

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

На правах рукописи



ЛУТХОВ АНДРЕЙ ИГОРЕВИЧ

**РАЗРУШЕНИЕ ТОНКИХ АДГЕЗИОННЫХ СЛОЕВ В
ОКРЕСТНОСТИ ТРЕЩИНОПОДОБНЫХ ДЕФЕКТОВ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ. - мат. наук, профессор
Глаголев Вадим Вадимович

Тула – 2026

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Аналитический обзор и постановка задач исследования	9
1.1. Характеристика трещиностойкости – J -интеграл.....	18
1.2. Существующие критерии роста трещин.....	21
1.3. Выводы по главе 1.....	28
Глава 2. Нахождение характеристики типа J-интеграл при конечно-элементном решении	29
2.1. Контурный интеграл.....	29
2.2. Работа узловых сил при исключении элемента	45
2.3. Результаты и выводы по главе 2.....	53
Глава 3. Критерий разрушения смешанной моды нагружения I+II трещиноподобного дефекта тонкого адгезионного слоя	54
3.1. Формулировка двухпараметрических критериев разрушения.....	55
3.2. Исследование разрушения адгезива при соединении изотропных пластин внахлест на основе решения Холланда – Рейсснера	57
3.3. Разрушение тонкого адгезионного слоя в рамках конечно-элементного решения	63
3.3.1. Однопараметрический критерия разрушения.....	67
3.3.2. Двухпараметрические критерии разрушения	72
3.4. Результаты и выводы по главе 3.....	76
Глава 4. Применение критерия разрушение для смешанной моды нагружения I+II трещины в адгезиве нулевой толщины	78
4.1. Исследование разложения J -интеграла на аддитивные слагаемые в двухпараметрическом критерии разрушения в случае нагружения SLB-образца.	79
4.2. Применение одно и двухпараметрического критерия разрушения для случая нормального сжатия	91
4.3. Результаты и выводы по главе 4.....	95
Заключение	96
Список литературы	100

Введение

Актуальность темы исследования. Внезапные и непредсказуемые разрушения конструкций, в большинстве случаев, происходят хрупким образом, в этом случае, как правило, происходит зарождение трещины и ее последующее распространение. Один из основных терминов механики разрушения – «трещиностойкость». Он имеет широкий смысл, который охватывает способность конструкций сопротивляться развитию трещин при статическом, циклическом и динамическом нагружении. Трещиностойкость играет значимую роль для конструкционной прочности материала, поэтому ее изучение в настоящее время – важная задача.

В разных сферах производства сегодня всё более востребованными становятся композиционные материалы, поэтому важной задачей становится исследование их прочности в разных режимах нагружения. В настоящем исследовании внимание уделяется слоистым композитам, где из-за неравномерной структуры существует риск разрушения или образования трещин в местах соединения слоев. Поскольку адгезионные слои значительно тоньше, чем материалы, которые они соединяют, разрушение адгезивов обычно представляется как движение математического разреза, т.е. слоя нулевой толщины.

Классификация трещин сводится к трём ключевым видам нагружений и включает в себя: нагружение по моде I (нормальный отрыв); нагружение по моде II (поперечный сдвиг) и нагружение по моде III (продольный сдвиг). На сегодняшний день существует большое количество методов стандартных испытаний образцов для определения механических свойств материалов, отвечающих за трещиностойкость. Также проводятся испытания для отдельных этапов жизненного цикла трещины: её зарождение, распространение и остановка движущейся трещины. Очевидно, что натурные конструкции и их отдельные элементы не всегда подвержены простым видам нагружения, поэтому актуальность темы исследования также связана с изучением процесса разрушения адгезионных слоев композитов при смешанных режимах нагружения.

В данной работе при изучении нагружения образцов используются численные методы математического моделирования. Среди численных методов метод конечных элементов (МКЭ) выделяется своей исключительной применимостью в программной реализации. В настоящее время МКЭ широко используется на глобальном уровне как неотъемлемая составляющая процесса проектирования разнообразных объектов, включая транспортные средства, судна, воздушные суда, атомные и гидроэлектростанции, тепловые магистрали и многое другое. Различное программное обеспечение «Штуцер-МКЭ», «CAE Fidesys», «Логос», «Зенит-95», «Flow Simulation», «Abaqus», «MSC Nastran», «Ansys» и аналогичные инструменты являются полезными в решении как практических, так и теоретических проблем механики. Таким образом, изучение процессов нагружения и разрушения образцов с помощью известных пакетов прикладных программ на современном уровне является важной частью данной работы.

Объектом исследования являются стандартные образцы для определения характеристик трещиностойкости адгезионных слоев композитов в различных схемах нагружения (по моде I, по моде II, по смешанным модам I+II), в том числе критических.

Предметом исследования являются характеристики напряженно-деформированного состояния адгезива слоистого композита при конечно-элементном решении и критерии трещиностойкости адгезива.

Целью диссертационной работы является разработка критерия разрушения трещиноподобных дефектов адгезионных слоев при смешанной (I+II) моде нагружения.

В рамках диссертационного исследования ставятся следующие **задачи**:

1. Вычисление характеристики трещиностойкости типа J -интеграла для разных мод нагружений (I, II, I+II) при конечно-элементном решении в зависимости от модели трещиноподобного дефекта, определение ее аддитивных составляющих и их взаимосвязи в состоянии разрушения;

2. Разработка и верификация критерия разрушения трещиноподобных дефектов адгезионных слоев при смешанной (I+II) моде нагружения.

Научная новизна исследования состоит во введении и учете аддитивных составляющих J -интеграла на разрушение повреждённого адгезионного слоя.

Теоретическая значимость работы состоит в разработке методов нахождения характеристик трещиностойкости при конечно-элементном решении задач нагружения и критерия разрушения трещиноподобных дефектов адгезионных слоев при смешанной (I+II) моде нагружения.

Данная работа имеет **практическую ценность** для многих машиностроительных индустрий, где широко применяются программные комплексы, такие как ANSYS, Abaqus, MSC Nastran и другие. В данной работе при изучении нагружения образцов отдельное место занимает решение на основе определения напряженно-деформированного состояния в ANSYS. Таким образом, результаты исследований могут быть внедрены в процессы проектирования.

Разработанный критерий разрушения адгезионных слоев при смешанных (I+II) режимах нагружения позволит дать оценку прочности натуральных конструкций и их отдельных элементов, т.к. чаще всего они подвержены сложным видам нагружения, лучше понимать процесс роста трещиноподобных дефектов при смешанных режимах нагружения. Критерии, используемые в настоящее время, ориентированы на простые типы нагрузок, либо опираются на эмпирические данные, полученные при проведении испытаний.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Данное диссертационное исследование раскрывает результаты, соотнесенные со следующими пунктами направлений исследований специальности 1.1.8 «Механика деформируемого твердого тела»:

- Законы деформирования, повреждения и разрушения материалов, в том числе природных, искусственных и вновь создаваемых (пункт 1);

- Механика композиционных материалов и конструкций, механика интеллектуальных материалов (пункт 4);
- Прочность при сложных режимах нагружения. Теория накопления повреждений. Механика разрушения твердых тел (пункт 10);
- Математическое моделирование поведения дискретных и континуальных деформируемых сред при механических, тепловых, электромагнитных, химических, гравитационных, радиационных и прочих воздействиях (пункт 11);
- Вычислительная механика деформируемого твердого тела (пункт 12).

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод нахождения характеристика типа J -интеграл трещиноподобных дефектов при конечно-элементном решении задач нагружения.
2. Критерий разрушения трещиноподобных дефектов адгезионных слоев при смешанной (I+II) моде нагружения.

Подтверждение достоверности и обоснованности предлагаемых к защите положений, выводов и рекомендаций осуществляется путем:

1. Оценивания соответствия модельных представлений действительным физико-механическим закономерностям деформирования образцов под нагрузкой;
2. Сравнения полученных расчетных данных о напряженно-деформированном состоянии и характеристик трещиностойкости с уже имеющимися численными, аналитическими решениями и результатами экспериментальных исследований;
3. Применения апробированного математического аппарата и инструментов.

Основные выводы и результаты диссертационной работы были **апробированы** на следующих конференциях: Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (г. Воронеж, 2022 г.); XVIII Региональная магистерская научная конференция (г. Тула, 2023 г.); Всероссийская конференция молодых ученых-механиков (г. Сочи, 2023 г.); XXXII Всероссийской конференции «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2023 г.); XXXIII Всероссийской конференции «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь 2024 г.). Диссертация в целом докладывалась и обсуждалась на научных конференциях кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (руководитель: д-р ф.-м. наук, профессор Глаголев В.В.) в 2024, 2025, 2026 гг. На научном семинаре имени Л.А. Толоконникова (руководитель семинара: д-р ф.-м. наук, профессор Маркин А.А.) в 2026 г.

Работа выполнялась при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проекты № 22-71-00003 и № 23-21-00017).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 15 печатных работах, из которых 3 статьи из перечня ВАК с индексацией 2 статьей в базах данных Web of Science или Scopus, 3 статей в базах данных Web of Science и Scopus, 1 статьи в базе данных Scopus, 1 статьи в базе данных RSCI и 7 статей в прочих изданиях.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук В. В. Глаголеву за постановки задач и поддержку работы.

Личный вклад автора. Статьи [136, 137, 139] написаны автором самостоятельно. Постановка задач, разработка методов их решения, а также подготовка к публикации полученных результатов в работах [119, 133–135, 138, 140, 145–148, 157, 158] диссертантом проводилась совместно с соавторами. Разработка методов расчета характеристики трещиностойкости типа J -интеграл в трещиноподобных дефектах при конечно-элементных решениях, исследование влияния аддитивных слагаемых J -интеграла на процесс роста трещиноподобных дефектов при модах нагружения I, II, I+II, разработка алгоритма расчета

характеристики трещиностойкости типа J -интеграл и его аддитивных слагаемых с помощью стандартных конечных элементов в программном комплексе ANSYS, численное решение задач, анализ и систематизация полученных результатов исследований, формулировка основных научных положений и выводов выполнено автором диссертации самостоятельно.

Диссертационная работа включает в себя введение, 4 главы, заключение и список литературы. Общий объем диссертации составляет 112 страниц, включая 27 рисунков, 27 таблиц. Список литературы включает 175 наименований на 13 страницах.

Глава 1

Аналитический обзор и постановка задач исследования

Внезапные и непредсказуемые разрушения конструкций, в большинстве случаев, происходят хрупким образом. В этом случае происходит зарождение трещины и ее последующее распространение без образования зон пластического деформирования. Механика квазихрупкого разрушения изучает вопросы, связанные с развитием трещин при отсутствии или незначительной области пластического деформирования.

Термин «механика разрушения» возник относительно недавно и употребляется в двояком смысле. В более узком смысле считается, что механика разрушения изучает процессы распространения трещин. В более широком смысле, механика разрушения включает в себя часть науки о сопротивлении материалов, которая рассматривает конечную стадию процесса деформирования. Таким образом, вопросы прочности различных конструкций охватывается областью изучения механики разрушения.

Один из основных терминов механики квазихрупкого разрушения – «трещиностойкость». Он имеет широкий смысл, который охватывает способность конструкций сопротивляться развитию трещин при статическом, циклическом и динамическом нагружении. Трещиностойкость играет значимую роль для конструкционной прочности материала, поэтому ее изучение в настоящее время – актуальная задача.

На сегодняшний день существует большое количество методов стандартных испытаний образцов для определения механических свойств материалов, отвечающих за трещиностойкость. Также проводятся испытания для отдельных этапов жизненного цикла трещины: её зарождение, распространение и остановка движущейся трещины.

Ш. Кулон, А. Сен-Венан и О. Мор положили начало теории предельного равновесия, А. Гриффитс в своей работе [1] заложил основы теории хрупкого разрушения.

Одна из важнейших концепций механики разрушения – концепция хрупкого разрушения Гриффитса. Большая часть существующих исследований разрушения опираются именно на нее. Однако, в последнее время появилось мнение, что разрушение большинства материалов подчиняется более сложным законам, а истинной хрупкостью, согласно исследованиям Н. Петча [2], обладают лишь алмаз, кварц и каменная соль при очень низких температурах.

Особое значение приобрела концепция Е. Орована [3]: он сумел обобщить теорию Гриффитса таким образом, чтобы исследовать поведение металлических материалов с ее помощью. Е. Орован определил, что деформации пластического характера незначительны в случае квазихрупкого растрескивания. При этом затраты энергии на образование новых материальных поверхностей трещины связаны с работой пластической деформации в тонкой области у границ трещины.

Активное изучение процесса разрушения началось в 40-е годы прошлого столетия, когда начали принимать во внимание то, что этот процесс может занимать значительный период времени, а не происходит мгновенно, как считалось раньше. До этого времени ученые считали, что в теле всегда имеются начальные трещины, что в большинстве случаев действительно так. В предположении мгновенного процесса разрушения при выводе критериев прочности получились соотношения, совпадающие с обычными критериями прочности при нулевых размерах начальных трещин. Это ограничивало возможность проведения исследований процесса разрушения. При рассмотрении разрушения как процесса, протекающего во времени, стало возможно использовать характеристики прочности, зависящие от структурных параметров. Это позволило использовать известные теории прочности после введения в них дополнительных параметров [4, 5].

В настоящее время процесс разрушения стал предметом пристального изучения. Большое значение имеет проблема нахождения условия локального разрушения в исследуемой точке контура трещины. Ученым удалось получить условие локального разрушения [6–8], заключающееся в том, что коэффициент интенсивности напряжений в выражении, описывающем локальное поле упругих

напряжений у вершины трещины, в момент начала роста трещины равен некоторой постоянной материала. Поскольку этот коэффициент является функцией геометрии тела, длины трещины, внешних нагрузок, которая определяется из решения упругой задачи в целом, то это условие может служить условием распространения трещины.

Дальнейшее развитие методики для описания процесса распространения трещин освещено в работах Дж. Р. Райса и Г. П. Черепанова [9, 10].

А. Е. Андрейкив [11] обобщил критерии Гриффитса – Орована – Ирвина на случай, когда задача для тел с трещинами решается в трехмерной постановке. Это оказало существенное влияние на построение общей теории разрушения твердых тел.

Новый подход к проблеме хрупкого разрушения был предложен В.В. Новожиловым [12, 13]: он предложил рассматривать тела с трещинами как нетривиальные формы равновесия упругих тел с физически нелинейными характеристиками, что позволило определять причины образования трещин.

При трещинообразовании в пластичных средах в рамках плоского напряженного состояния возможно применение модели Леонова – Панасюка – Дагдейла, описанной в работах [14, 15]. В рамках данной модели зона пластических деформаций заменяется щелью, а решение задачи сводится к определению упругого деформированного состояния плоскости с такой щелью, на границах которой заданы нормальные напряжения, соответствующие пределу текучести материала. Результаты, полученные при применении данной модели, согласуются с экспериментальными данными [16].

В действительности для случая плоской деформации пластическая область не вытянута вдоль направления трещины, а распространяется в стороны от нее [17, 18].

Отметим модель когезионной трещины [19–25]. В этом случае к берегам трещины приложена когезионная нагрузка (силы сцепления), притягивающая берега друг к другу. При постоянном значении сил сцепления данная модель эквивалентна модели Леонова – Панасюка – Дагдейла.

Изучение процесса разрушения приобретает все большую комплексность. Сегодня ученые из различных дисциплин объединяют свои усилия для анализа этого процесса.

Ученые-геологи проводят исследования, направленные на изучение трещин в горных массивах и их воздействие на строение земной коры. Характеристики трещин, такие как тип, частота, ориентация и форма, играют ключевую роль в определении физико-механических свойств горных пород [26], что в свою очередь влияет на прочность горных массивов и эффективность разработки месторождений. Иногда трещины могут принести пользу при разведке месторождений, но чаще всего они ведут к негативным последствиям для горнодобывающей промышленности. К таким последствиям относятся горные удары, смещение горных масс, оползни и другие подобные явления [27]. Трещины выступают в роли путей миграции для движения подземных вод, газа и нефти, а также служат объектами для изучения тектонических разломов, складчатых образований и зон напряжений [28].

В области материаловедения и строительной механики трещины рассматриваются как явление, требующее комплексного анализа. Его целью является выявление факторов, способствующих образованию трещин, таких как температурные поля [29], циклические нагрузки [30] и химическое воздействие (коррозия) [31]. Для исследования трещин в строительных конструкциях применяются разнообразные методы, среди которых ультразвуковой, магнитопорошковый и капиллярный [32].

Развитие трещин в тканях организма представляет собой серьезную проблему в областях медицины и биомеханики, поскольку нарушает их нормальное функционирование. Разработка предиктивных моделей, позволяющих прогнозировать появление трещин в костных тканях [33] и зубной эмали [34], а также снижать риск их распространения, имеет первостепенное значение для поддержания здоровья.

Разновидности трещин весьма многообразны, и их изучение ведется на различных масштабных уровнях. На микроскопическом уровне разрушение

кристаллической структуры начинается с субмикроскопических трещин, возникающих из-за расхождения атомов на расстояние, где межмолекулярные силы становятся незначительными. В то же время, в геологических образованиях, таких как скальные породы, трещины могут достигать сантиметровых размеров. Распространение трещин в первом случае тесно связано с атомной структурой в вершине трещины. В отличие от сплошных сред, в такой постановке речь идет о дискретной кристаллической решетке. Исследование таких трещин и их взаимодействия с другими дефектами кристаллической структуры входит в сферу физики твердого тела.

Для учета динамики взаимодействия частиц в конденсированных системах ученые пользуются методами молекулярной динамики [35–36]. Сегодня вычислительные мощности позволяют моделировать поведение молекулярных систем, включающих миллионы частиц, каждая из которых обладает множеством свойств. Компьютерные технологии и графические инструменты анализа непрерывно совершенствуются, что ведет к повышению точности и эффективности методов молекулярно-динамического моделирования.

Данное исследование посвящено изучению макроскопических трещин с позиции механики сплошных сред. В центре внимания находится анализ напряженно-деформированного состояния, которое возникает в зоне вершины трещины. Трещины принято классифицировать на основе трех основных типов (мод) нагружения: нормальный отрыв, поперечный сдвиг и продольный сдвиг, что показано на рис. 1.1. Дефект в виде трещины превосходит по масштабам наибольший структурный элемент, каждый из которых, содержит достаточное число кристаллических структур для идентичности свойств, относительно любых других элементов аналогичного размера в материале.

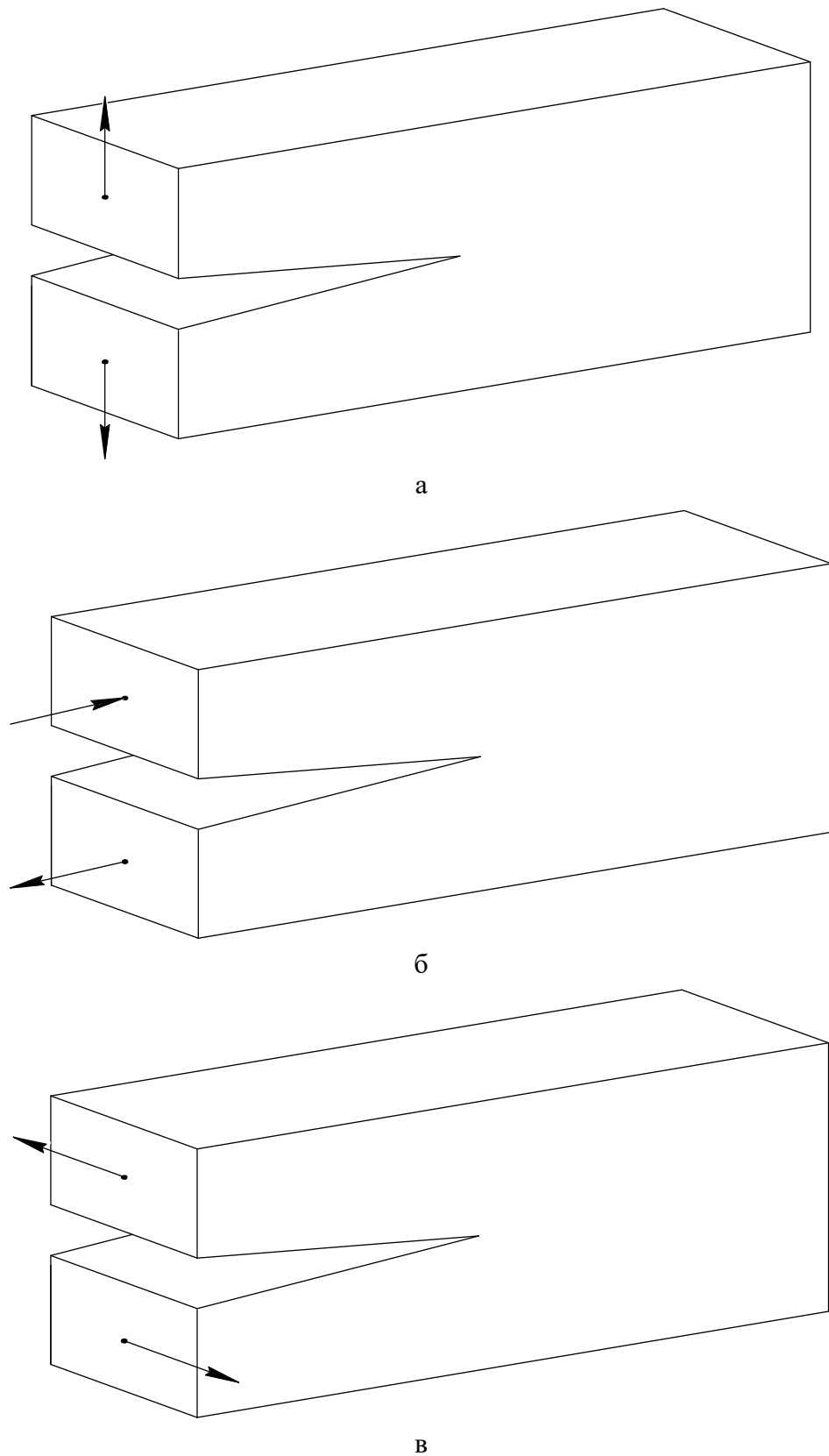


Рис. 1.1. Основные моды (типы) раскрытия трещин:

а – мода I (нормальный отрыв); б – мода II (поперечный сдвиг); в – мода III (продольный сдвиг).

На сегодняшний день преобладают частные теории, действующие в конкретных рамках материалов и условий. Вместе с тем, растущие требования к качеству и долговечности изделий побуждают к дальнейшим исследованиям в области прочности и процессов разрушения.

Среди множества научных трудов, посвященных теоретическому изучению формирования и распространения трещин, особое внимание заслуживают работы [2, 37–42], внесшие значительный вклад в фундаментальное понимание данной проблемы.

Автор работы [38] предоставляет исчерпывающий анализ хрупкого разрушения, охватывающий как теоретические основы, так и практические примеры решения задач. В работе [37] авторы углубляются в тему растрескивания, исследуя его проявления в рамках упругопластических и вязкоупругих деформаций.

В работе [39] разработана методика для расчета коэффициента интенсивности деформаций и приведена формула для его выражения. Этот показатель особенно важен в ситуациях, где под действием нагрузки вблизи трещины наблюдаются значительные локальные пластические деформации.

Работа [40] посвящена исследованию разрушения с точки зрения физики прочности. Автор проводит детальное сравнение теоретических моделей с результатами экспериментов, предоставляя читателю комплексное понимание процессов разрушения.

В работе [41] автор детально исследовал критерии, определяющие наступление разрушения, предложил метод исследования разрушения в хрупких материалах при сложном нагружении. В его работе особое внимание уделено факторам, способствующим накоплению повреждений при квазихрупком разрушении, а также тем факторам, которые приводят к постепенному снижению прочностных свойств конструкции. Эти факторы проявляются в образовании разнообразных дефектов, пор и микротрещин, что в конечном итоге приводит к уменьшению целостности материала. Для количественной оценки степени повреждения автор предложил использовать функцию сплошности,

характеризующую сохранившийся объем исходного материала. В качестве альтернативы, другой исследователь предложил использовать функцию поврежденности [42], которая, напротив, показывает степень поврежденности материала.

В работах [43, 44] авторы внесли вклад в теорию повреждений, интегрировав модель Одквиста для описания мгновенных пластических деформаций в кинетическом уравнении поврежденности.

В области прикладных исследований значительное внимание уделяется анализу конструкций в реальных эксплуатационных условиях. Например, для плоских образцов авторы статьи [45] разработали метод предсказания эволюции усталостных трещин. Исследование коэффициента чувствительности материалов к повреждениям от надреза предложено в работе [46].

В ряде исследований вместо реальных конструкций предлагаются расчетные схемы, которые часто существенно отступают от реальности. Обычно речь идет о схематических представлениях полубесконечных или бесконечных пластин с различными разрезами.

В работе [47] авторы исследуют поведение тонкой бесконечной пластины, содержащей крестообразную трещину. Пластина подвергается растяжению, действующем перпендикулярно оси трещины. Метод делительных сеток применен для численного моделирования распределения пластических деформаций в зоне вершины трещины при различных уровнях нагружения в работе [48]. Данный подход, благодаря своей способности моделировать локализованные пластические деформации, особенно эффективен для анализа тонкостенных конструкций.

Активно ведутся исследования пространственных проблем теории трещинообразования в рамках теории упругости. Успешно решены задачи для различных типов трещин: дискообразных, плоских параболических и центральных сквозных [49–54]. Исследователи также обратили внимание на изучение систем трещин в упругой постановке [55].

Практическое значение имеет выявление напряженного состояния в конструкциях, имеющих поверхностные трещины. Решение таких задач с точки

зрения математики сложны, поэтому эти решения, как правило, являются приближенными и получены численными методами. Например, в работе [56], опираясь на численное решение [57], продемонстрированы формулы для расчета коэффициента интенсивности напряжений при растяжении и изгибе пластины с поверхностной трещиной, имеющей полукруглую форму.

Экспериментальные исследования, представленные в работах [58–60], оказывают существенное влияние на развитие расчетно-теоретических моделей разрушения.

В исследовании [58] изучались процессы образования и развития трещин. Испытуемые образцы подвергались изгибу, приводящему к возникновению и последующему распространению трещин.

В своей работе [59] авторы исследовали, как анизотропия стали сказывается на параметрах линейной механики разрушения и способности материала противостоять образованию трещин в образцах, ориентированных по-разному относительно направления прокатки.

Работа [60] представляет собой эксперимент, посвященный исследованию разрушения цилиндрических труб с трещинами, вызванными действием внутреннего давления.

Большинство экспериментов выполняются с учетом конкретных эксплуатационных условий или с применением материалов, имеющих ограниченную область использования. Например, в работе [61] проанализирована скорость роста трещин в литой жаростойкой стали при условии ползучести. Следовательно, результаты многих исследований применимы, как правило, только для конкретных условий.

Анализ существующих исследований, посвященных образованию и распространению трещин в различных материалах, показывает, что единой теории, объясняющей все этапы разрушения, пока нет. Несмотря на это, созданы модели и получены аналитические формулы, которые позволяют изучать отдельные аспекты и особенности разрушения. Исследование конструкций, изготовленных из

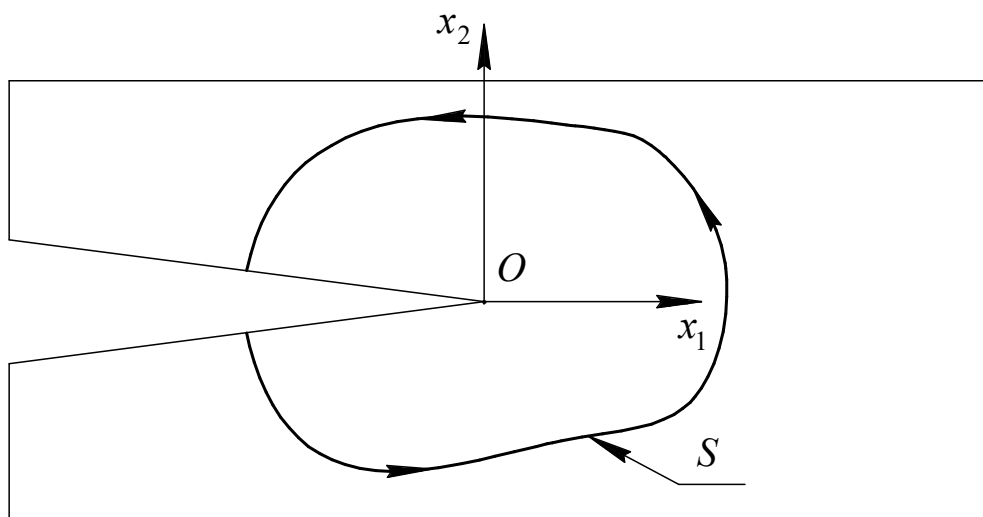
материалов, обладающих пластическими свойствами, часто сводятся к выявлению тех областей, где материал деформируется пластически.

Пока число решенных задач ограничено. Основное внимание в проводимых исследованиях уделяется развитию математических инструментов, необходимых для решения поставленных задач. Важно отметить, что существующие решения, как правило, получены с рядом допущений и применимы в узких рамках, связанных с условиями эксплуатации конструкции и свойствами используемого материала.

1.1. Характеристика трещиностойкости – J -интеграл

Разрушение твердых тел чаще всего наступает вследствие образования и распространения трещин. Понимание процессов разрушения и определение напряженно-деформированного состояния (НДС) позволяет анализировать прочностные свойства твердых тел. Принципиальной моделью трещиноподобного дефекта является математический разрез – слой нулевой толщины.

В рамках линейной упругости, присутствие слоя нулевой толщины характеризуется сингулярностью поля напряжений вблизи окончания дефекта, что приводит к появлению асимптотических зависимостей [62, 63], эти зависимости пропорциональны коэффициентам интенсивности напряжений (КИН) [64, 65], которые определяют предельные условия разрушения. Эти предельные значения служат основой для силового [66] и энергетического [1, 67] критериев прочности. Энергетический критерий, в свою очередь, можно представить в виде J -интеграла (1.1) (инвариантного контурного интеграла, соединяющего берега трещиноподобного дефекта, не подвергающихся воздействию внешних сил) [68–70], см. рис. 1.2.

Рис. 1.2. Контур интегрирования J -интеграла

$$J = \int_S \left(\psi dx_2 - \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} dS \right), \quad (1.1)$$

где S – контур, окружающий вершину трещины; $\psi = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ – удельная энергия деформирования единицы объема; $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор напряжений, направленный по нормали к контуру S ; \mathbf{u} – вектор перемещений в направлении оси x_1 .

J -интеграл широко используется в качестве параметра механики разрушения для материалов обладающими как линейными, так и нелинейными механическими свойствами. Он связан с выделением энергии, при продвижении трещины, и является мерой интенсивности деформации в надрезе или вершине трещины, особенно для нелинейных материалов. Если материал обладает линейными свойствами, его можно связать с коэффициентами интенсивности напряжений. Из-за важности J -интеграла в оценке трещиноподобных дефектов его точная численная оценка важна для практического применения механики разрушения в расчетах проектирования. Программный комплекс ANSYS предоставляет процедуру для оценки J -интеграла, основанную на методах виртуального продвижения трещины [71, 72].

Опираясь на разработанные теоретические модели экспериментальная механика разрушения [73] исследует предельные показатели прочности к

трещинообразованию, как однородных [74, 75], так и композитных тел [76–78]. Вычисление КИН осуществляется с помощью аналитических и численных подходов [79–81].

Одним из современных методов определения НДС служит метод конечных элементов (МКЭ) [82, 83]. При этом процесс разрушения моделируется путем последовательного удаления конечных элементов [84, 85], образующих дефект в виде трещины, которая представляется в виде физического разреза с заданной толщиной. В рамках вариационной постановки задачи, применяемой в МКЭ, и применительно к «ослабленной» постановке [86], решения с использованием МКЭ выявляют векторы напряжений на свободных границах. Это явление характерно для зон с концентраторами напряжений, например, в угловых точках физического разреза.

Энергетический критерий Гриффитса является ключевым в определении критических характеристик, независимо от формы дефектов и рассматриваемом масштабном уровне задачи. Это продемонстрировано в исследовании [67], где были применены молекулярно-динамические методы и рассмотрено нагружение образца с дефектом по моде I. Аналогичные результаты были получены при исследовании модели связей Прандтля [87, 88], где начальная длина служит определяющим фактором масштаба трещиноподобного дефекта.

Исследована корреляция между эталонным значением J -интеграла и энергией, затрачиваемой на разгрузку области вершины физического разреза при стремлении толщины физического разреза к нулю, использован принцип конечной разгрузки [85] при исключении тупикового элемента.

1.2. Существующие критерии роста трещин

В процессе анализа разрушения и поиска критерия, определяющего его, основополагающим является модель трещиноподобного дефекта. Модель трещины Гриффитса [1] служит абстрактным воплощением такого дефекта в виде слоя нулевой толщины. В рамках линейно упругой модели, точка окончания трещины выступает источником сингулярности напряжений [89]. Именно этот факт послужил основой для формулировки энергетического критерия разрушения Гриффитсом, согласно которому разрушение материала наступает при достижении критического значения удельной (к единице поверхности) энергии, поступающей в вершину трещины: $G = G_C$. В последующих исследованиях [69, 90–92] была установлена зависимость между инвариантным J -интегралом и удельным энергетическим потоком в вершине трещины, выраженная в виде $G = J$.

Вблизи вершины трещины в случае комбинированного воздействия мод I+II, где поле напряжений стремится к асимптотическому виду, связь между потоком удельной энергии G и КИН $K^2 = K_I^2 + K_{II}^2$ [93] принимает следующий вид:

$$J = G = \alpha \sum_{k=I}^{k=II} \frac{K_k^2}{E} = \sum_{k=I}^{k=II} G_k = \sum_{k=I}^{k=II} J_k, \quad (1.2)$$

где $\alpha = 1$ для плоского напряженного состояния; $\alpha = 1 - \nu^2$ для состояния плоской деформации; E – модуль упругости тела; ν – коэффициент Пуассона; K_I – КИН для нагружения по моде I; K_{II} – КИН для нагружения по моде II.

В изотропных и однородных структурах, где трещины могут стабильно развиваться только под действием нагрузки моды I, постоянство G_C из формулы (1.2) приводит к важному следствию: $G_{IC} = G_I + G_{II}$ или $K_{IC}^2 = K_I^2 + K_{II}^2$. Здесь индекс «*C» указывает на критическое значение типа нагружения * = I, II, I+II.

Для ортотропных материалов формула критерия Гриффитса, как указано в [94], принимает вид: $K_{IC}^2 = K_I^2 + \eta K_{II}^2$, где η связано с механическими свойствами материала, такие как прочность на сдвиг и растяжение.

В исследовании [95] предлагается следующий критерий разрушения для смешанной моды нагружения:

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1, \quad (1.3)$$

В статье [96] критерий (1.3) обобщен для случая нелинейных моделей материалов. Определение напряженного состояния в конструкциях с трещинами, может быть найдено основываясь на подходах, рассмотренных в работах [97–100].

В слоистых композитах, наличие дефекта в адгезионном слое можно представить, как слой нулевой толщины с сингулярной особенностью поля напряжений. Механические свойства адгезионных материалов по сравнению с несущими материалами имеют существенно меньшие значения, что дает возможность изучения не только разрушения по нормальному разрыву [101], но и поперечного сдвига [78]. Важно отметить, что критические значения потоков энергии G_{IC} и G_{IIc} могут значительно различаться [78]. Таблица 1.1 содержит значения модуля упругости (E) и коэффициента Пуассона (ν) адгезивов Araldite AV138, Araldite 2015 и Sikaforce 7752, а также критических потоков I и II моды нагружения [78].

Таблица 1.1. Механические свойства адгезивов

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
E , Па	$4.9 \cdot 10^9$	$1.85 \cdot 10^9$	$4.9 \cdot 10^8$
ν	0.35	0.33	0.3
G_{IC} , Н/м	140	540	3786
G_{IIc} , Н/м	352	2958	5552

Ввиду непостоянства критического значения потока энергии при смешанной моде нагружения I+II, вытекающим из (1.2) с учетом критических потоков, представленных в таблице 1.1, определение условий, при которых происходит разрушение слоя нулевой толщины при комбинированном воздействии мод

нагружений I+II, возможно проводить с помощью следующего уравнения, связывающего потоки упругой энергии, как показано в [102]:

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^{\alpha_2} = 1, \quad (1.4)$$

где α_1, α_2 – постоянные материала.

В рамках исследования [103] предполагается равенство постоянных α_1, α_2 . Необходимо подчеркнуть, что при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ (1.4) соответствует (1.3). Определение значения α_1 осуществляется путем построения ряда кривых, где каждая кривая характеризуется определенным значением α_1 . Затем полученные кривые сравниваются с данными эксперимента [78, 103, 104]. Авторы [78] выявили конкретные значения: $\alpha_1 = 1/2$ – для адгезивов Araldite AV138 и Araldite 2015; $\alpha_1 = 2$ – Sikaforce 7752. Тем не менее, исследование [78] не затрагивает вопрос о физическом объяснении выбора этих значений.

Существуют подходы, которые предотвращают появление сингулярных особенностей при математическом моделировании трещины, используя концепцию когезионных элементов [105–108]. Важно понимать, что различные законы когезионного взаимодействия оказывают существенное влияние на картину распределения НДС вблизи вершины трещины [109].

Одним из подходов к моделированию трещин является их представление в виде физического разреза. В статье [110] Ф. Макклинток предложил концепцию движения трещины как физического разреза с характерной толщиной δ_0 , где напряженное состояние в разрушаемом слое, лежащего на продвижении дефекта, связано с его граничными перемещениями. Однако, в работе не были сформулированы конкретные постановки задач для реализации данного подхода.

В исследовании [111] предложена постановка задачи определения напряженно-деформированного состояния в области трещиноподобного дефекта, решение которой построено на использовании модели слоя взаимодействия, где толщина слоя δ_0 рассматривается как линейный параметр, а напряженное

состояние вычисляется посредством усреднения напряжений по толщине слоя. При конечной толщине слоя напряженное состояние в нем имеет конечное значение. В процессе обратимого деформирования, когда поле напряжений распределено регулярно, J -интеграл устанавливает взаимосвязь с произведением линейного параметра и средним значением изменения удельной, отнесенной к единице объема, энергии как это было показано в [112].

$$J = \delta_0 \bar{\psi}, \quad (1.5)$$

где $\bar{\psi}$ – среднее по толщине слоя изменение удельной упругой энергии на торце слоя.

В работах [113, 114] установлено, что при стремлении линейного параметра к нулю выражение (1.5) асимптотически стремится к (1.2). В определенном интервале значений толщины слоя относительная погрешность выражения (1.5) по сравнению с (1.2) не превышает заданной величины. В связи с этим, численно вычисляя выражения (1.5), можно определить значение линейного параметра на основе его вычислительной сходимости (1.5). Несмотря на то, что результат (1.5) будет близок к (1.2), важно отметить, что конечная толщина слоя приводит к тому, что удельная свободная энергия, в отличие от модели Гриффитса, не принимает сингулярных значений и может быть представлена в виде разложения суммой независимых компонент [115]: $\bar{\psi} = \bar{\psi}^\sigma + \bar{\psi}^\tau$, где $\bar{\psi}^\sigma$ – средняя по толщине слоя удельная энергия изменения объема; $\bar{\psi}^\tau$ – средняя по толщине слоя удельная энергия изменения формы. В работе [116] предложено включить в энергетический критерий учет гидростатического давления и его знака. Вследствие того, что «разрыхление» материала и снижение его прочности происходит под воздействием положительного гидростатического давления, в работе [79] для адгезива при смешанной моде нагружения I+II используется следующий критерий разрушения при $\delta_0 \rightarrow 0$:

$$\delta_0 \left((1 + \text{sign}(\bar{\sigma})) \beta' \right) \bar{\psi}^\sigma + \bar{\psi}^\tau = G_{\text{IIIC}}, \quad (1.6)$$

где $\beta' = \frac{G_{\text{IIIC}} - G_{\text{IC}}}{\delta_0 \bar{\psi}_{\text{IC}}^\sigma}$ – параметр, характеризующий «разрыхление» адгезива;

$\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33})/3$ – гидростатическое давление; $\delta_0 \bar{\psi}_{\text{IC}}^\sigma$ – асимптотическое значение энергетического произведения энергии изменения объема при разрушении нормальным разрывом слоя в пределе $\delta_0 \rightarrow 0$.

При положительном гидростатическом давлении при использовании критерия (1.6) величина J -интеграла будет находиться в определенном интервале значений $G_{\text{IC}} \leq J \leq G_{\text{IIIC}}$. Этот вывод согласуется с результатами исследования [78], для материала Sikaforce 7752 при заданном значении параметра $\alpha_1 = 2$. Стоит отметить, что в работах [117, 118] учитываются удельные упругие энергии на характерных от концентраторов напряжений расстояниях, тем не менее, в данных работах не было рассмотрено зависимость смешанной моды нагружения от инвариантных компонент удельной упругой энергии. Важно подчеркнуть, что учет гидростатического давления при смешанной моде нагружения I+II был затронут в рамках критерия, изложенного в работе [119].

Отметим, что критерий (1.6) не учитывает ситуации, когда значение J -интеграла, определяющее критическое состояние нагружения композита по моде I+II, может оказаться ниже, чем значение G_{IC} , что было получено в [78] для адгезивов Araldite AV138 и Araldite 2015 в рамках критерия (1.4) при $\alpha_1 = 1/2$.

В данной работе предлагается энергетический критерий для определения момента разрушения тонкого адгезионного слоя конечной толщины при смешанной моде нагружения I+II и регулярном распределении напряжений по толщине слоя. В качестве линейного параметра выступает толщина адгезионного слоя. Разработанный критерий учитывает влияние инвариантных величин, которые определяют удельную упругую энергию в области окончания трещиноподобного дефекта. Положительное гидростатическое давление способствует «разрыхлению» адгезива, что приводит к снижению прочности материала. Напротив, при

отрицательном гидростатическом давлении наблюдается увеличение несущей способности материала. Когда значение толщины слоя стремится к нулю J -интеграл, представляющий собой результат умножения толщины слоя на удельную упругую энергию в области вершины дефекта, сближается с J -интегралом трещины Гриффитса. В работе проанализирована вычислительная сходимость произведения инвариантных слагаемых удельной упругой энергии и линейного параметра при численном решении задачи методом конечных элементов в условиях достижения критического значения внешней нагрузки. С использованием найденных инвариантных энергетических произведений и критических значений J -интегралов для мод нагружения I, II, I+II были рассчитаны параметры нового критерия для ряда адгезивов. Для проверки точности предложенного подхода была проведена оценка расчетной критической нагрузки при смешанной моде нагружения и сравнение с уже имеющимися известными данными.

Научная публикация [120] предлагает сравнительный анализ различных аналитических моделей адгезионных соединений, ключевым преимуществом которых выступает их возможность воспроизводить регулярное распределение напряжений в адгезиве при достижении им конечной толщины, данные модели, опирающиеся на упрощенные предположения теории пластин, применяются в целях изучения напряженного состояния адгезионных слоев наряду с решениями в двух- и трехмерных постановках. Работы [121–123] фокусируются на аналитическом вычислении напряженного состояния в адгезионных слоях с конечной толщиной. Получено хорошее совпадение результатов решения [122] с численными расчетами, выполненными с использованием метода конечных элементов для двумерной задачи [124], которая учитывает наличие как сдвиговых, так и отрывных напряжений в адгезионном слое.

Влияние гидростатического давления на возникновение пластической деформации изучалось с применением разных подходов [125–129]. Некоторые из них основывались на анализе второго инварианта тензора напряжений, другие же обращали внимание на максимальные касательные напряжения. Экспериментальные данные, подтверждающие эти выводы, представлены в [130].

В работе [131] разработан оригинальный метод определения критического состояния упругого адгезионного слоя при комбинированном нагружении (мода I+II). Этот метод учитывает воздействие гидростатического давления и инвариантных характеристик, определяющие упругую энергию критического состояния и устанавливает зависимость между J -интегралом и произведением толщины адгезионного слоя и накопленной упругой энергией [112]. Основой метода служит характеристика, отражающая уровень разупрочнения материала. Если адгезионный слой существенно тоньше, чем сопрягаемые несущие материалы, то расчетные критические значения J -интеграла, предложенные в [112], должны приближаться к экспериментально определенным значениям J -интеграла для нагружения первой (G_{IC}) и второй (G_{IIC}) моды. Для комбинированного нагружения мод I+II ($G_{I+II C}$) критические значения J -интегралов, как правило, варьируются от G_{IC} до G_{IIC} . Однако, в отдельных экспериментах наблюдается что, $G_{I+II C}$ может быть меньше G_{IC} [78].

Данное исследование посвящено изучению двухпараметрических критериев, определяющих разрушение тонких адгезионных слоев при моде нагружения I+II. Для вычисления этих параметров анализируются критические состояния, возникающие при моде нагружения I и комбинированному нагружению I+II, а также величины G_{IC} и G_{IIC} . Комбинированное нагружение мод I+II было проанализировано на примере четырех типов соединений SLJ, используя экспериментальные данные, опубликованные в [132]. В ходе исследования один эксперимент позволил рассчитать параметры критерия для данного адгезива, в то время как остальные эксперименты использовались в качестве проверки его применимости. В качестве основы для анализа использовалось аналитическое решение [124], которое опирается на теорию изгиба пластин применительно к материалам с соединительным слоем.

1.3. Выводы по главе 1

На основе проведенного анализа текущего состояния исследований, посвященных моделям развития трещин и критериям их распространения под критическими нагрузками, определены ключевые задачи и пути научных изысканий, которые будут разрабатываться в рамках данной диссертационной работы.

1. Разработка метода решения задачи оценки напряженно-деформированного состояния окрестности трещиноподобного дефекта при задании адгезионного слоя конечной толщиной, для слоя нулевой толщины – коэффициентов интенсивности напряжений при различных модах нагружения (I, II, I+II);
2. Разработка методов расчета характеристики трещиностойкости в виде J -интеграла при конечно-элементном решении;
3. Определение аддитивных составляющих J -интеграла и их взаимосвязь в состоянии разрушения;
4. Разработка критерия разрушения трещиноподобных дефектов адгезионных слоев при смешанной (I+II) моде нагружения.

Нахождение характеристики типа J -интеграл при конечно-элементном решении

Материал настоящей главы излагается в соответствии с публикациями автора данной диссертации [133–140] и в нем рассмотрены способы нахождения характеристики типа J -интеграл при конечно-элементном решении задач нагружения образцов с трещиной. Исследован дефект, представленный физическим разрезом, в линейно-упругом материале. С помощью МКЭ под воздействием внешней нагрузки было вычислено НДС в области, прилегающей к вершине физического разреза.

2.1. Контурный интеграл

При нагружении тела равномерно распределенной внешней нагрузкой q применяется МКЭ. На рис. 2.1 показана область вокруг физического разреза толщиной δ_0 , с точками B и B' , являющимися концентраторами напряжений в линейно упругом теле. Определено, что при использовании КЭ моделирования в зоне вершины физического разреза, где концентрация напряжений обусловлена сингулярными точками B и B' , напряжения распределяются регулярно вблизи окончания физического разреза. Предполагается, что физический разрез не испытывает воздействия внешних сил ни на своих берегах, ни на торцевой части. Ось x_1 , являющаяся частью ортонормированной системы координат $x_1 O x_2$, ориентирована вдоль предполагаемого пути распространения трещины.

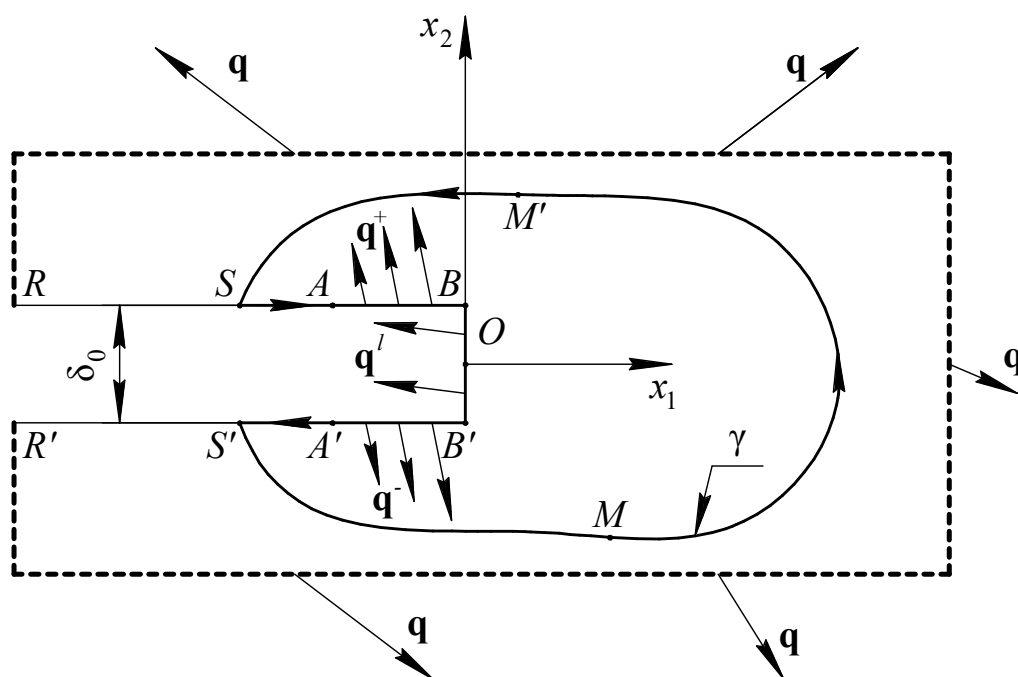


Рис. 2.1. Окружность тупиковой области физического разреза.

На границах физического разреза, то есть на отрезках AB и $A'B'$, возникают векторы напряжений, обозначенные как $\mathbf{q}^+ = -\sigma_{12}\mathbf{e}_1 - \sigma_{22}\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{q}^- = \sigma_{12}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2$, соответственно. Здесь σ_{ij} – компонента тензора напряжений, где i, j принимают значения 1 и 2; \mathbf{e}_i – вектор базиса. На торце дефекта величина вектора напряжений обозначена как $\mathbf{q}^l = -\sigma_{11}\mathbf{e}_1 - \sigma_{12}\mathbf{e}_2$. Условие нулевых векторов напряжений на границах RA и $R'A'$ символизирует свободную поверхность. При решении задачи МКЭ, условие свободной поверхности для узлов, находящихся на гранях физического разреза, определяются нулевым значением узловых сил. Это обстоятельство вызывает возникновение векторов напряжений $\mathbf{q}^+, \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^l$ в зоне, примыкающей к физическому разрезу, во время КЭ решения.

В исследовании [68] сформулировано термомеханическое соотношение:

$$\oint_{\gamma} \left(n_1 \psi - \mathbf{q}^\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma = 0, \quad (2.1)$$

где ψ – удельная (к единице объема) свободная энергия; n_1 – проекция вектора нормали к поверхности контура на направление оси x_1 ; γ – замкнутый контур

$B'A'S'MM'SABB'$, показанный на рис. 2.1, проходящий по свободной поверхности SA и $A'S'$; \mathbf{q}^γ – распределенная по контуру нагрузка; \mathbf{u} – поле перемещений на контуре.

Соотношение (2.1) представим в виде суммы контурных двух интегралов:

$$J + J_1 = 0, \quad (2.2)$$

где $J = \int_{\gamma_1} \left(n_1 \Psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma_1$; $J_1 = \int_{\gamma_2} \left(n_1 \Psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma_2$; γ_1 – контур $S'MM'S$; γ_2 – контур $SABB'A'S'$.

Рассматривая расчетную модель с линейно-упругими свойствами материала, найдем интеграл J_1 , который используется для вычисления J из (2.2):

$$J_1 = \int_{\gamma_2} \left(n_1 \Psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma_2 = 0.5 \int_{x_A}^{x_B} \left(\sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=\delta_0/2} dx_1 +$$

$$+ 0.5 \int_{x_B'}^{x_A'} \left(\sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=-\delta_0/2} dx_1 - \delta_0 \bar{\Psi} + 0.5 \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \left(\sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0} dx_2,$$

где $\bar{\Psi} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \Psi \Big|_{x_1=0} dx_2$ – средняя по торцу удельная свободная энергия.

Используя последнее уравнение из формулы (2.2), мы можем перейти к следующему выражению:

$$J = \delta_0 \bar{\Psi} - 0.5 \int_{x_A}^{x_B} \left(\sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=\delta_0/2} dx_1 -$$

$$- 0.5 \int_{x_B'}^{x_A'} \left(\sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=-\delta_0/2} dx_1 - 0.5 \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \left(\sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0} dx_2. \quad (2.3)$$

Отмечено, что при выполнении условия свободной поверхности для граничных напряжений, как на торце, так и на границах, формула (2.3) может быть представлена выражением $J = \delta_0 \bar{\Psi}$, предложенным в работе [112].

На основе связи: $\psi = 0.5 \left(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right)$, из (2.3) вытекает

следующее выражение:

$$J = 0.5 \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \left(\sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right) \Big|_{x_1=0} dx_2 - 0.5 \int_{x_A}^{x_B} \left(\sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \varepsilon_{11} \right) \Big|_{x_2=\delta_0/2} dx_1 - \\ - 0.5 \int_{x_B'}^{x_A'} \left(\sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \varepsilon_{11} \right) \Big|_{x_2=-\delta_0/2} dx_1. \quad (2.4)$$

Применим ПО Ansys [141] для численного решения уравнения (2.4), также рассмотрим применение модели слоя взаимодействия вдоль физического разреза, введенного в [111]. Исследуем нагружение трещины нормальным разрывом и поперечным сдвигом. Проанализируем роль второго и третьего членов уравнения (2.4) при разных длинах интегрирования. Отметим, что при $\delta_0 \rightarrow 0$ физический разрез становится слоем нулевой толщины, при этом данный дефект можно моделировать как трещину Гриффитса, как показано в [1]. Если на берегах дефекта отсутствуют нагрузки, величина J , вычисляемая в (2.2), соответствует J -интегралу Черепанова и Райса [68, 69], что допускает его определение с использованием КИН.

Рассмотрим систему, состоящую из двух тел (консолей 1, 2), соединенных адгезионным слоем 3. Для упрощения модели будем использовать линейно-упругие характеристики материалов и допущение о состоянии плоской деформации. Нагружение физического разреза нормальным разрывом будет реализовано на образце, представляющем собой двойную консольную балку (ДКБ) (см. рис. 2.2). Геометрические свойства ДКБ-образца включают длину образца $l = 0.2$ м, длину трещины $a = 0.05$ м, ширину образца $b = 0.1$ м и ширину консоли $h = (b - \delta_0)/2$ м. Важно отметить, что толщина физического разреза δ_0 в данной задаче будет линейным параметром.

Консоли обладают следующими механическими характеристиками: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Грани адгезионного слоя 3, находящиеся в контакте с консолями 1, 2, имеют с ними жесткое соединение,

обеспечивающее равные перемещения. Конструкция ДКБ зафиксирована по грани AB исключая любые перемещения, ДКБ испытывает воздействие распределенного давления $P=10^3$ Па. В рамках исследования были проанализированы две альтернативные модели: а – образец является однородным телом, т.е. адгезив 3 обладает такими же механическими характеристиками, как и тела 1 и 2; б – адгезив 3 характеризуется модулем упругости $E_{adh}=2\cdot 10^9$ и коэффициентом Пуассона $\nu_{adh}=0.3$, что позволяет интерпретировать образец как слоистый композитный материал.

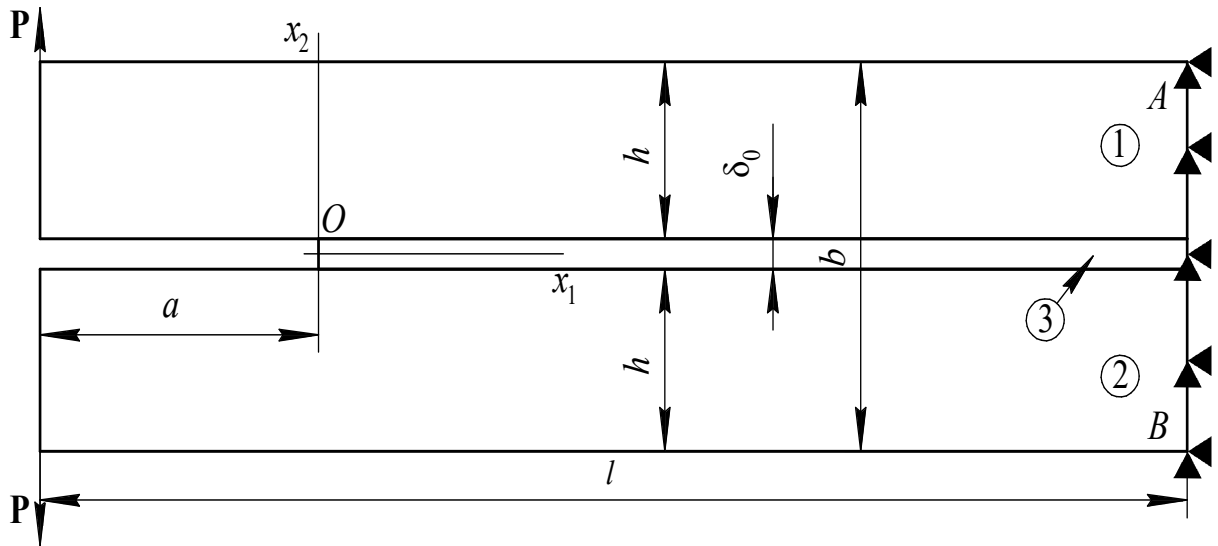


Рис. 2.2. Модель ДКБ-образца.

Для исследования нагружения трещиноподобного дефекта использовалась схема нагружения образца с двойной выемкой, в которой образец: зафиксирован по грани AB исключая любые перемещения; испытывает воздействие распределенного давления $P=10^3$ Па, которое приводит к поперечному сдвигу дефекта. В рамках исследования были проанализированы две альтернативные модели: а – образец является однородным телом, т.е. адгезив 3 обладает такими же механическими характеристиками, как и тела 1 и 2; б – адгезив 3 характеризуется модулем упругости $E_{adh}=2\cdot 10^9$ и коэффициентом Пуассона $\nu_{adh}=0.3$, что позволяет интерпретировать образец как слоистый композитный материал.

Образец с двойной выемкой обладает длиной $l = 0.1$ м, длиной трещины $a = 0.038$ м, длиной связки $2t = 0.024$ м, шириной образца $b = 0.13$ м, шириной консоли $h = (b - \delta_0)/2$, которые являются геометрическими свойствами исследуемого образца (см. рис. 2.3). Важно отметить, что толщина физического разреза δ_0 в данной задаче будет линейным параметром.

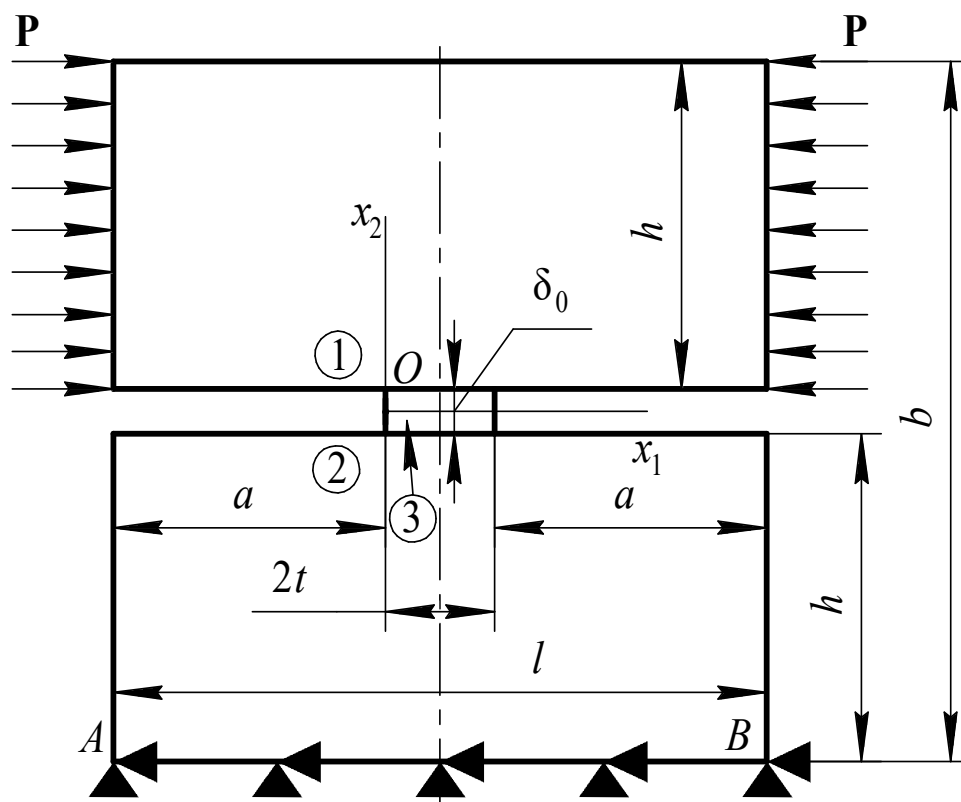


Рис. 2.3. Модель образца с двойной выемкой.

Таблица 2.1 демонстрирует результаты расчётов КИН I и II мод нагружений для дефектов в виде слоя нулевой толщины, полученные посредством КЭ решения в программной среде Ansys.

Таблица 2.1. Расчетные значения КИН

Искомая величина	Значение (Н/м ^{3/2})
K_I	1295.7
K_{II}	46.7

Связь между J -интегралом для плоской задачи и КИН выражается следующим математическим равенством [74, 76]:

$$J_k = \alpha K_k^2 / E, \quad (2.5)$$

где $\alpha = 1$ для плоского напряженного состояния; $\alpha = 1 - \nu^2$ для плоского деформированного состояния; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $k = \text{I, II}$.

В последующем, без ограничения общности, будет рассматриваться только случай плоской деформации. Из формулы (2.5) можно получить эталонное численное значение J -интеграла для слоя нулевой толщины, данные представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Расчетные значения J -интеграла

Искомая величина	Значение (Н/м)
J_{I}	$7.639 \cdot 10^{-6}$
J_{II}	$9.923 \cdot 10^{-9}$

В ходе численного решения будут использоваться квадратичные функции формы конечных элементов, сами элементы, находящиеся вблизи вершины дефекта, прямоугольные и удовлетворяют ограничению – $\delta_1 = \delta_0$ (см. рис. 2.4). Материалы, используемые в решении, описываются линейно-упругими свойствами.

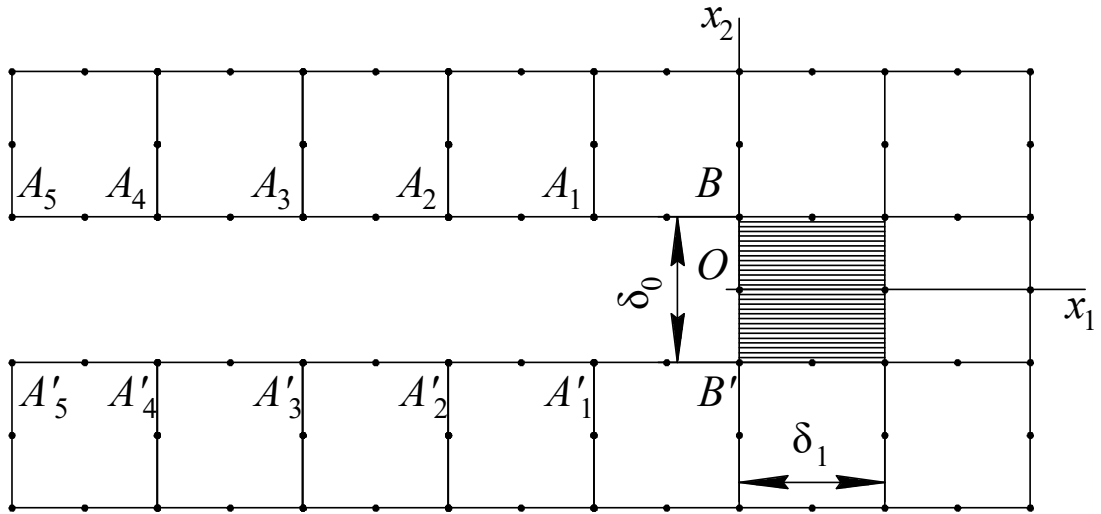


Рис. 2.4. Конечный элемент на окончании физического разреза.

Для использования формулы (2.4) необходимо определить НДС на контуре дефекта, расчеты основаны на результатах, полученных из решений Ansys и модели слоя взаимодействия, представленной в [111].

Из работы [111] известно применение вариационного метода, реализованного через систему уравнений, определяющей равновесие тел 1,2, связанных тонким слоем 3 (см. рис. 2.2, рис. 2.3). Так, для тела 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx + \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx + 0.5 \delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x} dx + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x} dx \right) = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl,$$

и для тела 2:

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx - \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx + 0.5 \delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x} dx + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x} dx \right) = \int_{L_2} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl,$$

где S_i – площади тел; L_i – контуры приложения внешней нагрузки \mathbf{P} в телах; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций в телах; \mathbf{u} – вектор перемещений; \cdot – скалярное умножение; $\cdot \cdot$ – двойное скалярное умножение; $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{12}$, $\bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{\varepsilon}_{22}$, $\bar{\varepsilon}_{12}$ – компоненты тензоров средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{12}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{\delta_0} \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2, \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \\ \bar{\varepsilon}_{11} &= 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \\ \bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{21} &= 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right),\end{aligned}$$

где u_i^+ , u_i^- – соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя. Определяющие соотношения в слое анализируются с учётом усреднённых показателей НДС.

Согласно решению на основе слоя взаимодействия первый компонент представления (2.4) запишем как $-0.5 \left(\bar{\sigma}_{22} \bar{\varepsilon}_{22} + \frac{\bar{\sigma}_{12}(u_1^+ - u_1^-)}{\delta_0} \right) \delta_0$. В случае нагружения дефекта нормальным разрывом $\bar{\sigma}_{12} = 0$. При нагружении дефекта поперечным сдвигом $\bar{\sigma}_{22} = 0$.

При определении НДС посредством МКЭ, реализованном в Ansys, 1-ый компонент представления (2.4) определяется путем интегрирования по грани BB' (см. рис. 2.4), 2-ой и 3-ий компоненты представления (2.4) определяется путем интегрирования по отрезкам AB и $A'B'$ (см. рис. 2.1) берегов дефекта.

При нормальном разрыве ДКБ с трещиноподобным дефектом в виде слоя нулевой толщины известно выражения для определения КИН K_I^a [98, 142]:

$$K_I^a = \sqrt{12(Ph)^2 / h(a/h)^2 [1 + 0.673(h/a)]^2}. \quad (2.6)$$

При поперечном сдвиге образца с двойной выемкой с трещиноподобным дефектом в виде слоя нулевой толщины при $t < h/\pi$ известно выражение для определения КИН K_{II}^a [143, 144]:

$$K_{II}^a = P/4\sqrt{\pi t}. \quad (2.7)$$

Таблица 2.3 демонстрирует результаты вычислений (2.6), (2.7), а также погрешность этих результатов относительно решений, полученных с помощью ANSYS.

Таблица 2.3. Расчетные значения КИН

Искомая величина	Значение (Н/м ^{3/2})	Погрешность, %
K_I^u	1295.9	0.02
K_{II}^u	48.5	3.85

Взаимосвязь между относительной величиной $\bar{J}_k = J/J_k$ и десятичным логарифмом $\bar{\delta}_0 = \delta_0/h$, когда исследуемые образцы являются однородными телами, продемонстрирована на рис. 2.5. Зависимости 1, 2 демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные в Ansys для нагружений в виде нормального разрыва и поперечного сдвига соответственно. Зависимости 3, 4 демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные на основе слоя взаимодействия [111] для нагружений в виде нормального разрыва и поперечного сдвига соответственно. Компонента J получена согласно представлению (2.4) при действии внешней нагрузки P .

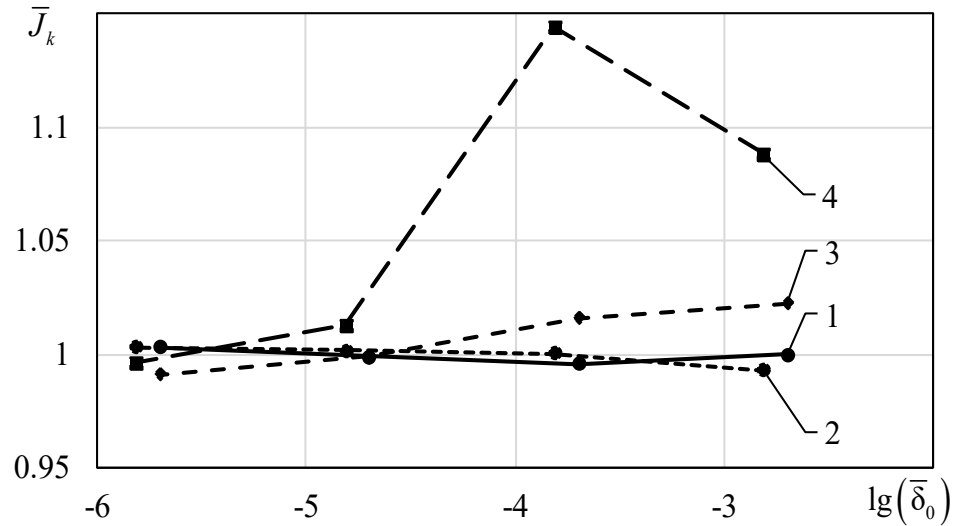


Рис. 2.5. Взаимосвязь относительного значения J -интеграла и относительной величины физического разреза.

По продемонстрированным взаимосвязям на рис. 2.5 между относительной величиной \bar{J}_k и десятичным логарифмом $\bar{\delta}_0$ можно сделать вывод о том, что при $\delta_0 \rightarrow 0$ компонента J , полученной согласно представлению (2.4) с помощью НДС определенного как в при КЭ моделировании в Ansys, так и при решении на основе слоя взаимодействия [111], стремится к J -интегралу слоя нулевой толщины.

Взаимосвязь при нормальном разрыве между относительными компонентами \bar{J}_1 и десятичным логарифмом $\bar{\delta}_0 = \delta_0/h$, когда исследуемые образцы являются однородными телами, продемонстрирована на рис. 2.6. Зависимости, продемонстрированные со сплошными контурами, демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные в Ansys. Зависимости, продемонстрированные с прерывистыми контурами, демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные на основе слоя взаимодействия [111]. Компонента J_1 получена согласно представлению (2.4) при действии внешней нагрузки \mathbf{P} и относится к J -интегралу слоя нулевой толщины.

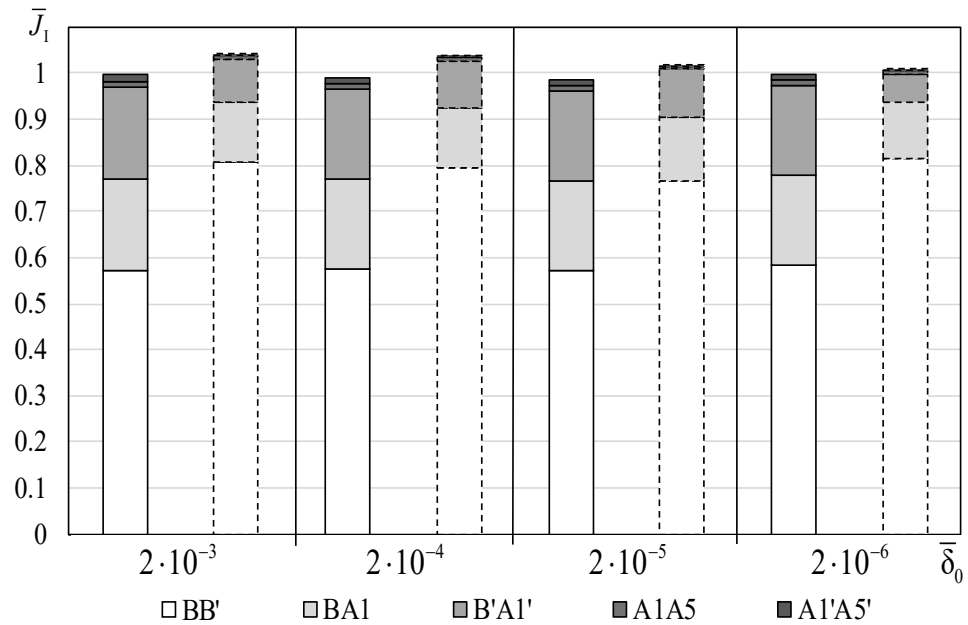


Рис. 2.6. Взаимосвязь относительных значений компонент J -интегралов нормального растяжения и относительной величины физического разреза в однородном теле.

Взаимосвязь при поперечном сдвиге между относительными компонентами \bar{J}_{II} и десятичным логарифмом $\bar{\delta}_0 = \delta_0/h$, когда исследуемые образцы являются однородными телами, продемонстрирована на рис. 2.7. Зависимости, продемонстрированные со сплошными контурами, демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные в Ansys. Зависимости, продемонстрированные с прерывистыми контурами, демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные на основе слоя взаимодействия [111]. Компонента J_{II} получена согласно представлению (2.4) при действии внешней нагрузки \mathbf{P} и относится к J -интегралу слоя нулевой толщины.

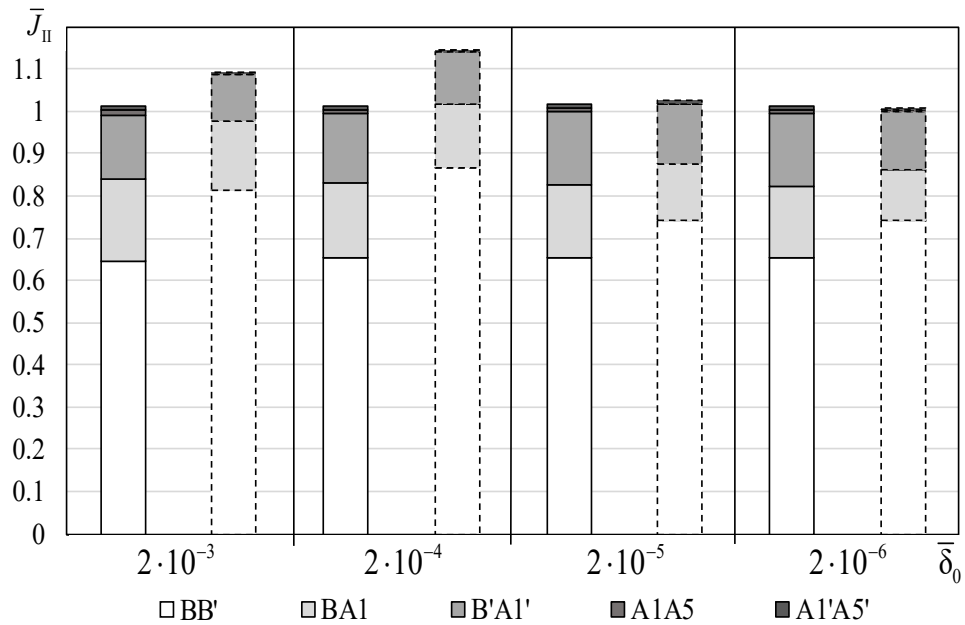


Рис. 2.7. Взаимосвязь относительных значений компонент J -интегралов поперечного сдвига и относительной величины физического разреза в однородном теле.

Анализ данных, представленных на рис. 2.6, рис. 2.7, показывает, что при физическом разрезе в однородных материалах вклад каждого аддитивного слагаемого в общем результате имеет схожую величину. Причем наибольшее значение отмечают в области торцевой грани дефекта. Погрешность компоненты представления (2.4), отвечающей за торцевую грань дефекта, для решения, полученного в Ansys, и решения на основе слоя взаимодействия [111] при $\bar{\delta}_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ составляет 28% при нагружении нормальным разрывом и 12% при нагружении поперечным сдвигом.

Взаимосвязь при нормальном разрыве между относительными компонентами \bar{J}_I и десятичным логарифмом $\bar{\delta}_0 = \delta_0/h$, когда исследуемые образцы являются слоистыми композитами, продемонстрирована на рис. 2.8. Зависимости, продемонстрированные со сплошными контурами, демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные в Ansys. Зависимости, продемонстрированные с прерывистыми контурами, демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные на основе слоя взаимодействия [111].

Компонента J_I получена согласно представлению (2.4) при действии внешней нагрузки \mathbf{P} и относится к J -интегралу слоя нулевой толщины.

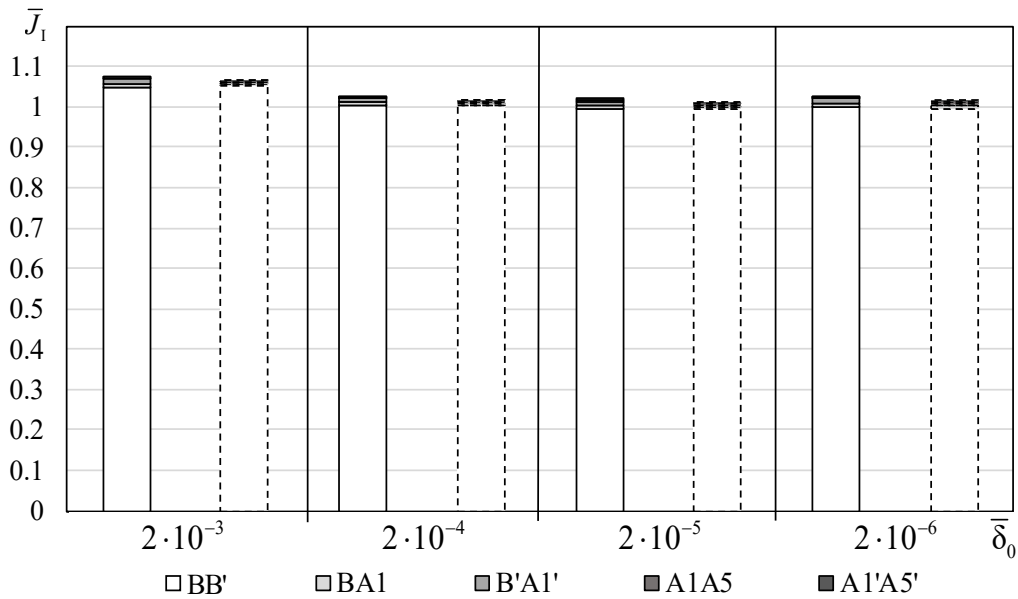


Рис. 2.8. Взаимосвязь относительных значений компонент J -интегралов нормального растяжения и относительной величины физического разреза в слоистом композите.

Взаимосвязь при поперечном сдвиге между относительными компонентами \bar{J}_{II} и десятичным логарифмом $\bar{\delta}_0 = \delta_0/h$, когда исследуемые образцы являются в слоистыми композитами, продемонстрирована на рис. 2.7. Зависимости, продемонстрированные со сплошными контурами, демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные в Ansys. Зависимости, продемонстрированные с прерывистыми контурами, демонстрируют вычислительные данные НДС, полученные на основе слоя взаимодействия [111]. Компонента J_{II} получена согласно представлению (2.4) при действии внешней нагрузки \mathbf{P} и относится к J -интегралу слоя нулевой толщины.

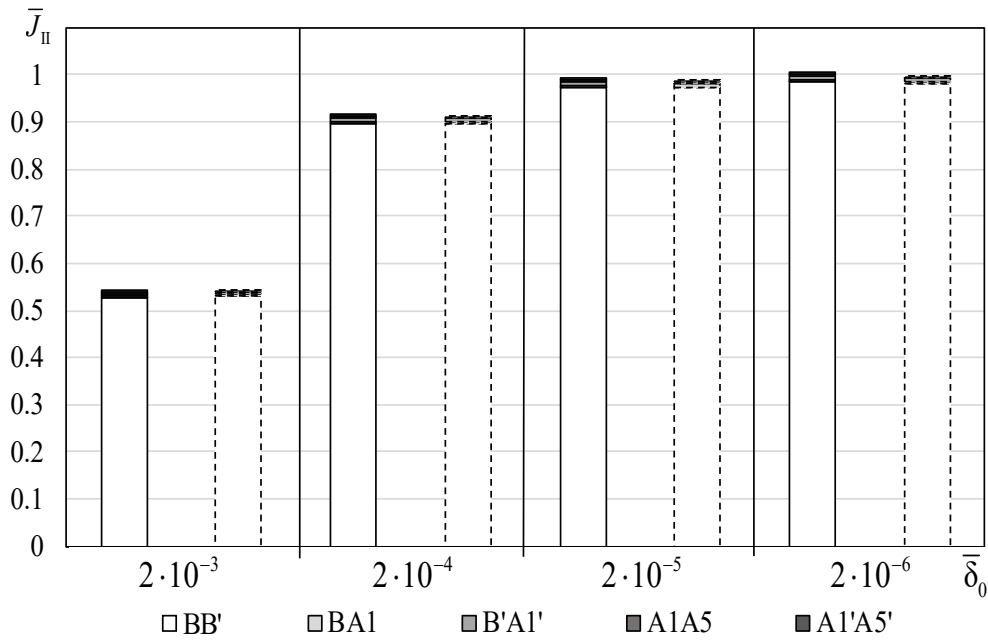


Рис. 2.9. Взаимосвязь относительных значений компонент J -интегралов поперечного сдвига и относительной величины физического разреза в слоистом композите.

Анализируя данные, представленные на рис. 2.8 и рис. 2.9, можно сделать вывод, что сумма второй и третьей компоненты представления (2.4) не превышает 2% от всего значения J при материале адгезива с упругими свойствами, значительно меньшими, чем свойства консолей, а именно $E/E_{adh}=100$. Из чего следует, что доля компоненты, характеризующей НДС торца трещиноподобного дефекта составляет не менее 98%.

Погрешность компоненты представления (2.4), отвечающей за торцевую грань дефекта, для решения, полученного в Ansys, и решения на основе слоя взаимодействия [111] при $\bar{\delta}_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ составляет 0.45% при нагружении нормальным разрывом и 0.43% при нагружении поперечным сдвигом.

Выражение (2.4) можно представить в следующем виде:

$$J = 0.5 \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}_1) \Big|_{x_1=0} dx_2 = \bar{\Phi}. \quad (2.8)$$

где $\mathbf{D} = \sigma_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ – тензор размером 3×3 ; $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ – тензор размером 3×3 ; \cdot – двойное скалярное умножение; \mathbf{e}_i – вектора ортонормированного базиса.

Представление тензоров в виде шарового тензора и его девиатора рассмотрены в следующем виде: $\mathbf{D} = \mathbf{D}^\sigma + \mathbf{D}^\tau$; $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1^\sigma + \mathbf{D}_1^\tau$. Разложение J -интеграла на сумму аддитивных членов представляется следующим образом:

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}^\sigma + \bar{\Phi}^\tau,$$

где $\bar{\Phi}^\sigma, \bar{\Phi}^\tau$ – слагаемые J -интеграла, отвечающие за изменение удельных энергий типа объема и формы соответственно:

$$\bar{\Phi}^\sigma = 0.5 \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} (\mathbf{D}^\sigma \cdot \mathbf{D}_1^\sigma) \Big|_{x_1=0} dx_2 = 0.5 \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \left(\frac{1}{3} \sigma_{22} \varepsilon_{22} \right) \Big|_{x_1=0} dx_2, \quad (2.9)$$

$$\bar{\Phi}^\tau = 0.5 \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} (\mathbf{D}^\tau \cdot \mathbf{D}_1^\tau) \Big|_{x_1=0} dx_2 = 0.5 \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \left(\frac{2}{3} \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right) \Big|_{x_1=0} dx_2. \quad (2.10)$$

2.2. Работа узловых сил при исключении элемента

На рис. 2.10 показаны схемы нагружения испытуемых ДКБ-образцов. Для упрощения модели будем использовать линейно-упругие характеристики материалов и допущение о состоянии плоской деформации. Механические свойства тел описываются характеристиками: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$. Конструкции ДКБ зафиксированы по граням AB исключая любые перемещения, ДКБ испытывают воздействие распределенного давления $P = 10^3$ Па. Геометрические свойства ДКБ-образцов включают длину образца $l = 0.2$ м, длину трещины $a = 0.05$ м, ширину образца $b = 2h + \delta_0$ и ширину консоли $h = (b - \delta_0)/2$ м. Важно отметить, что толщина физического разреза δ_0 в данной задаче будет линейным параметром.

Коэффициент интенсивности напряжений K_I [38], характеризующий нормальный разрыв в тупиковом конечном элементе при $\delta_0 = 0$, вычисляется при воздействии равномерной нагрузки P на границу консоли, см. рис. 2.10, *a*. Аналогично, коэффициент интенсивности напряжений K_{II} [38], отвечающий за поперечный сдвиг тупикового конечного элемента при $\delta_0 = 0$, определяется при равномерной нагрузке P на границу консоли, см. рисунок 2.10, *b*. Значения коэффициентов КИН для каждой из мод K_I, K_{II} были определены с использованием программного пакета ANSYS. Полученные данные представлены в таблице 2.4.

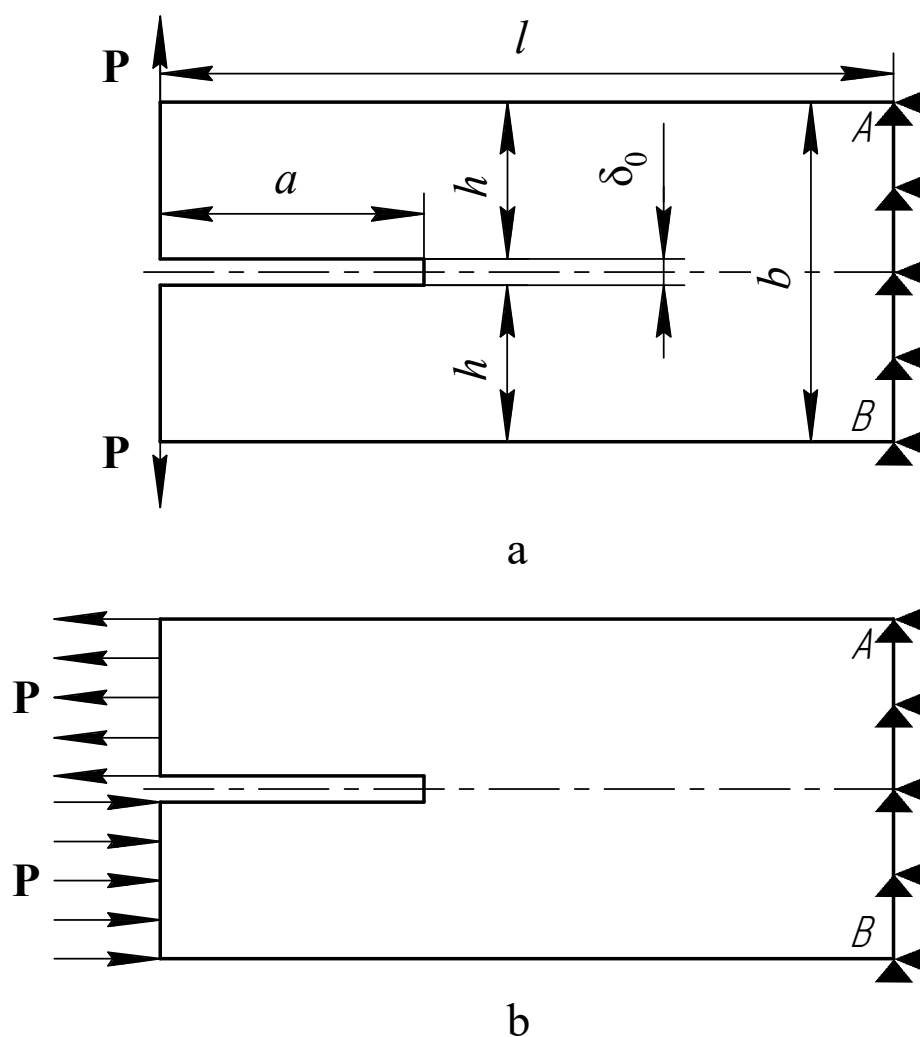


Рис. 2.10. Схема образца в виде ДКБ:

а – схема нагружения трещиноподобного дефекта нормальным растяжением;

б – схема нагружения трещиноподобного дефекта поперечным сдвигом.

Таблица 2.4. Расчетные значения КИН

Искомая величина	Значение (Н/м ^{3/2})
K_I	1294.6
K_{II}	111.75

При трещиноподобном дефекте в виде слоя нулевой толщины, согласно (2.5), определено эталонное значение J -интеграла (см. табл. 2.5).

Таблица 2.5. Расчетные значения J -интеграла

Искомая величина	Значение (Н/м)
J_I	$7.63 \cdot 10^{-6}$
J_{II}	$5.68 \cdot 10^{-8}$

Примем, что при построении КЭ сеточной аппроксимации исследуемой модели конечные элементы, расположенные вблизи физического разреза, прямоугольные с размерами $\delta_0 \times \delta_1$, элементы на продолжении физического разреза являются квадратными, т.е. $\delta_1 = \delta_0$, выполнение данного условия показано на рис. 2.4. Функции формы всех КЭ квадратичные.

В рамках конечно-элементного моделирования, продвижение физического разреза связано с исключением элементов. В своей работе [1] А. Гриффитс исследовал поверхностную энергию, которая возникает при формировании новых поверхностей, связав ее с потоком удельной упругой энергии. Было определено значение этой энергии. В представленной работе проведены вычисления при исключении элемента из расчета путем освобождения его узловых сил, действующих на него со стороны соседних КЭ, методом простой разгрузки [85], см. рис. 2.11.

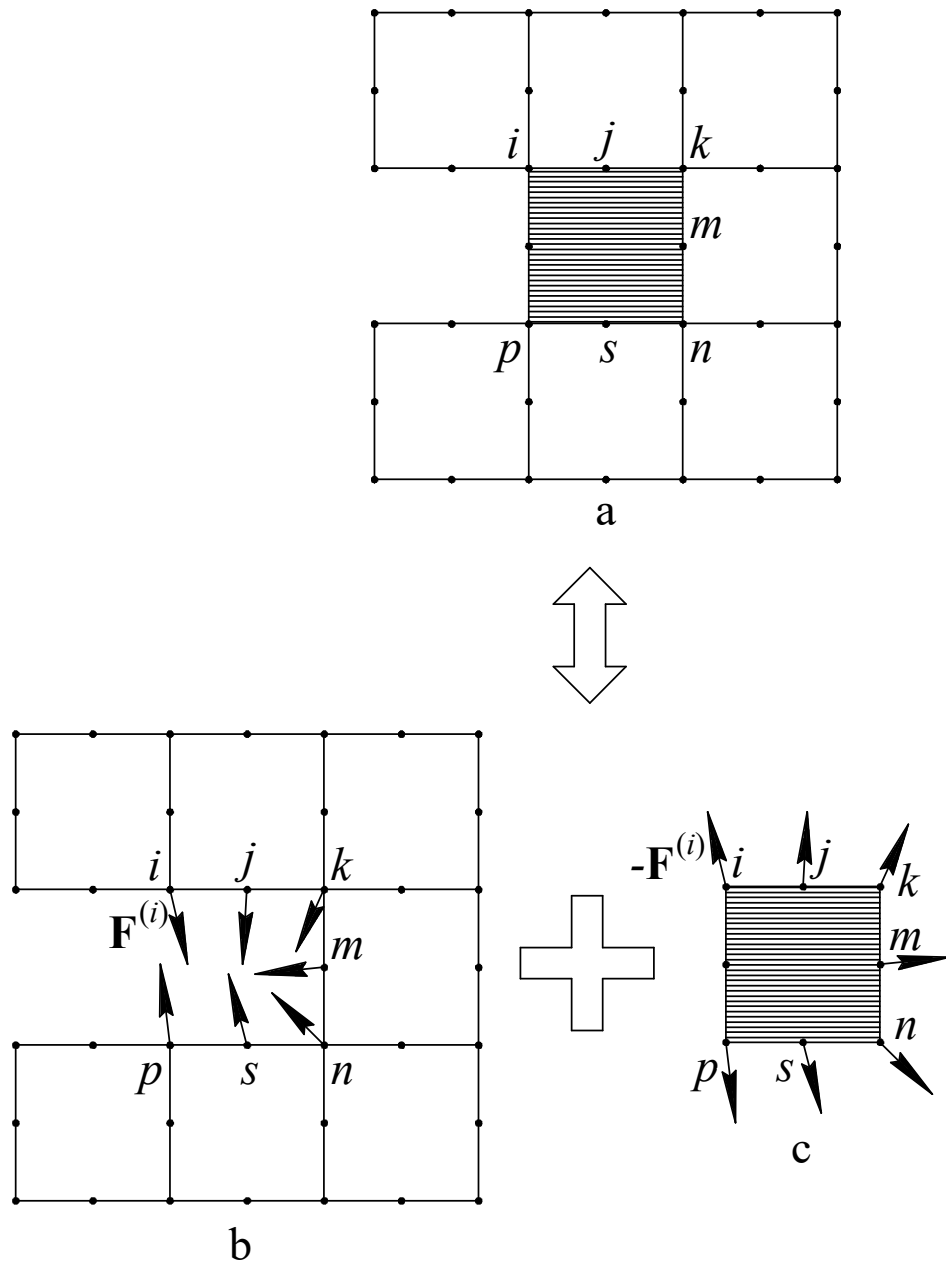


Рис. 2.11. Взаимосвязь КЭ с соседними.

Для плоских КЭ, имеющих квадратичные функции формы, рис. 2.11, б демонстрирует схему, на которой элемент, лежащий на продолжении трещиноподобного дефекта, исключен из расчета. Тем не менее, его воздействие на систему КЭ учитывается путем придания узлам сил взаимодействия $\mathbf{F}^{(e)}$, где $e = i, j, k, m, n, o, p$. Для учета полного исключения элемента, лежащего на продолжении трещиноподобного дефекта, на соответствующие узлы перестают действовать силы, которые связывают его с основной конструкцией, при условии

сохранения неизменной внешней нагрузки. Схема разгрузки представлена на рис. 2.12.

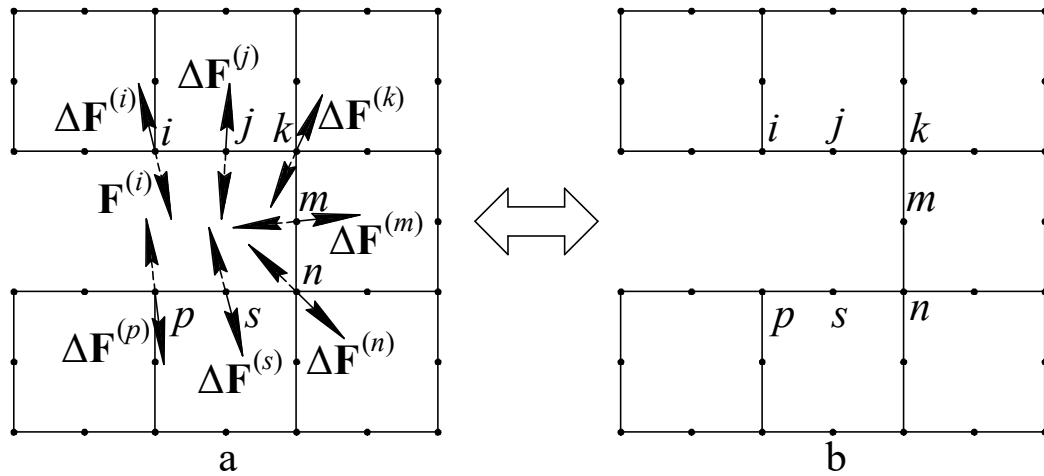


Рис. 2.12. Разгрузка новых материальных поверхностей.

На схеме, см. рис. 2.12b, продемонстрировано окончание разгрузки, т.е. освобождение узлов i, j, k, m, n, o, p от нагрузок, которые они воспринимали от исключаемого КЭ. На схеме, см. рис. 2.12a, продемонстрированы вектора $\Delta \mathbf{F}^{(e)}$, определяемые из критерия $\Delta \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(e)} = 0$, обозначающие изменения новой внешней узловой нагрузки. Изменения внешней нагрузки становится нулевым при установлении значений $\Delta \mathbf{F}^{(e)}$, $\mathbf{u}^{(e)}$ – перемещения узлов до исключения КЭ, лежащего на продолжении трещиноподобного дефекта, $\mathbf{u}^{1(e)}$ – перемещения узлов при завершении исключения.

Величина работы узловых сил определяется как:

$$A = 0.5 \sum_{e=1}^7 \mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{u}^{(e)}, \quad (2.11)$$

где \cdot – скалярное умножение.

Считается, что завершающий этап удаления элемента достигается за счет дополнительной работы, выполняемой силами $\Delta \mathbf{F}^{(e)}$ над его узлами. Определение этой дополнительной работы может быть представлено в следующем форме:

$$A_1 = 0.5 \sum_{e=1}^7 \Delta \mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{u}^{1(e)}. \quad (2.12)$$

В рамках выполнения условия удаления элемента, работы (2.11) и (2.12) образуют энергию, связанную с новыми материальными поверхностями. Следовательно, энергия, приходящаяся на единицу создаваемой поверхности, вычисляется как сумма работ (2.11) и (2.12) отнесённая к $\delta_1 = \delta_0$, см. рис. 2.4:

$$\hat{J} = (A + A_1) / \delta_0. \quad (2.13)$$

Решение МКЭ, реализованном в ПО Ansys применялось в рамках исследования связей между уравнениями (2.5) и (2.13) при моделировании нагружений по модам I и II.

Представлена взаимосвязь, см. рис. 2.13, между отношением $\bar{J}_1 = \hat{J}_1 / J_1$ и логарифмом по основанию 10 относительного значения $\bar{\delta}_0 = \delta_0 / h$ при нормальном разрыве тупикового конечного элемента, возникающем под воздействием нагрузки **P**.

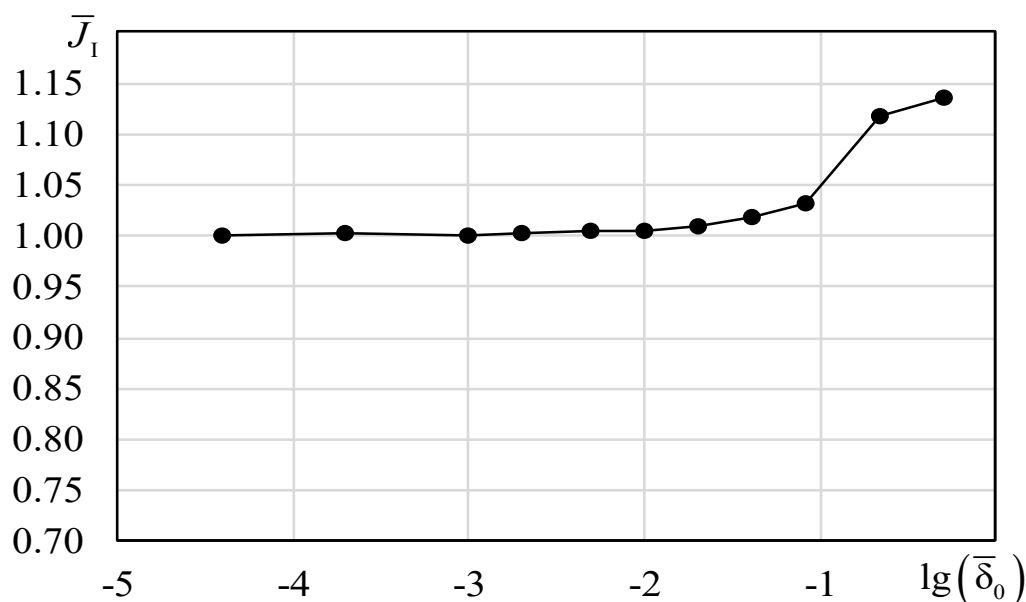


Рис. 2.13. Взаимосвязь влияния относительной величины физического разреза на удельную работу узловых сил при исключении КЭ при моде I.

В таблице 2.6 продемонстрированы результаты вычислений J -интегралов, полученных при применении формул (2.5), (2.6) и (2.13). Для оценки точности

результатов приведена погрешность, выраженная в процентах от значения относительного J -интеграла, определенного с помощью КИН K_I .

Таблица 2.6. Анализ вычислений при воздействии нагрузки, соответствующей нормальному разрыву

Решение		Значение J -интеграла (Н/м)	Погрешность решений (%)
Формула (2.6)		$7.64 \cdot 10^{-6}$	0.2
Численное	По КИН K_I (2.5)	$7.63 \cdot 10^{-6}$	–
	Удельная работа узловых сил при удалении элемента (2.13)	$7.64 \cdot 10^{-6}$	0.13

Результаты, представленные в табл. 2.6, указывают, что значение при вычислении с использованием (2.13) при $\bar{\delta}_0 = 0.00004$ приближается к расчету J -интеграла трещины Гриффитса с большей точностью, чем по формуле (2.6).

Представлена взаимосвязь при нагружении по моде II тупикового конечного элемента, см. рис. 2.14, между отношением $\bar{J}_{II} = \hat{J}_{II} / J_{II}$ и логарифмом по основанию 10 относительного значения $\bar{\delta}_0$, возникающем под воздействием нагрузки P .

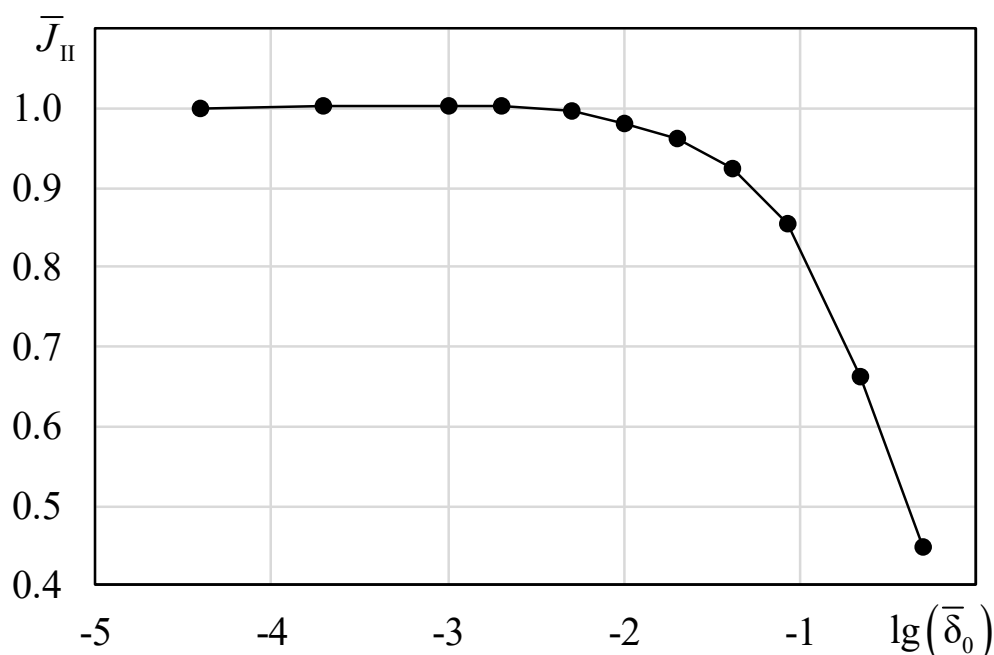


Рис. 2.14. Взаимосвязь влияния относительной величины физического разреза на удельную работу узловых сил при исключении КЭ при моде II

Расчетные значения J -интегралов, согласно (2.5), (2.13), помещены в таблицу 2.7. Для анализа достоверности полученных данных указана погрешность, рассчитанная как процентное отклонение от относительного J -интеграла, который был предварительно определен через K_{II} .

Таблица 2.7. Анализ вычислений при воздействии нагрузки, соответствующей поперечному сдвигу

Численное решение	Значение J -интеграла (Н/м)	Погрешность решений (%)
По КИН K_{II} (2.5)	$5.682 \cdot 10^{-8}$	–
Удельная работа узловых сил при удалении элемента (2.13)	$5.683 \cdot 10^{-8}$	0.02

Результаты, представленные в табл. 2.7, указывают, что значение при вычислении с использованием (2.13) при $\bar{\delta}_0 = 0.00004$ приближается к расчету J -интеграла трещины Гриффитса с большей точностью, чем по формуле (2.5).

2.3. Результаты и выводы по главе 2

1. Определена энергетическая характеристика типа J -интеграла в рамках модели трещины в виде физического разреза, где толщина разреза используется в качестве линейного параметра.

2. Приближение линейного параметра к нулю демонстрирует тенденцию энергетической характеристики к значениям, сопоставимым с J -интегралами, используемыми для трещин в виде математических разрезов при модах нагружений I и II.

3. Введенное в данной работе энергетическое представление J -интеграла для зоны, отвечающей за тупиковую грань физического разреза, может использоваться в качестве J -интеграла слоя нулевой толщины в случае изучения слоистых композитов, где в качестве адгезионных материалов применяются адгезивы с меньшими упругими свойствами по сравнению со свойствами материалов консолей.

4. Из исследования МКЭ, где размер грани КЭ играет ключевую роль, показано, что исключение КЭ вызывает близкое изменение потока удельной упругой энергии к модели слоя нулевой толщины в области вершины физического разреза. Продемонстрировано, что исключение КЭ в вершине дефекта с применением метода простой разгрузки узловых сил приводит к приближению значения удельной полной работы узловых сил элемента к J -интегралу, принятому в качестве эталона. В то же время, при малых размерах КЭ, лежащих на продолжении дефекта, удельная работа исключения КЭ не подвергается существенным изменениям.

5. КИН слоя нулевой толщины можно ассоциировать с удельной работой узловых сил при исключении КЭ, лежащего на продолжении дефекта, при относительно малых значениях толщины физического разреза.

Критерий разрушения смешанной моды нагружения I+II трещиноподобного дефекта тонкого адгезионного слоя

Материал настоящей главы излагается в соответствии с публикациями автора данной диссертации [119, 145–148] и в нем предложено формулирование двухпараметрических критериев, определяющих момент разрушения. Один из этих критериев имеет квазилинейную корреляцию с энергетическим произведением удельной энергии типа удельной энергии объема, а другой исходит из гипотезы о квадратичной зависимости разрушения от энергетического произведения соответствующей энергетической характеристики. В оба критерия входят параметры «разрыхления», определяемые при помощи критических значений J -интегралов, которые установлены для мод нагружения I, II, и его аддитивных составляющих при критическом нормальном разрыве и критической смешанной моде нагружения физического разреза AC.

Исследованы характеристики предельного состояния адгезионного слоя при воздействии нагрузок в SLJ соединениях, в рамках применения известного решения Холланда – Рейсснера. Исследованы, как однопараметрические, так и двухпараметрические критерии. Для расчета составляющей J -интеграла при нормальном разрыве адгезива использовано решение, полученное на основе теории пластин. В публикации [78] отражены экспериментально определённые значения J -интегралов в критических состояниях нормального растяжения и поперечного сдвига, также в ней приведены данные от изготовителей изучаемых адгезивов.

Численные решения задач нагружения дефектов, в виде физического разреза, получены МКЭ для нагружений в виде нормального растяжения в случае ДКБ-образца и смешанного нагружения модой I+II – SLB-образца. Рассчитаны коэффициенты для предложенных критериев разрушения адгезивов Araldite AV138, Araldite 2015 и Sikaforce 7752. Проведен сравнительный анализ однопараметрического и предложенных двухпараметрических критериев разрушения с известным критерием (1.4).

3.1. Формулировка двухпараметрических критериев разрушения

В данном исследовании анализируются двухпараметрические модификации соотношения (1.6), которые допускают использование J -интеграла со значениями, меньшими критического, и их применение в решении задачи определения критического состояния деформируемого SLB-образца.

Для определения предельного состояния адгезионного слоя для смешанной моды нагружения I+II применяется следующие критерии:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma})\beta)\bar{\varphi}^\sigma + \bar{\varphi}^\tau + \gamma\text{sign}(\bar{\sigma})\bar{\varphi}^\sigma\bar{\varphi}^\tau = G_{\text{IC}}, \quad (3.1)$$

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma})\beta_1)\bar{\varphi}^\sigma + \bar{\varphi}^\tau + \gamma_1\text{sign}(\bar{\sigma})(\bar{\varphi}^\sigma)^2 = G_{\text{IC}}, \quad (3.2)$$

где β , γ , β_1 , γ_1 – параметры, учитывающие «разрыхление» адгезива, рассчитываемые для конкретных адгезивов.

Квазилинейная взаимосвязь с изменением удельной энергии типа объема предложена для зависимости (3.1), квадратичная взаимосвязь с изменением удельной энергией типа объема – зависимости (3.2).

При предельном состоянии трещиноподобного дефекта в случае нормального растяжения, согласно (3.1) имеем:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma})\beta)\bar{\varphi}_{\text{IC}}^\sigma + \bar{\varphi}_{\text{IC}}^\tau + \gamma\text{sign}(\bar{\sigma})\bar{\varphi}_{\text{IC}}^\sigma\bar{\varphi}_{\text{IC}}^\tau = G_{\text{IC}}. \quad (3.3)$$

При предельном состоянии трещиноподобного дефекта в случае поперечного сдвига, согласно (3.1) и (3.2), учитывая, что $\bar{\varphi}_{\text{IC}}^\sigma = 0$: $\bar{\varphi}_{\text{IC}}^\tau = G_{\text{IC}}$.

При предельном состоянии трещиноподобного дефекта в случае смешанной моды нагружения, согласно (3.1):

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma})\beta)\bar{\varphi}_{\text{I+II,C}}^\sigma + \bar{\varphi}_{\text{I+II,C}}^\tau + \gamma\text{sign}(\bar{\sigma})\bar{\varphi}_{\text{I+II,C}}^\sigma\bar{\varphi}_{\text{I+II,C}}^\tau = G_{\text{IC}}. \quad (3.4)$$

Так как гидростатическое давление положительно (при нормальном разрыве и смешанной моде I+II), а суммы аддитивных слагаемых представляют собой значения критических потоков упругих энергий мод нагружений, реализуемых при нормальном разрыве и смешанной моде, т.е. $\bar{\varphi}_{\text{IC}}^\sigma + \bar{\varphi}_{\text{IC}}^\tau = G_{\text{IC}}$, $\bar{\varphi}_{\text{I+II,C}}^\sigma + \bar{\varphi}_{\text{I+II,C}}^\tau = G_{\text{I+II,C}}$,

из (3.3) и (3.4) образуем СЛАУ, где в качестве искомым величин выступают характеристики «разрыхления»:

$$\beta \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} + \gamma \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{IC}^{\tau} = G_{II,C} - G_{IC}, \quad (3.5)$$

$$\beta \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} + \gamma \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} = G_{II,C} - G_{I+II,C}, \quad (3.6)$$

СЛАУ (3.5), (3.6) решается методом Крамера относительно параметров β , γ , являющимися характеристиками «разрыхления» конкретного адгезива:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} & \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{IC}^{\tau} \\ \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} & \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} \end{vmatrix} = \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} - \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{IC}^{\tau} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma},$$

$$\Delta_{\beta} = \begin{vmatrix} G_{II,C} - G_{IC} & \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{IC}^{\tau} \\ G_{II,C} - G_{I+II,C} & \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} \end{vmatrix} = (G_{II,C} - G_{IC}) \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} - \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{IC}^{\tau} (G_{II,C} - G_{I+II,C}),$$

$$\Delta_{\gamma} = \begin{vmatrix} \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} & G_{II,C} - G_{IC} \\ \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} & G_{II,C} - G_{I+II,C} \end{vmatrix} = \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} (G_{II,C} - G_{I+II,C}) - (G_{II,C} - G_{IC}) \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma},$$

$$\beta = \frac{\Delta_{\beta}}{\Delta} = \frac{(G_{II,C} - G_{IC}) \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} - \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{IC}^{\tau} (G_{II,C} - G_{I+II,C})}{\bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} - \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{IC}^{\tau} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma}},$$

$$\gamma = \frac{\Delta_{\gamma}}{\Delta} = \frac{\bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} (G_{II,C} - G_{I+II,C}) - (G_{II,C} - G_{IC}) \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma}}{\bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} - \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{IC}^{\tau} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma}},$$

Следовательно, окончательные соотношения для вычислений характеристик «разрыхления» β , γ из СЛАУ (3.5), (3.6) приведены ниже:

$$\beta = \frac{\bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} (G_{II,C} - G_{IC}) - \bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{IC}^{\tau} (G_{II,C} - G_{I+II,C})}{\bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} (\bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} - \bar{\varphi}_{IC}^{\tau})}, \quad (3.7)$$

$$\gamma = \frac{\bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} (G_{II,C} - G_{I+II,C}) - \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} (G_{II,C} - G_{IC})}{\bar{\varphi}_{IC}^{\sigma} \bar{\varphi}_{I+II,C}^{\sigma} (\bar{\varphi}_{I+II,C}^{\tau} - \bar{\varphi}_{IC}^{\tau})}. \quad (3.8)$$

Аналогично определим параметры «разрыхления» β_1 и γ_1 для критерия (3.2):

$$\beta_1 = \frac{\bar{\varphi}_{I+II,C}^\sigma \bar{\varphi}_{I+II,C}^\sigma (G_{II,C} - G_{IC}) - \bar{\varphi}_{IC}^\sigma \bar{\varphi}_{IC}^\tau (G_{II,C} - G_{I+II,C})}{\bar{\varphi}_{IC}^\sigma \bar{\varphi}_{I+II,C}^\sigma (\bar{\varphi}_{I+II,C}^\sigma - \bar{\varphi}_{IC}^\tau)}, \quad (3.9)$$

$$\gamma_1 = \frac{\bar{\varphi}_{IC}^\sigma (G_{II,C} - G_{I+II,C}) - \bar{\varphi}_{I+II,C}^\sigma (G_{II,C} - G_{IC})}{\bar{\varphi}_{IC}^\sigma \bar{\varphi}_{I+II,C}^\sigma (\bar{\varphi}_{I+II,C}^\sigma - \bar{\varphi}_{IC}^\tau)}. \quad (3.10)$$

Определение параметра β' , используемого в однопараметрическом критерии разрушения АС (1.6), возможно при установленных предельных значениях потоков упругих энергий нормального растяжения и поперечного сдвига – G_{IC} , $G_{II,C}$, а также значения изменения удельной энергии типа объема, установленных для предельного состояния нормального растяжения. При вычислении параметров $\beta, \beta_1, \gamma, \gamma_1$, используемых в двухпараметрических критериях разрушения АС (3.1) и (3.2), необходимо установить значения J -интегралов при предельных состояниях нормального растяжения и поперечного сдвига – G_{IC} , $G_{II,C}$, а также значений изменения удельной энергии типа объема и формы, установленных для предельных состояний нормального растяжения и смешанного нагружения.

3.2. Исследование разрушения адгезива при соединении изотропных пластин внахлест на основе решения Холланда – Рейсснера

Изучение смешанной моды нагружения I+II в данном разделе работы представлено с помощью схемы SLJ соединения, см. рис. 3.1, на которой продемонстрированы консоли 1, 2, соединенные АС 3. Грань AB пластины 2 фиксируется, не допуская перемещений, в то время как на левую часть пластины 1 воздействует горизонтальная нагрузка $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_1$. Длина АС обозначена как l .

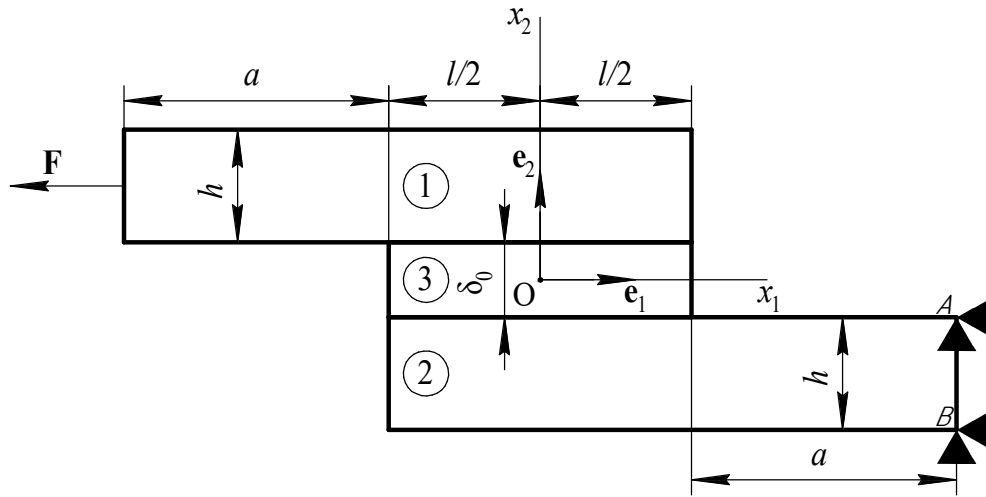


Рис. 3.1. Схема нагружения SLJ соединения.

Для средних по толщине слоя напряжений при условии изотропности материала адгезива решение [124] может быть представлено в следующей форме:

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{Q_1}{8c} \left[\frac{\beta c}{h} (1 + 3K) \frac{\cosh(\beta X/h)}{\sinh(\beta X/h)} + 3(1 - K) \right], \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22} = & \frac{Q_1 h}{c^2 \Delta} \left(R_2 \lambda^2 \frac{K}{2} + \lambda K' \cosh \lambda \cos \lambda \right) \cosh \frac{\lambda X}{c} \cos \frac{\lambda X}{c} + \\ & + \frac{Q_1 h}{c^2 \Delta} \left(R_1 \lambda^2 \frac{K}{2} + \lambda K' \sinh \lambda \sin \lambda \right) \sinh \frac{\lambda X}{c} \sin \frac{\lambda X}{c}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где E – модуль Юнга материала консолей; E_3 – модуль Юнга материала адгезива; ν – коэффициент Пуассона материала консолей; B – ширина консолей, измеряемая в ортогональном плоскости $x_1 O x_2$ направлении;

$$X \in [-0.5l; 0.5l];$$

$$w = \sqrt{\frac{E_3 l^2}{E h \delta_0}};$$

$$c = 0.5l;$$

$$K = \frac{\cosh(U_2 c) \sinh(U_1 a)}{\sinh(U_1 a) \cosh(U_2 c) + 2\sqrt{2} \cosh(U_1 a) \sinh(U_2 c)};$$

$$U_1 = \frac{2}{h} \sqrt{(1-\nu^2) \frac{3F}{EhB}};$$

$$U_2 = \frac{\sqrt{2}U_1}{4};$$

$$K' = KcU_1;$$

$$\beta = 2 \sqrt{\frac{E_3 h}{E \delta_0}};$$

$$\gamma = \left(\frac{6E_3 h}{E \delta_0} \right)^{1/4};$$

$$\lambda = \frac{\gamma c}{h};$$

$$R_1 = \cosh \lambda \sin \lambda + \sinh \lambda \cos \lambda;$$

$$R_2 = \sinh \lambda \cos \lambda - \cosh \lambda \sin \lambda;$$

$$\Delta = 0.5 [\sinh(2\lambda) + \sin(2\lambda)];$$

$$Q_1 = F/B.$$

Araldite AV138, характеристики которой, в частности модуль Юнга, были изложены в работе [149] и составили $E_3 = 4.89$ ГПа, а модуль сдвига – $G_3 = 1.56$ ГПа, используется в виде материала адгезива, согласно публикации [132], а Al6082-T651, со свойствами $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.3$, используется в виде материала консолей. Определяя критические значения J -интегралов для смолы, будем исходить из данных, предоставленных производителем, а также из экспериментальных результатов, представленных в работе [78], значения которых указаны в скобках. В соответствии с этими данными для критического состояния нормального растяжения $G_{IC} = 200(140)$ Н/м, а для критического состояния поперечного сдвига $G_{IIC} = 380(352)$ Н/м. Исследовались образцы с постоянной общей длиной $2a + l = 180$ мм, $B = 25$ мм. Толщина пластин h для всех образцов была фиксирована и равна 3 мм, а толщина адгезивного слоя δ_0 составляла 0.2 мм.

Менялась длина участка, склеенного адгезивом, от $l_1 = 12.5$ мм до $l_4 = 50$ мм с шагом $\Delta l = 12.5$ мм. Значения внешней критической нагрузки для каждой длины сопряжения, определяемой индексом эксперимента, равнялись: $F_1 = 5900$ Н, $F_2 = 7100$ Н, $F_3 = 8500$ Н, $F_4 = 9300$ Н.

Критериальные зависимости (1.6), (3.1) и (3.7) применялись для оценки параметров предельного состояния АС.

В работе [114] рассмотрено критическое нагружение АС, возникающее при нормальном растяжении слоистого композита в виде ДКБ. При вычислении НДС АС применим результаты, полученные при проведении данных исследований, основанных на теории пластин. При вычислении НДС АС при смешанной моде нагружения применим известные результаты (3.11), (3.12), полученные в публикации [122]. В связи с отсутствием $\bar{\sigma}_{11}$, согласно результатам [122], вычисление НДС критического нагружения, возникающего при нормальном растяжении АС, можно осуществить приняв во внимание единственную компоненту тензора напряжений, таким образом формула для определения напряженного состояния окончания АС будет иметь следующий вид:

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{2Q_2 \sqrt{6(1+\nu)}}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E}} \left(\frac{a_1}{h} \sqrt{(1-\nu)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad (3.13)$$

где a_1, h – длина свободной консоли и ее толщина в ДКБ-образце.

Решение (3.13) было получено с учетом $\delta_0/h \ll 1$, что позволило вычислить значение J -интеграла при нулевом коэффициенте Пуассона следующим образом:

$$G_1 = \frac{\bar{\sigma}_{22}^2}{2E_3} \delta_0 = \frac{12Q_2^2 (1-\nu_1^2)}{hE_1} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \left(\frac{h}{a} \right) \right)^2. \quad (3.14)$$

Полученное выражение согласуется с результатами, представленными в работе [150], и указывает на то, что при достаточно малой относительной толщине слоя значение δ_0 не оказывает влияния на значение энергетического произведения. В предельном состоянии, возникающем при нормальном растяжении АС, для

исследуемого интервала значений относительной толщины АС, напряжение, возникающее на его тупиковой грани, вычислим как:

$$\bar{\sigma}_{22} = \sqrt{\frac{2G_{IC}E_3}{\delta_0}}. \quad (3.15)$$

Представление J -интеграла, соответствующему нормальному растяжению, приведем в виде отдельных членов:

$$J_1 = G_1 = \bar{\varphi} = \bar{\varphi}^\sigma + \bar{\varphi}^\tau = J_1^\sigma + J_1^\tau, \quad (3.16)$$

где, согласно (2.9), (2.10), $J_1^\sigma = J_1/3$; $J_1^\tau = 2J_1/3$, при условии, что в АС $\nu = 0$ и однородно напряженно-деформированное состояние по толщине слоя.

В данной ситуации значение параметра разупрочнения, определенного в формуле (1.6), составит: $\beta' = 3(G_{IIIC}/G_{IC} - 1)$.

На основе вычислений, согласно (3.11) и (3.12), с использованием $F_1 = 5900$ Н, принятой в качестве предельного нагружения АС, определим значения $\bar{\varphi}_{I+II,C}^\sigma$, $\bar{\varphi}_{I+II,C}^\tau$, указанные в формулах (3.7)-(3.10). Определяя предельные величины G_{IC} , G_{IIIC} АС, будем исходить из данных, предоставленных производителем, а также из экспериментальных результатов, представленных в работе [78], в табл. 3.1 и табл. 3.2 в скобках указаны значения, соответствующие экспериментальным результатам. Табл. 3.1 и табл. 3.2 содержат вычисленные отклонения критериев разрушения. Δ_1 ассоциировано с однопараметрическим критерием (1.6) и представляет отношение правой части к G_{IIIC} , аналогично Δ_2 – двухпараметрический критерий (3.1) и Δ_3 – двухпараметрический критерий (3.2). Отклонения критериев вычислялись исходя из двух вариантов задания толщины АС, $\delta_0 = 200$ мкм – величина, характерная при проведения натурных работ, и $\delta_0 = 2$ мкм.

Таблица 3.1. Отклонения критериев разрушения при $\delta_0 = 200$ мкм

F (Н)	5900	7100	8500	9300
Δ_1	1.41(1.81)	1.46(1.87)	1.55(1.97)	1.46(1.84)
Δ_2	1	1.01(0.99)	1.03(0.96)	0.96(0.98)
Δ_3	1	1.05(1.06)	1.14(1.16)	1.06(0.99)

Таблица 3.2. Отклонения критериев разрушения при $\delta_0 = 2$ мкм

F (Н)	5900	7100	8500	9300
Δ_1	1.23(1.58)	1.27(1.62)	1.05(0.99)	1.02(0.99)
Δ_2	1	1.02(0.99)	1.11(1.11)	1.05(1.01)
Δ_3	1	1.04(1.04)	1.34(1.69)	1.27(1.58)

Анализ данных, представленных в таблицах 3.1 и 3.2, показывает, что двухпараметрические критерии демонстрируют наибольшую согласованность с экспериментальными результатами по сравнению с однопараметрическим критерием. В частности, двухпараметрический критерий (3.1), учитывающий квазилинейную зависимость от изменения удельной энергии типа удельной энергии изменения объема, обладает более высокой точностью по сравнению с критерием (3.2), достигая погрешности, не превышающей 1 % при определенных критических значениях J -интегралов. Уменьшение значения линейного параметра приводит к более стабильным расчетным результатам и снижению погрешности, что особенно заметно при использовании однопараметрического критерия.

3.3. Разрушение тонкого адгезионного слоя в рамках конечно-элементного решения

В данном разделе работы для анализа критического состояния трещиноподобного дефекта адгезионного слоя, представленного физическим разрезом толщиной δ_0 , изображенным на рис. 2.4, прибегнем к конечно-элементному решению ANSYS [151]. Моделирование композита будет осуществлено в предположении плоской деформации, опираясь на законы линейной теории упругости. Важно отметить, что согласно работе [152], точки B и B' , см. рис. 2.4, являющиеся угловыми точками физического разреза, представляют собой концентраторы напряжений. Использование МКЭ для моделирования данного дефекта среды, при условии, что высота тупикового КЭ, лежащего на продолжении физического разреза, совпадает с δ_0 , ведет к конечным напряжениям. Таким образом, если δ_0 имеет конечное значение, то напряжения в конечном элементе, лежащем на продолжении физического разреза, будут иметь регулярный характер. В данной ситуации для расчета J -интеграла примем формулу (2.4). В рамках критерия (1.6) применяется метод Нейбера – Новожилова [12, 153–156] для вычисления средних характеристик по толщине слоя. При этом адгезионный слой моделируется как совокупность квадратных в плане элементов, с гранью равной δ_0 , как представлено на рис. 2.4.

В выражении (1.5) среднее по толщине слоя изменение удельной упругой энергии определяется исходя из соотношений (2.9), (2.10).

Определение значений параметров β, γ требует анализа критических режимов, возникающих при наличии трещиноподобных дефектов I и I+II мод нагружений в адгезионном слое.

На рис. 3.2 представлена схема расчета ДКБ-образца, ориентированная на анализ поведения адгезионного слоя при воздействии нагрузок, соответствующих нормальному разрыву, другими словами, моде I.

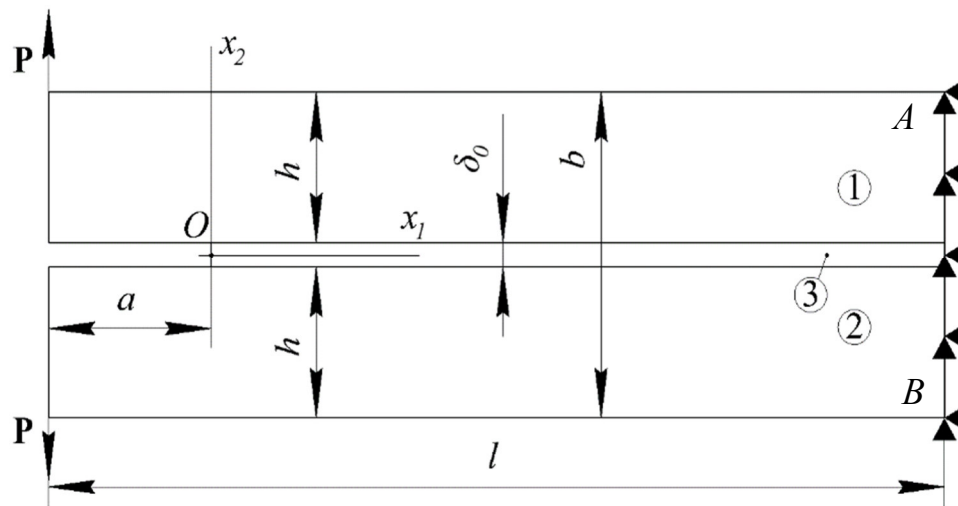


Рис. 3.2. Схема нагружения адгезионного слоя нормальным разрывом.

Тела 1 и 2, имеющие идентичные значения высоты h и механические характеристики, описанные в таблице 3.3, соединены АС 3, характеризующимся значением δ_0 . Грань AB образца фиксируется, не допуская перемещений, в то время как на левые части пластин 1, 2 воздействует симметричная распределенная нагрузка P . Для моделирования консолей выбран ортотропный материал углеродно-эпоксидный препрег (SEAL Texigreg HS 160 RM), который использовался в исследовании [104], посвященном анализу критических нагрузок.

Таблица 3.3. Механические свойства консолей

Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Модуль сдвига, ГПа
$E_x = 109$	$\nu_{xy} = 0.342$	$G_{xy} = 4.315$
$E_y = 8.819$	$\nu_{xz} = 0.342$	$G_{xz} = 4.315$
$E_z = 8.819$	$\nu_{yz} = 0.380$	$G_{yz} = 3.200$

Геометрические свойства ДКБ включают общую длину ДКБ $l = 0.245$ м, толщину ДКБ $b = 0.015$ м, длину дефекта $a = 0.055$ м и ширину консолей $h = 0.0127$ м. Важно отметить, что толщина физического разреза δ_0 в данной задаче будет линейным параметром.

Определим значение предельной внешней нагрузки, при которой дефект, реализованный в Ansys в виде слоя нулевой толщины, достигает значения G_{IC} из таблицы 1.1, приведем полученные данные в таблице 3.4.

Таблица 3.4. Критическая нагрузка

Внешняя нагрузка	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
P , МПа	1.640	3.220	8,527

Нахождение критической внешней нагрузки позволяет исследовать энергетические характеристики в зависимости от величины линейного параметра δ_0 . Таблица 3.5 содержит результаты расчетов для каждого из анализируемых адгезивов.

Таблица 3.5. Результаты расчета

δ_0 , м	Araldite AV138		Araldite 2015		Sikaforce 7752	
	$\bar{\Phi}_{IC}$, Н/м	$\bar{\Phi}_{IC}^{\sigma}$, Н/м	$\bar{\Phi}_{IC}$, Н/м	$\bar{\Phi}_{IC}^{\sigma}$, Н/м	$\bar{\Phi}_{IC}$, Н/м	$\bar{\Phi}_{IC}^{\sigma}$, Н/м
10^{-2}	150.24	43.56	678.19	237.16	5102.44	2300.68
10^{-3}	137.23	55.76	600.56	279.84	3963.62	2290.50
10^{-4}	136.25	57.07	577.70	278.22	3778.49	2191.35
10^{-5}	136.04	56.79	571.48	277.33	3757.94	2169.95
10^{-6}	135.59	56.52	569.49	277.07	3759.74	2166.83

Согласно данным из таблицы 3.5, наблюдается стремление энергетических характеристик к критическим значениям J -интегралов. При значении линейного параметра $\delta_0 = 10^{-6}$ м максимальное отклонение от критических значений, согласно таблице 1.1, не превышает 5.46 % для адгезива Araldite 2015.

Рис. 3.3 иллюстрирует изменение относительных значений энергетических характеристик от толщины адгезионных слоев при воздействии критических нагрузок **P**. Каждый график на рисунке отражает результаты для конкретного адгезива: Araldite AV138 – график 1, Araldite 2015 – график 2 и Sikaforce 7752 – график 3.

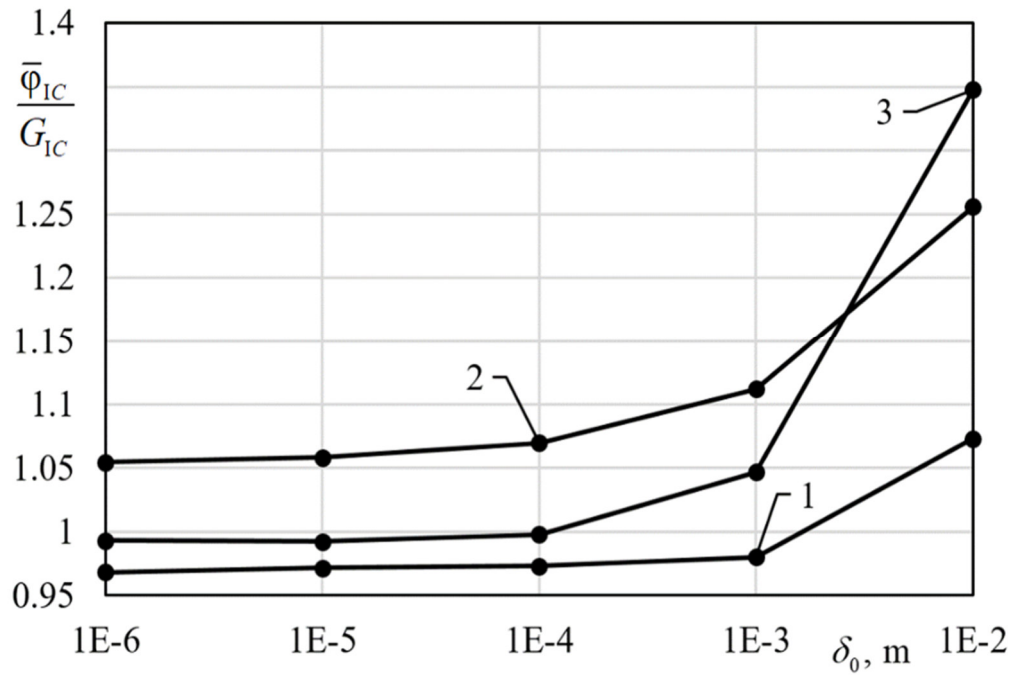


Рис. 3.3. Зависимости энергетических произведений от толщины.

Определим составляющие J -интеграла исследуемых адгезивов, на основе вычисленных при $\delta_0 = 10^{-6}$ м данных. Полученные результаты представлены в таблице 3.6.

Таблица 3.6. Величины аддитивных слагаемых

Параметр	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$\bar{\Phi}_{IC}^{\sigma}, \text{Н/м}^2$	56.52	277.07	2166.83
$\bar{\Phi}_{IC}^{\tau}, \text{Н/м}^2$	79.07	292.42	1592.91

3.3.1. Однопараметрический критерия разрушения

Определим параметр «разрыхления», который применяется в однопараметрическом критерии (1.6) для оценки адгезивов, на основе вычислений составляющего J -интеграла, отвечающего за изменение удельной энергии типа объема при $\delta_0 = 10^{-6}$ м. Полученные данные представлены в таблице 3.7.

Таблица 3.7. Значение параметра «разрыхления»

Параметр	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
β	3.75	8.73	0.82

На рис. 3.4 показан SLB-образец [78] для анализа моды нагружения I+II.

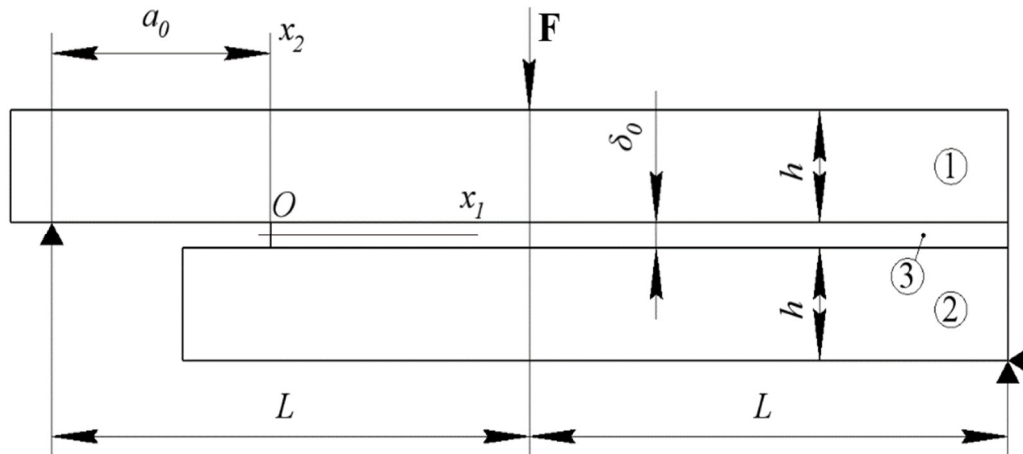


Рис. 3.4. Схема SLB-образца.

Тела 1 и 2, соединенные АС 3, характеризуются ортотропными механическими свойствами, см таблицу 3.3. Механические свойства АС приведены в таблице 1.1. Геометрические свойства SLB включают толщину SLB $b = 0.015$ м, ширину пластин $h = 0.003$ м, длину дефекта $a = 0.0875$ м и плечо воздействия нагрузки $L = 0.125$ м. Важно отметить, что толщина физического разреза δ_0 в данной задаче будет линейным параметром.

Таблица 3.8 содержит данные о критической нагрузке F_{exp} , которые были исследованы в ходе эксперимента, описанного в работе [104].

Таблица 3.8. Критическая нагрузка

Внешняя нагрузка	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
F_{exp} , Н	81.1	204.2	630.3

Исходя из критических нагрузок F_{exp} , представленных в работе [104] и систематизированных в таблице 3.8, вычислим критические значения $G_{I+II,C}$. Используя модель слоя нулевой толщины в ПО Ansys рассчитаны значения $G_{I+II,C}$, предельные потоки энергии, вычисленные, согласно (1.2), как $G_{I+II,C}^* = (G_I + G_{II})_{I+II,C}$ по $(G_I)_{I+II,C}$ и $(G_{II})_{I+II,C}$, полученным при критических нагружениях SLB-образцов в работе [104], представим в таблице 3.9.

Таблица 3.9. Критические потоки упругой энергии для смешанной моды нагружения I+II

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$G_{I+II,C}$, Н/м	107.8	683.6	6512.8
$G_{I+II,C}^*$, Н/м	106.1	629	5950
Погрешность, %	1.58	7.99	8.64

В случае достижения критической внешней силы F_{exp} проанализируем энергетические характеристики при различных значениях линейного параметра δ_0 . Таблица 3.10 демонстрирует результаты расчетов для исследуемых адгезивов.

Таблица 3.10. Результаты расчета

$\delta_0, \text{ м}$	Araldite AV138		Araldite 2015		Sikaforce 7752	
	$\bar{\Phi}_{I+II,C}, \text{ Н/м}$	$\bar{\Phi}_{I+II,C}^{\sigma}, \text{ Н/м}$	$\bar{\Phi}_{I+II,C}, \text{ Н/м}$	$\bar{\Phi}_{I+II,C}^{\sigma}, \text{ Н/м}$	$\bar{\Phi}_{I+II,C}, \text{ Н/м}$	$\bar{\Phi}_{I+II,C}^{\sigma}, \text{ Н/м}$
10^{-3}	102.60	24.05	885.13	191.08	3776.80	2092.25
10^{-4}	108.61	26.51	796.41	209.01	6349.50	2208.98
10^{-5}	109.57	26.14	701.29	207.97	6613.74	2204.50
10^{-6}	108.25	25.54	691.99	207.73	6644.45	2202.53
10^{-7}	108.06	25.53	690.61	207.70	6646.80	2201.36

Согласно данным, представленным в таблице 3.10, наблюдается стремление энергетических характеристик к критическим потокам при значении линейного параметра $\delta_0 = 10^{-7}$ м, что согласуется с данными из таблицы 3.9. Максимальное отклонение от критических значений фиксируется для адгезива Sikaforce 7752 и составляет 2.06 %.

На рис. 3.5 представлены зависимости относительных значений энергетических характеристик при действии предельных внешних сил F в зависимости от толщины адгезионного слоя. Для адгезивов Araldite AV138, Araldite 2015 и Sikaforce 7752 построены отдельные кривые, обозначенные как зависимость 1, зависимость 2 и зависимость 3 соответственно.

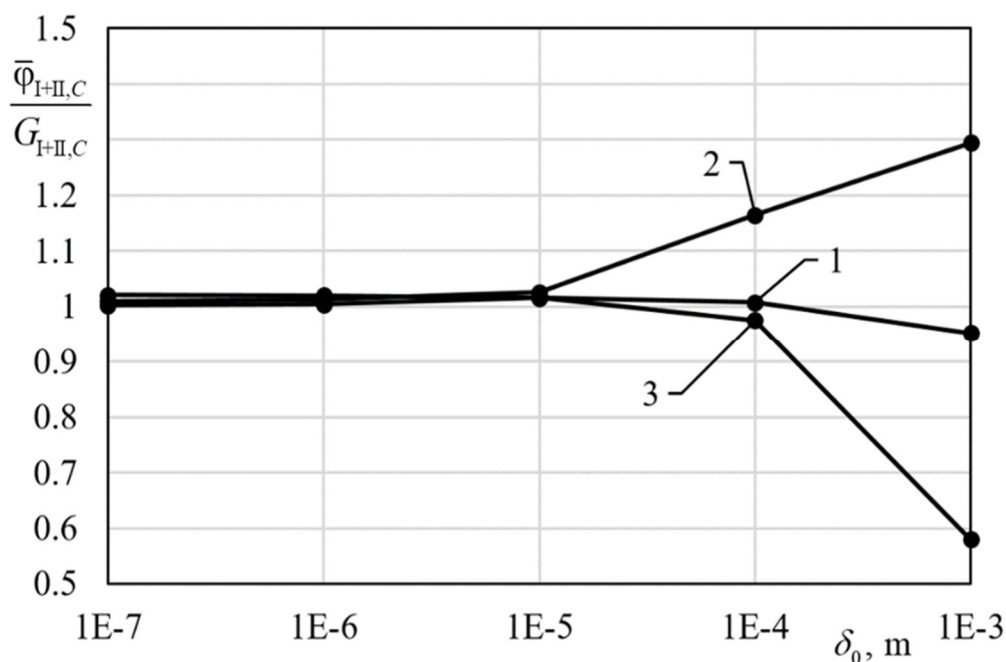


Рис. 3.5. Влияние толщины АС δ_0 на предельные потоки энергии.

На основе вычислений, проведенных при заданном значении толщины адгезионного слоя $\delta_0 = 10^{-6}$ м, определим слагаемые J -интеграла, отвечающие за изменение удельных энергий типа объема и формы исследуемых адгезивов. Данные расчетов представлены в таблице 3.11.

Таблица 3.11. Значение компонент энергии деформации

Параметр	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$\bar{\Phi}_{I+II,C}^\sigma, \text{ Н/м}$	25.53	207.70	2201.36
$\bar{\Phi}_{I+II,C}^\tau, \text{ Н/м}$	82.53	482.91	4445.44

На рис. 3.6 проиллюстрировано сравнение расчетных критических сил, нормированных к экспериментальным данным, полученным в публикации [104]. Экспериментальные предельные силы [104] определены для $a = 0.0875$ м. Результаты для разных материалов АС представлены в виде графиков и демонстрируют сравнение двух моделей: 1 – модель слоя нулевой толщины для критерия (1.4); 2 – модель физического разреза для критерия (1.6).

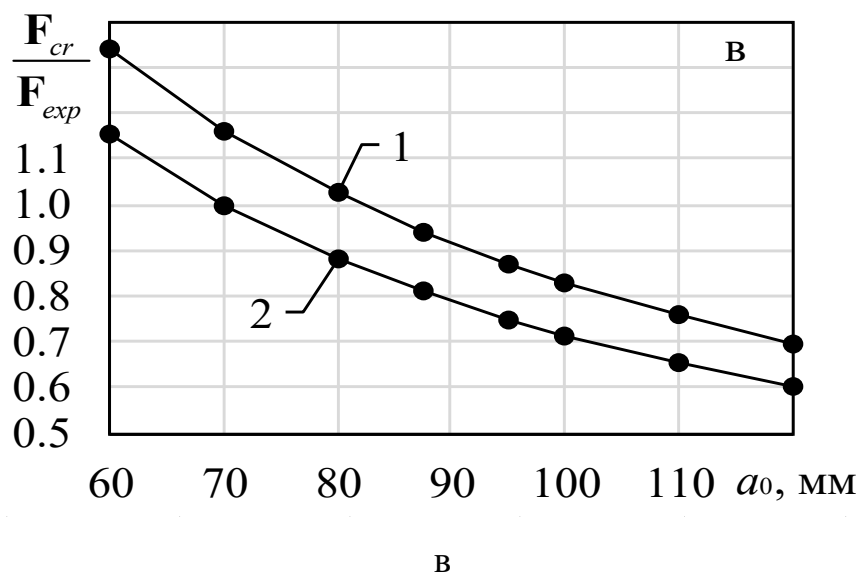
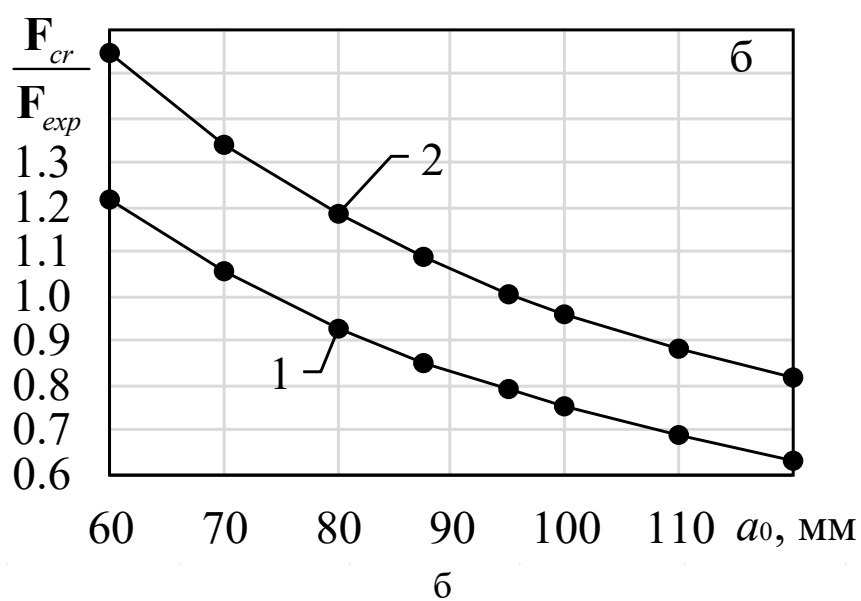
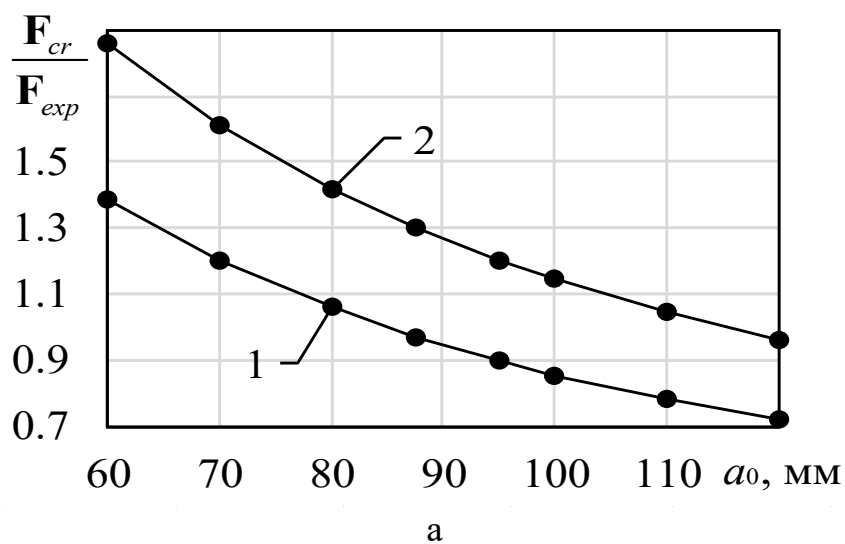


Рис. 3.6. Взаимосвязь длины дефекта и предельных сил:

а – Araldite AV138; б – Araldite 2015; в – Sikaforce 7752.

Исследование результатов, отображенных на рис. 3.6, показывает, что разность между предельными силами, вычисленными с использованием формул (1.4) и (1.6), не выходит за пределы 25% в случае АС из материала Araldite AV138. Но при применении формулы (1.4) определение показателей степени не является однозначным и нуждается в экспериментальной верификации.

3.3.2. Двухпараметрические критерии разрушения

Опираясь на данные, представленные в таблицах 3.6 и 3.11, и применяя формулы (3.7)–(3.10), определим величины параметров, характеризующих «разрыхление» адгезивов. Полученные при этом расчетные результаты для $\delta_0 = 10^{-6}$ м представлены в таблице 3.12.

Таблица 3.12. Значения параметров «разрыхления»

Параметр	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
β	-129.12	5.31	1.51
γ , м/Н	1.680	$1.167 \cdot 10^{-2}$	$-4.387 \cdot 10^{-4}$
β_1	12.34	16.40	4.09
γ_1 , м/Н	-0.109	-0.026	-0.002

На рис. 3.7, рис. 3.8 и рис. 3.9 проиллюстрировано сравнение расчетных критических сил, нормированных к экспериментальным данным, полученным в публикации [104]. Экспериментальные предельные силы [104] определены для $a = 0.0875$ м. Результаты для разных материалов АС представлены в виде графиков и демонстрируют сравнение трех моделей: 1 – модель слоя нулевой толщины для критерия (1.4); 2 – модель физического разреза для критерия (3.1); 2 – модель физического разреза для критерия (3.2).

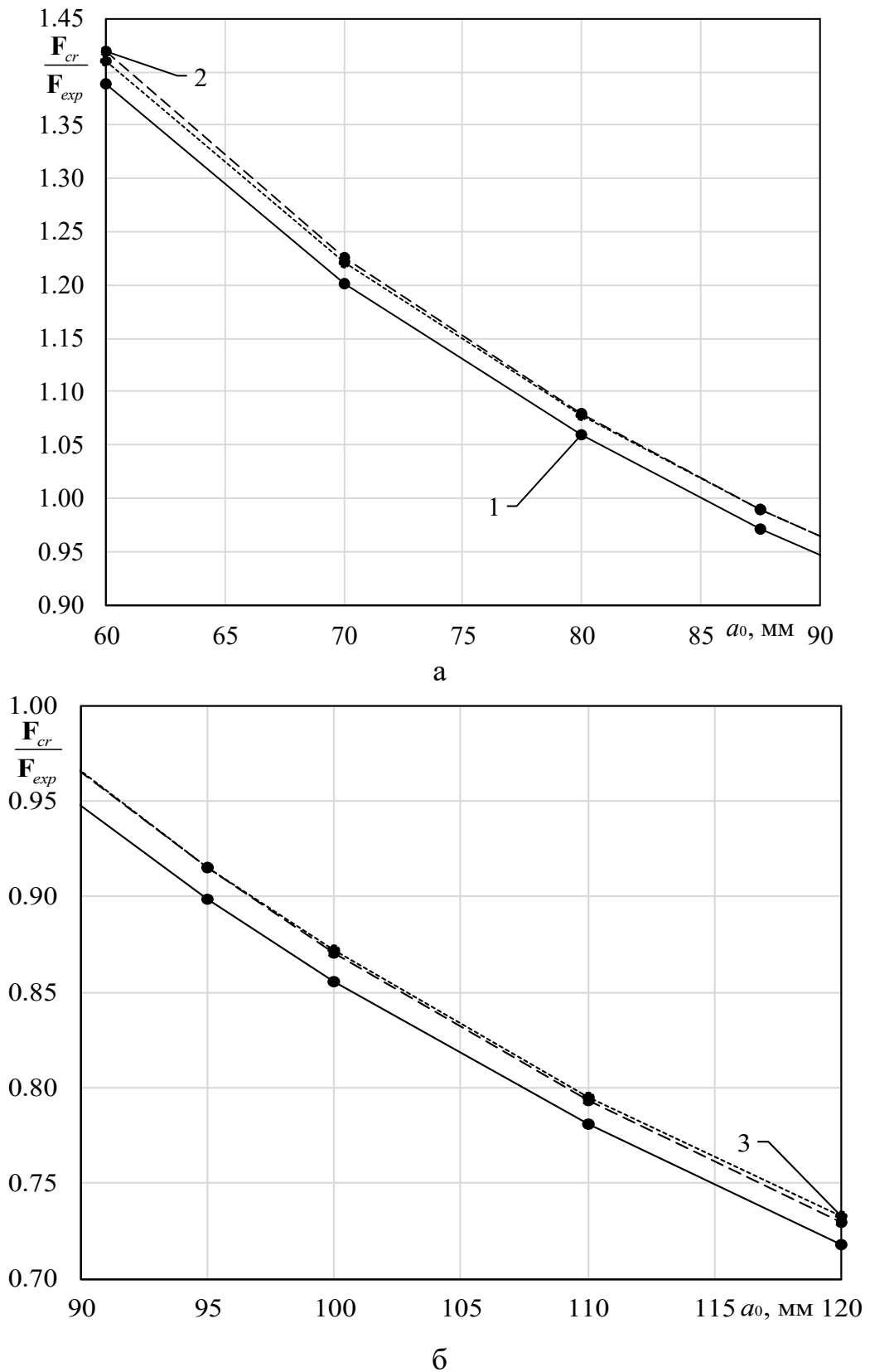


Рис. 3.7. Взаимосвязь длины дефекта и предельных сил для адгезива Araldite AV138:

$a - a_0 \in [60; 90]$; $б - a_0 \in [90; 120]$.

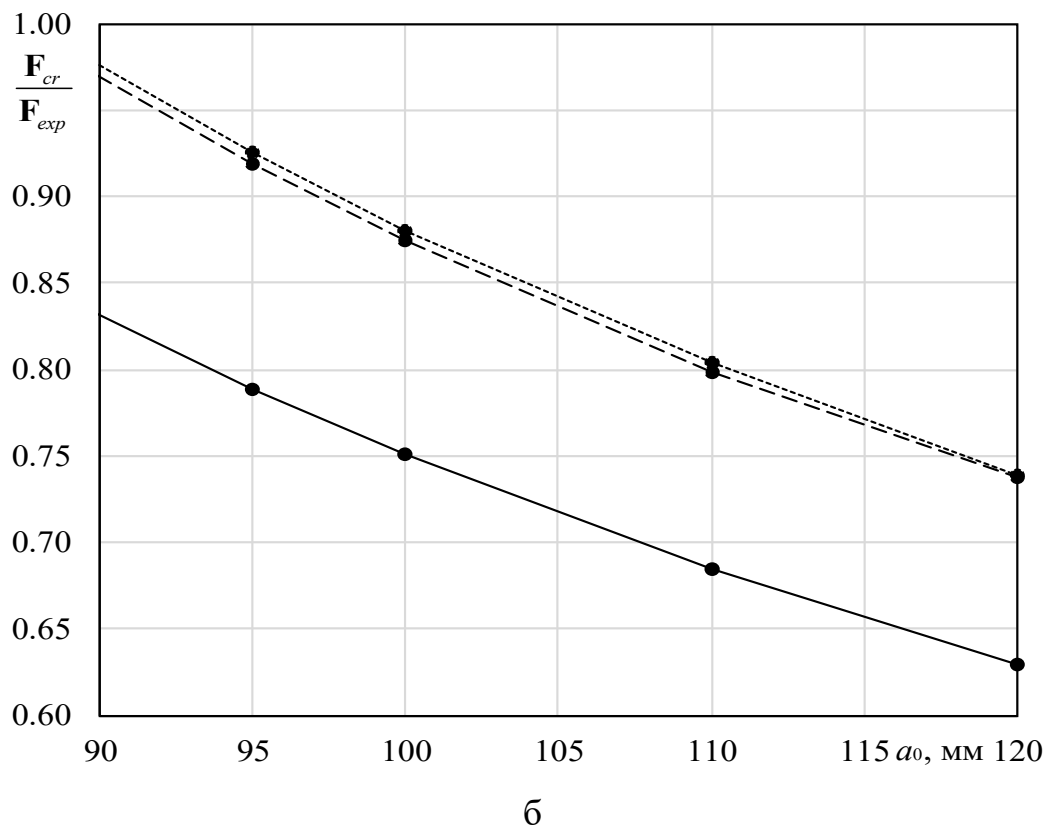
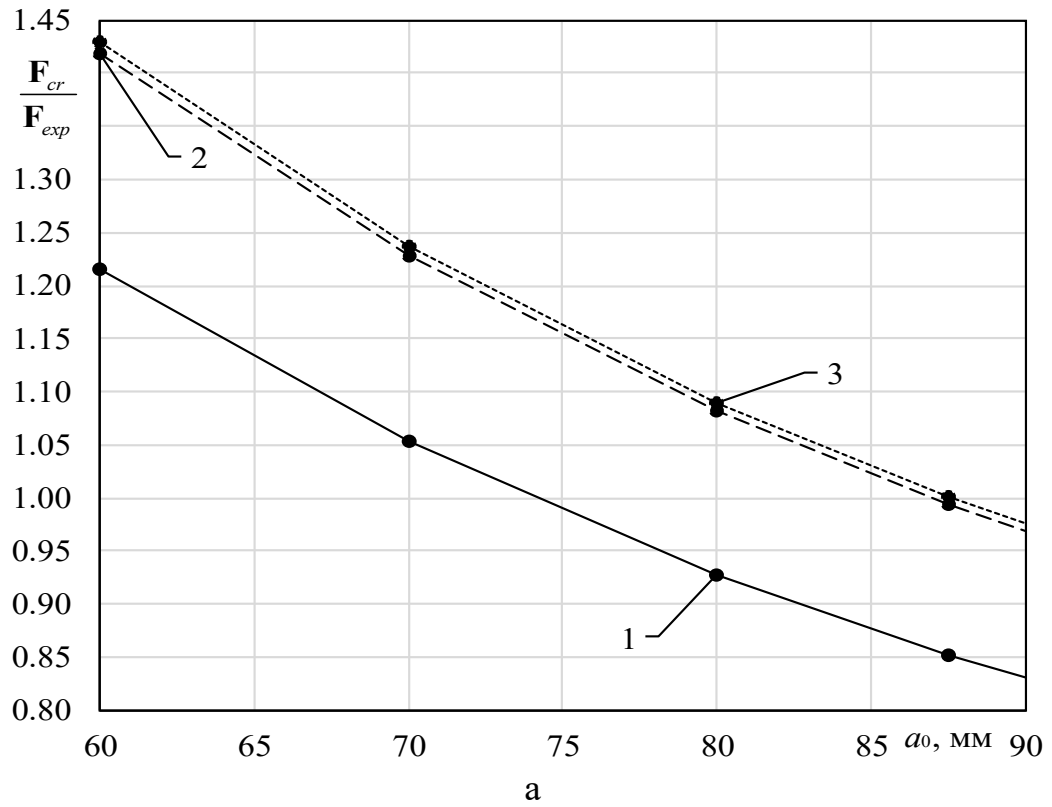


Рис. 3.8. Взаимосвязь длины дефекта и предельных сил для адгезива Araldite 2015:

$a - a_0 \in [60; 90]$; $б - a_0 \in [90; 120]$.

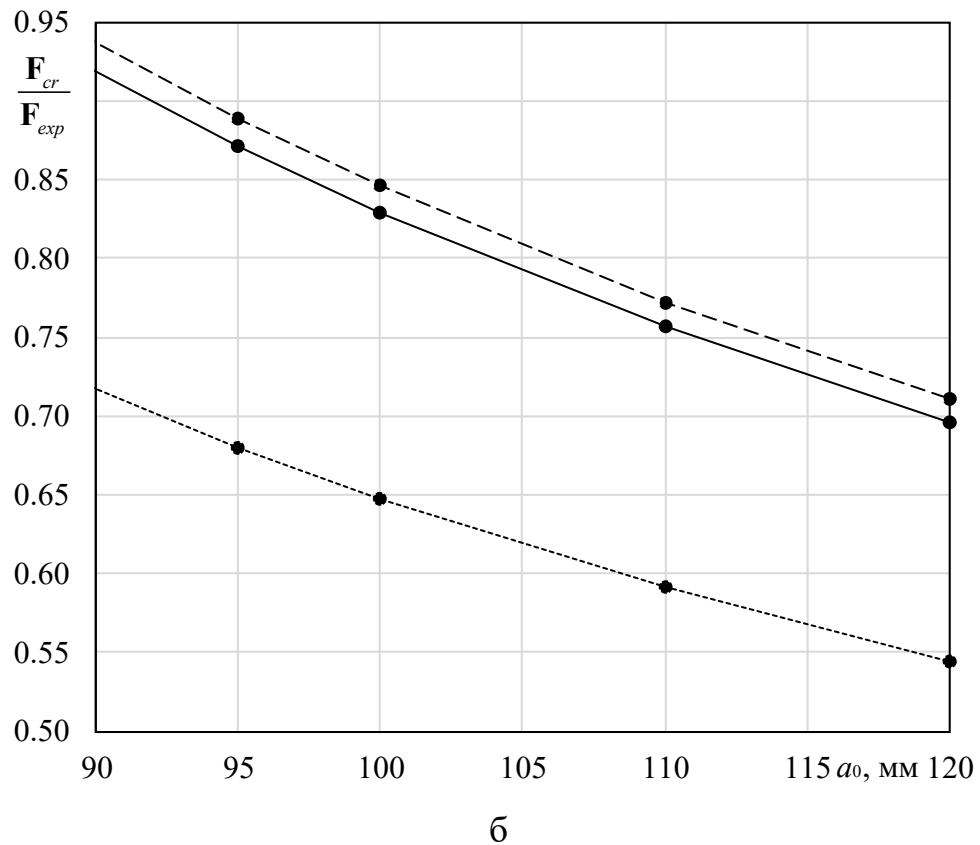
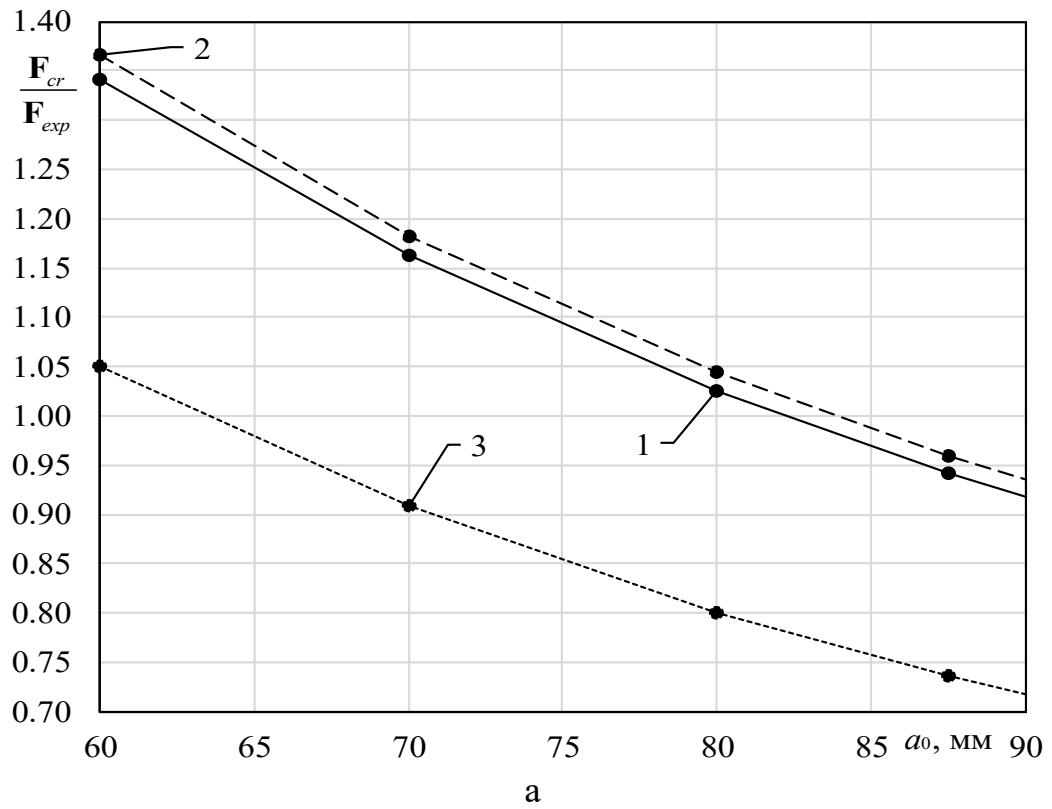


Рис. 3.9. Взаимосвязь длины дефекта и предельных сил для адгезива Sikaforce 7752:

$a - a_0 \in [60; 90]$; $б - a_0 \in [90; 120]$.

Анализ данных, представленных на рис. 3.7, рис. 3.8 и рис. 3.9, демонстрирует, что (разница в расчетных предельных нагрузках, полученных с использованием формул (1.4) и (3.1), не выходит за пределы 2.15% применительно к адгезиву Araldite AV138, достигая 14.6% для Araldite 2015 и составляя 2.01% для Sikaforce 7752. Необходимо подчеркнуть, что значения предельных сил, определенных по формуле (3.1), демонстрируют лучшую согласованность с экспериментальными данными, указанными в табл. 3.8, при фиксированной длине физического разреза $a_0 = 0.0875$ м для всех исследуемых адгезивов. Отклонение предельных нагрузок, выполненных на основе формул (1.4) и (3.2), показало, что для адгезива Araldite AV138 этот показатель не выходит за пределы 2.02%, для Araldite 2015 – 14.95%, а для Sikaforce 7752 – 28.08%. Но при применении формулы (1.4) определение показателей степени не является однозначным и нуждается в экспериментальной верификации.

3.4. Результаты и выводы по главе 3

1. Предложен критерий разрушения предельно тонких адгезионных слоев, толщина которых рассматривается как линейный параметр. Критерий учитывает как знак гидростатического давления, так и влияние слагаемых J -интеграла, отвечающих за изменение удельных энергий типа объема и формы, при предельном нагружении. Положительное гидростатическое давление способствует разрушению, усиливая действие энергии типа формы, в то время как отрицательное гидростатическое давление препятствует разрушению.

2. В случае приближения толщины АС к нулевому значению, результат умножения толщины слоя на составляющие изменения удельной упругой энергии будет иметь конечное значение. Эти конечные значения, представленные в виде линейных комбинаций, отождествляются с величиной J -интеграла.

3. Характеристики, используемые в критерии разрушения адгезива, выявляются путем изучения предельных состояний, характеризующихся нормальным растяжением и смешанной модой нагружения при заданной величине трещины. Для этого используются решения системы линейных уравнений, из

которой вычисляются коэффициенты линейной комбинации. Полученные результаты демонстрируют высокую точность предложенного критерия по сравнению с уже известным при различных длинах трещины в режиме смешанной нагрузки I+II.

4. Проанализированы двухпараметрические критерии. С помощью аналитического решения и определения критических значений J -интегралов для первой и второй моды нагружения адгезивов рассчитаны коэффициенты для предложенных критериев. Применимость предложенных критериев была проверена на реальных данных разрушения SLJ соединений при смешанной нагрузке I+II. Экспериментальные данные подтверждают высокую точность соответствия, при этом критерий, основанный на квазилинейной зависимости от удельной энергии изменения объема, наиболее точно отражает критические свойства рассматриваемых адгезивов.

Глава 4

Применение критерия разрушения для смешанной моды нагружения I+II трещины в адгезиве нулевой толщины

Материал настоящей главы излагается в соответствии с публикациями автора данной диссертации [157–158] и в нем рассмотрены предельные состояния тонких АС слоистых композитов при нагружениях дефектов в виде слоя нулевой толщины смешанной модой. Для вычислений предельных состояний дефектов использовался МКЭ, реализованный в ПО Ansys. Результаты моделирования позволили количественно определить значения аддитивных слагаемых J -интеграла слоя нулевой толщины для нормального растяжения и поперечного сдвига.

На основе экспериментальных данных о предельных состояниях АС под комбинированным воздействием мод нагружений I и II, а также с учетом предельных значений J -интегралов, характерных для каждой из этих мод, были рассчитаны параметры, характеризующие зависимость разрушения при конкретном сочетании разложения J -интеграла для моды I. Полученные результаты были сопоставлены с уже существующим критерием разрушения при вариации длины трещины.

Анализируется влияние представления J -интеграла, рассматривая его как сумму двух компонент, отвечающих нормальному растяжению и поперечному сдвигу. Предполагается, что компонент нормального растяжения может быть представлен как декомпозиция с применением весового коэффициента, в то время как изменение удельной энергии типа формы образовывается компонентой поперечного сдвига. На основе выбранного набора весовых коэффициентов и заданной длины дефекта устанавливаются параметры системы, учитывая предельные нагрузки, характерные для нормального растяжения и смешанной нагрузки мод I+II.

Оценены критические значения J -интеграла трещиноподобных дефектов в АС при нормальном сжатии с учетом действия гидростатического давления при использовании критериев (1.6) и (3.1), отражающие комбинированное воздействие

нагрузки мод I и II. В качестве допущений принято, что J -интеграл формируется суммой аддитивных компонент, каждая из которых характеризует изменение удельной энергии, связанной с объемом и формой. Исследования демонстрируют, что при значительном превосходстве J -интеграла второй моды нагрузки над первой модой, критическая величина J -интеграла при нормальном разрыве оказывается заметно ниже, чем для аналогичной характеристики в условиях сжатия.

4.1. Исследование разложения J -интеграла на аддитивные слагаемые в двухпараметрическом критерии разрушения в случае нагружения SLB-образца

Превосходство значений J_{IIIC} над J_{IC} , наблюдаемое в [131], обусловлено воздействием гидростатического давления и инвариантными компонентами удельной упругой энергии, определяющими удельные энергии изменения объема и формы. Для критериальной характеристики тонкого адгезионного слоя в зоне дефекта применяются величины, представляющие собой результат умножения инвариантных слагаемых и линейного параметра δ_0 . Исследованию подлежат различные подходы к моделированию композитов [112, 119, 122, 123], среди которых выделяется численное моделирование с использованием МКЭ и концепция Нейбера – Новожилова [12, 153–156], обнаружено, что при конечном значении толщины адгезионного слоя возможно отсутствие сингулярности плотности энергии деформаций в области торца трещиноподобных дефектов. В работе [111] введено понятие ЭП, представляющее собой результат умножения изменения удельной упругой энергии и линейного параметра δ_0 . Исследование, представленное в публикации [112], демонстрирует, что при уменьшении δ_0 значение ЭП стремится к значению инвариантного интеграла слоя нулевой толщины, определяемому (1.2). В ситуации, когда толщина АС конечна, отсутствие сингулярности напряжений позволяет выразить изменение удельной упругой энергии, а значит, и ЭП, как сумму аддитивных слагаемых, не зависящих от линейного параметра δ_0 . Тем не менее, при исследовании трещины слоя нулевой

толщины, разложение, представленное в (1.2), на аддитивные слагаемые при нагружении по первой или смешанной моде не является тривиальным. Определение значений коэффициентов интенсивностей напряжений возможно с применением разных методик, описанных в работах [65, 159–161]. Некоторым из этих методов реализованы в коммерческих программных продуктах, основанные на методе конечных элементов [107, 141, 151]. Анализ уравнения (1.2) и его составляющих, влияющих на изменение удельной энергии объема и формы, позволяет создать критерии разрушения, которые будут отражать специфику данных характеристик.

Для экспериментального определения J -интеграла с трещиноподобным дефектом, подверженным нагрузкой по моде I, может использоваться ДКБ-образец. В исследовании [114], посвященном соединению консолей ДКБ-образца с помощью АС, определено соотношение для определения $\bar{\sigma}_{22}$ (3.13) при выполнении условий $v_{AC} = 0$ и $\delta_0/h \ll 1$. В работе применена теория пластин Миндлина – Рейсснера [162, 163], при , и проанализировано напряженно-деформированное состояние, возникающее под действием силы Q , приводящей к растяжению вершины АС. При использовании ограничения на модули упругости материалов консолей ДКБ $E_3/E \ll 1$ получено решение для вычисления инвариантного интеграла (3.14).

Инвариантный интеграл при поперечном сдвиге возможно представить в виде составляющей, отвечающей за удельную энергию формоизменения ввиду того, что при поперечном сдвиге трещиноподобного дефекта, согласно моделям [75–77], касательные напряжения в вершине равны нулю, что означает отсутствие удельной энергии, связанной с изменением объема:

$$J_{II} = J_{II}^r. \quad (4.1)$$

Ввиду тесной взаимосвязи инвариантного интеграла с изменением удельной энергии, см. формулу (2.8), являющейся суммой аддитивных слагаемых, для изучения нормального растяжения АС с трещиной предлагается декомпозиция инвариантного интеграла (3.16). Аналогично, используя формулы (1.2), (3.16) и

(4.1), для комбинированного нагружения I+II АС предлагается его декомпозиция в виде:

$$J_{I+II} = \bar{\varphi}^{\sigma} + \bar{\varphi}^{\tau} = J_{I+II}^{\sigma} + J_{I+II}^{\tau}, \quad (4.2)$$

где $J_{I+II}^{\sigma} = J_1^{\sigma} = J_1/3$; $J_{I+II}^{\tau} = J_1^{\tau} + J_2^{\tau} = 2J_1/3 + J_2$.

Отразим критерий при критическом нагружении АС (3.1), опираясь на представление (4.2), учитывая, что при комбинированном нагружении гидростатическое давление имеет положительное значение:

$$(1 + \beta)J_{I+II}^{\sigma} + J_{I+II}^{\tau} + \gamma J_{I+II}^{\sigma} J_{I+II}^{\tau} = J_{IIIC}. \quad (4.3)$$

В условиях критических нормального растяжения и комбинированного нагружения справедливы следующие соотношения: $J_{IC}^{\sigma} + J_{IC}^{\tau} = J_{IC}$, $J_{I+IIIC}^{\sigma} + J_{I+IIIC}^{\tau} = J_{I+IIIC}$. Используя эти соотношения, из уравнения (4.3) сформируем СЛАУ, в которой неизвестными параметрами являются β и γ :

$$\beta J_{IC}^{\sigma} + \gamma J_{IC}^{\sigma} J_{IC}^{\tau} = J_{IIIC} - J_{IC}, \quad (4.4)$$

$$\beta J_{I+IIIC}^{\sigma} + \gamma J_{I+IIIC}^{\sigma} J_{I+IIIC}^{\tau} = J_{IIIC} - J_{I+IIIC}. \quad (4.5)$$

Определим параметры β , γ из решения системы (4.4)–(4.5) аналогично решению с помощью метода Крамера в п. 3.1:

$$\beta = \frac{J_{I+IIIC}^{\sigma} J_{I+IIIC}^{\tau} (J_{IIIC} - J_{IC}) - J_{IC}^{\sigma} J_{IC}^{\tau} (J_{IIIC} - J_{I+IIIC})}{J_{IC}^{\sigma} J_{I+IIIC}^{\sigma} (J_{I+IIIC}^{\tau} - J_{IC}^{\tau})}, \quad (4.6)$$

$$\gamma = \frac{J_{IC}^{\sigma} (J_{IIIC} - J_{I+IIIC}) - J_{I+IIIC}^{\sigma} (J_{IIIC} - J_{IC})}{J_{IC}^{\sigma} J_{I+IIIC}^{\sigma} (J_{I+IIIC}^{\tau} - J_{IC}^{\tau})}. \quad (4.7)$$

Следовательно, критическое значение инвариантного интеграла (4.3), при коэффициентах, найденных с помощью (4.6) и (4.7), предусматривает равенство критическим значениям для нагружений нормальным растяжением, поперечным сдвигом и определённого сочетания комбинированного нагружения моды I+II.

Таким образом, определение критических нагружений вершин трещин АС путем анализа компонент инвариантных интегралов нормального растяжения, поперечного сдвига и опытных измерений предельных величин инвариантных

интегралов J_{IC} , J_{IIC} , J_{I+II} является необходимым для применения (4.2), (4.6) и (4.7). Важно отметить, что предельное нагружение при нормальном растяжении и поперечном сдвиге соответствуют конкретным НДС, в то время как комбинированное нагружение I+II может иметь неограниченное число релевантных состояний.

В данном разделе работы проанализировано изменение критического значения J_{I+II} в зависимости от длины трещины при комбинированном нагружении I+II образца в виде SLB, см. рис. 3.4, исходя из критерия (4.3). Модель, предназначенная для расчета, включает две консоли 1 и 2, характеризующиеся ортотропными механическими свойствами, указанными в таблице 3.3. Эти консоли соединены адгезионным слоем 3, критические свойства которого получены в ходе проведения натурного эксперимента, представлены в таблице 1.1.

Геометрические свойства SLB, опираясь на [104], включают толщину SLB $b = 15$ мм, ширину пластин $h = 3$ мм, длину дефекта $a_0 = 87.5$ мм и плечо воздействия нагрузки $L = 125$ мм.

Экспериментальные данные по предельным силам F_{exp} , представленные в работе [104], систематизированы и представлены в таблице 3.8.

Расчет с использованием метода конечных элементов, реализованного в ПО Ansys, применялся для комбинированного нагружения SLB. Для представления дефекта применялась модель слоя нулевой толщины, имитирующая предельно тонкий АС. Рис. 3.4 иллюстрирует способ расчета компонент инвариантного интеграла нормального растяжения и поперечного сдвига с использованием алгоритма VCCT [164], который реализован в графическом интерфейсе Ansys, предназначенном для исследования механики разрушения. На основе уравнения (1.2) и выявленных компонент инвариантного интеграла вычисляется конечная величина J -интеграла.

Геометрическая модель описывается с помощью четырехузловых прямоугольных КЭ с квазилинейными функциями формы (PLANE182) ввиду использования двумерной модели. Результаты расчетов компонент инвариантного

интеграла для нормального растяжения и поперечного сдвига при АС из Araldite AV138 при изменении размеров КЭ в области, прилегающей к окончанию трещиноподобного дефекта представлены в таблице 4.1. При расчете с АС из материалов Araldite 2015 и Sikaforce 7752 аналогично зафиксированы сходимости исследуемых величин.

Таблица 4.1. Расчетные величины компонент инвариантного интеграла для АС из Araldite AV138.

Размеры элементов вблизи вершины трещины, мм	J_{IC} , Н/мм	J_{IIIC} , Н/мм
1×1	0.0632	0.0436
0.1×0.1	0.0637	0.0442
0.01×0.01	0.0637	0.0440
0.001×0.001	0.0638	0.0439

Для моделирования окончательной расчетной модели применялась КЭ сетка, основанная на блочной структуре, содержащей 138550 элементов. Вблизи вершины дефекта была реализована регулярная сетка с размерами 0.001мм×0.001мм. В зоне перехода сетка демонстрирует уплотнение, направленное к окончанию трещиноподобного дефекта, тогда как периферийный участок разбивается равномерными КЭ 0.1 мм×0.1 мм.

В исследовании [104] выявлены предельные внешние силы F_{exp} , указанные в таблице 3.8. На основе этих данных, с использованием декомпозиции (4.2), рассчитаны предельные величины J_{I+IIIC} и компоненты J_{I+IIIC} , итоговые значения продемонстрированы в таблице 4.2.

Таблица 4.2. Предельные величины при комбинированном нагружении

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
J_{I+IIIC} , Н/мм	0.108	0.684	6.513
J_{I+IIIC}^{σ} , Н/мм	0.021	0.135	1.290
J_{I+IIIC}^{τ} , Н/мм	0.086	0.548	5.223

В соответствии с декомпозицией, указанной в (3.16), и исходя из данных таблицы 1.1, представим компоненты инвариантного интеграла для случая предельного нормального растяжения в таблице 4.3.

Таблица 4.3. Компоненты инвариантного интеграла для случая предельного нормального растяжения

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
J_{IC}^{σ} , Н/мм	0.047	0.180	1.262
J_{IC}^{τ} , Н/мм	0.093	0.360	2.524

На основе информации, представленной в таблицах 4.2 и 4.3, в таблицу 4.4 внесены расчетные величины коэффициентов, определенных формулами (4.6) и (4.7), для всех исследуемых адгезивов.

Таблица 4.4. Значения параметров β, γ

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
β , Н/мм	97.83	7	3.40
γ , мм/Н	-1000	18	-1

На рис. 4.1 проиллюстрировано сравнение критических сил, рассчитанных для длин трещин $a_0 = [60, 70, 80, 87.5, 95, 100, 110, 120]$, отнесенных к экспериментально определенной критической силе из работы [104], полученной при длине трещины в $a_0 = 87.5$ мм, для исследуемых адгезивов. График 1 отражает критические нагрузки, соответствующие критерию (1.4) и показателям степеней работы из [78], а 2 – критерию (4.3).

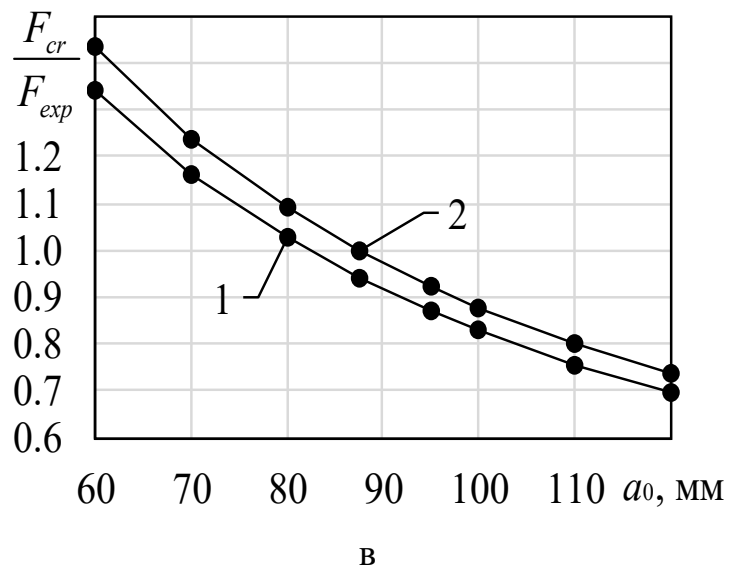
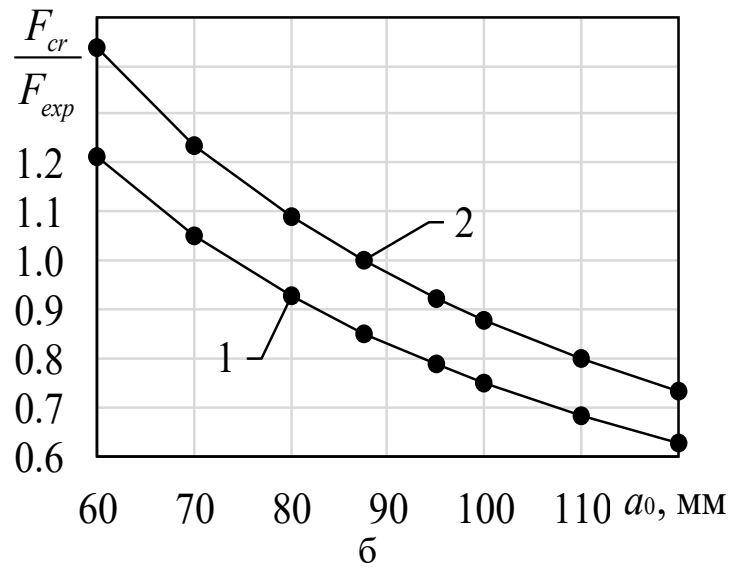
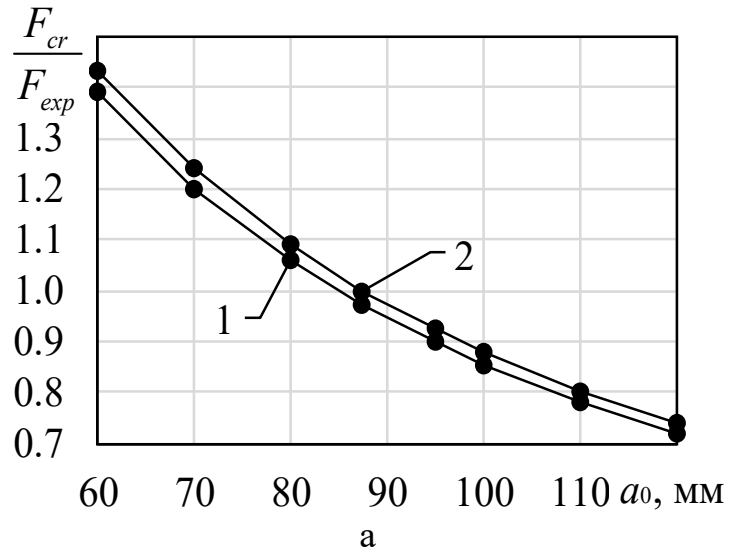


Рис. 4.1. Взаимосвязь длины дефекта и предельных сил:

а – Araldite AV138; б – Araldite 2015; в – Sikaforce 7752.

Согласно данным, представленным на рис. 4.1, наибольшее расхождение предельных сил не превышает 3.11% для адгезива Araldite AV138, 14.79% для Araldite 2015 и 6.3% для Sikaforce 7752. Однако, расчетные величины предельных сил для адгезивов, определенные с помощью критерия (4.3), демонстрируют лучшую согласованность с экспериментальными данными, представленными в таблице 3.8, при $a_0 = 87.5$ мм. Важно подчеркнуть, что применение условия разрушения (4.3), изученного в [119, 131], без учета влияния предельной величины комбинированного нагружения для данного интервала длин дефектов и адгезивов, может приводить к погрешностям, достигающих 25 %, что было продемонстрировано в разделе 3.3.1.

В публикации [119] показано, что при анализе значений $\delta_0 \bar{\varphi}^\sigma$ и $\delta_0 \bar{\varphi}$ на тупиковой грани физического разреза для предельных режимов работы АС с учетом их механических характеристик и при уменьшении толщины АС к величинам близким к нулю, нормальный разрыв приводит к определенному соотношению: $0.41 \leq \bar{\varphi}^\sigma / \bar{\varphi} \leq 0.54$. Представление J -интеграла для нагружения по моде I (3.16) может быть представлено в следующем виде:

$$J_I = J_I^\sigma + J_I^\tau = zJ_I + (1-z)J_I. \quad (4.8)$$

где z – весовой коэффициент; $1/3 \leq z \leq 2/3$.

В ситуации с комбинированным нагружением трещины АС при его представлении в виде слоя нулевой толщины, формула для расчета декомпозиции инвариантного интеграла (1.2) приобретает следующий вид:

$$J_{I+II} = J_{I+II}^\sigma + J_{I+II}^\tau = \frac{(1-\nu^2)}{E} (zK_I^2) + \frac{(1-\nu^2)}{E} ((1-z)K_I^2 + K_{II}^2). \quad (4.9)$$

На основе критических нагрузок F_{exp} , выявленных в исследовании [104] (см. таблицу 3.8), были определены критические компоненты удельной упругой энергии J_{I+IIc} . При полученных данных, представленных в таблице 4.5, использованы формула (4.9) и конечно-элементное моделирование нагружения в

программном комплексе Ansys при трещиноподобном дефекте в виде математического разреза для $z = 1/2$, $z = 2/3$.

Таблица 4.5. Критические составляющие J -интеграла для смешанной моды нагружения I+II

Механические свойства		Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$z = \frac{1}{2}$	J_{I+II}^{σ} , Н/мм	0.032	0.203	1.935
	J_{I+II}^{τ} , Н/мм	0.076	0.481	4.578
$z = \frac{2}{3}$	J_{I+II}^{σ} , Н/мм	0.043	0.271	2.580
	J_{I+II}^{τ} , Н/мм	0.065	0.413	3.933

В связи с тем, что рассматривается разделение (4.8) компонент J -интеграла, соответствующих нормальному растяжению, в таблице 4.6 представлены их значения при предельном состоянии, определенные на основе данных из таблицы 1.1 для $z = 1/2$, $z = 2/3$.

Таблица 4.6. Предельные компоненты инвариантного интеграла при нормальном растяжении

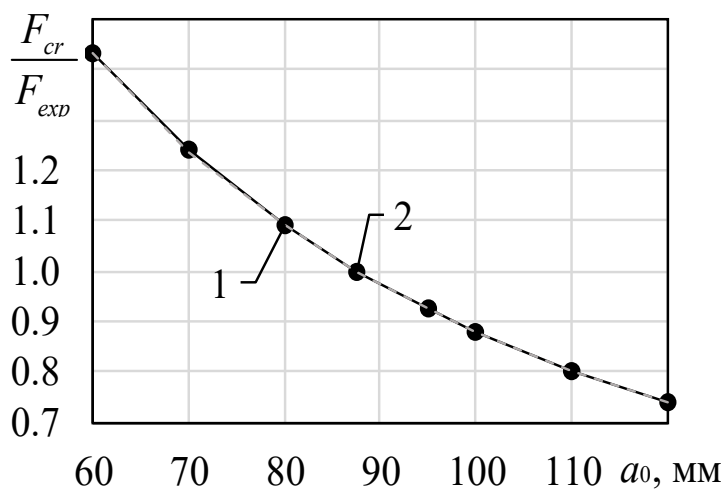
Механические свойства		Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$z = \frac{1}{2}$	J_{IC}^{σ} , Н/мм	0.070	0.270	1.893
	J_{IC}^{τ} , Н/мм	0.070	0.270	1.893
$z = \frac{2}{3}$	J_{IC}^{σ} , Н/мм	0.093	0.360	2.524
	J_{IC}^{τ} , Н/мм	0.047	0.180	1.262

На основе информации, представленной в таблицах 4.5, 4.6, в таблицу 4.7 внесены вычисленные значения параметров разрыхления, определенных формулами (4.6) и (4.7), для исследуемых адгезионных материалов.

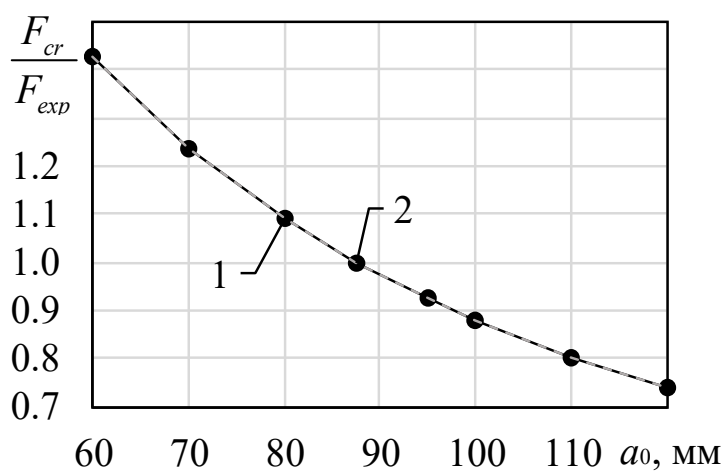
Таблица 4.7. Значения параметров разрыхления

Параметр		Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$z = \frac{1}{2}$	β	-52.79	6.08	1.94
	γ , мм/Н	797	11	-1
$z = \frac{2}{3}$	β	-6.48	5.42	1.21
	γ , мм/Н	187	7	0

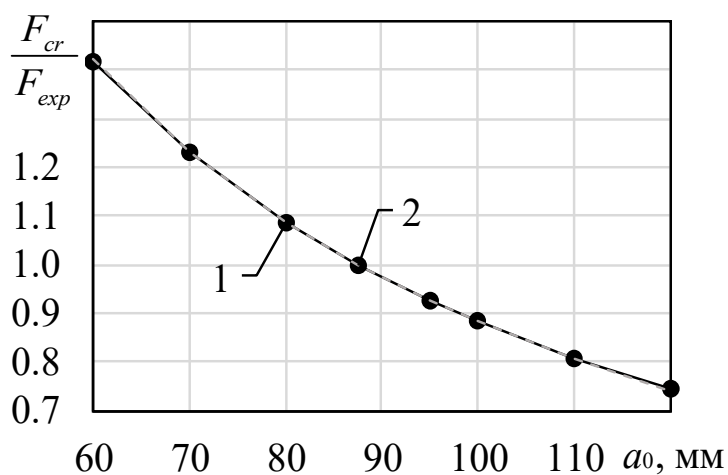
Рис. 4.2 иллюстрирует сравнение критических сил, рассчитанных на основе различных критериев, с экспериментально определенной критической силой, представленной в работе [104] для длины трещины $a_0 = 87.5$ мм. В расчетах использовались различные длины трещиноподобных дефектов исследуемых адгезивов при $z = 2/3$. Кривая 1 отображает результаты, полученные при применении критерия (4.3) с учетом распределения удельного потока, который определяется формулой (3.16) для нагружения модой I и (4.2) для смешанной моды. Кривая 2 отображает результаты, полученные при применении критерия (4.3) с учетом распределения удельного потока, который определяется формулой (4.8) для нагружения модой I и (4.9) для смешанной моды.



а



б



в

Рис. 4.2. Взаимосвязь длины дефекта и предельных сил:

а – Araldite AV138; б – Araldite 2015; в – Sikaforce 7752.

Согласно данным, представленным на рис. 4.2, наибольшее расхождение предельных сил не превышает 0.19% для адгезива Araldite AV138, 0.03% для Araldite 2015 и 0.35% для Sikaforce 7752. При $z = 1/2$ наибольшее расхождение предельных сил 1 и 2 для Araldite AV138 не превосходит 0.09%, для Araldite 2015 – 0.01%, а для Sikaforce 7752 – 0.03%.

Анализ полученных данных показал, что в исследованном интервале применение разделения (4.9) не приводит к существенным изменениям критической нагрузки при соблюдении условия, заданного критерием (4.3).

В результате подстановки выражения (4.9) в формулу (4.3) получается условие разрушения относительно КИН:

$$a_{11}^* K_I^2 + a_{12}^* K_I^2 K_{II}^2 + a_{22}^* K_{II}^2 + a_{33}^* K_I^4 = G_{IC}, \quad (4.10)$$

$$\text{где } a_{11}^* = \frac{1-v^2}{E}(1+\beta z), \quad a_{12}^* = \left(\frac{1-v^2}{E}\right)^2 \gamma z, \quad a_{22}^* = \frac{1-v^2}{E}, \quad a_{33}^* = (1-z) \left(\frac{1-v^2}{E}\right)^2 \gamma z$$

представляют зависимости от коэффициентов z , β , γ . Коэффициенты β , γ являются материальными константами. Для определения коэффициента z , который отвечает за декомпозицию, указанную в (4.8), необходимо провести анализ нагружения АС модой I.

Важно подчеркнуть, что для определения неизвестных a_{11}^* , a_{12}^* , a_{22}^* , a_{33}^* формула (18) нуждается в опытных данных двух нагружений смешанной модой с известными предельными величинами J_{IC} и J_{IIC} . В отличие от этого, формула (4.3) позволяет рассчитать эти коэффициенты, используя результат лишь одного эксперимента.

В исследовании, представленном в [118], авторы выдвинули следующий критерий, определяющий момент разрушения. В случае смешанного нагружения модой I+II трещиноподобного дефекта наступление разрушения можно характеризовать с помощью плотности энергии деформации S_{cr} , который выражается как квадратичная функция от КИН:

$$a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2 = S_{cr}. \quad (4.11)$$

В работе [118] рассматривается энергия деформации S_{cr} в области, расположенной рядом с вершиной трещиноподобного дефекта, и вводится понятие материальной константы. Её расчет осуществляется при известном K_{IC} в случае предельного нормального растяжения. Для определения параметров квадратичной функции a_{11}, a_{12}, a_{33} , участвующих в критерии (4.11), используются асимптотические представления при линейной упругости, полученные при анализе энергии деформации в области вершины дефекта, сформированной комбинированным нагружением I+II. Стоит отметить, что критерии (4.11) и (1.2) игнорируют разницу предельных величин характеристик трещиностойкости при нормальном разрыве и поперечном сдвиге.

4.2. Применение одно и двухпараметрического критерия разрушения для случая нормального сжатия

Анализ критического состояния трещин, возникающих при сжатии в однородных материалах [165, 166], демонстрирует существенные различия в механизмах их образования по сравнению с трещинами, образующимися при растяжении. Для определения прочности конструкций с трещиноподобными дефектами, в расчет включаются параметры, определяющие повышенную трещиностойкость при сжатии [167–170]. Процессы развития трещин под действием гидростатического давления при динамических нагрузках изучены в работах [171, 172].

Композиты с адгезионными слоями демонстрируют значительное превышение критического значения J -интеграла трещиноподобного дефекта при (В режиме II нагружения наблюдается отличие по сравнению с режимом I [78, 132]. Исследователи [146] объясняют это различие ролью гидростатического давления, которое в режиме I нагружения оказывается ключевым фактором для адгезии.) поперечном сдвиге (J_{IIc}), по сравнению с нормальным растяжением (J_{IC}) [78, 132]. Исследование [146] связывает эту особенность с влиянием гидростатического

давления, которое оказывает существенное воздействие на АС при нормальном растяжении, в то время как при поперечном сдвиге оно отсутствует. Исходя из установленной зависимости между НДС вершины трещины, ее относительно малой толщины и величины инвариантного интеграла, как показано в [146], предложен подход декомпозиции инвариантного интеграла на компоненты, каждая из которых отвечает за удельную (к единице поверхности) энергию типа удельной энергии объема и формы. В результате этого подхода были разработаны условия разрушения для материалов, подвергающихся комбинированному нагружению I+II. Поскольку гидростатическое сжатие повышает прочность материала, компоненты, отвечающие за удельную энергию типа объема инвариантного интеграла, умножаются на величину сигнатуры гидростатического давления σ . При нагружении нормальным растяжением и поперечным сдвигом, при условии неотрицательного гидростатического давления, достижение инвариантным интегралом предельных величин J_{IC} и J_{IIC} , необходимых для выполнения критериев, выполняется без каких-либо дополнительных условий. В данном разделе исследования анализируется величина инвариантного интеграла при нормальном сжатии J_{IC}^{comp} , учитывая предельные величины J_{IC} и J_{IIC} , для трещины, представленной математическим разрезом в адгезионном слое композита, обладающего линейно-упругими свойствами.

Определение предельного нагружения при нормальном сжатии дефекта адгезионного слоя достигается путем применения декомпозиции инвариантного интеграла, соответствующего комбинированному нагружению I+II, описанного в [146], в виде выражения (4.2) и однопараметрический критерий разрушения в виде [146]:

$$(1 + \text{sign}(\sigma)\beta')J_{I+II}^{\sigma} + J_{I+II}^{\tau} = J_{IIC} \cdot \quad (4.12)$$

где $\beta' = \frac{J_{IIC} - J_{IC}}{J_{IC}^{\sigma}}$ – параметр, характеризующий «разрыхление» адгезива.

В рамках нагружения адгезива модой I, при условиях $\text{sign}(\sigma) = 1$, $J_{II} = 0$, $J_{I+II}^{\sigma} = J_I^{\sigma}$, $J_{I+II}^{\tau} = J_I^{\tau}$, выражение (4.12) в критическом состоянии принимает вид:

$J_I^\sigma + J_I^\tau = J_{IC}$. При нагружении трещиноподобного дефекта адгезива в композитном образце поперечным сдвигом (нагружение по моде II) наблюдается следующая зависимость: $J_{II}^\tau = J_{II}^\sigma = J_{IIc}$.

В случае нормального сжатия адгезива с трещиноподобным дефектом без учета взаимодействия берегов трещины [173–175] имеет место $\text{sign}(\sigma) = -1$, $J_{II} = 0$, $J_{I+II}^\sigma = J_I^\sigma$, $J_{I+II}^\tau = J_I^\tau$, что в итоге формирует следующую взаимосвязь:

$$\left(J_I^\sigma + J_I^\tau\right)^{\text{compr}} = J_{IC}^{\text{compr}} = 2J_{IIc} - J_{IC}. \quad (4.13)$$

В качестве критерия разрушения АС используется двухпараметрический подход, описанный в [146]:

$$(1 + \text{sign}(\sigma)\beta)J_{I+II}^\sigma + J_{I+II}^\tau + \gamma\text{sign}(\sigma)J_{I+II}^\sigma J_{I+II}^\tau = J_{IIc}. \quad (4.14)$$

Определение характеристик «разрыхления» АС осуществляется с учетом условия разрушения (4.14) применительно к нормальному растяжению:

$$\beta J_{IC}/3 + 2\gamma(J_{IC})^2/9 = J_{IIc} - J_{IC}. \quad (4.15)$$

а также соблюдение условия (4.14) при комбинированном нагружении в случае неотрицательного гидростатического давления:

$$\beta J_{I+IIc}^\sigma + \gamma J_{I+IIc}^\sigma J_{I+IIc}^\tau = J_{IIc} - J_{I+IIc}. \quad (4.16)$$

Используя величины характеристик «разрыхления» определенного адгезионного материала, рассчитанные по формулам (4.15) и (4.16), из (4.14) можно вычислить предельные величины инвариантного интеграла, соответствующему нормальному сжатию адгезионного слоя:

$$\left(J_I^\sigma + J_I^\tau\right)^{\text{compr}} = J_{IC}^{\text{compr}} = J_{IIc} + \beta J_{IC}/3 + 2\gamma(J_{IC})^2/9. \quad (4.17)$$

Согласно формулам (4.13) и (4.17), определение критического значения J-интеграла при нормальном сжатии трещины в АС требует определения двух констант: J_{IC} и J_{IIc} . При применении формулы (4.17) дополнительно нужно учесть параметры, характеризующие степень «разрыхления» АС.

Для оценки критического состояния при нормальном сжатии изучается конкретный случай с адгезивом Araldite AV138. Приняты предельные величины

инвариантных интегралов: $J_{IC} = 200(140)$ Н/м и $J_{IIC} = 380(352)$ Н/м. Будем исходить из данных, предоставленных изготовителем, а также из опытных результатов, представленных в публикации [78], в скобках указаны значения, соответствующие опытным данным. Для определения характеристик «разрыхления», применяются данные из публикации [132], в которой критическое состояние при смешанном нагружении моделируется с использованием SLJ соединения, изображенного на рис. 3.1.

В представленной на рис. 3.1 схеме две пластины 1 и 2, имеющие идентичные геометрические параметры, соединяются адгезивом 3 протяженностью l . Левый торец пластины 1 подвергается воздействию горизонтальной силы $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_1$, в то время как правый край пластины 2 фиксирован, исключая любые перемещения. Остальные участки образца не испытывают внешних нагрузок.

Согласно публикации [132], Al6082-T651, со свойствами $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.3$, используется в виде материала консолей. Изучались образцы с постоянной общей длиной $2a + l = 180$ мм, $B = 25$ мм. Толщина пластин h для всех образцов была фиксирована и равна 3 мм. Менялась длина участка, склеенного адгезивом, от $l_1 = 12.5$ мм до $l_4 = 50$ мм с шагом $\Delta l = 12.5$ мм. Установим характеристики «разрыхления» при определённой предельной силе $F_4 = 9300$ Н и связанной с ней длиной зоны сопряжения $l_4 = 50$ мм. Расчет инвариантного интеграла выполнялся с помощью МКЭ, реализованным в ПО Ansys [151], при этом применялась стандартная процедура VCST [164], входящая в состав модуля анализа механики разрушения. В модели принято, что АС описывается слоем нулевой толщины. В модели принято, что АС описывается слоем нулевой толщины.

При моделировании определены величины двух мод при предельном нагружении: $J_{IC} = 113.16$ Н/м и $J_{IIC} = 227.79$ Н/м. Сумма определённых величин представляет собой предельную величину инвариантного интеграла для исследуемой смешанной моды нагружения: $J_{I+IC} = 340.95$ Н/м. Используя формулы (4.2), (4.15) и (4.16), а также экспериментальные данные о прочностных характеристиках адгезива из источника [78], рассчитаны параметры,

характеризующие степень «разрыхления» адгезива: $\beta = 4.0065(6.4326)$, $\gamma = -0.0098(-0.0202)$ м/Н (в скобках указаны значения, соответствующие [78]). Вычисления, проведенные на основе формул (4.13) и (4.17), позволяют определить значение $J_{IC}^{compr} = 560(564)$ Н/м, в скобках указано значение согласно опытными данным из публикации [78]. Проанализированы относительные предельные величины инвариантного интеграла при нормальном сжатии: $J_{IC}^{compr} / J_{IC} = 2.8(4.029)$. В случае более существенной разницы в предельных величинах инвариантных интегралов нормального растяжения и поперечного сдвига, например $J_{IC} / J_{IC} = 10.9(5.4)$, что наблюдается у адгезива Araldite 2015 [78], относительная предельная величина нормального сжатия будет заметно возрастать.

4.3. Результаты и выводы по главе 4

1. Предложен новый критерий, определяющий момент разрушения тонкого АС в композитном материале при смешанном нагружении I и II моды. Критерий основан на декомпозиции инвариантного интеграла на составляющие, отвечающие за удельные энергии изменения объема и формы. Предполагается, что компонент инвариантного интеграла, отвечающий за нормальное растяжение, можно разложить на составляющие с учетом весового коэффициента, а компонент, отвечающий за поперечный сдвиг, непосредственно определяет удельную энергию формы.

2. Рассчитаны параметры критерия на основе исследований критических состояний, соответствующих моде I и смешанному нагружению I+II, при различных значениях коэффициента, определяющего характер разложения J -интеграла, для фиксированной длины трещиноподобного дефекта.

3. Определена величина критического значения J -интеграла трещиноподобного дефекта адгезионного слоя в условии нормального сжатия. Полученные результаты демонстрируют, что существенные отличия в предельных

величинах инвариантных интегралов моды I и II, а также воздействие гидростатического сжатия, создают значительную разницу между нормальным разрывом и сжатием.

Заключение

Анализируя обзор текущего состояния исследований по моделированию развития трещиноподобных дефектов, а также опытные и теоретические данные, в части критериев распространения трещин при критических нагружениях были определены ключевые цели и вектор научных изысканий, заключающиеся в определении НДС окрестности трещиноподобного дефекта при задании адгезионного слоя конечной толщиной; для модели слоя нулевой толщины – КИН при различных модах нагружения (I, II, I+II); разработка методов расчета характеристики трещиностойкости в виде J -интеграла при конечно-элементном решении; определение аддитивных компонент J -интеграла и их взаимосвязь в состоянии разрушения; разработка критерия разрушения трещиноподобных дефектов адгезионных слоев при смешанной (I+II) моде нагружения.

Во второй главе диссертационной работы при моделировании трещиноподобного дефекта в виде физического разреза с линейным параметром в виде толщины разреза определена энергетическая характеристика типа J -интеграла. Уменьшение линейного параметра приближает характеристику к величинам, аналогичным J -интегралам, применяемым для моделирования трещин в случае модели слоя нулевой толщины под действием I и II мод нагружений. В случае изучения взаимодействия тел, скрепленных тонкими адгезионными слоями, отличающимися значительно меньшим модулем Юнга по сравнению с основным материалом, расчеты методом конечных элементов позволяют рассматривать введенную характеристику торцевой зоны трещины в АС как эквивалентную величину J -интеграла в случае дефекта в виде математического разреза. Исследование удаления конечного элемента с помощью простой разгрузки узловых сил показало, что удельная полная работа узловых сил, сближается с величиной J -интеграла дефекта в виде математического разреза при стремлении к

нулю длины грани тупикового конечного элемента. В случае малых размеров элементов удельная работа исключения элемента сохраняет практически постоянное значение. Анализ, основанный на конечно-элементном моделировании с использованием элементов конечного размера, показывает, что исключение КЭ вызывает выделение энергии, эквивалентное потоку удельной упругой энергии слоя нулевой толщины. Изучение сходимости удельной работы узловых сил при исключении КЭ, образующего вершину трещиноподобного дефекта, позволяет вычислить КИН для модели трещины в виде слоя нулевой толщины.

В третьей главе диссертационной работы для определения момента разрушения тонких адгезионных слоев, толщина которых рассматривается как линейный параметр, предложен новый критериальный подход. Он учитывает влияние как гидростатического давления, так и вклад энергий, связанных с удельными энергиями типа энергий изменения объема и формы в критическом состоянии. Положительное гидростатическое давление способствует разрушению, усиливая влияние энергии типа формы, в отличие от отрицательного гидростатического давления, которое, напротив, препятствует процессу разрушению. Когда толщина адгезионного слоя стремится к нулю, произведение этой толщины на составляющие изменения удельной упругой энергии дают конечные результаты. Эти конечные величины, выраженные в виде линейных комбинаций, отождествляются со значением J -интеграла. Критерий разрушения адгезива основывается на характеристиках, определяемых посредством изучения предельных состояний, возникающих при нормальном разрыве и смешанной нагрузке (мода нагружения I+II) с фиксированной длиной трещиноподобного дефекта. Для этого используются решения системы линейных уравнений, из которой вычисляются коэффициенты линейной комбинации. Полученные данные свидетельствуют о высокой точности предложенного критерия, который превосходит существующие аналоги в различных сценариях со смешанным нагружением (мода I+II) и при разных длинах трещиноподобного дефекта. В работе изучены двухпараметрические критерии. Для их оценки использовался аналитический подход, включающий вычисление критических значений J -

интегралов для первой и второй моды нагружения адгезивов. Полученные результаты позволили определить коэффициенты рассмотренных критериев. Эффективность предложенных критериев подтверждена на экспериментальных данных о разрушении SLJ соединений при смешанной нагрузке I+II. Исследование показало высокую точность предсказаний, а критерий, использующий квазилинейную зависимость от удельной энергии типа энергии изменения объема, наиболее точно описывает критические характеристики исследуемых адгезивов.

В четвертой главе диссертационной работы внедрен новый критериальный подход для определения момента разрушения тонкого АС в композитном материале при смешанном нагружении I и II моды. Критерий основан на декомпозиции инвариантного интеграла на составляющие, отвечающие за удельные энергии изменения объема и формы. Предполагается, что компонент инвариантного интеграла, отвечающий за нормальное растяжение, можно разложить на составляющие с учетом весового коэффициента, а компонент, отвечающий за поперечный сдвиг, непосредственно определяет удельную энергию формы. Рассчитаны параметры критерия на основе исследований критических состояний, соответствующих моде I и смешанным нагружением (мода I+II), при различных значениях коэффициента, определяющего характер разложения J -интеграла, для фиксированной длины трещиноподобного дефекта. В ходе исследования установлено критическое значение J -интеграла для трещиноподобных дефектов адгезионного слоя, подверженным нагружению по моде I. Исследование демонстрирует, что существенные отличия в предельных величинах инвариантных интегралов моды I и II, а также воздействие гидростатического сжатия, создают значительную разницу между нормальным разрывом и сжатием.

В настоящем исследовании были достигнуты следующие результаты и получены выводы:

1. Разработан метод нахождения энергетической характеристики типа J -интеграла, путем интегрирования НДС по контуру физического разреза, включающему берега разреза и его торцевую грань, при нагружении I и II модой.

Рассмотренная энергетическая характеристика, на торцевом участке адгезионного дефекта, может быть сопоставлена с J -интегралом для слоя нулевой толщины в случае существенного превышения модуля упругости несущего материала над модулем упругости адгезива;

2. На основе МКЭ решения разработан метод вычисления энергетической характеристики типа J -интеграла, использующий удельную работу узловых сил на узловых перемещениях, которая ассоциирована с энергией образования новых материальных поверхностей. При уменьшении длины грани тупикового конечного элемента, удельная полная работа узловых сил КЭ сходится к значению инвариантного интеграла дефекта в виде математического разреза;

3. На основе аддитивного разложения J -интеграла предложен критерий разрушения предельно тонких адгезионных слоев при смешанной моде нагружения (I+II). Критерий учитывает влияние как гидростатического давления, так и вклады удельных энергий изменения объема и формы материала при его разрушении. При определении параметров критерия учитывается анализ предельных состояний, нормальный разрыв и смешанная мода нагружения I+II при тождественном удовлетворении предельного состояния поперечного сдвига.

4. На основе предложенного критерия проанализировано критическое состояния нормального сжатия трещины. Показано, что критическое значение J -интеграла при нормальном сжатии существенно превышает аналогичную характеристику разрыва.

5. Разделение J -интеграла на различные аддитивные слагаемые влияет только на значение параметров «разрыхления» оставляя расчетную внешнюю нагрузку неизменной.

Список литературы

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A.* 1921. Vol. 221. P. 163–189. doi: 10.1098/rsta.1921.0006
2. Разрушение. В семи томах / Ред. Г.Л. Либовиц. М.: Мир и машиностроение, 1973–1978 г.
3. Orowan E.O. Energy criteria of fracture// *Weld. J.* 1955. P. 157–160.
4. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М. – л.: Гостехиздат, 1947. 214 с.
5. Westergaard H.M. Stress at a crack of the crack and the bending of reinforced concrete// *J.Amer. Concr. Inst.* 1933. Vol. 5, № 2. P. 18–39.
6. Irvin G.R. Fracture dynamics. Fracturing of metals. Cleveland: ASM, 1948.
7. Irvin G.R. Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate// *J.Appl. Mech.* 1958. № 2. P. 299–301.
8. McClintock F.A., Irvin G.R. Symposium on Fracture Toughness Testing and Its Application// *ASTM. STP 381.* Philadelphia: ASTM, 1965. P. 84–113.
9. Rice J.R. An examination of the fracture mechanics energy balance from the point of view of continuum mechanics // *Int. Conf. on Fracture.* Sendai, 1965.
10. Черепанов Г.П. О распространении трещин в сплошной среде // *Прикладная математика и механика.* 1967. Т. 31, № 3. С. 476–488.
11. Андрейкив А.Е. Об определении прочности трехмерных твердых тел, ослабленных трещинами// *Физ. Хим. Механика материалов.* 1974. № 1. С. 65–70.
12. Novozhilov V.V. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1969. Vol. 33, № 2. P. 212–222. doi:10.1016/0021-8928(69)90025-2
13. Новожилов В.В. К основам равновесных трещин в хрупких телах // *Прикладная математика и механика.* 1969. Т. 33, № 5. С. 797–812.
14. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // *J.Mech. and Phys. Solids.* 1960. Vol. 8, № 2 С. 100–104.
15. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // *Прикладная механика.* 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
16. Hulbert L., Hahn G., Rosenfield A. An elastic-plastic analysis of a crack in a plate of finite size // *Applied Mechanics: Proc. 12 Intern. Congr. Springer.* 1969. P. 213–230.
17. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // *J. Mech. Phys. Solids.* 1968. Vol. 16, № 5. P. 337–342. doi: 10.1016/0022-5096(68)90021-5
18. Rice J., Rosengren G. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // *J. Mech. Phys. Solids.* 1968. Vol. 16, № 1. P. 1–12. doi: 10.1016/0022-5096(68)90013-6

19. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, № 3. С. 434–444.
20. Kumar N., Rajagopal A., Pandey M. A rate independent cohesive zone model for modeling failure in quasi-brittle materials // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2015. Vol. 22, № 8. P. 681–696. doi: 10.1080/15376494.2013.855852
21. Lelias G., Paroissien E., Lachaud, F., Morlier J. Experimental characterization of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I mode II, and mixed-mode I/II by the use of a direct method // International Journal of Solids and Structures. 2019. Vol. 158. P. 90–115. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.005
22. Thanh L.T., Belaya L.A., Lavit I.M. A solution to the problem of elastic half-plane with a cohesive edge crack // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 973, № 1. id. 12020. doi: 10.1088/1742-6596/973/1/012020
23. Лавит И.М. Об устойчивом росте трещины в упругопластическом материале // Проблемы прочности. 1988. № 7. С. 18–23.
24. Elices M., Guinea G.V., Gomez J., Planas J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges // Engineering Fracture Mechanics. 2002. Vol. 69, № 2. P. 137–163. doi:10.1016/S0013-7944(01)00083-2
25. Перельмутер М.Н. Критерий роста трещин со связями в концевой области // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, № 1. С. 152–171.
26. Гмид Л.П. Методическое руководство литолого-петрографическому и петрохимическому изучению осадочных пород-коллекторов / Л.П. Гмид, Л.Г. Белоновская, Т.Д. Шибина, Н.С. Окнова, А.В. Ивановская; под ред. А.М. Жаркова. СПб.: ВНИГРИ, 2009. 160 с.
27. Баклашов И.В. Геомеханика: Учебник для вузов. В 2т. М.: Изд-во МГГУ, 2004. Т. 1. Основы геомеханики. 208 с.
28. Бурзунова Ю.П. Применение различных методов анализа трещиноватости для реконструкции полей тектонических напряжений (на примере интрузивного массива Тажеран в Прибайкалье) // Известия Сибирского отделения Секции наук о Земле Российской академии естественных наук. Геология, разведка и разработка месторождений полезных ископаемых. 2018. Т. 41, № 3. С. 35–49. doi: 10.21285/2541-9455-2018-41-3-35-49
29. Анискин Н.А., Нгуен Ч.Ч. Проблема температурного трещинообразования в бетонных гравитационных плотинах // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15, № 3. С. 380–398. doi: 10.22227/1887-0935.2020.3.380-398
30. Бокавер С.А., Усольцев А.М., Служаев А.И. Предупреждение появления усталостных трещин в сварных металлических пролетных строениях // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2019. Т. 21, № 4. С. 181–193. doi: 10.31675/1607-1859-2019-21-4-181-193

31. Арутюнан Р.А., Денисова А.А. Кинетика роста коррозионных трещин и критерий усталостного разрушения // Вестник СПбГУ. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2002. Вып. 3, № 17. С. 60–64.
32. Лужин О.В., Волохов В.А., Шмаков Г.Б., Почтовик Г.Я., Поль Э., Вебер З. Неразрушающие методы испытания бетона. М.: Стройиздат, 1985. 236 с.
33. Бенамар Х., Бельхамиани М., Джеббар Н., Удад В., Бенхадду А. Конечно-элементный анализ поведения макротрещин в кортикальной части большеберцовой кости человека // Российский журнал биомеханики. 2024. Т. 28, № 3. С. 69–82. doi: 10.15593/RZhBiomech/2024.3.06
34. Панькова А.П., Каменских А.А., Носов Ю.О. Биомеханика зуба с учетом клиновидного дефекта // Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых-механиков YSM-2023 (4–14 сентября 2023 г., Сочи), 2023. С. 81.
35. Белова О.Н., Степанова Л.В. Изучение распространения трещины методом молекулярной динамики в медной пластине // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25, № 3. С. 39–61. doi: 10.18287/2541-7525-2019-25-3-39-61
36. Полковникова Ю.А. Моделирование методом молекулярной динамики процесса прохождения липосомы с циннаризином через гематоэнцефалический барьер // Конденсированные среды и межфазные границы. 2023. Т. 25, № 1. С. 95–102. doi: 10.17308/kcmf.2023.25/10982
37. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
38. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
39. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1977. 272 с.
40. Хоникомб Р. Пластическая деформация металлов. М.: Мир, 1972. 408 с.
41. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
42. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
43. Hult J. Creep in continue a structure // Topics in Appl. contin. Mechan. Springer-Verlag. 1974. P. 137–155.
44. Broberg H.A. New criterion for brittle creep rupture // J. Appl. Mech. 1974. Vol. 41, № 3. P. 809–811.
45. Бордачев Н.М., Савченко Н.И. О прогнозировании развития усталостной трещины в конструктивном элементе // Проблемы прочности. 1978. № 8. С. 9–13.
46. Рудницкий Н.М. Оценка истинной чувствительности материалов к надрезу // Проблемы прочности. 1977. № 11. С. 25–29.

47. Панасюк В.В., Витвицкий П.М., Кутень С.И. О пластической деформации и разрушении пластинки, ослабленной равноплечей крестообразной трещиной // Проблемы прочности. 1979. № 5. С. 3–6.
48. Крамаренко О.Ю., Куликовская О.В. Зависимости между глубиной и длительностью усталостной трещины, развивающейся в круглых образцах при изгибе // Проблемы прочности. 1978. № 2. С. 21–26.
49. Sack R.A Extension of Griffith theory of rupture to three dimensions // Proc. Phys. Soc. 1946. Vol. 58, № 6 P. 729–736. doi: 10.1088/0959-5309/58/6/312
50. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е. К вопросу о разрушении хрупкого тела с дискообразной хрупкой трещиной // Прикладная механика 1967. Т. 3, № 12. С. 28–33.
51. Масаковский В.И. Первая основная задача теории упругости для пространства с плоской круглой щелью // Прикладная математика и механика. 1955. Т. 19, № 4. С. 441–452.
52. Smith F.W., Kobayashi A.S., Emery A.F. Stress intensity factors for pennyshaped cracks // Trans. ASME: J. Appl. Mech. SER. E. 1967. Vol. 34, № 4. P. 947–952.
53. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Растяжения упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной // Прикладная механика. 1965. Т. 1, № 10. С. 61–64.
54. Ворошко П.П. Определение трехмерного напряженного состояния прямоугольного бруса с центральной сквозной трещиной // Проблемы прочности. 1979. № 4. С. 9–14.
55. Валов Г.М. Деформации упругого пространства, имеющего концентрические кольцевые щели // Упругость и неупругость: Сб. тр. М.: МГТУ, 1975. № 4. С. 36–39.
56. Черепанов Г.П. Хрупкая прочность сосудов под давлением // ПМТФ. 1969. № 6. С. 90–101.
57. Smith F.W., Emery A.F., Kobayashi A.S. Stress intensity factors for semicircular cracks // Trans. ASME. Ser. E. 1967. Vol. 34, № 4. P. 953–959.
58. Каратушнин С.И., Воробьева Г.А. Возникновение и развитие трещины в процессе разрушения образца // Проблемы прочности. 1974. № 10. С. 58–60.
59. Чижик А.А., Хотмиров В.Г. Анизотропия распространения трещин в нержавеющей стали с полосчатой структурой // Проблемы прочности. 1974. № 12. С. 56–57.
60. Долгополов В.В., Майорский Б.Ш., Шилов С.Е. Оценка сопротивления разрушению труб с осевыми поверхностными трещинами при пластической деформации // Проблемы прочности. 1978. № 12. С. 60–63.

61. Градштейн В.И. Исследование скорости роста трещины в литой теплоустойчивой стали при ползучести // Проблемы прочности. 1977. № 8. С. 69–73.
62. Inglis C.E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Transactions of the Royal Institute of Naval Architects. 1913. Vol. 55. P 219–230.
63. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24. P. 109–114.
64. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. М.: Мир, 1990. 1014 с.
65. Caicedo J., Portela A. Direct computation of stress intensity factors in finite element method // European Journal of Computational Mechanics. 2017. Vol. 26, № 3. P. 309–335. doi: 10.1080/17797179.2017.1354578
66. Irvin G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control // Engn. Fracture Mechanics. 1968. Vol 1. P. 241–257. doi: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
67. Huang K., Shimada T., Ozaki N., Hagiwara Y., Sumigawa T., Guo L., Kitamura T. A unified and universal Griffith-based criterion for brittle fracture // International Journal of Solids and Structures. 2017. Vol. 128. P. 67–72. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2017.08.018
68. Cherepanov G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics // J. Appl. Math. Mech. 2012. Vol. 76, № 5. P. 519–536. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014
69. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // ASME J. Appl. Mech. 1968. Vol. 35. P. 379–386. doi: 10.1115/1.36012065
70. Hutchinson J.W., Paris P.C. Stability analysis of J-controlled crack growth // ASTM STP. 1979. Vol. 668. P. 37–64.
71. Parks D.M. The virtual crack extension method for nonlinear material behavior // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1977. Vol. 12, № 3. P. 353–364. DOI: 10.1016/0045-7825(77)90023-8
72. Shih C.F., Moran B., Nakamura T. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body // International Journal of Fracture. 1986. Vol. 30. P. 79–102. DOI: 10.1007/BF00034019
73. Irwin G.R., Kies J.A. Critical energy rate analysis of fracture strength // Welding J. Res. Suppl. 1954. Vol. 33. P. 193–198.
74. Пестриков В.М., Морозов Е.М Механика разрушения. Курс лекций. СПб.: ЦОП «Профессия», 2012. 552 с.
75. Broberg K.B. Cracks and fracture. London: Academic Press, 1999. 752 p.

76. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
77. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
78. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // *International Journal of Fracture*. 2017. Vol. 207, № 1. P. 55–71. doi:10.1007/s10704-017-0219-x
79. Салганик Р.Л., Устинов К.Б. Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // *Изв. РАН. МТТ*. 2012. № 4. С. 50–62. doi: 10.3103/S0025654412040061
80. Chen F.H.K., Shield R.T. Conservation laws in elasticity of the J-integral type // *J. appl. Math. Phys. (ZAMP)*. 1977. Vol. 28. P. 1–22. doi: 10.1007/BF01590704
81. Sladek J., Sladek V. Evaluations of the t-stress for interface cracks by the boundary element method // *Eng. Fract. Mech.* 1997. Vol. 56, № 6. P. 813–825. doi: 10.1016/S0013-7944(96)00131-2
82. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
83. Zenkevich O.C., Morgan K.J. *Finite elements and approximation*. New York: John Wiley & Sons, 1983. 328 p.
84. Вильдеман В.Э., Феклистова Е.В., Мугатаров А.И., Муллахметов М.Н., Кучуков А.М. Аспекты численного моделирования процессов разрушения упруго-хрупких тел // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16, № 4. С. 420–429. doi: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.35
85. Бурцев А.Ю., Глаголев В.В., Маркин А.А. Исследование процесса локальной разгрузки элемента в конечно-элементном континууме // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 69. С. 86–96. doi: 10.17223/19988621/69/7
86. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов*. М.: Мир, 1987. 524 с.
87. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids // *International Journal of Fracture*. 2011. Vol. 171, № 2. P. 105–109. doi: 10.1007/s10704-011-9637-3
88. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1968. № 6. С. 87–99.
89. Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a hardening material // *J. Mech. Phys. Solids*. 1968. Vol. 16. P. 13-31.

90. Rice J.R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In: Liebowitz H (ed) Fracture – an advanced treatise. New York: Academic Press. 1968. Vol. 2. P. 191-311.
91. Cherepanov G.P. Crack propagation in continuous media // J. Appl. Math. Mech. 1967. Vol. 31(3). P. 503-512.
92. Eshelby J.D. The force on an elastic singularity // Philos. Trans. R. Soc. A. 1951. Vol. 244. P. 87-112.
93. Parton V.Z., Morozov E.M. Mechanics of elastoplastic fracture. Moscow: Nauka. 1985. 502 p. (in Russian)
94. Fakoor M., Vazirinejad A., Daneshjoo Z. 2023. In the ability to extend Hashin criterion for mixed mode I/II fracture assessment of cracked orthotropic materials // Arch. Appl. Mech. doi:10.1007/s00419-023-02465-6
95. Mall S., Murphy J.F., Shottafer J.E. Criterion for mixed mode fracture in wood // J. Eng. Mech. 1983. Vol. 109(3). P. 680-690. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1983)109:3(680)
96. Fakoor M., Manafi Farid H. Mixed-mode I/II fracture criterion for crack initiation assessment of composite materials // Acta Mech. 2019. Vol. 230. P. 281-301. doi:10.1007/s00707-018-2308-y
97. Ustinov K.B., Massabo R., Lisovenko D.S. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // Engineering Failure Analysis. 2020. Vol. 110. 104410. doi:10.1016/j.engfailanal.2020.104410
98. Andrews M.G., Massabo R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // Engineering Fracture Mechanics. 2007. Vol. 74. P. 2700–2720 doi:10.1016/j.engfracmech.2007.01.013
99. Ustinov K. B., Idrisov D.M. On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: Exact analytical solutions for some particular cases // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2021. Vol. 101(4). e202000239. doi:10.1002/zamm.202000239
100. Bruno D., Greco F. Mixed-mode delamination in plates: a refined approach // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 38(50-51). P. 9149-9177. doi:10.1016/S0020-7683(01)00179-2
101. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. Vol. 67. P. 103-111. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032
102. Wu E.M., Reuter R.C.J. Crack Extension in Fiberglass Reinforced Plastics // University of Illinois. T&AM Report. 1965. Vol. 275. doi:10.21236/ad0613576

103. Alfano G., Crisfield M.A. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: Mechanical and computational issues // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2001. Vol. 50(7). P. 1701-1736. doi:10.1002/nme.93
104. Neves L. F. R., Campilho R. D. S. G., Sanchez-Arce I. J., Madani K., Prakash C. Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts // *Processes* 2022. Vol. 10. 2730. doi:10.3390/pr10122730
105. Campilho R.D.S.G., Banea M.D., Neto J.A.B.P., da Silva L.F.M. Modelling of single-lap joints using cohesive zone models: Effect of the cohesive parameters on the output of the simulations // *The Journal of Adhesion*. 2012. Vol. 88, № 4–6. P. 513–533. doi: 10.1080/00218464.2012.660834
106. De Moura M.F.S.F., Goncalves J.P.M. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading // *Int. J. Solids Struct.* 2014. Vol. 5. P. 1123–1131. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.0
107. ABAQUS HTML Documentation. Dassault Systemes. Velizy-Villacoublay: France. 2009.
108. Davila C.G., Camanho P.P., Turon A. Effective Simulation of delamination in aeronautical structures using shells and cohesive elements // *Journal of Aircraft*. 2008. Vol. 42(2). P. 663-672. doi:10.2514/1.32832
109. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Composite Structures*. 2016. Vol. 137. P. 140–147. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.11.018
110. McClintock F.A. *Fracture: An Advanced Treatise. Engineering fundamentals and environmental effects.* Waltham: Academic Press. 1971. 753 p.
111. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 158. P. 141–149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
112. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between J_C and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *International Journal of Fracture*. 2020. Vol. 224. P. 277–284. doi: 10.1007/s10704-020-00464-0
113. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. A body failure model with a notch based on the scalable linear parameter // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2018. № 4. P. 93–97. doi: 10.15593/perm.mech/2018.4.08
114. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2022. № 3. P. 116–124. doi: 10.15593/perm.mech/2022.3.12
115. Hahn H. *Elasticity theory: Fundamentals of Linear Theory and Application.* Wiesbaden: Vieweg&Teubner. 1985. 336 p.

116. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Modelling shear loading of a cantilever with a crack-like defect explicitly including linear parameters // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 193-194. P. 447–454. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.02.039
117. Sih G.C., Ho J.W. Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 1991. Vol. 16, No. 3. P. 179–214.
118. Sih G.C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems // *Int. J. Fract.* 1974. Vol. 10, No. 3. P. 305–321.
119. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Lutkhov A.I. A finite element analyses of the effect of hydrostatic pressure in a thin adhesive layer on its fracture under mixed-mode loading // *Problems of Strength and Plasticity*. 2024. Vol. 86, No. 1. P. 36–46. doi: 10.32326/1814-9146-2024-86-1-36-46
120. da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Wang A., Spelt J.K. Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study // *Int. J. Adhes. Adhes.* 2009. Vol. 29, № 3. P. 331–341. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007
121. Volkersen O. Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten nietverbindungen mit konstanten laschenquerschnitten // *Luftfahrtforschung*. 1938. Vol. 15. P. 41–47.
122. Goland M., Reissner E. The stresses in cemented joints // *J. Appl. Mech.* 1944. Vol. 11, № 1. P. 17–27. doi: 10.1115/1.4009336
123. Adams R.D., Peppiatt N.A. Stress analysis of adhesive-bonded lap joints // *Journal of Strain Analysis*. 1974. Vol. 9, № 3. P. 185–196. doi: 10.1243/03093247V093185
124. Carpenter W.C. Goland and Reissner were correct // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1989. Vol. 24, № 3. P. 185–187. doi: 10.1243/03093247V243185
125. Novozhilov V.V. On plastic cavitation // *J. Appl. Math. Mech.* 1965. Vol. 29, № 4. P. 811–819. doi: 10.1016/0021-8928(65)90090-0.
126. Prandtl L. Spannungsverteilung in plastischen korpern // *Proc. 1st Internat. Congr. Appl. Mech.* 1924. P. 43–54.
127. Guest J.J. Yield surface in combined stress // *Phil. Mag. Ser. 7*. 1940. Vol. 30. P. 349–369.
128. Schleicher F. Der spannungszustand an der fliessgrenze (Plastizitatsbedingung) // *ZAMM*. 1926. Vol. 6, № 3. P. 199–216.
129. Толоконников Л.А., Толоконников О.Л., Султанов И.С. Осесимметричные пластические деформации при условии пластичности, зависящем от гидростатического напряжения // *Прикладная механика*. 1976. Том 7, № 8. С. 43–48.

130. Толоконников О.Л. Установка для испытаний трубчатых образцов материалов в среде высокого давления // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 185–188.

131. Glagolev V.V., Markin A.A. Limit states of adhesive layers under combined loading // *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58, No. 6. P. 39-46. doi:10.3103/S0025654423600204

132. Dionisio J.M.M., Ramalho L.D.C., Sanchez-Arce I.J., Campilho R.D.S.G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints // *Int. J. Fract.* 2021. Vol. 232. P. 77–91. doi: 10.1007/s10704-021-00594-z

133. Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Лутхов А.И. К нахождению J-интеграла для трещиноподобного дефекта твердого тела в виде физического разреза в конечно-элементном представлении // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2025. № 2, С. 30–38. doi: 10.15593/perm.mech/2025.2.03

134. Глаголев В.В., Лутхов А.И. К нахождению потока удельной упругой энергии в вершину физического разреза при конечно-элементном решении // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2024. № 90. С. 78–89. doi: 10.17223/19988621/90/7

135. Бурцев А.Ю., Глаголев В.В., Лутхов А.И. К моделированию потоков упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта конечно-элементного континуума при нагружении типа моды I // *Сборник Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»*. 2022. С. 985–990.

136. Лутхов А.И. К моделированию потоков упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта конечно-элементного континуума при нагружении типа моды II // *Вестник Тульского государственного университета. Серия: дифференциальные уравнения и прикладные задачи*. 2022. № 1. С. 61–71.

137. Лутхов А.И. Моделирование потоков упругой энергии в вершину физического разреза // *Сборник докладов XVIII региональной магистерской научной конференции*. 2023. ч. 1. С. 14–15.

138. Глаголев Л.В., Лутхов А.И. К нахождению потока упругой энергии в вершину физического разреза и работы узловых сил при разрушении тупикового элемента конечно-элементного континуума // *Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых-механиков*. 2023. С. 65.

139. Лутхов А.И. К нахождению потоков удельной упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта при нагружении по моде II // *Вестник Тульского государственного университета. Серия: дифференциальные уравнения и прикладные задачи*. 2024. № 1. С. 45–51.

140. Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Лутхов А.И. К нахождению J-интеграла для трещиноподобного дефекта твердого тела в виде физического разреза в

конечно-элементном представлении // Материалы XXXIII Всероссийской конференции «Математическое моделирование в естественных науках». 2024. С. 107–110.

141. Морозов Е.М. ANSYS в руках инженера: механика разрушения. М.: Ленанд, 2010. 456 с.

142. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials // J. Mech. Phys. Solids. 2004. Vol. 52, № 1. P. 193–214. doi: 10.1016/s0022-5096(03)00070-x

143. Reinhardt H.W., Osbolt J., Shilang X., Dinku A. Shear of structural concrete members and pure mode II testing // Advanced Cement Based Materials. 1997. Vol. 5. P. 75–85. doi: 10.1016/S1065-7355(96)00003-X

144. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. The stress analysis of cracks handbook. New York: ASME Press, 1985. 698 p.

145. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Lutkhov A. I. To failure of adhesive layers under mixed mode I+II loading // Mechanics of composite materials. 2025. Vol. 61, No. 2. P. 231–246. doi: 10/1007/s11029-025-10272-z

146. Glagolev V.V., Lutkhov A.I. On the criterion for the strength of overlapped plate joints // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59, No. 3. P. 1259–1265. doi: 10.1134/S0025654424602933

147. Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Лутхов А.И. Конечноэлементное исследование влияния гидростатического давления в тонком адгезионном слое на его разрушение при смешанной моде нагружения // Материалы XXXII Всероссийской конференции «Математическое моделирование в естественных науках». 2023. С. 111–114.

148. Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Лутхов А.И., Маркин А.А. О нахождении аддитивных слагаемых J-интеграла на примере соединения внахлест упругопластическим адгезионным слоем // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025. № 3(65). С. 92–110. doi: 10.37972/chgpu.2025.65.3.004

149. De Sousa C.C.R.G., Campilho R.D.S.G., Marques E.A.S., Costa M., da Silva L.F.M. Overview of different strength prediction techniques for single-lap bonded joints // Proc. Inst. Mech. Eng. Part L. 2017. Vol. 231. P. 210–223. doi: 10.1177/1464420716675746

150. Bruno D., Greco F., Lonetti P. Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables // Mech. Adv. Mater. Struct. 2005. Vol. 12. № 4. P. 285–304. doi: 10.1080/15376490590953563

151. ANSYS. User's Guide. Release 11.0. Pennsylvania. USA: ANSYS Inc. 2006.

152. He. X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 2011. Vol. 31(4). P. 248-264. doi:10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006
153. Neuber H. *Theory of Notch Stresses: Principles for Exact Calculation of Strength with Reference to Structural Form and Material*. Berlin: Springer-Verlag. 1958. 180 p.
154. Kornev V.M. Modified Neuber – Novozhilov criterion of rupture for V-shaped cuts (antiplane problem) // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2002. Vol. 43(1). P. 128-132. doi:10.1023/A:1013930715761
155. Lazzarin, P., Berto, F. Some expressions for the strain energy in a finite volume surrounding the root of blunt V-notches // *International Journal of Fracture*. 2005. Vol. 135(1-4). P. 161-185. doi:10.1007/s10704-005-3943-6
156. Morozov N.F., Semenov B.N. Application of the brittle fracture criterion of V.V. Novozhilov in determining failure loads for corner cutouts under complex stress state conditions. Novozhilov's brittle fracture criterion for determining failure loads for corner notches under conditions of complex stress state // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*. 1986. 1. P. 122-126.
157. Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Лутхов А.И. К определению критического состояния смешанной моды нагружения адгезионного слоя композита // *МКМиК*. 2025. Т. 31, № 2. С. 234–250. doi: 10.33113/mkmi.kras.2025.31.02.05
158. Глаголев В.В., Лутхов А.И. Об одной оценке критического значения J -интеграла при нормальном сжатии окрестности трещиноподобного дефекта тонкого адгезионного слоя // *Изв. РАН. МТТ*. 2025. № 5. С. 102–108. doi: 10.31857/S1026351925050056
159. Малик А.В., Лавит И.М. Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 54. С. 88–102. doi: 10.17223/19988621/54/8
160. Murakami Y. A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method // *Eng. Fract. Mech.* 1976. Vol. 8, no. 4. P. 643–655. doi: 10.1016/0013-7944(76)90038-2
161. Rybicki E.F., Kanninen M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral // *Eng. Fract. Mech.* 1977. Vol. 9, no. 4. P. 931–938. doi: 10.1016/0013-7944(77)90013-3
162. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. // *ASME J. Appl. Mech.* 1951. Vol. 18. P. 31–38. doi: 10.1115/1.4010217
163. Reissner E. Reflections on the theory of elastic plates // *Appl. Mech. Rev.* 1985. Vol. 38, no. 11. P. 1453–1464. doi: 10.1115/1.3143699

164. Ismail A.E., Jamian S., Kamarudin K., Nor M.K.M., Ibrahim M.N., Choiron M.A. An overview of fracture mechanics with ANSYS // *Int. J. Integr. Eng.* 2018. Vol. 10, no. 5. P. 59–67. doi: 10.30880/ijie.2018.10.05.010
165. Bombolakis E.G. Photoelastic investigation of brittle crack growth within a field of uniaxial compression // *Tectonophysics*. 1964. Vol. 1, no. 4. P. 343–351. doi: 10.1016/0040-1951(64)90021-6
166. Brace W.F., Bombolakis E.G. A note of brittle crack growth in compression // *J. Geophys. Res.* 1963. Vol. 68, no. 12. P. 3709–3713. doi: 10.1029/jz068i012p03709
167. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. О разрушении при сжатии // *Физическая мезомеханика*. 2018. Т. 21, № 3. С. 86–102. doi: 10.24411/1683-805X-2018-13009
168. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Модель хрупкого разрушения пористых материалов при сжатии // *Математическое моделирование систем и процессов*. 2009. № 17. С. 47–57.
169. Kataoka M., Eqlima Mahdavi E., Funatsuc T., Takeharad T., Obarae Y., Fukuia K., Hashiba K. Estimation of mode I fracture toughness of rock by semi-circular bend test under confining pressure condition // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 191. P. 886–893. doi: 10.1016/j.proeng.2017.05.258
170. Huang J., Hua W., Li D., Chen X., You X., Dong S., Li J. Effect of confining pressure on the compression-shear fracture properties of sandstone // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2023. Vol. 124. 103763. doi: 10.1016/j.tafmec.2023.103763
171. Selyutina N.S., Igusheva L.A., Petrov Y.V. The role of the hydrostatic pressure under dynamic fracture of rocks // *Materials Physics and Mechanics*. 2024. Vol. 52, no. 3. P. 108–120. doi: 0.18149/MPM.5232024_11
172. Okubo S., Nishimatsu Y., He C., Chu S.Y. Loading rate dependency of uniaxial compressive strength of rock under water-saturated condition // *Journal of the Society of Materials Science*. 1992. Vol. 41, no. 463. P. 403–409. doi: 10.2472/jsms.41.403
173. Житников Ю.В., Тулинов Б.М. Взаимодействие между берегами разреза в сложнапряженном состоянии // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1982. № 4. С. 168–172.
174. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Анализ равновесия плоской трещины с учетом образования в областях налегания зон скольжения и сцепления при сложном нагружении // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1987. № 2. С. 141–148.
175. Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В. Равновесие полостей и трещин-разрезов с областями налегания и раскрытия в упругой среде. // *ПММ*. 1986. Т. 50, № 5. С. 826–834.