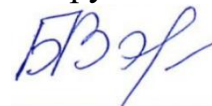


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тульский государственный университет»

На правах рукописи



**БОГАЧЕВА ВИКТОРИЯ ЭДУАРДОВНА**

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОМПОЗИТА С ТОНКИМ  
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ АДГЕЗИОННЫМ СЛОЕМ ПРИ ЕГО  
НОРМАЛЬНОМ РАЗРЫВЕ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
Глаголев Вадим Вадимович

Тула – 2026

## Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Тенденции конечно-элементного решения упругопластического деформирования адгезионного слоя упругими консолями ДКБ-образца</b>	
.....	15
1.1 Постановка задачи.....	15
1.2 Плоская деформация ДКБ-образца.....	21
1.3 Плоское напряженное состояние ДКБ-образца.....	25
1.4 Представление J-интеграла.....	28
1.5 Основные результаты и выводы 1 главы.....	33
<b>Глава 2. Постановка и решение упругой задачи в рамках упрощающих гипотез теории пластин Миндлина – Рейсснера</b>	
.....	34
2.1 Постановка задачи.....	34
2.2 Решение упругой задачи.....	36
2.3 Нахождение предела упругости деформирования слоя.....	51
2.4 J-интеграл в рамках упругой постановки задачи.....	53
2.5 Основные результаты и выводы 2 главы.....	55
<b>Глава 3. Упругопластическое деформирование слоя в рамках гипотезы полной пластичности</b>	
.....	57
3.1 Определяющие соотношения упругопластического деформирования.....	57
3.2 Решение задачи в состоянии плоской деформации.....	57
3.3 Решение задачи в плоском напряженном состоянии.....	80
3.4 J-интеграл в рамках упругопластической постановки задачи.....	93
3.5 Основные результаты и выводы 3 главы.....	97
<b>Заключение (основные результаты и выводы по диссертации).....</b>	<b>98</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>99</b>

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Композитные материалы широко используются в различных отраслях промышленности. Особое место занимают слоистые композиты, в которых несущие слои связываются адгезионными (клеевыми) соединениями.

Как правило, прочностные свойства адгезивов существенно уступают соответствующим характеристикам сопрягаемых материалов. Нахождение предельных состояний адгезионных слоев является важной задачей, особенно, если адгезив поврежден. В этом случае повреждение рассматривается в виде трещиноподобного дефекта.

Отметим, что геометрия торцевой области трещиноподобного дефекта не определена. Ее форма в виде части окружности, эллипса или прямоугольника приводит к различному напряженному состоянию в концевой области.

Как правило, для расчета критического состояния используют модель трещины Гриффитса (математического разреза) механики квазихрупкого разрушения, что приводит к сингулярным значениям напряжений на торце. При этом адгезионный слой, лежащий на продолжении математического разреза, представлен слоем нулевой толщины. Отметим, что адгезионные слои имеют реальные механические свойства, которые в этом случае формально исключают из рассмотрения.

Основной характеристикой предельного состояния является  $J$ -интеграл Черепанова – Райса, который в случае плоского деформированного состояния связывается с сингулярным распределением поля напряжений в вершине трещины посредством коэффициента интенсивности напряжений и в случае плоского напряженного состояния – с модулем сил сцепления модели Леонова – Панасюка – Дагдейла.

Для определения критического значения  $J$ -интеграла для нагружения по моде I (нормальным отрывом) основным экспериментальным образцом является двухконсольная балка (ДКБ-образец).

В ходе проведения эксперимента определяют критическое усилие, соответствующее срагиванию трещины, и в соответствии с методикой Ирвина, основанной на продвижении трещины в виде математического разреза, определяют соответствующую критериальную характеристику. Отметим, что при этом не учитывается толщина разрушаемого слоя, его механические характеристики, а также его возможное упругопластическое деформирование. Найденную критериальную характеристику относят к состоянию плоской деформации.

Таким образом, является актуальным нахождение критического значения  $J$ -интеграла с учетом возможных областей упругопластического деформирования адгезива конечной толщины в зависимости от типа плоской задачи.

**Целью диссертационной работы** является нахождение  $J$ -интеграла в случае разрушения слоя конечной толщины с учетом его реальных механических свойств при нормальном разрыве консолями ДКБ-образца. **Объектом** исследования является ДКБ-образец. **Предметом** – его поврежденный адгезионный слой.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

– сформулирована постановка и получено конечно-элементное решение задачи о нагружении нормальным отрывом слоистого композита, состоящего из упругих тел, связанных поврежденным упругопластическим адгезионным слоем, в плоском деформированном и плоском напряженном состояниях;

– на основе тенденций конечно-элементного решения в рамках упрощающих гипотез выполнена постановка задачи упругопластического деформирования адгезионного слоя упругими консолями ДКБ-образца и получены соответствующие аналитические решения для тонких и предельно тонких адгезионных слоев;

– вычислены значения  $J$ -интеграла в зависимости от упругопластических свойств адгезива и типа плоской задачи и проведен их сравнительный анализ.

**Научная новизна работы** заключается в том, что

– учитываются толщина адгезионного слоя и его реальные механические свойства;

– рассматриваются нескольких компонент тензора напряжений в адгезионном слое для описания стадии упругопластического деформирования.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Найденное решение задачи о нагружении нормальным отрывом слоистого композита, состоящего из упругих пластин, связанных упругопластическим адгезионным слоем, и рассмотренный подход для вычисления  $J$ -интеграла могут быть использованы для проведения прочностных расчетов.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** Результаты диссертационной работы соответствуют следующим пунктам направлений исследований специальности 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела»:

– законы деформирования, повреждения и разрушения материалов, в том числе природных, искусственных и вновь создаваемых (пункт 1);

– механика композиционных материалов и конструкций, механика интеллектуальных материалов (пункт 4);

– прочность при сложных режимах нагружения. Теория накопления повреждений. Механика разрушения твердых тел (пункт 10);

– математическое моделирование поведения дискретных и континуальных деформируемых сред при механических, тепловых, электромагнитных, химических, гравитационных, радиационных и прочих воздействиях (пункт 11);

– вычислительная механика деформируемого твердого тела (пункт 12).

**Положения, выносимые на защиту:**

– общая постановка и конечно-элементное решение упругопластического деформирования адгезионного слоя упругими консолями ДКБ-образца;

– постановка и решение задачи о нагружении нормальным отрывом слоистого композита, состоящего из упругих пластин, связанных упругопластическим адгезионным слоем, в рамках упрощающих гипотез полной пластичности для деформирования слоя и теории пластин Миндлина – Рейсснера в плоском деформированном и плоском напряженном состояниях;

– подход к нахождению значений  $J$ -интеграла;

– сравнительный анализ полученных значений  $J$ -интеграла.

**Степень достоверности** базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется совпадением численного решения с аналитическим и сопоставлением с известными экспериментальными данными других ученых.

**Апробация работы.** Основные положения работы докладывались и обсуждались: на Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», «Ломоносов-2021», «Ломоносов-2022», «Ломоносов-2023», «Ломоносов-2024», «Ломоносов-2025» (г. Москва); на международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (г. Воронеж, каждый год с 2020 по 2025); на XXXI и XXXIII Всероссийских школах-конференциях «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2022 и 2024 гг.); на II, III, IV, V и VI Межрегиональных научных сессиях молодых исследователей «Промышленная революция 4.0: взгляд молодежи» (г. Тула, 2020, 2021, 2022, 2023 и 2024 гг. соответственно); на XVI, XVII и XVIII Региональных научных магистерских конференциях (г. Тула, 2021, 2022 и 2023 гг. соответственно).

Диссертация в целом докладывалась и обсуждалась на научных конференциях кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (руководитель: д-р ф.-м. наук, профессор Глаголев В. В.) в 2024, 2025, 2026 гг. На научном семинаре имени Л. А. Толоконникова (руководитель семинара: д-р ф.-м. наук, профессор Маркин А. А.) в 2026 г.

В качестве исполнителя **работа выполнена при поддержке** грантов РФФИ № 19-41-710001 p\_a, РФФИ № 22-71-00003 и РФФИ 23-21-00017, госзадания FEWG-2023-0002. В качестве руководителя – гранта ректора ТулГУ для поддержки молодых ученых № ВММ/23/01/ГРР.

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 44 научные работы, из которых 7 статей в изданиях из перечня ВАК по 1.1.8 физ.-мат. науки, 6 статей в отечественных изданиях, которые входят в международные реферативные базы

данных и системы цитирования, 2 – в RSCI, 29 публикаций, включены в РИНЦ, из них 21 являются тезисами конференций.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук В. В. Глаголеву за постановки задач, за консультации и внимание к работе.

**Личный вклад автора.** Работы [5, 12–14, 17] выполнены автором самостоятельно. Постановка задач, разработка алгоритмов и методов, программная реализация, подготовка, анализ и систематизация результатов к публикации работ [1, 6–11, 15–16, 19–20, 37, 46–47, 50–52, 60] выполнены совместно с соавторами. Личным вкладом в работы [8–10, 46, 51] является нахождение общих аналитических решений задач и создание программ для получения частных решений, для работ [9, 60] написаны программы для вычисления значений прочностной характеристики.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 111 страниц, включая 47 рисунков, 22 таблицы. Список литературы включает 111 наименований на 13 страницах.

#### **Степень разработанности темы исследования.**

В настоящее время адгезивы (клеи) используются в качестве альтернативы традиционным способам соединения материалов (сварка, клепка) с одинаковыми или различными свойствами. Их механические характеристики определяются благодаря экспериментальным приспособлениям, методам и процедурам, разработанным для измерения нагрузки, необходимой для достижения механического разрушения клея.

Адгезионные соединения имеют преимущества в виде малого веса, меньшей концентрации напряжений, повышенной устойчивости к коррозии. Но при этом они очень чувствительны к дефектам изготовления, таким как скопление воздуха, воздушные карманы, склеивание, разрыв волокон, микротрещины и расслоения, возникающие в результате механической обработки. В качестве примера на рис. 1 показана лопасть ветряной турбины [104], которая представляет собой массивную

композитную конструкцию с адгезионными слоями, которые содержат несколько локальных, но больших пустот. В данной работе эти пустоты считаются трещиноподобным дефектом.

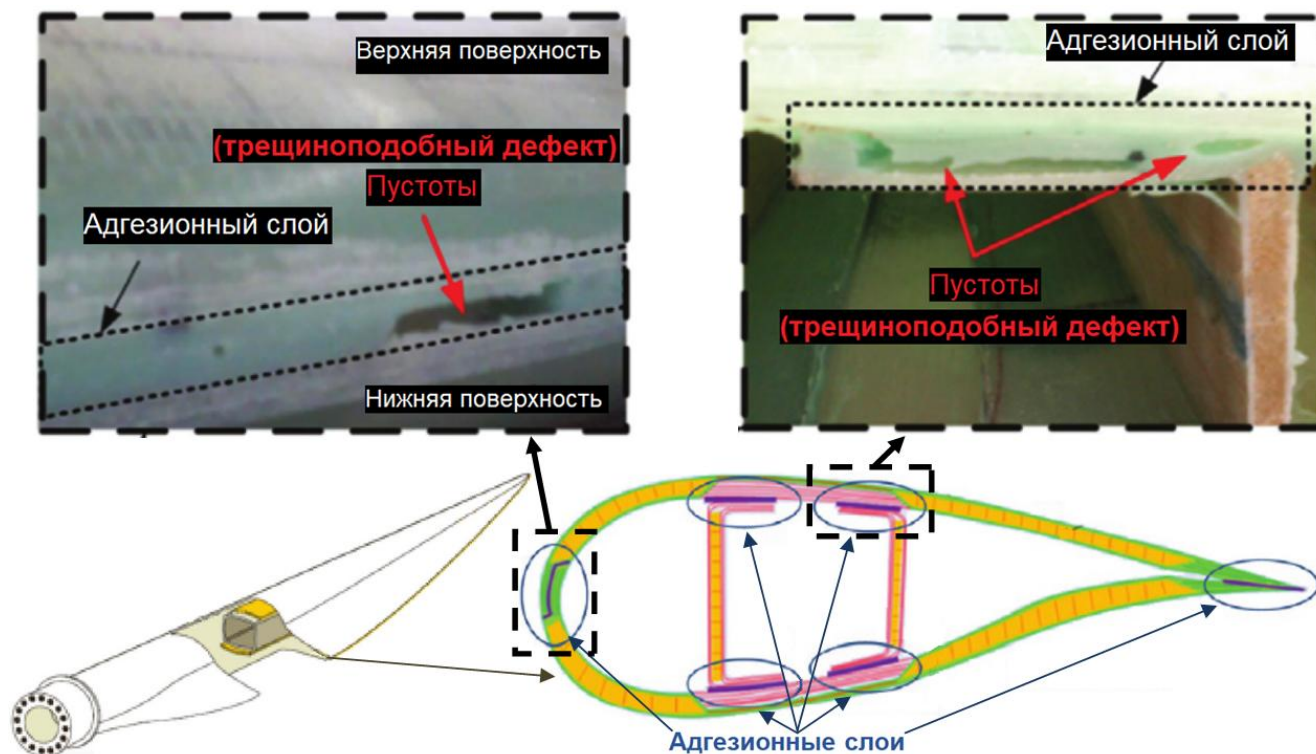


Рис. 1. Лопасть ветряной турбины

Геометрия торцевых граней трещиноподобного дефекта, как правило, не определена. Напряженное состояние в концевой области зависит от формы торца (см. рис. 2). Для расчета критического состояния на данном вопросе не акцентируют внимание. Пренебрежение толщиной адгезива по сравнению с несущими телами композита в случае дефекта слоя приводит к классической модели трещины Гриффитса (рис. 3) [79] механики квазихрупкого разрушения в виде математического разреза с ее основными критериальными характеристиками предельных состояний. В работах Морозова Е. М. [53], Астапова Н. С. [3–4, 83], Кургузова В. Д. [4, 39, 83], Устинова К. Б. [108–111], Кулиева В. Д. [38], Massabo R. [61–62, 109, 111], Bruno D. [67–68], Greco F. [67–68], Andrews M. G. [61], Kulkarni S. V. [84], Frederick D. [84], Sheinman I. [102], Kardomateas G. [102], Lopes R. M. [71], da Silva F. J. G. [71], Faneco T. M. S. [71], Dionisio J. M. M. [75],

Ramalho L. D. C. [75], Belinha J. [75], Wu Z. [92], Tian S. [92], Hua Y. [92], Gu X. [92] получили развитие методы решения задач механики разрушения применительно к адгезионным отслоениям.

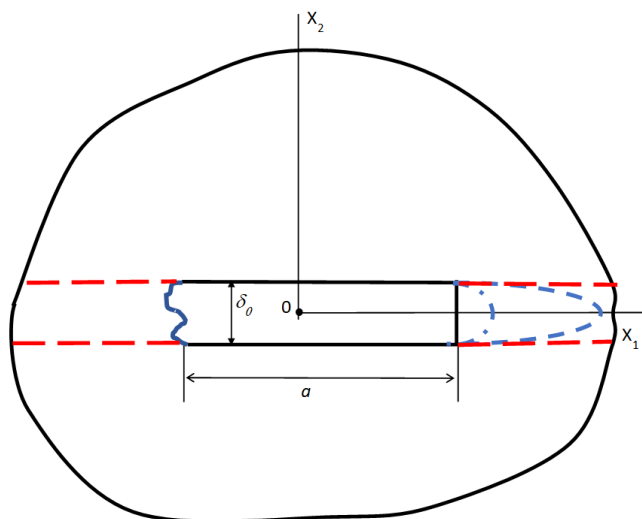


Рис. 2. Формы торцевых граней трещиноподобного дефекта

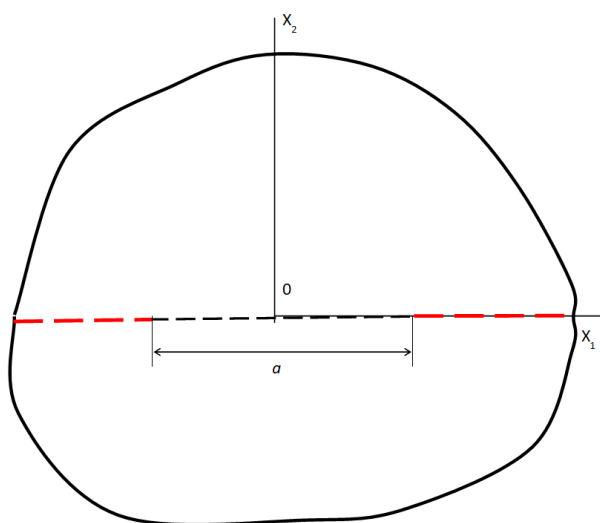


Рис. 3. Модель трещины Гриффитса

Решение упругопластических задач рассматривается в двух принципиальных направлениях. Одно из них базируется на асимптотическом решении Хатчинсона – Райса – Розенгрена [81–82, 97–98, 103], которое объединяется с конечно-элементным решением краевой задачи. Возникающие здесь проблемы изучены и решены в исследованиях Шлянникова В. Н. [31] с сотрудниками. Другой подход

заключается в использовании модели когезионной трещины при условии отсутствия сингулярности полей напряжений и деформаций в окончании трещины. Модель Леонова – Панасюка – Дагдейла [41, 73] применялась для решения соответствующих задач Гольдштейном Р. В. [28–29], Перельмутером М. Н. [28], Лавитом И. М. [40, 42, 85, 105], de Souza Neto E. A. [72], Peric D. [72], Owen D. R. J. [72], Borja R. I. [66] и рядом других ученых. Отметим предложенный Корневым В. М. [3–4, 39, 83] подход, основанный на критерии разрушения Нейбера – Новожилова [48–49].

Применение адгезионных соединений в судостроении, строительстве, ветроэнергетике и других отраслях требуют использования толстых слоев клея, поэтому пренебрежение его толщиной представляется неуместным. В аэрокосмической промышленности внедрение клеевых соединений постоянно возрастает еще с тех пор, как они были впервые применены [80]. Адгезионные соединения используются для различных конструкций, например, фюзеляж и крылья. Несмотря на то, что эти соединения имеют большой потенциал, их качество и прочность зависят от многих параметров. Например, характеристики конструкции, такие как геометрические параметры, механические свойства сопрягаемых материалов и адгезивов, реализация в производстве и технологический процесс.

Учитывая широкое использование микромасштабных адгезионных слоев, становится важным то, как охарактеризовать их механическое поведение в зависимости от размера. Для прогнозирования межфазных напряжений и глобальных смещений слоистых структур с адгезионными слоями макромасштаба многие исследователи использовали модель «shear-lag»: Li S. [86–87, 101], Liu X. [101], Li R. [101], Su Y. [101] и двухпараметрическую модель упругого основания: Long H. [88], Wei Y. [74, 88], Liang L. [88], Huang Y. [99], где последняя модель учитывает клеевой слой в виде непрерывно распределенных тангенциальных и нормальных пружин. В этом плане отметим модель Прандтля [93], используемую в работах Ентова В. М. [30], Салганика Р. Л. [30, 55–56], Мищенко А. А. [55–56], Федотова А. А. [55–56], и модель «мягкого слоя», рассмотренную

Болотиным В. В. [18], Новичковым Ю. Н. [18], Морозовым Н. Ф. [43–45], Товстиком П. Е. [43–44].

Использование инвариантных J-интегралов Черепанова – Райса [58–59, 70, 96] для нахождения критических состояний адгезивов применительно к трещиноподобным дефектам нулевой толщины рассмотрено в работах Fraise P. [77], Schmit F. [77], Chen F. H. K. [69], Shield R. T. [69], Neves L. F. R. [91], Campilho R. D. S. G. [75–76, 91, 100], Sanchez-Arce I. J. [75, 91], Madani K. [91], Prakash S. [91], а для слоев конечной толщины в статьях Глаголева В. В. [21–27, 64, 78, 90], Маркина А. А. [21–27, 64, 78, 90], Berto F. [63–65, 90].

Отметим использование упрощающих гипотез теории пластин Миндлина – Рейсснера [89, 94–95], а также гипотез полной пластичности в работах Хаара А. [57], Кармана Т. [57], Ишлинского А. Ю. [35–36], Ивлева Д. Д. [33–35], Аннина Б. Д. [2], Зубчанинова В. Г. [32], Радаева Ю. Н. [54] для получения аналитических решений.

Обычно при экспериментальном исследовании нагружения нормальным отрывом используют двухконсольную балку. На рис. 4 показан ДКБ-образец до (а) и после (б) испытания, а на рис. 5 – установка для эксперимента.



а



б

Рис. 4. ДКБ-образец: (а) до нагружения, (б) после испытания



Рис. 5. Установка для эксперимента

В данной работе рассматривается модель со слоем конечной толщины, основанная на экспериментальных образцах из статьи [71]. Согласно этой работе были испытаны соединения между пластинами из стали марки С45Е. Эта низкоуглеродистая сталь отличается хорошей свариваемостью, пластичностью и низкой стоимостью, что делает ее хорошим вариантом для многих инженерных применений. Сырье было представлено в виде ламинированных листов толщиной 2 мм и охарактеризовано в соответствии со стандартом ASTM-E8M-04. Программа экспериментов включала в себя по 5 образцов для трех адгезивов: хрупкий эпоксидный Araldite AV138, пластичная эпоксидная смола Araldite 2015 и пластичный полиуретана Sikaforce 7752. Объемные образцы испытаны на

сервогидравлической машине для получения модуля упругости, при растяжении найдены предел текучести, предел прочности и деформация разрушения.

Эксперименты проводились при комнатной температуре на электромеханической испытательной машине (Shimadzu AG-X 100) с датчиком нагрузки 100 кН под контролем перемещения со скоростями 0,5 мм/мин. Также были определены значения внешней силы при инициализации трещины и значения  $J$ -интеграла.

Первая глава диссертации посвящена конечно-элементному решению упругопластического деформирования адгезионного слоя упругими консолями ДКБ-образца. В качестве модели деформирования адгезионного слоя используется концепция «слоя взаимодействия», предложенная Глаголевым В. В. и Маркиным А. А. Совместно с соавторами основные результаты и выводы о зонах пластичности в адгезионном слое и их влиянии на значение  $J$ -интеграла в состоянии плоской деформации опубликованы в статье [19], в плоском напряженном состоянии – [20]. В статье [19] также определена прочностная характеристика в виде  $J$ -интеграла, получены ее значения для рассматриваемого образца.

Во второй главе представлены постановка и решение упругой задачи в рамках упрощающих гипотез теории пластин Миндлина – Рейсснера. По данной тематике опубликовано множество работ [1, 5, 11–17, 37, 46–47, 50, 52]. Аналитическое решение для предельно тонких слоев показано в статье [47], а для тонких слоев автором самостоятельно найдено в [12]. Исследуется предел упругости деформирования адгезионного слоя в зависимости от типа плоской задачи, подход к его определению опубликован в работах [13, 37]. В работе [9] представлена формула  $J$ -интеграла в рамках упругой постановки задачи, используя ее, в данной диссертации получены значения прочностной характеристики.

Третья глава посвящена упругопластическому деформированию слоя в рамках гипотезы полной пластичности. В работах [6–8, 10, 51, 60] учитываются области необратимых деформаций слоя при получении аналитического решения.

Основные результаты и выводы для предельно тонких слоев опубликованы в статье [51], а в [8, 10] найдены решение и значения  $J$ -интеграла для тонких слоев в состоянии плоской деформации. В работе [60] сравниваются численные и аналитические значения  $J$ -интеграла в зависимости от толщины адгезионного слоя. Все общие решения найдены автором самостоятельно. Также для получения частных решений и вычисления значений прочностной характеристики лично автором диссертации написаны вычислительные программы.

## Глава 1

## Тенденции конечно-элементного решения упругопластического деформирования адгезионного слоя упругими консолями ДКБ-образца

## 1.1 Постановка задачи

Рассмотрим экспериментальную схему нагружения слоистого композита, состоящего из упругих тел 1 и 2 (рис. 1.1), сопряженных по длине  $\ell$  адгезионным слоем 3 с конечной толщиной  $\delta_0$  и упругопластическими свойствами. Консоли 1 и 2 толщиной  $h$  имеют одинаковые механические характеристики. Предполагаем, что правый торец образца жестко закреплен от перемещений, а на левые торцы тел 1 и 2 действует антисимметричная распределенная статическая нагрузка интенсивностью  $P$ . Остальная поверхность свободна от внешней нагрузки.

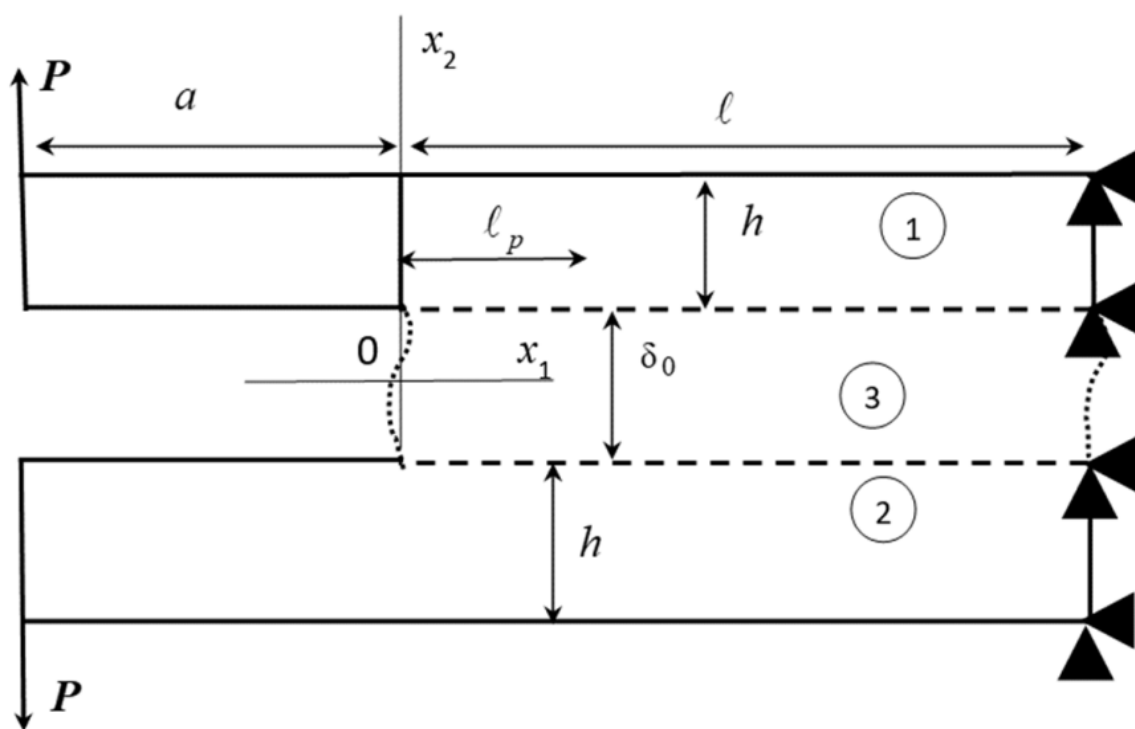


Рис. 1.1. Схема ДКБ-образца

Для описания взаимодействия адгезионного слоя 3 с консолями 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия» [21–27, 64, 78, 90], согласно

которой напряженно-деформированное состояние (НДС) в слое рассмотрим на основе средних напряжений  $\bar{\sigma}$  и деформаций  $\bar{\varepsilon}$ . Компоненты тензора средних напряжений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}(x_1) &= \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \\ \bar{\sigma}_{12}(x_1) &= \bar{\sigma}_{21}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2 = 0.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Напряжения (1.1) связаны с граничными напряжениями условиями равновесия:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{11}(x_1)}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{12}^-(x_1) - \sigma_{12}^+(x_1)}{\delta_0}, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(x_1)}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{22}^-(x_1) - \sigma_{22}^+(x_1)}{\delta_0}, \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{12}^\pm$ ,  $\sigma_{22}^\pm$  – компоненты тензора напряжений верхней и нижней границ слоя.

Компоненты тензора средних деформаций определяются на основе граничных перемещений слоя следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{u_2^+ - u_2^-}{\delta_0}, \\ \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) &= \bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^+ - u_1^-}{\delta_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x_1} \right) \right),\end{aligned}\quad (1.3)$$

где  $u_n^+$ ,  $u_n^-$  – соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя,  $n = 1, 2$ .

Средние перемещения и их производные выражаются через граничные перемещения:

$$\bar{u}_1(x_1) = 0.5(u_1^+(x_1) + u_1^-(x_1)), \quad \bar{u}_2(x_1) = 0.5(u_2^+(x_1) + u_2^-(x_1)), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2(x_1)}{\partial x_1} = 0.5 \left( \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x_1} \right), \quad \frac{\partial \bar{u}_1(x_1)}{\partial x_2} = \frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0}. \quad (1.5)$$

Полагается, что связь напряжений и деформаций определена в рамках теории малых упругопластических деформаций Ильюшина:

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad (1.6)$$

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}), \quad (1.7)$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – тензоры напряжений и деформаций консолей 1 и 2.

Между слоем и телами 1 и 2 жесткое сцепление:

$$u^+ = u^1(x_1, \delta_0/2), \quad u^- = u^2(x_1, -\delta_0/2), \quad (1.8)$$

где  $u^1(x_1, x_2)$ ,  $u^2(x_1, x_2)$  – вектора перемещений тел 1 и 2 соответственно,

а векторы напряжений равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^+ &= \sigma_{22}(x_1, \delta_0/2), \\ \sigma_{21}^+ &= \sigma_{21}(x_1, \delta_0/2), \\ \sigma_{22}^- &= \sigma_{22}(x_1, -\delta_0/2), \\ \sigma_{21}^- &= \sigma_{21}(x_1, -\delta_0/2). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Вариационное уравнение равновесия для тела 1 выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{s_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + 0.5 \delta_0 \left( \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) + \\ + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta \mathbf{u}^1 dl, \end{aligned} \quad (1.10)$$

для тела 2:

$$\begin{aligned} \int_{s_2} \sigma \cdot \delta \varepsilon ds + 0.5 \delta_0 \left( \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) - \\ - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \delta \mathbf{u}^2 dl, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $s_1$ ,  $s_2$  – площади поперечных сечений тел 1 и 2;  $L_1$ ,  $L_2$  – границы приложения внешней нагрузки для тел 1, 2;  $\mathbf{P}^1 = -\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  – вектор распределенной нагрузки;  $\cdot \cdot$  – двойное скалярное умножение;  $\cdot$  – скалярное умножение.

С учетом нагружения нормальным разрывом и симметрии образца относительно оси  $Ox_1$  поле перемещений границ слоя 3 имеет вид:  $u_1^+ = u_1^-$ ,  $u_2^+ = -u_2^-$ , а средние касательные напряжения адгезионного слоя нулевые:  $\bar{\sigma}_{21} \equiv 0$ .

Ограничимся рассмотрением консоли 1, вариационное уравнение (1.10) запишем в виде:

$$\int_{s_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1.12)$$

где  $\mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{u}^1(x_1, x_2)$ .

Определяющие соотношения тела 1 (1.6) принимаем в форме закона Гука:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2G_e \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (1.13)$$

$$p = 3K\theta, \quad (1.14)$$

где  $\sim$  – девиатор тензора;  $K$  – модуль объемной деформации;  $G_e$  – модуль сдвига;

$K = \frac{E_1}{3(1-2\nu_1)}$ ;  $G_e = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$ ;  $E_1$  – модуль упругости тела 1;

$\nu_1$  – коэффициент Пуассона тела 1;  $\theta = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$ ;  $p = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$ ;  $\mathbf{E}$  – единичный тензор.

Предполагается, что свойства материала слоя характеризуются «единой кривой»  $T = T(\gamma)$  [49] (рис. 1.2) в виде двухзвенной прямой, где  $\gamma$  – интенсивность деформации сдвига;  $G$  – сдвиговой модуль:  $G = G_e$  при  $T \leq T_p$ ,  $G = G_p$  при  $T > T_p$ ;  $T_p$  – предел текучести;  $T$  – интенсивность касательных напряжений;  $G_c$  – секущий модуль сдвига;  $G_c = T/\gamma$ .

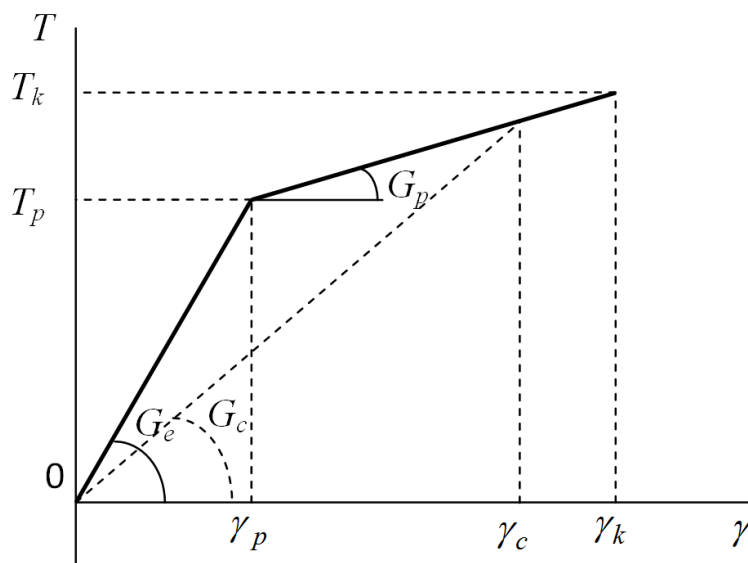


Рис. 1.2. «Единая кривая» свойств материала слоя

Считаем, что материал адгезионного слоя упругопластический без упрочнения, поэтому модуль  $G_p = 0$ . Условие  $G_c < G_e$  будет определять области пластического деформирования в слое.

При нулевых средних касательных напряжениях адгезионного слоя выражения для интенсивности касательных напряжений и интенсивности деформации сдвига примут следующий вид:

$$T = \sqrt{(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})^2 + (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33})^2 + (\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_{11})^2} / \sqrt{6}, \quad (1.15)$$

$$\gamma = 2 \sqrt{(\bar{\varepsilon}_{11} - \bar{\varepsilon}_{22})^2 + (\bar{\varepsilon}_{22} - \bar{\varepsilon}_{33})^2 + (\bar{\varepsilon}_{33} - \bar{\varepsilon}_{11})^2} / \sqrt{6}. \quad (1.16)$$

Определяющие соотношения (1.7) в слое справедливы для средних по толщине характеристик НДС с использованием метода секущего модуля:

$$\tilde{\sigma} = 2G_c \tilde{\varepsilon}, \quad (1.17)$$

$$\bar{p} = 3K\bar{\theta}. \quad (1.18)$$

Таким образом, решение системы (1.12) – (1.18) определяет поле перемещений  $\mathbf{u}(x_1, x_2)$  тела 1.

Рассмотрим ДКБ-образец с характеристиками консолей:  $h = 0.0127$  м,  $\ell = 0.245$  м,  $E_1 = 204$  ГПа,  $\nu_1 = 0.33$ ,  $\sigma_0 = 278$  МПа, где  $\sigma_0$  – предел текучести. Начальная длина трещины  $a = 0.055$  м, ширина образца  $b = 0.025$  м. Длина пластической области  $\ell_p$  определяется из решения задачи в зависимости от значения линейного параметра  $\delta_0$ . Согласно данным работы [71] в таблице 1 приведены свойства смол Araldite AV138, Araldite 2015 и Sikaforce 7752.

В таблице 1.1 приняты следующие обозначения:  $E_3$  – модуль упругости слоя 3;  $\nu_3$  – коэффициент Пуассона адгезионного слоя;  $\varepsilon_c$  – предельная деформация;  $\sigma_c$  – предел прочности;  $J_C$  – значение J-интеграла при толщине слоя  $\delta_0 = 10^{-3}$  м.

Значение внешней силы при инициализации трещины в адгезиве толщиной  $\delta_0 = 10^{-3}$  м для Araldite AV138 составляет  $P_{cr} = 1100$  Н, Araldite 2015 –  $P_{cr} = 1500$  Н, Sikaforce 7752 –  $P_{cr} = 3100$  Н.

Таблица 1.1 – Механические свойства адгезивов

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$E_3$ (ГПа)	4.9	1.85	0.49
$\nu_3$	0.35	0.33	0.3
$\sigma_0$ (МПа)	36.49	12.63	3.24
$\sigma_c$ (МПа)	39.45	21.63	11.48
$\varepsilon_c$ (%)	1.21	4.77	19.18
$J_c$ (Н/м)	200	430	2360

Отметим, что предел текучести материала консоли на порядок превышает соответствующую характеристику рассматриваемых смол. Поэтому считаем, что область пластических локализуется в адгезионном слое, а консоли деформируются обратимо.

Критическую сосредоточенную нагрузку для слоя нулевой толщины определим согласно формуле [61]:

$$Q_c = \sqrt{\frac{J_c h E_1}{12(1-\nu_1^2)}} \left( \left( \frac{a}{h} \right) \left( 1 + 0.673 \left( \frac{h}{a} \right) \right) \right)^{-1}. \quad (1.19)$$

Критическую распределенную нагрузку по левому торцу тела 1 найдем согласно следующей связи:  $P = Q_c/h$ . Данную нагрузку будем использовать в расчетах при различных значениях линейного параметра.

Чтобы найти решение задачи методом конечных элементов (МКЭ), представим адгезионный слой набором квадратных  $\delta_0 \times \delta_0$  в плане  $\delta_0$ -элементов. Для тела 1 используем неравномерное конечно-элементное разбиение со сгущением к слою до характерного размера  $\delta_0$  с квадратичными функциями формы. Исследовалась вычислительная сходимость решений. Использование деформационной теории пластичности предполагает, что каждый элемент слоя в результате решения задачи будет характеризоваться постоянным секущим

модулем  $G_c^i$ , определяемым на основе осредненного напряженного состояния по элементу.

## 1.2 Плоская деформация ДКБ-образца

В случае плоского деформированного состояния (пдс) адгезионного слоя в пределах элемента определяющие соотношения (1.17), (1.18) представим в виде:

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \bar{\varepsilon}_{11} + D_2 \bar{\varepsilon}_{22}, \quad (1.20)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = D_1 \bar{\varepsilon}_{22} + D_2 \bar{\varepsilon}_{11}, \quad (1.21)$$

где  $D_1 = \frac{E_3^i(1-\nu_3^i)}{(1+\nu_3^i)(1-2\nu_3^i)}$ ;  $D_2 = \frac{E_3^i\nu_3^i}{(1+\nu_3^i)(1-2\nu_3^i)}$ ;  $E_3^i = \frac{9G_c^i K}{3K + G_c^i}$ ;  $\nu_3^i = \frac{3K - 2G_c^i}{6K + 2G_c^i}$ .

Модуль  $K$  считается постоянным на всех стадиях деформирования.

На рис. 1.3 показано распределение средних напряжений в адгезиве Sikaforce 7752 по длине слоя при его толщине  $\delta_0 = 10^{-4}$  м при критической внешней нагрузке (1.19). График 1 определяет напряжение отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$ , 2 – напряжение  $\bar{\sigma}_{11}$ , 3 –  $\bar{\sigma}_{33}$ .

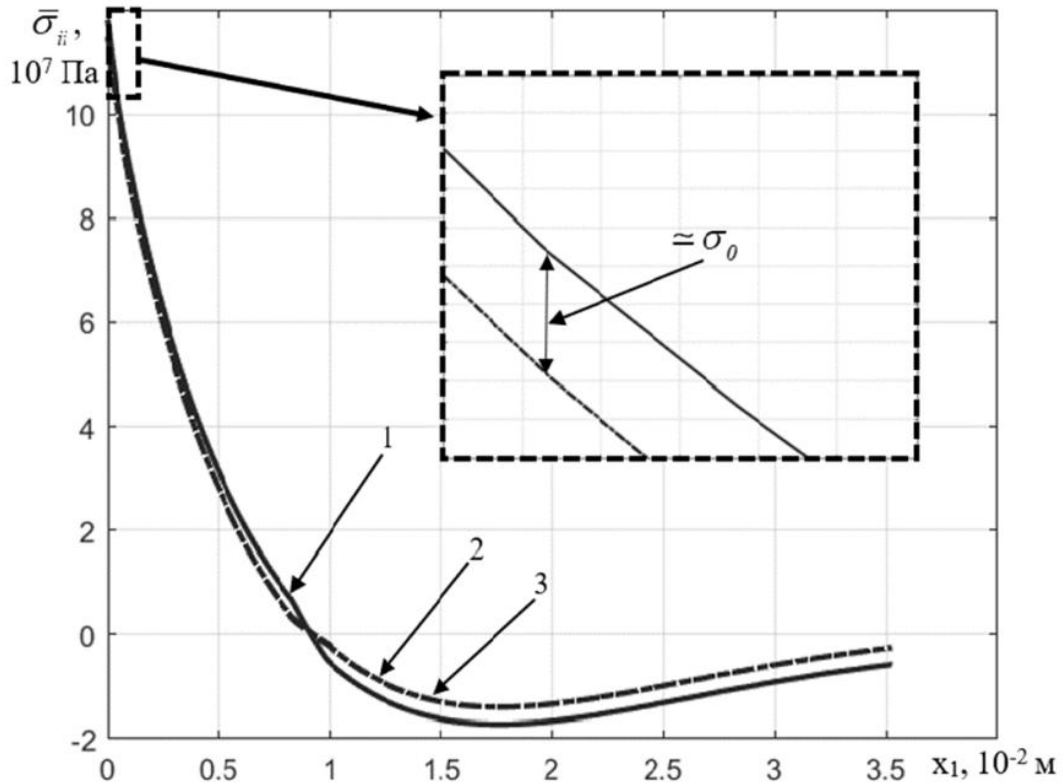


Рис. 1.3. Распределение напряжений в адгезиве Sikaforce 7752 в пдс: 1 –  $\bar{\sigma}_{22}$ , 2 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 3 –  $\bar{\sigma}_{33}$

Из рис. 1.3 видим, что выполняется условие полной пластичности [35, 57], два главных напряжения практически равны  $\bar{\sigma}_{11} \approx \bar{\sigma}_{33}$ , при этом их разница с напряжением отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$  составляет примерно предел текучести.

Конечно-элементное решение показало, что область пластических деформаций слоя длиной  $l_p$  включает в себя три слагаемых:  $l_p = \sum_{i=1}^3 l_i$ , где  $l_1$  – длина первичной пластической зоны;  $l_2$  – длина промежуточной области обратимых деформаций;  $l_3$  – длина вторичной пластической зоны.

В таблице 1.2 представлены длины рассматриваемых зон в зависимости от толщины слоя  $3 \delta_0$  для смолы Sikaforce 7752.

Таблица 1.2 – Длины зон для Sikaforce 7752 в пдс

$l_i$ (м)	$\delta_0$ (м)			
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$l_1$	0.016	0.0096	0.0058	-
$l_2$	0.005	0.00025	0.00016	-
$l_3$	0.03	0.0284	0.0238	-

Согласно результатам расчета из табл. 1.2 видим, что уменьшение толщины слоя приводит к уменьшению области первичной пластичности, примыкающей к торцу адгезионного слоя, при практически постоянном размере вторичной области необратимых деформаций и сближении зон пластичности, т. е. уменьшении промежуточной зоны обратимых деформаций. При этом в первичной области пластических деформаций положительное гидростатическое давление  $p > 0$ , а во вторичной области необратимых деформаций – отрицательное  $p < 0$ .

На рис. 1.4 показано распределение напряжений в адгезиве Araldite AV138 по длине слоя при  $\delta_0 = 10^{-4}$  м при критической внешней нагрузке (1.19). Обозначения графиков соответствуют рис. 1.3.

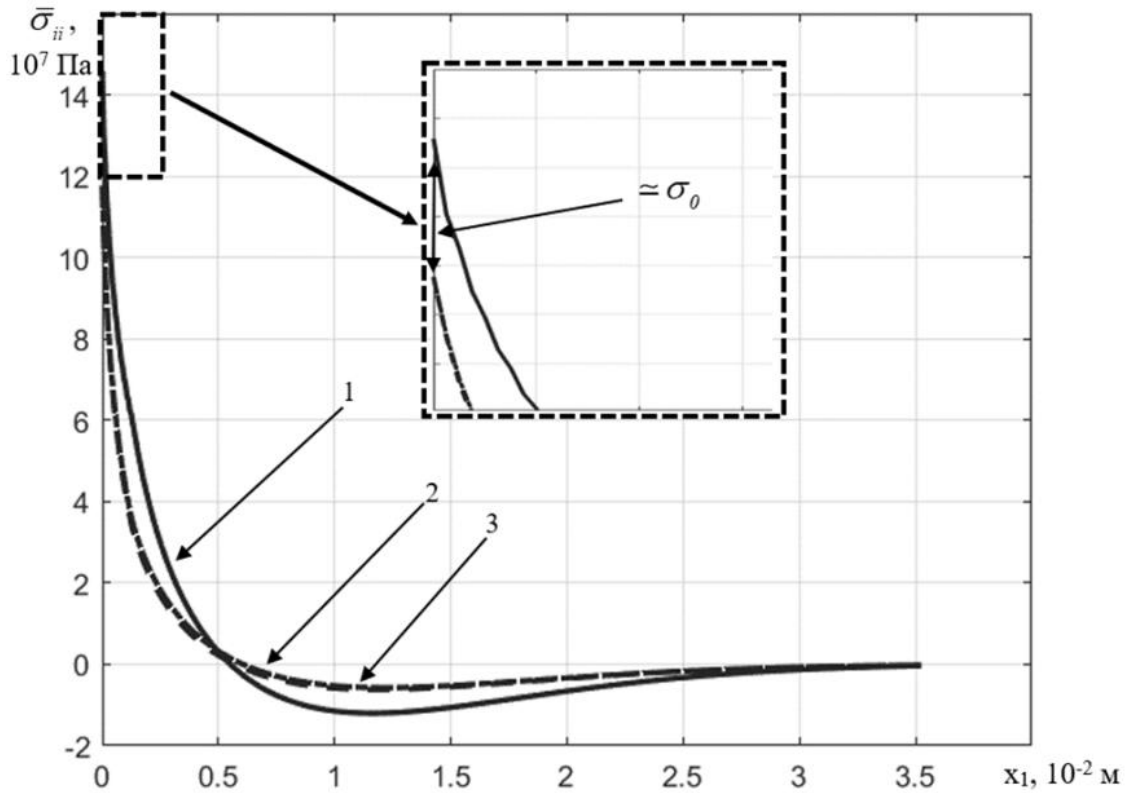


Рис. 1.4. Распределение напряжений в адгезиве Araldite AV138 в пдс: 1 –  $\bar{\sigma}_{22}$ , 2 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 3 –  $\bar{\sigma}_{33}$

Из рис. 1.4 можно сделать выводы аналогичные выводам из анализа распределения напряжений на рис. 1.3.

В таблице 1.3 представлены значения длин рассматриваемых зон для смолы Araldite AV138.

Таблица 1.3 – Длины зон для Araldite AV138 в пдс

$l_i$ (м)	$\delta_0$ (м)			
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$l_1$	0	0.0014	0.0012	0.0010
$l_2$	0	0	0	0
$l_3$	0	0	0	0

Согласно данным из таблицы 1.3 видим, что в адгезиве Araldite AV138, если образуется область необратимых деформаций, то она включает в себя только

первичную зону пластических деформаций. В силу того, что длина пластической области мала, для хрупких адгезивов можно ограничиться упругой постановкой задачи.

На рис. 1.5 для адгезива Sikaforce 7752 и на рис. 1.6 для Araldite AV138 построены графики распределения напряжений при линейно упругом и упругопластическом деформировании при  $\delta_0 = 10^{-4}$  м. Графики 1, 5, 6 соответствуют напряжениям  $\bar{\sigma}_{22}$ ,  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{33}$  при линейно упругом деформировании адгезива. Графики 2, 3, 4 –  $\bar{\sigma}_{22}$ ,  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{33}$  с учетом упругопластических свойств.

Из графиков на рис. 1.5 и 1.6 видим, что в состоянии плоской деформации характер распределения напряжений в адгезионных слоях с упругопластическими свойствами близок к линейно упругой модели поведения.

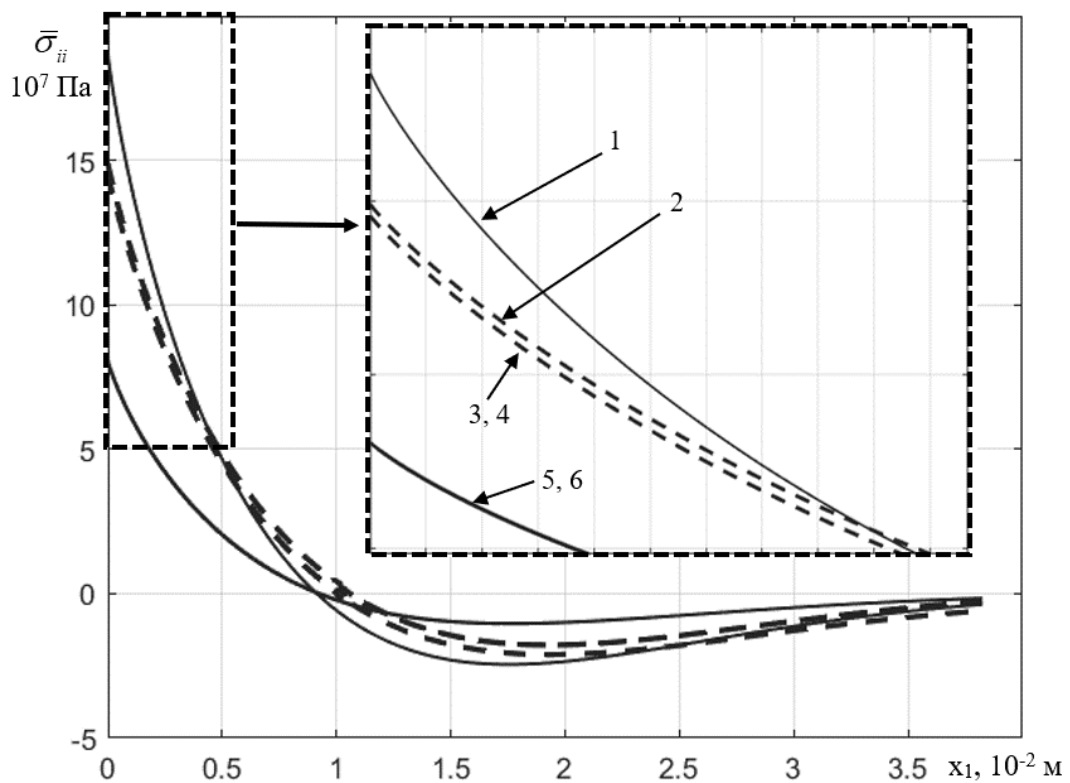


Рис. 1.5. Распределение напряжений в Sikaforce 7752 при различных моделях поведения адгезива в пдс: упругое 1 –  $\bar{\sigma}_{22}$ , 5 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 6 –  $\bar{\sigma}_{33}$ ; упругопластическое 2 –  $\bar{\sigma}_{22}$ , 3 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 4 –  $\bar{\sigma}_{33}$

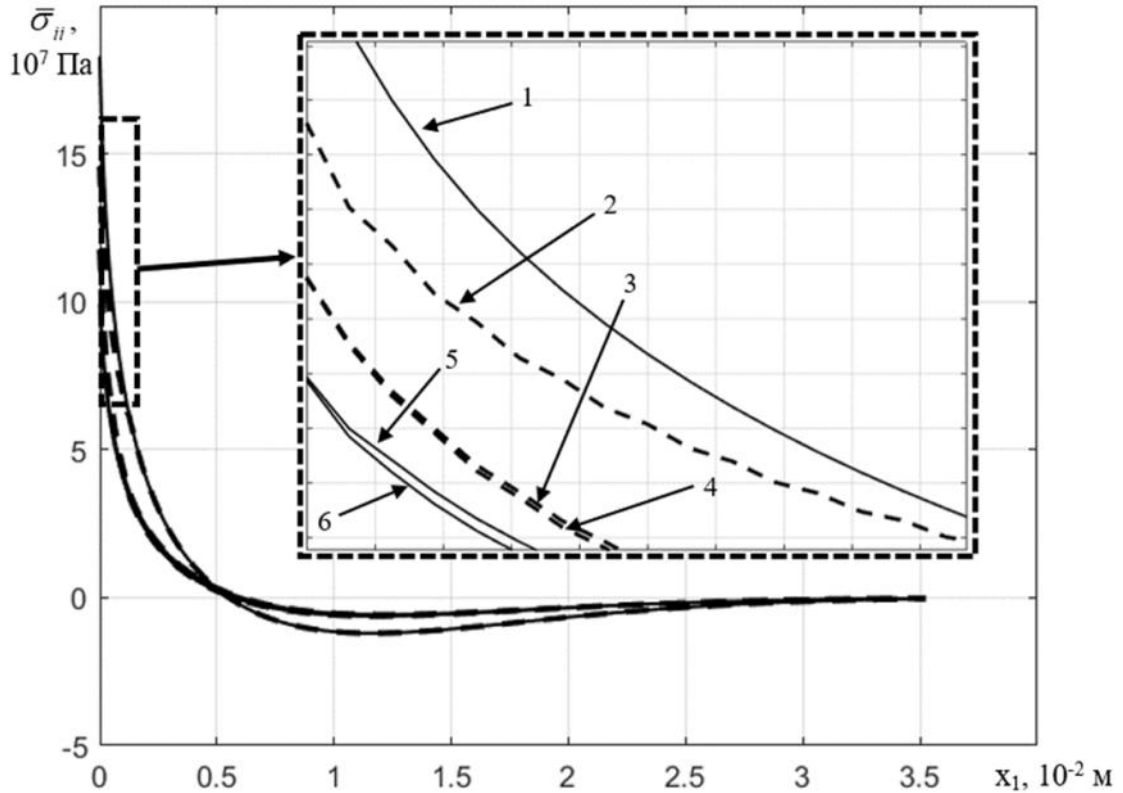


Рис. 1.6. Распределение напряжений в Araldite AV138 при различных моделях поведения адгезива в пдс: упругое 1 –  $\bar{\sigma}_{22}$ , 5 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 6 –  $\bar{\sigma}_{33}$ ; упругопластическое 2 –  $\bar{\sigma}_{22}$ , 3 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 4 –  $\bar{\sigma}_{33}$

### 1.3 Плоское напряженное состояние ДКБ-образца

В случае плоского напряженного состояния (пнс) в формулах распределения напряжений адгезионного слоя (1.20) – (1.21) коэффициенты определяются

следующим образом: 
$$D_1 = \frac{E_3^i}{1 - (v_3^i)^2}, \quad D_2 = \frac{2E_3^i v_3^i}{(1 - (v_3^i)^2) \delta_0}.$$

На рис. 1.7 построено распределение напряжений в адгезиве Sikaforce 7752 при различных значениях толщины слоя при критической внешней нагрузке (1.19). Графики 1 и 2 соответствуют напряжениям  $\bar{\sigma}_{11}$  и  $\bar{\sigma}_{22}$  при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м с зоной пластичности длиной  $\ell'_p$ , графики 3 и 4 –  $\bar{\sigma}_{11}$  и  $\bar{\sigma}_{22}$  при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м с длиной зоны пластичности  $\ell''_p$ .

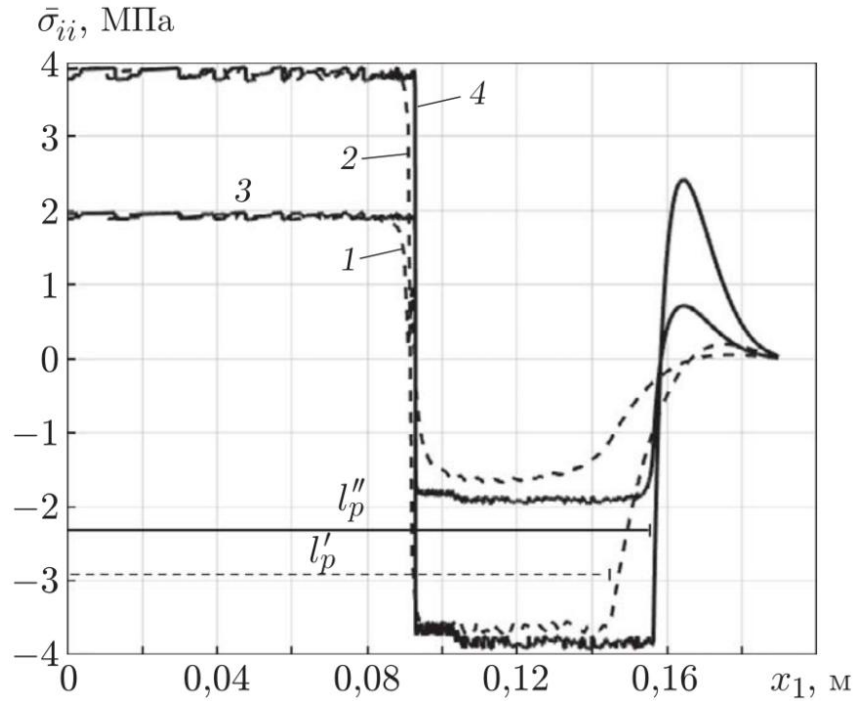


Рис. 1.7. Распределение напряжений в адгезиве Sikaforce 7752 в пнс: при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м 1 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 2 –  $\bar{\sigma}_{22}$ ; при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м 3 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 4 –  $\bar{\sigma}_{22}$

Из рис. 1.7 видим, что в области пластических деформаций образуются области с растягивающими и сжимающими напряжениями. Но в отличие от слоя в плоском деформированном состоянии между этими зонами отсутствует промежуточная область обратимых деформаций. Представим длину пластической области в виде:  $l_p = l_p^+ + l_p^-$ , где  $l_p^+$  – длина зоны с растягивающими напряжениями;  $l_p^-$  – длина области со сжимающими напряжениями.

В таблицу 1.4 поместим полученные значения длин рассматриваемых областей для смолы Sikaforce 7752.

Таблица 1.4 – Длины пластических областей для Sikaforce 7752 в пнс

$l_i$ (м)	$\delta_0$ (м)			
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$l_p^+$	0.092	0.093	0.093	0.094
$l_p^-$	0.053	0.061	0.063	0.063

На рис. 1.8 аналогично рис. 1.7 построено распределение напряжений в адгезиве Araldite AV138 при различных значениях толщины слоя при критической внешней нагрузке (1.19).

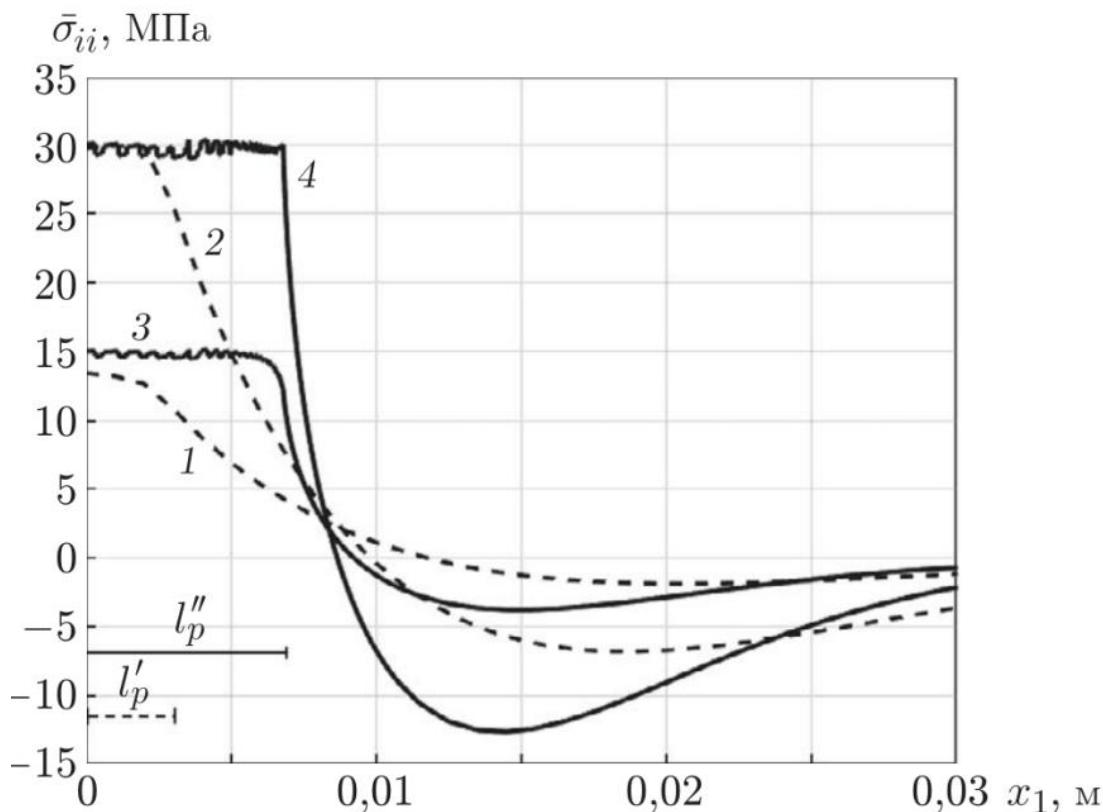


Рис. 1.8. Распределение напряжений в адгезиве Araldite AV138 в пнс: при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м 1 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 2 –  $\bar{\sigma}_{22}$ ; при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м 3 –  $\bar{\sigma}_{11}$ , 4 –  $\bar{\sigma}_{22}$

Из рис. 1.8 видим, что у смолы Araldite AV138 образуется только область пластических деформаций с растягивающими напряжениями.

Отметим, что в силу наличия напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  в слое напряжение отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$  в концевой зоне слоя может быть как меньше (см. рис. 1.8), так и больше (см. рис. 1.7) значения предела текучести при одноосном растяжении (см. табл. 1.1). Это обусловлено двухосным напряженным состоянием слоя.

В таблице 1.5 представлены значения длин рассматриваемых пластических областей для смолы Araldite AV138, в таблице 1.6 – для Araldite 2015.

Таблица 1.5 – Длины пластических областей для Araldite AV138 в пнс

$l_i$ (м)	$\delta_0$ (м)			
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$l_p^+$	0.003	0.006	0.007	0.007
$l_p^-$	0	0	0	0

Таблица 1.6 – Длины пластических областей для Araldite 2015 в пнс

$l_i$ (м)	$\delta_0$ (м)			
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$l_p^+$	0.009	0.014	0.016	0.016
$l_p^-$	0	0	0.002	0.004

#### 1.4 Представление J-интеграла

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру (см. рис. 1.9), который охватывает предполагаемую область упругого деформирования:

$$\oint_z \left( n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) dz = 0, \quad (1.22)$$

где  $\psi$  – удельная (к единице объема) свободная энергия;  $n_1$  – проекция вектора нормали к поверхности контура на направление оси  $x_1$ ;  $z$  – замкнутый контур AS'MM'SA'B'BA.

Рассмотрим (1.22) как сумму интегралов по внешнему и внутреннему контуру:

$$J + J_1 = 0, \quad (1.23)$$

где  $J = \int_{z_1} \left( n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) dz_1$ ;  $J_1 = \int_{z_2} \left( n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) dz_2$ ;  $z_1$  – внешний контур S'MM'S;

$z_2$  – внутренний контур A'B'BA. Поверхности SA' и S'A свободны от напряжений.

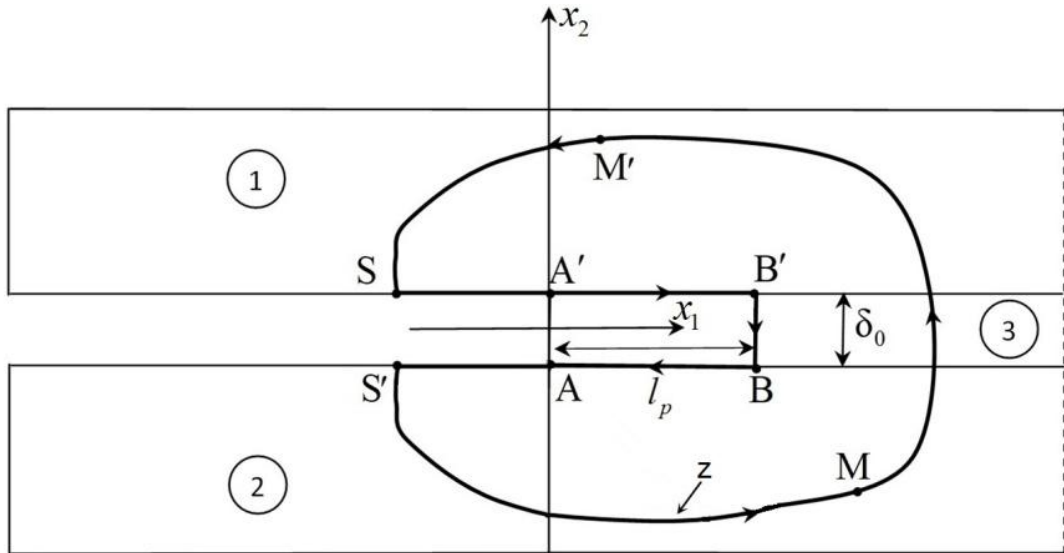


Рис. 1.9. Контур интегрирования

Интеграл  $J$  инвариантный – не зависит от контура интегрирования и является  $J$ -интегралом Черепанова – Райса. Он определен через интеграл  $J_1$ , контур которого охватывает свободные поверхности физического разреза и поверхности упругопластического деформирования адгезионного слоя. Эта область диссипации (рис. 1.10) находится в равновесии под действием распределенной нагрузки  $\mathbf{q}$ , где  $\mathbf{q}^+$  – нагрузка по верхней границе слоя;  $\mathbf{q}^+ = \sigma_{12}^+ \mathbf{e}_1 + \sigma_{22}^+ \mathbf{e}_2$ ;  $\mathbf{q}^-$  – по нижней;  $\mathbf{q}^- = -\sigma_{12}^- \mathbf{e}_1 - \sigma_{22}^- \mathbf{e}_2$ ;  $\bar{\mathbf{q}}^r$  – по правому торцу;  $\bar{\mathbf{q}}^r = \bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 + \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$ ;  $\bar{\mathbf{q}}^l$  – по левому;  $\bar{\mathbf{q}}^l = -\bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 - \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$ .

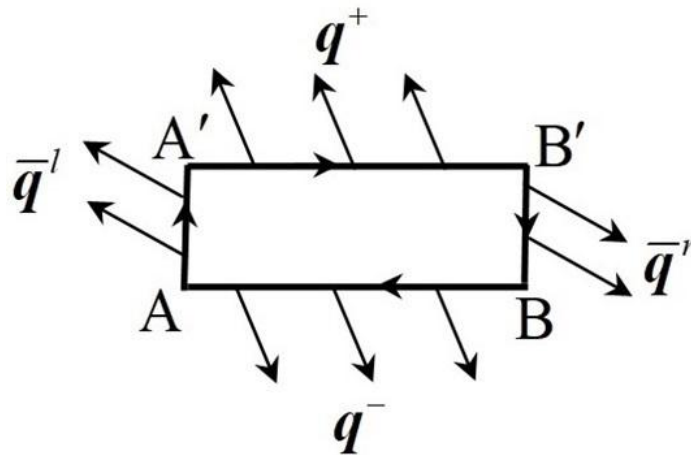


Рис. 1.10. Элемент слоя в равновесном состоянии

Для того чтобы найти интеграл  $J_1$ , запишем соотношение для упругопластической области  $A'B'BA'$  в виде:

$$\oint_{z_3} \left( n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) dz_3 = - \int_s \frac{\partial w}{\partial x_1} ds, \quad (1.24)$$

где  $w$  – удельная (к единице объема) диссипация;  $z_3 = z_2 + AA'$ .

Вычислим интеграл в правой части (1.24):

$$- \int_s \frac{\partial w}{\partial x_1} ds = - \delta_0 \int_s \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 = - \delta_0 w \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell_p} = \delta_0 w \Big|_{x_1=0} = \delta_0 w_c, \quad (1.25)$$

где  $w_c$  – удельная диссипация на торце слоя;  $w_c = w \Big|_{x_1=0}$ .

Интеграл в левой части (1.24) представим как сумму двух интегралов, один из которых является  $J_1$ , а другой определен по контуру  $AA'$ . Внешние нагрузки на контуре равны по модулю и противоположны по знаку нагрузкам на участке сопряжения упругопластической и упругой областей, а внешние нормали к упругой и упругопластической областям по сопрягаемому участку также имеют противоположные знаки. С учетом (1.25) соотношение (1.24) получим в виде:

$$- \delta_0 \psi_c - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} - J_1 = \delta_0 w_c, \quad (1.26)$$

где  $\psi_c$  – удельная свободная энергия на торце слоя;  $\psi_c = \psi \Big|_{x_1=0}$ ;  $\bar{\mathbf{u}} = 0.5(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)$ ;  $\bar{\mathbf{u}}$  – вектор средних перемещений на торце слоя с компонентами (1.4).

С учетом (1.23)  $J$ -интеграл определен следующим образом:

$$J = \delta_0 (\psi_c + w_c) + \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}. \quad (1.27)$$

Рассматривая нагрузку на упругопластическую область (рис. 1.10) в качестве внешней, приходим к следующему выражению  $J$ -интеграла:

$$J = \delta_0 \psi \Big|_{x_1=\ell_p} - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\ell_p} - \int_0^{\ell_p} \left( \mathbf{q}^- \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_1} + \mathbf{q}^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_1} \right) dx_1. \quad (1.28)$$

При решении задачи в плоском деформированном состоянии было обнаружено, что образуется несколько зон. Посмотрим, какой вклад они вносят в значение J-интеграла:

$$I_1 = 0.5\delta_0 \int_0^{\ell_1} \left( \bar{\sigma}_{22} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1, I_2 = 0.5\delta_0 \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left( \bar{\sigma}_{22} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1, \quad (1.29)$$

$$I_3 = 0.5\delta_0 \int_{\ell_2}^{\ell_3} \left( \bar{\sigma}_{22} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1,$$

где  $I_1$  – вклад первичной зоны пластичности с длиной  $\ell_1$  в значение J-интеграла;  
 $I_2$  – вклад промежуточной упругой области с длиной  $\ell_2$  в значение J-интеграла;  
 $I_3$  – вклад второй пластической зоны с длиной  $\ell_3$  в значение J-интеграла.

В таблицы 1.7 и 1.8 помещены полученные значения J-интеграла в зависимости от значения толщины слоя при критической внешней нагрузке (1.19) для адгезивов Sikaforce 7752 и Araldite AV138 соответственно в состоянии плоской деформации. Согласно данным табл. 1.3 у Araldite AV138 образуется одна пластическая область, поэтому  $J = I_1$ ,  $I_2 = I_3 = 0$ .

Таблица 1.7 – Значения J-интеграла для Sikaforce 7752 в пдс

$\delta_0$ (м)	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
J (Н/м)	3358	2713	2453	-
$I_1$ (Н/м)	3273	2696	2450	-
$I_2$ (Н/м)	26	2	0.2	-
$I_3$ (Н/м)	-20	-1	-0.1	-

Таблица 1.8 – Значения J-интеграла для Araldite AV138 в пдс

$\delta_0$ (м)	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
J (Н/м)	225	211	212	214

В плоском напряженном состоянии в ходе конечно-элементного решения было обнаружено, что образуются пластические области с растягивающими и сжимающими напряжениями. Рассмотрим вклад зоны сжимающих напряжений в значение J-интеграла в виде:

$$\Gamma = -\delta_0 \int_{\ell_p^+}^{\ell_p} \left( \bar{\sigma}_{22} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1. \quad (1.29)$$

В таблицах 1.9, 1.10 и 1.11 представлены полученные значения J-интеграла в зависимости от линейного параметра при критической внешней нагрузке (1.19) для адгезивов Sikaforce 7752, Araldite AV138 и Araldite 2015 соответственно в плоском напряженном состоянии. Согласно данным табл. 1.5 у Araldite AV138 образуется только пластическая область с растягивающими напряжениями, поэтому  $\Gamma = 0$ .

Таблица 1.9 – Значения J-интеграла для Sikaforce 7752 в пнс

$\delta_0$ (м)	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
J (Н/м)	9300	8911	8922	8931
$\Gamma$ (Н/м)	-19.90	-1.5	3.7	0.08

Таблица 1.10 – Значения J-интеграла для Araldite AV138 в пнс

$\delta_0$ (м)	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
J (Н/м)	221	220	220	221

Таблица 1.11 – Значения J-интеграла для Araldite 2015 в пнс

$\delta_0$ (м)	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
J (Н/м)	482	472	474	473
$\Gamma$ (Н/м)	0	0	1.15	-0.07

Из результатов в табл. 1.9 – 1.11 видим, что область сжимающих напряжений практически не влияет на значение  $J$ -интеграла.

### 1.5 Основные результаты и выводы 1 главы

1. Найдено конечно-элементное решение задачи упругопластического деформирования адгезионного слоя упругими консолями ДКБ-образца.

2. Определено значение  $J$ -интеграла с учетом диссипации энергии.

3. В плоском деформированном состоянии выполняется условие полной пластичности, два главных напряжения практически равны  $\bar{\sigma}_{11} \approx \bar{\sigma}_{33}$ .

4. В плоском деформированном состоянии адгезионного слоя возможно образование нескольких зон упругопластического деформирования с разными знаками гидростатического давления. При этом основной вклад в формирование  $J$ -интеграла вносит область с положительным гидростатическим давлением.

5. В условиях плоского напряженного состояния в зоне пластического деформирования слоя возможно образование областей сжимающих напряжений, учет которых не оказывает существенного влияния на значение  $J$ -интеграла.

6. В плоском напряженном состоянии у всех рассматриваемых смол прослеживается вычислительная сходимость значений  $J$ -интеграла при уменьшении значения линейного параметра.

7. Значения  $J$ -интеграла в плоском напряженном состоянии могут значительно превышать значения  $J$ -интеграла в состоянии плоской деформации, что обусловлено постоянным гидростатическим давлением.

При численном решении поставленной задачи уменьшение толщины адгезионного слоя требует больших вычислительных ресурсов, поэтому рассмотрим постановку и аналитическое решение задачи в рамках упрощающих гипотез при малых значениях линейного параметра.

## Глава 2

### Постановка и решение упругой задачи в рамках упрощающих гипотез теории пластин Миндлина – Рейсснера

#### 2.1 Постановка задачи

Считаем, что отсутствует пластическая область, ее длина равна нулю  $\ell_p = 0$ .

Компоненты тензора деформаций адгезионного слоя (1.3) запишем в виде:

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+}{\delta_0}, \quad \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = 0. \quad (2.1)$$

Связи между напряжениями и деформациями в консолях (1.6) и в слое (1.7) определим законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left( \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right), \quad (2.2)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\bar{\varepsilon}$  – объемные деформации;  $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ;  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Поле перемещений в пластине 1 запишем согласно распределению Миндлина [89]:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1(x_1, \delta_0/2) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad u_2(x_1, x_2) = u_2(x_1, \delta_0/2), \quad (2.3)$$

где  $\varphi$  – угол поворота материальных нормалей к плоскости  $x_2 = \delta_0/2$ .

Учитывая (2.3), отличные от нуля деформации консоли будут определяться в виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1(x_1, \delta_0/2)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0.5 \left( \frac{du_2(x_1, \delta_0/2)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right). \quad (2.4)$$

От вариационного уравнения (1.12) приходим к двум системам дифференциальных уравнений для тела 1 на участке без сопряжения консолей со слоем  $x_1 \in [-a; 0)$ :

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0; \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0, \quad (2.5)$$

и на участке с сопряжением тел со слоем взаимодействия  $x_1 \in (0; \ell]$ :

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0; \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0; \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}, \quad (2.6)$$

где  $M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2$  – обобщенный момент;  $Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2$ ,

$Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2$  – обобщенные силы.

Подставив деформации (2.4) в закон Гука (2.2) и учтя теорию Миндлина – Рейсснера [94–95], получим следующее напряженное состояние в консоли 1:

$$\sigma_{11} = D \left( \frac{du_1(x_1, \delta_0/2)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right), \quad \sigma_{12} = L \left( \frac{du_2(x_1, \delta_0/2)}{dx_1} - \varphi \right), \quad (2.7)$$

где  $L = k \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$ ;  $k = \frac{5}{6}$ ;  $D = \frac{E_1}{(1-\nu_1^2)}$ .

Учитывая компоненты тензора средних деформаций в слое (2.1) и связь (2.2), напряженное состояние в слое взаимодействия определено следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D_2 u_2^+, \quad \bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad (2.8)$$

где  $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$ ,  $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$  – для плоского

деформированного состояния;  $D_1 = \frac{E_3}{1-\nu_3^2}$ ,  $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1-\nu_3^2)\delta_0}$  – для плоского

напряженного;  $C_1 = \frac{2D_1}{\delta_0}$ ;  $C_2 = \frac{\delta_0 D_2}{2}$ .

В силу непрерывности перемещений при  $x_1 \in (0; \ell]$ :  $u_1(x_1, \delta_0/2) = u_1^+(x_1)$ ,  
 $u_2(x_1, \delta_0/2) = u_2^+(x_1)$ .

Система (2.5) – (2.6) имеет следующие граничные условия:

$$u_1^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad u_2^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad \varphi \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad (2.9)$$

$$M_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad (2.10)$$

и условия сопряжения в точке  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} u_1|_{x_1=-0}^{x_2=\delta_0/2} &= u_1^+|_{x_1=+0}, \quad u_2|_{x_1=-0}^{x_2=\delta_0/2} = u_2^+|_{x_1=+0}, \quad \varphi|_{x_1=-0} = \varphi|_{x_1=+0}, \\ M_{11}|_{x_1=-0} &= M_{11}|_{x_1=+0}, \quad Q_{12}|_{x_1=-0} = Q_{12}|_{x_1=+0}, \\ Q_{11}|_{x_1=-0} &= (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В результате система линейных дифференциальных уравнений второго порядка (2.5) – (2.6) с учетом напряженного состояния (2.7) – (2.8), граничных условий (2.9) – (2.10) и условий сопряжения (2.11) становится замкнутой.

## 2.2 Решение упругой задачи

Ограничимся рассмотрением участка с сопряжением консолей адгезионным слоем  $(0; \ell]$ , перенеся граничные условия (2.10) в  $x_1 = 0$ :

$$M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2 a, \quad (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=0} = 0, \quad Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2. \quad (2.12)$$

С учетом напряженного состояния тела 1 (2.7) обобщенные силы и момент выразим через поле перемещений:

$$M_{11} = Dh^2 \left( \frac{1}{2} u_1^{+'} - \frac{h}{3} \varphi' \right), \quad Q_{11} = Dh \left( u_1^{+'} - \frac{h}{2} \varphi' \right), \quad Q_{12} = Lh \left( u_2^{+'} - \varphi \right). \quad (2.13)$$

Система дифференциальных уравнений (2.6) на участке  $(0; \ell]$  примет следующий вид:

$$\begin{cases} Dh^2 \left( \frac{1}{2} u_1^{+''} - \frac{h}{3} \varphi'' \right) - Lh \left( u_2^{+'} - \varphi \right) = 0; \\ Dh \left( u_1^{+''} - \frac{h}{2} \varphi'' \right) + 0.5\delta_0 \left( D_1 u_1^{+''} + D_2 u_2^{+'} \right) = 0; \\ Lh \left( u_2^{+''} - \varphi' \right) = C_1 u_2^+ + C_2 u_1^{+'}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Проинтегрировав второе уравнение системы (2.14), получим:

$$u_1^{+'} = \frac{Dh^2}{2S_2} \varphi' - \frac{\delta_0 D_2}{2S_2} u_2^+ + \frac{1}{S_2} \tilde{C}_1, \quad (2.15)$$

где  $S_2 = Dh + 0.5\delta_0 D_1$ .

Подставим (2.15) в третье уравнение (2.14):

$$Lhu_2^{+''} - \left[ Lh + \frac{Dh^2 C_2}{2S_2} \right] \varphi' - \left[ C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2} \right] u_2^+ = \frac{C_2}{S_2} \tilde{C}_1. \quad (2.16)$$

Преобразуем первое уравнение системы (2.14):

$$u_1^{+''} = \frac{2h}{3} \varphi'' + \frac{2L}{Dh} u_2^{+'} - \frac{2L}{Dh} \varphi. \quad (2.17)$$

Из (2.15) и (2.17) получим следующее выражение:

$$\left[ \frac{2h}{3} - \frac{Dh^2}{2S_2} \right] \varphi'' + \left[ \frac{\delta_0 D_2}{2S_2} + \frac{2L}{Dh} \right] u_2^{+'} - \frac{2L}{Dh} \varphi = 0. \quad (2.18)$$

Таким образом, (2.16) и (2.18) образуют систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно двух неизвестных функций  $u_2^+$  и  $\varphi$ :

$$\begin{cases} Lhu_2^{+''} - \left[ Lh + \frac{Dh^2 C_2}{2S_2} \right] \varphi' - \left[ C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2} \right] u_2^+ = \frac{C_2}{S_2} \tilde{C}_1; \\ \left[ \frac{2h}{3} - \frac{Dh^2}{2S_2} \right] \varphi'' + \left[ \frac{\delta_0 D_2}{2S_2} + \frac{2L}{Dh} \right] u_2^{+'} - \frac{2L}{Dh} \varphi = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Понизим порядок системы (2.19):

$$\begin{cases} u_2^{+'} = y; \\ \varphi' = t; \\ y' = m_1 t + m_2 u_2^+ + \frac{C_2}{LhS_2} \tilde{C}_1; \\ t' = m_3 y + m_4 \varphi, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\text{где } m_1 = 1 + \frac{DhC_2}{2LS_2}; \quad m_2 = \frac{1}{Lh} \left( C_1 - \frac{\delta_0 D_2 C_2}{2S_2} \right); \quad m_3 = -\frac{3(\delta_0 D_2 Dh + 4LS_2)}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)};$$

$$m_4 = \frac{12LS_2}{Dh(4hS_2 - 3Dh^2)}.$$

В матричном виде система (2.20) запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_2 & 0 & 0 & m_1 \\ 0 & m_4 & m_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C_2}{LhS_2} \tilde{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Составим характеристическое уравнение для однородной части системы (2.21):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ m_2 & 0 & -\lambda & m_1 \\ 0 & m_4 & m_3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^4 - (m_2 + m_1 m_3 + m_4) \lambda^2 + m_2 m_4 = 0. \quad (2.22)$$

Дискриминант характеристического уравнения (2.22) имеет следующий вид:

$$d = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4. \quad (2.23)$$

На рис. 2.1 показана зависимость дискриминанта (2.23) от относительной толщины слоя взаимодействия для ранее выбранных характеристик композитной пластины для адгезива Araldite AV138 (см. табл. 1.1). График 1 соответствует пдс, график 2 – пнс.

Из рис. 2.1 видно, что значения дискриминанта (2.23) принимают как положительные, так и отрицательные значения.

Найдем решение в случае положительного дискриминанта (2.23). Запишем однородную часть системы (2.21) в виде:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 0 & 1 \\ m_2 & 0 & -\lambda_i & m_1 \\ 0 & m_4 & m_3 & -\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad (2.24)$$

где  $\lambda_1 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 + d}{2}}$ ,  $\lambda_2 = -\lambda_1$ ,  $\lambda_3 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 - d}{2}}$ ,  $\lambda_4 = -\lambda_3$  – корни характеристического уравнения (2.22).

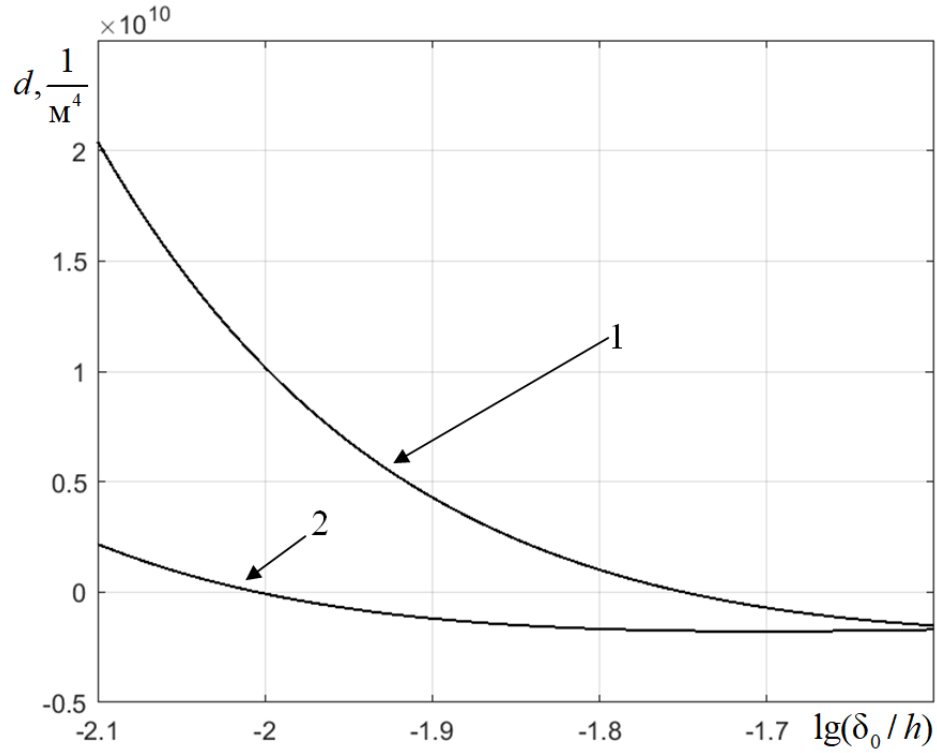


Рис. 2.1. Зависимость дискриминанта характеристического уравнения от относительной толщины слоя: 1 – пдс, 2 – пнс

$$\begin{cases} -\lambda_i u_2^+ + y = 0; \\ -\lambda_i \varphi + t = 0; \\ m_2 u_2^+ - \lambda_i y + m_1 t = 0; \\ m_4 \varphi + m_3 y - \lambda_i t = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_i u_2^+; \\ t = \lambda_i \varphi; \\ m_2 u_2^+ - \lambda_i^2 u_2^+ + m_1 \lambda_i \varphi = 0; \\ m_4 \varphi + m_3 y - \lambda_i t = 0. \end{cases}$$

Однородное решение выглядит следующим образом:

$$\varphi = \frac{\lambda_i^2 - m_2}{m_1 \lambda_i} u_2^+, \quad (2.25)$$

$$u_2^+ = \tilde{C}_2 e^{\lambda_4 x_1} + \tilde{C}_3 e^{-\lambda_4 x_1} + \tilde{C}_4 e^{\lambda_3 x_1} + \tilde{C}_5 e^{-\lambda_3 x_1}. \quad (2.26)$$

Найдем частное решение, для этого используем матричный вид системы (2.21).

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_2 & 0 & 0 & m_1 \\ 0 & m_4 & m_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C_2}{LhS_2} \tilde{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} u_2^{+'} = A_1; \\ \varphi' = 0; \\ y' = \frac{C_2}{LhS_2} \tilde{C}_1; \\ t' = m_3 A_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2^+ = A_1 x_1 + A_2; \\ \varphi = A_3; \\ y = \frac{C_2}{LhS_2} \tilde{C}_1 x_1 + A_4; \\ t = m_3 A_1 x_1 + A_5. \end{cases} \quad (2.28)$$

Подставив (2.28) в систему (2.19), получим одну ненулевую константу:

$$A_2 = -\frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} \tilde{C}_1. \quad (2.29)$$

Объединим полученные однородное (2.25) – (2.26) и частное (2.28) – (2.29) решения:

$$u_2^+ = \tilde{C}_2 e^{\lambda_4 x_1} + \tilde{C}_3 e^{-\lambda_4 x_1} + \tilde{C}_4 e^{\lambda_3 x_1} + \tilde{C}_5 e^{-\lambda_3 x_1} - \tilde{C}_1 \frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2}, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{\lambda_1^2 - m_2}{m_1 \lambda_1} \tilde{C}_2 e^{\lambda_4 x_1} - \frac{\lambda_1^2 - m_2}{m_1 \lambda_1} \tilde{C}_3 e^{-\lambda_4 x_1} + \\ & + \frac{\lambda_3^2 - m_2}{m_1 \lambda_3} \tilde{C}_4 e^{\lambda_3 x_1} - \frac{\lambda_3^2 - m_2}{m_1 \lambda_3} \tilde{C}_5 e^{-\lambda_3 x_1}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Горизонтальное перемещение найдем, проинтегрировав формулу (2.15), предварительно подставив в нее (2.30) и первую производную (2.31):

$$\begin{aligned} u_1^+ = & \frac{Dh^2(\lambda_1^2 - m_2) - 2m_1 C_2}{2\lambda_1 S_2 m_1} \tilde{C}_2 e^{\lambda_4 x_1} - \frac{Dh^2(\lambda_1^2 - m_2) - 2m_1 C_2}{2\lambda_1 S_2 m_1} \tilde{C}_3 e^{-\lambda_4 x_1} + \\ & + \frac{Dh^2(\lambda_3^2 - m_2) - 2m_1 C_2}{2\lambda_3 S_2 m_1} \tilde{C}_4 e^{\lambda_3 x_1} - \frac{Dh^2(\lambda_3^2 - m_2) - 2m_1 C_2}{2\lambda_3 S_2 m_1} \tilde{C}_5 e^{-\lambda_3 x_1} + \\ & + \tilde{C}_1 \frac{x_1}{S_2} \left( \frac{C_2^2}{C_1 S_2 - C_2^2} + 1 \right) + \tilde{C}_6. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Таким образом, найдено общее упругое решение системы дифференциальных уравнений (2.6) при положительном значении дискриминанта (2.23) характеристического уравнения (2.22):  $u_1^+$  – (2.32),  $u_2^+$  – (2.30) и  $\varphi$  – (2.31).

Чтобы найти частное решение упругой задачи при вещественных корнях (2.22), необходимо найти константы интегрирования  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, \tilde{C}_5, \tilde{C}_6$ , удовлетворяющие граничным условиям (2.9), (2.12).

$$1) u_1^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0:$$

$$\tilde{C}_1 r \ell + \tilde{C}_2 g_1 e^{\lambda_1 \ell} - \tilde{C}_3 g_1 e^{-\lambda_1 \ell} + \tilde{C}_4 g_2 e^{\lambda_3 \ell} - \tilde{C}_5 g_2 e^{-\lambda_3 \ell} + \tilde{C}_6 = 0, \quad (2.33)$$

$$2) u_2^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0:$$

$$-\tilde{C}_1 \frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_1 \ell} + \tilde{C}_3 e^{-\lambda_1 \ell} + \tilde{C}_4 e^{\lambda_3 \ell} + \tilde{C}_5 e^{-\lambda_3 \ell} = 0, \quad (2.34)$$

$$3) \varphi \Big|_{x_1=\ell} = 0:$$

$$\tilde{C}_2 g_3 e^{\lambda_1 \ell} - \tilde{C}_3 g_3 e^{-\lambda_1 \ell} + \tilde{C}_4 g_4 e^{\lambda_3 \ell} - \tilde{C}_5 g_4 e^{-\lambda_3 \ell} = 0, \quad (2.35)$$

$$4) Q_{12} \Big|_{x_1=0} = -Q_2:$$

$$\tilde{C}_2 (\lambda_1 - g_3) e^{\lambda_1 \ell} - \tilde{C}_3 (\lambda_1 - g_3) e^{-\lambda_1 \ell} + \tilde{C}_4 (\lambda_3 - g_4) e^{\lambda_3 \ell} - \tilde{C}_5 (\lambda_3 - g_4) e^{-\lambda_3 \ell} = -\frac{Q_2}{Lh}, \quad (2.36)$$

$$5) M_{11} \Big|_{x_1=0} = -Q_2 a:$$

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_1 \frac{r}{2} + \tilde{C}_2 \lambda_1 \left( \frac{g_1}{2} - \frac{hg_3}{3} \right) + \tilde{C}_3 \lambda_1 \left( \frac{g_1}{2} - \frac{hg_3}{3} \right) + \tilde{C}_4 \lambda_3 \left( \frac{g_2}{2} - \frac{hg_4}{3} \right) + \\ & + \tilde{C}_5 \lambda_3 \left( \frac{g_2}{2} - \frac{hg_4}{3} \right) = -\frac{Q_2 a}{Dh^2}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$6) (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=0} = 0:$$

$$\tilde{C}_1 \left[ Dh r + 0.5\delta_0 \left( D_1 r - D_2 \frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} \right) \right] + \tilde{C}_2 g_5 + \tilde{C}_3 g_5 + \tilde{C}_4 g_6 + \tilde{C}_5 g_6 = 0, \quad (2.38)$$

$$\text{где } r = \frac{1}{S_2} \left( \frac{C_2^2}{C_1 S_2 - C_2^2} + 1 \right); \quad g_1 = \frac{Dh^2 (\lambda_1^2 - m_2) - 2m_1 C_2}{2\lambda_1 S_2 m_1}; \quad g_2 = \frac{Dh^2 (\lambda_3^2 - m_2) - 2m_1 C_2}{2\lambda_3 S_2 m_1};$$

$$g_3 = \frac{\lambda_1^2 - m_2}{m_1 \lambda_1}; \quad g_4 = \frac{\lambda_3^2 - m_2}{m_1 \lambda_3}; \quad g_5 = Dh \lambda_1 \left( g_1 - \frac{hg_3}{2} \right) + 0.5\delta_0 (D_1 \lambda_1 g_1 + D_2);$$

$$g_6 = Dh \lambda_3 \left( g_2 - \frac{hg_4}{2} \right) + 0.5\delta_0 (D_1 \lambda_3 g_2 + D_2).$$

На рис. 2.2 построены графики горизонтальных перемещений  $u_1^+$  (2.32) полученного решения при толщине адгезионного слоя  $\delta_0 = 10^{-5}$  м под действием

экспериментальной критической силы (см. стр. 19), причем  $Q_2 = \frac{P_{cr}}{b}$ . График 1 относится к адгезиву Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752 в состоянии плоской деформации (а) и в плоском напряженном состоянии (б). Решение найдено при  $\ell = 0.245$  м, но на рисунке здесь и далее отброшен участок, на котором значения стремятся к нулю.

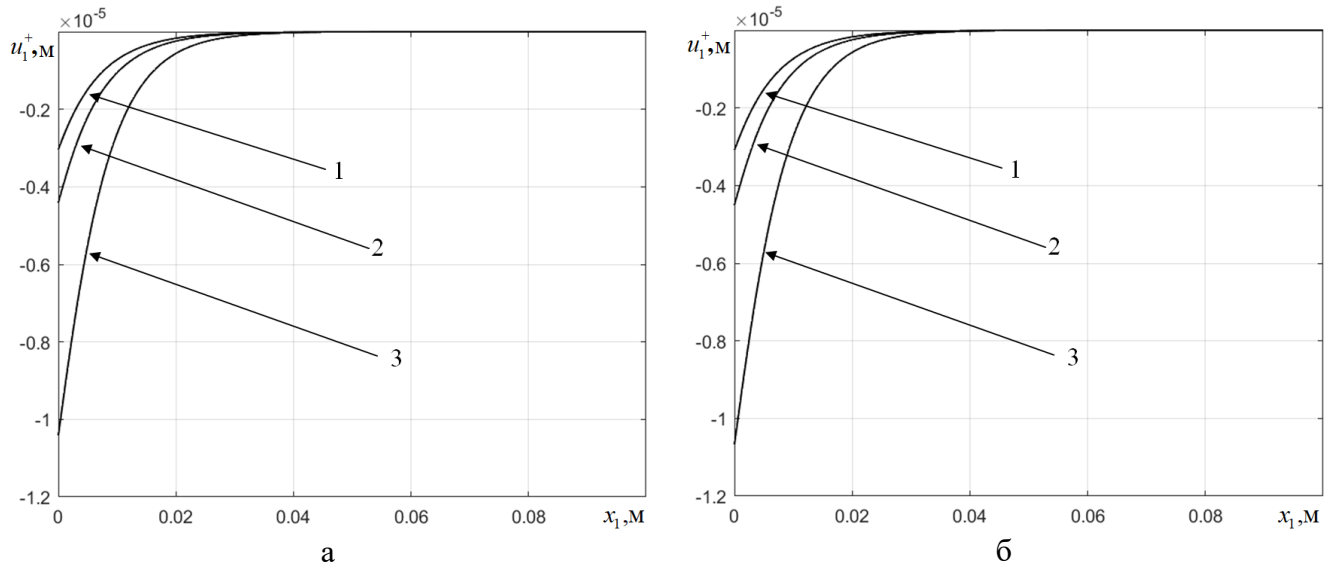


Рис. 2.2. Горизонтальные перемещения при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

Аналогично на рис. 2.3 построены вертикальные перемещения  $u_2^+$  (2.30).

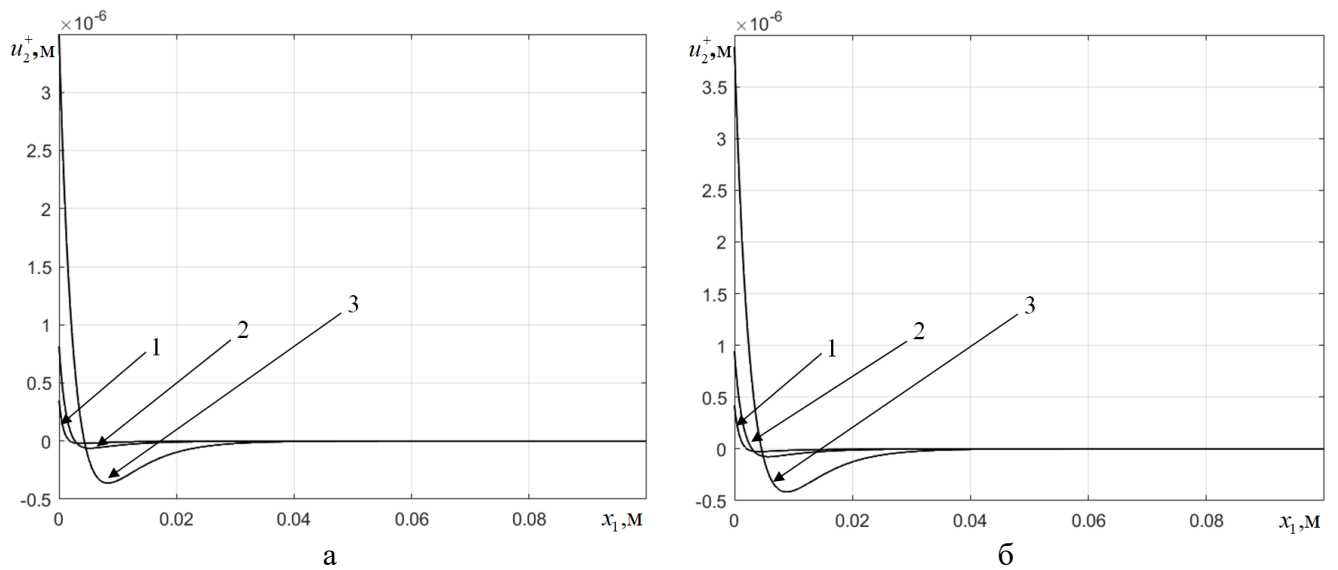


Рис. 2.3. Вертикальные перемещения при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

На рис. 2.4 – углы поворота  $\varphi$  (2.31).

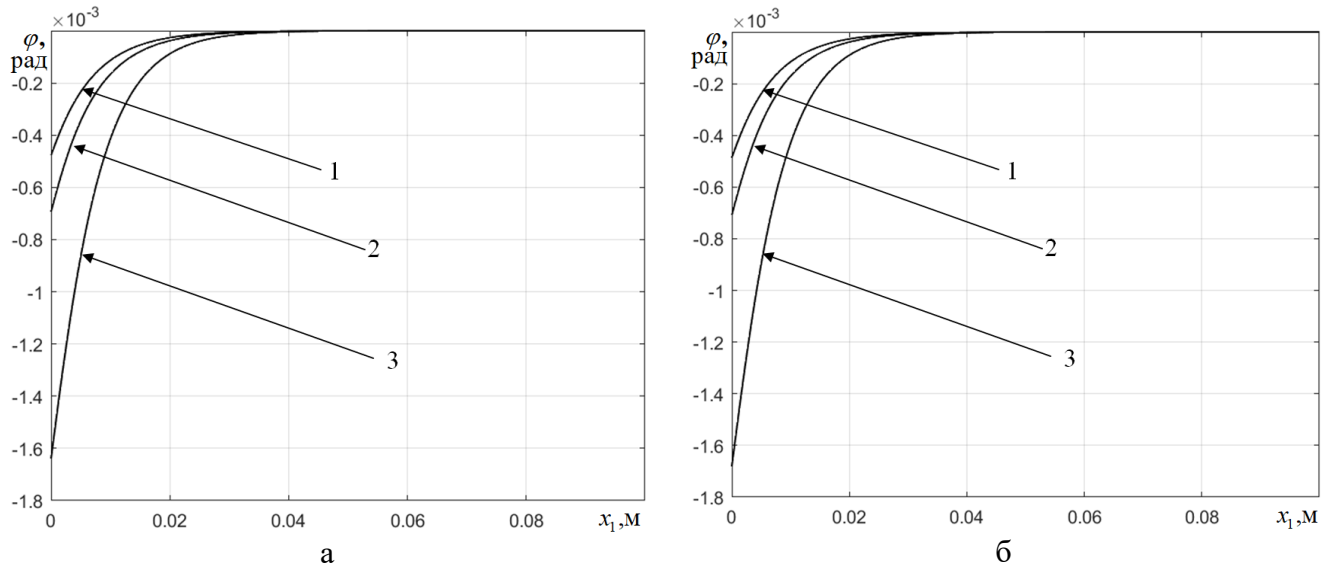


Рис. 2.4. Углы поворота при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

На рис. 2.5 – средние напряжения в адгезионном слое  $\bar{\sigma}_{11}$ .

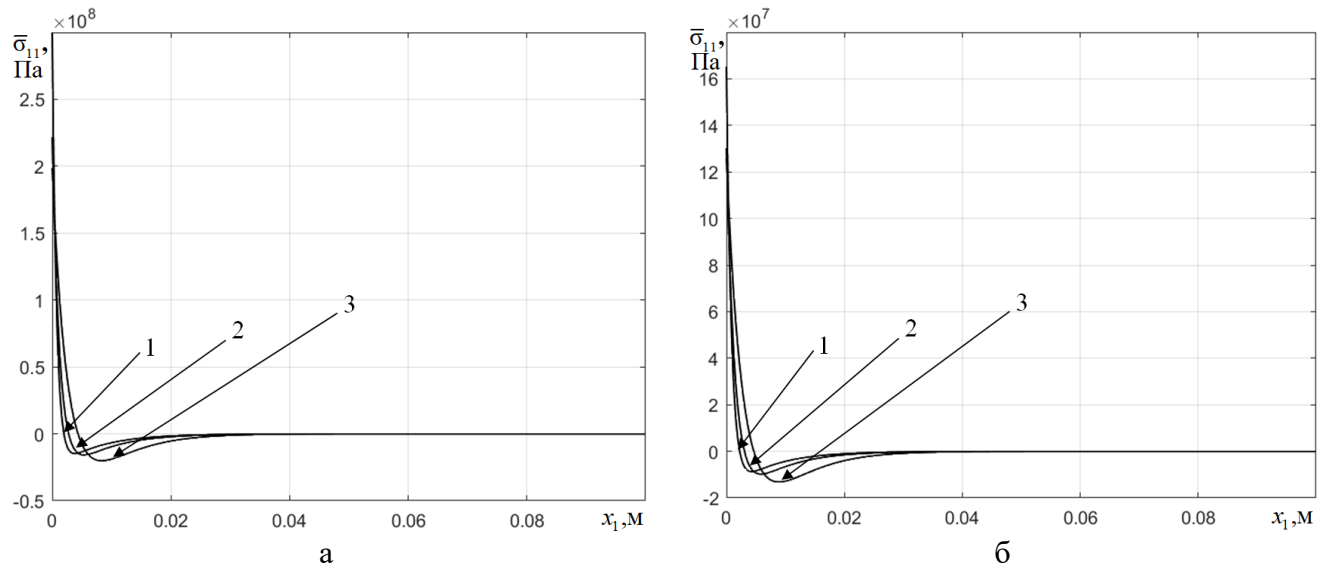


Рис. 2.5. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

На рис. 2.6 – напряжения отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$ .

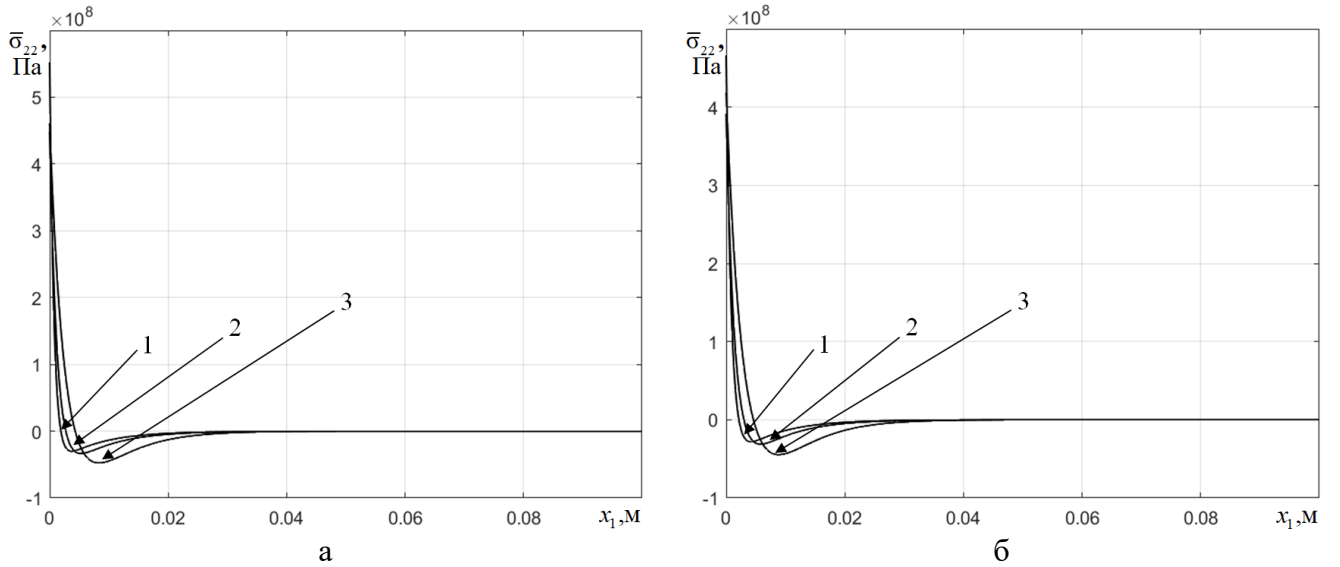


Рис. 2.6. Напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$  при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

Из рис. 2.2 – 2.6 видим, что вид плоского состояния незначительно влияет на поле перемещений решения упругой постановки задачи, но заметно влияет на НДС слоя.

При отрицательных значениях дискриминанта (2.23) получим комплексные корни характеристического уравнения (2.22):

$$\hat{\lambda}_1 = R_1 + iR_2, \quad \hat{\lambda}_2 = R_1 - iR_2, \quad \hat{\lambda}_3 = -R_1 + iR_2, \quad \hat{\lambda}_4 = -R_1 - iR_2, \quad (2.39)$$

где  $R_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}$ ;  $R_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}$ ;  $\alpha = \frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4}{2}$ ;  $\beta = \frac{\sqrt{-d}}{2}$ .

Далее найдем собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям. Так как рассматривается линейная однородная система с постоянными коэффициентами, то ее решение ищется в виде:  $u_2^+ = \lambda_i e^{\lambda_i x_1}$ . Найдем зависимость функции  $\varphi$  от  $u_2^+$ .

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 0 & 1 \\ m_2 & 0 & -\lambda_i & m_1 \\ 0 & m_4 & m_3 & -\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_i u_2^+ + y = 0; \\ -\lambda_i \varphi + t = 0; \\ m_2 u_2^+ - \lambda_i y + m_1 t = 0; \\ m_4 \varphi + m_3 y - \lambda_i t = 0. \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{(m_2 - \lambda_i^2) u_2^+}{m_1 \lambda_i}.$$

Рассмотрим первый корень (2.39)  $\hat{\lambda}_1 = R_1 + iR_2$ :

$$u_2^+ = e^{R_1 x_1} \left[ R_1 \cos(R_2 x_1) - R_2 \sin(R_2 x_1) + i(R_2 \cos(R_2 x_1) + R_1 \sin(R_2 x_1)) \right],$$

$$\varphi = e^{R_1 x_1} \left[ -(R_3 \cos(R_2 x_1) + R_4 \sin(R_2 x_1)) + i(R_4 \cos(R_2 x_1) - R_3 \sin(R_2 x_1)) \right],$$

$$\text{где } R_3 = \frac{m_2 - R_1^2 + R_2^2}{m_1}; \quad R_4 = \frac{2R_1 R_2}{m_1}.$$

Для этого корня в качестве решения возьмем действительную часть комплексного числа:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_1 = e^{R_1 x_1} \begin{pmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) - R_2 \sin(R_2 x_1) \\ -(R_3 \cos(R_2 x_1) + R_4 \sin(R_2 x_1)) \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Рассмотрим второй корень (2.39) характеристического уравнения (2.22):

$$u_2^+ = e^{R_1 x_1} \left[ R_1 \cos(R_2 x_1) - R_2 \sin(R_2 x_1) - i(R_2 \cos(R_2 x_1) + R_1 \sin(R_2 x_1)) \right],$$

$$\varphi = -e^{R_1 x_1} \left[ R_3 \cos(R_2 x_1) + R_4 \sin(R_2 x_1) + i(R_4 \cos(R_2 x_1) - R_3 \sin(R_2 x_1)) \right].$$

Теперь для решения возьмем мнимую часть комплексного числа:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_2 = e^{R_1 x_1} \begin{pmatrix} -(R_2 \cos(R_2 x_1) + R_1 \sin(R_2 x_1)) \\ -R_4 \cos(R_2 x_1) + R_3 \sin(R_2 x_1) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Аналогично для третьего и четвертого корней получим:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_3 = e^{-R_1 x_1} \begin{pmatrix} -(R_1 \cos(R_2 x_1) + R_2 \sin(R_2 x_1)) \\ -R_3 \cos(R_2 x_1) + R_4 \sin(R_2 x_1) \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_4 = e^{-R_1 x_1} \begin{pmatrix} -R_2 \cos(R_2 x_1) + R_1 \sin(R_2 x_1) \\ R_4 \cos(R_2 x_1) + R_3 \sin(R_2 x_1) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Следовательно, (2.40) – (2.43) образуют решение однородной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_{\text{одн}} = \hat{C}_2 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_1 + \hat{C}_3 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_2 + \hat{C}_4 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_3 + \hat{C}_5 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_4. \quad (2.44)$$

Общее решение определим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix} = \hat{C}_2 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_1 + \hat{C}_3 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_2 + \hat{C}_4 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_3 + \hat{C}_5 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_4 + \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_{\text{чн}}, \quad (2.45)$$

где  $\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_{\text{чп}}$  – частное решение, которое уже было найдено ранее. Запишем (2.28) –

(2.29) в виде:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_{\text{чп}} = \begin{pmatrix} -\frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} \hat{C}_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Общее решение (2.45) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u_2^+ = & \hat{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) - \\ -R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \hat{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ & - \hat{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ & - \frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} \hat{C}_1, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \varphi = & -\hat{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\ & + \hat{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Из формулы (2.15), используя (2.47) – (2.48), найдем последнюю неизвестную функцию:

$$\begin{aligned} u_1^{+'} = & \hat{C}_2 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_5 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_6 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_3 e^{R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_6 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_5 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\ & + \hat{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_5 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_6 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_6 \cos(R_2 x_1) - \\ -R_5 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \\ & + \left[ \frac{C_2^2}{C_1 S_2 - C_2^2} + 1 \right] \frac{1}{S_2} \hat{C}_1, \end{aligned}$$

$$\text{где } R_5 = \frac{Dh^2 (R_1 R_3 + R_2 R_4) + \delta_0 D_2 R_1}{2S_2}; \quad R_6 = \frac{Dh^2 (R_2 R_3 - R_1 R_4) + \delta_0 D_2 R_2}{2S_2}.$$

Чтобы проинтегрировать полученное выражение, воспользуемся следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\int e^{R_1 x_1} \cos(R_2 x_1) &= e^{R_1 x_1} (R_7 \cos(R_2 x_1) + R_8 \sin(R_2 x_1)), \\
\int e^{R_1 x_1} \sin(R_2 x_1) &= e^{R_1 x_1} (-R_8 \cos(R_2 x_1) + R_7 \sin(R_2 x_1)), \\
\int e^{-R_1 x_1} \cos(R_2 x_1) &= e^{-R_1 x_1} (-R_7 \cos(R_2 x_1) + R_8 \sin(R_2 x_1)), \\
\int e^{-R_1 x_1} \sin(R_2 x_1) &= -e^{-R_1 x_1} (R_8 \cos(R_2 x_1) + R_7 \sin(R_2 x_1)),
\end{aligned} \tag{2.49}$$

где  $R_7 = \frac{R_1}{R_1^2 + R_2^2}$ ;  $R_8 = \frac{R_2}{R_1^2 + R_2^2}$ .

В итоге получим:

$$\begin{aligned}
u_1^+ &= \hat{C}_2 e^{R_1 x_1} \left[ \begin{array}{l} -R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{array} \right] + \hat{C}_3 e^{R_1 x_1} \left[ \begin{array}{l} R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ + R_9 \sin(R_2 x_1) \end{array} \right] - \\
&- \hat{C}_4 e^{-R_1 x_1} \left[ \begin{array}{l} R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ + R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{array} \right] + \hat{C}_5 e^{-R_1 x_1} \left[ \begin{array}{l} -R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ + R_9 \sin(R_2 x_1) \end{array} \right] + \\
&+ \left[ \frac{C_2^2}{C_1 S_2 - C_2^2} + 1 \right] \frac{1}{S_2} \hat{C}_1 x_1 + \hat{C}_6,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

где  $R_9 = R_5 R_7 + R_6 R_8$ ;  $R_{10} = R_6 R_7 - R_5 R_8$ .

Таким образом, найдено общее упругое решение системы дифференциальных уравнений (2.6) при отрицательном значении дискриминанта (2.23):  $u_1^+$  – (2.50),  $u_2^+$  – (2.47) и  $\varphi$  – (2.48).

А для определения частного решения рассматриваемой задачи необходимо найти константы интегрирования  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_4, \hat{C}_5, \hat{C}_6$  из системы уравнений, удовлетворяющих граничным условиям (2.9), (2.12):

1)  $u_1^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0$ :

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1 r \ell + \hat{C}_2 e^{R_1 \ell} \left[ \begin{array}{l} -R_9 \cos(R_2 \ell) + \\ + R_{10} \sin(R_2 \ell) \end{array} \right] + \hat{C}_3 e^{R_1 \ell} \left[ \begin{array}{l} R_{10} \cos(R_2 \ell) + \\ + R_9 \sin(R_2 \ell) \end{array} \right] - \\
- \hat{C}_4 e^{-R_1 \ell} \left[ \begin{array}{l} R_9 \cos(R_2 \ell) + \\ + R_{10} \sin(R_2 \ell) \end{array} \right] + \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell} \left[ \begin{array}{l} -R_{10} \cos(R_2 \ell) + \\ + R_9 \sin(R_2 \ell) \end{array} \right] + \hat{C}_6 = 0,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

2)  $u_2^+ \Big|_{x_1=\ell} = 0$ :

$$\begin{aligned}
& -\hat{C}_1 \frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} + \hat{C}_2 e^{R_1 \ell} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 \ell) - \\ -R_2 \sin(R_2 \ell) \end{bmatrix} - \hat{C}_3 e^{R_1 \ell} \begin{bmatrix} R_2 \cos(R_2 \ell) + \\ +R_1 \sin(R_2 \ell) \end{bmatrix} - \\
& -\hat{C}_4 e^{-R_1 \ell} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 \ell) + \\ +R_2 \sin(R_2 \ell) \end{bmatrix} + \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 \ell) + \\ +R_1 \sin(R_2 \ell) \end{bmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{2.52}$$

3)  $\varphi|_{x_1=\ell} = 0$ :

$$\begin{aligned}
& -\hat{C}_2 e^{R_1 \ell} \begin{bmatrix} R_3 \cos(R_2 \ell) + \\ +R_4 \sin(R_2 \ell) \end{bmatrix} + \hat{C}_3 e^{R_1 \ell} \begin{bmatrix} -R_4 \cos(R_2 \ell) + \\ +R_3 \sin(R_2 \ell) \end{bmatrix} + \\
& + \hat{C}_4 e^{-R_1 \ell} \begin{bmatrix} -R_3 \cos(R_2 \ell) + \\ +R_4 \sin(R_2 \ell) \end{bmatrix} + \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 \ell) + \\ +R_3 \sin(R_2 \ell) \end{bmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

4)  $Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2$ :

$$\begin{aligned}
& \hat{C}_2 Lh[R_1^2 - R_2^2 + R_3] + \hat{C}_3 Lh[-2R_1 R_2 + R_4] + \hat{C}_4 Lh[R_1^2 - R_2^2 + R_3] + \\
& + \hat{C}_5 Lh[2R_1 R_2 - R_4] = -Q_2,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

5)  $M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2 a$ :

$$\hat{C}_1 \frac{Dh^2 r}{2} + \hat{C}_2 Dh^2 R_{11} + \hat{C}_3 Dh^2 R_{12} - \hat{C}_4 Dh^2 R_{11} + \hat{C}_5 Dh^2 R_{12} = -Q_2 a, \tag{2.55}$$

6)  $(Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=0} = 0$ :

$$\begin{aligned}
& \hat{C}_2 \{DhR_{13} + 0.5\delta_0 (R_1 D_2 - R_5 D_1)\} + \hat{C}_3 \{DhR_{14} + 0.5\delta_0 (R_6 D_1 - R_2 D_2)\} - \\
& - \hat{C}_4 \{DhR_{13} + 0.5\delta_0 (R_1 D_2 - R_5 D_1)\} + \hat{C}_5 \{DhR_{14} + 0.5\delta_0 (R_6 D_1 - R_2 D_2)\} + \\
& + \hat{C}_1 \left\{ Dhr + 0.5\delta_0 \left( rD_1 - \frac{C_2 D_2}{C_1 S_2 - C_2^2} \right) \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

где  $R_{11} = -\frac{R_5}{2} + \frac{h}{3}(R_1 R_3 + R_2 R_4)$ ;  $R_{12} = \frac{R_6}{2} + \frac{h}{3}(R_1 R_4 - R_2 R_3)$ ;

$R_{13} = -R_5 + \frac{h}{2}(R_1 R_3 + R_2 R_4)$ ;  $R_{14} = R_6 + \frac{h}{2}(R_1 R_4 - R_2 R_3)$ .

На рис. 2.7 построены графики горизонтальных перемещений  $u_1^+$  (2.50) полученного решения при толщине адгезионного слоя  $\delta_0 = 10^{-3}$  м. Графики соответствуют принятым обозначениям на рис. 2.2.

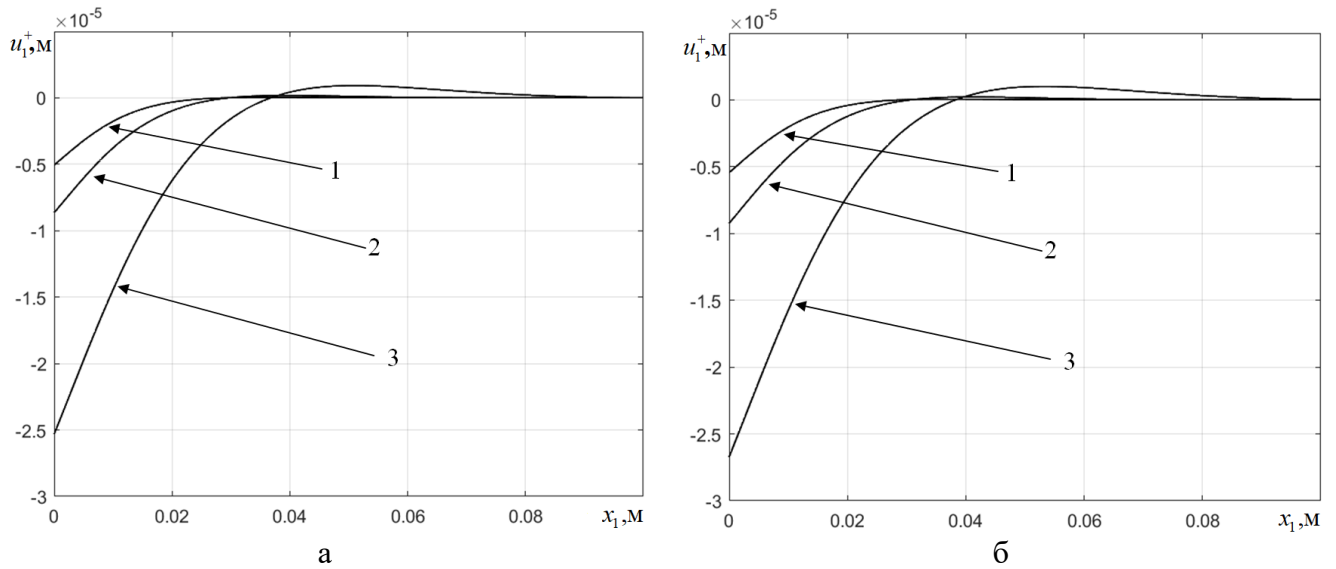


Рис. 2.7. Горизонтальные перемещения при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

Аналогично на рис. 2.8 построены вертикальные перемещения  $u_2^+$  (2.47), на рис. 2.9 – углы поворота  $\varphi$  (2.48), на рис. 2.10 – средние напряжения в адгезионном слое  $\bar{\sigma}_{11}$ , на рис. 2.11 – напряжения отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$ .

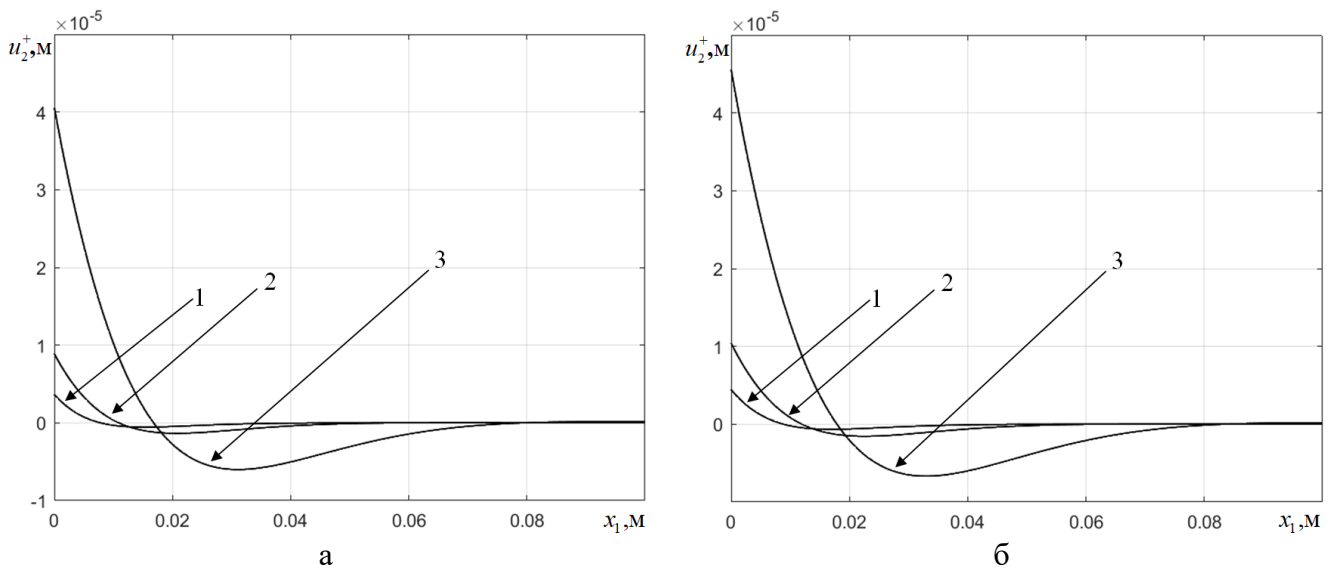


Рис. 2.8. Вертикальные перемещения при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

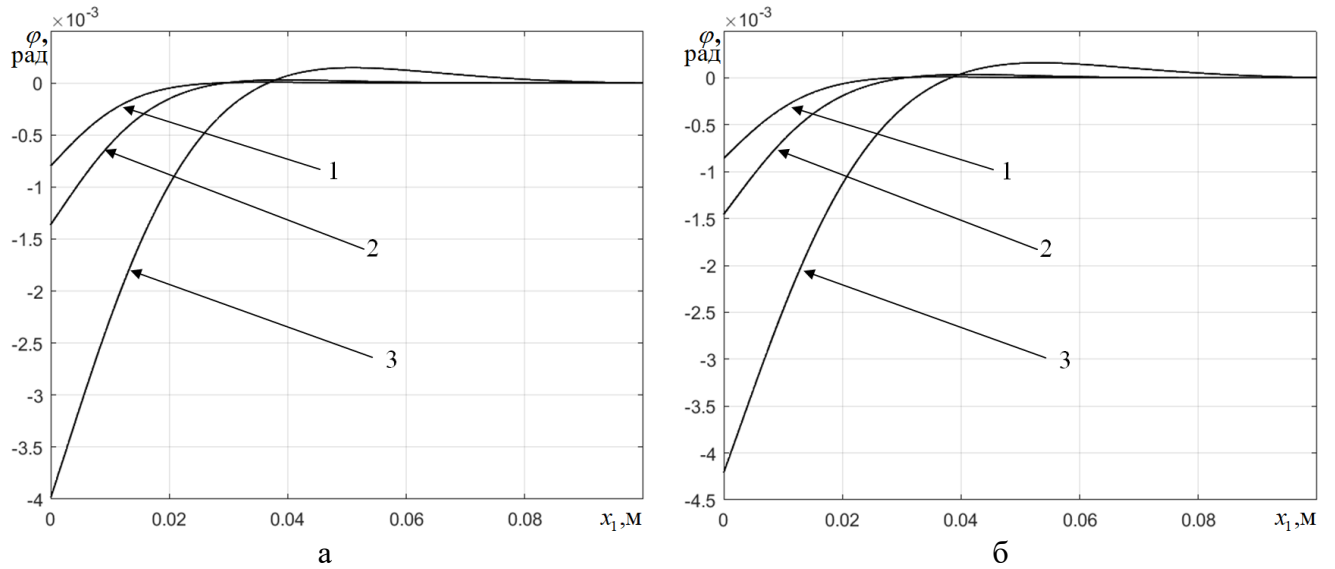


Рис. 2.9. Углы поворота при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

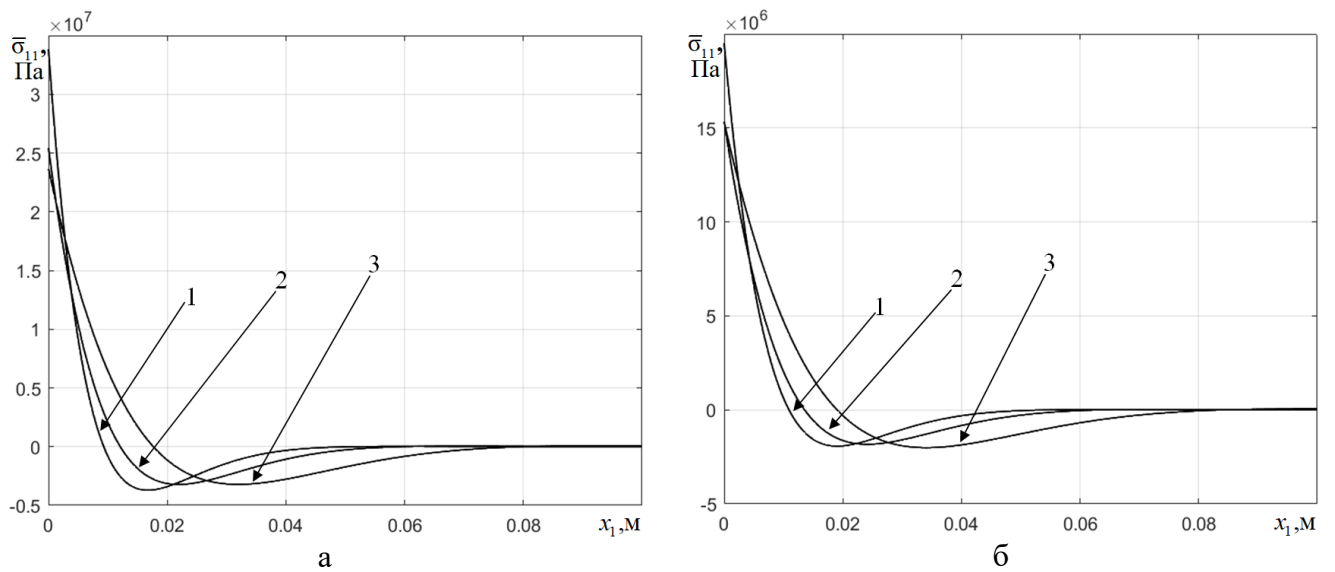


Рис. 2.10. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

Из рис. 2.7 – 2.11 делаем вывод аналогичный из рис. 2.2 – 2.6 о том, что вид плоского состояния значительней влияет на распределение напряжений слоя, чем на поле перемещений.

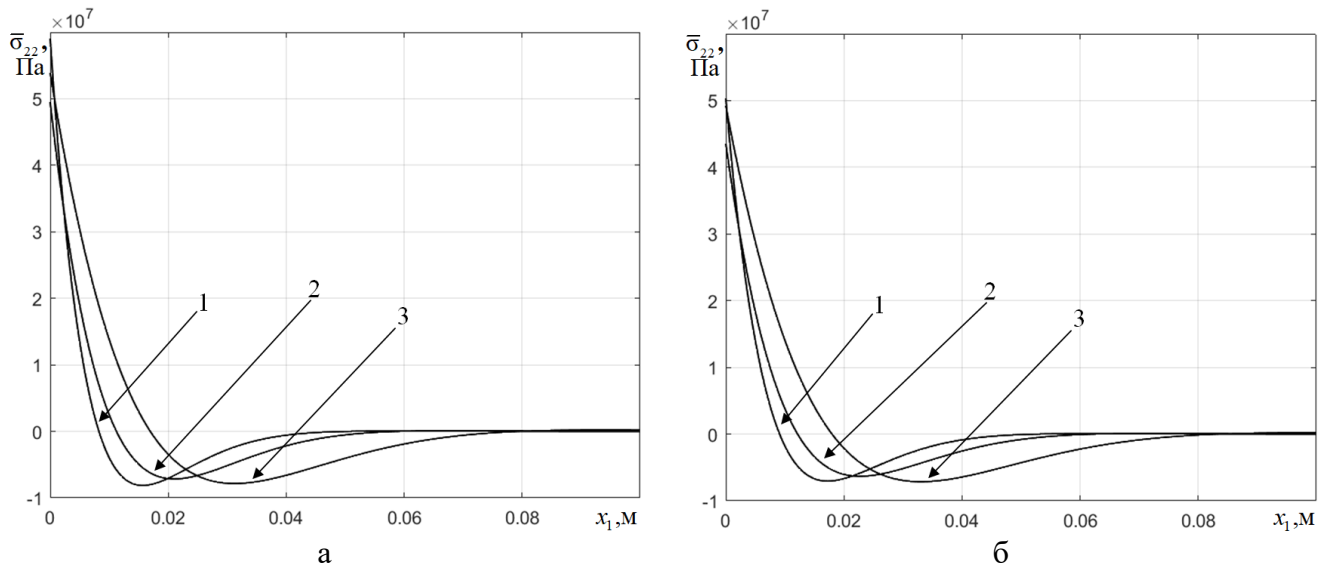


Рис. 2.11. Напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$  при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м: (а) пдс, (б) пнс; 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

### 2.3 Нахождение предела упругости деформирования слоя

Рассматриваемые в эксперименте [71] адгезивы (табл. 1.1) могут проявлять пластические свойства, что показано при численном решении задачи (глава 1). Поэтому вычислим, при каком значении нагрузки начнется образование области необратимых деформаций.

При решении задачи МКЭ было определено, что в плоском деформированном состоянии выполняется условие полной пластичности, два главных напряжения практически равны  $\bar{\sigma}_{11} \approx \bar{\sigma}_{33}$ , при этом их разница с напряжением отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$  составляет примерно предел текучести. Поэтому переход в состояние пластичности адгезива определяем в рамках критерия Треска – Сен-Венана [106–107]:

$$\sigma^{\max} - \sigma^{\min} = \sigma_0. \quad (2.57)$$

В силу антисимметрии касательных компонент тензора напряжений для рассматриваемого образца (рис. 1.1) тензор средних напряжений слоя будет иметь диагональный вид. Максимальным главным напряжением является напряжение отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$ . Условие текучести (2.57) в состоянии плоской деформации запишем в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11} = \sigma_0, \quad (2.58)$$

а в плоском напряженном состоянии получим  $\sigma^{\min} = \bar{\sigma}_{33} = 0$ :

$$\bar{\sigma}_{22} = \pm \sigma_0, \quad (2.59)$$

где «+» для области с растягивающими напряжениями, «-» – со сжимающими.

Для определения значения нагрузки  $Q_2$ , соответствующей началу образования пластических деформаций, к системе линейных уравнений (2.33) – (2.38) для решения, полученного при вещественных корнях характеристического уравнения (2.22), в плоском деформированном состоянии добавляется условие (2.58) в виде:

$$\tilde{C}_1 \left[ r(C_2 - D_1) - \frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} (C_1 - D_2) \right] + \tilde{C}_2 q_1 + \tilde{C}_3 q_1 + \tilde{C}_4 q_2 + \tilde{C}_5 q_2 = \sigma_0, \quad (2.60)$$

а в плоском напряженном состоянии условие (2.59):

$$\tilde{C}_1 \left[ r C_2 - \frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} C_1 \right] + \tilde{C}_2 q_3 + \tilde{C}_3 q_3 + \tilde{C}_4 q_4 + \tilde{C}_5 q_4 = \sigma_0, \quad (2.61)$$

где  $q_1 = g_1 \lambda_1 (C_2 - D_1) + C_1 - D_2$ ;  $q_2 = g_2 \lambda_3 (C_2 - D_1) + C_1 - D_2$ ;  $q_3 = g_1 \lambda_1 C_2 + C_1$ ;  
 $q_4 = g_2 \lambda_3 C_2 + C_1$ .

При комплексных корнях уравнения (2.22) к системе (2.51) – (2.56) аналогично добавляется в состоянии плоской деформации:

$$\hat{C}_1 \left[ r(C_2 - D_1) - \frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} (C_1 - D_2) \right] + \hat{C}_2 q_5 + \hat{C}_3 q_6 - \hat{C}_4 q_5 + \hat{C}_5 q_6 = \sigma_0, \quad (2.62)$$

в плоском напряженном состоянии:

$$\hat{C}_1 \left[ r C_2 - \frac{C_2}{C_1 S_2 - C_2^2} C_1 \right] + \hat{C}_2 q_7 + \hat{C}_3 q_8 - \hat{C}_4 q_7 + \hat{C}_5 q_8 = \sigma_0, \quad (2.63)$$

где  $q_5 = R_1 (C_1 - D_2) - R_5 (C_2 - D_1)$ ;  $q_6 = R_6 (C_2 - D_1) - R_2 (C_1 - D_2)$ ;  $q_7 = R_1 C_1 - R_5 C_2$ ;  
 $q_8 = R_6 C_2 - R_2 C_1$ .

Для нахождения постоянных интегрирования и силы  $P = Q_2 b$ , обеспечивающей переход адгезионного слоя в состояние пластического деформирования, необходимо решить системы из семи линейных уравнений.

Полученные значения силы для смол Araldite AV138, Araldite 2015 и Sikaforce 7752 представлены в таблице 2.1 в случае плоского деформируемого (а) и плоского напряженного (б) состояний.

Таблица 2.1 – Значения силы

$\delta_0$ (м)	$P$ (Н)					
	Araldite AV138		Araldite 2015		Sikaforce 7752	
	а) пдс	б) пнс	а) пдс	б) пнс	а) пдс	б) пнс
$10^{-3}$	1096.35	548.07	911.94	502.55	534.18	327.3
$10^{-4}$	344.44	182.75	299.64	171.08	184.64	115.2
$10^{-5}$	109.16	59.16	96.77	56.01	61.24	38.52
$10^{-6}$	-	-	30.87	17.95	19.77	12.48

Сравнивая результаты из табл. 2.1 при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м с экспериментальными значениями внешней силы при инициализации трещины в адгезиве  $P_{cr}$ , которые определены на стр. 19, в состоянии плоской деформации, видим, что в хрупком адгезионном слое Araldite AV138 пластическими деформациями можно пренебречь, ограничившись рассмотрением только упругой постановки задачи. Для адгезивов Araldite 2015 и Sikaforce 7752 с выраженными пластическими свойствами необходимо рассмотреть постановку задачи с учетом необратимых деформаций в адгезионном слое для получения результатов, соответствующих проведенному эксперименту.

#### 2.4 J-интеграл в рамках упругой постановки задачи

При упругой модели поведения адгезионного слоя формула для нахождения значений J-интеграла (1.28) преобразуется к виду:

$$J = \delta_0 \psi \Big|_{x_1=0} - \delta_0 \bar{q}^r \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}, \quad (2.64)$$

где  $\psi|_{x_1=0} = 0.5(\bar{\sigma}_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22}\bar{\varepsilon}_{22})|_{x_1=0}$ ;  $\bar{q}^r \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}|_{x_1=0} = 0.5\bar{\sigma}_{11}\bar{\varepsilon}_{11}|_{x_1=0}$ .

Следовательно, (2.64) запишем следующим образом:

$$J = 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{22}\bar{\varepsilon}_{22}|_{x_1=0}, \quad (2.65)$$

где компонента деформации  $\bar{\varepsilon}_{22}$  установлена (2.1).

Таким образом, J-интеграл определяется через среднее напряжение отрыва и вертикальную компоненту перемещения на торце слоя:

$$J = \bar{\sigma}_{22}u_2^+|_{x_1=0}. \quad (2.65)$$

Введем в рассмотрение аналитическое выражение J-интеграла, полученное для упругого поведения адгезива, модуль упругости которого значительно меньше соответствующего модуля сопрягаемых тел, при нулевом коэффициенте Пуассона [61, 87]:

$$J^a = \frac{12Q_2^2(1-\nu_1^2)}{hE_1} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \left(\frac{h}{a}\right)\right)^2. \quad (2.66)$$

По формуле (2.66) для Araldite AV138 получим  $J^a = 190.066$  Н/м, для Araldite 2015 –  $J^a = 353.424$  Н/м, а для Sikaforce 7752 –  $J^a = 1509.525$  Н/м.

В таблицы 2.2 – 2.4 поместим полученные по формуле (2.65) значения J-интеграла для смол Araldite AV138, Araldite 2015 и Sikaforce 7752 соответственно в плоском деформированном (пдс) и плоском напряженном (пнс) состояниях.

Таблица 2.2 – J-интеграл при упругой модели поведения Araldite AV138

J (Н/м)	$\delta_0$ (м)					
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
пдс	215.743	200.394	193.6831	191.251	190.443	190.184
пнс	223.887	203.349	194.7051	191.588	190.551	190.218

Таблица 2.3 – J-интеграл при упругой модели поведения Araldite 2015

J (Н/м)	$\delta_0$ (м)					
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
пдс	439.656	387.989	365.7652	357.5230	354.742	353.842
пнс	453.58	393.515	367.8172	358.2235	354.97	353.915

Таблица 2.4 – J-интеграл при упругой модели поведения Sikaforce 7752

J (Н/м)	$\delta_0$ (м)					
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$
пдс	2184.629	1790.055	1614.84	1545.661	1521.303	1513.276
пнс	2244.285	1815.863	1625.371	1549.503	1522.592	1513.692

Согласно данным из табл. 2.2 – 2.4 при уменьшении линейного параметра значения J-интеграла стремятся к значениям, полученным по формуле (2.66), независимо от вида плоской задачи.

Сравнивая значения J-интеграла при толщине слоя  $\delta_0 = 10^{-3}$  м с экспериментальными значениями (см. табл. 1.1), видим, что относительная погрешность для смол Araldite AV138 и Sikaforce 7752 примерно 8 %, а для Araldite 2015 всего 2 %.

## 2.5 Основные результаты и выводы 2 главы

1. С учетом теории пластин Миндлина – Рейсснера получены аналитические решения упругой постановки задачи для тонких (с комплексными корнями характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений) и предельно тонких (с вещественными корнями) адгезионных слоев.

2. Найдены значения сил, соответствующие началу образования пластических деформаций. Установлено, что для адгезивов с выраженными пластическими свойствами необходимо рассмотреть постановку задачи с учетом необратимых деформаций в адгезионном слое для получения результатов, соответствующих эксперименту по разрушению адгезионного слоя в образце.

3. Определены значения  $J$ -интеграла при упругой модели поведения адгезивов при малых значениях линейного параметра для разных типов плоской задачи.

## Глава 3

### Упругопластическое деформирование слоя в рамках гипотезы полной пластичности

#### 3.1 Определяющие соотношения упругопластического деформирования

В теле 1 поле перемещений определено формулой (2.3), распределение напряжений – (2.7), ненулевые компоненты тензора деформаций – (2.4).

На стадии упругого деформирования слоя его напряженное состояние находится по (2.8), а деформации – по (2.1).

Рассматривается участок с сопряжением консолей адгезионным слоем  $(0; \ell]$ . На нем система дифференциальных уравнений имеет вид (2.6), а обобщенные силы и момент определены (2.13).

Система (2.6) имеет граничные условия (2.9), (2.12), условия сопряжения в точке  $x_1 = 0$  (2.11) и в точке  $x_1 = \ell_p$ :

$$\begin{aligned} u_1^+ \Big|_{x_1=\ell_p-0} &= u_1^+ \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \quad u_2^+ \Big|_{x_1=\ell_p-0} = u_2^+ \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \\ \varphi \Big|_{x_1=\ell_p-0} &= \varphi \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \\ (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=\ell_p-0} &= (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \\ M_{11} \Big|_{x_1=\ell_p-0} &= M_{11} \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \quad Q_{12} \Big|_{x_1=\ell_p-0} = Q_{12} \Big|_{x_1=\ell_p+0}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

#### 3.2 Решение задачи в состоянии плоской деформации

На участке пластического деформирования слоя 3 при условии текучести (2.58) предполагаем линейную связь между объемной деформацией слоя и гидростатическим давлением:

$$\bar{\sigma}_{11} = K\bar{\theta} - \frac{1}{3}\sigma_0, \quad \bar{\sigma}_{22} = K\bar{\theta} + \frac{2}{3}\sigma_0, \quad (3.2)$$

где  $\bar{\theta} = u_1^{+'} + \frac{2u_2^+}{\delta_0}$ .

Система (2.6) для участка  $(0; \ell_p]$  примет следующий вид:

$$\begin{cases} Dh^2\left(\frac{1}{2}u_1^{+''} - \frac{h}{3}\varphi''\right) - Lh(u_2^{+'} - \varphi) = 0; \\ Dh\left(u_1^{+''} - \frac{h}{2}\varphi''\right) + \frac{\delta_0}{2}\left(Ku_1^{+''} + \frac{2K}{\delta_0}u_2^{+'}\right) = 0; \\ Lh(u_2^{+''} - \varphi') = Ku_1^{+'} + \frac{2K}{\delta_0}u_2^{+'} + \frac{2}{3}\sigma_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Проинтегрировав второе уравнение системы (3.3), получим:

$$\left(Dh + \frac{\delta_0 K}{2}\right)u_1^{+'} - \frac{Dh^2}{2}\varphi' + Ku_2^{+'} = \tilde{C}_7. \quad (3.4)$$

Преобразуем третье уравнение системы (3.3):

$$u_1^{+'} = \frac{Lh}{K}(u_2^{+''} - \varphi') - \frac{2}{\delta_0}u_2^{+'} - \frac{2}{3K}\sigma_0. \quad (3.5)$$

Подставим получившееся выражение (3.5) в формулу (3.4):

$$LhSu_2^{+''} - \left(LhS + \frac{Dh^2}{2}\right)\varphi' - \frac{2Dh}{\delta_0}u_2^{+'} = \tilde{C}_7 + \frac{2S}{3}\sigma_0, \quad (3.6)$$

где  $S = \frac{Dh}{K} + \frac{\delta_0}{2}$ .

Преобразовав второе уравнение из системы (3.3), получим:

$$u_1^{+''} = \frac{Dh^2}{2KS}\varphi'' - \frac{1}{S}u_2^{+'}. \quad (3.7)$$

Подставим (3.7) в первое уравнение системы (3.3), придем к следующему выражению:

$$\left(\frac{D^2h^3}{4KS} - \frac{Dh^2}{3}\right)\varphi'' - \left(\frac{Dh}{2S} + L\right)u_2^{+'} + L\varphi = 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, (3.6) и (3.8) образуют систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно двух неизвестных функций  $u_2^{+'}$  и  $\varphi$ :

$$\begin{cases} LhSu_2^{+''} - \left(LhS + \frac{Dh^2}{2}\right)\varphi' - \frac{2Dh}{\delta_0}u_2^{+'} = \tilde{C}_7 + \frac{2S}{3}\sigma_0; \\ \left(\frac{D^2h^3}{4KS} - \frac{Dh^2}{3}\right)\varphi'' - \left(\frac{Dh}{2S} + L\right)u_2^{+'} + L\varphi = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Понизим порядок системы (3.9):

$$\begin{cases} u_2^+ = y; \\ \varphi' = t; \\ y' = \frac{V}{2LS}t + \frac{2D}{LS\delta_0}u_2^+ + \frac{1}{LhS}\left(\tilde{C}_7 + \frac{2S}{3}\sigma_0\right); \\ t' = 12LSS_1\varphi - 6VS_1y, \end{cases} \quad (3.10)$$

где  $V = 2LS + Dh$ ;  $S_1 = \frac{1}{Dh^2\left(\frac{Dh}{K} + 2\delta_0\right)}$ .

В матричном виде система (3.10) запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2D}{LS\delta_0} & 0 & 0 & \frac{V}{2LS} \\ 0 & 12LSS_1 & -6VS_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{LhS}\left(\tilde{C}_7 + \frac{2S}{3}\sigma_0\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Составим характеристическое уравнение однородной системы:

$$\begin{vmatrix} -\mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 1 \\ \frac{2D}{LS\delta_0} & 0 & -\mu & \frac{V}{2LS} \\ 0 & 12LSS_1 & -6VS_1 & -\mu \end{vmatrix} = 0, \quad (3.12)$$

$$\mu^4 + \frac{12L\delta_0 - 2Dh}{Lh\delta_0\left(\frac{Dh}{K} + 2\delta_0\right)}\mu^2 + \frac{24}{h^2\delta_0\left(\frac{Dh}{K} + 2\delta_0\right)} = 0.$$

Дискриминант характеристического уравнения (3.12) имеет следующий вид:

$$\Delta = 4D^2h^4(1 - \delta_0T), \quad (3.13)$$

где  $T = \frac{12L(2LS + Dh)}{D^2h^2}$ .

На рис. 3.1 показана зависимость дискриминанта (3.13) от относительной толщины слоя 3 для образца с принятыми ранее характеристиками. В качестве

адгезива берутся Araldite AV138 – график 1, Araldite 2015 – график 2 и Sikaforce 7752 – 3.

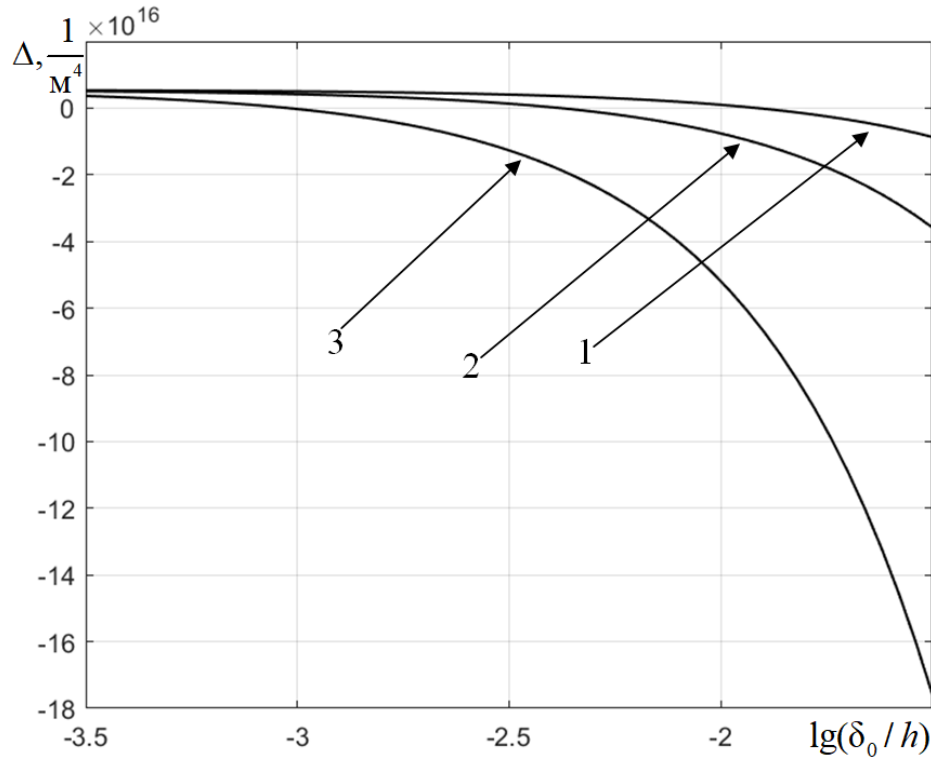


Рис. 3.1. Зависимость дискриминанта (3.13) от относительной толщины слоя: 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

Из рис. 3.1 видим, что значения дискриминанта (3.13) принимают как положительные, так и отрицательные значения. Сначала найдем решение в случае положительного дискриминанта (3.13). Запишем однородную часть системы (3.11) в виде:

$$\begin{pmatrix} -\mu_i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mu_i & 0 & 1 \\ \frac{2D}{LS\delta_0} & 0 & -\mu_i & \frac{V}{2LS} \\ 0 & 12LSS_1 & -6VS_1 & -\mu_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0, \quad (3.14)$$

$$\text{где } \mu_1 = \sqrt{\frac{DhS_1(Dh - 6L\delta_0 + \sqrt{\Delta}/(2h))}{L\delta_0}}, \quad \mu_3 = \sqrt{\frac{DhS_1(Dh - 6L\delta_0 - \sqrt{\Delta}/(2h))}{L\delta_0}},$$

$\mu_2 = -\mu_1$ ,  $\mu_4 = -\mu_3$  – корни характеристического уравнения (3.12).

$$\begin{cases} -\mu_i u_2^+ + y = 0; \\ -\mu_i \varphi + t = 0; \\ \frac{2D}{LS\delta_0} u_2^+ - \mu_i y + \frac{V}{2LS} t = 0; \\ 12LSS_1 \varphi - 6VS_1 y - \mu_i t = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \mu_i u_2^+; \\ t = \mu_i \varphi; \\ \left( \frac{2D}{LS\delta_0} - \mu_i^2 \right) u_2^+ + \frac{V}{2LS} \mu_i \varphi = 0; \\ 12LSS_1 \varphi - 6VS_1 y - \mu_i t = 0. \end{cases}$$

Получим однородное решение в следующем виде:

$$\varphi = \frac{2LS}{V\mu_i} \left( \mu_i^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) u_2^+, \quad (3.15)$$

$$u_2^+ = \tilde{C}_8 e^{\mu_1 x_1} + \tilde{C}_9 e^{-\mu_1 x_1} + \tilde{C}_{10} e^{\mu_3 x_1} + \tilde{C}_{11} e^{-\mu_3 x_1}. \quad (3.16)$$

Найдем частное решение:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2D}{LS\delta_0} & 0 & 0 & \frac{V}{2LS} \\ 0 & 12LSS_1 & -6VS_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{LhS} \left( \tilde{C}_7 + \frac{2S}{3} \sigma_0 \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} u_2^{+'} = B_1; \\ \varphi' = 0; \\ y' = \frac{1}{LhS} \left( \tilde{C}_7 + \frac{2S}{3} \sigma_0 \right); \\ t' = -6VS_1 B_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2^+ = B_1 x_1 + B_2; \\ \varphi = B_3; \\ y = \frac{1}{LhS} \left( \tilde{C}_7 + \frac{2S}{3} \sigma_0 \right) x_1 + B_4; \\ t = -6VS_1 B_1 x_1 + B_5. \end{cases} \quad (3.18)$$

Подставив (3.18) в исходную систему (3.9), получим одну ненулевую константу:

$$B_2 = -\frac{\delta_0}{2Dh} \left( \tilde{C}_7 + \frac{2S}{3} \sigma_0 \right). \quad (3.19)$$

Объединим полученные однородное (3.15) – (3.16) и частное (3.18) – (3.19) решения:

$$u_2^+ = \tilde{C}_8 e^{\mu_1 x_1} + \tilde{C}_9 e^{-\mu_1 x_1} + \tilde{C}_{10} e^{\mu_3 x_1} + \tilde{C}_{11} e^{-\mu_3 x_1} - \frac{\delta_0}{2Dh} \left( \tilde{C}_7 + \frac{2}{3} \sigma_0 S \right), \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{2LS}{V\mu_1} \left( \mu_1^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \tilde{C}_8 e^{\mu_1 x_1} - \frac{2LS}{V\mu_1} \left( \mu_1^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \tilde{C}_9 e^{-\mu_1 x_1} + \\ & + \frac{2LS}{V\mu_3} \left( \mu_3^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \tilde{C}_{10} e^{\mu_3 x_1} - \frac{2LS}{V\mu_3} \left( \mu_3^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \tilde{C}_{11} e^{-\mu_3 x_1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Горизонтальное перемещение найдем, проинтегрировав формулу (3.5), предварительно подставив в нее (3.20) и первую производную (3.21):

$$\begin{aligned} u_1^+ = & \left( \frac{Lh}{K} \left( \mu_1 - \frac{2LS}{V\mu_1} \left( \mu_1^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \right) - \frac{2}{\delta_0 \mu_1} \right) \tilde{C}_8 e^{\mu_1 x_1} - \\ & - \left( \frac{Lh}{K} \left( \mu_1 - \frac{2LS}{V\mu_1} \left( \mu_1^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \right) - \frac{2}{\delta_0 \mu_1} \right) \tilde{C}_9 e^{-\mu_1 x_1} + \\ & + \left( \frac{Lh}{K} \left( \mu_3 - \frac{2LS}{V\mu_3} \left( \mu_3^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \right) - \frac{2}{\delta_0 \mu_3} \right) \tilde{C}_{10} e^{\mu_3 x_1} - \\ & - \left( \frac{Lh}{K} \left( \mu_3 - \frac{2LS}{V\mu_3} \left( \mu_3^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \right) - \frac{2}{\delta_0 \mu_3} \right) \tilde{C}_{11} e^{-\mu_3 x_1} + \\ & + \left( \frac{1}{Dh} \left( \tilde{C}_7 + \frac{2}{3} \sigma_0 S \right) - \frac{2}{3K} \sigma_0 \right) x_1 + \tilde{C}_{12}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Таким образом, найдено общее решение системы дифференциальных уравнений (3.3) на пластическом участке для предельно тонких слоев, при которых характеристическое уравнение (3.12) имеет вещественные корни:  $u_1^+$  – (3.22),  $u_2^+$  – (3.20) и  $\varphi$  – (3.21).

Решение на упругом участке  $(\ell_p; \ell]$  (2.30) – (2.32) было найдено в главе 2. Но стоит отметить, что при относительно больших значениях  $\ell/\delta_0 \rightarrow \infty$  разрешающая система линейных уравнений для определения констант интегрирования плохо обусловлена, поэтому примем следующее допущение:  $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_4 = \tilde{C}_6 = 0$ . При этом граничное условие (2.9) и второе условие из (2.12) выполняются тождественно. Упругое решение примет следующий вид:

$$u_1^+ = -g_1 \tilde{C}_3 e^{-\lambda_1 x_1} - g_2 \tilde{C}_5 e^{-\lambda_3 x_1}, \quad (3.23)$$

$$u_2^+ = \tilde{C}_3 e^{-\lambda_1 x_1} + \tilde{C}_5 e^{-\lambda_3 x_1}, \quad (3.24)$$

$$\varphi = -g_3 \tilde{C}_3 e^{-\lambda_4 x_1} - g_4 \tilde{C}_5 e^{-\lambda_3 x_1}. \quad (3.25)$$

Чтобы найти частное решение упругопластической задачи, необходимо найти восемь констант интегрирования, удовлетворяющих первому и третьему граничным условиям из (2.12) и условиям сопряжения (3.1). Заметим, что длина пластического участка  $\ell_p$  неизвестна, а нагрузка  $Q_2$  заданная величина, поэтому система для определения констант интегрирования нелинейная. Чтобы этого избежать, станем считать  $\ell_p$  известным значением, а  $Q_2$  будет неизвестной девятой величиной. Таким образом, образуется система из девяти линейных уравнений, которые состоят из упомянутых ранее условий (2.12), (3.1) и условия Треска – Сен-Венана в виде (2.58).

Для достижения необходимого значения нагрузки  $Q_2$  подбираются длины  $\ell_p^1$  и  $\ell_p^2$ , при которых  $Q_2^1 < Q_2 < Q_2^2$ , и, используя метод дихотомии с заданной точностью 0.01, определяется длина пластического участка  $\ell_p$ .

Система линейных уравнений выглядит следующим образом:

$$1) M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2 a:$$

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_8 Dh^2 \mu_1 \left( \frac{g_7}{2} - \frac{hg_9}{3} \right) + \tilde{C}_9 Dh^2 \mu_1 \left( \frac{g_7}{2} - \frac{hg_9}{3} \right) + \tilde{C}_{10} Dh^2 \mu_3 \left( \frac{g_8}{2} - \frac{hg_{10}}{3} \right) + \\ & + \tilde{C}_{11} Dh^2 \mu_3 \left( \frac{g_8}{2} - \frac{hg_{10}}{3} \right) + \tilde{C}_7 \frac{h}{2} + Q_2 a = -\frac{h\delta_0 \sigma_0}{6}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$2) Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2:$$

$$\tilde{C}_8 (\mu_1 - g_9) - \tilde{C}_9 (\mu_1 - g_9) + \tilde{C}_{10} (\mu_3 - g_{10}) - \tilde{C}_{11} (\mu_3 - g_{10}) + Q_2 / Lh = 0, \quad (3.27)$$

$$3) u_1^+|_{x_1=\ell_p-0} = u_1^+|_{x_1=\ell_p+0}:$$

$$\begin{aligned} & \frac{\ell_p}{Dh} \tilde{C}_7 + \tilde{C}_8 g_7 e^{\mu_1 \ell_p} - \tilde{C}_9 g_7 e^{-\mu_1 \ell_p} + \tilde{C}_{10} g_8 e^{\mu_3 \ell_p} - \tilde{C}_{11} g_8 e^{-\mu_3 \ell_p} + \tilde{C}_3 g_1 e^{-\lambda_4 \ell_p} + \tilde{C}_5 g_2 e^{-\lambda_3 \ell_p} + \\ & + \tilde{C}_{12} = -\frac{\delta_0 \sigma_0}{3Dh} \ell_p, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$4) u_2^+|_{x_1=\ell_p-0} = u_2^+|_{x_1=\ell_p+0}:$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\delta_0}{2Dh}\tilde{C}_7 + \tilde{C}_8 e^{\mu_4 \ell_p} + \tilde{C}_9 e^{-\mu_4 \ell_p} + \tilde{C}_{10} e^{\mu_3 \ell_p} + \tilde{C}_{11} e^{-\mu_3 \ell_p} - \tilde{C}_3 g_1 e^{-\lambda_1 \ell_p} - \tilde{C}_5 g_2 e^{-\lambda_3 \ell_p} = \\
& = \frac{S\delta_0\sigma_0}{3Dh},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$5) \varphi|_{x_1=\ell_p-0} = \varphi|_{x_1=\ell_p+0} :$$

$$\tilde{C}_8 g_9 e^{\mu_4 \ell_p} - \tilde{C}_9 g_9 e^{-\mu_4 \ell_p} + \tilde{C}_{10} g_{10} e^{\mu_3 \ell_p} - \tilde{C}_{11} g_{10} e^{-\mu_3 \ell_p} + \tilde{C}_3 g_3 e^{-\lambda_1 \ell_p} + \tilde{C}_5 g_4 e^{-\lambda_3 \ell_p} = 0, \tag{3.30}$$

$$6) (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p+0} :$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{C}_3 \left[ Dh\lambda_1 \left( g_1 - \frac{hg_3}{2} \right) + \frac{\delta_0}{2} (D_1\lambda_1 g_1 + D_2) \right] e^{-\lambda_1 \ell_p} + \tilde{C}_7 + \tilde{C}_8 g_{11} e^{\mu_4 \ell_p} + \tilde{C}_9 g_{11} e^{-\mu_4 \ell_p} - \\
& -\tilde{C}_5 \left[ Dh\lambda_3 \left( g_2 - \frac{hg_4}{2} \right) + \frac{\delta_0}{2} (D_1\lambda_3 g_2 + D_2) \right] e^{-\lambda_3 \ell_p} + \tilde{C}_{10} g_{12} e^{\mu_3 \ell_p} + \tilde{C}_{11} g_{12} e^{-\mu_3 \ell_p} = \\
& = \frac{\delta_0\sigma_0}{6},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$7) M_{11}|_{x_1=\ell_p-0} = M_{11}|_{x_1=\ell_p+0} :$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{C}_8 \mu_1 \left( \frac{g_7}{2} - \frac{hg_9}{3} \right) e^{\mu_4 \ell_p} + \tilde{C}_9 \mu_1 \left( \frac{g_7}{2} - \frac{hg_9}{3} \right) e^{-\mu_4 \ell_p} + \tilde{C}_{10} \mu_3 \left( \frac{g_8}{2} - \frac{hg_{10}}{3} \right) e^{\mu_3 \ell_p} + \\
& + \tilde{C}_{11} \mu_3 \left( \frac{g_8}{2} - \frac{hg_{10}}{3} \right) e^{-\mu_3 \ell_p} + \tilde{C}_7 \frac{h}{2Dh^2} - \tilde{C}_3 \lambda_1 \left( \frac{g_1}{2} - \frac{hg_3}{3} \right) e^{-\lambda_1 \ell_p} - \\
& -\tilde{C}_5 \lambda_3 \left( \frac{g_2}{2} - \frac{hg_4}{3} \right) e^{-\lambda_3 \ell_p} = -\frac{h\delta_0\sigma_0}{6Dh^2},
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$8) Q_{12}|_{x_1=\ell_p-0} = Q_{12}|_{x_1=\ell_p+0} :$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{C}_8 (\mu_1 - g_9) e^{\mu_4 \ell_p} - \tilde{C}_9 (\mu_1 - g_9) e^{-\mu_4 \ell_p} + \tilde{C}_{10} (\mu_3 - g_{10}) e^{\mu_3 \ell_p} - \tilde{C}_{11} (\mu_3 - g_{10}) e^{-\mu_3 \ell_p} + \\
& + \tilde{C}_3 (\lambda_1 - g_3) e^{-\lambda_1 \ell_p} + \tilde{C}_5 (\lambda_3 - g_4) e^{-\lambda_3 \ell_p} = 0,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$9) (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p+0} = \sigma_0 :$$

$$\tilde{C}_3 q_1 e^{-\lambda_1 \ell_p} + \tilde{C}_5 q_2 e^{-\lambda_3 \ell_p} = \sigma_0, \tag{3.34}$$

$$\text{где } g_7 = \frac{Lh}{K} \left( \mu_1 - \frac{2LS}{V\mu_1} \left( \mu_1^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \right) - \frac{2}{\delta_0\mu_1}; \quad g_8 = \frac{Lh}{K} \left( \mu_3 - \frac{2LS}{V\mu_3} \left( \mu_3^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right) \right) - \frac{2}{\delta_0\mu_3};$$

$$g_9 = \frac{2LS}{V\mu_1} \left( \mu_1^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right); \quad g_{10} = \frac{2LS}{V\mu_3} \left( \mu_3^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right);$$

$$g_{11} = Dh\mu_1 \left( g_7 - \frac{hg_9}{2} \right) + K \left( 1 + \frac{\delta_0 \mu_1 g_7}{2} \right); \quad g_{12} = Dh\mu_3 \left( g_8 - \frac{hg_{10}}{2} \right) + K \left( 1 + \frac{\delta_0 \mu_3 g_8}{2} \right).$$

Сравним полученные упругое (график 1) и упругопластическое (график 2) решения при вещественных корнях характеристических уравнений (2.22), (3.12). На рис. 3.2 построены горизонтальные перемещения  $u_1^+$  1 – (2.32) и 2 – (3.22), (3.23) при толщине адгезионного слоя  $\delta_0 = 10^{-5}$  м под действием экспериментальной критической силы (см. стр. 19). График (а) относится к адгезиву Araldite AV138 с длиной области необратимых деформаций  $\ell_p = 0.00125888$  м, (б) – Araldite 2015 с  $\ell_p = 0.002583338$  м, (в) – Sikaforce 7752 с  $\ell_p = 0.005023956$  м. Пунктирной линией здесь и далее обозначается пластический участок.

Аналогично на рис. 3.3 построены вертикальные перемещения  $u_2^+$  1 – (2.30) и 2 – (3.20), (3.24), на рис. 3.4 – углы поворота  $\varphi$  1 – (2.31) и 2 – (3.21), (3.25), на рис. 3.5 – средние напряжения в адгезионном слое  $\bar{\sigma}_{11}$ , на рис. 3.6 – напряжения отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$ .

Из рис. 3.2 – 3.6 видим, что учет пластических свойств адгезивов значительно влияет на напряженное состояние слоя на левом торце в силу того, что на распределения напряжений накладывается ограничение в виде условия текучести (2.58).

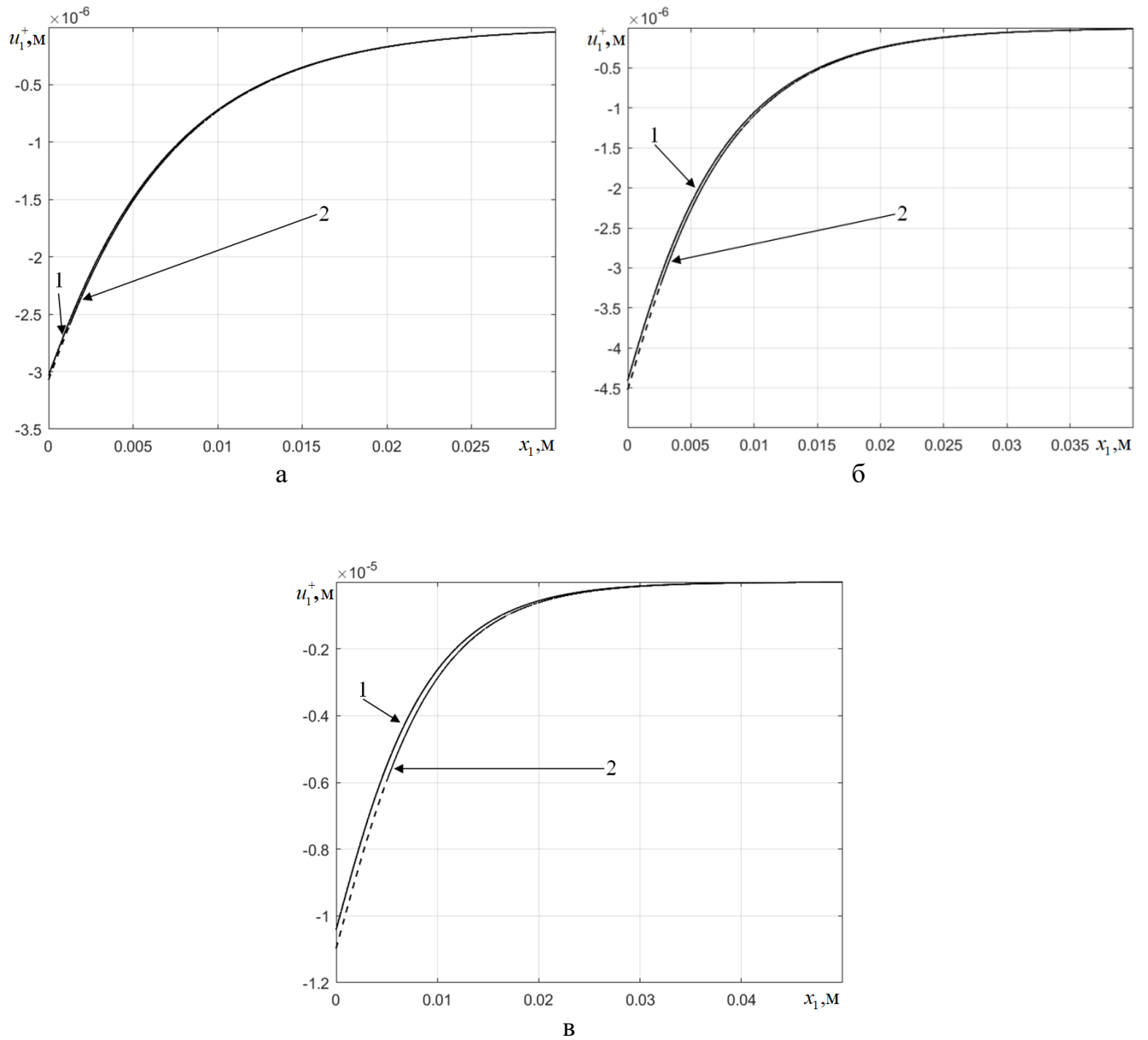


Рис. 3.2. Горизонтальные перемещения при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) Araldite AV138, (б) Araldite 2015, (в) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

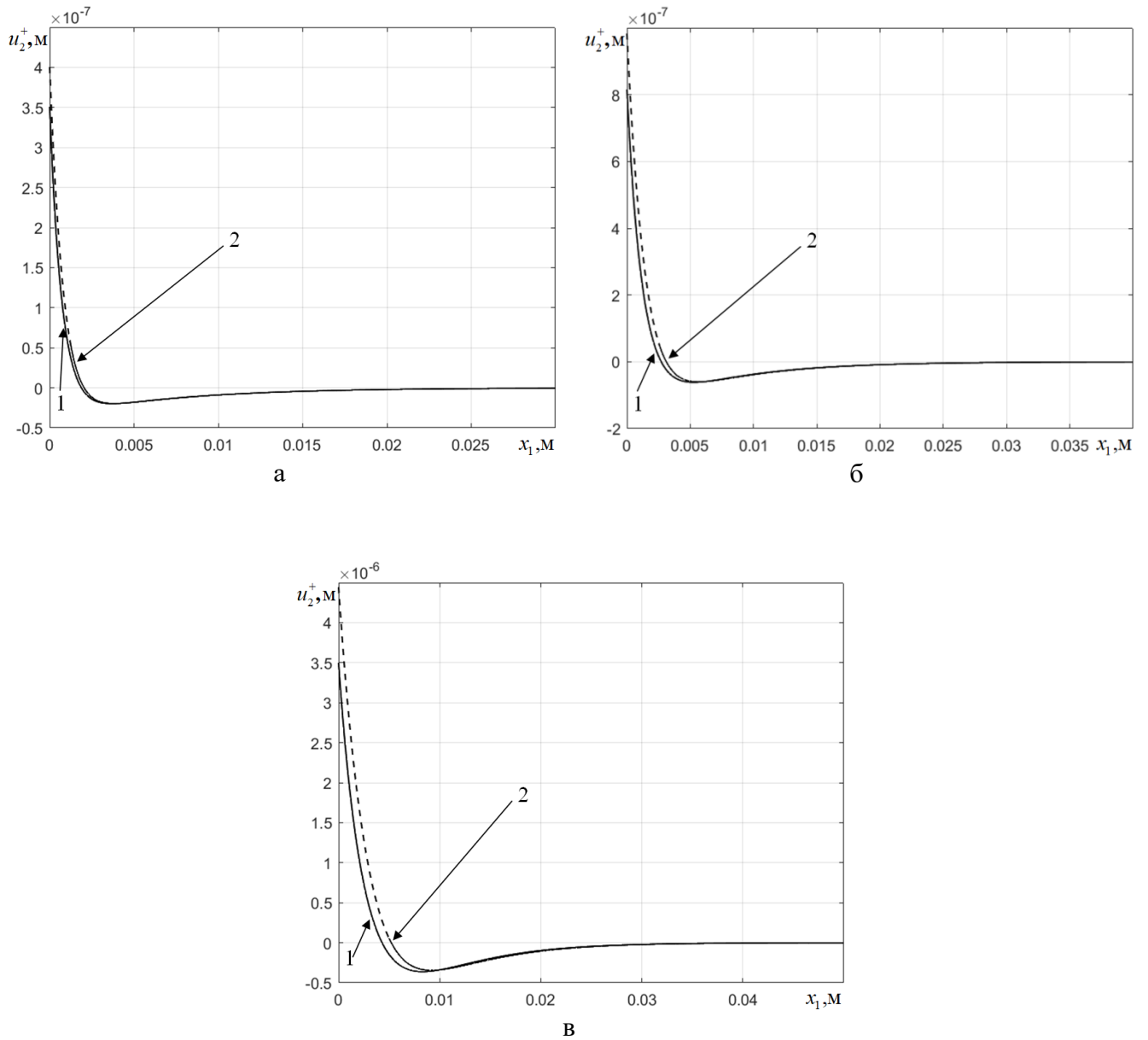


Рис. 3.3. Вертикальные перемещения при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) Araldite AV138, (б) Araldite 2015, (в) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

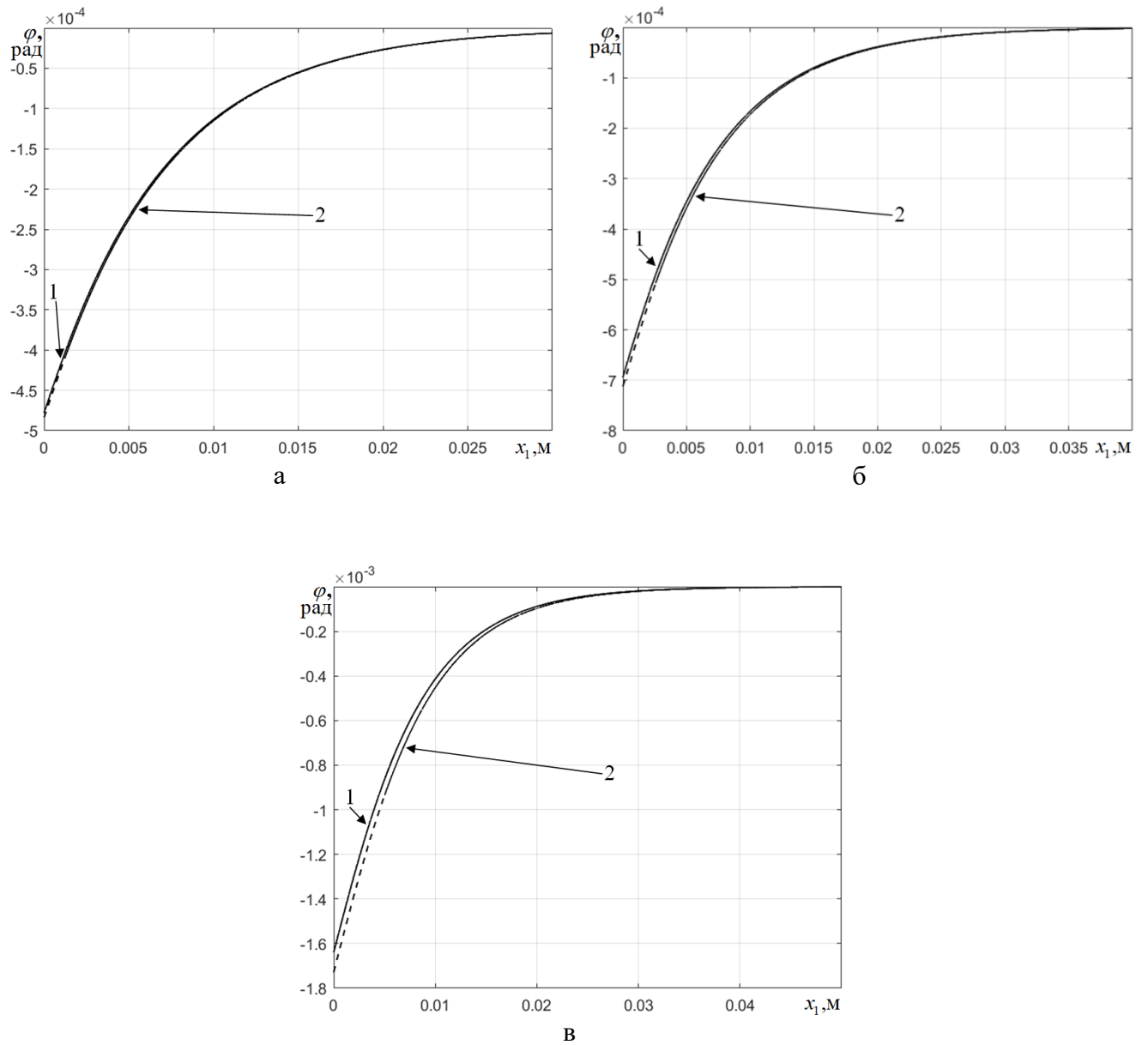


Рис. 3.4. Углы поворота при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м:  
 (а) Araldite AV138, (б) Araldite 2015, (в) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

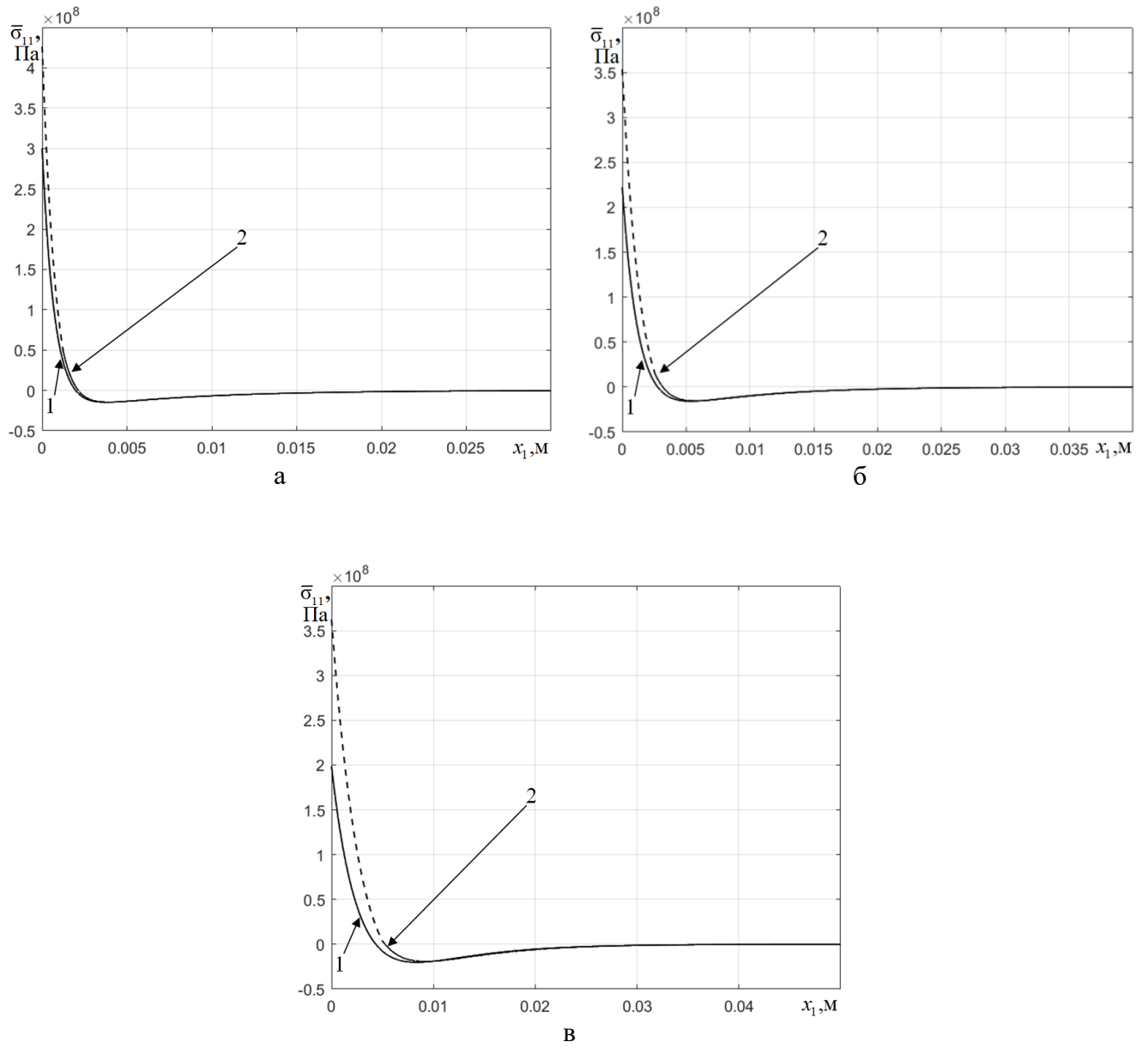


Рис. 3.5. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м:  
 (а) Araldite AV138, (б) Araldite 2015, (в) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

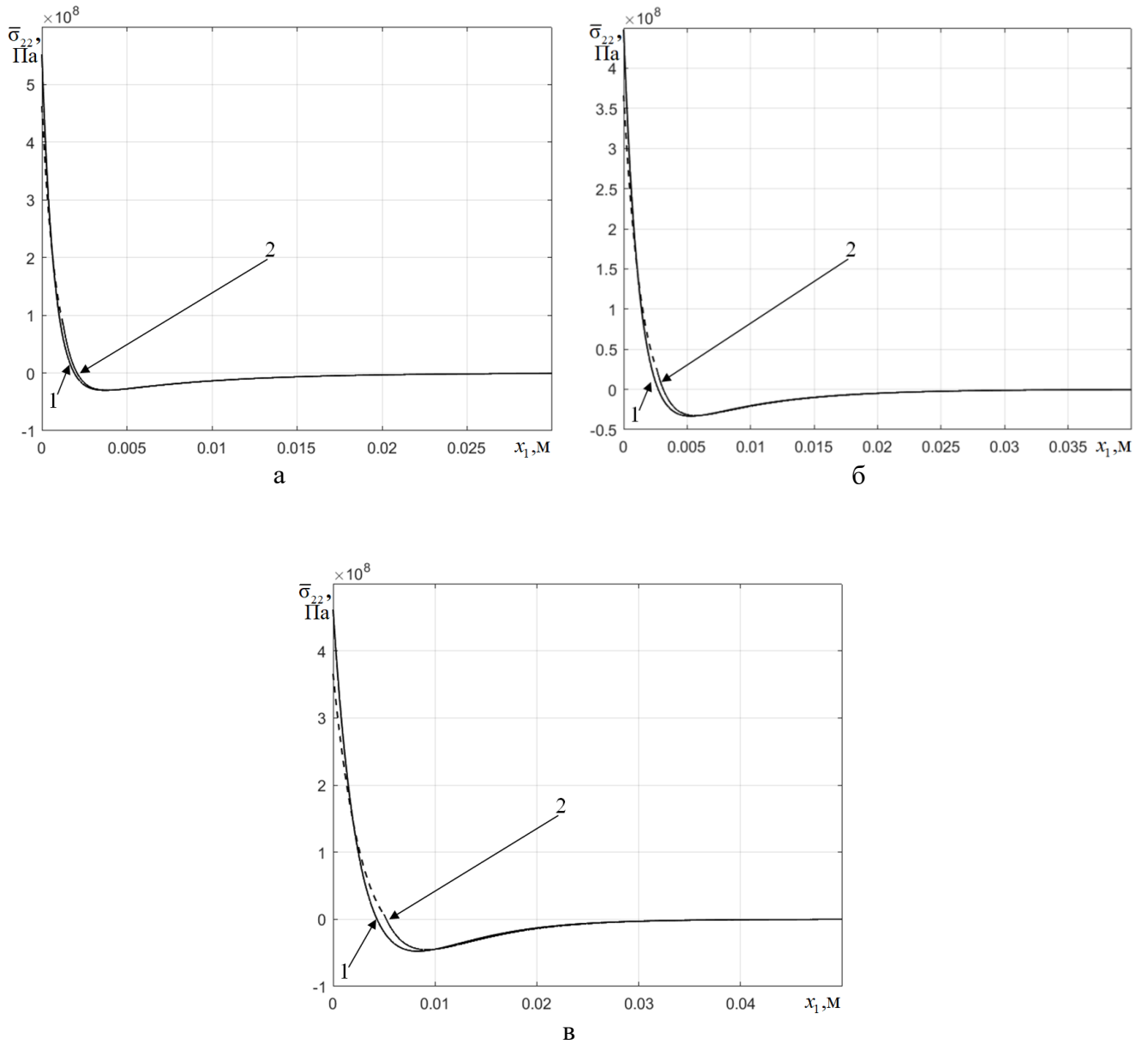


Рис. 3.6. Напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$  при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м:  
 (а) Araldite AV138, (б) Araldite 2015, (в) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

При отрицательных значениях дискриминанта (3.13) получим комплексные корни характеристического уравнения (3.12) в виде:

$$\hat{\mu}_1 = F_1 + iF_2, \quad \hat{\mu}_2 = F_1 - iF_2, \quad \hat{\mu}_3 = -F_1 + iF_2, \quad \hat{\mu}_4 = -F_1 - iF_2, \quad (3.35)$$

$$\text{где } F_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} + \xi}{2}}; \quad F_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} - \xi}{2}}; \quad \xi = \frac{Dh - 6L\delta_0}{Lh\delta_0 \left( \frac{Dh}{K} + 2\delta_0 \right)};$$

$$\zeta = \frac{D\sqrt{\delta_0 T - 1}}{L\delta_0 \left( \frac{Dh}{K} + 2\delta_0 \right)}.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям. Запишем однородную часть системы (3.11):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2D}{LS\delta_0} & 0 & 0 & \frac{V}{2LS} \\ 0 & 12LSS_1 & -6VS_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{2LS}{V\hat{\mu}_i} \left( \hat{\mu}_i^2 - \frac{2D}{L\delta_0 S} \right) u_2^+.$$

Рассмотрим первый корень (3.35):

$$u_2^+ = e^{F_1 x_1} \left[ F_1 \cos(F_2 x_1) - F_2 \sin(F_2 x_1) + i(F_2 \cos(F_2 x_1) + F_1 \sin(F_2 x_1)) \right],$$

$$\varphi = e^{F_1 x_1} \left[ (F_3 \cos(F_2 x_1) - F_4 \sin(F_2 x_1)) + i(F_4 \cos(F_2 x_1) + F_3 \sin(F_2 x_1)) \right],$$

$$\text{где } F_3 = \frac{2LS}{V} \left( F_1^2 - F_2^2 - \frac{2D}{LS\delta_0} \right); \quad F_4 = \frac{4LSF_1 F_2}{V}.$$

У этого корня для решения возьмем действительную часть комплексного числа:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_1 = e^{F_1 x_1} \begin{pmatrix} F_1 \cos(F_2 x_1) - F_2 \sin(F_2 x_1) \\ F_3 \cos(F_2 x_1) - F_4 \sin(F_2 x_1) \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Рассмотрим второй корень (3.35) характеристического уравнения (3.12):

$$u_2^+ = e^{F_1 x_1} \left[ F_1 \cos(F_2 x_1) - F_2 \sin(F_2 x_1) - i(F_2 \cos(F_2 x_1) + F_1 \sin(F_2 x_1)) \right],$$

$$\varphi = e^{F_1 x_1} \left[ F_3 \cos(F_2 x_1) - F_4 \sin(F_2 x_1) - i(F_4 \cos(F_2 x_1) + F_3 \sin(F_2 x_1)) \right].$$

Теперь для решения возьмем мнимую часть комплексного числа:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_2 = -e^{F_1 x_1} \begin{pmatrix} F_2 \cos(F_2 x_1) + F_1 \sin(F_2 x_1) \\ F_4 \cos(F_2 x_1) + F_3 \sin(F_2 x_1) \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Аналогично получим решение для третьего и четвертого корней (3.35):

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_3 = e^{-F_1 x_1} \begin{pmatrix} -(F_1 \cos(F_2 x_1) + F_2 \sin(F_2 x_1)) \\ F_3 \cos(F_2 x_1) + F_4 \sin(F_2 x_1) \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_4 = e^{-F_1 x_1} \begin{pmatrix} -F_2 \cos(F_2 x_1) + F_1 \sin(F_2 x_1) \\ F_4 \cos(F_2 x_1) - F_3 \sin(F_2 x_1) \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Следовательно, (3.36) – (3.39) образуют решение однородной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_{\text{одн}} = \hat{C}_8 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_1 + \hat{C}_9 \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_2 + \hat{C}_{10} \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_3 + \hat{C}_{11} \begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_4. \quad (3.40)$$

Частное решение уже было найдено. Запишем (3.18) – (3.19) в виде:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ \varphi \end{pmatrix}_{\text{чп}} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta_0}{2Dh} \left( \tilde{C}_1 + \frac{2S}{3} \sigma_0 \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

С учетом (3.36) – (3.41) получим общее решение системы (3.9) в виде:

$$\begin{aligned} u_2^+ = & \hat{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 x_1) - \\ -F_2 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \hat{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_2 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_1 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ & - \hat{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_2 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_2 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_1 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \\ & - \frac{\delta_0}{2Dh} \left( \hat{C}_7 + \frac{2S}{3} \sigma_0 \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \hat{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_3 \cos(F_2 x_1) - \\ -F_4 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \hat{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_4 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_3 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \\ & + \hat{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_3 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_4 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_4 \cos(F_2 x_1) - \\ -F_3 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Из формулы (3.7), используя (3.42) – (3.43), найдем последнюю неизвестную функцию:

$$\begin{aligned}
u_1^{+'} = & \hat{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_5 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_6 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_6 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_5 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
& + \hat{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_5 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_6 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_6 \cos(F_2 x_1) - \\ -F_5 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
& + \frac{1}{Dh} \tilde{C}_7 + \frac{\delta_0}{3Dh} \sigma_0,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\text{где } F_5 = \frac{Dh^2 (F_2 F_4 - F_1 F_3)}{2SK} + \frac{F_1}{S}; \quad F_6 = -\frac{Dh^2 (F_1 F_4 + F_2 F_3)}{2SK} + \frac{F_2}{S}.$$

Проинтегрировав (3.44), применяя выражения аналогичные (2.49), получим:

$$\begin{aligned}
u_1^+ = & \hat{C}_8 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_9 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_{10} \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_9 e^{F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_{10} \cos(F_2 x_1) + \\ +F_9 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} - \\
& - \hat{C}_{10} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} F_9 \cos(F_2 x_1) + \\ +F_{10} \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_{11} e^{-F_1 x_1} \begin{bmatrix} -F_{10} \cos(F_2 x_1) + \\ +F_9 \sin(F_2 x_1) \end{bmatrix} + \\
& + \frac{1}{Dh} \hat{C}_7 x_1 + \frac{\delta_0}{3Dh} \sigma_0 x_1 + \hat{C}_{12},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\text{где } F_7 = \frac{F_1}{F_1^2 + F_2^2}; \quad F_8 = \frac{F_2}{F_1^2 + F_2^2}; \quad F_9 = F_5 F_7 + F_6 F_8; \quad F_{10} = F_6 F_7 - F_5 F_8.$$

Таким образом, найдено общее решение системы дифференциальных уравнений (3.3) на пластическом участке  $(0; \ell_p]$  для тонких слоев, при которых характеристическое уравнение (3.12) имеет комплексные корни:  $u_1^+$  – (3.45),  $u_2^+$  – (3.42) и  $\varphi$  – (3.43).

Аналогично решению для предельно тонких слоев принимаем  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{C}_3 = \hat{C}_6 = 0$ . Упругое решение (2.47), (2.48), (2.50), найденное в главе 2, запишем следующим образом:

$$u_1^+ = -\hat{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_9 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_{10} \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_{10} \cos(R_2 x_1) + \\ +R_9 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix}, \tag{3.46}$$

$$u_2^+ = -\hat{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_2 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_1 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix}, \tag{3.47}$$

$$\varphi = \hat{C}_4 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} -R_3 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_4 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix} + \hat{C}_5 e^{-R_1 x_1} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 x_1) + \\ +R_3 \sin(R_2 x_1) \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

В связи с нелинейностью аналитического выражения длины  $\ell_p$  через нагрузку  $Q_2$  считаем  $Q_2$  неизвестной девятой переменной, а значение  $\ell_p$  станет известной величиной. Воспользуемся ранее описанным для случая предельно тонких слоев алгоритмом с использованием метода дихотомии (см. стр. 63). Таким образом, образуется система из девяти линейных уравнений, которая состоит из двух условий из (2.12), (3.1) и условия Треска – Сен-Венана в виде (2.58).

$$1) M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2 a:$$

$$\hat{C}_7 \frac{h}{2} + \hat{C}_8 Dh^2 F_{11} + \hat{C}_9 Dh^2 F_{12} - \hat{C}_{10} Dh^2 F_{11} + \hat{C}_{11} Dh^2 F_{12} + Q_2 a = -\frac{\delta_0 h}{6} \sigma_0, \quad (3.49)$$

$$2) Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2:$$

$$\hat{C}_8 F_{15} + \hat{C}_9 F_{16} + \hat{C}_{10} F_{15} - \hat{C}_{11} F_{16} + Q_2 / Lh = 0, \quad (3.50)$$

$$3) u_1^+|_{x_1=\ell_p-0} = u_1^+|_{x_1=\ell_p+0}:$$

$$\begin{aligned} & \hat{C}_7 \frac{\ell_p}{Dh} + \hat{C}_8 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} -F_9 \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_{10} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_9 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{10} \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_9 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \\ & - \hat{C}_{10} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_9 \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_{10} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_{11} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} -F_{10} \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_9 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_{12} + \\ & + \hat{C}_4 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} R_9 \cos(R_2 \ell_p) + \\ +R_{10} \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} -R_{10} \cos(R_2 \ell_p) + \\ +R_9 \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} = -\frac{\delta_0 \sigma_0 \ell_p}{3Dh}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$4) u_2^+|_{x_1=\ell_p-0} = u_2^+|_{x_1=\ell_p+0}:$$

$$\begin{aligned}
& -\hat{C}_7 \frac{\delta_0}{2Dh} + \hat{C}_8 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 \ell_p) - \\ -F_2 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \hat{C}_9 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_2 \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_1 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \\
& -\hat{C}_{10} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_1 \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_2 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_{11} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} -F_2 \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_1 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \\
& + \hat{C}_4 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} R_1 \cos(R_2 \ell_p) + \\ +R_2 \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} -R_2 \cos(R_2 \ell_p) + \\ +R_1 \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} = \frac{S\delta_0 \sigma_0}{3Dh},
\end{aligned} \tag{3.52}$$

5)  $\varphi|_{x_1=\ell_p-0} = \varphi|_{x_1=\ell_p+0}$ :

$$\begin{aligned}
& \hat{C}_8 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_3 \cos(F_2 \ell_p) - \\ -F_4 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \hat{C}_9 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_4 \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_3 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \\
& + \hat{C}_{10} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_3 \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_4 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_{11} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_4 \cos(F_2 \ell_p) - \\ -F_3 \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \\
& - \hat{C}_4 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} -R_3 \cos(R_2 \ell_p) + \\ +R_4 \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} R_4 \cos(R_2 \ell_p) + \\ +R_3 \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

6)  $(Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p+0}$ :

$$\begin{aligned}
& \hat{C}_7 + \tilde{C}_8 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} -F_{13} \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_{14} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_9 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{14} \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_{13} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \\
& + \hat{C}_{10} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{13} \cos(F_2 \ell_p) + \\ +F_{14} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_{11} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{14} \cos(F_2 \ell_p) - \\ -F_{13} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \\
& - \hat{C}_4 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} R_{13} \cos(R_2 \ell_p) + \\ +R_{14} \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} R_{14} \cos(R_2 \ell_p) - \\ -R_{13} \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} = \frac{\delta_0 \sigma_0}{6},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

7)  $M_{11}|_{x_1=\ell_p-0} = M_{11}|_{x_1=\ell_p+0}$ :

$$\begin{aligned}
& \hat{C}_7 \frac{1}{2Dh} + \hat{C}_8 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{11} \cos(F_2 \ell_p) + \\ + F_{12} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_9 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{12} \cos(F_2 \ell_p) - \\ - F_{11} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \\
& + \hat{C}_{10} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} -F_{11} \cos(F_2 \ell_p) + \\ + F_{12} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_{11} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{12} \cos(F_2 \ell_p) + \\ + F_{11} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \\
& - \hat{C}_4 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} R_{11} \cos(R_2 \ell_p) + \\ + R_{12} \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} R_{12} \cos(R_2 \ell_p) - \\ - R_{11} \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} = -\frac{h\delta_0 \sigma_0}{6Dh^2},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$8) Q_{12}|_{x_1=\ell_p-0} = Q_{12}|_{x_1=\ell_p+0}:$$

$$\begin{aligned}
& \hat{C}_8 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{15} \cos(F_2 \ell_p) + \\ + F_{16} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \hat{C}_9 e^{F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{16} \cos(F_2 \ell_p) - \\ - F_{15} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} + \\
& + \hat{C}_{10} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{15} \cos(F_2 \ell_p) - \\ - F_{16} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \hat{C}_{11} e^{-F_1 \ell_p} \begin{bmatrix} F_{16} \cos(F_2 \ell_p) + \\ + F_{15} \sin(F_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \\
& - \hat{C}_4 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} R_{15} \cos(R_2 \ell_p) + \\ + R_{16} \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} - \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell_p} \begin{bmatrix} R_{16} \cos(R_2 \ell_p) - \\ - R_{15} \sin(R_2 \ell_p) \end{bmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$9) (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p+0} = \sigma_0:$$

$$\begin{aligned}
& \hat{C}_4 e^{-R_1 \ell_p} \left[ -q_5 \cos(R_2 \ell_p) + q_6 \sin(R_2 \ell_p) \right] + \\
& + \hat{C}_5 e^{-R_1 \ell_p} \left[ q_6 \cos(R_2 \ell_p) + q_5 \sin(R_2 \ell_p) \right] = \sigma_0,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\text{где } F_{11} = -\frac{F_5}{2} + \frac{h}{3}(F_2 F_4 - F_1 F_3); \quad F_{12} = \frac{F_6}{2} + \frac{h}{3}(F_1 F_4 + F_2 F_3); \quad R_{11} = \frac{R_5}{2} - \frac{h}{3}(R_2 R_4 + R_1 R_3);$$

$$R_{12} = \frac{R_6}{2} - \frac{h}{3}(R_2 R_3 - R_1 R_4); \quad F_{13} = Dh \left[ F_5 - \frac{h}{2}(F_2 F_4 - F_1 F_3) \right] + \frac{\delta_0}{2} F_9;$$

$$F_{14} = Dh \left[ F_6 + \frac{h}{2}(F_1 F_4 + F_2 F_3) \right] + \frac{\delta_0}{2} F_{10}; \quad F_{15} = F_1^2 - F_2^2 - F_3; \quad F_{16} = -2F_1 F_2 + F_4;$$

$$R_{13} = Dh \left[ R_5 - \frac{h}{2}(R_1 R_3 + R_2 R_4) \right] + \frac{\delta_0}{2}(R_9 D_1 - R_1 D_2); \quad R_{15} = R_1^2 - R_2^2 + R_3; \quad R_{16} = 2R_1 R_2 - R_4;$$

$$R_{14} = Dh \left[ R_6 - \frac{h}{2}(R_2 R_3 - R_1 R_4) \right] + \frac{\delta_0}{2}(R_6 D_1 - R_2 D_2).$$

Сравним полученные упругое (график 1) и упругопластическое (график 2) решения при комплексных корнях характеристических уравнений (2.22), (3.12). Аналогично рис. 3.2 на рис. 3.7 построены горизонтальные перемещения  $u_1^+$  1 – (2.50) и 2 – (3.45), (3.46) при толщине адгезионного слоя  $\delta_0 = 10^{-3}$  м под действием экспериментальной критической силы (см. стр. 19). График (а) относится к адгезиву Araldite 2015 с длиной пластической зоны  $\ell_p = 0.0036945$  м, (б) – Sikaforce 7752 с  $\ell_p = 0.01562006$  м.

Для Araldite AV138 в этом случае не получится провести сравнение решений при разной модели поведения слоя, потому что согласно данным из табл. 2.1 при такой толщине адгезионного слоя и значении приложенной силы пластический участок будет слишком мал. Можно ограничиться упругой постановкой задачи. А при меньшей толщине слоя  $\delta_0 = 10^{-4}$  м характеристические уравнения (2.22), (3.12) имеют вещественные корни.

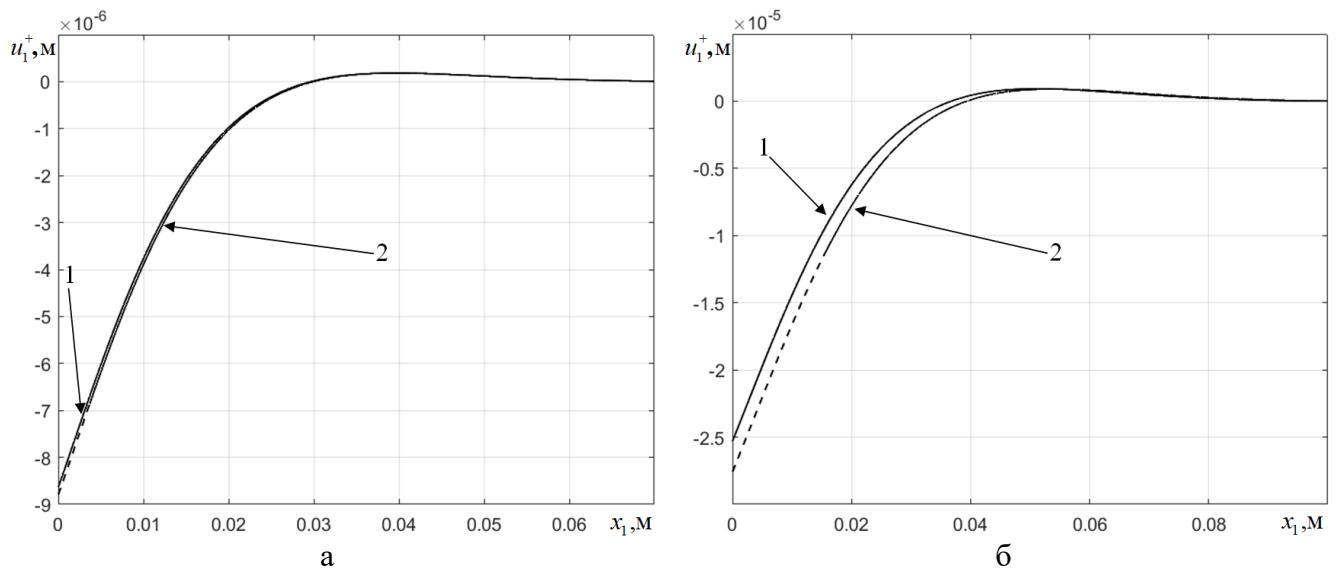


Рис. 3.7. Горизонтальные перемещения при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м: (а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

Аналогично на рис. 3.8 построены вертикальные перемещения  $u_2^+$  1 – (2.47) и 2 – (3.42), (3.47), на рис. 3.9 – углы поворота  $\varphi$  1 – (2.48) и 2 – (3.43), (3.48), на

рис. 3.10 – средние напряжения в адгезионном слое  $\bar{\sigma}_{11}$ , на рис. 3.11 – напряжения отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$ .

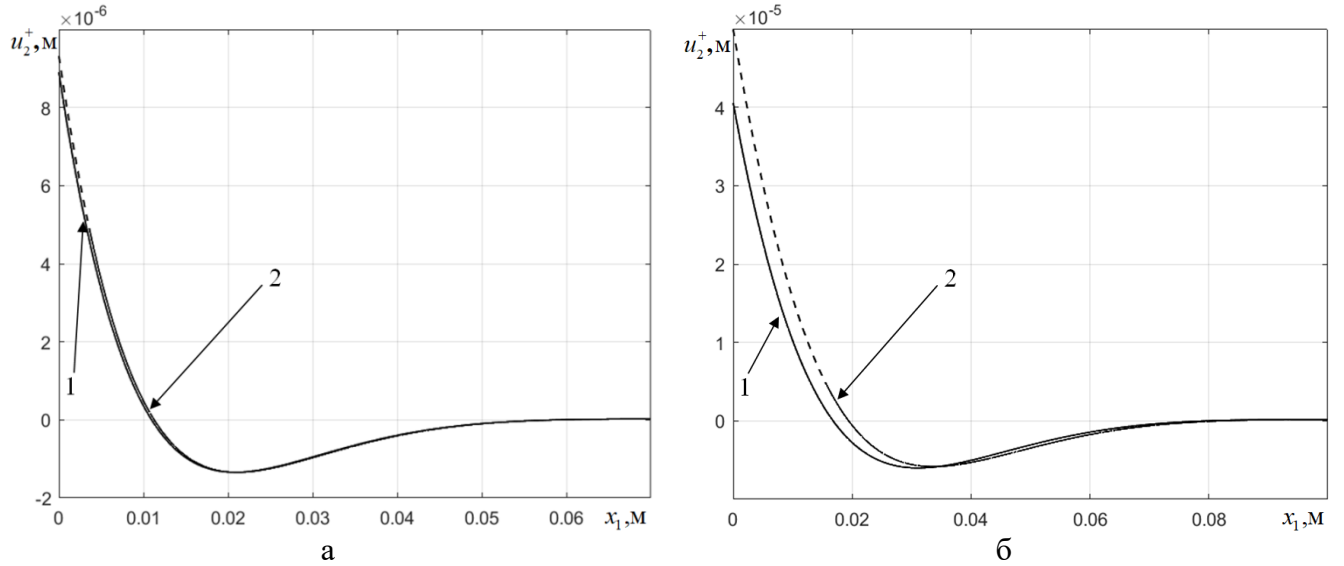


Рис. 3.8. Вертикальные перемещения при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м: (а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

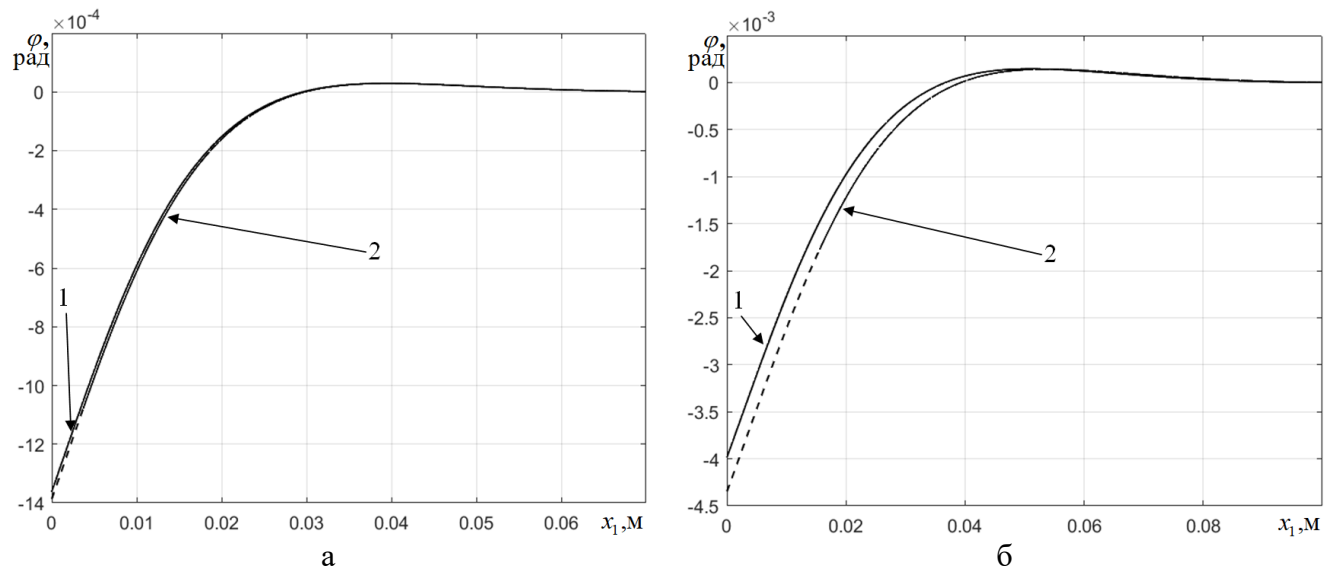


Рис. 3.9. Углы поворота при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м: (а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

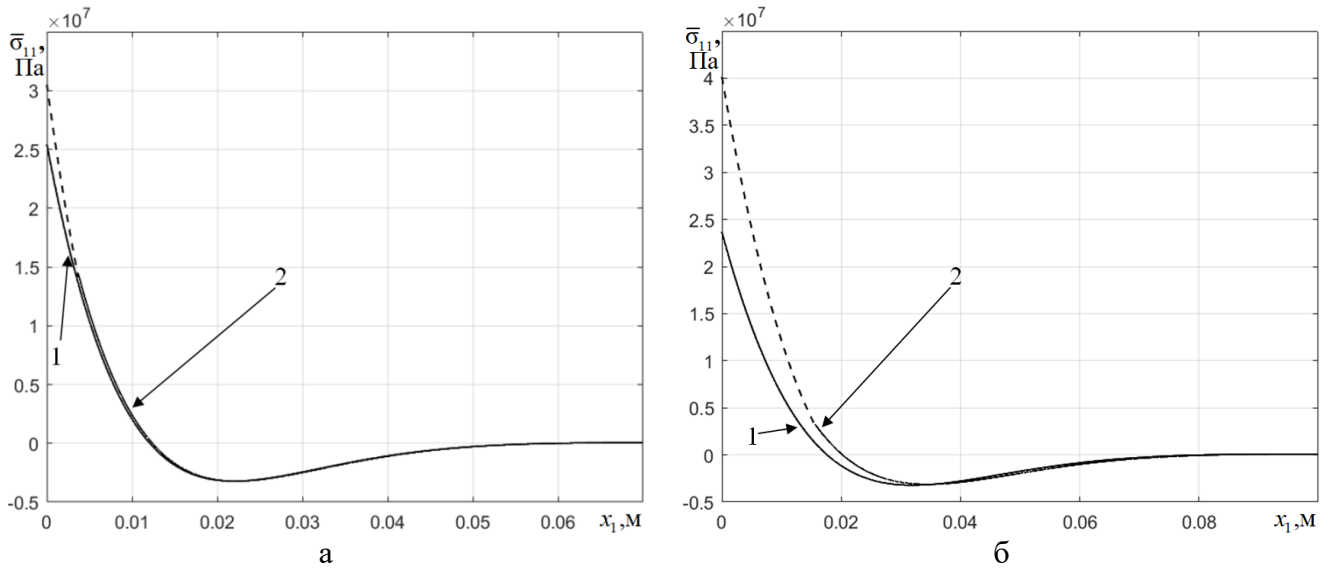


Рис. 3.10. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м:  
(а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

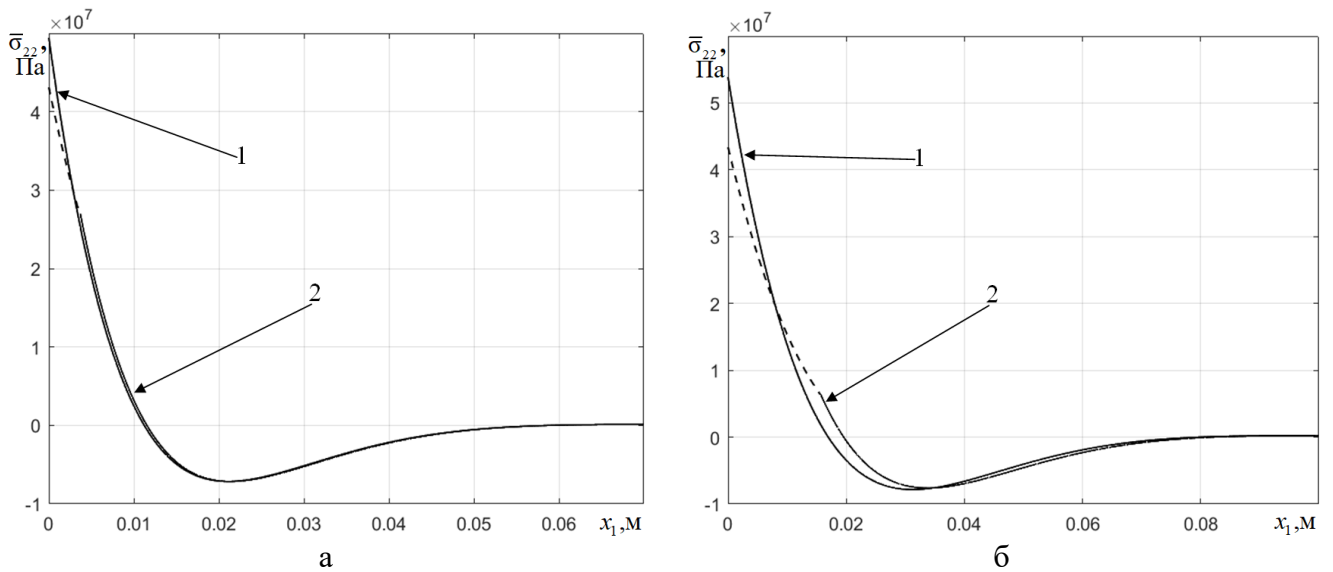


Рис. 3.11. Напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$  при различных моделях поведения адгезива в пдс при  $\delta_0 = 10^{-3}$  м:  
(а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – упругое, 2 – упругопластическое

Из рис. 3.7 – 3.11 видим, что на решение, полученное при тонких слоях, значительней влияет учет пластических свойств, чем на решение при предельно тонких адгезионных слоях.

Для каждой смолы существует диапазон толщин адгезионного слоя, при котором дискриминанты (2.23) и (3.13) имеют противоположные знаки. Но он мал, поэтому в данной работе этот случай не рассматривается.

В таблице 3.1 представлены аналитически найденные длины зон пластичности в зависимости от значения линейного параметра для смол Araldite AV138, Araldite 2015 и Sikaforce 7752.

Таблица 3.1 – Длины пластических зон в пдс

$\delta_0$ (м)	$\ell_p$ (м)		
	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$10^{-3}$	0	0.0036945	0.01562006
$10^{-4}$	0.00138741	0.0041725	0.009459132
$10^{-5}$	0.00125888	0.002583338	0.005023956
$10^{-6}$	0.000689003	0.00128344	0.002423959

Получим, что у адгезива Sikaforce 7752 значения длин, найденные аналитически (табл. 3.1), с незначительной погрешностью совпадают с длинами первичной зоны пластичности  $\ell_1$ , вычисленными МКЭ (табл. 1.2). Причем аналитически возможно найти решение при  $\delta_0 = 10^{-6}$  м в отличие от численного решения. У Araldite AV138 значения из табл. 3.1 и 1.3 тоже равны с допустимой погрешностью.

### 3.3 Решение задачи в плоском напряженном состоянии

В случае плоского напряженного состояния на участке пластического деформирования слоя с растягивающими напряжениями с учетом критерия Треска – Сен-Венана (2.59) получим следующее распределение напряжений:

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \sigma_0, \bar{\sigma}_{33} = 0. \quad (3.58)$$

Преобразуем систему дифференциальных уравнений (2.6) на участке  $(0; \ell_p]$ .

Из третьего уравнения получим:

$$\frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22} \rightarrow \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_0 \rightarrow Q_{12} = \sigma_0 x_1 + \check{C}_7.$$

Второе уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0 \rightarrow \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0 \rightarrow Q_{11} = \check{C}_8.$$

А первое выглядит следующим образом:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - \sigma_0 x_1 - \check{C}_7 = 0 \rightarrow M_{11} - \frac{\sigma_0}{2} x_1^2 - \check{C}_7 x_1 + \check{C}_9 = 0 \rightarrow M_{11} = \frac{\sigma_0}{2} x_1^2 + \check{C}_7 x_1 - \check{C}_9.$$

С учетом представления обобщенных сил и момента через поле перемещений (2.13) получим систему дифференциальных уравнений на участке  $x_1 \in (0; \ell_p]$  в виде:

$$\begin{cases} Dh^2 \left( \frac{1}{2} u_1^{+'} - \frac{h}{3} \phi' \right) = \frac{\sigma_0}{2} x_1^2 + \check{C}_7 x_1 - \check{C}_9; \\ Dh \left( u_1^{+'} - \frac{h}{2} \phi' \right) = \check{C}_8; \\ Lh \left( u_2^{+'} - \phi \right) = \sigma_0 x_1 + \check{C}_7. \end{cases} \quad (3.59)$$

Преобразуем второе уравнение системы (3.59):

$$u_1^{+'} = \frac{h}{2} \phi' + \frac{1}{Dh} \check{C}_8. \quad (3.60)$$

Подставим (3.60) в первое уравнение (3.59) и получим:

$$\phi' = -\frac{6\sigma_0}{Dh^3} x_1^2 - \frac{12}{Dh^3} \check{C}_7 x_1 + \frac{6}{Dh^2} \check{C}_8 + \frac{12}{Dh^3} \check{C}_9. \quad (3.61)$$

Проинтегрируем (3.61):

$$\phi = -\frac{2\sigma_0}{Dh^3} x_1^3 - \frac{6}{Dh^3} \check{C}_7 x_1^2 + \frac{6}{Dh^2} \check{C}_8 x_1 + \frac{12}{Dh^3} \check{C}_9 x_1 + \check{C}_{10}. \quad (3.62)$$

Используя (3.61), преобразуем выражение (3.60):

$$u_1^{+'} = -\frac{3\sigma_0}{Dh^2} x_1^2 - \frac{6}{Dh^2} \check{C}_7 x_1 + \frac{4}{Dh} \check{C}_8 + \frac{6}{Dh^2} \check{C}_9. \quad (3.63)$$

Проинтегрируем (3.63) и получим:

$$u_1^+ = -\frac{\sigma_0}{Dh^2} x_1^3 - \frac{3}{Dh^2} \check{C}_7 x_1^2 + \frac{4}{Dh} \check{C}_8 x_1 + \frac{6}{Dh^2} \check{C}_9 x_1 + \check{C}_{11}. \quad (3.64)$$

Найдем последнюю неизвестную функцию, подставив (3.62) в последнее уравнение (3.59):

$$u_2^+ = -\frac{\sigma_0}{2Dh^3}x_1^4 - \frac{2}{Dh^3}\check{C}_7x_1^3 + \frac{\sigma_0}{2Lh}x_1^2 + \frac{3}{Dh^2}\check{C}_8x_1^2 + \frac{6}{Dh^3}\check{C}_9x_1^2 + \check{C}_{10}x_1 + \frac{1}{Lh}\check{C}_7x_1 + \check{C}_{12}. \quad (3.65)$$

Таким образом, на пластическом участке найдено общее решение  $u_1^+$  – (3.64),  $u_2^+$  – (3.65),  $\varphi$  – (3.62). Так как больший интерес представляют предельно тонкие слои, на упругом участке возьмем упрощенное решение при вещественных корнях характеристического уравнения (2.22):  $u_1^+$  – (3.23),  $u_2^+$  – (3.24),  $\varphi$  – (3.25). Аналогично алгоритму, описанному в пункте 3.2 (см. стр. 63), считаем нагрузку  $Q_2$  неизвестной величиной. Система из девяти линейных уравнений имеет следующий вид:

$$1) M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2 a: \\ -\check{C}_9 + Q_2 a = 0, \quad (3.66)$$

$$2) Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2: \\ \check{C}_7 + Q_2 = 0, \quad (3.67)$$

$$3) u_1^+|_{x_1=\ell_p-0} = u_1^+|_{x_1=\ell_p+0}: \\ -\check{C}_7 \frac{3\ell_p^2}{Dh^2} + \check{C}_8 \frac{4\ell_p}{Dh} + \check{C}_9 \frac{6\ell_p}{Dh^2} + \check{C}_3 g_1 e^{-\lambda_1 \ell_p} + \check{C}_5 g_2 e^{-\lambda_3 \ell_p} + \check{C}_{11} = \frac{\sigma_0 \ell_p^3}{Dh^2}, \quad (3.68)$$

$$4) u_2^+|_{x_1=\ell_p-0} = u_2^+|_{x_1=\ell_p+0}: \\ \check{C}_7 \left( \frac{\ell_p}{Lh} - \frac{2\ell_p^3}{Dh^3} \right) + \check{C}_8 \frac{3\ell_p^2}{Dh^2} + \check{C}_9 \frac{6\ell_p^2}{Dh^3} + \check{C}_{10} \ell_p + \check{C}_{12} - \check{C}_3 e^{-\lambda_1 \ell_p} - \check{C}_5 e^{-\lambda_3 \ell_p} = \\ = \frac{\sigma_0 \ell_p^2}{2h} \left( \frac{\ell_p^2}{Dh^2} - \frac{1}{L} \right), \quad (3.69)$$

$$5) \varphi|_{x_1=\ell_p-0} = \varphi|_{x_1=\ell_p+0}: \\ -\check{C}_7 \frac{6\ell_p^2}{Dh^3} + \check{C}_8 \frac{6\ell_p}{Dh^2} + \check{C}_9 \frac{12\ell_p}{Dh^3} + \check{C}_3 g_3 e^{-\lambda_1 \ell_p} + \check{C}_5 g_4 e^{-\lambda_3 \ell_p} + \check{C}_{10} = \frac{2\sigma_0 \ell_p^3}{Dh^3}, \quad (3.70)$$

$$6) (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p+0}:$$

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_8 - \tilde{C}_3 \left[ Dh\lambda_1 \left( g_1 - \frac{hg_3}{2} \right) + \frac{\delta_0}{2} (D_1\lambda_1g_1 + D_2) \right] e^{-\lambda_1\ell_p} - \\ & - \tilde{C}_5 \left[ Dh\lambda_3 \left( g_2 - \frac{hg_4}{2} \right) + \frac{\delta_0}{2} (D_1\lambda_3g_2 + D_2) \right] e^{-\lambda_3\ell_p} = -\frac{\delta_0\sigma_0}{2}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$7) M_{11}|_{x_1=\ell_p-0} = M_{11}|_{x_1=\ell_p+0}:$$

$$\tilde{C}_7\ell_p - \tilde{C}_9 - \tilde{C}_3 Dh^2\lambda_1 \left( \frac{g_1}{2} - \frac{hg_3}{3} \right) e^{-\lambda_1\ell_p} - \tilde{C}_5 Dh^2\lambda_3 \left( \frac{g_2}{2} - \frac{hg_4}{3} \right) e^{-\lambda_3\ell_p} = -\frac{\sigma_0\ell_p^2}{2}, \quad (3.72)$$

$$8) Q_{12}|_{x_1=\ell_p-0} = Q_{12}|_{x_1=\ell_p+0}:$$

$$\tilde{C}_7 + \tilde{C}_3 Lh(\lambda_1 - g_3) e^{-\lambda_1\ell_p} + \tilde{C}_5 Lh(\lambda_3 - g_4) e^{-\lambda_3\ell_p} = -\sigma_0\ell_p, \quad (3.73)$$

$$9) \bar{\sigma}_{22}|_{x_1=\ell_p+0} = \sigma_0:$$

$$\tilde{C}_3 q_3 e^{-\lambda_1\ell_p} + \tilde{C}_5 q_4 e^{-\lambda_3\ell_p} = \sigma_0. \quad (3.74)$$

В таблице 3.2 представлены аналитически найденные длины зон пластичности с растягивающими напряжениями в зависимости от значения линейного параметра для смол Araldite AV138, Araldite 2015 и Sikaforce 7752.

Таблица 3.2 – Длины пластических зон в пнс с растягивающими напряжениями

$\delta_0$ (м)	$\ell_p$ (м)		
	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$10^{-4}$	0.005459	-	-
$10^{-5}$	0.00696151	0.02089	0.1046345
$10^{-6}$	0.0075022	0.0217405	0.1061621
$10^{-7}$	0.007682	0.022031	0.106713

У адгезива Araldite AV138 аналитически полученные значения длин (табл. 3.2) с незначительной погрешностью совпадают со значениями, найденными МКЭ (табл. 1.5), в отличие от Araldite 2015 (табл. 1.6) и Sikaforce 7752 (табл. 1.4).

На рис. 3.12 построены графики горизонтальных перемещений  $u_1^+$  (3.64), (3.23) полученного решения при толщине адгезионного слоя  $\delta_0 = 10^{-5}$  м под действием экспериментальной критической силы (см. стр. 19) с длиной пластической зоны из табл. 3.2. График 1 относится к адгезиву Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752.

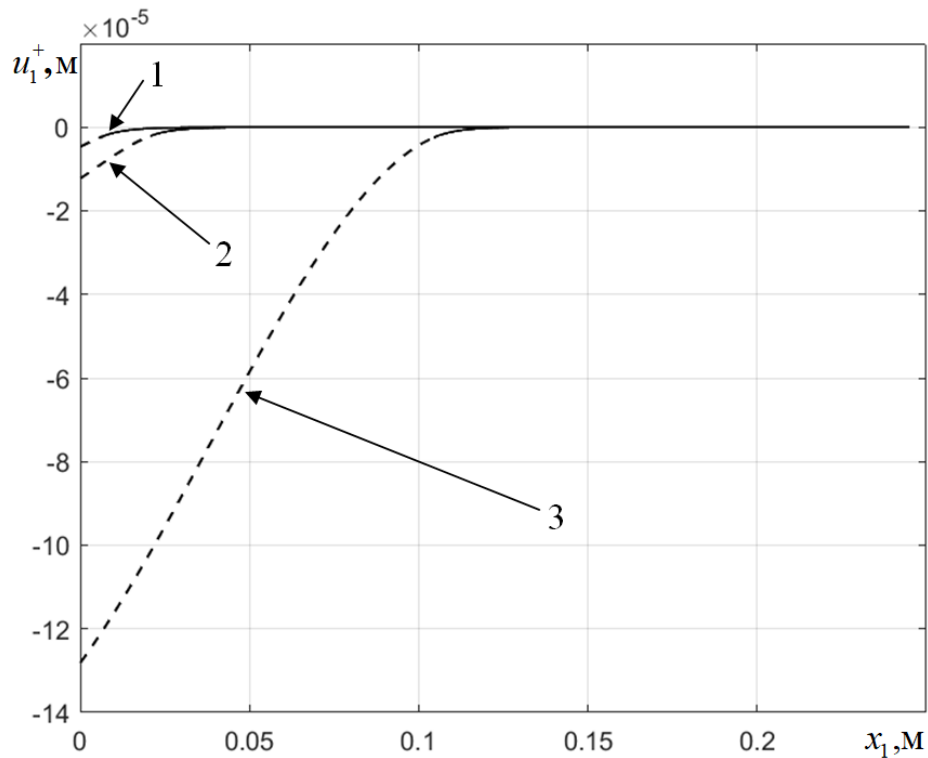


Рис. 3.12. Горизонтальные перемещения в пнс с областью растягивающих напряжений при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

Аналогично на рис. 3.13 построены вертикальные перемещения  $u_2^+$  (3.65), (3.24), на рис. 3.14 – углы поворота  $\varphi$  (3.62), (3.25), на рис. 3.15 – средние напряжения в адгезионном слое  $\bar{\sigma}_{11}$ , на рис. 3.16 – напряжения отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$ .

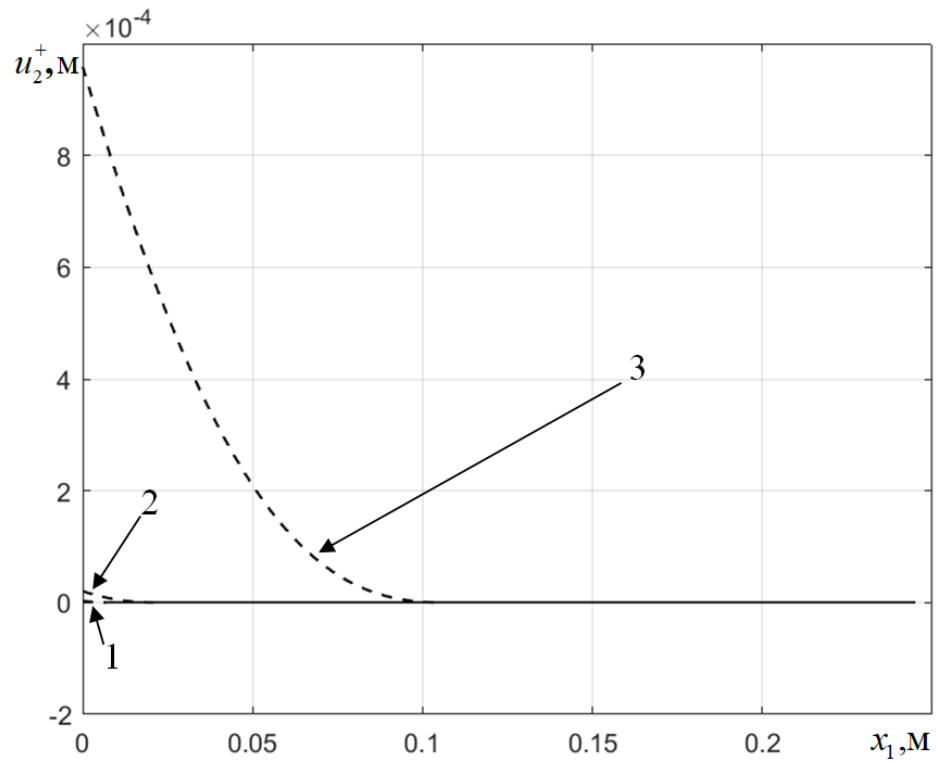


Рис. 3.13. Вертикальные перемещения в пнс с областью растягивающих напряжений при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

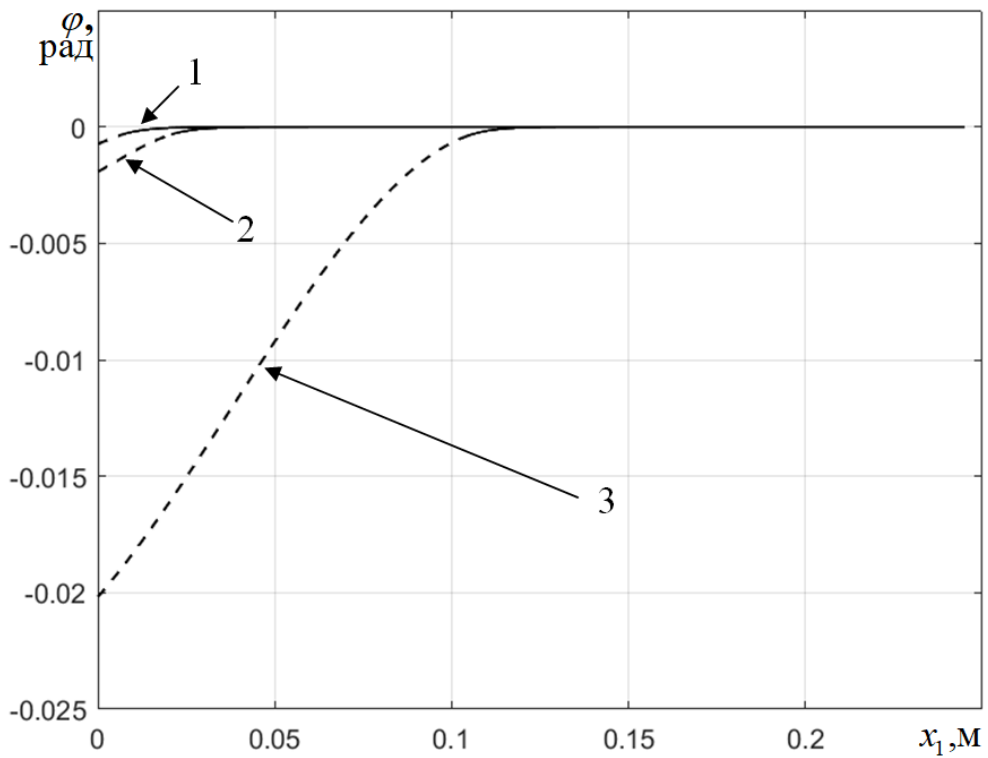


Рис. 3.14. Углы поворота в пнс с областью растягивающих напряжений при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: 1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

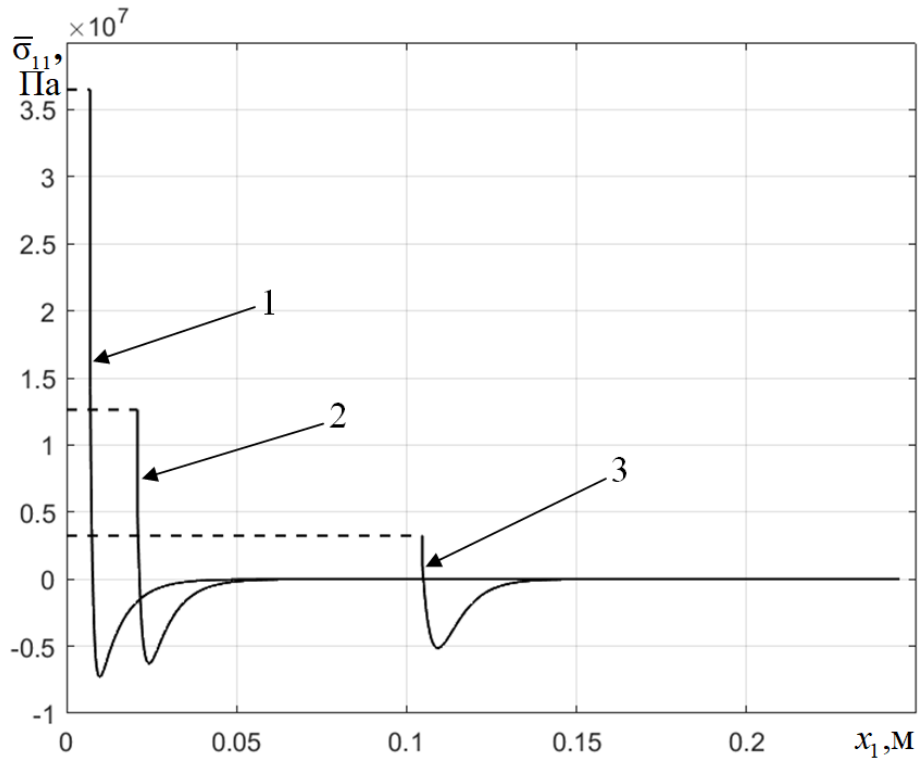


Рис. 3.15. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  в пнс с областью растягивающих напряжений при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м:

1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

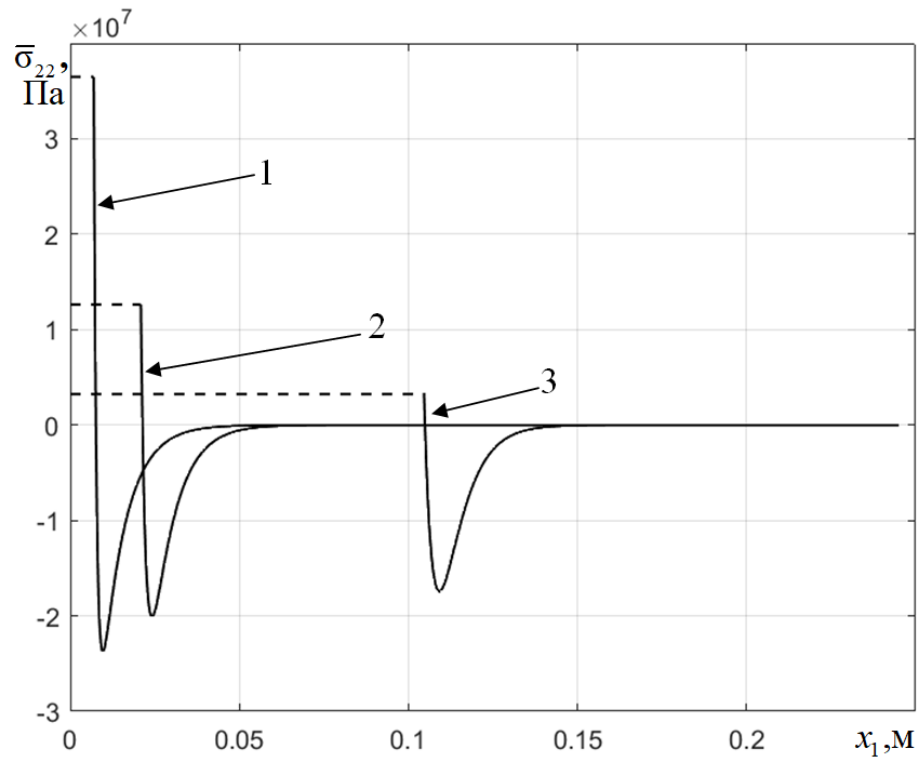


Рис. 3.16. Напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$  в пнс с областью растягивающих напряжений при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м:

1 – Araldite AV138, 2 – Araldite 2015, 3 – Sikaforce 7752

Из рис. 3.15 – 3.16 видим, что у адгезивов Araldite 2015 и Sikaforce 7752 максимальные по модулю значения напряжений на упругом участке превышают предел текучести. Поэтому к участку с растягивающими напряжениями, длина которого  $\ell_p^+$ , введем в рассмотрение участок со сжимающими напряжениями длиной  $\ell_p^-$ , для которого, используя критерий Треска – Сен-Венана (2.59), запишем следующее распределение напряжений:

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = -\sigma_0, \quad \bar{\sigma}_{33} = 0. \quad (3.75)$$

В этом случае общая длина пластической области равна сумме длин двух участков  $\ell_p = \ell_p^+ + \ell_p^-$ . Решение на участке  $x_1 \in (0; \ell_p^+]$  соответствует уже найденному решению:  $u_1^+$  – (3.64),  $u_2^+$  – (3.65),  $\varphi$  – (3.62). Преобразовав его, получим решение на участке  $x_1 \in (\ell_p^+; \ell_p]$  в виде:

$$u_1^+ = \frac{\sigma_0}{Dh^2} x_1^3 - \frac{3}{Dh^2} \check{C}_{13} x_1^2 + \frac{4}{Dh} \check{C}_{14} x_1 + \frac{6}{Dh^2} \check{C}_{15} x_1 + \check{C}_{17}, \quad (3.76)$$

$$u_2^+ = \frac{\sigma_0}{2Dh^3} x_1^4 - \frac{2}{Dh^3} \check{C}_{13} x_1^3 - \frac{\sigma_0}{2Lh} x_1^2 + \frac{3}{Dh^2} \check{C}_{14} x_1^2 + \frac{6}{Dh^3} \check{C}_{15} x_1^2 + \check{C}_{16} x_1 + \frac{1}{Lh} \check{C}_{13} x_1 + \check{C}_{18}, \quad (3.77)$$

$$\varphi = \frac{2\sigma_0}{Dh^3} x_1^3 - \frac{6}{Dh^3} \check{C}_{13} x_1^2 + \frac{6}{Dh^2} \check{C}_{14} x_1 + \frac{12}{Dh^3} \check{C}_{15} x_1 + \check{C}_{16}. \quad (3.78)$$

К условиям сопряжения (3.1) добавятся следующие условия в точке  $x_1 = \ell_p^+$ :

$$\begin{aligned} u_1^+ \Big|_{x_1=\ell_p^+-0} &= u_1^+ \Big|_{x_1=\ell_p^++0}, \quad u_2^+ \Big|_{x_1=\ell_p^+-0} = u_2^+ \Big|_{x_1=\ell_p^++0}, \\ \varphi \Big|_{x_1=\ell_p^+-0} &= \varphi \Big|_{x_1=\ell_p^++0}, \\ (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=\ell_p^+-0} &= (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=\ell_p^++0}, \\ M_{11} \Big|_{x_1=\ell_p^+-0} &= M_{11} \Big|_{x_1=\ell_p^++0}, \quad Q_{12} \Big|_{x_1=\ell_p^+-0} = Q_{12} \Big|_{x_1=\ell_p^++0}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Найдем четырнадцать констант интегрирования и силу  $Q_2$ , удовлетворив двум граничным условиям из (2.12), условиям сопряжения (3.1), (3.79) и критерию Треска – Сен-Венана (2.59). Получим следующую систему линейных уравнений:

$$1) M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2 a - (3.66),$$

$$2) Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2 - (3.67),$$

$$3) u_1^+|_{x_1=\ell_p^+-0} = u_1^+|_{x_1=\ell_p^++0} :$$

$$\begin{aligned} & -\check{C}_7 \frac{3(\ell_p^+)^2}{Dh^2} + \check{C}_8 \frac{4\ell_p^+}{Dh} + \check{C}_9 \frac{6\ell_p^+}{Dh^2} + \check{C}_{11} + \check{C}_{13} \frac{3(\ell_p^+)^2}{Dh^2} - \check{C}_{14} \frac{4\ell_p^+}{Dh} - \check{C}_{15} \frac{6\ell_p^+}{Dh^2} - \check{C}_{17} = \\ & = \frac{2\sigma_0(\ell_p^+)^3}{Dh^2}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$4) u_2^+|_{x_1=\ell_p^+-0} = u_2^+|_{x_1=\ell_p^++0} :$$

$$\begin{aligned} & \check{C}_7 \left( \frac{\ell_p^+}{Lh} - \frac{2(\ell_p^+)^3}{Dh^3} \right) + \check{C}_8 \frac{3(\ell_p^+)^2}{Dh^2} + \check{C}_9 \frac{6(\ell_p^+)^2}{Dh^3} + \check{C}_{10}\ell_p^+ + \check{C}_{12} - \check{C}_{13} \left( \frac{\ell_p^+}{Lh} - \frac{2(\ell_p^+)^3}{Dh^3} \right) - \\ & - \check{C}_{14} \frac{3(\ell_p^+)^2}{Dh^2} - \check{C}_{15} \frac{6(\ell_p^+)^2}{Dh^3} - \check{C}_{16}\ell_p^+ - \check{C}_{18} = \frac{\sigma_0(\ell_p^+)^2}{h} \left( \frac{(\ell_p^+)^2}{Dh^2} - \frac{1}{L} \right), \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$5) \varphi|_{x_1=\ell_p^+-0} = \varphi|_{x_1=\ell_p^++0} :$$

$$\begin{aligned} & -\check{C}_7 \frac{6(\ell_p^+)^2}{Dh^3} + \check{C}_8 \frac{6\ell_p^+}{Dh^2} + \check{C}_9 \frac{12\ell_p^+}{Dh^3} + \check{C}_{10} + \check{C}_{13} \frac{6(\ell_p^+)^2}{Dh^3} - \check{C}_{14} \frac{6\ell_p^+}{Dh^2} - \check{C}_{15} \frac{12\ell_p^+}{Dh^3} - \check{C}_{16} = \\ & = \frac{4\sigma_0(\ell_p^+)^3}{Dh^3}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$6) (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p^+-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=\ell_p^++0} :$$

$$\check{C}_8 - \check{C}_{14} = -\delta_0\sigma_0, \quad (3.83)$$

$$7) M_{11}|_{x_1=\ell_p^+-0} = M_{11}|_{x_1=\ell_p^++0} :$$

$$\check{C}_7\ell_p^+ - \check{C}_9 - \check{C}_{13}\ell_p^+ + \check{C}_{15} = -\sigma_0(\ell_p^+)^2, \quad (3.84)$$

$$8) Q_{12}|_{x_1=\ell_p^+-0} = Q_{12}|_{x_1=\ell_p^++0} :$$

$$\check{C}_7 - \check{C}_{13} = -2\sigma_0\ell_p^+, \quad (3.85)$$

$$9) u_1^+|_{x_1=\ell_p^+-0} = u_1^+|_{x_1=\ell_p^++0} :$$

$$-\tilde{C}_{13} \frac{3\ell_p^2}{Dh^2} + \tilde{C}_{14} \frac{4\ell_p}{Dh} + \tilde{C}_{15} \frac{6\ell_p}{Dh^2} + \tilde{C}_3 g_1 e^{-\lambda_1 \ell_p} + \tilde{C}_5 g_2 e^{-\lambda_3 \ell_p} + \tilde{C}_{17} = -\frac{\sigma_0 \ell_p^3}{Dh^2}, \quad (3.86)$$

$$10) u_2^+ \Big|_{x_1=\ell_p-0} = u_2^+ \Big|_{x_1=\ell_p+0} :$$

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_{13} \left( \frac{\ell_p}{Lh} - \frac{2\ell_p^3}{Dh^3} \right) + \tilde{C}_{14} \frac{3\ell_p^2}{Dh^2} + \tilde{C}_{15} \frac{6\ell_p^2}{Dh^3} + \tilde{C}_{16} \ell_p + \tilde{C}_{18} - \tilde{C}_3 e^{-\lambda_1 \ell_p} - \tilde{C}_5 e^{-\lambda_3 \ell_p} = \\ & = \frac{\sigma_0 \ell_p^2}{2h} \left( \frac{1}{L} - \frac{\ell_p^2}{Dh^2} \right), \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$11) \varphi \Big|_{x_1=\ell_p-0} = \varphi \Big|_{x_1=\ell_p+0} :$$

$$-\tilde{C}_{13} \frac{6\ell_p^2}{Dh^3} + \tilde{C}_{14} \frac{6\ell_p}{Dh^2} + \tilde{C}_{15} \frac{12\ell_p}{Dh^3} + \tilde{C}_3 g_3 e^{-\lambda_1 \ell_p} + \tilde{C}_5 g_4 e^{-\lambda_3 \ell_p} + \tilde{C}_{16} = -\frac{2\sigma_0 \ell_p^3}{Dh^3}, \quad (3.88)$$

$$12) (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=\ell_p-0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=\ell_p+0} :$$

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_{14} - \tilde{C}_3 \left[ Dh\lambda_1 \left( g_1 - \frac{hg_3}{2} \right) + \frac{\delta_0}{2} (D_1 \lambda_1 g_1 + D_2) \right] e^{-\lambda_1 \ell_p} - \\ & - \tilde{C}_5 \left[ Dh\lambda_3 \left( g_2 - \frac{hg_4}{2} \right) + \frac{\delta_0}{2} (D_1 \lambda_3 g_2 + D_2) \right] e^{-\lambda_3 \ell_p} = \frac{\delta_0 \sigma_0}{2}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$13) M_{11} \Big|_{x_1=\ell_p-0} = M_{11} \Big|_{x_1=\ell_p+0} :$$

$$\tilde{C}_{13} \ell_p - \tilde{C}_{15} - \tilde{C}_3 Dh^2 \lambda_1 \left( \frac{g_1}{2} - \frac{hg_3}{3} \right) e^{-\lambda_1 \ell_p} - \tilde{C}_5 Dh^2 \lambda_3 \left( \frac{g_2}{2} - \frac{hg_4}{3} \right) e^{-\lambda_3 \ell_p} = \frac{\sigma_0 \ell_p^2}{2}, \quad (3.90)$$

$$14) Q_{12} \Big|_{x_1=\ell_p-0} = Q_{12} \Big|_{x_1=\ell_p+0} :$$

$$\tilde{C}_{13} + \tilde{C}_3 Lh(\lambda_1 - g_3) e^{-\lambda_1 \ell_p} + \tilde{C}_5 Lh(\lambda_3 - g_4) e^{-\lambda_3 \ell_p} = \sigma_0 \ell_p, \quad (3.91)$$

$$15) \bar{\sigma}_{22} \Big|_{x_1=\ell_p+0} = -\sigma_0 :$$

$$\tilde{C}_3 q_3 e^{-\lambda_1 \ell_p} + \tilde{C}_5 q_4 e^{-\lambda_3 \ell_p} = -\sigma_0. \quad (3.92)$$

Рассмотрим два подхода для нахождения длин пластических зон. У Araldite 2015 значение  $\ell_p^+$  считаем равной длине  $\ell_p$ , полученной при решении с одной пластической областью растягивающих напряжений (табл. 3.2). У смолы Sikaforce

7752 значение  $\ell_p^+$  берем из решения задачи МКЭ (табл. 1.4). В обоих случаях для определения  $\ell_p^-$  используем алгоритм с применением метода дихотомии (стр. 63).

В таблицах 3.3 – 3.4 представлены аналитически найденные длины зон пластичности с учетом сжимающих напряжений в зависимости от значения линейного параметра для смол Araldite 2015 и Sikaforce 7752 соответственно.

Таблица 3.3 – Длины пластических зон в пнс у Araldite 2015

$\ell_i$ (м)	$\delta_0$ (м)		
	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$\ell_p^+$	0.02089	0.0217405	0.022031
$\ell_p^-$	0.0075	0.0006601	0.000192

Таблица 3.4 – Длины пластических зон в пнс у Sikaforce 7752

$\ell_i$ (м)	$\delta_0$ (м)	
	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$\ell_p^+$	0.093	0.094
$\ell_p^-$	0.0565671	0.070626

Сравним решение с растягивающими напряжениями (график 1) с решением при учете сжимающих напряжений (график 2). На рис. 3.17 построены графики горизонтальных перемещений  $u_1^+$  1 – (3.64), (3.23) и 2 – (3.64), (3.76), (3.23) полученных решений при толщине адгезионного слоя  $\delta_0 = 10^{-5}$  м под действием экспериментальной критической силы (см. стр. 19) с длинами пластических областей из табл. 3.2 – 3.4. График (а) относится к адгезиву Araldite 2015, (б) – Sikaforce 7752. Зона со сжимающими напряжениями построена линией, состоящей из точек, здесь и далее по тексту.

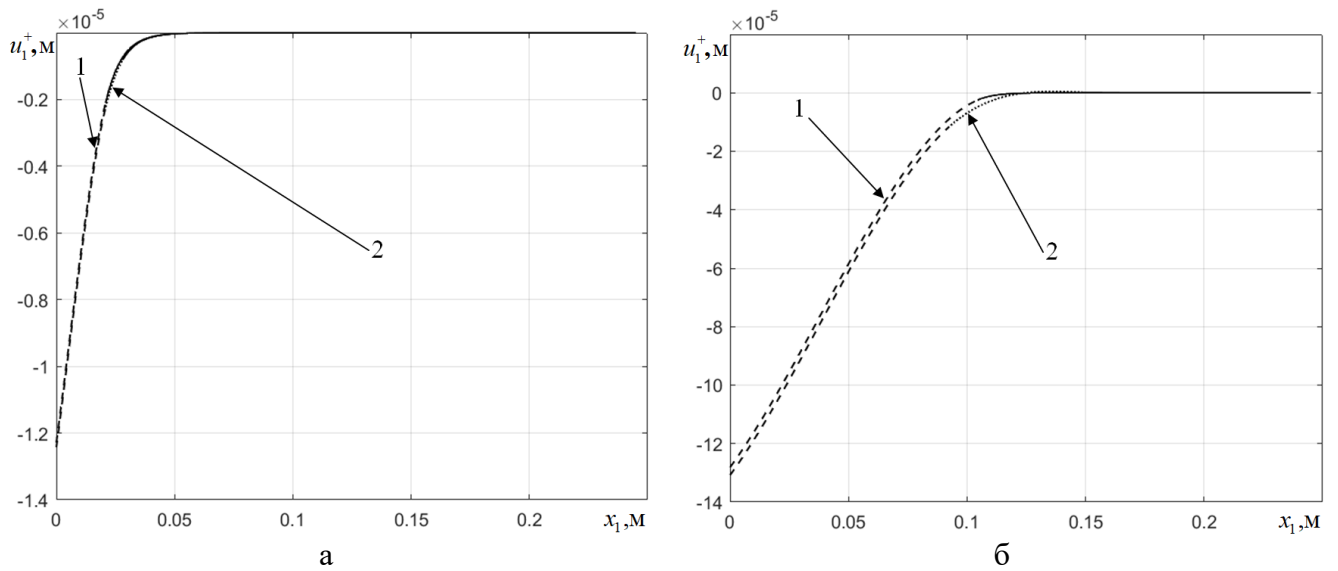


Рис. 3.17. Горизонтальные перемещения в пнс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – решение с растягивающими напряжениями, 2 – с растягивающими и сжимающими напряжениями

Аналогично на рис. 3.18 построены вертикальные перемещения  $u_2^+$  1 – (3.65), (3.24) и 2 – (3.65), (3.77), (3.24), на рис. 3.19 – углы поворота  $\varphi$  1 – (3.62), (3.25) и 2 – (3.62), (3.78), (3.25), на рис. 3.20 – средние напряжения в адгезионном слое  $\bar{\sigma}_{11}$ , на рис. 3.21 – напряжения отрыва  $\bar{\sigma}_{22}$ .

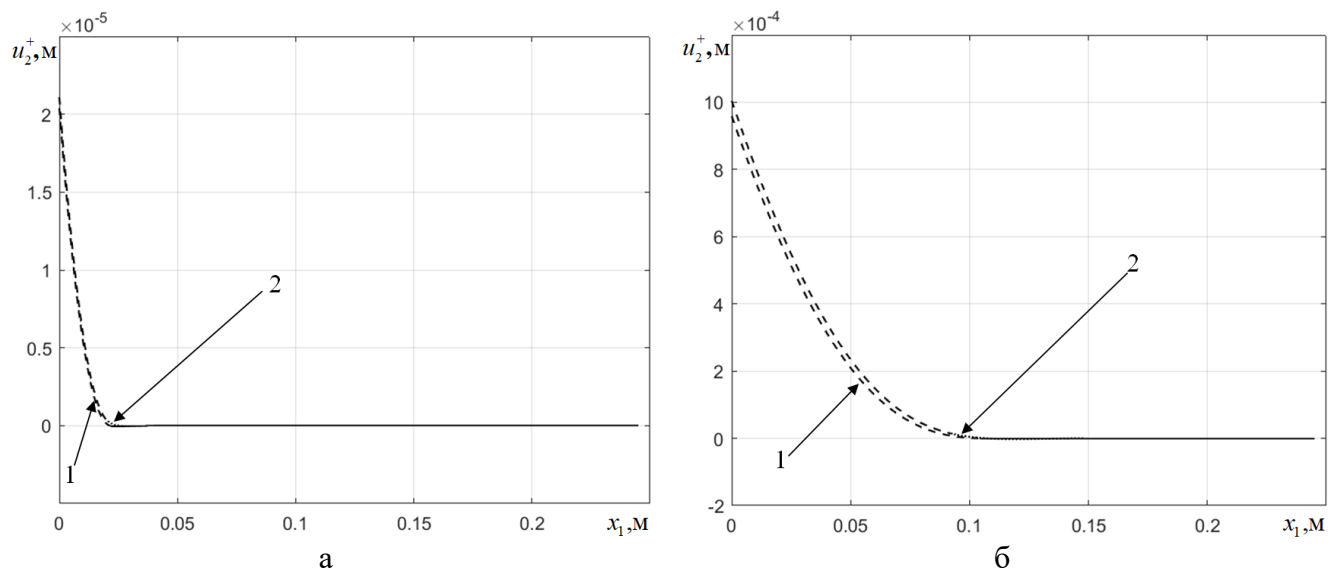


Рис. 3.18. Вертикальные перемещения в пнс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – решение с растягивающими напряжениями, 2 – с растягивающими и сжимающими напряжениями

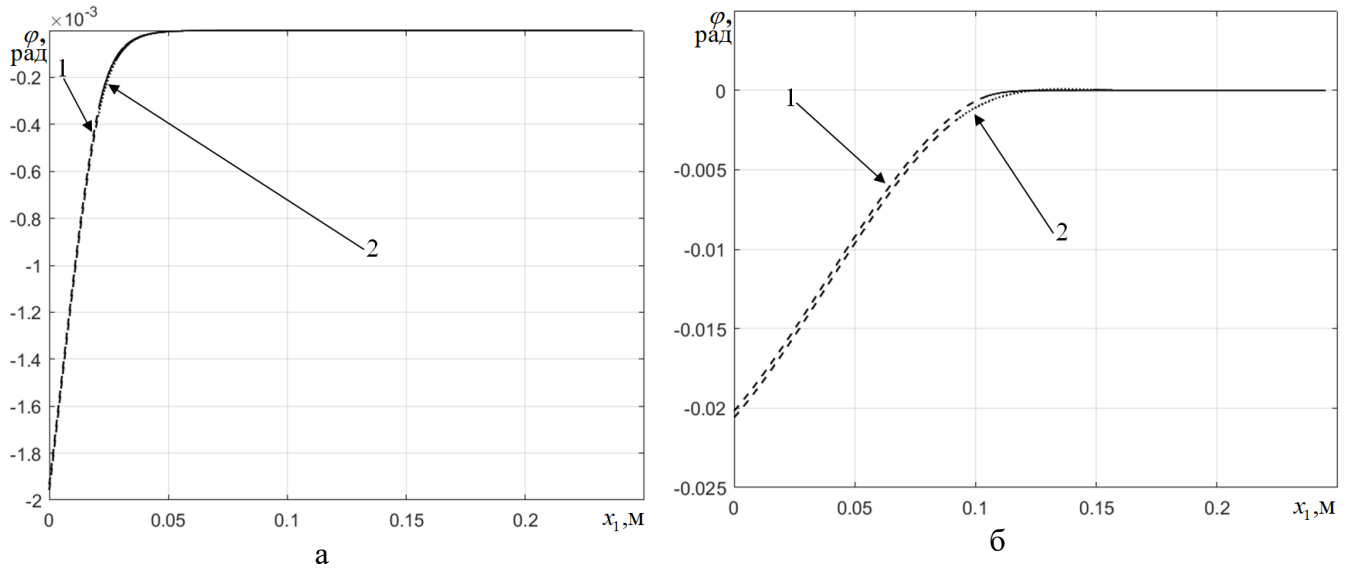


Рис. 3.19. Углы поворота в пнс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – решение с растягивающими напряжениями, 2 – с растягивающими и сжимающими напряжениями

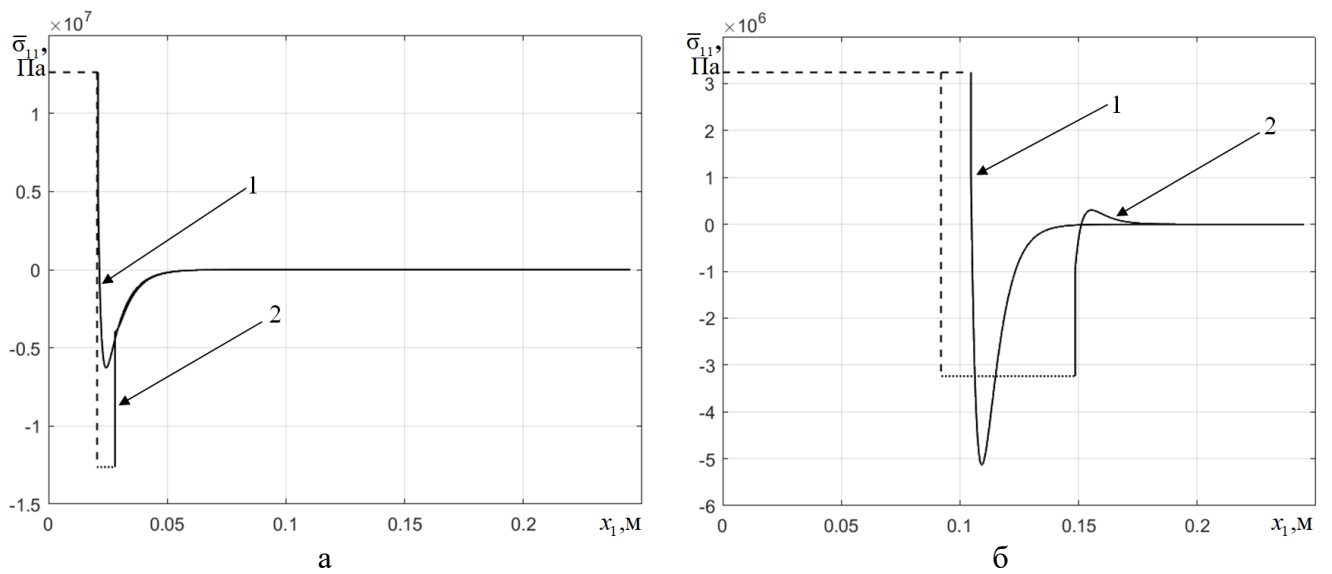


Рис. 3.20. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  в пнс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – решение с растягивающими напряжениями, 2 – с растягивающими и сжимающими напряжениями

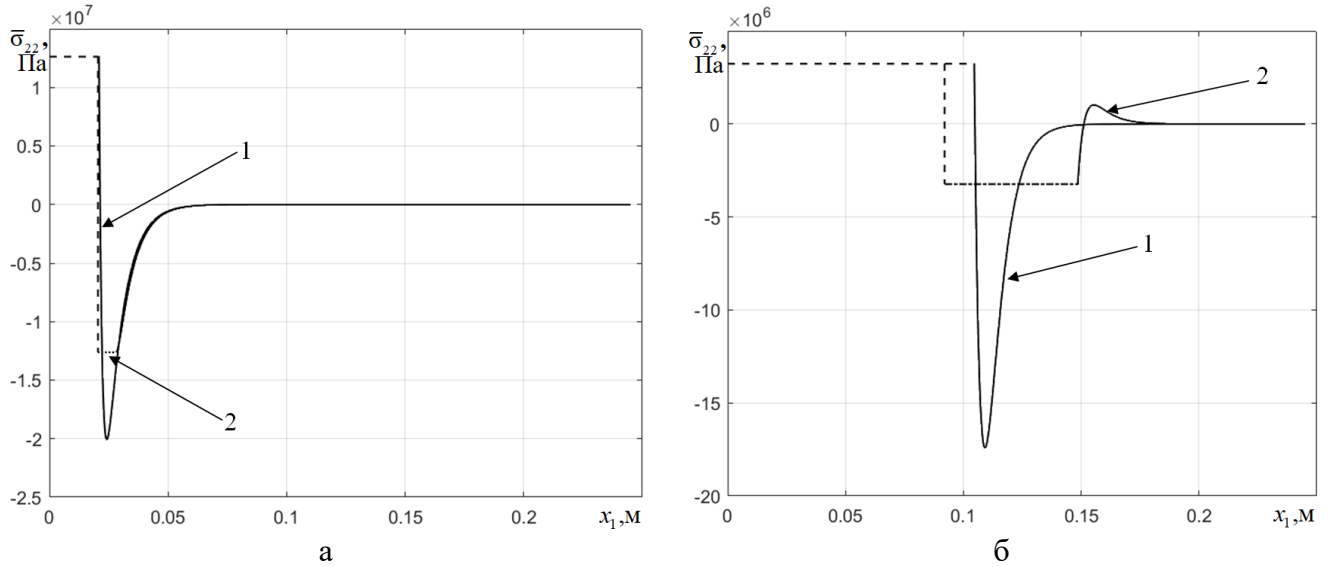


Рис. 3.21. Напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$  в пнс при  $\delta_0 = 10^{-5}$  м: (а) Araldite 2015, (б) Sikaforce 7752; 1 – решение с растягивающими напряжениями, 2 – с растягивающими и сжимающими напряжениями

Из рис. 3.17 – 3.21 видим, что учет пластической области со сжимающими напряжениями практически не влияет на поле перемещений, но оказывает влияние на распределение напряжений.

### 3.4 J-интеграл в рамках упругопластической постановки задачи

Преобразуем формулу для J-интеграла (1.28):

$$J = \delta_0 \psi \Big|_{x_1=\ell_p} - \delta_0 (\bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 + \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2) \cdot 0.5 \frac{\partial (\bar{u}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{u}_2 \mathbf{e}_2)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\ell_p} - \int_0^{\ell_p} \left( (-\sigma_{12}^- \mathbf{e}_1 - \sigma_{22}^- \mathbf{e}_2) \cdot \frac{\partial (u_1^- \mathbf{e}_1 + u_2^- \mathbf{e}_2)}{\partial x_1} + (\sigma_{12}^+ \mathbf{e}_1 + \sigma_{22}^+ \mathbf{e}_2) \cdot \frac{\partial (u_1^+ \mathbf{e}_1 + u_2^+ \mathbf{e}_2)}{\partial x_1} \right) dx_1.$$

При нагружении нормальным разрывом имеем:  $u_1^+ = u_1^-$ ,  $u_2^+ = -u_2^-$ ,  $\bar{\sigma}_{12} = 0$ ,

$\sigma_{12}^- = -\sigma_{12}^+ = 0.5 \delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1}$ ,  $\sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^- = \bar{\sigma}_{22}$ , получим:

$$J = \delta_0 \psi \Big|_{x_1=\ell_p} - \delta_0 \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\ell_p} - 2 \int_0^{\ell_p} \left( \bar{\sigma}_{22} \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} - 0.5 \delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) dx_1. \quad (3.93)$$

Преобразуем интеграл в (3.93), используя следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\ell_p} \bar{\sigma}_{22} \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} dx_1 = \bar{\sigma}_{22} u_2^+ \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell_p} - \int_0^{\ell_p} \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x_1} u_2^+ dx_1. \\
& J = 0.5 \delta_0 (\bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22} \bar{\varepsilon}_{22}) \Big|_{x_1=\ell_p} - \delta_0 \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\ell_p} - \\
& - 2 \bar{\sigma}_{22} u_2^+ \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell_p} + 2 \int_0^{\ell_p} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x_1} u_2^+ + 0.5 \delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) dx_1.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

В состоянии плоской деформации с учетом выражения средних деформаций (2.1) из формулы (3.2) получим:

$$\bar{\sigma}_{11} = K \bar{\varepsilon}_{22} + K \bar{\varepsilon}_{11} - \frac{1}{3} \sigma_0, \quad \bar{\sigma}_{22} = K \bar{\varepsilon}_{22} + K \bar{\varepsilon}_{11} + \frac{2}{3} \sigma_0. \tag{3.95}$$

Рассмотрим интеграл из (3.94):

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^{\ell_p} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x_1} u_2^+ + 0.5 \delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) dx_1 = \int_0^{\ell_p} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x_1} \delta_0 \frac{2u_2^+}{\delta_0} + \delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) dx_1 = \\
& = \delta_0 K \int_0^{\ell_p} \left( (\bar{\varepsilon}'_{22} + \bar{\varepsilon}'_{11}) \bar{\varepsilon}_{22} + (\bar{\varepsilon}'_{22} + \bar{\varepsilon}'_{11}) \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1 = \delta_0 K \int_0^{\ell_p} \left( \bar{\varepsilon}'_{22} \bar{\varepsilon}_{22} + (\bar{\varepsilon}'_{11} \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}'_{22} \bar{\varepsilon}_{11}) + \bar{\varepsilon}'_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1 = \\
& = \delta_0 K \int_0^{\ell_p} \left( \bar{\varepsilon}_{22} d(\bar{\varepsilon}_{22}) + d(\bar{\varepsilon}_{11} \bar{\varepsilon}_{22}) + \bar{\varepsilon}_{11} d(\bar{\varepsilon}_{11}) \right) dx_1 = \delta_0 K \left( 0.5 (\bar{\varepsilon}_{11}^2 + \bar{\varepsilon}_{22}^2) + \bar{\varepsilon}_{11} \bar{\varepsilon}_{22} \right) \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell_p}.
\end{aligned}$$

Таким образом, определим J-интеграл в плоском деформированном состоянии следующим образом:

$$J = \delta_0 \left[ \frac{\sigma_0}{6} (\bar{\varepsilon}_{11} - 2\bar{\varepsilon}_{22}) \Big|_{x_1=\ell_p} + \frac{K}{2} (\bar{\varepsilon}_{22}^2 - \bar{\varepsilon}_{11}^2) \Big|_{x_1=0} + \frac{2\sigma_0}{3} \bar{\varepsilon}_{22} \Big|_{x_1=0} \right]. \tag{3.96}$$

В плоском напряженном состоянии только с областью растягивающих напряжений их распределение установлено (3.58). Интеграл в (3.94) равен нулю, получим формулу для J-интеграла в виде:

$$J = 0.5 \delta_0 \sigma_0 \left( 2 \bar{\varepsilon}_{22} \Big|_{x_1=0} - \bar{\varepsilon}_{22} \Big|_{x_1=\ell_p} - \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=\ell_p} \right). \tag{3.97}$$

В плоском напряженном состоянии с учетом сжимающих напряжений, распределение которых определено (3.75), преобразуем (3.94):

$$\begin{aligned}
J = & 0.5\delta_0 \left( -\sigma_0 \bar{\varepsilon}_{11} - \sigma_0 \bar{\varepsilon}_{22} \right) \Big|_{x_1=\ell_p} + \delta_0 \sigma_0 \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\ell_p} - 2 \left( \sigma_0 u_2^+ \Big|_{x_1=0}^{x_1=\ell_p^+} - \sigma_0 u_2^+ \Big|_{x_1=\ell_p^+} \right) + \\
& + 2 \left[ \int_0^{\ell_p^+} \left( \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_1} u_2^+ + 0.5\delta_0 \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) dx_1 + \int_{\ell_p^+}^{\ell_p} \left( -\frac{\partial \sigma_0}{\partial x_1} u_2^+ - 0.5\delta_0 \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) dx_1 \right]. \quad (3.98)
\end{aligned}$$

Таким образом, получим выражение для J-интеграла:

$$J = 0.5\delta_0 \sigma_0 \left( \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=\ell_p} + 2\bar{\varepsilon}_{22} \Big|_{x_1=0} - 4\bar{\varepsilon}_{22} \Big|_{x_1=\ell_p^+} + \bar{\varepsilon}_{22} \Big|_{x_1=\ell_p} \right). \quad (3.99)$$

В таблицах 3.5 – 3.7 представлены расчетные данные полученных значений J-интеграла с использованием аналитических упругопластических решений в плоском деформированном состоянии (пдс) по формуле – (3.96), в плоском напряженном только с областью растягивающих напряжений (пнс(+)) – (3.97) и плоском напряженном состоянии с учетом сжимающих напряжений (пнс(±)) – (3.99) в зависимости от значения линейного параметра для смол Araldite AV138, Araldite 2015 и Sikaforce 7752 соответственно.

Длины пластических зон в пдс содержатся в табл. 3.1, в пнс (+) – в табл. 3.2, в пнс(±) для адгезива Araldite 2015 – в табл. 3.3, для Sikaforce 7752 – в табл. 3.4. У Araldite AV138 отсутствует область сжимающих напряжений.

В состоянии плоской деформации при уменьшении толщины адгезионного слоя  $\delta_0$  значения J-интеграла при упругопластической модели поведения (табл. 3.5 – 3.7) стремятся к значениям J-интеграла упругой модели (см. табл. 2.2 – 2.4), которые в свою очередь приближаются к значению, определенному формулой (2.66).

При толщине адгезионного слоя  $\delta_0 = 10^{-3}$  м относительная погрешность аналитически полученного значения J-интеграла по сравнению с экспериментальным (см. табл. 1.1) у Araldite AV138 составляет примерно 8 %, у Araldite 2015 – 0.5 %, а у Sikaforce 7752 – 5 %.

В плоском напряженном состоянии при упругопластической модели поведения адгезива J-интеграл стабилизируется и превышает значения J-интеграла в состоянии плоской деформации, что обусловлено постоянным

гидростатическим давлением. У Sikaforce 7752 с выраженными пластическими свойствами эта разница наиболее заметна. Причем область сжимающих напряжений не оказывает значительного влияния на значения J-интеграла, что подтверждается выводами при численном решении задачи.

Таблица 3.5 – J-интеграл при упругопластической модели поведения Araldite AV138

J (Н/м)	$\delta_0$ (м)			
	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
пдс	204.241	193.75	191.183	-
пнс(+)	217.581	217.166	217.111	217.108

Таблица 3.6 – J-интеграл при упругопластической модели поведения Araldite 2015

J (Н/м)	$\delta_0$ (м)				
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
пдс	432.291	388.337	366.905	358.018	-
пнс(+)	-	-	515.29	515.158	515.153
пнс( $\pm$ )	-	-	516.41	515.235	515.161

Таблица 3.7 – J-интеграл при упругопластической модели поведения Sikaforce 7752

J (Н/м)	$\delta_0$ (м)				
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
пдс	2243.718	1828.808	1634.054	1553.499	-
пнс(+)	-	-	6215.106	6214.823	6214.905
пнс( $\pm$ )	-	-	6319.392	6098.462	-

У квазихрупкой смолы Araldite AV138 значения  $J$ -интеграла, найденные МКЭ (см. табл. 1.8 и 1.10) и аналитически при упругой и упругопластической моделях поведения (см. табл. 2.2 и 3.5 соответственно), имеют незначительные различия. И в силу того, что длины пластических зон малы (см. табл. 1.3, 1.5, 3.1, 3.2), для этого адгезива можно ограничиться упругой постановкой задачи.

### **3.5 Основные результаты и выводы 3 главы**

1. С учетом условия текучести Треска – Сен-Венана и гипотезы полной пластичности о равенстве двух главных напряжений получены аналитические решения упругопластической постановки задачи с различными площадками текучести в плоском деформированном и плоском напряженном состояниях.

2. Определено значение  $J$ -интеграла в случае конечной толщины разрушаемого упругопластического слоя.

3. Показано, что в предельно тонком адгезионном слое для состояния плоской деформации учет упругопластических свойств в модели поведения не приводит к новым результатам в значении  $J$ -интеграла по сравнению с упругой моделью. Для плоского напряженного состояния адгезионного слоя наличие области необратимых деформаций может существенно влиять на значение  $J$ -интеграла по сравнению с упругим расчетом.

4. Для квазихрупкой смолы Araldite AV138 можно ограничиться упругой постановкой задачи в силу незначительного различия в значениях  $J$ -интеграла и маленькой длины пластической области.

5. Показано, что полученные значения  $J$ -интеграла с допустимой погрешностью совпадают с экспериментальными результатами.

### **Заключение (основные результаты и выводы по диссертации)**

1. Найдено конечно-элементное решение задачи упругопластического деформирования адгезионного слоя упругими консолями ДКБ-образца. С учетом упрощающих гипотез получены аналитические решения упругой и упругопластической постановок задачи для тонких и предельно тонких толщин адгезионного слоя с различными площадками текучести.

2. Определено значение  $J$ -интеграла в случае конечной толщины разрушаемого упругопластического слоя.

3. Показано, что в предельно тонком адгезионном слое для состояния плоской деформации учет упругопластических свойств в модели поведения не приводит к новым результатам в значении  $J$ -интеграла по сравнению с упругой моделью. Для плоского напряженного состояния адгезионного слоя наличие области необратимых деформаций может существенно влиять на значение  $J$ -интеграла по сравнению с упругим расчетом.

4. С учетом упругой деформации объема на всех стадиях деформирования, условия текучести Треска – Сен-Венана и гипотезы полной пластичности о равенстве двух главных напряжений получены линейные определяющие соотношения для области упругопластического деформирования тонкого адгезионного слоя при нормальном разрыве.

5. В плоском деформированном состоянии адгезионного слоя возможно образование нескольких зон упругопластического деформирования с разными знаками гидростатического давления. При этом основной вклад в формирование  $J$ -интеграла носит область с положительным гидростатическим давлением.

6. В условиях плоского напряженного состояния в зоне пластического деформирования слоя возможно образование областей сжимающих напряжений, учет которых не оказывает существенного влияния на значение  $J$ -интеграла.

## Список литературы

1. Абдурахманов, А. А. К оценке предельного состояния адгезионного слоя в слоистом композите / А. А. Абдурахманов, В. Э. Богачева, В. В. Глаголев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т. 26, № 2. – С. 247–258. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2020.26.02.247\_258.07.
2. Аннин, Б. Д. Двумерные подмодели идеальной пластичности при условии полной пластичности / Б. Д. Аннин // Проблемы механики : сб. статей. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2003. – С. 94–99.
3. Астапов, И. С. Модель расслоения композита при поперечном сдвиге / И. С. Астапов, Н. С. Астапов, В. М. Корнев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 149–161.
4. Астапов, Н. С. Модель расслоения разномодульного биматериала с трещиной / Н. С. Астапов, В. М. Корнев, В. Д. Кургузов // Физическая мезомеханика. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 49–57.
5. Богачева, В. Э. Аналитическое решение задачи о нормальном разрыве адгезионного слоя консолями ДКБ-образца и его конечно-элементное тестирование / В. Э. Богачева // Вестник ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – 2024. – Вып. 1. – С. 13–24.
6. Богачева, В. Э. Вариант сдвигового деформирования адгезионного слоя с учетом его упругопластических свойств. Постановка задачи / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, О. В. Инченко // Эксперт: теория и практика. – 2021. – № 3 (12). – С. 41–46. DOI: 10.51608/26867818\_2021\_3\_41.
7. Богачева, В. Э. Вариант сдвигового деформирования адгезионного слоя с учетом его упругопластических свойств. Нахождение J-интеграла / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, О. В. Инченко // Эксперт: теория и практика. – 2021. – № 6 (15). – С. 65–70. DOI: 10.51608/26867818\_2021\_6\_65.
8. Богачева, В. Э. Влияние геометрических характеристик композита на напряженное состояние тонкого адгезионного слоя / В. Э. Богачева, О. С. Перова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.

И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – № 4 (62). – С. 98–107. DOI:10.37972/chgru.2024.62.4.011.

9. Богачева, В. Э. Влияние модели поведения тонкого адгезионного слоя в соединении внахлест на значение J-интеграла / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 4. – С. 432–444. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-432-444.

10. Богачева, В. Э. Влияние толщины упругопластического адгезионного слоя композита на значение J-интеграла / В. Э. Богачева, И. М. Лавит, О. С. Перова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2025. – №4 (66). – С. 214–224. DOI:10.37972/chgru.2025.66.4.014.

11. Богачева, В. Э. Задача о сжатии адгезионного слоя консолями ДКБ-образца / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, М. О. Глаголева // Вестник ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – 2025. – Вып. 1. – С. 19–28.

12. Богачева, В. Э. Исследование деформирования тонкого адгезионного слоя композита при воздействии нормальным отрывом / В. Э. Богачева // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – Вып. 7. – С. 38–45. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-38-39.

13. Богачева, В. Э. Исследование предела упругости тонкого адгезионного слоя композита при его нагружении нормальным отрывом / В. Э. Богачева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 3 (57). – С. 66–73. DOI: 10.37972/chgru.2023.57.3.005.

14. Богачева, В. Э. Исследование сдвигового воздействия связанных консолей на тонкий адгезионный слой / В. Э. Богачева // Вестник ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – 2021. – Вып. 1. – С. 15–24.

15. Богачева, В. Э. Напряженное состояние тонкого адгезионного слоя при его нормальном разрыве / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, О. В. Инченко //

Эксперт: теория и практика. – 2021. – № 4 (13). – С. 29–36.  
DOI: 10.51608/26867818\_2021\_4\_29.

16. Богачева, В. Э. Постановка задачи деформирования слоистого композита с трещиноподобным дефектом адгезионного слоя / В. Э. Богачева, В. В. Глаголев, М. О. Глаголева // Вестник ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – 2020. – Вып. 1. – С. 15–29.

17. Богачева, В. Э. Влияние механических характеристик слоистого композита на критическое значение  $J$ -интеграла / В. Э. Богачева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 4 (58). – С. 63–70.  
DOI: 10.37972/chgru.2023.58.4.007.

18. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

19. Влияние пластических свойств тонкого адгезионного слоя на распределение зон пластичности и значения  $J$ -интеграла в состоянии плоской деформации / В. Э. Богачева [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 1. – С. 115–131.  
DOI: 10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.08.

20. Влияние типа плоской задачи для тонкого упругопластического адгезионного слоя на значение  $J$ -интеграла / В. Э. Богачева [и др.] // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64, № 6. – С. 168–175.  
DOI: 10.15372/PMTF202315316.

21. Глаголев, В. В. Биметаллическая пластина в однородном температурном поле / В. В. Глаголев, А. А. Маркин, С. В. Пашинов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т. 23, № 3. – С. 331–343.

22. Глаголев, В. В. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах когезионного разрушения композита с адгезионным слоем / В. В. Глаголев, А. А. Маркин, А. А. Фурсаев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 45–59.

23. Глаголев, В. В. Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем / В. В. Глаголев, А. А. Маркин, А. А. Фурсаев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2. – С. 34–44.

24. Глаголев, В. В. Модель сдвигового упругопластического деформирования тонкого адгезионного слоя / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2020. – № 6. – С. 93–100. DOI: 10.31857/S0572329920060070.

25. Глаголев, В. В. Модель установившегося разделения материального слоя / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 121–129.

26. Глаголев, В. В. Об одной постановке задачи упругопластического разделения / В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – № 4 (50) – С. 187–195.

27. Глаголев, В. В. Энергетическое произведение в модели трещиноподобного дефекта при нагружении типа моды II / В. В. Глаголев, Л. В. Глаголев, А. А. Маркин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 4. – С. 48–58. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.05.

28. Гольдштейн, Р. В. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22–39.

29. Гольдштейн, Р. В. Отслоение покрытий под действием термоупругих напряжений (Балочное приближение) / Р. В. Гольдштейн, Н. М. Осипенко // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – Т. 54, № 4. – С. 66–83.

30. Ентов, В. М. К модели хрупкого разрушения Прандтля / В. М. Ентов, Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. МТТ. – 1968. – № 6. – С. 87–99.

31. Захаров, А. П. Пластический коэффициент интенсивности напряжений в задачах механики разрушения / А. П. Захаров, В. Н. Шлянников, И. С. Иштыряков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического

университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 100–115.  
DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.08.

32. Зубчанинов, В. Г. Обобщенный критерий полной и неполной пластичности сплошных сред / В. Г. Зубчанинов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 161–171.

33. Ивлев, Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д. Д. Ивлев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 3. – С. 546–549.

34. Ивлев, Д. Д. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния / Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова // Прикладная механика и техническая физика. – 1963. – № 3. – С. 102–104.

35. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.

36. Ишлинский, А. Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля / А. Ю. Ишлинский // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т. 8, вып. 3. – С. 201–224.

37. К нахождению предела упругости адгезионного слоя при его нормальном разрыве / В. Э. Богачева [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2023. – № 83. – С. 59–73.  
DOI: 10.17223/19988621/83/6.

38. Кулиев, В. Д. К проблеме разрушения многослойных композитных материалов / В. Д. Кулиев, Н. Л. Борисова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – Т. 26, № 4. – С. 63–71.

39. Кургузов, В. Д. Построение диаграмм квазихрупкого и квазивязкого разрушения материалов на основе необходимых и достаточных критериев / В. Д. Кургузов, В. М. Корнев // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 179–194.

40. Лавит, И. М. Об устойчивом росте трещины в упругопластическом материале / И. М. Лавит // Проблемы прочности. – 1988. – № 7. – С. 18–23.
41. Леонов, М. Я. Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391–401.
42. Малик, А. В. Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении / А. В. Малик, И. М. Лавит // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 54. – С. 88–102. DOI: 10.17223/19988621/54/8.
43. Морозов, Н. Ф. Изгиб двуслойной балки с нежестким контактом между слоями / Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75, № 1. – С. 112–121.
44. Морозов, Н. Ф. Обобщенная модель Тимошенко-Рейсснера для многослойной пластины / Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – № 5. – С. 22–35.
45. Морозов, Н. Ф. Применение критерия хрупкого разрушения В. В. Новожилова при определении разрушающих нагрузок для угловых вырезов в условиях сложного напряженного состояния / Н. Ф. Морозов, Б. Н. Семенов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 122–126.
46. Напряженное состояние и разрушение адгезива при соединении пластин внахлест / В. Э. Богачева [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 3. – С. 75–84. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.3.06.
47. Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В. Э. Богачева [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 3. – С. 22–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.03.
48. Нейбер, Г. Концентрация напряжений / Г. Нейбер. – М.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.

49. Новожилов, В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В. В. Новожилов // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, вып. 2. – С. 212–222.

50. О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 1. Упругое деформирование / В. Э. Богачева [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 116–124. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.12.

51. О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 2. Упругопластическое деформирование / В. Э. Богачева [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 3. – С. 30–42. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.3.03.

52. Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите / В. Э. Богачева [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 64. – С. 63–77. DOI: 10.17223/19988621/64/5.

53. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М.: Наука, 1985. – 502 с.

54. Радаев, Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности: Учебное пособие / Ю. Н. Радаев. – Самара: Издательство «Самарский университет», 2004. – 142 с.

55. Салганик, Р. Л. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия / Р. Л. Салганик, А. А. Мищенко, А. А. Федотов // К 75-летию со дня рождения профессора Владимира Марковича Ентова. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. – 180 с.

56. Салганик, Р. Л. Напряженное состояние в окрестности выработки, пройденной в глубокозалегающем горизонтальном пласте / Р. Л. Салганик, А. А. Мищенко, А. А. Федотов // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2015. – № 2. – С. 24–33.

57. Хаар, А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности : сб. статей. – М.: Государственное издательство иностранной литературы. – 1948. – С. 41–56.

58. Черепанов, Г. П. Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

59. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

60. Численно-аналитическое исследование значения J-интеграла в двухконсольной балке с тонким упругопластическим адгезионным слоем / В. Э. Богачева [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 2. – С. 149–158. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-149-158.

61. Andrews, M. G. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers / M. G. Andrews, R. Massabo // Engineering Fracture Mechanics. – 2007. – Vol. 74. – P. 2700–2720. DOI: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013.

62. Barbieri, L. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams / L. Barbieri, R. Massabo, C. Berggreen // Engineering Fracture Mechanics. – 2018. – Vol. 201. – P. 298–321.

63. Berto, F. J-integral evaluation for U- and V-blunt notches under Mode I loading and materials obeying a power hardening law / F. Berto, P. Lazzarin, Y. G. Matvienko // International Journal of Fracture. – 2007. – Vol. 146, no. 1–2. – P. 33–51.

64. Berto, F. Relationship between  $J_c$  and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite / F. Berto, V. V. Glagolev, A. A. Markin // International Journal of Fracture. – 2020. – Vol. 224, no. 2. – P. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0.

65. Berto, F. Relationships between J-integral and the strain energy evaluated in a finite volume surrounding the tip of sharp and blunt V-notches / F. Berto, P. Lazzarin // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – P. 4621–4645.

66. Borja, R. I. *Plasticity: Modeling & Computation* / R. I. Borja. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. – 255 p.

67. Bruno, D. Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables / D. Bruno, F. Greco, P. Lonetti // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2005. – Vol. 12, no. 4. – P. 285–304. DOI: 10.1080/15376490590953563.

68. Bruno, D. Mixed-mode delamination in plates: a refined approach / D. Bruno, F. Greco // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38, no. 50–51. – P. 9149–9177. DOI:10.1016/S0020-7683(01)00179-2.

69. Chen, F. H. K. Conservation laws in elasticity of the J-integral type / F. H. K. Chen, R. T. Shield // *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*. – 1977. – Vol. 28. – P. 1–22. DOI: 10.1007/BF01590704.

70. Cherepanov, G. P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics / G. P. Cherepanov // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2012. – Vol. 76, no. 5. – P. 519–536. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014.

71. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R. M. Lopes [et al.] // *Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2016. – Vol. 67. – P. 103–111. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032.

72. De Souza Neto, E. A. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications* / E. A. de Souza Neto, D. Peric, D. R. J. Owen. – John Wiley & Sons Ltd, 2008. – 816 p.

73. Dugdale, D. S. Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1960. – Vol. 8, no. 2. – P. 100–104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2.

74. Experimental and Numerical Analysis on the Strength of 2060 Al–li Alloy Adhesively Bonded T / X. Zhan [et al.] // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2016. – Vol. 65. – P. 79–87. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.11.010.

75. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints / J. M. M. Dionisio [et al.] // *International Journal of Fracture*. – 2021. – Vol. 232. – P. 77–91. DOI: 10.1007/s10704-021-00594-z.
76. Fracture toughness determination of adhesive and cocured joints in natural fibre composites / R. D. S. G. Campilho [et al.] // *Composites Part B: Engineering*. – 2013. – Vol. 50. – P. 120–126. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.01.025.
77. Fraisse, P. Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints / P. Fraisse, F. Schmit // *International Journal of Fracture*. – 1993. – Vol. 63, no. 1. – P. 59–73. DOI: 10.1007/BF00053316.
78. Glagolev, V. V. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter / V. V. Glagolev, A. A. Markin // *International Journal of Solids and Structures*. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002.
79. Griffith, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids / A. A. Griffith // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A*. – 1921. – Vol. 221. – P. 163–189. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006.
80. Hart-Smith, L. Adhesive Bonding of Aircraft Primary Structures / L. Hart-Smith // *SAE Transactions*. – 1980. – Vol. 89, no. 4. – P. 3718–3732.
81. Hutchinson, J. W. Plastic stress and strain fields at a crack tip / J. W. Hutchinson // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 337–347. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90021-5.
82. Hutchinson, J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material / J. W. Hutchinson // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 13–31. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90014-8.
83. Kornev, V. M. Fracture Model of Bimaterial under Delamination of Elastoplastic Structured Media / V. M. Kornev, V. D. Kurguzov, N. S. Astapov // *Applied Composite Materials*. – 2012. – Vol. 20, no. 2. – P. 29–143.
84. Kulkarni, S. V. Propagation of delamination in a layered cylindrical shell / S. V. Kulkarni, D. Frederick // *International Journal of Fracture*. – 1973. – Vol. 9, no. 1. – P. 113–115.

85. Lavit, I. M. Stable crack growth in an elastoplastic material / I. M. Lavit // *Strength of Materials*. – 1988. – Vol. 20, no. 7. – P. 854–860. DOI: 10.1007/BF01528695.

86. Li, S. An atomistic-to-continuum molecular dynamics: Theory, algorithm, and applications / S. Li, S. Urat // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2016. – Vol. 306. – P. 452–478.

87. Li, S. The effects of shear on delamination in layered materials / S. Li, J. Wang, M. D. Thouless // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2004. – Vol. 52, no. 1. – P. 193–214. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00070-X.

88. Long, H. A rigorous analytical solution of interfacial stresses and overall stiffness of beam structures bonded with partially covered plates / H. Long, Y. Wei, L. Liang // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2020. – Vol. 167. – 105284.

89. Mindlin, R. D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates / R. D. Mindlin // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38. DOI: 10.1007/978-1-4613-8865-4\_29.

90. Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters / F. Berto [et al.] // *International Journal of Solids and Structures*. – 2020. – Vol. 193–194. – P. 447–454. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039.

91. Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts / L. F. R. Neves [et al.] // *Processes*. – 2022. – Vol. 10, no. 12. – 2730. DOI: 10.3390/pr10122730.

92. On the interfacial strength of bonded scarf joints / Z. Wu [et al.] // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2014. – Vol. 131. – P. 142–149. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.07.026.

93. Prandtl, L. A thought model for the fracture of brittle solids / L. Prandtl, W. G. Knauss // *International Journal of Fracture*. – 2011. – Vol. 171, no. 2. – P. 105–109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3.

94. Reissner, E. On Bending of Elastic Plates / E. Reissner // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1947. – Vol. 5, no. 1. – P. 55–68. DOI: 10.1090/qam/20440.

95. Reissner, E. Reflections on the Theory of Elastic Plates / E. Reissner // *Applied Mechanics Reviews*. – 1985. – Vol. 38, no. 11. – P. 1453–1464. DOI: 10.1115/1.3143699.

96. Rice, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks / J. R. Rice // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1968. – Vol. 35. – P. 379–386. DOI: 10.1115/1.3601206.

97. Rice, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks / J. R. Rice // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1968. – Vol. 35. – P. 379–386. DOI: 10.1115/1.3601206.

98. Rice, J. R. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material / J. R. Rice, G. F. Rosengren // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1968. – Vol. 16. – P. 1–12. DOI: 10.1016/0022-5096(68)90013-6.

99. Samudrala, O. Subsonic and intersonic mode II crack propagation with a rate-dependent cohesive zone / O. Samudrala, Y. Huang, A. J. Rosakis // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2002. – Vol. 50. – P. 1231–1268.

100. Santos, M. A. S. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility / M. A. S. Santos, R. D. S. G. Campilho // *International Journal of Fracture*. – 2017. – Vol. 207, no. 1. – P. 55–71. DOI: 10.1007/s10704-017-0219-x.

101. Shear deformation dominates in the soft adhesive layers of the laminated structure of flexible electronics / S. Li [et al.] // *International Journal of Solids and Structures*. – 2017. – Vol. 110–111. – P. 305–314.

102. Sheinman, I. Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates / I. Sheinman, G. Kardomateas // *International Journal of Solids and Structures*. – 1997. – Vol. 34, no. 4. – P. 451–459.

103. Suo, Z. Interface crack between two elastic layers / Z. Suo, J. W. Hutchinson // *International Journal of Fracture*. – 1990. – Vol. 43, no. 1. – P. 1–18. DOI: 10.1007/BF00018123.

104. Testing mechanical performance of adhesively bonded composite joints in engineering applications: an overview / M. K. Budzik [et al.] // *The Journal of*

Adhesion. – 2021. – Vol. 98, no. 14. – P. 2133–2209.  
DOI: 10.1080/00218464.2021.1953479.

105. Thanh, L. T. A solution to the problem of elastic half-plane with a cohesive edge crack / L. T. Thanh, L. A. Belaya, I. M. Lavit // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2018. – Vol. 973, no. 1. – id. 12020. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012020.

106. Tresca, H. Memoire sur l'ecoulement des corps solides / H. Tresca // *Mem pres par div savants*. – 1868. – Vol. 18. – P. 733–799.

107. Tresca, H. Writings on the Machining of Metals / H. Tresca // *Bull. Soc. d'Encouragement pour l'Industrie Nationale*. – 1873. – P. 585–685.

108. Ustinov, K. B. On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: Exact analytical solutions for some particular cases / K. B. Ustinov, D. M. Idrisov // *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2021. – Vol. 101, no. 4. – e202000239. DOI: 10.1002/zamm.202000239.

109. Ustinov, K. B. On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers / K. B. Ustinov, R. Massabo // *International Journal of Solids and Structures*. – 2022. – Vol. 248. – P. 11–16.

110. Ustinov, K. B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings / K. B. Ustinov // *Engineering Failure Analysis*. – 2015. – Vol. 47. – P. 338–344.

111. Ustinov, K. B. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution / K. B. Ustinov, R. Massabo, D. S. Lisovenko // *Engineering Failure Analysis*. – 2020. – Vol. 110. – P. 104410. DOI:10.1016/j.engfailanal.2020.104410.