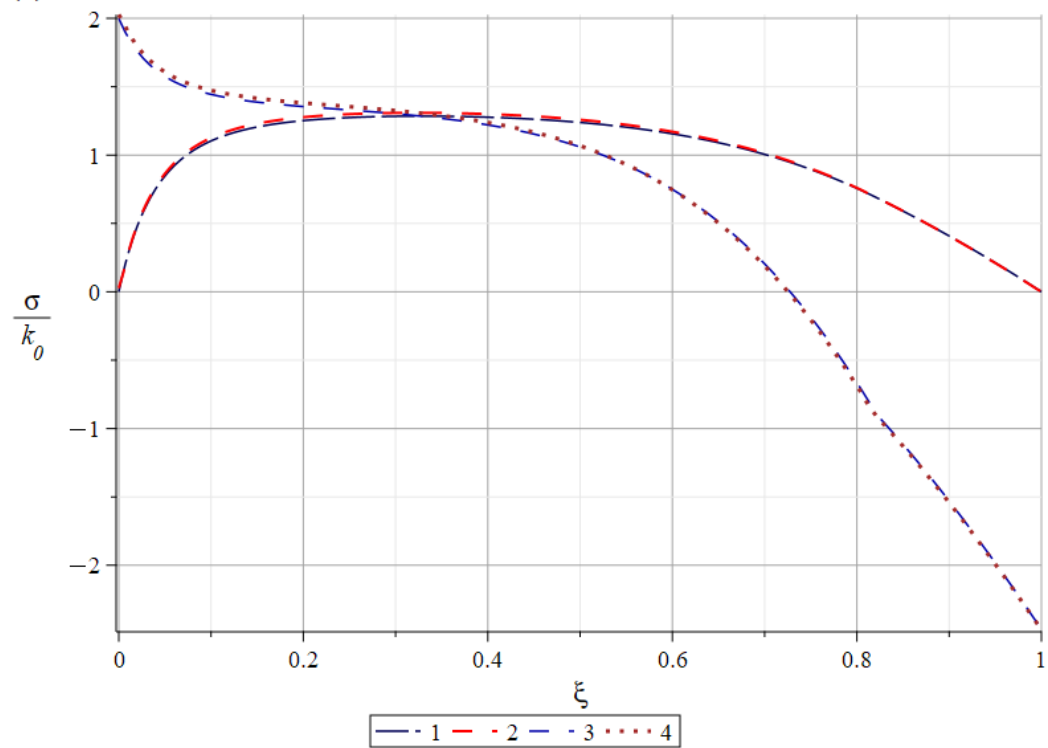
Величина относительного отклонения полученных результатов по времени и предельным положениям границ во внешней области шара друг от друга составляет менее 2 %, что свидетельствует о корректности применяемых моделей.

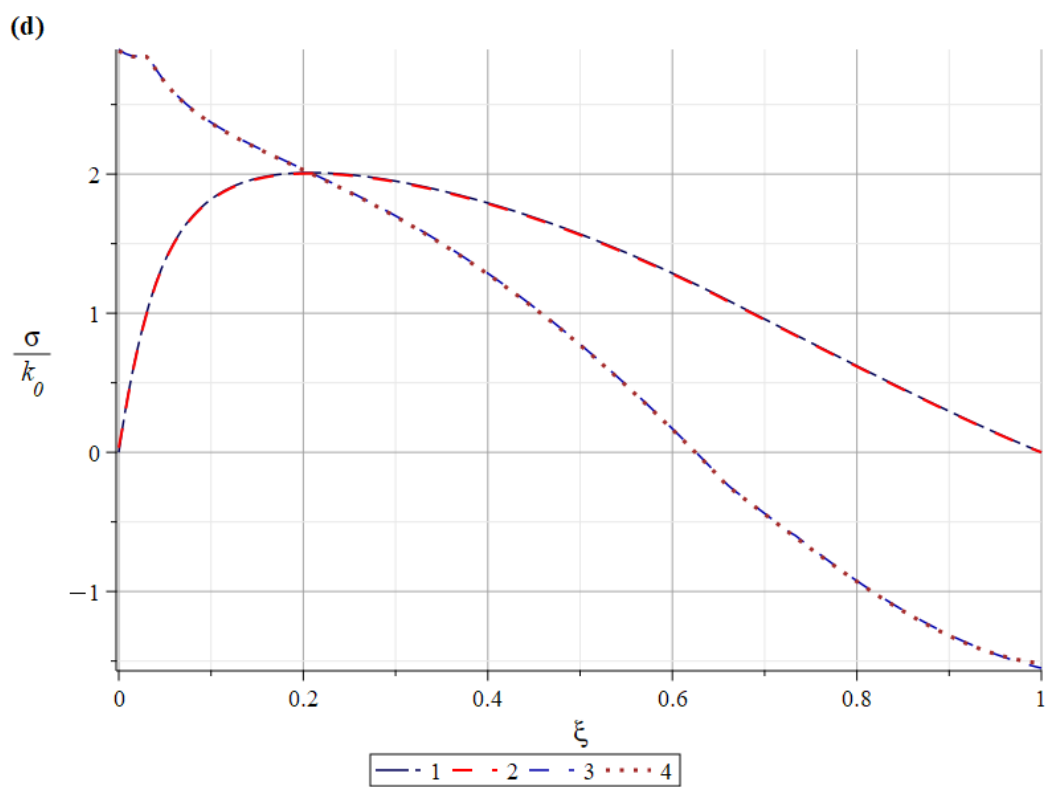
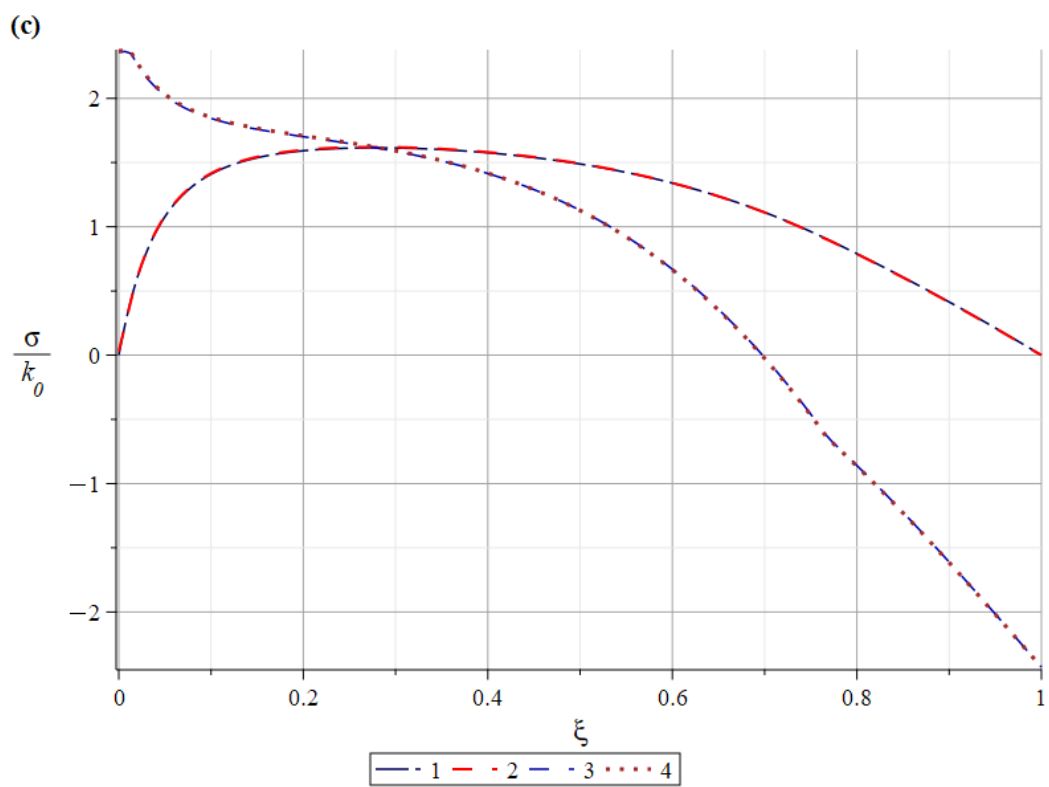
На рисунках 27–28 изображены графики безразмерных радиальной и окружной компоненты напряжений от безразмерного радиуса для всех характерных моментов времени, а также безразмерных остаточных напряжений после остывания тела. Полученные зависимости отражают, что аналитическое решение описывает напряженно-деформированное состояние шара с достаточной степенью достоверности.

(a)

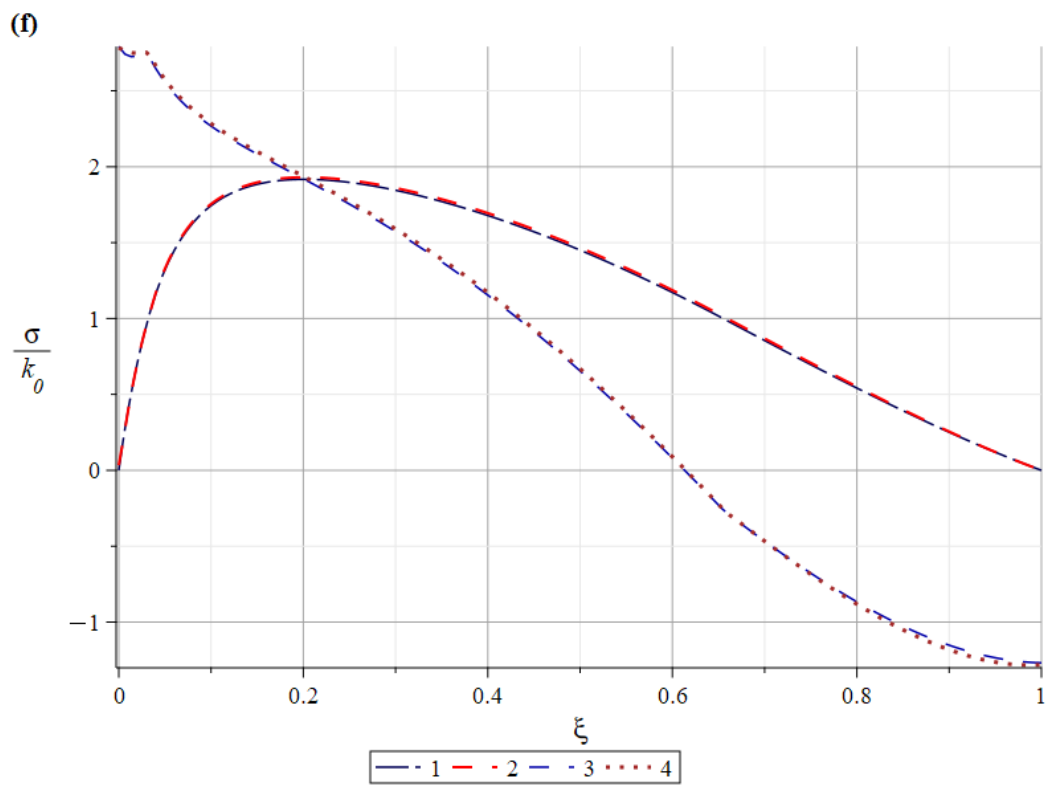
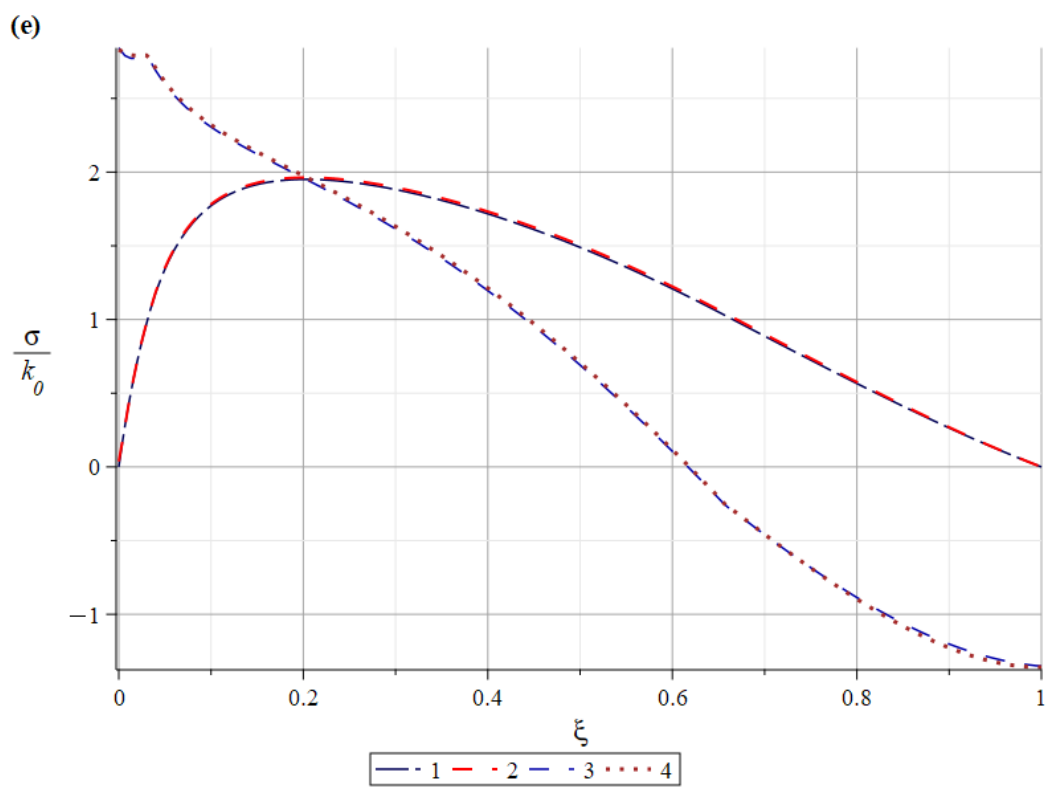


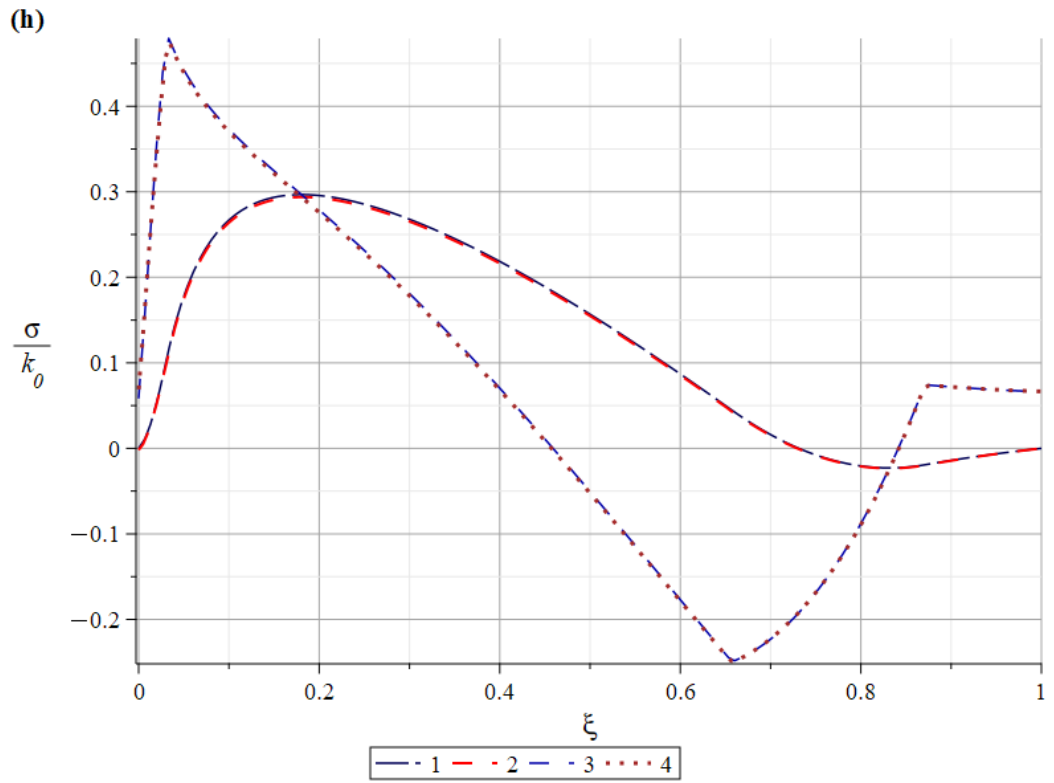
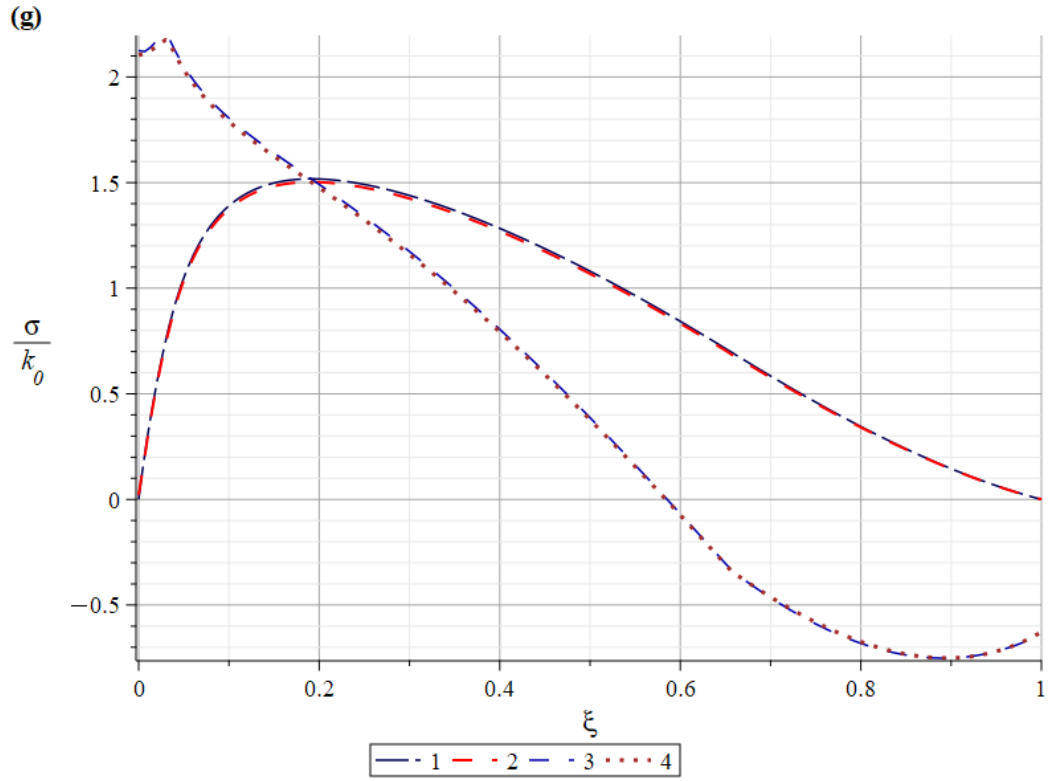
(b)









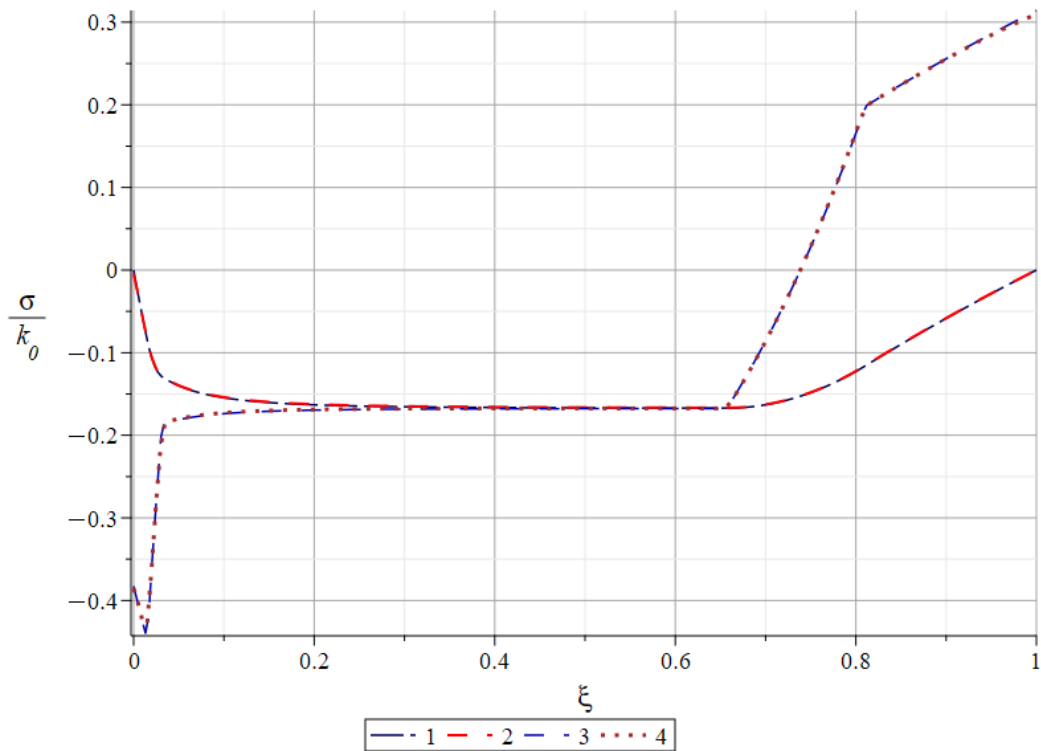


$$1 - \sigma_r^A; 2 - \sigma_r^T; 3 - \sigma_\phi^A; 4 - \sigma_\phi^T;$$

(a) – момент  $\hat{t}_p$ ; (b) – момент  $\underline{t}_p$ ; (c) – момент  $\hat{t}_u$ ; (d) – момент  $\underline{t}_u$ ;

(e) – момент  $\underline{t}_d$ ; (f) – момент  $\hat{t}_d$ ; (g) – момент  $\hat{t}_r$ ; (h) – момент  $\underline{t}_r$

Рисунок 27 – Распределение безразмерных напряжений



$$1 - \sigma_r^A; 2 - \sigma_r^C; 3 - \sigma_\phi^A; 4 - \sigma_\phi^C;$$

Рисунок 28 – Распределение безразмерных остаточных напряжений

Таким образом, было сопоставлено аналитическое решение задачи, приведенное в разделах 3.1–3.2, и проведенный вычислительный эксперимент для аналогичной постановки с применением моделей Шабоша и экспоненциального вязкого упрочнения. Анализ полученных результатов позволил сделать вывод об их сходимости относительно друг друга, а также необходимости использования малого шага дискретизации по времени в ожидаемые моменты существования области пластического течения во внутренней области шара.

### 3.4 Сходимость функциональных рядов и оценка остаточного члена ряда

Как и в разделах 2.1–2.2, в разделах 3.1–3.2 решения были получены в предположении о выполнении условий применимости формулы Грина [92, с. 123].

Данный факт требует дополнительной проверки сходимости полученных функциональных рядов.

Докажем равномерную сходимость функционального ряда (3.6), определяющего распределение безразмерной температуры в теле. Выполним оценку сверху его членов  $u_n(\xi, t), n \geq 1$  по абсолютной величине:

$$\begin{aligned}
 |u_n(\xi, t)| &= \left| \frac{2R_2}{\sin(\mu_n)} \cdot \frac{\mu_n \cos(\mu_n \xi) + h \sin(\mu_n \xi)}{(\mu_n^2 + h^2 + h) \cdot [\xi \cdot (R_2 - R_1) + R_1]} \cdot \frac{x \left[ e^{-\vartheta \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 t} - e^{-xt} \right]}{\vartheta \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 - x} \right| = \\
 &= \frac{2xR_2 |\cos(\mu_n)| \cdot \left| \frac{\cos(\mu_n \xi)}{h} + \frac{\sin(\mu_n \xi)}{\mu_n} \right|}{R_1 \cdot \left( \xi + \frac{1}{h} \right) \cdot (h + \cos(\mu_n)^2)} \cdot \frac{\left| e^{-\vartheta \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 t} - e^{-xt} \right|}{\left| \vartheta \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 - x \right|} \leq \\
 &\leq 2xe^{-xt} \cdot \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{\left| e^{-\left[ \vartheta \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 - x \right] t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 - x \right|}. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения (2.60)–(2.62), можно показать, что все множители в правой части (3.20) являются действительными конечными числами. Поэтому можно временно исключить из рассмотрения первые  $n_0 - 1$  членов ряда, где  $n_0$  выбрано таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $\vartheta \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 - x > 0$ . При этом сумма конечного числа отброшенных членов ряда, которые являются конечными числами, также будет конечна. Тогда можно оценить правую часть в (3.20):

$$\begin{aligned}
& 2xe^{-xt} \cdot \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{\left| e^{-\left(\frac{\mu_n}{R_2 - R_1} - x\right)t} - 1 \right|}{\left| \vartheta \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 - x \right|} \leq \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{2xe^{-xt}}{\vartheta \cdot \left( \frac{\mu_n}{R_2 - R_1} \right)^2 - x} = \\
& = 2e^{-xt} \cdot \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{\frac{x}{\vartheta} \cdot (R_2 - R_1)^2}{\mu_n^2 - \frac{x}{\vartheta} \cdot (R_2 - R_1)^2}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Из вышеизложенного следует, что члены исходного функционального ряда, начиная с некоторого  $n_0$  могут быть промажорированы числовым рядом

$$\left| u_n(\xi, t) \right| \leq 2e^{-xt} \cdot \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{\frac{x}{\vartheta} \cdot (R_2 - R_1)^2}{\mu_n^2 - \frac{x}{\vartheta} \cdot (R_2 - R_1)^2} = a_n e^{-xt} \leq a_n \tag{3.22}$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши–Маклорена [99, с. 26] для доказательства сходимости ряда  $a_n$ . Введем замену вида

$$\tau = \frac{R_2 - R_1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\vartheta}}$$

и вычислим несобственный интеграл

$$I = \int_{n_0}^{+\infty} 2 \cdot \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{\pi^2 \tau^2}{\mu_n^2 - \pi^2 \tau^2} dn = 2 \cdot \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \int_{n_0}^{+\infty} \frac{\pi^2 \tau^2}{\mu_n^2 - \pi^2 \tau^2} dn.$$

Заметим, что собственные значения  $\mu_n$  принадлежат отрезку  $\left[ \frac{\text{Pi}}{2} + \text{Pi} \cdot (n-1), \frac{\text{Pi}}{2} + \text{Pi} \cdot n \right]$ , т. е.

$$\mu_n = \pi \cdot \left( n - \frac{1}{2} + \rho \right), \tag{3.23}$$

где  $\rho \in [0, 1]$  – некоторая точка. Тогда

$$I = 2 \cdot \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \int_{\mu_0}^{+\infty} \frac{\pi^2 \tau^2}{\mu_n^2 - \pi^2 \tau^2} \cdot \frac{1}{\pi} d\mu_n = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \tau \cdot \ln \left( \frac{\mu_0 + \pi \tau}{\mu_0 - \pi \tau} \right), \tag{3.24}$$

где  $\mu_0$  – собственное значение, соответствующее номеру  $n_0$ .

При выборе номера  $n_0$  было задано условие  $\mu_0 - \pi\tau > 0$ . Тогда натуральный логарифм в (3.24) существует, конечен и принимает значение больше единицы. Следовательно,  $I \in \mathbb{R}^+ \setminus \{+\infty\}$  как произведение положительных конечных величин, т.е. несобственный интеграл  $I$  сходится.

Таким образом, можно сделать заключение, что согласно интегральному признаку Коши–Маклорена сходится мажорантный ряд, и как следствие, равномерно сходится исходный функциональный ряд согласно мажорантному признаку Вейерштрасса [99, с. 86]. Кроме того, данный функциональный ряд достаточное количество раз дифференцируем и интегрируем [99].

Подводя итог приведенных рассуждений, можно утверждать, что доказана равномерная сходимость рассматриваемого функционального ряда для температуры и, соответственно, применимость формулы Грина при решении задачи теплопроводности.

Проведем оценку остаточного члена функционального ряда. Пусть  $r_n$  – остаток мажорантного числового ряда,  $s_n$  – остаток исходного функционального ряда. Тогда

$$|u_n(\xi, t)| \leq a_n \Rightarrow r_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n(\xi, t)| \geq \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(\xi, t) \right| = |s_n|. \quad (3.25)$$

Следствием признака интегральной сходимости Коши–Маклорена [99, с. 26] является оценка остатка ряда. Наложим на него дополнительное требование о непревышении некоторой величины  $\varepsilon > 0$

$$r_n \leq I \leq \varepsilon.$$

В (3.22) последняя оценка, получаемая при отбрасывании множителя  $e^{-xt}$ , дает излишне завышенные значения. Поэтому далее будет рассматривать усиленное требование, что не противоречит предыдущим рассуждениям:

$$e^{-xt} r_n \leq e^{-xt} I \leq \varepsilon. \quad (3.26)$$

Подберем такой  $\mu_0$ , чтобы выполнялось условие (3.26):

$$\frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot \tau e^{-xt} \cdot \ln \left( \frac{\mu_0 + \pi\tau}{\mu_0 - \pi\tau} \right) \leq \varepsilon \Rightarrow \mu_0 \geq (R_2 - R_1) \sqrt{\frac{x}{9}} \cdot \frac{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{\pi \sqrt{\frac{x}{9}}}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{\pi \sqrt{\frac{x}{9}}}} - 1}. \quad (3.27)$$

С учетом (3.23) перейдем в (3.27) от собственных значений к индексам

$$n_0 \geq \left\lceil \frac{R_2 - R_1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{9}} \cdot \frac{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{\pi \sqrt{\frac{x}{9}}}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{\pi \sqrt{\frac{x}{9}}}} - 1} \right\rceil + 1. \quad (3.28)$$

Оценка (3.28) полностью согласуется с выбором номера  $n_0$ .

Ранее отмечалось, что выражения для напряжений, перемещений и деформаций в различных областях шара в общем виде являются линейными комбинациями величин (2.69), т. е. записываются в виде (2.72).

С учетом оценки остаточного члена ряда  $r_n$  (3.27) подберем такое  $n_0$ , чтобы выполнялось условие (2.72)

$$\frac{R_2}{R_2 - R_1} \cdot D_i \tau e^{-xt} \cdot \ln \left( \frac{\mu_0 + \pi\tau}{\mu_0 - \pi\tau} \right) \leq \varepsilon \Rightarrow n_0 \geq \left\lceil \frac{R_2 - R_1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{9}} \cdot \frac{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{D_i \cdot \frac{R_2 - R_1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{9}}}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon e^{xt}}{D_i \cdot \frac{R_2 - R_1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{9}}}} - 1} \right\rceil + 1. \quad (3.29)$$

Пусть с некоторого момента времени  $t'$  справедливо, что  $e^{-xt'} \rightarrow 0$ ,  $e^{-\left(9 \left(\frac{\mu_n}{R_2 - R_1}\right)^{-x}\right)t'} \rightarrow 0$ . Тогда из (3.20) следует, что для всех членов ряда  $u_n(\xi, t)$ , т. е. при  $n \geq 1$ , выполняется соотношение  $|u_n(\xi, t')| \rightarrow 0$ . Таким образом, все члены исходного ряда, начиная с  $n \geq 1$ , становятся много меньше нулевого члена, т. е. можно перейти к рассмотрению единственного члена ряда.

Количественная оценка остатка применяемых рядов при различных  $\tau$  и  $D_i$  приведена на рисунке 29. Обе оси графика построены в логарифмических координатах. При прочих равных условиях увеличение значения комплекса  $\tau$  (например,

за счет увеличения скорости нагрева) влечет за собой увеличение необходимого количества членов ряда для достижения той же точности вычислений.

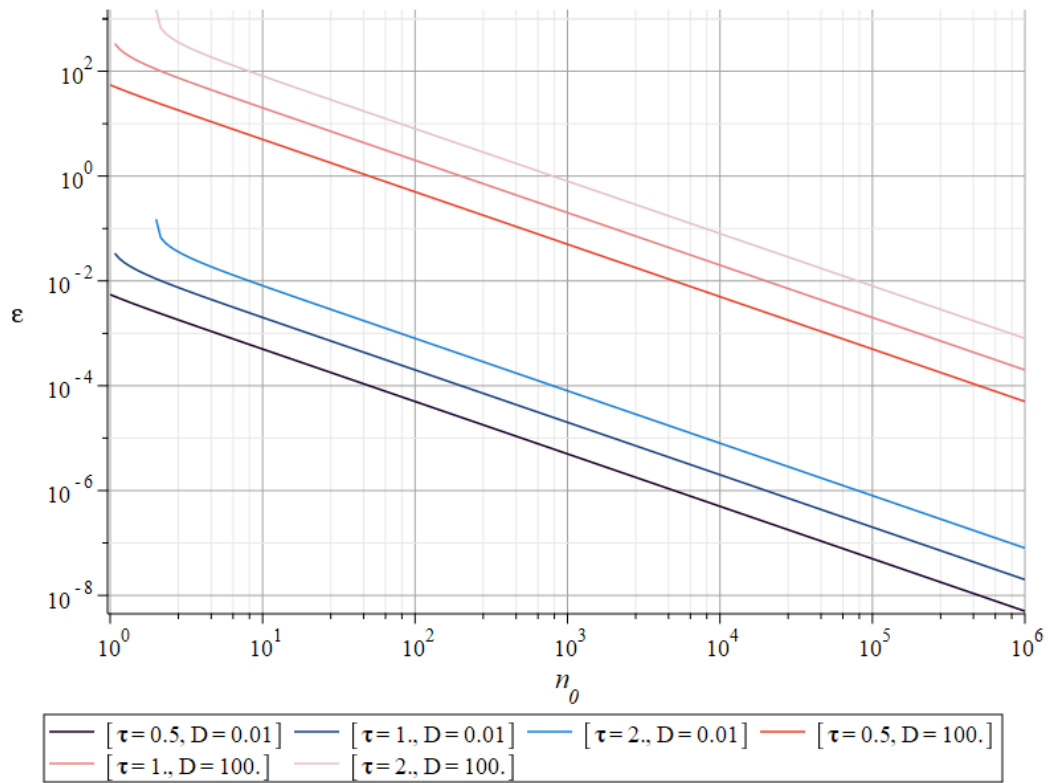


Рисунок 29 – Оценка остаточного члена ряда в момент  $t = 0$

На рисунке 30 представлена зависимость необходимого количества (3.29) членов функционального ряда от текущего момента времени для различных значений требуемой точности вычислений  $\epsilon$  и комплекса  $\tau$ . Анализ полученных графических результатов показал, что комплекс  $\tau$  является определяющим фактором для асимптотического количества членов ряда при  $t > t'$ . Увеличение требуемой точности вычислений приводит к увеличению рассматриваемого количества членов ряда  $n_0$  только на отрезке  $t \in [0, t']$ , а далее не оказывает на него влияния.



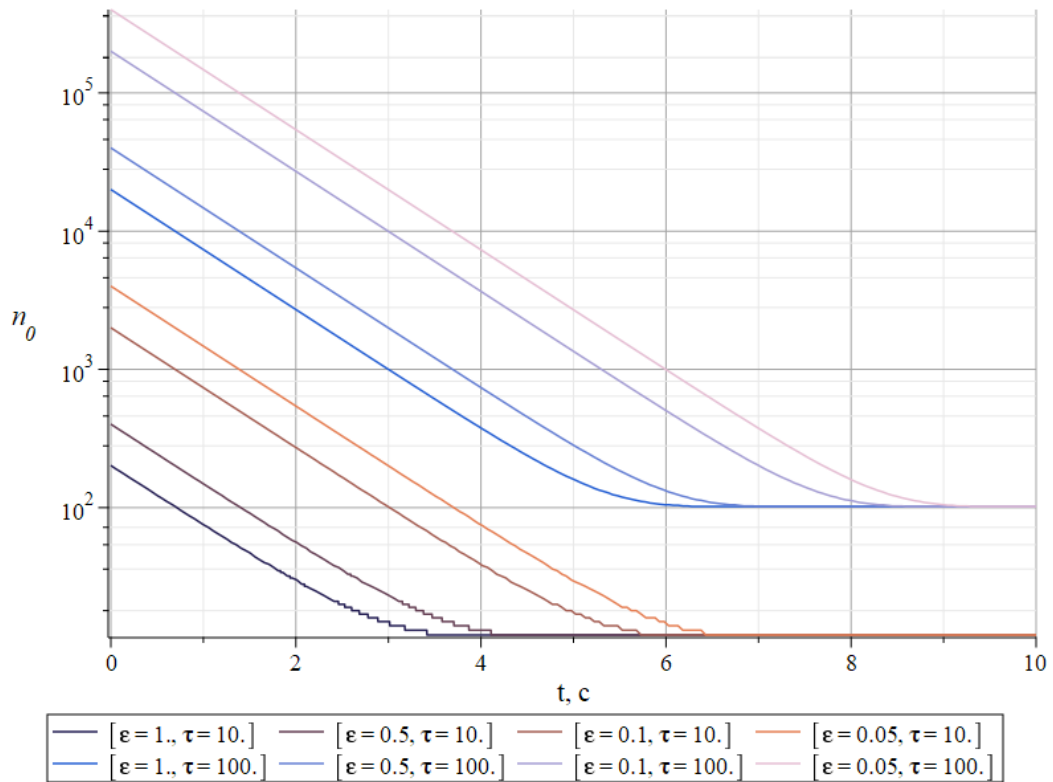


Рисунок 30 – Зависимость оценки необходимого количества членов ряда от времени

Нетрудно видеть, данные графические зависимости 29 и 30 практически в точности повторяют зависимости, изображенные на рисунках 11 и 12.

Таким образом, была доказана равномерная сходимость функциональных рядов, применяемых при определении напряженно-деформированного в задаче термомодеформирования полого шара, выполненного из упрочняющегося упруговязкопластического материала, вместе с их частными производными, что подтверждает выполнения условий применимости формулы Грина и, как следствие, корректность полученного решения. Кроме того, проведена оценка остаточных членов указанных рядов, и получено выражение для определения количества членов ряда, достаточного для вычислений с заданной точностью.

### 3.5 Выводы по главе 3

В данной главе был рассмотрен процесс термдеформирования упрочняющегося упруговязкопластического полого шара и были получены выражения для напряжений, деформаций и перемещений во всех областях тела. Установлено, что в зависимости от размеров тела, физико-механических свойств материала, из которого оно изготовлено, и скорости процесса нагревания возможные не только количественные изменения в напряженно-деформированном состоянии: увеличение или уменьшение величины напряжений, глубины проникания отдельных зон или характерных моментов времени – но и качественные преобразования: например, изменение последовательности возникновения и вырождения зон или отсутствие некоторых из этих процессов. Совершены предельные переходы к моделям упругопластического, упрочняющегося упругопластического и упруговязкопластического материалов, и выполнен сравнительный анализ указанных моделей сред.

С целью верификации полученных аналитических результатов выполнено численное моделирование с применением моделей Шабоса и экспоненциального вязкого упрочнения, подтвердившее имеющиеся закономерности. Также доказана сходимость полученных функциональных рядов и, как следствие, выполнение условий применимости формулы Грина, и получены оценки остаточного члена ряда и необходимого количества членов функциональных рядов для проведения расчетов с заданной точностью.

## Заключение

В ходе работы над диссертационным исследованием были рассмотрены основные соотношения теории температурных напряжений упрочняющегося упруго-вязкопластического тела совместно с начальными и граничными условиями. Был совершен переход к случаю сферической симметрии и получена замкнутая система уравнений.

После построения математической модели был сформулирован обобщенный подход к определению напряженно-деформированного состояния сплошной среды, обладающей свойствами упрочнения и вязкости, под действием температуры. Для сплошного и полого шаров определены выражения, описывающие температурные напряжения с учетом упрочняющегося и вязкого механизмов деформирования при линейной и полиномиальной зависимости предела текучести от температуры, а также совершены предельные переходы к упрощенным моделям среды. Выполнен анализ численных значений характеристик процессов, представленных в графических и табличных материалах, для полученных моделей.

Представлены результаты верификации полученных результатов путем проведения вычислительного эксперимента методом конечных элементов, подтверждающие корректность рассматриваемых аналитических выражений, определяющих напряженно-деформированное состояние тел. Доказана сходимость применяемых в работе функциональных рядов и дана оценка достаточного количества их членов, необходимых для выполнения расчетов с заданной точностью.

## Список литературы

1. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
2. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
3. Ильюшин, А. А. Основы математической теории термовязкоупругости [Текст] / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М. : Наука, 1970. – 280 с.
4. Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения [Текст]: пер. с нем. / Г. Паркус, пер. с нем. В. И. Розенблум. – М. : Физматгиз, 1963. – 252 с.
5. Ивлев, Д. Д. Теория упрочняющегося пластического тела [Текст] / Д. Д. Ивлев, Г. И. Быковцев. – М. : Наука, 1971. – 231 с.
6. Быковцев, Г. И. Теория пластичности [Текст] / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528с.
7. Спорыхин, А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред [Текст] / А. Н. Спорыхин. – Воронеж : ВГУ, 1993. – 361 с.
8. Шевченко, Ю. Н. Термопластичность при переменных нагрузениях [Текст] / Ю. Н. Шевченко – Киев : Наукова думка, 1970. – 287 с.
9. Боли, Б. Теория температурных напряжений [Текст] / Б. Боли, Дж. Уэйнер – М. : Мир, 1964.
10. ПНАЭ Г-7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок [Текст]. – Введ. 1987-07-01. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.
11. ГОСТ 34233.1-2017. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования [Текст]. – Взамен ГОСТ Р 52857.1-2007; введ. 2018-08-01. – М. : Стандартиформ. – 35 с.
12. ASME Boiler and Pressure Vessel Code. Section III: Rules for Construction of Nuclear Facility Components [Текст] / American Society of Mechanical Engineers (ASME). – New York, USA. – 2023.

13. **КТА 3201.2.** Methoden zur Berechnung der statischen Festigkeit und Stabilität von Reaktorkomponenten [Текст] / Kerntechnischer Ausschuss e.V. – München, Deutschland. – 2017.

14. Буренин, А. А. О горячей посадке диска на вал с учетом необратимого деформирования сопрягаемых деталей сборки [Текст] / А. А. Буренин, А. В. Ткачева // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2025. – № 5. – С. 28-48. – DOI: 10.31857/S1026351925050028.

15. Буренин, А. А. О сборке горячей посадкой упруговязкопластического диска с некруговым включением [Текст] / А. А. Буренин, А. В. Ткачева // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2024. – № 5. – С. 29-47. – DOI: 10.31857/S1026351924050039.

16. Буренин, А. А. Задача Гадолина о процессе сборки двухслойной предварительно напряженной трубы [Текст] / А. А. Буренин, А. В. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64. № 5. – С. 225-240. DOI: 10.15372/PMTF202315249.

17. Буренин, А. А. Осевое вращение в качестве причины падения натяга в сборке составного диска, полученной способом горячей посадки [Текст] / А. А. Буренин, А. В. Ткачева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2021. – № 3(49). – С. 19-32. – DOI 10.37972/chgpru.2021.49.3.003.

18. О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами / С. В. Белых, К. С. Бормотин, А. А. Буренин [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 144-156.

19. Радченко, В. П. Анализ остаточных напряжений в поверхностно упрочненных вращающихся призматических элементах с полукруглыми надрезами в условиях высокотемпературной ползучести [Текст] / В. П. Радченко, М. Н. Саушкин, Д. М. Шишкин // Вестник Самарского государственного технического

университета. Серия: Физико-математические науки. – 2024. – Т. 28, № 3. – С. 489-515. – DOI 10.14498/vsgtu2099.

20. Феоктистов, С. И. Метод расчета предельных деформаций при раздаче трубной заготовки с учетом нелинейной пластичности [Текст] / С. И. Феоктистов, И. К. Андрианов // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64, № 4. – С. 195-202. – DOI 10.15372/PMTF202215239.

21. Ткачева, А. В. Математическое моделирование горячей посадки муфты на вал [Текст] / А. В. Ткачева // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре Государственного технического университета. – 2022. – № 5. – С. 64-71.

22. Барботько, М. А. Аналитическое решение задачи о термовязкоупругом деформировании стеклянного слоя в составе стекломаталлокомпозита при разных температурных обработках [Текст] / М. А. Барботько, О. Н. Любимова // Актуальные проблемы информационно-телекоммуникационных технологий и математического моделирования в современной науке и промышленности : материалы I Международной научно-практической конференции молодых ученых. – Комсомольск-на-Амуре, 2021. – С. 52-55.

23. Барботько, М. А. Численное моделирование термических напряжений и деформаций в цилиндре с упругопластической оболочкой и вязкоупругим наполнителем [Текст] / М. А. Барботько // Вестник инженерной школы Дальневосточного федерального университета. – 2018. – № 4. – С. 16-23.

24. Прокудин, А. Н. Упругопластический анализ вращающегося полого цилиндра, жестко посаженного на вал, при наличии температурного градиента [Текст] / А. Н. Прокудин // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2024. – Т. 28, № 3. – С. 462-488. – DOI: 10.14498/vsgtu2050.

25. Прокудин, А. Н. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений [Текст] / А. Н. Прокудин // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2020. – Т. 24, № 1. – С. 74-94. – DOI: 10.14498/vsgtu1737.

26. Прокудин, А. Н. Вязкопластическое течение во вращающемся диске [Текст] / А. Н. Прокудин // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2018. – № 3(37). – С. 91-99.

27. Gamer, U. On the applicability of Tresca's yield condition to the rotating solid shaft [Текст] / U. Gamer // Revue roumaine des sciences techniques. Serie de mecanique appliquee. – 1984. – Т. 29, № 1. – С. 27-30.

28. Gamer, U. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends [Текст] / U. Gamer, W. Mack, I. Varga // Int. J. Eng. Sci. – 1997. – Т. 35, № 3. – С. 253-267. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).

29. Gamer, U. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft [Текст] / U. Gamer, M. Sayir // Z. angew. Math. Phys. – 1984. – Т. 35, № 5. – С. 601-617. <https://doi.org/10.1007/BF00952107>.

30. Xue, Z. Research on the Hot Straightening Process of Medium-Thick Plates Based on Elastic–Viscoplastic Material Modeling [Текст] / Z. Xue, B. Guan, Y. Zang // Materials. – 2024. – № 17.

31. Vivio, F. Elastic–plastic analysis of rotating disks having non-linearly variable thickness: residual stresses by overspeeding and service stress state reduction [Текст] / F. Vivio, L. Vullo // Ann. Solid Struct. Mech. – 2010. – № 1. – С. 87-102. – <https://doi.org/10.1007/s12356-010-0007-z>.

32. Спорыхин, А. Н. Моделирование поведения сферического объекта при сейсмической активности ядра [Текст] / А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 2. – С. 5-14. – DOI: 10.37972/chgpr.2023.56.2.001.

33. Левин, В. А. Цифровое средство производства – пакет для прочностного инженерного анализа как инструмент трансфера фундаментальных научных результатов в промышленность на примере пакета Фидесис и теории многократного наложения больших деформаций [Текст] / В. А. Левин // Известия Российской

академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 2. – С. 90-114. – DOI: 10.31857/S0572329922600207.

34. Индрупский, И. М. Учет геомеханических эффектов при моделировании процессов разработки месторождений углеводородов [Текст] / И. М. Индрупский, Д. П. Аникеев, Э. С. Закиров, Ю. В. Алексеева // Актуальные проблемы нефти и газа. – 2022. – № 4(39). – С. 75-102. – DOI 10.29222/ipng.2078-5712.2022-39.art7.

35. Иванов, С. Н. Реологическая модель строения земной коры (модель третьего поколения) [Текст] / С. Н. Иванов, К. С. Иванов // Литосфера. – 2018. – Т. 18, № 4. – С. 500-519. – DOI 10.24930/1681-9004-2018-18-4-500-519.

36. Лавриков, С. В. Использование моделей теории упругости со структурным параметром для решения задач механики горных пород [Текст] / С. В. Лавриков, О. А. Микенина, А. Ф. Ревуженко // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2017. – № 2. – С. 91-97.

37. Гоцев, Д. В. Математическая модель деформирования цилиндрической крепи горной выработки с учетом начальной пористости материала и неупругой работы полностью сжатой матрицы [Текст] / Д. В. Гоцев, А. Е. Бунтов, Н. С. Перунов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2016. – № 3. – С. 112-121.

38. Стефанов, Ю. П. Методы численного моделирования деформации и разрушения в геомеханике [Текст] / Ю. П. Стефанов // Современная тектонофизика. Методы и результаты : материалы четвертой молодежной тектонофизической школы-семинара. Том 2. – Москва, 2015. – С. 77-103.

39. Аннин, Б. Д. Методы теории упругости и пластичности в механике горных пород и геодинамике [Текст] / Б. Д. Аннин, С. Н. Коробейников // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2012. – № 1. – С. 5-10.

40. Thorsten W. Becker. On the effect of temperature and strain-rate dependent viscosity on global mantle flow, net rotation, and plate-driving forces [Текст] // Geophysical Journal International. – 2006. – Т. 167, № 2. – С. 943-957. – <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03172.x>.



41. Мурашкин, Е. В. Термоупругопластическое деформирование многослойного шара [Текст] / Е. В. Мурашкин, Е. П. Дац // Изв. РАН. МТТ. – 2017. – № 5. – С. 30-36.

42. Артемов, М. А. Распределение напряжений и деформаций в цилиндрической трубе при выборе кусочно-линейного условия пластичности [Текст] / М. А. Артемов, И. А. Ларин, Н. С. Потапов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, № 9. – С. 117-119.

43. Дац, Е. П. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упругопластического шара [Текст] / Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4. – С. 123-132.

44. Прокудин, А. Н. Исследование упрочнения полых сферических заготовок с помощью комбинации гидравлического и температурного автофретирования [Текст] / А. Н. Прокудин // Прикладная математика и механика. – 2024. – Т. 88, № 1. – С. 139-164. – DOI: 10.31857/S0032823524010091.

45. Галанин, М. П. Численное решение задачи термопластичности с дополнительными параметрами состояния [Текст] / М. П. Галанин, М. А. Гузев, Т. В. Низкая // Препринт института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. – 2007. – Т. 8. – С. 1-20.

46. Addressing viscosity-driven singularities: accurate development of thermo-elasto-visco-plastic constitutive models [Текст] / M. Sadeghifar, R. Billardon, D. Delagnes [и др.] // Mechanics of Time-Dependent Materials – 2025. – Т. 29, № 88. – <https://doi.org/10.1007/s11043-025-09825-5>.

47. Oppermann, P. A thermo-viscoplasticity model for metals over wide temperature ranges- application to case hardening steel [Текст] / P. Oppermann, R. Denzer, A. Menzel // Computational Mechanics. – 2022. – Vol. 69. – С. 541-563.

48. Haward, R. N. Strain hardening of thermoplastics [Текст] / R. N. Haward // Macromolecules. – 1993. – Т. 26, № 22. – С. 5860-5869.

49. Song, Y. H. 3-D FEM analysis of the temperature field and the thermal stress for plastics thermalforming [Текст] / Y. H. Song, K. F. Zhang, Z. R. Wang, F. X. Diao // Journal of Materials Processing Technology. – 2000. – Т. 97, № 1–3. – С. 35-43. – [https://doi.org/10.1016/S0924-0136\(99\)00097-7](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(99)00097-7).

50. Моделирование напряженно-деформированного состояния и оптимизация угла охвата сферической оболочковой формы опорным наполнителем [Текст] / В. И. Одинокоев, Э. А. Дмитриев, А. И. Евстигнеев [и др.] // Прикладная механика и техническая физика. – 2025. – № 1(389). – С. 189-196. – DOI: 10.15372/PMTF202415455.

51. Купцов, А. Д. Остаточные напряжения на интерфейсе пленка-подложка [Текст] / А. Д. Купцов, С. В. Сидорова // Нано- и микросистемная техника. – 2025. – Т. 27, № 1. – С. 15-24. – DOI: 10.17587/nmst.27.15-24.

52. Кругляков, А. А. Разработка способов упрочняющей обработки штамповой стали нового класса ЭП930 в аустенитном состоянии [Текст] / А. А. Кругляков // Сталь. – 2025. – № 2. – С. 29-37.

53. Игушева, Л. А. Влияние внешних силовых и температурных воздействий на динамическое разрушение материалов [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 1.1.8 / Л. А. Игушева. – Санкт-Петербург, 2024. – 122 с.

54. Сериков, С. В. Математическая модель вязкопластической среды как способ идентификации металлов [Текст] / С. В. Сериков // Сталь. – 2024. – № 3. – С. 42-47.

55. Емельянов, И. Г. Напряженное состояние толстостенной оболочки с учетом контакта с водородсодержащей средой [Текст] / И. Г. Емельянов, Д. А. Огорелков // Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. – 2024. – № 2. – С. 20-35. – DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.020-035.

56. Ковтанюк, Л. В. О теплотворной способности необратимого деформирования материала пробки в круглой трубе [Текст] / Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, Е. О. Попова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – № 1. – С. 88-100. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.59.1.007.

57. Хохлов, А. В. Влияние эволюции структуры и уровня нагрузки на свойства кривых ползучести и восстановления, порождаемых нелинейной моделью деформирования тиксотропных вязкоупругопластичных сред [Текст] / А. В. Хохлов, В. В. Гулин // Физическая мезомеханика. – 2024. – № 5. – С. 77-103. – DOI: 10.55652/1683-805X\_2024\_27\_5\_77-103.

58. Исследование математических моделей упругопластических материалов [Текст] / А. И. Балябин, С. И. Герасимов, Д. А. Ладин [и др.] // Глобальная ядерная безопасность. – 2024. – № 14. – С. 42-54. – <https://doi.org/10.26583/gns-2024-04-05>.

59. Баранникова, С. А. Особенности деформации биметаллической пластины [Текст] / С. А. Баранникова, Ю. В. Ли // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2024. – № 3. – С. 57-64. – DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.04.

60. Пятов, В. В. Теория экструзии вязко-пластичных сред: история, терминология, классификация / В. В. Пятов, А. Н. Голубев // Материалы и технологии. – 2023. – № 1. – С. 34-42. – DOI: 10.24412/2617-149X-2023-1-34-42.

61. Щербаков, В. А. Осесимметричные электромагнитоупругие колебания в толстостенном цилиндрическом теле [Текст] / В. А. Щербаков, В. А. Вестяк // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике : сборник тезисов докладов. В 4-х томах. – Санкт-Петербург, 2023. – С. 758-759.

62. Карасева, У. П. О влиянии напряжений на неравновесную вязкость стекол [Текст] / У. П. Карасева, А. Б. Фрейдин // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2023. – № 3. – С. 219-235. – DOI: 10.26907/2541-7746.2023.3.219-235.

63. Ткачева, А. В. Влияние, оказываемое активным охлаждением, на неразъемное соединение, образованное в результате электродуговой сварки [Текст] / А. В. Ткачева, Е. Е. Абашкин // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2022. – № 3. – С. 160-169.

64. Моделирование связанных процессов формирования остаточных напряжений в металлическом сплаве с учетом трансформации структуры при импульсном термосиловом поверхностном упрочнении [Текст] / В. П. Багмутов,

Д. С. Денисевич, И. Н. Захаров [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. – 2022. – Т. 15, № 4. – С. 449-465. – DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.35.

65. Зуев, Л. Б. Модель пластической деформации и разрушения твердых тел [Текст] / Л. Б. Зуев, В. В. Горбатенко, Л. В. Данилова // Известия вузов. Физика. – 2021. – Т. 64, № 9. – С. 75-83. – DOI: 0.17223/00213411/64/9/75.

66. Зуев, Л. Б. Упругопластический инвариант автоволновой пластичности [Текст] / Л. Б. Зуев, С. А. Баранникова, В. В. Горбатенко // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2021. – № 4. – С. 149-161.

67. Горностаев, К. К. Задачи определения температурных напряжений и перемещений в сферических и цилиндрических телах со сложной реологией [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / К. К. Горностаев. – Воронеж, 2020. – 90 с

68. Хохлов, А. В. Качественный анализ влияния температуры на кривые нагружения, ползучести и релаксации, порождаемые нелинейной моделью типа Максвелла для вязкоупругопластических материалов [Текст] / А. В. Хохлов // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела : материалы IX Международного научного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. – Тверь, 2020. – С. 93-97.

69. Хохлов, А. В. О способности физически линейного соотношения вязкоупругости описывать сигмоидальную форму зависимости напряжения от скорости деформации [Текст] / А. В. Хохлов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – №. 4. – С. 453-472.

70. Развитие математических моделей пластических сред для ресурсосберегающих технологий металлических систем [Текст] / Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. П. Навоев [и др.] // Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20, № 2. – С. 467-482. – DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-2-467-482.

71. Джумагазиева, Ш. К. Снятие остаточных напряжений сварных труб [Текст] / Ш. К. Джумагазиева // Norwegian Journal of Development of the International Science. – 2018. – № 6-1(19). – С. 5-7.

72. Механические свойства и деформационное упрочнение аустенитной азотистой стали при статическом растяжении в интервале температур  $-196\div+20^{\circ}\text{C}$  [Текст] / Н. А. Наркевич, Е. Е. Дерюгин, Н. С. Сурикова, Ю. П. Миронов // VII Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов»: сборник материалов. – Москва, 2017. – С. 45-48.

73. Dynamic Hardness Evolution in Metals from Impact Induced Gradient Dislocation Density [Текст] / J. Cai, C. Griesbach, S. G. Ahnen, R. Thevamaran // Acta Materialia. – 2023. – Т. 249. – <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2023.118807>.

74. Samuel, A. Residual Stress and Distortion during Quench Hardening of Steels: A Review [Текст] / A. Samuel, K. N. Prabhu // Journal of Materials Engineering and Performance. – 2022. – № 31. – С. 5161–5188. – <https://doi.org/10.1007/s11665-022-06667-x>.

75. Ashouri<sup>1</sup>, H. Thermo-mechanical analysis of magnesium alloy diesel engines cylinder heads using a two-layer viscoplasticity model [Текст] / H. Ashouri<sup>1</sup> // Automotive Science and Engineering. – 2022. – Т. 12, № 3. – С. 3892-3904.

76. Mohammed, A. Shear stress limit, rheological properties and compressive strength of cement-based grout modified with polymers [Текст] / A. Mohammed, W. Mahmood, K. Ghafor // Journal of Building Pathology and Rehabilitation. – 2020. – Т. 5, № 3. – <https://doi.org/10.1007/s41024-019-0069-1>.

77. Barbaa, D. Temperature and strain rate dependences on hardening and softening behaviours in semi-crystalline polymers: Application to PEEK [Текст] / D. Barbaa, A. Arias, D. Garcia-Gonzalez // International Journal of Solids and Structures. – 2020. – Т. 182–183. – С. 205-217. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.08.021>.

78. Coen C. W. J. Clarijs. Strain hardening in glassy polymers: Influence of network density on elastic and viscous contributions [Текст] / Coen C. W. J. Clarijs, Leon E. Govaert // Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics. – 2019. – С. 1001-1013. – <https://doi.org/10.1002/polb.24856>.

79. Strain Rate-Dependent Hardening-Softening Characteristics of Gas Hydrate-Bearing Sediments [Текст] / C. Deusner, S. Gupta, X.-G. Xie [и др.] // Geochemistry,

Geophysics, Geosystems. – 2019. Т. 20, № 11. – С. 4885-4905. – <https://doi.org/10.1029/2019GC008458>.

80. Liu, W. Numerical simulation of elasto-plastic hydraulic fracture propagation in deep reservoir coupled with temperature field [Текст] / W. Liu, O. Zeng, J. Yao // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2018. – № 171. – С. 115-126. – <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.07.041>.

81. Temperature-dependent mechanical behaviour of PMMA: Experimental analysis and modelling [Текст] / Adel A. Abdel-Wahab, Sabbah Ataya, Vadim V. Silberschmidt // Polymer Testing. – 2017. – Т. 58. – С. 86-95. – <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2016.12.016>.

82. Дац, Е. П. Неустановившиеся температурные напряжения в условиях зависимости предела текучести от температуры [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / Е. П. Дац. – Комсомольск-на-Амуре, 2017. – 150 с.

83. Абашкин, Е. Е. Комбинированное тепловое воздействие в качестве средства получения сварного соединения с повышенными прочностными свойствами [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 : / Е. Е. Абашкин. – Комсомольск-на-Амуре, 2019. – 164 с.

84. Чернышов, Д. А. Термодеформирование сплошного шара с полиномиальным видом зависимости предела текучести от температуры [Текст] / Д. А. Чернышов, А. В. Ковалев // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2022. – № 1. – С. 127-135. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.012.

85. Чернышов, Д. А. О сходимости функциональных рядов, применяемых при решении задач термодеформирования [Текст] / Д. А. Чернышов, А. С. Бондарев, А. В. Ковалев // Вестник Чувашиского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – № 2. – С. 51-59. – DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.004.

86. Chernyshov, D. A. Thermal Deformation of a Body with Complex Rheology Under Conditions of Spherical Symmetry [Текст] / D. A. Chernyshov, A. T. Kovalev //

Mechanics of Solids. – 2022. – Т. 57. – № 4. – С. 740-753. – DOI: 10.3103/s0025654422040045.

87. Chernyshov, D. A. The Evolution of Regions of Reversible and Irreversible Deformation Within a Hollow Sphere with Complex Rheological Properties Under Conditions of Unsteady Heating [Текст] / D. A. Chernyshov, A.V. Kovalev // Mechanics of Solids. – 2025. – № 3. – С. 1555-1570. – DOI: 10.1134/S0025654424606359.

88. Чернышов, Д. А. К моделированию поведения упрочняющегося упруговязкопластического шара под воздействием температурного поля [Текст] / Д. А. Чернышов, Ю. В. Малыгина, А. В. Ковалев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж, 2024. – С. 1213-1220.

89. Ковалев, А. В. Численное моделирование решения задачи о термдеформировании толстостенной трубы [Текст] / А. В. Ковалев, Ю. В. Малыгина, Д. А. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж, 2024. – С. 1079-1085.

90. Чернышов, Д. А. Влияние выбора предела текучести на термдеформирование сплошного шара со сложной реологией [Текст] / Д. А. Чернышов, А. В. Ковалев // Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении: материалы VI Дальневосточной конференции с международным участием. – Комсомольск-на-Амуре, 2022. – С. 186-191.

91. Чернышов, Д. А. Напряженно-деформированное состояние упрочняющегося упруговязкопластического тела под действием температуры в условиях сферической симметрии [Текст] / Д. А. Чернышов // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Межвузовской научной конференции молодых ученых и студентов. – Воронеж, 2021. – С. 255-259.

92. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел [Текст] / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 1979. – 415 с.

93. Седов, Л. И. Механика сплошной среды [Текст]. В 3 т. Т. 1. / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1973. – 536 с.
94. Лыков, А. В. Теория теплопроводности [Текст] / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
95. Chaboche, JL. On the plastic and viscoplastic constitutive equations – part I: rules developed with internal variable concept [Текст] / JL Chaboche, G. Rousselier // J Press Vessel Technol. – 1983. – № 105. – С. 153-158.
96. Chaboche, JL. On the plastic and viscoplastic constitutive equations – part II: application of internal variable concepts to the 316 stainless steel [Текст] / JL Chaboche, G. Rousselier // J Press Vessel Technol. – 1983. – № 105. – С. 159-164.
97. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности [Текст] / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с.
98. ANSYS Mechanical APDL Material Reference [электронный ресурс] / ANSYS, Inc. – Canonsburg, 2025.
99. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа [Текст] : в 3 т. Т. 2 / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1988. – 576 с.
100. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа [Текст] : в 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1988. – 712 с.
101. Градштейн, И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. М. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.
102. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел [Текст] / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488, с.
103. Самарский, А. А. Численные методы [Текст] : учебное пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин. М. : Наука, 1989. 432 с.



### Список иллюстративного материала

- Рисунок 1 – Распределение поля безразмерной температуры, стр. 20
- Рисунок 2 – Распределение поля безразмерной температуры при мгновенном нагреве поверхности, стр. 21
- Рисунок 3 – Распределение безразмерных напряжений, стр. 38
- Рисунок 4 – Распределение безразмерных остаточных напряжений, стр. 39
- Рисунок 5 – Распределение безразмерных остаточных перемещений, стр. 39
- Рисунок 6 – Безразмерная координата упругопластических границ  $a(t)$  и  $b(t)$ , стр. 40
- Рисунок 7 – Расчетная модель, стр. 43
- Рисунок 8 – Распределение безразмерной температуры, стр. 44
- Рисунок 9 – Распределение безразмерных напряжений, стр. 47
- Рисунок 10 – Распределение безразмерных остаточных напряжений, стр. 48
- Рисунок 11 – Оценка остаточного члена ряда в момент  $t = 0$ , стр. 55
- Рисунок 12 – Зависимость оценки необходимого количества членов ряда от времени, стр. 55
- Рисунок 13 – Распределение безразмерных напряжений, стр. 61
- Рисунок 14 – Распределение безразмерных остаточных напряжений, стр. 62
- Рисунок 15 – Распределение безразмерных остаточных перемещений, стр. 62
- Рисунок 16 – Безразмерная координата упругопластических границ  $a(t)$  и  $b(t)$ , стр. 63
- Рисунок 17 – Распределение поля безразмерной температуры, стр. 68
- Рисунок 18 – Дерево эволюции зон с различающимися реологическими свойствами, стр. 70
- Рисунок 19 – Расположение областей с различающейся реологией и упругопластических границ при существовании всех семи зон, стр. 78
- Рисунок 20 – Реализованная траектория развития областей в полом шаре, стр. 83
- Рисунок 21 – Распределение безразмерных напряжений, стр. 88

Рисунок 22 – Распределение безразмерных остаточных напряжений, стр. 89

Рисунок 23 – Распределение безразмерных остаточных перемещений, стр. 90

Рисунок 24 – Безразмерная координата упругопластических границ, стр. 91

Рисунок 25 – Расчетная модель, стр. 92

Рисунок 26 – Распределение безразмерной температуры, стр. 93

Рисунок 27 – Распределение безразмерных напряжений, стр. 99

Рисунок 28 – Распределение безразмерных остаточных напряжений, стр. 99

Рисунок 29 – Оценка остаточного члена ряда в момент  $t = 0$ , стр. 104

Рисунок 30 – Зависимость оценки необходимого количества членов ряда от времени, стр. 105