

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

На правах рукописи



НГУЕН ТХИ ШАНГ

**ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ
УПРУГИЕ ПЛАСТИНЫ С НЕОДНОРОДНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ**

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: д. ф. -м. н., проф. Голоконников Л.А.

Тула 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ И УПРУГИХ ВОЛН	9
1.1. Обзор литературы.....	9
1.2. Распространение звука в идеальной жидкости.....	19
1.3. Распространение звука в вязкой жидкости	22
1.4. Волновые поля в однородных и неоднородных упругих средах	25
1.4.1. Волновые поля в однородной упругой среде.....	25
1.4.2. Волновые поля в неоднородной упругой среде.....	27
1.5. Граничные условия	28
Глава 2. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ	30
2.1. Постановка задачи.....	30
2.2. Аналитическое решение	32
2.3. Определение поля смещений в неоднородном покрытии	40
2.4. Численные исследования	45
.....	79
Глава 3. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ	79
3.1. Постановка задачи.....	79
3.2. Математическая модель задачи	81
3.3. Аналитическое решение задачи.....	83
3.4. Численные исследования и анализ результатов	89
Глава 4. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ	101

4.1. Постановка задачи.....	101
4.2. Математическая модель задачи	103
4.3. Аналитическое решение задачи.....	106
4.3.1. Отражение и преломлении плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругую пластину с неоднородным покрытием	108
4.3.2. Определение волновых полей в случае сферической падающей волны	114
4.4. Численные исследования	120
4.5. Использование решения двумерной задачи о прохождении плоской волны через пластину с покрытием	132
Глава 5. ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ, ГРАНИЧАЩУЮ С ВЯЗКИМИ ЖИДКОСТЯМИ	137
5.1. Постановка задача	137
5.2. Аналитическое решение	139
5.3. Численные исследования	153
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	169
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	172

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Проблема динамического взаимодействия деформируемых твердых тел с акустической средой имеет важное теоретическое и практическое значение, что определяется широким использованием гидроупругих систем во многих отраслях современной техники. В качестве основных конструктивных элементов такого рода систем являются пластины. При этом их толщина может варьироваться в достаточно широких пределах.

Применение акустических методов в исследовательской и производственной практике требует разработки математических моделей, адекватно описывающих волновые процессы в системе упругое тело – жидкость и необходимых при решении многих практических задач гидроакустики, геофизики, дефектоскопии, биомеханики, медицинской диагностики.

Отражение и прохождение звуковых волн через упругие пластины исследовалось во многих работах. Наиболее принципиальные теоретические проблемы в изучении процессов отражения, преломления, трансформации волн в однородных изотропных упругих пластинах решены в работах Бреховских Л.М., Лямшева Л.М., Шендерова Е.Л., Barnard G.R., Beranek L.L., Fay R.D., Piquette J.C. и др. Результаты исследований отражения и прохождения звука через дискретно-неоднородные плоские упругие слои содержатся в работах Бреховских Л.М., Година О.А., Молоткова Л.А., Рыбака С.А., Тарлаковского Д.В., Hasheminejad S.M., Jamalpoor A. и др., а через непрерывно-неоднородные слои – в работах Приходько В.Ю., Тютюкина В.В., Ларина Н.В., Селезова И.Т., Скобельцына С.А., Толоконникова Л.А., Hasheminejad S.M., Huang C., Nutt S., Shabanimotlagh M. и др.

Характер звукоотражения и звукопрохождения упругих пластин можно изменять с помощью специальных покрытий. Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является ак-

туальной проблемой. Существуют различные виды покрытий, наносимых на твердые тела. Обеспечить требуемые звукоотражающие свойства тел можно с помощью покрытий в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия.

Актуальности исследований отражения звука от упругих тел с неоднородными покрытиями способствует все более широкое использование на практике новых функционально-градиентных и композиционных материалов, свойства которых непрерывно или кусочно-непрерывно меняются по толщине. Кроме того, непрерывно-неоднородное по толщине покрытие можно реализовать с помощью многослойной системы однородных слоев с различными значениями механических параметров. С математической точки зрения это эквивалентно аппроксимации непрерывных функций, характеризующих переменные параметры непрерывно-неоднородного слоя, кусочно-постоянными функциями.

Таким образом, важной проблемой является изучение влияния непрерывно-неоднородных упругих покрытий на звукоотражающие свойства упругих пластин. Такие исследования представляют значительный интерес и необходимы для разработки современных промышленных материалов, используемых, например, для шумоподавления, и для создания покрытий, обеспечивающих требуемые акустические характеристики тел и элементов конструкций.

Целью работы является исследование влияния неоднородных упругих покрытий на отражение и прохождение звука через однородные упругие пластины, граничащие с идеальными и вязкими жидкостями.

Научная новизна работы заключается в следующем:

– поставлены и решены новые задачи о прохождении плоских, цилиндрических и сферических гармонических звуковых волн через однородную упругую пластину с неоднородным упругим покрытием, граничащую с

идеальными и вязкими жидкостями;

- исследовано влияние неоднородности покрытия и его расположения на акустические характеристики пластины;
- проведён численный анализ отраженного и прошедшего через пластину с покрытием акустических полей.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы представляют собой вклад в развитие теории дифракции звуковых волн. Полученные результаты могут быть использованы для получения информации, необходимой в гидроакустике для звуковой эхолокации различных объектов; в судовой акустике при изучении акустических характеристик судовых конструкций; в дефектоскопии для разработки методов неразрушающего контроля и идентификации результатов экспериментальных исследований; в строительной индустрии для разработки новых конструкций сэндвич-панелей; в медицине при разработке методов ультразвуковой диагностики; при решении обратных задач рассеяния звуковых волн.

Методы исследования. В диссертационной работе используются аналитические и численные методы исследования.

Решение поставленных задач получены в рамках линейной теории упругости и гидродинамики идеальной и вязкой сжимаемой жидкости.

Аналитическое описание волновых полей получено на основе метода разделения переменных с использованием разложений по волновым функциям.

Решение краевых задач для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при определении полей смещений в неоднородном упругом покрытии, находится методом степенных рядов.

Для решения задач в случаях, когда падающая волна имеет криволинейный фронт распространения, использован метод, базирующийся на

решении задачи об отражении и прохождении плоской волны.

Достоверность полученных результатов вытекает из корректной постановки задач и обоснованности применяемых математических методов; обеспечивается проведением расчётов на ЭВМ с контролируемой точностью; подтверждается совпадением полученных решений с известными результатами для частных случаев.

Положения, выносимые на защиту:

- математические модели отражения и прохождения гармонических звуковых волн через упругую пластину с непрерывно-неоднородным покрытием, граничащую с идеальными и вязкими жидкостями;
- аналитические решения задач об отражении и прохождении плоских, цилиндрических и сферических волн через однородную упругую пластину с непрерывно-неоднородным покрытием;
- результаты численных исследований отраженного пластиной и прошедшего через нее акустических полей; анализ влияния неоднородного покрытия на акустические характеристики пластины.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались:

- на региональной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Россия, Тула, ТулГУ, 2018);
- на международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 2021, 2022);
- на научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава ТулГУ (Россия, Тула, ТулГУ, 2023).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ, в том числе: 4 статьи в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus; 1 статья в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад. Обзор литературы и модели в главе 1, результаты работы, представленные в разделах 2.4, 3.2, 3.4, 4.2, 4.3.1, 4.4, 4.5, 5.3, получены автором. Результаты работы, приведенные в разделах 2.1 – 2.3, 3.1, 3.3, 4.1, 4.3.2, 5.1, 5.2, изложены на основе совместных работ с Толоконниковым Л.А. Личный вклад автора в эти работы состоит в получении аналитических решений задач, проведении численных исследований.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 182 страницы, в том числе 107 рисунков. Список литературы включает 102 наименований.

Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ И УПРУГИХ ВОЛН

1.1. Обзор литературы

Отражение и прохождение звуковых волн через упругие пластины исследовалось во многих работах. В настоящее время наиболее принципиальные теоретические проблемы в изучении процессов отражения, преломления, трансформации волн в однородных изотропных упругих пластинах решены в монографиях [4, 33, 79, 88].

Одной из первых работ по изучению прохождения звука через пластины была работа [92], в которой проведено экспериментальное исследование отражения звука тонкой стальной пластиной в воде. Было обнаружено, что при некоторых больших углах падения звука наблюдается сильное отражение в направлении, обратном направлению падающей волны. Оно было названо незеркальным отражением, поскольку это обратное отражение имеет место при неперпендикулярном падении звуковой волны на пластину. Было установлено также, что это незеркальное отражение сопровождается изгибными колебаниями пластины. В работе [91] теоретически и экспериментально исследовано положение максимумов коэффициента прозрачности стальной пластины, погруженной в воду. Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде исследованы в [28].

Большое количество работ посвящено отражению и прохождению звука через тонкие пластины. Это связано с тем, что для тонких пластин упрощаются математические исследования. Кроме того, нередко аппроксимация реального упругого слоя тонкой пластиной бывает вполне допустимой и может послужить основой как для качественного понимания распространения звука в присутствии пластины, так и для количественной оценки отраженного и прошедшего акустических полей.

При исследовании отражения звука тонкими латунными, стальными и алюминиевыми пластинками в воде в направлении, противоположном направлению падающей волны, был обнаружен новый вид незеркального отражения. Как оказалось, оно обусловлено поперечными колебаниями сжатия (продольными колебаниями) пластины [33]. Анализ отражения плоской звуковой волны пластиной, толщина которой значительно меньше длины продольной и поперечной волн в материале пластины, выполнен в [32]. Показано, что при некоторых углах падения звуковой волны наблюдается прохождение звука через пластину, а также сильное рассеяние в направлении, противоположном направлению падающей волны. Взаимодействие плоской звуковой волны с тонкой пластинкой, закрепленной вдоль периодически расположенных опор, рассмотрено в [81]. В [9] рассматривается рассеяние плоской звуковой волны на тонкой пластине конечной длины, когда длина пластины существенно превосходит длину падающей волны, а ее толщина намного меньше длины плоской волны. Обнаружен эффект усиления обратного рассеяния звуковой волны на тонкой произвольно ориентированной пластинке в жидкости. В [87] описан метод определения акустических свойств тонких пластин. Существующие теоретические выражения используются для расчета коэффициентов прохождения и отражения плоских звуковых волн, падающих на пластину под произвольным углом. Теория подтверждается экспериментальными данными. Путем объединения теории и эксперимента получены уточненные значения коэффициента поглощения для разных материалов. Отражение звука тонкой пластиной конечной ширины и бесконечной длины обсуждается в [98].

Стационарные динамические задачи акустоупругости тонкой пластины в идеально сжимаемой жидкости с учетом диссипации энергии в пластине и жидкости решены в [99].

Прохождение плоской звуковой волны через тонкую пластину и

пластину любой толщины рассмотрено в [4]. Отражение звука толстыми ограниченными пластинами в жидкости изучено в [33, 34].

В [21] решена задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны однородным изотропным термоупругим плоским слоем произвольной толщины, граничащим с невязкими теплопроводными жидкостями. Проведены расчёты интенсивности звукоотражения. Проиллюстрировано заметное влияние термоупругости материала пластины на отражение звука. Анализ резонансного рассеяния звука термоупругой пластиной проведён в [19]. Исследовано взаимовлияние теплового и механического полей в слое на прохождение звука.

Задача о прохождении плоской волны через плоский трансверсально-изотропный однородный упругий слой конечной толщины, граничащий с жидкими средами с различными волновыми сопротивлениями, решена в [31]. Определены коэффициенты матрицы слоя, входящие в выражения коэффициентов прохождения и отражения. Проведено сравнение зависимостей модуля коэффициента прохождения от волновой толщины слоя и угла падения волны для анизотропного и изотропного слоев. В приближении теории тонких пластин прохождение звука через плоский трансверсально-изотропный слой рассмотрено в [82]. Получены приближённые формулы для коэффициентов отражения и прохождения звука.

В работах, упомянутых выше, первичное поле возмущений представлялось в виде падающей плоской волны. Криволинейность фронта падающей волны оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоский слой, а с математической точки зрения задача в этом случае становится значительно сложнее. Трудность задачи об отражении и преломлении сферической волны на плоской границе раздела двух сред обуславливается различием между симметрией волны и видом границы. В то время как волна имеет сферический фронт, граница является плоской.

Прохождении сферической звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину обсуждалось в ряде работ. В [97] исследовано прохождение сферической волны через тонкую бесконечную пластину в однородной среде. Отражение сферической волны от тонкой пластины, покрывающей свободную поверхность жидкости, изучено в [14] для случая низких частот. Прохождение сферической волны через тонкую пластину рассмотрено и в [79]. При этом учитывались лишь изгибные колебания. В работах [15, 16] методом перевала выполнен асимптотический анализ звуковых полей, прошедших и отражённых от тонких пластин, движение которых описывается уравнениями Тимошенко-Миндлина. При этом предполагалось, что зависимость коэффициента прохождения от угла падения имеет плавный характер. В [101] решена задача о взаимодействии сферической волны с пластиной, погруженной в невязкую жидкость. Проведены численные исследования для пластин из разных материалов и для разных частот падающего поля. Задача о прохождении сферической звуковой волны сквозь упругий слой решена в [83]. Проанализированы особенности, возникающие при прохождении сферической волны сквозь упругий слой произвольной волновой толщины. Точное решение построено на основе разложения сферической волны по плоским волнам. Расчёты выполнены для различных классов материалов (металлов, эластичных материалов, пластмасс). В [84] построено точное осесимметричное решение задачи о проникновении звукового поля через плоский упругий слой. В качестве источника поля рассматривался сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. С помощью теорем сложения решение поставленной краевой задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра, которые преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля.

Ряд работ посвящен прохождению звука через непрерывно неоднородные и дискретно-неоднородные плоские упругие слои, граничащие с идеальными жидкостями.

Задачи распространения волн в дискретно-слоистых средах рассматривались в монографиях [4, 5, 36]. В [48] анализируются свойства матрицы, описывающей переход плоских звуковых волн через совокупность изотропных упругих слоев, вытекающие из соотношений взаимности и условий симметрии. Рассматриваются условия полного отражения звука от совокупности упругих слоев при некоторых углах падения. Находятся выражения элементов матрицы для тонкого слоя.

Прохождение звука через изотропную периодически неоднородную пластину в жидкости рассмотрено в [47]. Методом малых возмущений исследуется влияние периодической неоднородности на собственные колебания тонкой пластины. Показано, что для такой пластины характерно существование полосы непропускания.

В [29, 30] исследованы звукоизоляционные свойства бесконечной трехслойной пластины, окруженной с двух сторон акустическими средами, при воздействии на нее плоской, цилиндрической или сферической гармонических волн. Пластина имеет сложную структуру (несущие слои – упругие изотропные, а наполнитель – ортотропный, сотовой конфигурации). Взаимодействие гармонических волн разного типа с трехслойной пластиной, помещенной в грунт рассмотрено в [96].

Отражение и прохождение плоских звуковых волн через непрерывно-неоднородный изотропный упругий слой изучено в [35, 45]. В [35] рассматривается импедансный метод, пригодный для численных расчетов коэффициентов отражения от упругих слоисто-неоднородных сред. Получена система трех нелинейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют три, введенные в рассмотрение упругих импеданса. Приведены выражения для коэффициентов отражения, вычисляемых по известным

входным импедансам. Метод иллюстрируется рядом примеров, в том числе, примером вычисления коэффициента отражения от неоднородного слоя, согласующего между собой жидкое и упругое полупространства. В [45] с помощью импедансного метода рассчитаны коэффициенты отражения звуковых волн от твердых слоев и полупространств с переменными материальными параметрами. Показано, что метод математически эквивалентен дифференциальной ортогональной прогонке. Исследовано распространение волн в упругом неоднородном по толщине слое, ограниченном с двух сторон невязкими жидкостями различной плотности [51]. Решение задачи построено на основе метода степенных рядов. Проанализировано влияние параметров слоя на распространение волн. Влияние неоднородности упругого слоя, помещённого между различными жидкостями, на распространение волны изучено в [85, 86].

В работах [46, 57] изучено прохождение плоских звуковых волн через плоский трансверсально-изотропный неоднородный упругий слой. В [57] предложен метод сведения краевой задачи для уравнений движения неоднородного упругого слоя к задаче с начальными условиями. Представлены результаты расчётов коэффициента прозрачности трансверсально-изотропных слоёв с переменной плотностью. В [46] представлены результаты численных расчетов упругих полей в тонких пластинах.

В [68] рассмотрена задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим плоским слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. Уравнения движения упругого слоя сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, краевая задача для которой решена двумя способами: с помощью сведения к задачам с начальными условиями и методом степенных рядов. Получены аналитические выражения, описывающие акустические поля вне слоя. Представлены результаты расчетов коэффициента прозрачности для трансверсально-изотропных слоев, неоднородных по толщине. В [102] по-

строено решение задачи о прохождении длинных плоских волн через анизотропную неоднородную пластину. Результаты исследований дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных анизотропных упругих телах, в том числе на плоских слоях, представлены в монографии [71].

В указанных выше работах, посвященных прохождению звука через неоднородные плоские упругие слои, полагалось, что упругий слой граничит с идеальными жидкостями. При распространении звука в реальной жидкости часть звуковой энергии превращается в тепловую. Причиной диссипации энергии является наличие вязкости и теплопроводности. Однако, если для газов указанные причины поглощения вносят примерно одинаковый вклад, то для капельных жидкостей основную роль в поглощении звука играет вязкость. Вопрос о поглощении звука при распространении звуковых волн вблизи твердых границ представляет значительный интерес для различных областей физической и технической акустики. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный анизотропный плоский слой, граничащий с вязкими жидкостями, изучено в [69]. Рассматривался слой, материал которого обладает анизотропией общего вида.

Задачи о прохождении плоской звуковой волны через непрерывно-неоднородный и дискретно-неоднородный термоупругие плоские слои, граничащие с невязкими теплопроводными жидкостями, решены в [25, 26, 61, 62]. Показано, что термоупругость материала слоя существенно влияет на характер отражения и прохождения звука, причём степень этого влияния зависит от физико-механических характеристик материала. Прохождение звуковой волны через неоднородный анизотропный термоупругий плоский слой исследовано в [22]. В [52 методом конечных элементов] решена задача о рассеянии звука ограниченной неоднородной анизотропной термоупругой пластиной.

Методом локального поля решена задача о прохождении звуковых волн через искривлённую неоднородную термоупругую пластину, грани-

чащую с вязкими теплопроводными жидкостями [70]. Предполагается, что акустическое поле в окрестности производной точки, лежащей на поверхности пластины, имеет локальный характер и зависит только от поля падающей волны и геометрической формы участка пластины вблизи этой точки.

Отражение и прохождение плоской звуковой волны через панели из функционально-градиентных материалов изучено в [94, 95]. В [90, 93] исследовано прохождение звука через сэндвич-панели. В [78] рассматривается задача о прохождении плоской звуковой волны через плоский слой композита конечной толщины. Предполагается, что композит состоит из взаимно чередующихся слоев упругого и вязкоупругого изотропных материалов.

Обратные задачи об определении параметров неоднородности материала плоского неоднородного упругого слоя по отражению и прохождению звука решены в [24, 53]. В [24] на основе аналитического решения прямой задачи решена обратная задача об определении линейных законов неоднородности плоского упругого слоя, имеющего наименьшее отражение при заданном угле падения плоской звуковой волны. В [53] рассмотрена задача определения вида зависимости плотности и модулей упругости трансверсально-изотропного неоднородного упругого слоя по коэффициенту прохождения плоской звуковой волны. Предполагается, что материальные параметры упругого слоя зависят только от расстояния от его поверхности. Исследуется случай, когда зависимости представляются полиномами третьей степени. Неизвестные коэффициенты в этих полиномиальных зависимостях ищутся путем решения задачи минимизации функции многих переменных. Минимизируемая функция представляет собой меру отклонения измеренного коэффициента прохождения звуковой волны от его значения, полученного в результате численного решения задачи.

В настоящее время известен ряд работ, посвященных изучению

влияния покрытий на звукоотражающие свойства тел. Предложены различные виды покрытий, наносимых на твердые тела: поглощающие покрытия, резонаторные устройства, нерассеивающие покрытия.

Взаимодействие сферической волны с двухслойной пластиной рассмотрено в [100]. Предполагается, что каждый из упругих слоев пластины является однородным и изотропным. Потери в материалах пластин моделируются с использованием комплексных свойств материалов. И источник, и пластина погружены в безграничную невязкую жидкость. Проведены численные исследования для металлической и пластиковой пластин с резиновыми покрытиями при разной частоте падающей волны.

В [3] на основе импедансной теории поглощения и рассеяния звука [2] предложена общая схема поглощающих и нерассеивающих покрытий с повышенной эффективностью. Такие покрытия, называемые покрытиями с протяженной реакцией, представляет собой совокупность дискретных элементов, каждый из которых определенным образом связан с соседними элементами. Приводятся теория таких покрытий и метод определения наилучших значений их параметров. Подробно анализируется плоское покрытие с протяженной реакцией, оценена его эффективность. Однако имеющиеся теоретические разработки приводят к сложным, технически трудно реализуемым покрытиям.

Звукоотражение и звукопрохождение упругой пластины можно изменять с помощью покрытия в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя. Такое покрытие можно реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных). Моделирование непрерывно-неоднородного по толщине покрытия многослойной системой однородных слоев эквивалентно аппроксимации непрерывных функций, характеризующих переменные параметры непрерывно-неоднородного слоя, кусочно-постоянными функциями. Используя непрерывно-неоднородное упругое

покрытие, можно получить требуемые акустические характеристики пластины, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия.

Ряд работ посвящен исследованию отражения и прохождения плоских звуковых волн на однородных изотропных упругих пластинах с неоднородными покрытиями, находящимися в невязкой жидкости.

Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным по толщине покрытием решена в работах [72, 75]. Моделирование неоднородного покрытия плоской упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами проведено в [23]. Определены законы неоднородности покрытия пластины, обеспечивающие наименьшее отражение при заданном угле падения плоской звуковой волны. На основе решения прямой задачи построен функционал, выражающий интенсивность отражения, и предложен алгоритм его минимизации. Получены аналитические выражения, описывающие механические параметры неоднородного покрытия.

В [20] решены прямая и обратная задачи о прохождении плоской звуковой волны через однородную термоупругую пластину с непрерывно-неоднородным покрытием, граничащую с теплопроводными жидкостями.

Задача определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного покрытия конечной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения плоской звуковой волны, рассмотрена в [54]. Получено численное решение задачи с использованием метода конечных элементов.

В [73] решена задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием. Получено аналитическое описание отраженного и преломленного акустических полей. Рассмотрены частные случаи, когда материал покрытия является трансверсально-изотропным и изотропным.

1.2. Распространение звука в идеальной жидкости

Для построения математической модели распространения звука в идеальной среде воспользуемся полной системой уравнений гидродинамики идеальной жидкости, описывающей движение идеальной жидкости [17]. Эта система включает в себя уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера), уравнение неразрывности и уравнение физического состояния. Математическое описание движения жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение давления p , скорости \mathbf{v} и плотности ρ . Величины \mathbf{v} , p и ρ есть функции времени t и координат точек пространства.

Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (1.1)$$

где \mathbf{F} – массовая сила, отнесённая к единице массы.

Уравнение неразрывности записывается в виде [17]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.2)$$

В теории малых звуковых колебаний считается, что движение сжимаемой жидкости происходит адиабатически. В этом случае уравнение физического состояния принимает вид

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (1.3)$$

где p_0 , ρ_0 – давление и плотность невозмущенной жидкости; $\gamma = c_p / c_v$; c_p и c_v – теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

Так как процесс распространения звука представляет собой малые колебания жидкости, то в уравнении (1.1) можно пренебречь конвективными членами. Тогда при условии отсутствия внешних сил будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (1.4)$$

Введем в рассмотрение величину $s = (\rho - \rho_0) / \rho_0$, называемую сжатием. Тогда

$$\rho = \rho_0(1 + s). \quad (1.5)$$

С учетом (1.5) уравнение (1.3) перепишем в виде

$$p = p_0(1 + s)^\gamma. \quad (1.6)$$

При малых возмущениях жидкости s мало. Поэтому, пренебрегая высшими степенями s , из (1.6) находим

$$p = p_0(1 + \gamma s).$$

Отсюда получаем

$$p' = p - p_0 = p_0 \gamma s, \quad (1.7)$$

где p' – акустическое давление.

Подставим выражение (1.5) в уравнение неразрывности (1.2). Так как

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho \cdot \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho = \rho_0 \cdot \text{div } \mathbf{v} + \rho_0 s \cdot \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho,$$

то пренебрегая последними двумя слагаемыми как величинами, имеющими второй порядок малости, вместо уравнения (1.2) будем иметь

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.4) в том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -c^2 \text{grad } s, \quad (1.9)$$

где $c = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ – скорость звука.

Предположим теперь, что в начальный момент существует потенциал скорости $\tilde{\Psi}_0$, то есть

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \text{grad } \tilde{\Psi}_0. \quad (1.10)$$

Из уравнения (1.9) получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}|_{t=0} - c^2 \operatorname{grad} \left(\int_0^t s dt \right).$$

С учетом (1.10) имеем

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \left(\tilde{\psi}_0 - c^2 \int_0^t s dt \right) = \operatorname{grad} \tilde{\psi}. \quad (1.11)$$

Это означает, что существует потенциал скорости $\tilde{\psi}$ в любой момент времени t

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0 - c^2 \int_0^t s dt.$$

Дифференцируя последнее выражение два раза по t , получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Подставляя выражение (1.11) в уравнение (1.8), будем иметь

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{\psi} = -\Delta \tilde{\psi}. \quad (1.13)$$

Из уравнений (1.12) и (1.13) приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{\psi}, \quad (1.14)$$

которое описывает процесс распространения звука в идеальной жидкости.

Отметим, что знание потенциала $\tilde{\psi}$ достаточно для определения всего процесса движения жидкости в случае малых возмущений, так как

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \tilde{\psi}; \quad s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}.$$

В случае установившегося режима колебаний

$$\tilde{\psi} = \psi \exp(-i\omega t). \quad (1.15)$$

где ω – круговая частота; ψ – функция только пространственных координат.

Тогда уравнение (1.14) переходит в уравнение Гельмгольца [13]

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \quad (1.16)$$

где $k = \omega / c$ – волновое число.

Опуская временной множитель $\exp(-i\omega t)$, будем иметь следующие выражения для скорости частиц жидкости и акустического давления

$$\mathbf{v} = \text{grad } \psi, \quad p' = i\rho_0 \omega \psi. \quad (1.17)$$

1.3. Распространение звука в вязкой жидкости

Получим уравнения, описывающие распространение малых возмущений в жидких средах.

Распространение звука в вязкой жидкости описывается полной системой уравнений гидродинамики вязкой жидкости, включающей [17]:

уравнение Навье-Стокса, которое в отсутствии массовых сил имеет вид

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \text{grad } p + \nu' \Delta \mathbf{v} + \left(\xi' + \frac{\nu'}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{v}, \quad (1.18)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (1.19)$$

и уравнение физического состояния, которое, считая распространение звука процессом адиабатическим, можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt}, \quad (1.20)$$

где \mathbf{v} – скорость частиц жидкости; p – давление; ρ – плотность среды; ν' и ξ' – первый и второй динамические коэффициенты вязкости; c – адиабатическая скорость звука в отсутствие вязкости.

Подставляя выражение для $d\rho/dt$ из (1.20) в уравнение (1.19), получим

$$\frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1.21)$$

Положим $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, где p_0 и ρ_0 – равновесные давление и плотность жидкости; p' – акустическое давление; ρ' – изменение плотности в звуковой волне.

Учитывая, что скорость \mathbf{v} и относительные изменения плотности и давления в жидкости малы, уравнения (1.18) и (1.21) запишем в линеаризованном виде

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\text{grad } p' + \nu' \Delta \mathbf{v} + \left(\xi' + \frac{\nu'}{3} \right) \text{grad } \text{div } \mathbf{v}, \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + c^2 \rho_0 \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Рассмотрим однородную изотропную вязкую жидкость. Представим вектор скорости в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi_1 + \text{rot } \Phi_1, \quad (1.23)$$

где Ψ_1 и Φ_1 – скалярный и векторный потенциалы скоростей. При этом на векторный потенциал накладывается дополнительное условие

$$\text{div } \Phi_1 = 0.$$

Тогда система уравнений (1.22) примет вид

$$\begin{aligned} p' &= -\rho_0 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \rho_0 \left(\xi + \frac{4}{3} \nu \right) \Delta \Psi_1, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \nu \Delta \Phi_1 &= 0, \\ \frac{\partial p'}{\partial t} &= -\rho_0 c^2 \Delta \Psi_1, \end{aligned}$$

где $\nu = \nu' / \rho_0$ и $\xi = \xi' / \rho_0$ – первый и второй кинематические коэффициенты вязкости.

Для установившегося режима движения с временным множителем $\exp(-i\omega t)$ последняя система приводится к системе волновых уравнений Гельмгольца

$$\Delta\Psi_1 + k_1^2\Psi_1 = 0, \quad (1.24)$$

$$\Delta\Phi_1 + \kappa^2\Phi_1 = 0, \quad (1.25)$$

где ω – круговая частота колебаний; k_1 и κ – волновые числа продольных и вязких волн, определяемые по формулам

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2[1 - i\omega c^{-2}(\xi + 4\nu/3)]}, \quad \kappa^2 = i\omega/\nu. \quad (1.26)$$

Если решения уравнений (1.24) и (1.25) известны, то скорость частиц жидкости определяется по формуле (1.23), а давление – по формуле

$$p' = i\omega\rho_0 \left[1 + i\frac{k_1^2}{\omega} \left(\xi + \frac{\nu}{3} \right) \right] \Psi_1. \quad (1.27)$$

В дальнейшем будем считать, что коэффициенты вязкости являются малыми величинами и выполняются соотношения

$$\frac{\omega\nu}{c^2} \ll 1, \quad \frac{\omega\xi}{c^2} \ll 1. \quad (1.28)$$

Тогда выражения (1.26) и (1.27) упрощаются и принимают вид

$$k_1 \approx \frac{\omega}{c}, \quad \kappa = \beta(1 + i), \quad \beta = \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2}, \quad p' \approx i\omega\rho_0\Psi_1.$$

Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать волны двух типов: продольные и поперечные (вязкие). Продольные волны описываются решениями уравнения (1.24). Распространение продольных волн в вязкой жидкости сопровождается относительно малым поглощением. Вязкие волны являются быстрозатухающими и существуют лишь в тонком вязком пограничном слое толщиной β^{-1} вблизи поверхности твердого тела. Появление вязких волн приводит к существенному увеличению диссипации энергии падающей звуковой волны.

Компоненты тензора напряжений в вязкой жидкости определяются по формуле [17]

$$\sigma_{ij} = -p' \delta_{ij} + \sigma_{ij}', \quad (1.29)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, σ_{ij}' – компоненты вязкого тензора напряжений, определяемые по формуле

$$\sigma_{ij}' = \left(\xi' - \frac{2}{3} \nu' \right) \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu' \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.30)$$

Если вязкостью можно пренебречь и считать жидкость идеальной ($\xi' = \nu' = 0$), то система уравнений для малых возмущений в идеальной сжимаемой жидкости приводится к одному скалярному уравнению Гельмгольца (1.24).

1.4. Волновые поля в однородных и неоднородных упругих средах

1.4.1. Волновые поля в однородной упругой среде

Для изучения взаимодействия звуковых волн с упругими телами рассмотрим уравнения, описывающие распространение малых возмущений в упругих телах.

Сначала рассмотрим однородную изотропную упругую среду. Такая среда характеризуется плотностью ρ_0 и двумя упругими постоянными Ламе λ_0 , μ_0 . Смещение любой точки среды характеризуется вектором \mathbf{u}^0 .

В прямоугольной системе координат компоненты тензора малых деформаций выражаются через компоненты вектора смещения u_x^0 , u_y^0 , u_z^0 следующим образом [43]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_x^0}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial u_y^0}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz}^0 = \frac{\partial u_z^0}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{yz}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y^0}{\partial z} + \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \right); \quad \varepsilon_{xz}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial z} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука) следующим образом [76]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^0 &= \lambda_0 (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0) + 2\mu_0 \varepsilon_{xx}^0; & \sigma_{xy} &= 2\mu_0 \varepsilon_{xy}^0; \\
\sigma_{yy}^0 &= \lambda_0 (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0) + 2\mu_0 \varepsilon_{yy}^0; & \sigma_{yz} &= 2\mu_0 \varepsilon_{yz}^0; \\
\sigma_{zz}^0 &= \lambda_0 (\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{yy}^0 + \varepsilon_{zz}^0) + 2\mu_0 \varepsilon_{zz}^0; & \sigma_{xz} &= 2\mu_0 \varepsilon_{xz}^0.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

В случае однородной изотропной упругой среды общие уравнения движения сплошной среды при отсутствии массовых сил приводятся к уравнению Ламе [50]

$$\mu_0 \Delta \mathbf{u}^0 + (\lambda_0 + \mu_0) \text{grad} (\text{div} \mathbf{u}^0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^0}{\partial t^2}. \tag{1.33}$$

Произвольное векторное поле может быть представлено в виде суммы безвихревого и соленоидального полей [18]

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_l^0 + \mathbf{u}_\tau^0,$$

где $\text{rot} \mathbf{u}_l^0 = 0$, $\text{div} \mathbf{u}_\tau^0 = 0$.

Поэтому представим вектор смещения \mathbf{u}^0 в виде

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad} \Psi + \text{rot} \Phi, \tag{1.34}$$

где функции Ψ и Φ являются соответственно скалярным и векторным потенциалами поля смещения.

Тогда уравнение (1.33) распадается на два волновых уравнения [7, 50]

$$\Delta \Psi + \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \tag{1.35}$$

$$\Delta \Phi + \frac{1}{c_\tau^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{1.36}$$

Таким образом, в упругой однородной изотропной среде могут существовать продольные волны, являющиеся решениями уравнения (1.35) и распространяющиеся со скоростью c_l , и поперечные волны, являющиеся решениями уравнения (1.36) и распространяющиеся со скоростью c_τ . При

этом скорость продольных волн $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0) / \rho_0}$ всегда больше, чем скорость поперечных волн $c_\tau = \sqrt{\mu_0 / \rho_0}$.

Для установившегося режима движения частиц упругой среды (с временным множителем $\exp(-i\omega t)$) уравнения (1.35) и (1.36) переходят в уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad \Delta\Phi + k_\tau^2\Phi = 0, \quad (1.37)$$

где $k_l = \omega / c_l$ – волновое число продольных упругих волн; $k_\tau = \omega / c_\tau$ – волновое число поперечных упругих волн.

Чтобы баланс в числе уравнений и неизвестных сохранялся с учетом особенностей Φ можно использовать дополнительное условие.

$$\operatorname{div}\Phi = 0.$$

1.4.2. Волновые поля в неоднородной упругой среде

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение малых возмущений в неоднородных изотропных упругих телах. В качестве модели движения частиц рассматривается модель линейной неоднородной упругой среды.

Распространение упругих волн в неоднородных изотропных упругих средах описываются общими уравнениям движения сплошной среды, которые при отсутствии массовых сил записываются в виде [43]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

где u_x, u_y, u_z – компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородной упругой среде; ρ – плотность неоднородной упругой среды.

В случае неоднородной изотропной упругой среды связь между компонентами тензора деформаций ε_{ij} и компонентами вектора смещения \mathbf{u} такая же, как и в случае однородной упругой среды (1.31), а связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и компонентами тензора напряжений ε_{ij} описывается соотношениями вида (1.32), в которых упругие постоянные μ_0, λ_0 следует заменить модулями упругости μ и λ . Модули упругости μ, λ и плотность ρ являются функциями пространственных переменных.

1.5. Граничные условия

Полная математическую модель для решения задач динамического взаимодействия деформируемых твердых тел с акустической средой включает уравнения движения жидкости и упругой среды, а также соответствующие граничные условия.

В настоящей работе предметом исследования являются процессы отражения и прохождения звуковых волн через однородные упругие плоские пластины с неоднородными упругими покрытиями, которые граничат с однородными идеальными и вязкими жидкостями.

Граничные условия на поверхности Γ , соприкасающейся с идеальной жидкостью, заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$v_n |_{\Gamma} = -i\omega u_n |_{\Gamma}, \quad \sigma_{nn} |_{\Gamma} = -p' |_{\Gamma}, \quad \sigma_{n\tau} |_{\Gamma} = 0.$$

На поверхностях, соприкасающихся с вязкими жидкостями, граничные условия заключаются в равенстве скоростей частиц упругой среды и жидкости, непрерывности нормальных и тангенциальных напряжений:

$$\mathbf{v} |_{\Gamma} = -i\omega \mathbf{u} |_{\Gamma}, \quad \sigma_{nn} |_{\Gamma} = \sigma_{1nn} |_{\Gamma}, \quad \sigma_{n\tau} |_{\Gamma} = \sigma_{1n\tau} |_{\Gamma}.$$

На границе раздела двух упругих сред должны быть непрерывны

векторы смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\mathbf{u}^0|_{\Gamma} = \mathbf{u}|_{\Gamma}, \quad \sigma_{nn}^0|_{\Gamma} = \sigma_{nn}|_{\Gamma}, \quad \sigma_{n\tau}^0|_{\Gamma} = \sigma_{n\tau}|_{\Gamma}.$$

Глава 2. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

В главе 2 представлено аналитическое решение задач об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую однородную пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием в случае, когда покрытие нанесено на разные стороны пластины. В итоге выявлены особенности отражения и прохождения звука при разных законах неоднородности материала покрытия.

Результаты исследований, представленные во второй главе, изложены в работах [37, 63, 64].

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную бесконечно протяженную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h . Мы полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты z : $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, $\rho = \rho(z)$. При этом декартова система прямоугольных координат x, y, z выбрана таким образом, что ось x лежит в плоскости, которая разделяет однородный слой и неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины. Рассмотрим два случая расположения покрытия на пластине: когда покрытие расположено со стороны падения плоской волны (рис. 2.1 *a*) и с противоположной стороны (рис. 2.1 *b*). Пластина с покрытием помещена между двумя полупространствами, заполненными идеальными однородными жидкостями и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Данная пластина имеет покрытие в виде, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

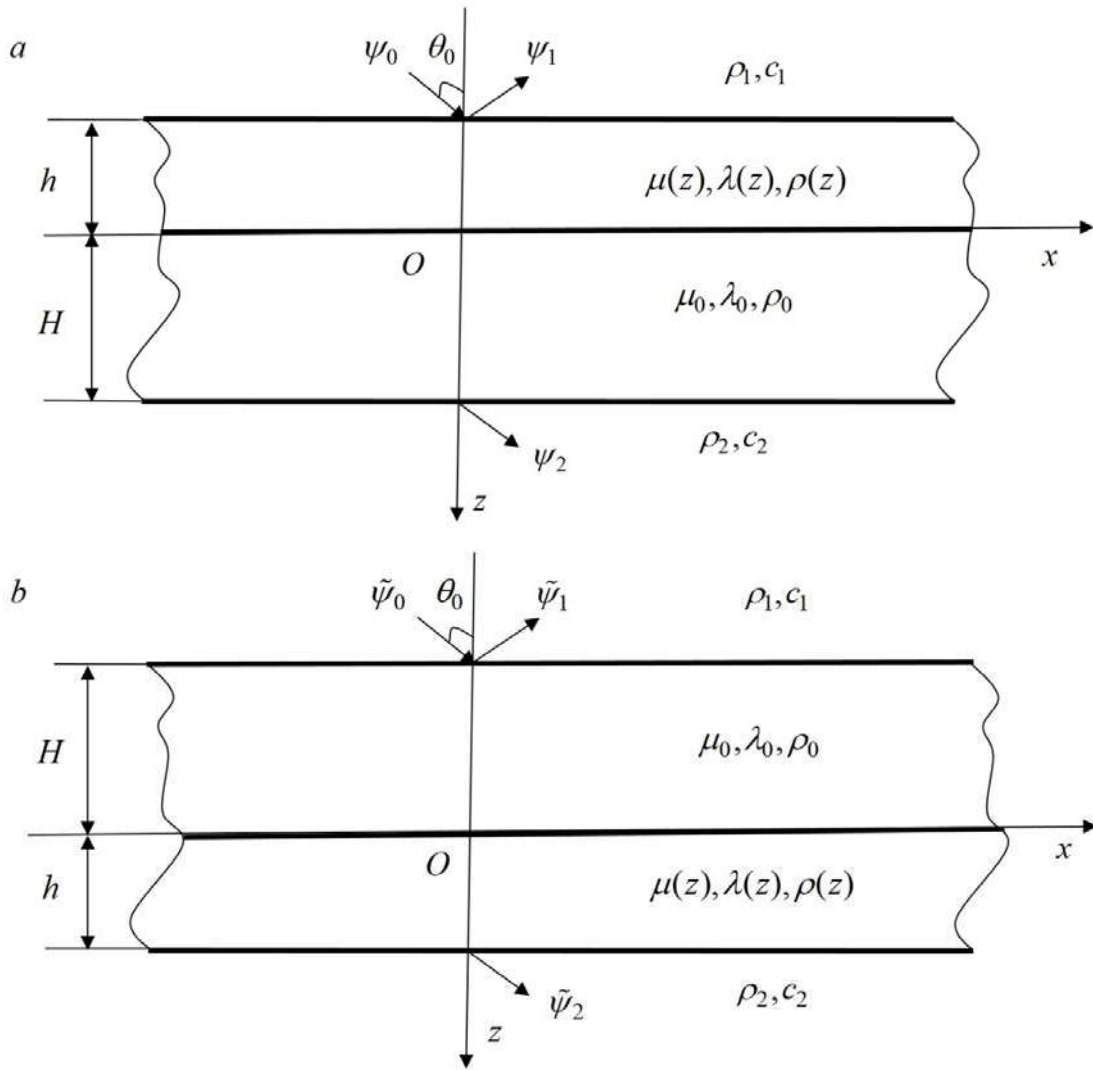


Рис. 2.1. Геометрия задачи

Пусть на пластину с покрытием падает под произвольным углом плоская гармоническая звуковая волна, волновой вектор \mathbf{k}_1 которой лежит в плоскости x, z .

Потенциал скорости падающей волны записывается в виде

$$\psi_0 = A_0 \exp \{i[k_{1x}x + k_{1z}(z + h) - \omega t]\}, \quad (2.1)$$

для случая, изображенного на рис. 2.1 *a*, и в виде

$$\tilde{\psi}_0 = A_0 \exp \{i[k_{1x}x + k_{1z}(z + H) - \omega t]\}, \quad (2.2)$$

для случая, изображенного на рис. 2.1 *b*.

Здесь A_0 – амплитуда волны; $k_{1x} = k_1 \sin \theta_0$, $k_{1z} = k_1 \cos \theta_0$ – проекции вол-

нового вектора \mathbf{k}_1 на оси координат x и z соответственно; $k_1 = \omega/c_1$ – волновое число в верхнем полупространстве; ω – круговая частота; θ_0 – угол падения плоской волны, составляемый нормалью к фронту волны с осью z .

Величины, относящиеся ко второму случаю, будем обозначать символом \sim . Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

Теперь определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием волны. Таким образом, определим особенности прохождения звука для различных законов неоднородности материала покрытия при расположении покрытия на разных сторонах пластины.

2.2. Аналитическое решение

Поскольку волновой вектор падающей волны \mathbf{k}_1 лежит в плоскости x, z и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты y , а неоднородность материала покрытия проявляется лишь по оси z , то возбужденные волновые поля в жидкостях, в упругом однородном слое и в неоднородном покрытии не будут зависеть от координаты y .

Потенциалы скорости отраженной от пластины ψ_1 и прошедшей через нее ψ_2 волн являются решениями уравнений Гельмгольца

$$\Delta\psi_j + k_j^2\psi_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (2.3)$$

где $k_2 = \omega/c_2$ – волновое число в нижнем полупространстве.

Скорости частиц жидкости \mathbf{v}_j и акустические давления p_j в верхнем ($j = 1$) и нижнем ($j = 2$) полупространствах определяются по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \text{grad}(\psi_0 + \psi_1), \quad \mathbf{v}_2 = \text{grad} \psi_2, \quad p_1 = i\rho_1\omega(\psi_0 + \psi_1), \quad p_2 = i\rho_2\omega \psi_2. \quad (2.4)$$

Распространение малых возмущений в однородной изотропной пластине описывается двумя волновыми уравнениями для продольных и поперечных волн, которые в случае установившихся колебаний имеют вид

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad (2.5)$$

$$\Delta\Phi + k_\tau^2\Phi = 0, \quad (2.6)$$

где Ψ и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega / c_l$ и $k_\tau = \omega / c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн;

$c_l = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}$ и $c_\tau = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}$ – скорости продольных и поперечных волн со-

ответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad}\Psi + \text{rot}\Phi \quad (\text{div}\Phi = 0). \quad (2.7)$$

Так как рассматриваемая задача является двумерной, то $\Phi = \Phi(x, z)\mathbf{e}_y$, где \mathbf{e}_y – единичный вектор оси y . Тогда векторное уравнение (2.6) сведется к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции $\Phi(x, z)$

$$\Delta\Phi + k_\tau^2\Phi = 0. \quad (2.8)$$

В однородной пластине компоненты тензора напряжений σ_{ij}^0 связаны с компонентами тензора деформаций ε_{ij}^0 соотношениями [1, 18, 43]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0 &= \lambda_0(\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{zz}^0) + 2\mu_0\varepsilon_{xx}^0, \\ \sigma_{zz}^0 &= \lambda_0(\varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{zz}^0) + 2\mu_0\varepsilon_{zz}^0, \quad \sigma_{xz}^0 = 2\mu_0\varepsilon_{xz}^0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора смещения соотношениями

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_x^0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz}^0 = \frac{\partial u_z^0}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial z} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right). \quad (2.10)$$

С учетом (2.7) и (2.9), (2.10) физические компоненты вектора смещения \mathbf{u}^0 и компоненты тензора напряжений σ_{ij}^0 через функции Ψ и Φ

записываются в виде

$$u_x^0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad u_z^0 = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0 &= (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \lambda_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - 2\mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \\ \sigma_{zz}^0 &= \lambda_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2\mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{xz}^0 = 2\mu_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} + \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды, которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\omega^2 \rho(z) u_x, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\omega^2 \rho(z) u_z. \quad (2.13)$$

В неоднородном упругом покрытии связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и компонентами тензора деформаций ε_{ij} определяется соотношениями (2.9), а связь между ε_{ij} и составляющими вектора смещения \mathbf{u} – соотношениями (2.13). Но в соотношениях (2.9) следует заменить упругие постоянные λ_0 и μ_0 на функции $\lambda(z)$ и $\mu(z)$.

Тогда компонентами тензора напряжений выражаются через составляющие вектора смещения следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(z) \frac{\partial u_z}{\partial z} + [\lambda(z) + 2\mu(z)] \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda(z) \frac{\partial u_x}{\partial x} + [\lambda(z) + 2\mu(z)] \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = \mu(z) \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

На упругих поверхностях, соприкасающихся с жидкостями, граничные условия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, отсутствию на этих поверхностях касательных

напряжений, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления.

В случае, когда покрытие граничит с жидкостью в верхнем полупространстве, имеем

при $z = -h$:

$$-i\omega u_z = v_{1n}, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p_1; \quad (2.15)$$

при $z = H$:

$$-i\omega u_z^0 = v_{2n}, \quad \sigma_{xz}^0 = 0, \quad \sigma_{zz}^0 = -p_2. \quad (2.16)$$

В случае, когда покрытие граничит со средой в нижнем полупространстве, имеем

при $z = -H$:

$$-i\omega u_z^0 = v_{1n}, \quad \sigma_{xz}^0 = 0, \quad \sigma_{zz}^0 = -p_1; \quad (2.17)$$

при $z = h$:

$$-i\omega u_z = v_{1n}, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p_2. \quad (2.18)$$

Здесь $v_{1n} = \partial(\psi_0 + \psi_1) / \partial z$ и $v_{2n} = \partial\psi_2 / \partial z$ – нормальные компоненты вектора скорости в верхнем и нижнем полупространствах.

На поверхности $z = 0$ разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$u_x = u_x^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0. \quad (2.19)$$

Для исследования особенностей прохождения звука через пластину с разным расположением покрытия рассмотрим отдельно каждый случай.

Решение задачи, когда неоднородное покрытие расположено на верхней поверхности пластины со стороны падения плоской волны (рис. 2.1 *a*), приведено в работе [75].

Согласно результатам этой работы потенциалы скоростей отраженной от слоя и прошедшей через слой волн ψ_1 и ψ_2 записываются в виде

$$\psi_1 = A_1 \exp\{i[k_{1x}x - k_{1z}(z + h)]\}, \quad (2.20)$$

$$\psi_2 = A_2 \exp\{i[k_{1x}x + k_{2z}(z - H)]\}, \quad (2.21)$$

а потенциалы смещения Ψ и Φ имеют вид

$$\Psi = B_1 \exp[i(k_{1x}x + k_{1z}z)] + B_2 \exp[i(k_{1x}x - k_{1z}z)], \quad (2.22)$$

$$\Phi = C_1 \exp[i(k_{1x}x + k_{\tau z}z)] + C_2 \exp[i(k_{1x}x - k_{\tau z}z)], \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + (\omega / k_{1z})U_2(-h), \\ A_2 &= -(i\omega / k_{2z})[k_{1z}(B_1 e_{1l} - B_2 e_{2l}) + k_{1x}(C_1 e_{1\tau} + C_2 e_{2\tau})], \\ B_j &= \beta_{1j}U_1(0) + \beta_{2j}U_2(0), \quad C_j = \gamma_{1j}U_1(0) + \gamma_{2j}U_2(0), \\ k_{2z} &= \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2}, \quad k_{1z} = \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2}, \quad k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{1x}^2}, \\ e_{1l} &= e^{ik_{1z}H}, \quad e_{2l} = e^{-ik_{1z}H}, \quad e_{1\tau} = e^{ik_{\tau z}H}, \quad e_{2\tau} = e^{-ik_{\tau z}H}, \\ \beta_{11} &= k_{1x}t_2w_1, \quad \beta_{21} = k_{\tau z}r_2w_1, \quad \beta_{12} = k_{1x}t_1w_1, \quad \beta_{22} = -k_{\tau z}\eta w_1, \\ \gamma_{11} &= -k_{1z}q_2w_2, \quad \gamma_{21} = k_{1x}g_2w_2, \quad \gamma_{12} = k_{1z}q_1w_2, \quad \gamma_{22} = -k_{1x}g_1w_2, \\ w_1 &= \frac{-4i\mu_0s_3}{r_1t_2 + r_2t_1}, \quad w_2 = \frac{4is_1}{g_1q_2 - g_2q_1}, \\ g_j &= (-1)^j 4s_1k_{1z}k_{\tau z} - (s_{7-j}e_{1l} + s_{9-j}e_{2l})e_{j\tau}, \\ q_j &= 4s_1k_{1x}^2 + (s_{7-j}e_{1l} - s_{9-j}e_{2l})e_{j\tau}, \\ t_j &= 4\mu_0s_3k_{1z}k_{\tau z} + (s_{6+(-1)^j}e_{2\tau} - s_{7+(-1)^j}e_{1\tau})e_{jl}, \\ r_j &= 4\mu_0k_{1x}^2s_3 + (-1)^j (s_{6+(-1)^j}e_{2\tau} + s_{7+(-1)^j}e_{1\tau})e_{jl}, \\ s_1 &= (\lambda_0 + 2\mu_0)k_{1z}^2 + \lambda_0k_{1x}^2, \quad s_2 = 2\mu_0k_{1x}k_{\tau z}, \quad s_3 = k_{1x}^2 - k_{\tau z}^2, \\ s_4 &= \frac{\omega^2\rho_2}{k_{2z}}, \quad s_{4+j} = s_3(s_4k_{1z} - s_1) - 2k_{1x}k_{1z}(s_4k_{1x} - (-1)^j s_2), \\ s_{6+j} &= s_3(s_4k_{1z} + s_1) - 2k_{1x}k_{1z}(s_4k_{1x} - (-1)^j s_2) \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Составляющие вектора смещения \mathbf{u} определяются выражениями

$$u_x = U_1(z) \exp(ik_{1x}x), \quad u_z = U_2(z) \exp(ik_{1x}x), \quad (2.25)$$

где функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ являются решениями краевой задачи

$$\mathbf{A}U'' + \mathbf{B}U' + \mathbf{C}U = 0, \quad \mathbf{U} = (U_1, U_2)^T, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}U' + \mathbf{E}U)_{z=-h} &= \mathbf{D}, \\ (\mathbf{A}U' + \mathbf{F}U)_{z=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu' & ik_{1x}(\lambda + \mu) \\ ik_{1x}(\lambda + \mu) & \lambda' + 2\mu' \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -k_{1x}^2(\lambda + \mu) + \omega^2\rho & ik_{1x}\mu' \\ ik_{1x}\lambda' & -ik_{1x}^2\mu + \omega^2\rho \end{pmatrix}, \\ \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} 0 & ik_{1x}\mu \\ ik_{1x}\lambda & i\omega^2\rho_1 / k_{1z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & ik_{1x}\mu + f_{12} \\ ik_{1x}\lambda + f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D} &= (0; -2i\rho_1\omega A_0)^T, \end{aligned}$$

$$f_{1j} = \mu_0[2k_{1x}k_{1z}(\beta_{j1} - \beta_{j2}) + s_3(\gamma_{j1} + \gamma_{j2})],$$

$$f_{2j} = s_1(\beta_{j1} + \beta_{j2}) + s_2(\gamma_{j1} - \gamma_{j2}) \quad (j=1, 2).$$

Здесь и далее штрихи обозначают производные по координате z .

Теперь рассмотрим случай, когда неоднородное покрытие расположено на нижней поверхности пластины, то есть со стороны противоположной падению плоской волны (рис. 2.1 *b*). Элементы решения этой задачи будем обозначать символом «тильда».

Потенциалы скорости $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$, являющиеся решениями уравнений (2.3), будем искать в виде

$$\tilde{\psi}_1 = \tilde{A}_1 \exp\{i[k_{1x}x - k_{1z}(z + H)]\}, \quad (2.28)$$

$$\tilde{\psi}_2 = \tilde{A}_2 \exp\{i[k_{2x}x + k_{2z}(z - h)]\}, \quad (2.29)$$

где k_{2x} , k_{2z} – проекции на оси x и z волнового вектора \mathbf{k}_2 прошедшей

волны; $k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2}$. При этом согласно закону Снеллиуса [4] $k_{1x} = k_{2x}$.

Функции $\tilde{\Psi}$ и $\tilde{\Phi}$, являющиеся решениями уравнений (2.5) и (2.8) будем искать в виде

$$\tilde{\Psi} = \tilde{B}_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{lz}z)] + \tilde{B}_2 \exp[i(k_{lx}x - k_{lz}z)], \quad (2.30)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{C}_1 \exp[i(k_{tx}x + k_{tz}z)] + \tilde{C}_2 \exp[i(k_{tx}x - k_{tz}z)], \quad (2.31)$$

где $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2}$; $k_{tz} = \sqrt{k_t^2 - k_{tx}^2}$; $k_{lx} = k_{tx} = k_{1x}$ (согласно закону Снеллиуса).

Согласно закону Снеллиуса зависимость составляющих вектора смещения $\tilde{\mathbf{u}}$ от координаты x будет иметь вид $\exp(ik_{1x}x)$. Поэтому эти составляющие вектора смещения $\tilde{\mathbf{u}}$ будем искать в виде

$$\tilde{u}_x = \tilde{U}_1(z) \exp(ik_{1x}x), \quad \tilde{u}_z = \tilde{U}_2(z) \exp(ik_{1x}x). \quad (2.32)$$

Подставляя выражения (2.32) в уравнения (2.13) с учетом (2.14), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $\tilde{U}_1(z)$ и $\tilde{U}_2(z)$

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}}'' + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{U}}' + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{U}} = 0, \quad (2.33)$$

где $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)^T$.

Коэффициенты \tilde{A}_j , \tilde{B}_j , \tilde{C}_j ($j = 1, 2$) в выражениях (2.28) – (2.31) и четыре краевых условия для нахождения частного решения системы (2.33) подлежат определению из граничных условий.

Подставим выражения (2.28) – (2.31) в граничные условия. В результате получим выражения для коэффициентов \tilde{A}_j , \tilde{B}_j , \tilde{C}_j ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_0 + (i\omega / k_{1z})[k_{lz}(\tilde{B}_1\tilde{e}_{1l} - \tilde{B}_2\tilde{e}_{2l}) + k_{1x}(\tilde{C}_1\tilde{e}_{1\tau} + \tilde{C}_2\tilde{e}_{2\tau})], \\ \tilde{A}_2 &= -(\omega / k_{2z})\tilde{U}_2(h), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\tilde{B}_j = \tilde{\beta}_{1j}\tilde{U}_1(0) + \tilde{\beta}_{2j}\tilde{U}_2(0) + \tilde{\beta}_{3j},$$

$$\tilde{C}_j = \tilde{\gamma}_{1j}\tilde{U}_1(0) + \tilde{\gamma}_{2j}\tilde{U}_2(0) + \tilde{\gamma}_{3j} \quad (j = 1, 2),$$

и четыре условия для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (2.33)

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}}' + \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{U}})_{z=0} &= \tilde{\mathbf{D}}, \\ (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}}' + \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{U}})_{z=h} &= 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{1l} &= e^{-ik_{lz}H}, \quad \tilde{e}_{2l} = e^{ik_{lz}H}, \quad \tilde{e}_{1\tau} = e^{-ik_{\tau z}H}, \quad \tilde{e}_{2\tau} = e^{ik_{\tau z}H}, \\ \tilde{\beta}_{11} &= -\tilde{\beta}_{12} + [k_{\tau z}(\tilde{\gamma}_{11} - \tilde{\gamma}_{12}) - i] / k_{1x}, \\ \tilde{\beta}_{21} &= -\tilde{\beta}_{22} + [k_{\tau z}(\tilde{\gamma}_{21} - \tilde{\gamma}_{22})] / k_{1x}, \quad \tilde{\beta}_{31} = -\tilde{\beta}_{32} + [k_{\tau z}(\tilde{\gamma}_{31} - \tilde{\gamma}_{32})] / k_{1x}, \\ \tilde{\beta}_{12} &= [(k_{\tau z}k_{lz} + k_{1x}^2)\tilde{\gamma}_{11} - (k_{\tau z}k_{lz} - k_{1x}^2)\tilde{\gamma}_{12} - ik_{lz}] / (2k_{lz}k_{1x}), \\ \tilde{\beta}_{22} &= [(k_{\tau z}k_{lz} + k_{1x}^2)\tilde{\gamma}_{21} - (k_{\tau z}k_{lz} - k_{1x}^2)\tilde{\gamma}_{22} + ik_{1x}] / (2k_{lz}k_{1x}), \\ \tilde{\beta}_{32} &= [(k_{\tau z}k_{lz} + k_{1x}^2)\tilde{\gamma}_{31} - (k_{\tau z}k_{lz} - k_{1x}^2)\tilde{\gamma}_{32} - ik_{lz}] / (2k_{lz}k_{1x}), \\ \tilde{\gamma}_{11} &= [ik_{lz}(\tilde{e}_{1l} - \tilde{e}_{2l}) - \tilde{r}_2\tilde{\gamma}_{12}] / \tilde{r}_1, \quad \tilde{\gamma}_{21} = [ik_{lz}(\tilde{e}_{1l} + \tilde{e}_{2l}) - \tilde{r}_2\tilde{\gamma}_{22}] / \tilde{r}_1, \\ \tilde{\gamma}_{31} &= (-\tilde{r}_2\tilde{\gamma}_{32}) / \tilde{r}_1, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \tilde{n}_1 / (\tilde{m}_1\tilde{r}_2 - \tilde{m}_2\tilde{r}_1), \\ \tilde{\gamma}_{22} &= \tilde{n}_2 / (\tilde{m}_1\tilde{r}_2 - \tilde{m}_2\tilde{r}_1), \quad \tilde{\gamma}_{32} = \tilde{n}_3 / (\tilde{m}_1\tilde{r}_2 - \tilde{m}_2\tilde{r}_1), \\ \tilde{n}_1 &= ik_{lz}\tilde{m}_1(\tilde{e}_{1l} - \tilde{e}_{2l}) - \tilde{m}_3\tilde{r}_1, \quad \tilde{n}_2 = ik_{1x}\tilde{m}_1(\tilde{e}_{1l} + \tilde{e}_{2l}), \quad \tilde{n}_3 = -\tilde{m}_4\tilde{r}_1, \\ \tilde{m}_j &= (-1)^j 2\tilde{s}_1\tilde{e}_{2l}[2k_{\tau z}k_{lz}\tilde{e}_{1l} + (-1)^{j+1}\tilde{s}_3] + \tilde{t}_j(\tilde{e}_{1l} + \tilde{e}_{2l}), \\ \tilde{m}_3 &= -4k_{lz}\tilde{s}_1\tilde{e}_{1l}\tilde{e}_{2l}, \quad \tilde{m}_4 = -4\omega\rho_1 A_0 k_{lz}(\tilde{e}_{1l} + \tilde{e}_{2l}), \\ \tilde{r}_j &= (-1)^{j+1} k_{\tau z}k_{lz}(\tilde{e}_{1l} - \tilde{e}_{2l}) - k_{1x}^2(\tilde{e}_{1l} + \tilde{e}_{2l}) + \tilde{s}_3\tilde{e}_{j\tau}, \\ \tilde{t}_j &= \tilde{e}_{j\tau} \{ \tilde{s}_3(\tilde{s}_1 + \tilde{s}_4 k_{lz}) - 2k_{1x}k_{lz}[(-1)^{j+1}\tilde{s}_2 + \tilde{s}_4 k_{1x}] \} \quad (j = 1, 2), \\ \tilde{s}_1 &= \lambda_0 k_{1x}^2 + (\lambda_0 + 2\mu_0)k_{lz}^2, \quad \tilde{s}_2 = 2\mu_0 k_{1x}k_{\tau z}, \\ \tilde{s}_3 &= k_{1x}^2 - k_{\tau z}^2, \quad \tilde{s}_4 = \omega^2 \rho_1 / k_{1z}, \\ \tilde{\mathbf{D}} &= (\tilde{e}_{13}; \tilde{e}_{23})^T, \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_{11} & \tilde{e}_{12} + ik_{1x}\mu \\ \tilde{e}_{21} + ik_{1x}\lambda & \tilde{e}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 0 & ik_{1x}\mu \\ ik_{1x}\lambda & -i\omega^2\rho_2 / k_{2z} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_{1j} = \mu_0[2k_{1x}k_{1z}(\tilde{\beta}_{j1} - \tilde{\beta}_{j2}) + \tilde{s}_3(\tilde{\gamma}_{j1} + \tilde{\gamma}_{j2})],$$

$$\tilde{e}_{2j} = \tilde{s}_1(\tilde{\beta}_{j1} + \tilde{\beta}_{j2}) + \tilde{s}_2(\tilde{\gamma}_{j1} - \tilde{\gamma}_{j2}) \quad (j = 1, 2),$$

$$\tilde{e}_{13} = -\mu_0[2k_{1x}k_{1z}(\tilde{\beta}_{31} - \tilde{\beta}_{32}) + \tilde{s}_3(\tilde{\gamma}_{31} + \tilde{\gamma}_{32})],$$

$$\tilde{e}_{23} = -\tilde{s}_1(\tilde{\beta}_{31} + \tilde{\beta}_{32}) - \tilde{s}_2(\tilde{\gamma}_{31} - \tilde{\gamma}_{32}).$$

Из формул (2.24) и (2.34) следует, что коэффициенты отражения A_1 , \tilde{A}_1 и коэффициенты прозрачности A_2 , \tilde{A}_2 могут быть вычислены лишь после определения значений функции $U_1(z)$, $U_2(z)$ и $\tilde{U}_1(z)$, $\tilde{U}_2(z)$ на поверхностях неоднородного слоя, то есть после решения краевых задач (2.26), (2.27) и (2.33), (2.35).

2.3. Определение поля смещений в неоднородном покрытии

Краевые задачи (2.26), (2.27) и (2.33), (2.35) могут быть решены различными методами. Получим аналитические решения краевых задач, воспользовавшись методом степенных рядов [60].

Задачи (2.26), (2.27) и (2.33), (2.35) являются однотипными. Поэтому запишем их в виде

$$\mathbf{A}\mathbf{U}'' + \mathbf{B}\mathbf{U}' + \mathbf{C}\mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U} = (U_1, U_2)^T, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{E}\mathbf{U})_{z=z_1} &= \mathbf{D}, \\ (\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{F}\mathbf{U})_{z=z_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Решение системы (2.36) будем искать в виде

$$U_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{(s)}(z-a)^s \quad (n = 1, 2), \quad (2.38)$$

где a – некоторая точка отрезка $[z_1, z_2]$.

Если на отрезке $[z_1, z_2]$ функция $\rho(z)$ является дифференцируемой, а функции $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ имеют непрерывные производные до второго по-

рядка включительно, то все коэффициенты системы (2.36) будут представлять собой функции, непрерывные вместе со своими первыми производными на $[z_1, z_2]$. Тогда ряды (2.38) будут сходящимися на $[z_1, z_2]$ [60].

Предположим, что функции $\rho(z)$, $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ имеют вид многочленов относительно переменной z (или аппроксимированы такими многочленами):

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^R \rho^{(k)}(z-a)^k, \quad \lambda(z) = \sum_{k=0}^R \lambda^{(k)}(z-a)^k, \quad \mu(z) = \sum_{k=0}^R \mu^{(k)}(z-a)^k, \quad (2.39)$$

где R – степень многочленов.

Обозначим элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} через A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} соответственно. Запишем систему (2.36) в координатной форме

$$\sum_{n=1}^2 (A_{mn}U_n'' + B_{mn}U_n' + C_{mn}U_n) = 0 \quad (m = 1, 2). \quad (2.40)$$

Так как элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} выражаются через модули упругости и плотность материала покрытия, то с учетом (2.39) получаем

$$A_{mn} = \sum_{k=0}^R A_{mn}^{(k)}(z-a)^k, \quad B_{mn} = \sum_{k=0}^R B_{mn}^{(k)}(z-a)^k, \quad C_{mn} = \sum_{k=0}^R C_{mn}^{(k)}(z-a)^k, \quad (2.41)$$

где коэффициенты $A_{mn}^{(k)}$, $B_{mn}^{(k)}$, $C_{mn}^{(k)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11}^{(k)} &= \mu^{(k)}, & A_{12}^{(k)} &= A_{21}^{(k)} = 0, & A_{22}^{(k)} &= \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}, \\ B_{11}^{(k)} &= (k+1)\mu^{(k+1)}, & B_{12}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} = ik_{1x}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}), \\ B_{22}^{(k)} &= (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)}), \\ C_{11}^{(k)} &= -k_{1x}^2(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}) + \omega^2\rho^{(k)}, & C_{12}^{(k)} &= ik_{1x}(k+1)\mu^{(k+1)}, \\ C_{21}^{(k)} &= ik_{1x}(k+1)\lambda^{(k+1)}, & C_{22}^{(k)} &= -k_{1x}^2\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}. \end{aligned}$$

Производные U_n' и U_n'' согласно (2.38) запишем в виде

$$U_n' = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)U_n^{(s+1)}(z-a)^s, \quad U_n'' = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)(s+2)U_n^{(s+2)}(z-a)^s. \quad (2.42)$$

С учетом разложений (2.38), (2.41), и (2.42) будем иметь

$$A_{mn}U_n' = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{R_1} (s+1-k)(s+2-k)A_{mn}^{(k)}U_n^{(s+2-k)} \right) (z-a)^s,$$

$$B_{mn}U_n' = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{R_1} (s+1-k)B_{mn}^{(k)}U_n^{(s+1-k)} \right) (z-a)^s,$$

$$C_{mn}U_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{R_1} C_{mn}^{(k)}U_n^{(s-k)} \right) (z-a)^s,$$

где $R_1 = \min(R, s)$.

Подставляя последние выражения в (2.40) и приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени $(z-a)$, получаем уравнения для определения коэффициентов $U_1^{(s)}$ и $U_2^{(s)}$

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} [(s+1-k)(s+2-k)A_{mn}^{(k)}U_n^{(s+2-k)} + (s+1-k)B_{mn}^{(k)}U_n^{(s+1-k)} + C_{mn}^{(k)}U_n^{(s-k)}] = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2.$$

Выделяя из суммы последнего равенства член с индексом $k=0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 (s+1)(s+2)A_{mn}^{(0)}U_n^{(s+2)} &= \\ &= - \sum_{n=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{mn}^{(k+1)} + B_{mn}^{(k)}]U_n^{(s+1-k)} + C_{mn}^{(k)}U_n^{(s-k)}\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$(m = 1, 2).$$

Составим из (2.43) систему двух уравнений относительно неизвестных $U_1^{(s+2)}$ и $U_2^{(s+2)}$

$$a_{m1}^{(s)}u_1^{(s+2)} + a_{m2}^{(s)}u_2^{(s+2)} = b_m^{(s)} \quad (m = 1, 2), \quad (2.44)$$

где

$$a_{mn}^{(s)} = (s+1)(s+2)A_{mn}^{(0)} \quad (m, n = 1, 2),$$

$$b_m^{(s)} = - \sum_{n=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{ (s+1-k)[(s-k)A_{mn}^{(k+1)} + B_{mn}^{(k)}] u_n^{(s+1-k)} + C_{mn}^{(k)} u_n^{(s-k)} \}.$$

Так как $A_{12}^{(0)} = A_{21}^{(0)} = 0$, то $a_{12}^{(s)} = a_{21}^{(s)} = 0$. Поэтому из (2.44) находим

$$u_m^{(s+2)} = b_m^{(s)} / a_{mm}^{(s)} \quad (m=1,2; s=0,1,\dots). \quad (2.45)$$

Рекуррентные соотношения (2.45) позволяют вычислить все коэффициенты разложений (2.38) за исключением $U_n^{(0)}$ и $U_n^{(1)}$ ($n=1,2$).

Для нахождения этих коэффициентов сведем краевую задачу (2.36), (2.37) к задачам с начальными условиями в точке $z=a$. Найдем четыре линейно независимых решения системы дифференциальных уравнений (2.36). В качестве фундаментальных решений можно выбрать четыре решения задачи Коши $U^l(z) = (U_1^l, U_2^l)^T$ ($l=1,2,3,4$) системы (2.36) с начальными условиями, являющимися линейно независимыми.

Возьмем следующие начальные условия:

$$U^l|_{z=a} = (\delta_{1l}, \delta_{2l})^T, \quad U^{l'}|_{z=a} = (\delta_{3l}, \delta_{4l})^T \quad (l=1,2,3,4), \quad (2.46)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; l – порядковый номер задачи Коши.

Однородность системы (2.36) позволяет представить решение краевой задачи (2.36), (2.37) в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$U = \sum_{l=1}^4 C_l U^l, \quad (2.47)$$

где C_l – постоянные.

Каждую составляющую вектора U^l будем искать в виде (2.38)

$$U_n^l = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)} (z-a)^s \quad (n=1,2). \quad (2.48)$$

Все коэффициенты разложений (2.48) за исключением $U_n^{l(0)}$ и $U_n^{l(1)}$

($n = 1, 2$) вычисляются по формуле (2.45). Получаем

$$U_n^{l(s+2)} = c_n^{l(s)} \quad (n = 1, 2; \quad l = 1, 2, 3, 4; \quad s = 1, 2, \dots), \quad (2.49)$$

где

$$c_n^{l(s)} = -[(s+1)(s+2)A_{mn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + \\ + B_{nq}^{(k)}]U_q^{l(s+1-k)} + C_{nq}^{(k)}U_q^{l(s-k)}\}.$$

Учитывая, что $U_n^l|_{z=a} = U_n^{l(1)}$, из начальных условий (2.46), получаем

$$U_1^{l(0)} = \delta_{1l}, \quad U_2^{l(0)} = \delta_{2l}, \quad U_1^{l(1)} = \delta_{3l}, \quad U_2^{l(1)} = \delta_{4l} \quad (l = 1, 2, 3, 4). \quad (2.50)$$

Подставляя (2.47) в краевые условия (2.37), получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_l ($l = 1, 2, 3, 4$)

$$\sum_{l=1}^4 C_l (\mathbf{A}U^l + \mathbf{E}U^l)|_{z=z_1} = \mathbf{D}, \\ \sum_{l=1}^4 C_l (\mathbf{A}U^l + \mathbf{F}U^l)|_{z=z_2} = 0.$$

Определив из этой системы коэффициенты C_l , согласно (2.47) и (2.48) находим приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.36), (2.37)

$$U_n(z) = \sum_{l=1}^4 C_l \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)}(z-a)^s \quad (n = 1, 2). \quad (2.51)$$

В качестве точки $z = a$ можно взять любую точку отрезка $[z_1, z_2]$. Выберем $a = -h/2$, то есть середину отрезка $[-h, 0]$ для случая, когда покрытие находится сверху пластины (рис. 2.1 *a*), и $a = h/2$, то есть середину отрезка $[0, h]$ для случая, когда покрытие находится снизу пластины (рис. 2.1 *b*).

2.4. Численные исследования

На основе решений рассмотренных задач были проведены расчеты [40, 41] модулей коэффициентов отражения $|A_1|$, $|\tilde{A}_1|$ и прозрачности $|A_2|$, $|\tilde{A}_2|$ для упругой пластины с непрерывно-неоднородным покрытием соответственно для случаев, когда покрытие расположено на поверхности пластины со стороны падения плоской волны и с противоположной стороны. Исследовались угловые и частотные зависимости.

Полагалось, что амплитуда падающей волны $A_0 = 1$, отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H , равно 0,2, жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми ($\rho_1 = \rho_2$; $c_1 = c_2$).

Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0,1$ м ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с покрытием на основе поливинилбутираля, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с).

Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\bar{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\bar{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\bar{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м², так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\lambda(z) = \bar{\lambda} f(z), \quad \mu(z) = \bar{\mu} f(z), \quad \rho(z) = \bar{\rho} f(z);$$

для покрытия, расположенного сверху, и

$$\tilde{\lambda}(z) = \bar{\lambda} \tilde{f}(z), \quad \tilde{\mu}(z) = \bar{\mu} \tilde{f}(z), \quad \tilde{\rho}(z) = \bar{\rho} \tilde{f}(z).$$

для покрытия, расположенного снизу.

Было проанализировано отражение и прохождение звука для линейных и квадратичных законов неоднородности покрытия, расположенного с разных сторон однородной пластины.

Рассматривались следующие линейные и квадратичные законы не-

однородности:

для покрытия, расположенного сверху,

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5 \right), \quad f_2(z) = a_2 \left(\frac{z}{h} + 1,5 \right) \quad (a_1 = a_2 = 1);$$

$$f_3(z) = a_3 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 2\frac{z}{h} + 0,5 \right], \quad f_4(z) = a_4 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 + 4\frac{z}{h} + 3,5 \right] \quad (a_3 = a_4 = 6/11);$$

для покрытия, расположенного снизу,

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{a}_1 \left(-\frac{z}{h} + 1,5 \right), \quad \tilde{f}_2(z) = \tilde{a}_2 \left(\frac{z}{h} + 0,5 \right) \quad (\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 1);$$

$$\tilde{f}_3(z) = \tilde{a}_3 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 4\frac{z}{h} + 3,5 \right], \quad \tilde{f}_4(z) = \tilde{a}_4 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 + 2\frac{z}{h} + 0,5 \right] \quad (\tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = 6/11).$$

Множители a_j и \tilde{a}_j ($j=1,2,3,4$) выбраны так, чтобы средние значения функций $f_j(z)$ и $\tilde{f}_j(z)$ по толщине слоя были равны единице.

Зависимости $f_1(z)$ и $f_2(z)$, а также $f_3(z)$ и $f_4(z)$ выбраны такими, что их графики являются зеркальным отражением друг друга относительно прямой $z = -h/2$. При этом на внешней поверхности покрытия $z = -h$ функций $f_1(z)$ и $f_3(z)$ достигают максимумов, равных $1,5a_1$ и $3,5a_3$ соответственно, а на внутренней поверхности покрытия $z = 0$ – минимумов, равных $0,5a_1$ и $0,5a_3$. Функции $f_2(z)$ и $f_4(z)$ достигают тех же максимальных и минимальных значений, но уже на внутренней и внешней поверхностях покрытия.

Графики зависимостей $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$, а также $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ являются зеркальным отражением друг друга относительно прямой $z = h/2$. При этом на внутренней поверхности покрытия $z = 0$ функции $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_3(z)$ достигают максимумов, равных $1,5\tilde{a}_1$ и $3,5\tilde{a}_3$, а на внешней поверхности $z = h$ – минимумов, равных $0,5\tilde{a}_1$ и $0,5\tilde{a}_3$. Функции $\tilde{f}_2(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$

достигают тех же максимальных и минимальных значений, но уже на внешней и внутренней поверхностях покрытия.

Отметим, что покрытия, расположенные по обе стороны пластины, обладают одинаковыми свойствами для соответствующих законов неоднородности. Если рассматривать изменение свойств покрытий по толщине в направлении оси z , то видим, что плотность покрытий будет одинаково возрастать при законах неоднородности $f_2(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ ($f_4(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$) и одинаково убывать при законах $f_1(z)$ и $\tilde{f}_1(z)$ ($f_3(z)$ и $\tilde{f}_3(z)$).

На рис. 2.2 и 2.3 приведены графики рассматриваемых законов неоднородности.

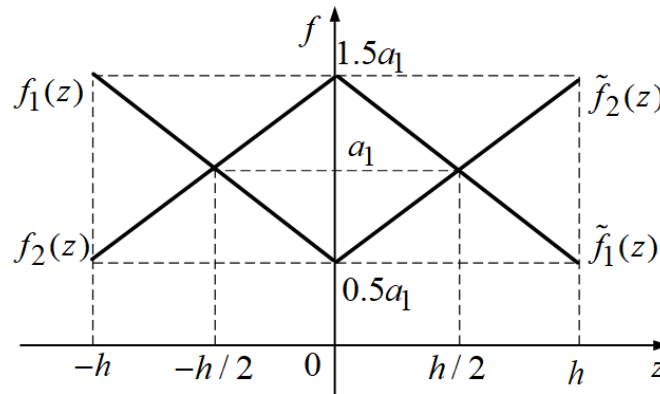


Рис. 2.2. Графики для линейных законов неоднородности $f_1(z)$, $f_2(z)$ на отрезке $[-h, 0]$ и $\tilde{f}_1(z)$, $\tilde{f}_2(z)$ на отрезке $[0, h]$

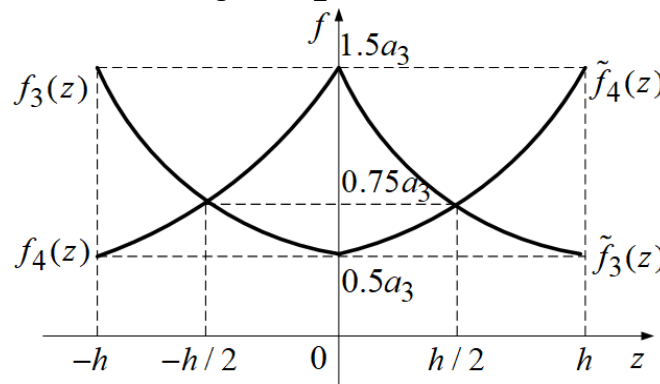


Рис. 2.3. Графики для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$, $f_4(z)$ на отрезке $[-h, 0]$ и $\tilde{f}_3(z)$, $\tilde{f}_4(z)$ на отрезке $[0, h]$

Когда покрытие расположено сверху, то согласно (2.39) для линейного закона ($R = 1$) имеем

$$\begin{aligned}\rho_1(z) &= \bar{\rho}[\rho_1^{(0)} + \rho_1^{(1)}(z + h/2)], & \lambda_1(z) &= \bar{\lambda}[\lambda_1^{(0)} + \lambda_1^{(1)}(z + h/2)], \\ \mu_1(z) &= \bar{\mu}[\mu_1^{(0)} + \mu_1^{(1)}(z + h/2)]; \\ \rho_2(z) &= \bar{\rho}[\rho_2^{(0)} + \rho_2^{(1)}(z + h/2)], & \lambda_2(z) &= \bar{\lambda}[\lambda_2^{(0)} + \lambda_2^{(1)}(z + h/2)], \\ \mu_2(z) &= \bar{\mu}[\mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)}(z + h/2)],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\rho_1^{(0)} &= \bar{\rho}, & \rho_1^{(1)} &= -\bar{\rho}/h, & \lambda_1^{(0)} &= \bar{\lambda}, & \lambda_1^{(1)} &= -\bar{\lambda}/h, & \mu_1^{(0)} &= \bar{\mu}, & \mu_1^{(1)} &= -\bar{\mu}/h; \\ \rho_2^{(0)} &= \bar{\rho}, & \rho_2^{(1)} &= \bar{\rho}/h, & \lambda_2^{(0)} &= \bar{\lambda}, & \lambda_2^{(1)} &= \bar{\lambda}/h, & \mu_2^{(0)} &= \bar{\mu}, & \mu_2^{(1)} &= \bar{\mu}/h;\end{aligned}$$

а для квадратичного закона ($R = 2$) –

$$\begin{aligned}\rho_3(z) &= \bar{\rho}[\rho_3^{(0)} + \rho_3^{(1)}(z + h/2) + \rho_3^{(2)}(z + h/2)^2], \\ \lambda_3(z) &= \bar{\lambda}[\lambda_3^{(0)} + \lambda_3^{(1)}(z + h/2) + \lambda_3^{(2)}(z + h/2)^2], \\ \mu_3(z) &= \bar{\mu}[\mu_3^{(0)} + \mu_3^{(1)}(z + h/2) + \mu_3^{(2)}(z + h/2)^2]; \\ \rho_4(z) &= \bar{\rho}[\rho_4^{(0)} + \rho_4^{(1)}(z + h/2) + \rho_4^{(2)}(z + h/2)^2], \\ \lambda_4(z) &= \bar{\lambda}[\lambda_4^{(0)} + \lambda_4^{(1)}(z + h/2) + \lambda_4^{(2)}(z + h/2)^2], \\ \mu_4(z) &= \bar{\mu}[\mu_4^{(0)} + \mu_4^{(1)}(z + h/2) + \mu_4^{(2)}(z + h/2)^2];\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\rho_3^{(0)} &= 1.75a_3\bar{\rho}, & \rho_3^{(1)} &= -3a_3\frac{\bar{\rho}}{h}, & \rho_3^{(2)} &= a_3\frac{\bar{\rho}}{h^2}, \\ \lambda_3^{(0)} &= 1.75a_3\bar{\lambda}, & \lambda_3^{(1)} &= -3a_3\frac{\bar{\lambda}}{h}, & \lambda_3^{(2)} &= a_3\frac{\bar{\lambda}}{h^2}, \\ \mu_3^{(0)} &= 1.75a_3\bar{\mu}, & \mu_3^{(1)} &= -3a_3\frac{\bar{\mu}}{h}, & \mu_3^{(2)} &= a_3\frac{\bar{\mu}}{h^2}; \\ \rho_4^{(0)} &= 1.75a_4\bar{\rho}, & \rho_4^{(1)} &= 3a_4\frac{\bar{\rho}}{h}, & \rho_4^{(2)} &= a_4\frac{\bar{\rho}}{h^2},\end{aligned}$$

$$\lambda_4^{(0)} = 1.75a_4\bar{\lambda}, \quad \lambda_4^{(1)} = 3a_4\frac{\bar{\lambda}}{h}, \quad \lambda_4^{(2)} = a_4\frac{\bar{\lambda}}{h^2},$$

$$\mu_4^{(0)} = 1.75a_4\bar{\mu}, \quad \mu_4^{(1)} = 3a_4\frac{\bar{\mu}}{h}, \quad \mu_4^{(2)} = a_4\frac{\bar{\mu}}{h^2}.$$

Когда покрытие расположено снизу, то согласно (2.39) для линейного закона имеем

$$\rho_1(z) = \bar{\rho}[\rho_1^{(0)} + \rho_1^{(1)}(z - h/2)], \quad \lambda_1(z) = \bar{\lambda}[\lambda_1^{(0)} + \lambda_1^{(1)}(z - h/2)],$$

$$\mu_1(z) = \bar{\mu}[\mu_1^{(0)} + \mu_1^{(1)}(z - h/2)];$$

$$\rho_2(z) = \bar{\rho}[\rho_2^{(0)} + \rho_2^{(1)}(z - h/2)], \quad \lambda_2(z) = \bar{\lambda}[\lambda_2^{(0)} + \lambda_2^{(1)}(z - h/2)],$$

$$\mu_2(z) = \bar{\mu}[\mu_2^{(0)} + \mu_2^{(1)}(z - h/2)];$$

где

$$\rho_1^{(0)} = \bar{\rho}, \quad \rho_1^{(1)} = -\bar{\rho}/h, \quad \lambda_1^{(0)} = \bar{\lambda}, \quad \lambda_1^{(1)} = -\bar{\lambda}/h, \quad \mu_1^{(0)} = \bar{\mu}, \quad \mu_1^{(1)} = -\bar{\mu}/h;$$

$$\rho_2^{(0)} = \bar{\rho}, \quad \rho_2^{(1)} = \bar{\rho}/h, \quad \lambda_2^{(0)} = \bar{\lambda}, \quad \lambda_2^{(1)} = \bar{\lambda}/h, \quad \mu_2^{(0)} = \bar{\mu}, \quad \mu_2^{(1)} = \bar{\mu}/h.$$

а для квадратичного закона –

$$\rho_3(z) = \bar{\rho}[\rho_3^{(0)} + \rho_3^{(1)}(z - h/2) + \rho_3^{(2)}(z - h/2)^2],$$

$$\lambda_3(z) = \bar{\lambda}[\lambda_3^{(0)} + \lambda_3^{(1)}(z - h/2) + \lambda_3^{(2)}(z - h/2)^2],$$

$$\mu_3(z) = \bar{\mu}[\mu_3^{(0)} + \mu_3^{(1)}(z - h/2) + \mu_3^{(2)}(z - h/2)^2];$$

$$\rho_4(z) = \bar{\rho}[\rho_4^{(0)} + \rho_4^{(1)}(z - h/2) + \rho_4^{(2)}(z - h/2)^2],$$

$$\lambda_4(z) = \bar{\lambda}[\lambda_4^{(0)} + \lambda_4^{(1)}(z - h/2) + \lambda_4^{(2)}(z - h/2)^2],$$

$$\mu_4(z) = \bar{\mu}[\mu_4^{(0)} + \mu_4^{(1)}(z - h/2) + \mu_4^{(2)}(z - h/2)^2];$$

где

$$\rho_3^{(0)} = \frac{21}{22}\bar{\rho}, \quad \rho_3^{(1)} = -\frac{18}{11}\frac{\bar{\rho}}{h}, \quad \rho_3^{(2)} = \frac{6}{11}\frac{\bar{\rho}}{h^2},$$

$$\lambda_3^{(0)} = \frac{21}{22}\bar{\lambda}, \quad \lambda_3^{(1)} = -\frac{18}{11}\frac{\bar{\lambda}}{h}, \quad \lambda_3^{(2)} = \frac{6}{11}\frac{\bar{\lambda}}{h^2},$$

$$\mu_3^{(0)} = \frac{21}{22} \bar{\mu}, \quad \mu_3^{(1)} = -\frac{18}{11} \frac{\bar{\mu}}{h}, \quad \mu_3^{(2)} = \frac{6}{11} \frac{\bar{\mu}}{h^2};$$

$$\rho_4^{(0)} = \frac{21}{22} \bar{\rho}, \quad \rho_4^{(1)} = \frac{18}{11} \frac{\bar{\rho}}{h}, \quad \rho_4^{(2)} = \frac{6}{11} \frac{\bar{\rho}}{h^2},$$

$$\lambda_4^{(0)} = \frac{21}{22} \bar{\lambda}, \quad \lambda_4^{(1)} = \frac{18}{11} \frac{\bar{\lambda}}{h}, \quad \lambda_4^{(2)} = \frac{6}{11} \frac{\bar{\lambda}}{h^2},$$

$$\mu_4^{(0)} = \frac{21}{22} \bar{\mu}, \quad \mu_4^{(1)} = \frac{18}{11} \frac{\bar{\lambda}}{h}, \quad \mu_4^{(2)} = \frac{6}{11} \frac{\bar{\mu}}{h^2}.$$

Ниже представлены результаты расчетов угловых зависимостей коэффициентов отражения и прозрачности для пластин с однородным покрытием и покрытиями с линейными и квадратичными законами неоднородности в случаях, когда покрытие нанесено на пластину со стороны падения плоской волны (рис. 2.4 – 2.15) и со стороны, противоположной падению плоской волны (рис. 2.16 – 2.27).

Пунктирные линии соответствуют однородному покрытию, сплошные и штриховые – неоднородным покрытиям разных видов, указанных в подрисуночных подписях.

На рис. 2.4 – 2.7 изображены угловые зависимости коэффициентов отражения и прозрачности при волновом размере пластины $k_1 H = 5$.

Угловые зависимости коэффициентов отражения и прозрачности при $k_1 H = 10$ изображены на рис. 2.8 – 2.11, а при $k_1 H = 15$ – на рис. 2.12 – 2.15.

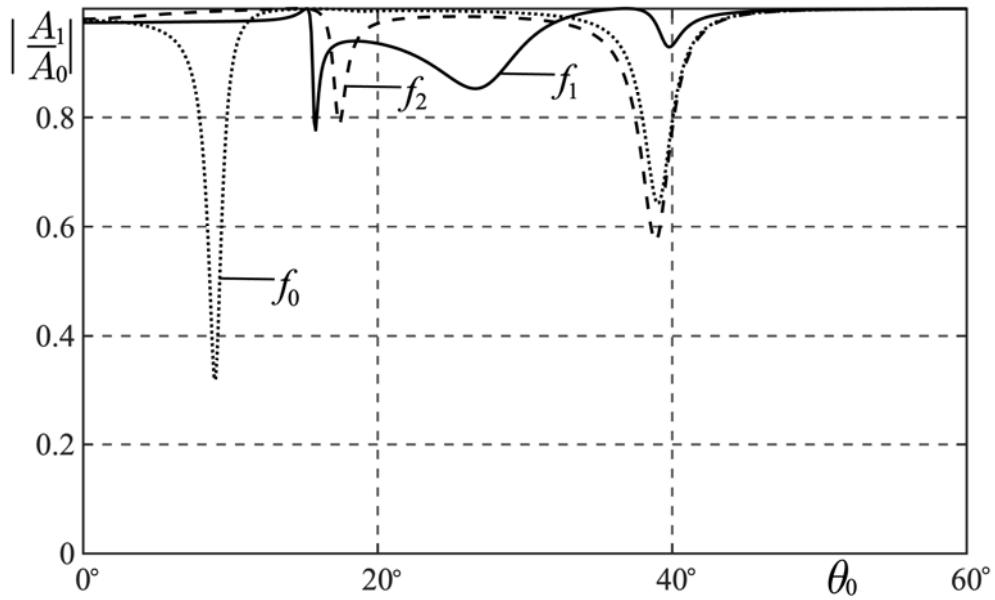


Рис. 2.4. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $k_1H = 5$

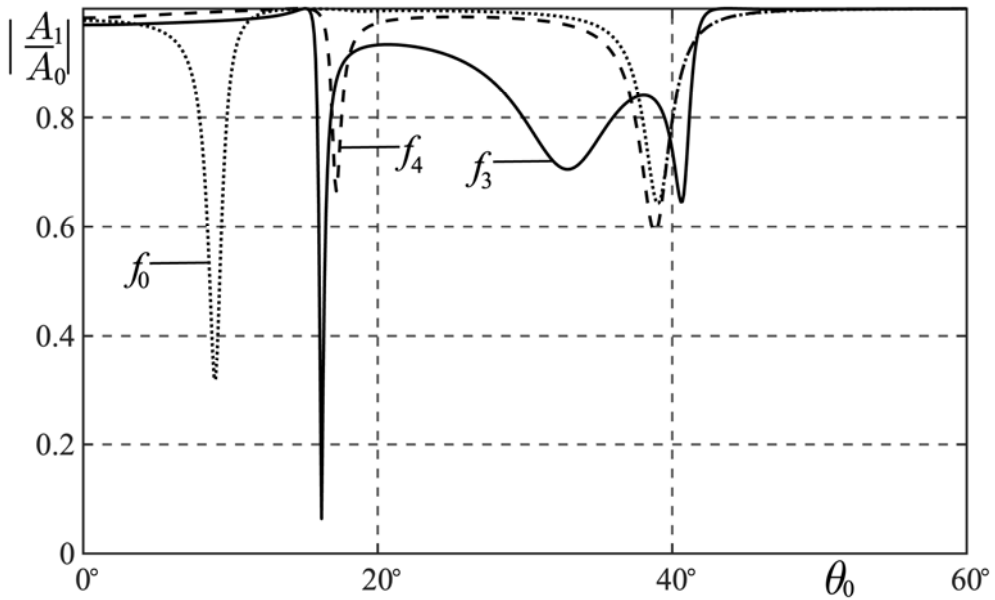


Рис. 2.5. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $k_1H = 5$

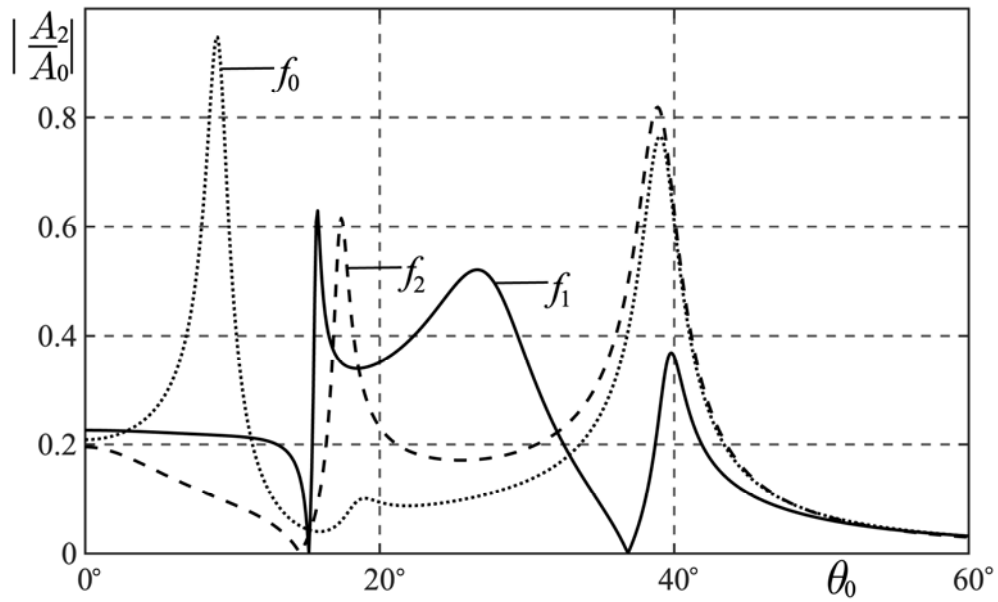


Рис. 2.6. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $k_1 H = 5$

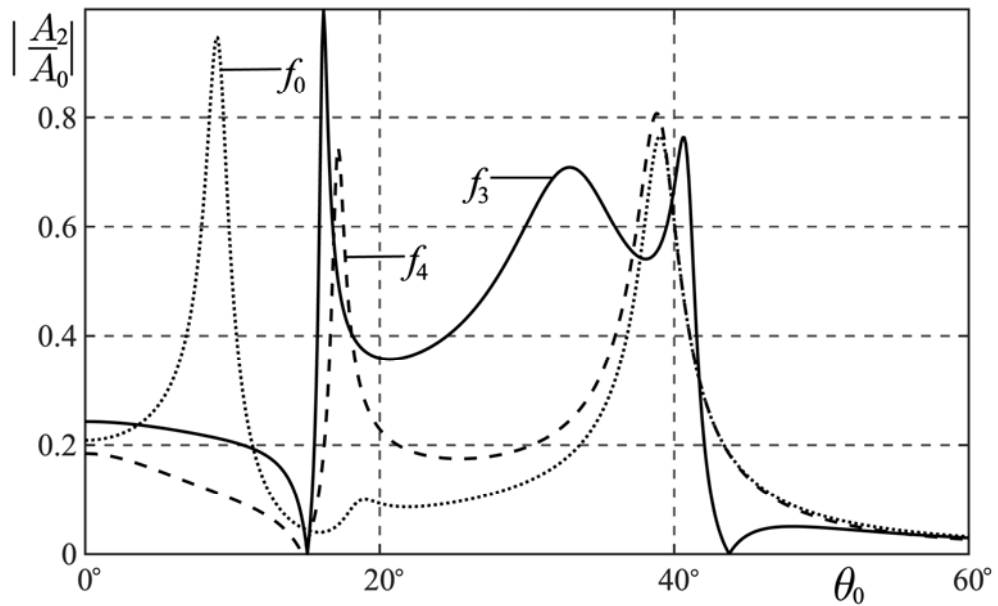


Рис. 2.7. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $k_1 H = 5$

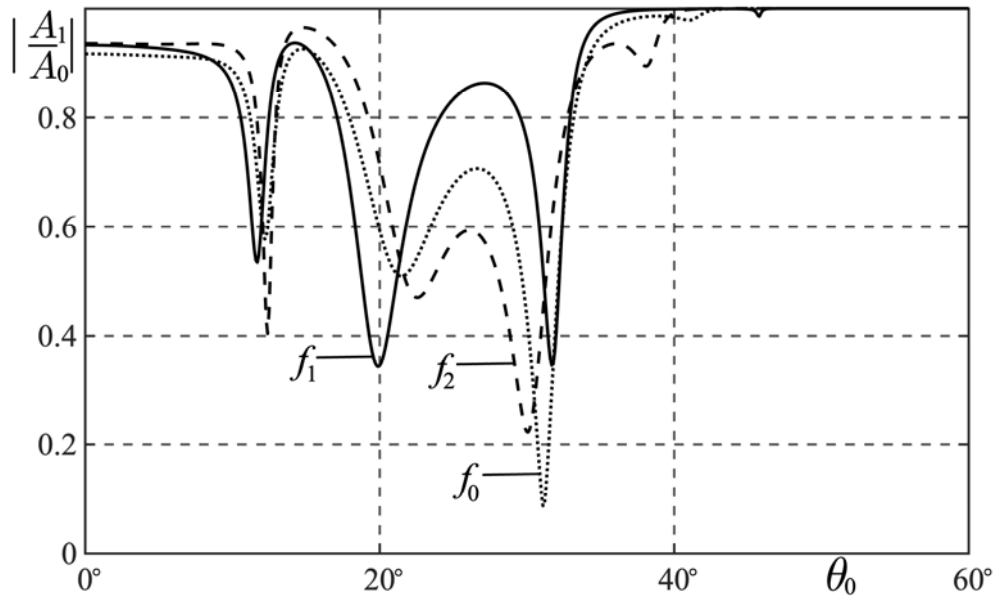


Рис. 2.8. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $k_1H = 10$

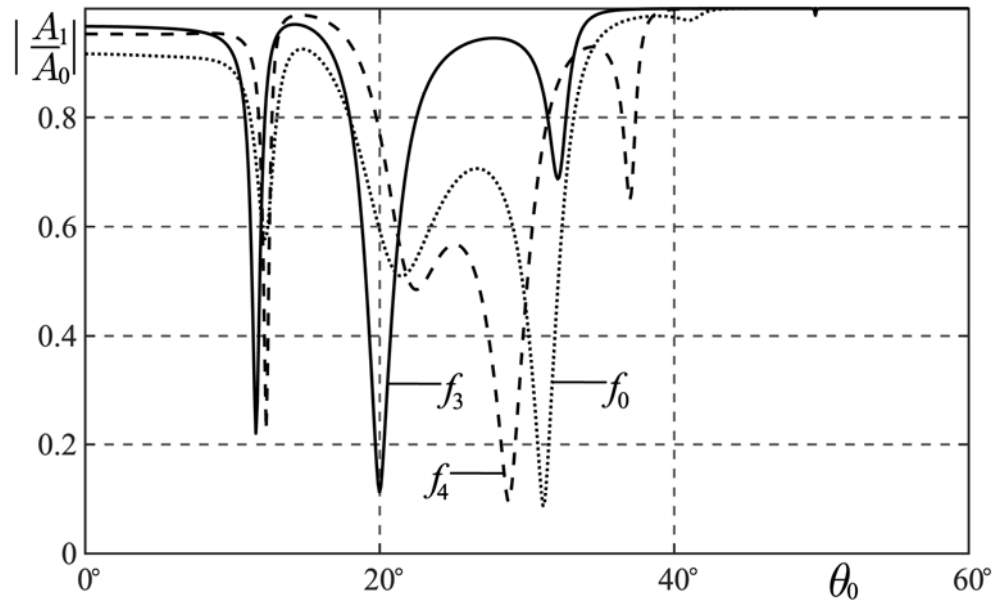


Рис. 2.9. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $k_1H = 10$

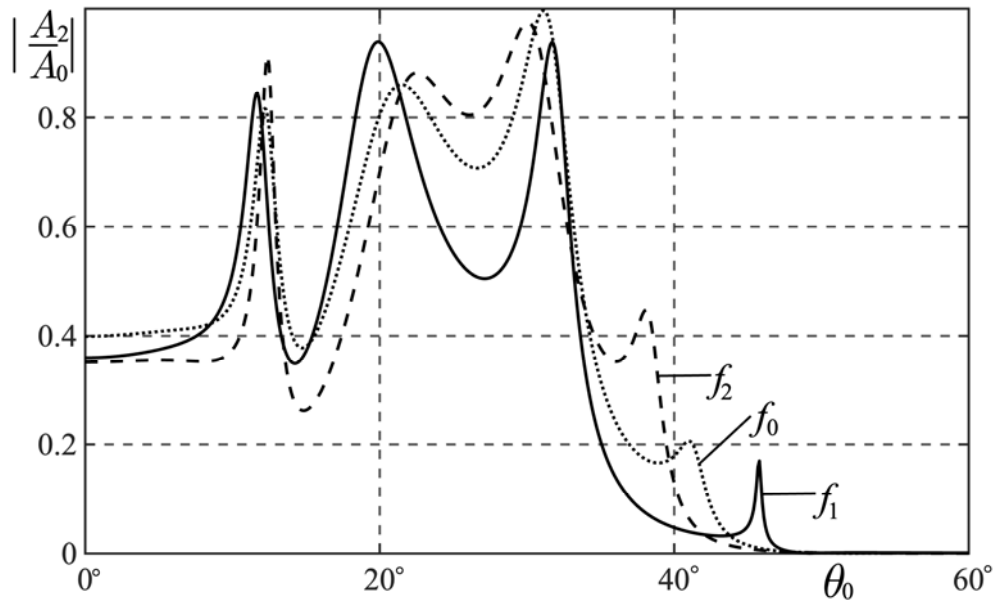


Рис. 2.10. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $k_1H = 10$

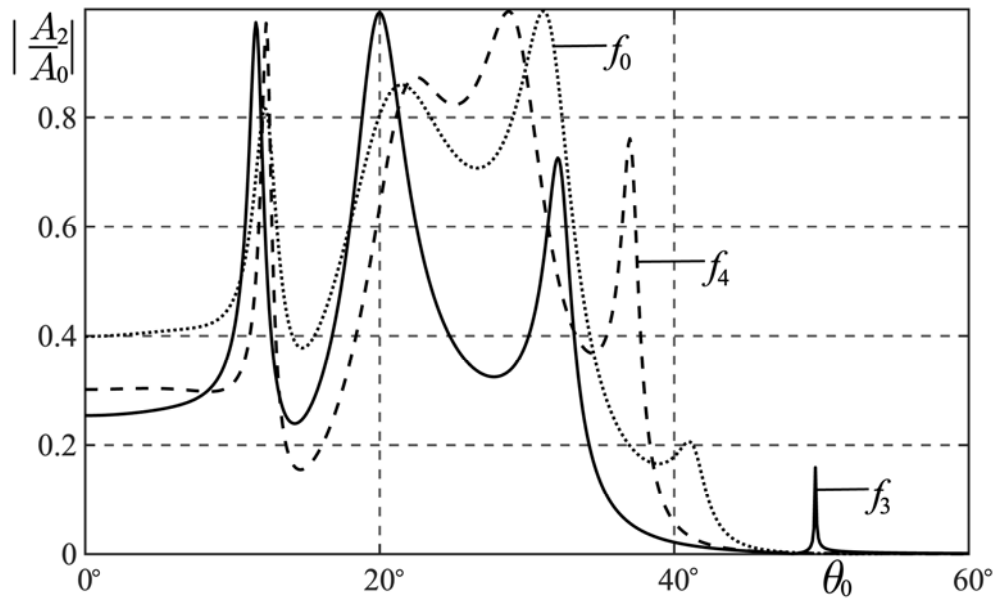


Рис. 2.11. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $k_1H = 10$

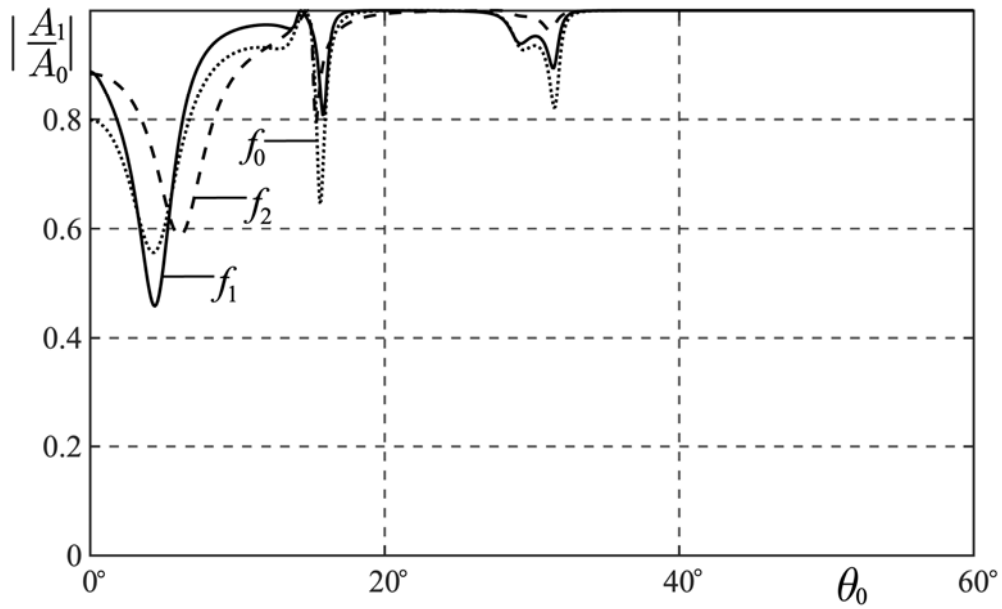


Рис. 2.12. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $k_1H = 15$

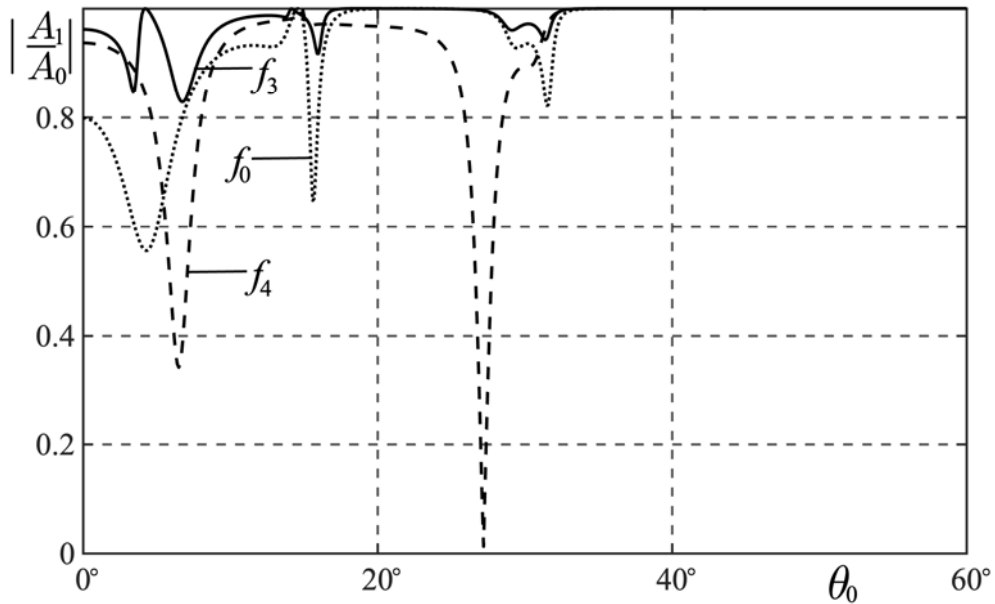


Рис. 2.13. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $k_1H = 15$

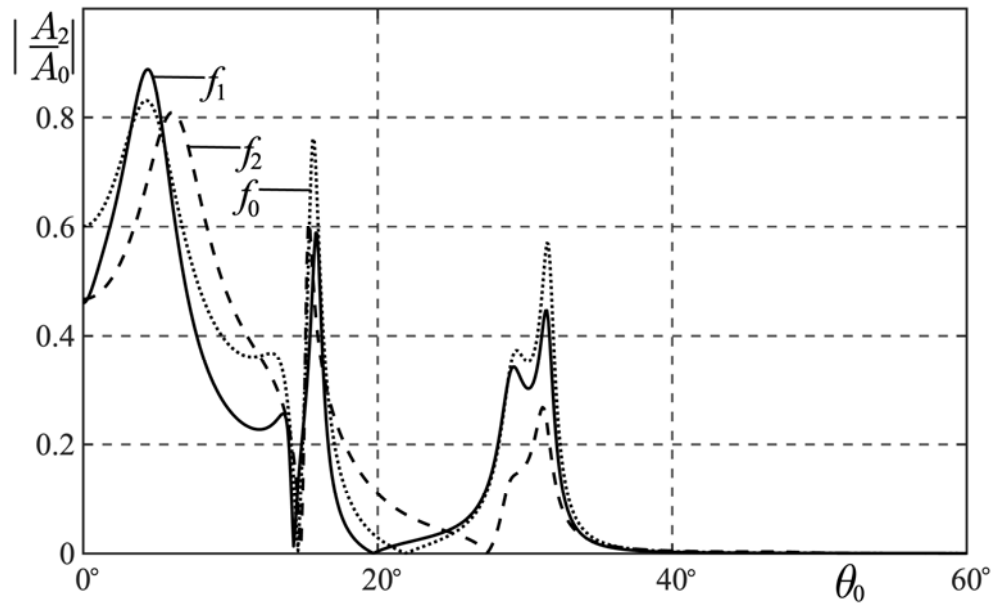


Рис. 2.14. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $k_1H = 15$

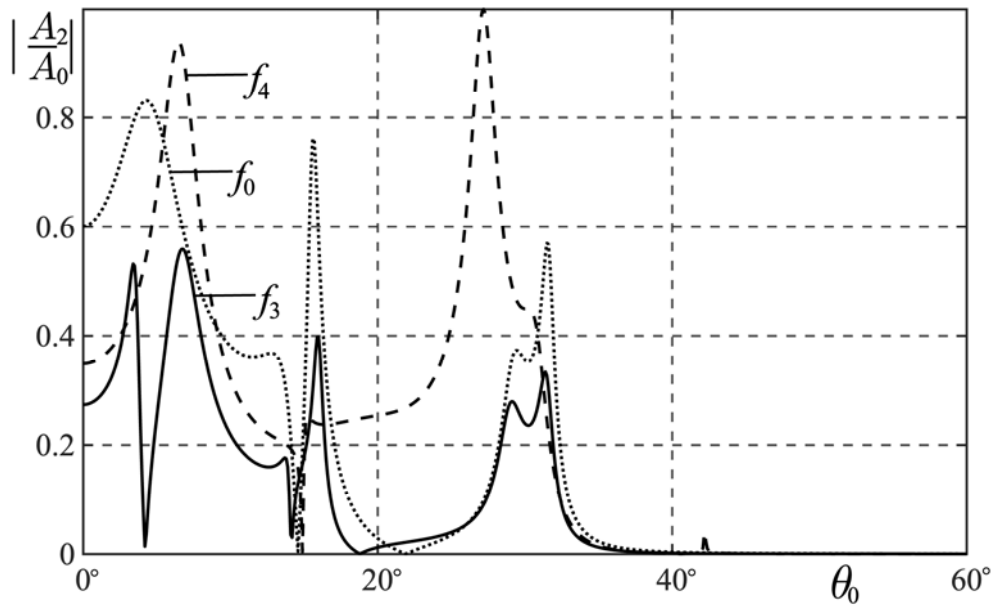


Рис. 2.15. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $k_1H = 15$

Рисунки 2.16 – 2.27 относятся к случаю, когда покрытие нанесено на пластину со стороны, противоположной падению плоской волны.

На рис. 2.16 – 2.19 изображены угловые зависимости коэффициентов отражения и прозрачности при волновом размере пластины $k_1H = 5$.

На рис. 2.20 – 2.23 изображены угловые зависимости коэффициентов отражения и прозрачности при волновом размере пластины $k_1H = 10$.

На рис. 2.24 – 2.27 изображены угловые зависимости коэффициентов отражения и прозрачности при волновом размере пластины $k_1H = 15$.

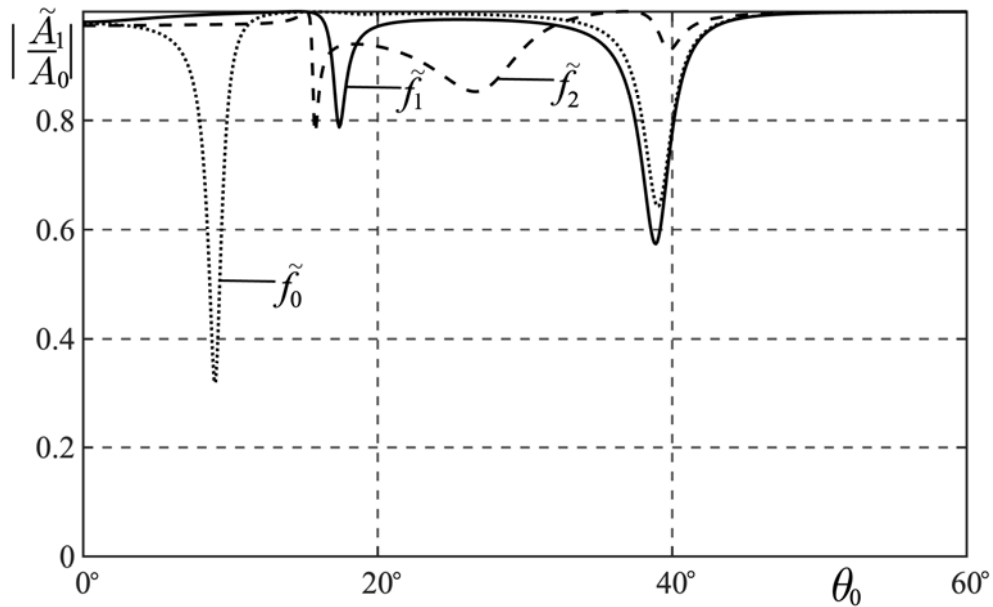


Рис. 2.16. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $k_1H = 5$

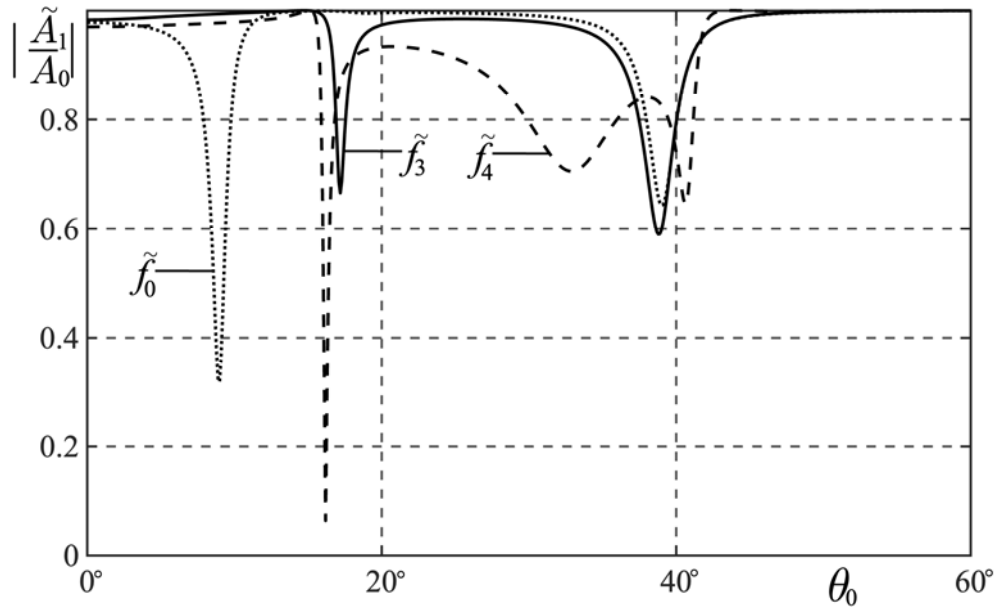


Рис. 2.17. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $k_1H = 5$

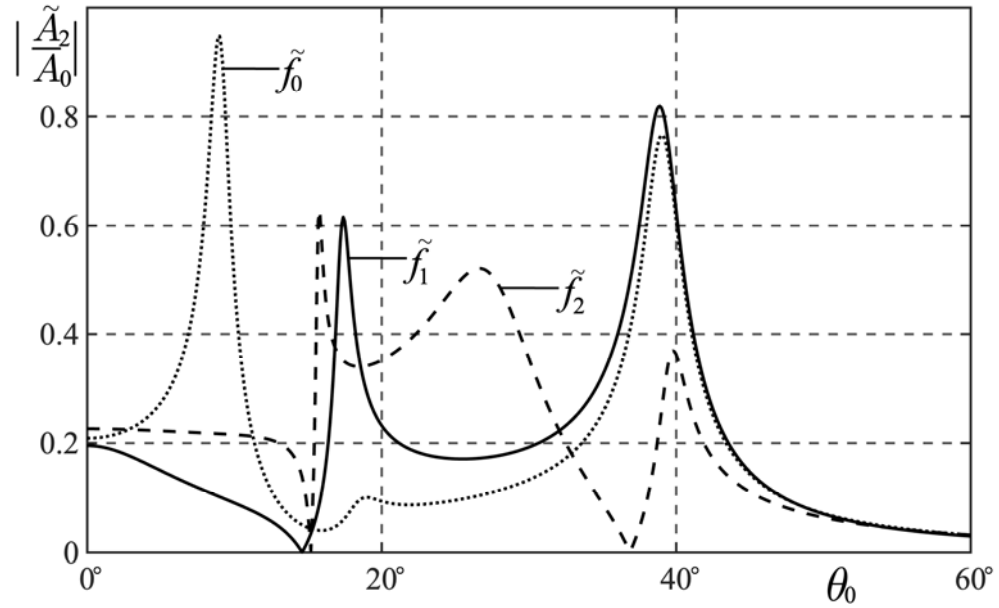


Рис. 2.18. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $k_1H = 5$

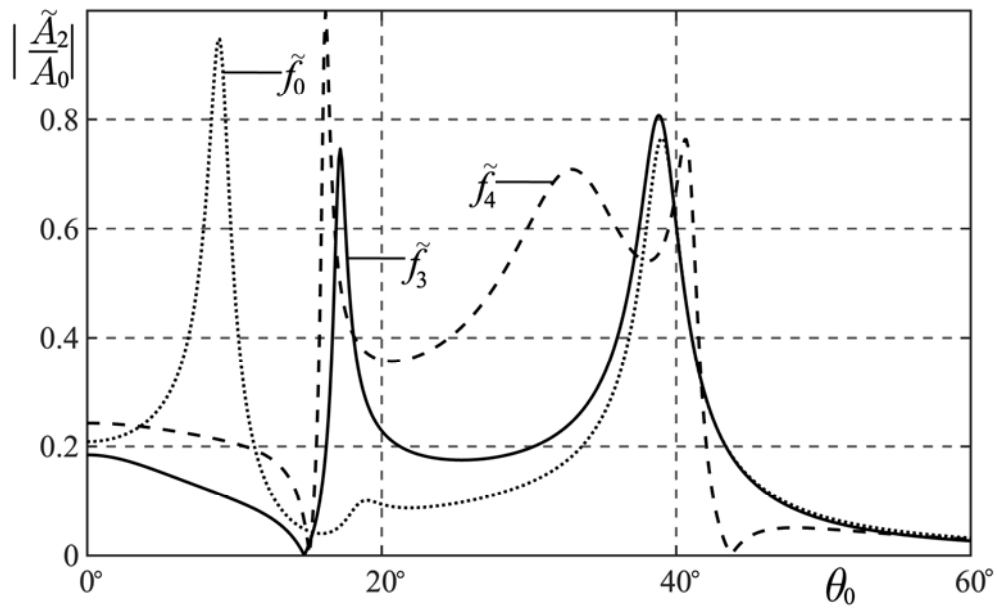


Рис. 2.19. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $k_1H = 5$

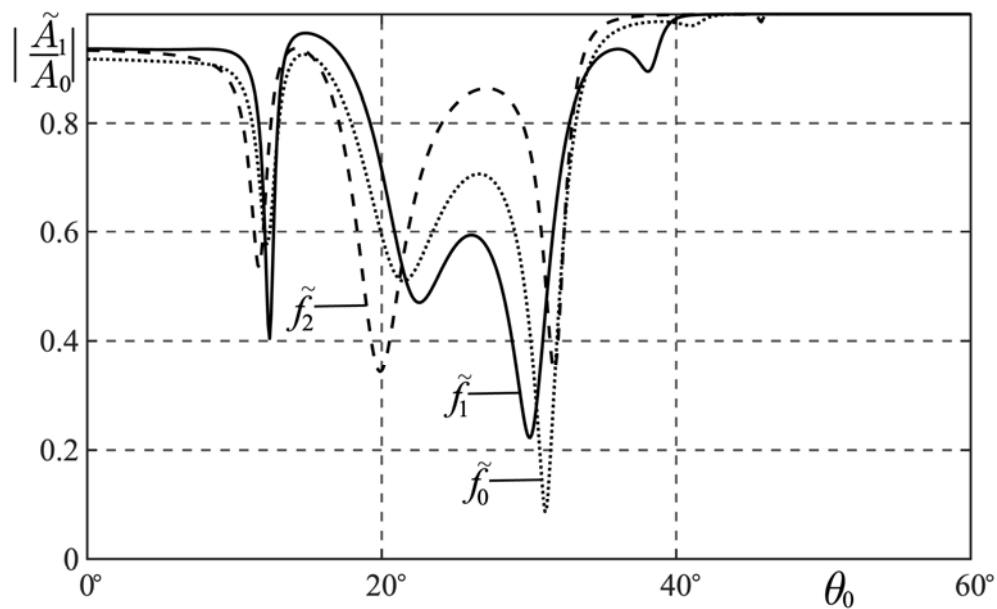


Рис. 2.20. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $k_1H = 10$

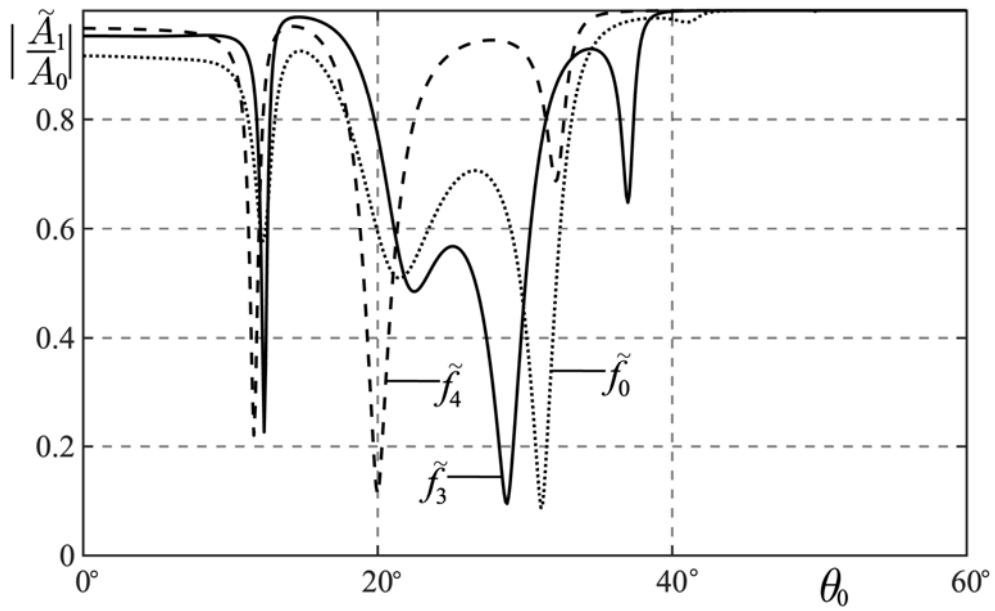


Рис. 2.21. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $k_1H = 10$

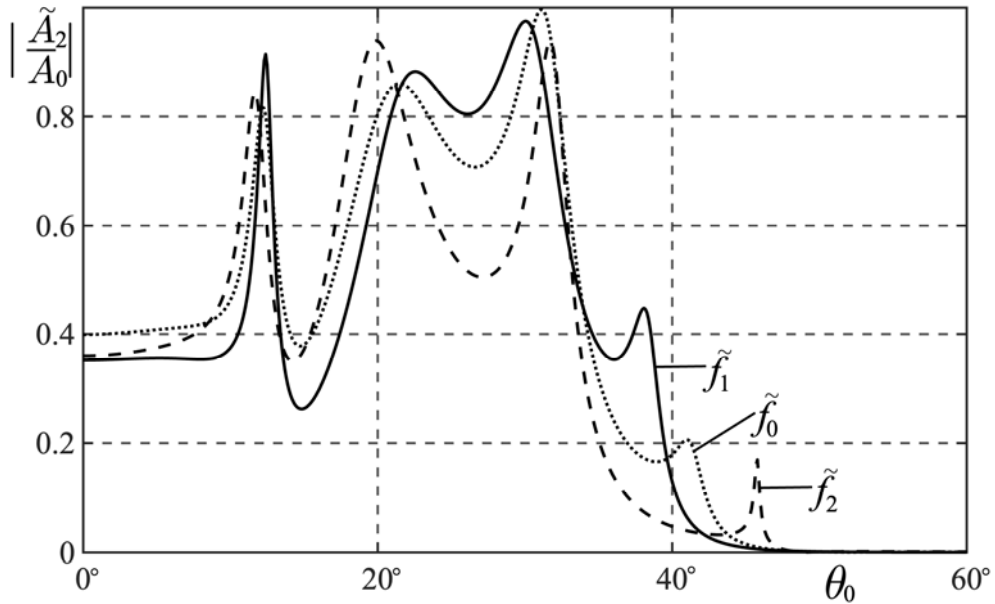


Рис. 2.22. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $k_1H = 10$

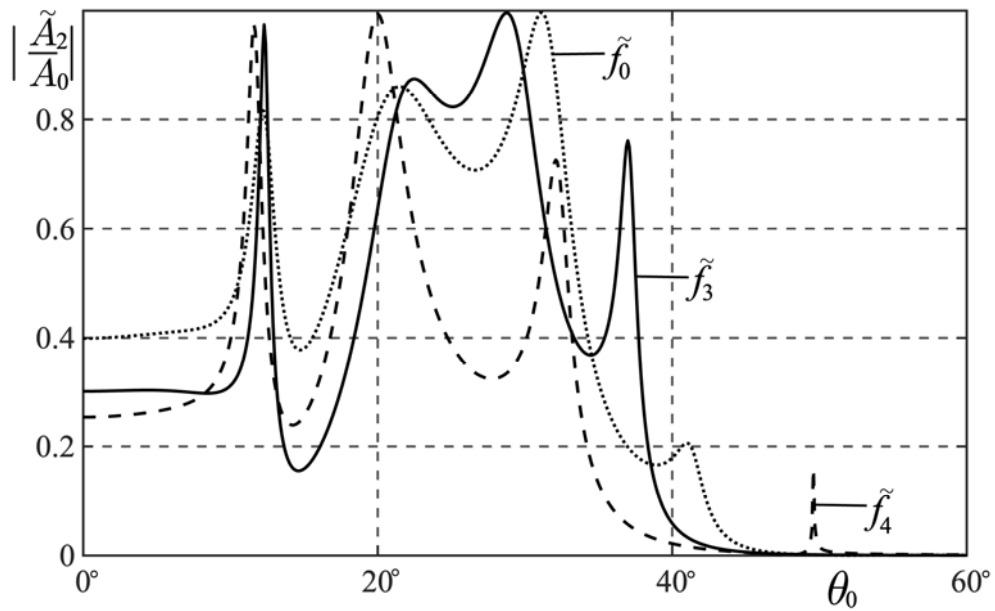


Рис. 2.23. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $k_1H = 10$

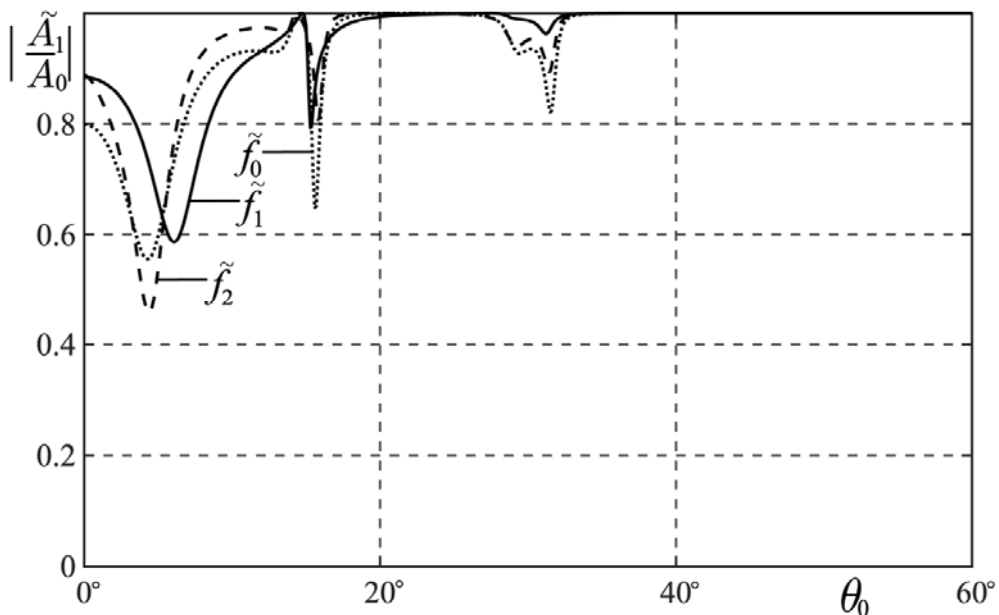


Рис. 2.24. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $k_1H = 15$

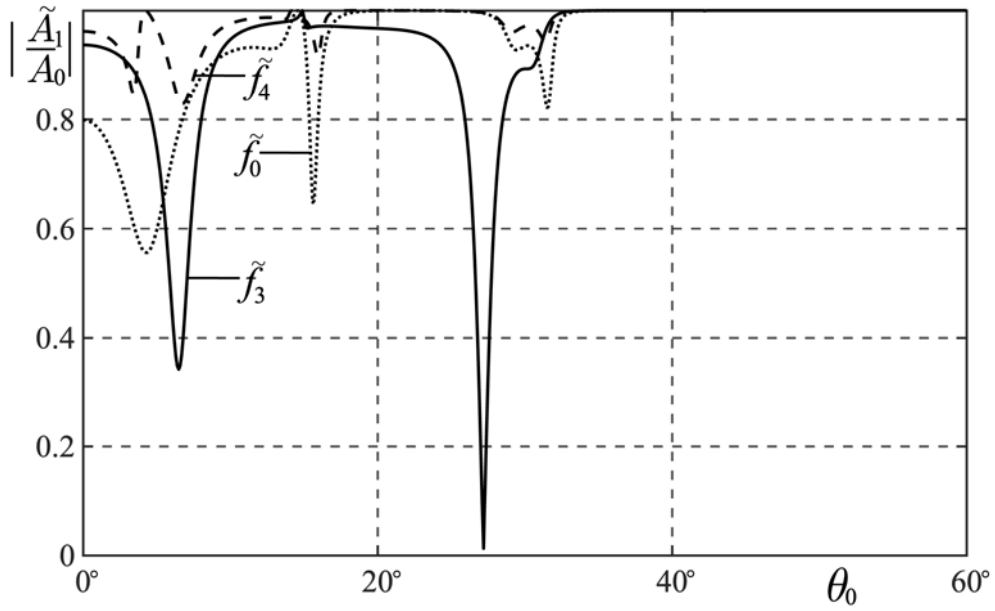


Рис. 2.25. Зависимости коэффициента отражения от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $k_1H = 15$

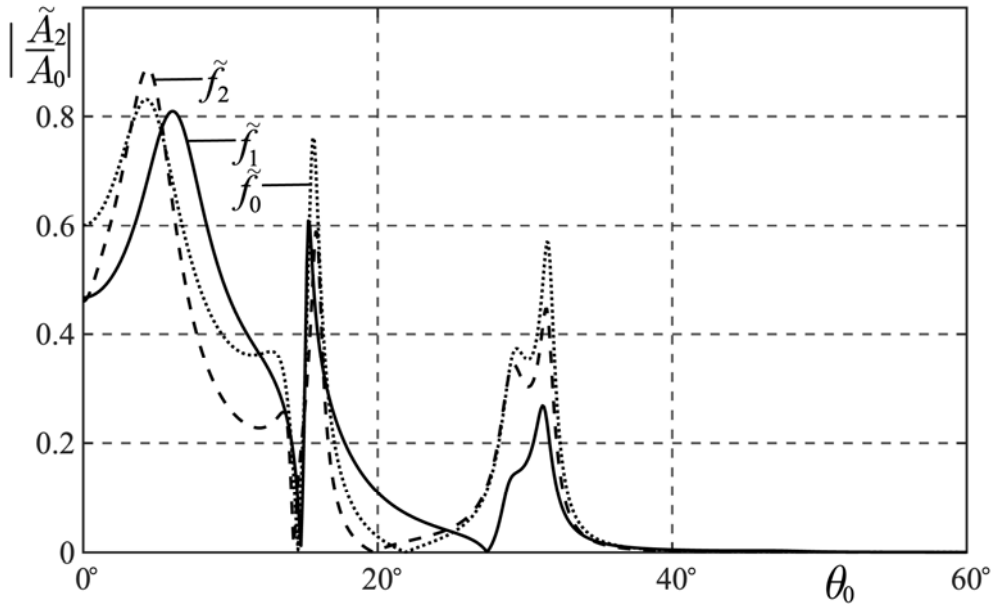


Рис. 2.26. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $k_1H = 15$

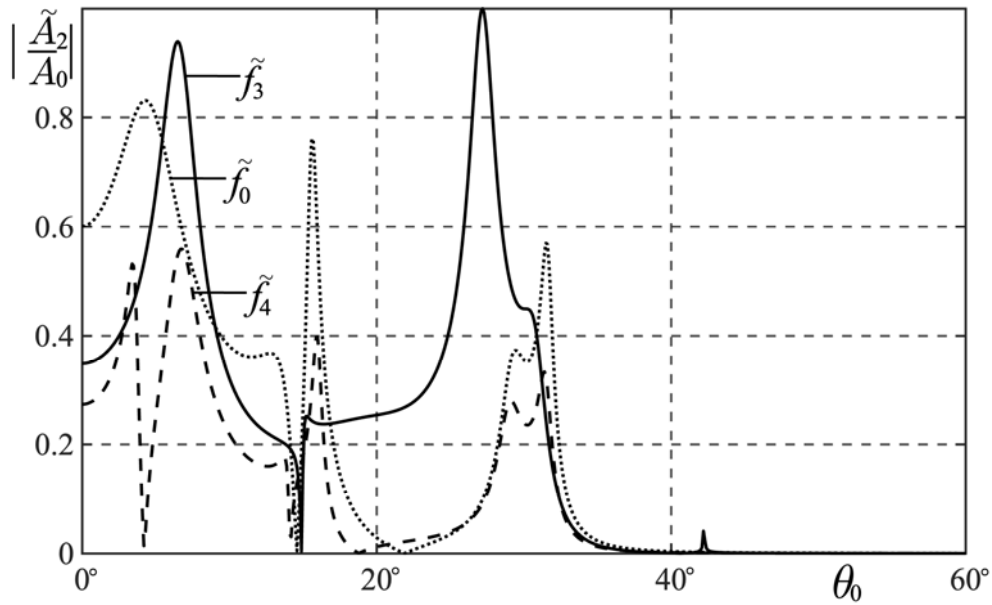


Рис. 2.27. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $k_1H = 15$

Анализируя угловые зависимости, прежде всего отметим, что при всех рассмотренных волновых размерах пластины и законах неоднородности наблюдаем полное отражение звука при углах падения плоской волны, превышающих 50° , независимо от расположения покрытия.

Заметим также, что при расчетах с незначительной погрешностью выполнялись соотношения (согласно закону сохранения энергии)

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = |A_0|^2, \quad |\tilde{A}_1|^2 + |\tilde{A}_2|^2 = |A_0|^2.$$

При этом по обе стороны пластины имеем одну и ту же жидкость.

Сравнение угловых зависимостей, рассчитанных для однородных и неоднородных покрытий, показывает заметное влияние неоднородности материала покрытия. Воздействие неоднородности сказывается двояко. Во-первых происходит смещение положений максимумов коэффициентов

отражения и прозрачности. Во-вторых наблюдается изменение их уровней.

Рассмотрим вначале влияние неоднородности материала покрытия на положение максимумов коэффициента прозрачности. Характер этого влияния аналогичен как для линейных, так и для квадратичных законов неоднородности при различном расположении покрытия. Причем с увеличением волнового размера пластины смещения максимумов угловых характеристик для неоднородных покрытий относительно однородных уменьшаются.

Что касается влияния неоднородности покрытия на величину коэффициентов отражения и прохождения, то наблюдаем их заметное изменение относительно однородного покрытия не только в резонансных, но и других областях угловых характеристик.

На рис. 2.28 – 2.43 представлены результаты расчетов частотных зависимостей коэффициентов отражения и прозрачности для пластин с однородным покрытием и покрытиями с линейными и квадратичными законами неоднородности в случаях, когда покрытие нанесено на пластину со стороны падения плоской волны (рис. 2.28 – 2.35) и со стороны, противоположной падению плоской волны (рис. 2.36 – 2.43). Зависимости коэффициентов отражения и прозрачности от волнового размера пластины k_1H рассчитаны в диапазоне от 0 до 40.

Пунктирные линии соответствуют однородному покрытию, сплошные и штриховые – неоднородным покрытиям разных видов, указанных в подрисуночных подписях.

Сначала приведем результаты расчетов для случая, когда покрытие расположено со стороны падения волны.

Частотные зависимости коэффициентов отражения и прозрачности при нормальном падении плоской волны на пластину ($\theta_0 = 0$) изображены на рис. 2.28 – 2.31, а при наклонном падении плоской волны ($\theta_0 = \pi / 6$) –

на рис. 2.32 – 2.35.

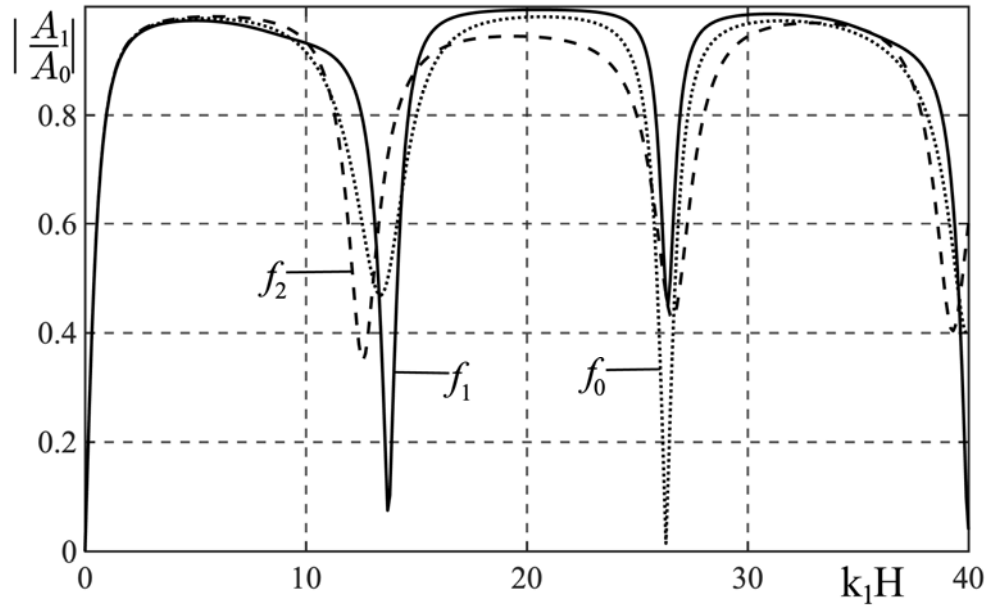


Рис. 2.28. Частотные зависимости коэффициента отражения для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $\theta_0 = 0$

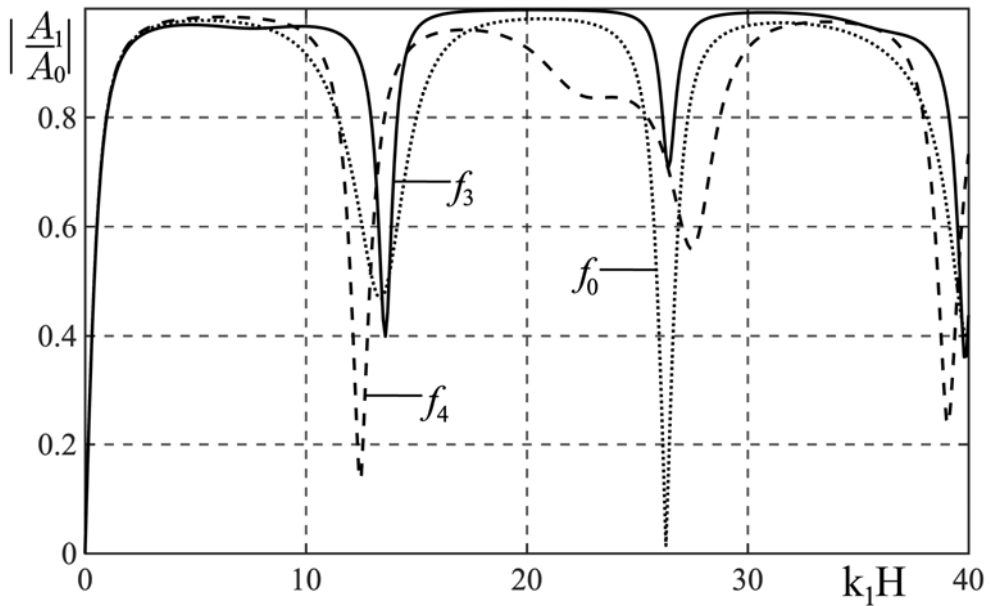


Рис. 2.29. Частотные зависимости коэффициента отражения для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $\theta_0 = 0$

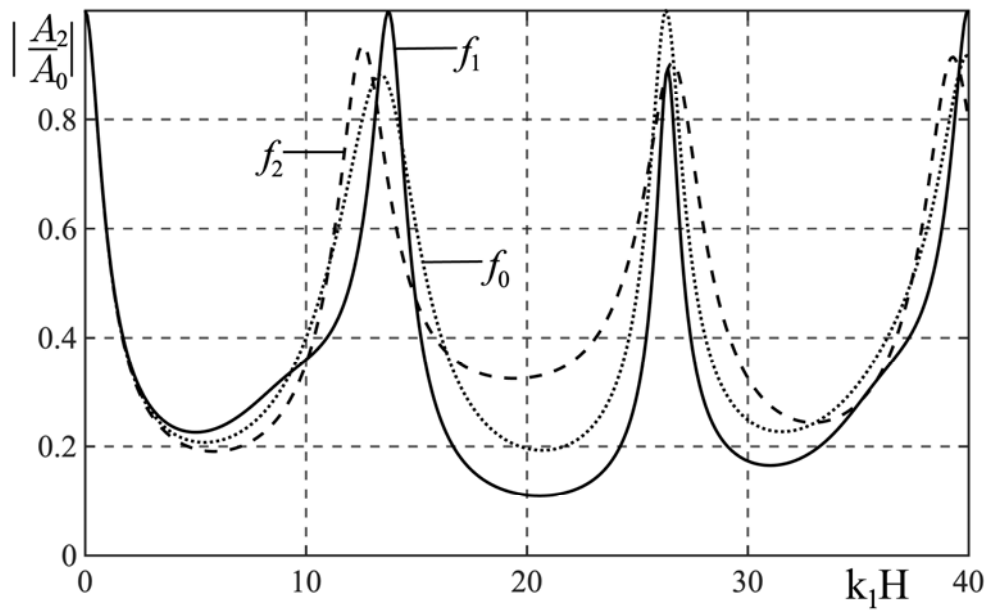


Рис. 2.30. Частотные зависимости коэффициента прозрачности для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $\theta_0 = 0$

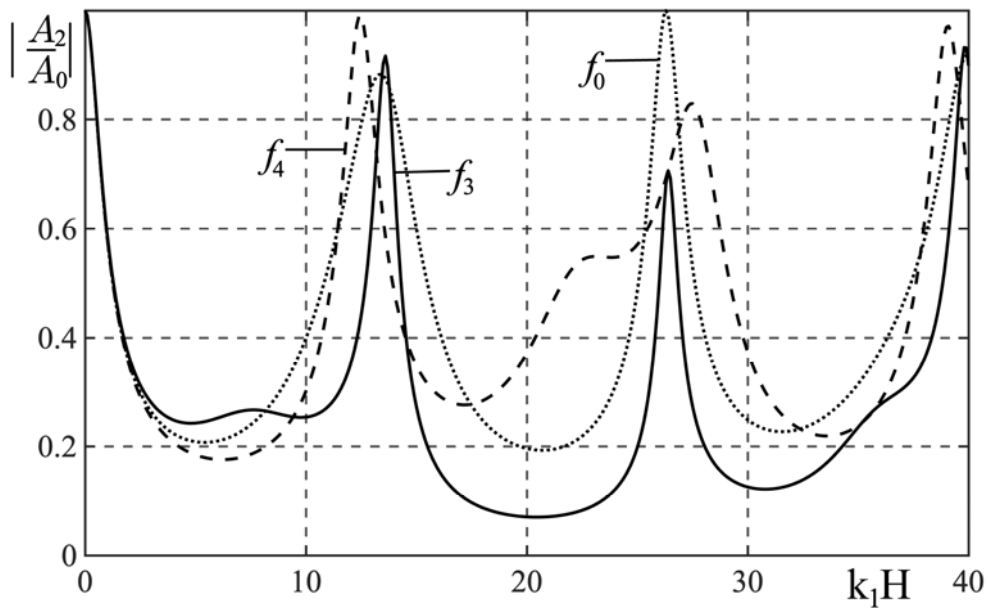


Рис. 2.31. Частотные зависимости коэффициента прозрачности для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $\theta_0 = 0$

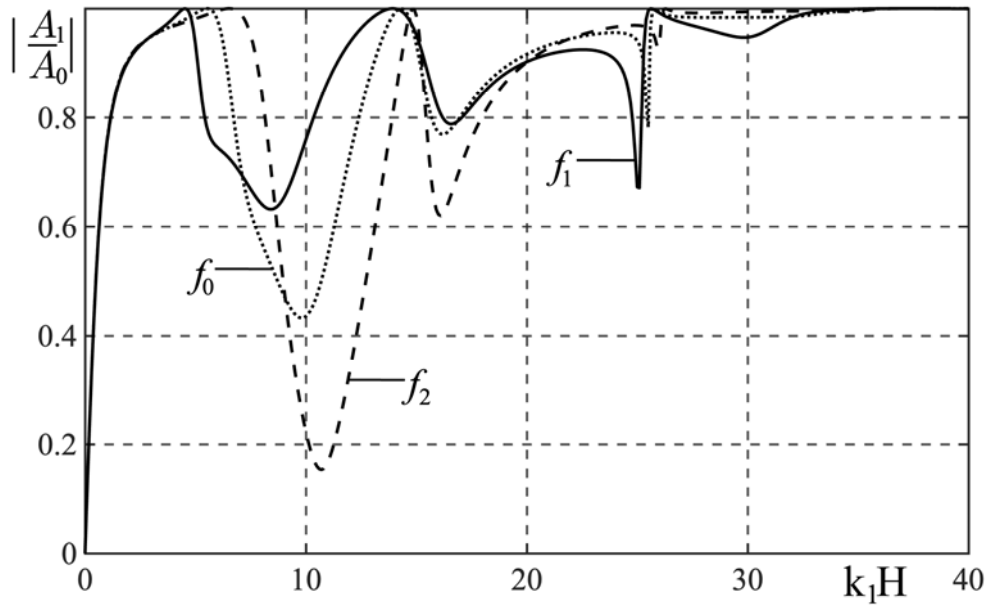


Рис. 2.32. Частотные зависимости коэффициента отражения для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $\theta_0 = \pi/6$

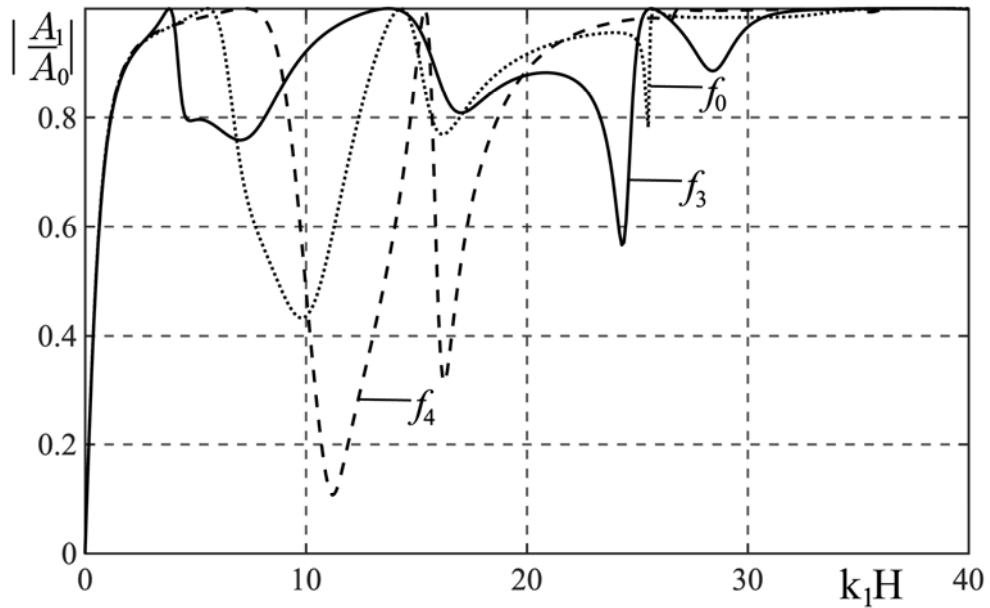


Рис. 2.33. Частотные зависимости коэффициента отражения для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $\theta_0 = \pi/6$

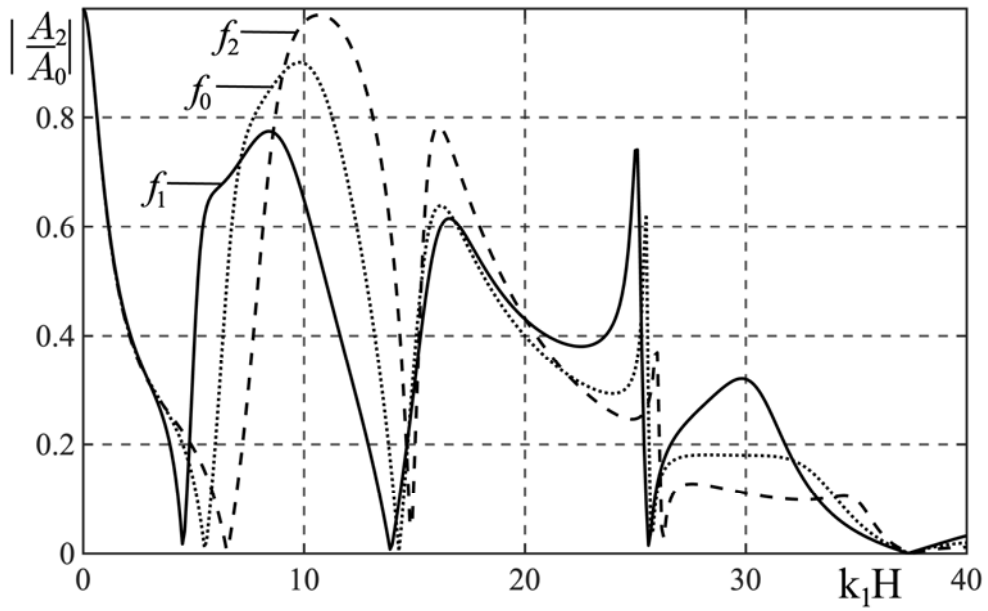


Рис. 2.34. Частотные зависимости коэффициента прозрачности для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $\theta_0 = \pi / 6$

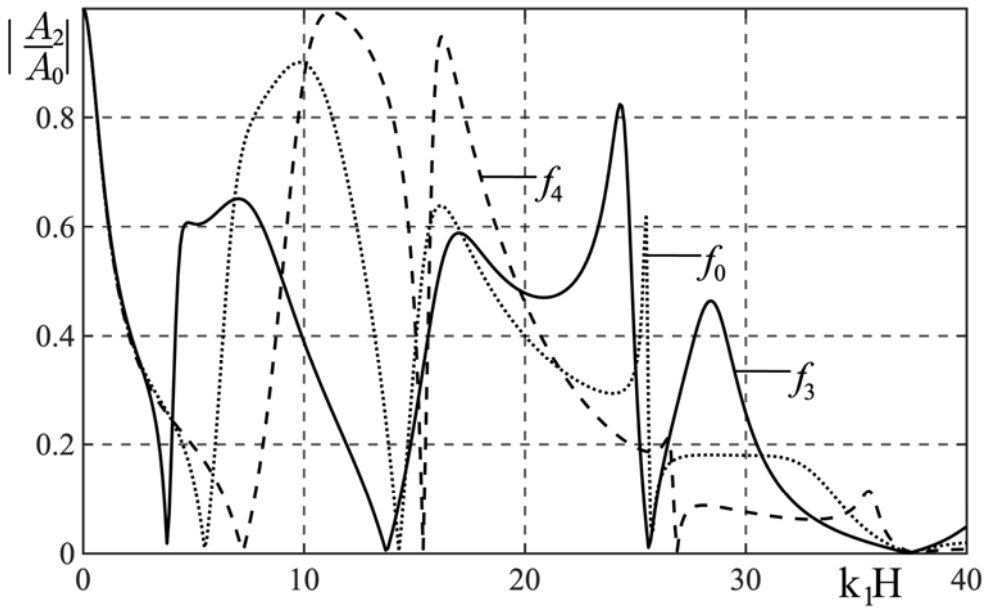


Рис. 2.35. Частотные зависимости коэффициента прозрачности для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $\theta_0 = \pi / 6$

На рис. 2.36 – 2.43 изображены частотные зависимости коэффициентов отражения и прозрачности для случая, когда покрытие нанесено на пластину со стороны, противоположной падению волны.

Частотные характеристики, представленные на рис. 2.36 – 2.39, рассчитаны при нормальном падении плоской волны на пластину, когда $\theta_0 = 0$.

Частотные характеристики, представленные на рис. 2.40 – 2.43, рассчитаны при наклонном падении плоской волны на пластину, когда $\theta_0 = \pi / 6$.

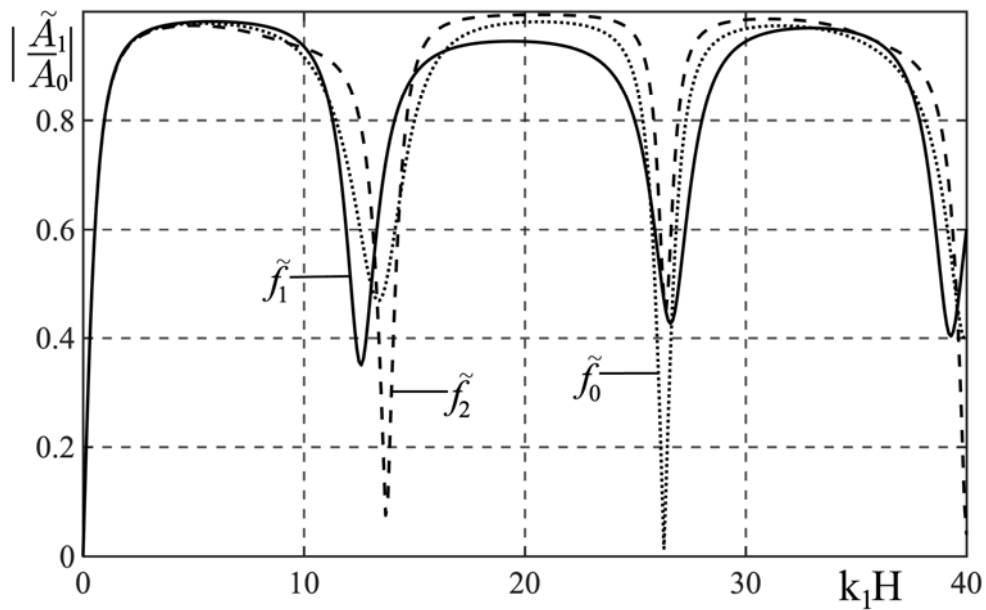


Рис. 2.36. Частотные зависимости коэффициента отражения для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $\theta_0 = 0$

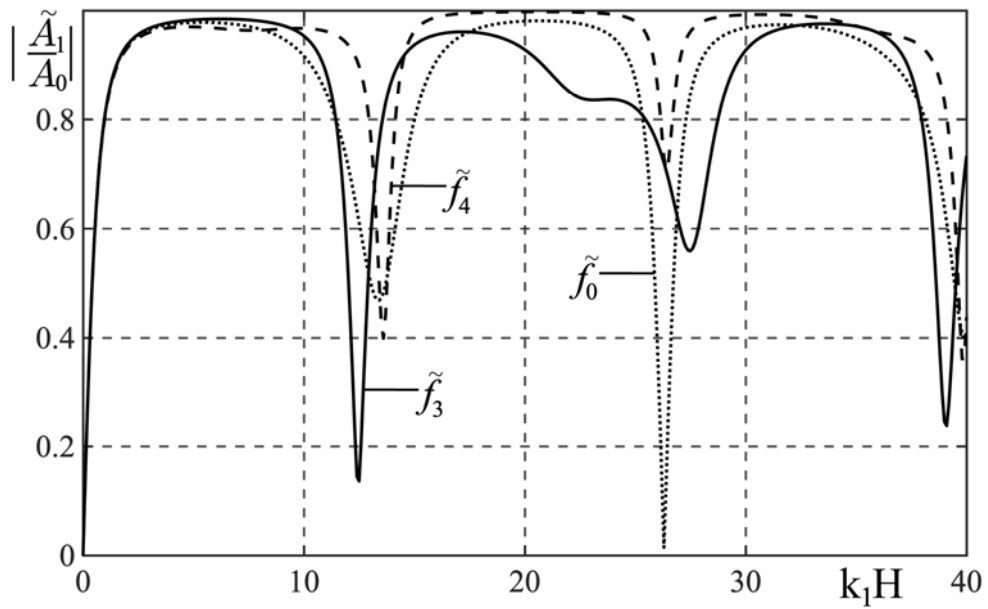


Рис. 2.37. Частотные зависимости коэффициента отражения для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $\theta_0 = 0$

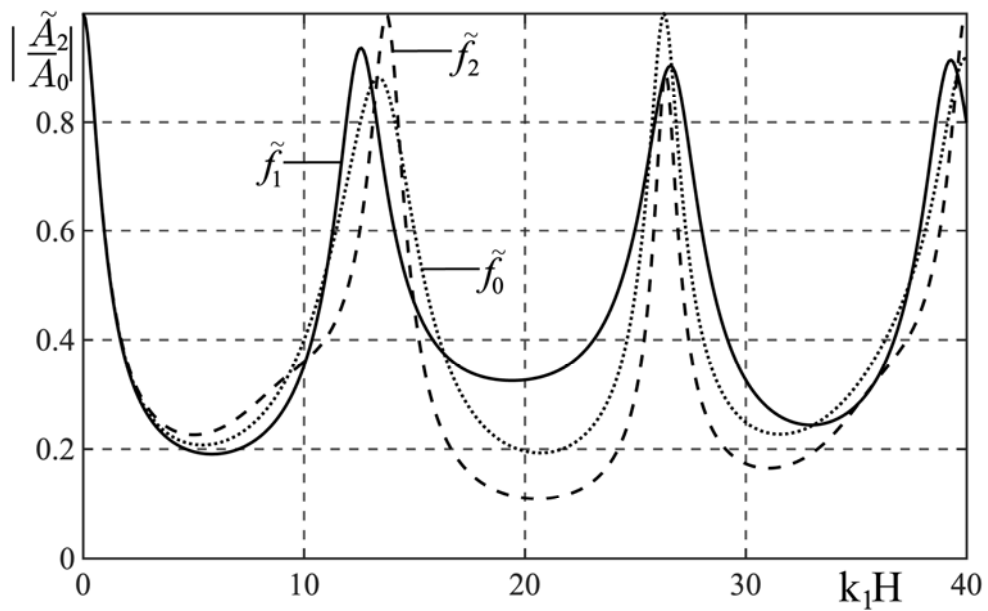


Рис. 2.38. Частотные зависимости коэффициента прозрачности для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $\theta_0 = 0$

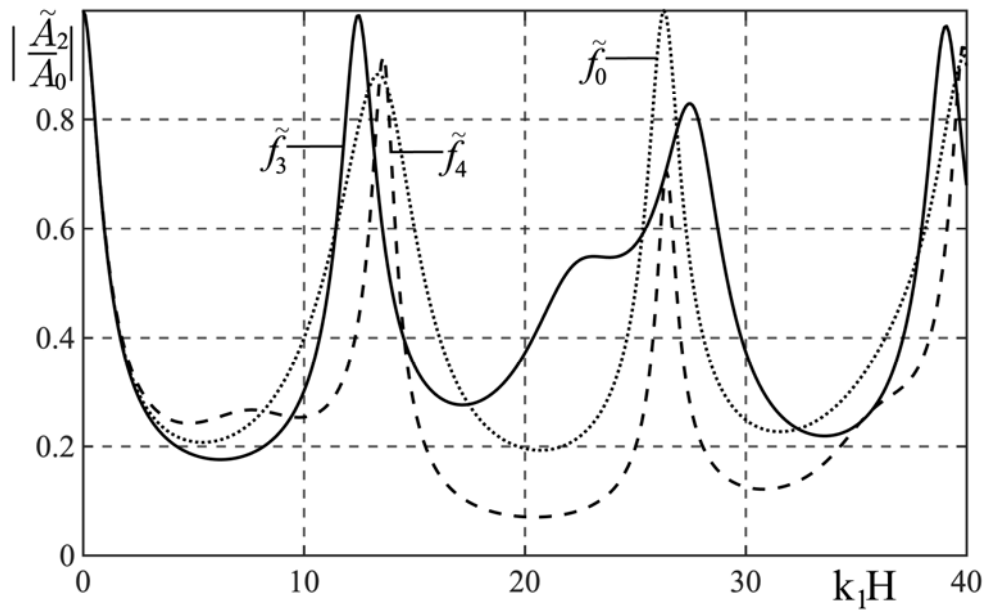


Рис. 2.39. Частотные зависимости коэффициента прозрачности для квадратных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $\theta_0 = 0$

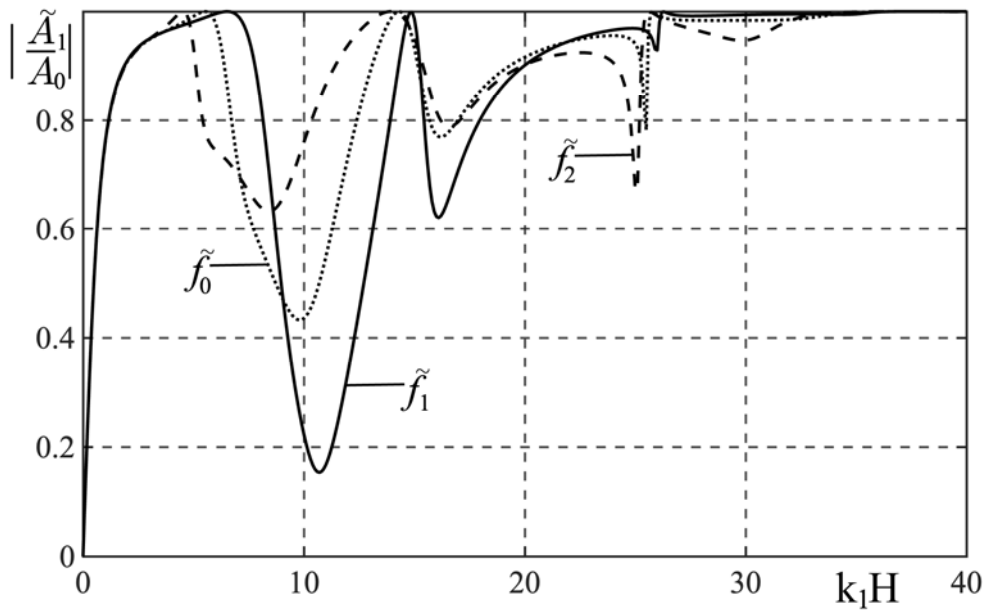


Рис. 2.40. Частотные зависимости коэффициента отражения для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $\theta_0 = \pi/6$

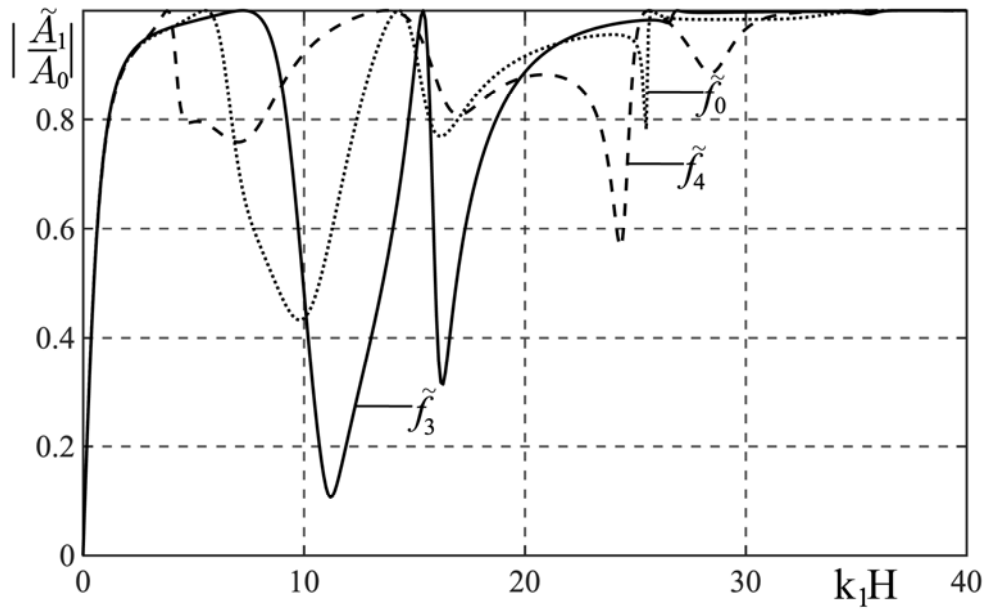


Рис. 2.41. Частотные зависимости коэффициента отражения для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $\theta_0 = \pi / 6$

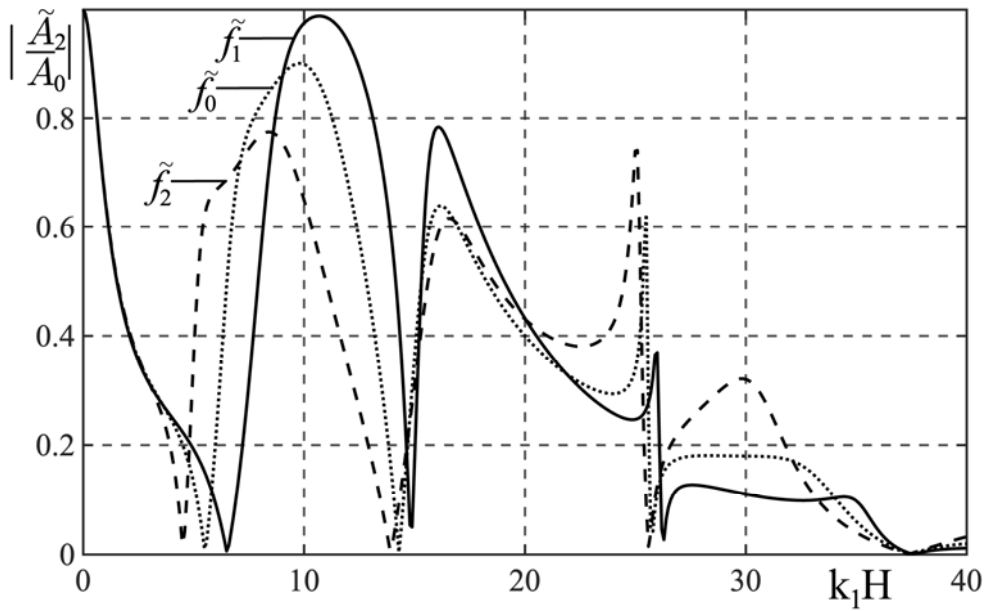


Рис. 2.42. Частотные зависимости коэффициента прозрачности для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $\theta_0 = \pi / 6$

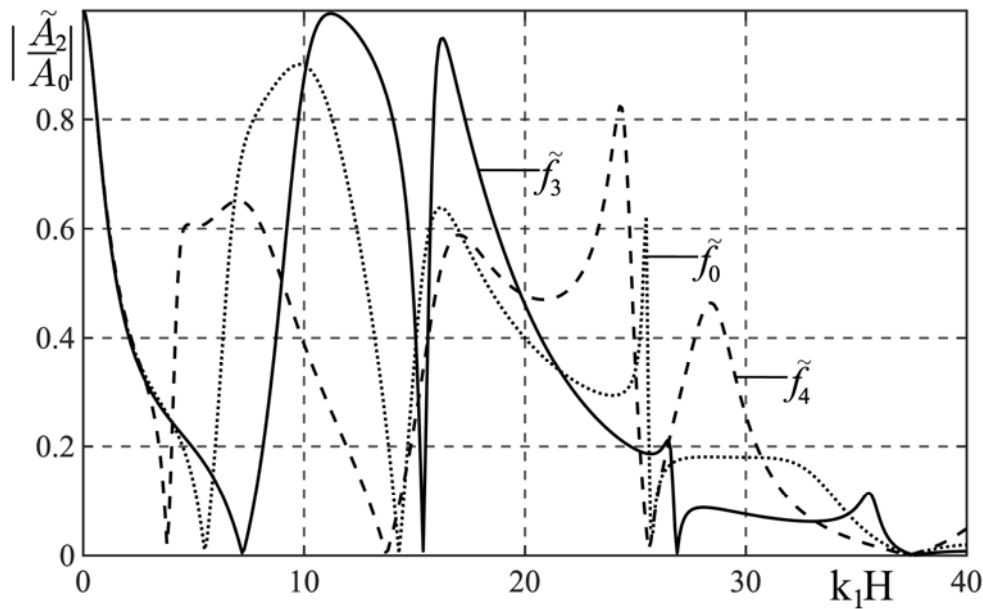


Рис. 2.43. Частотные зависимости коэффициента прозрачности для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $\theta_0 = \pi / 6$

Анализируя частотные характеристики, прежде всего отметим, что в области низких частот на отражение и прохождение звука практически не сказывается неоднородность покрытия. С увеличением частоты наблюдается значительное изменение зависимостей для неоднородных покрытий по сравнению с однородным. Особенно ярко это проявляется в случае наклонного падения плоской волны, причем при любом расположении покрытия.

При нормальном падении плоской волны наблюдается периодичность появления резонансов и в случае однородного покрытия, и при разных законах неоднородности. В случае наклонного падения такая периодичность не проявляется.

Различные виды неоднородности материала покрытия приводят к разнонаправленному смещению резонансов по сравнению с однородным покрытием. Это наблюдается как для линейных, так и квадратичных законов неоднородности при расположении покрытия на разных сторонах пла-

стины. Из графиков также видим, что различные виды неоднородности приводят к существенному изменению уровней резонансов.

В работе [24] было обнаружено, что плоский неоднородный по толщине слой неразличим по отраженному и преломленному полям для линейных законов неоднородности, симметричных относительно некоторой прямой, перпендикулярной оси z .

Расчеты, проведенные на основе полученных в настоящей главе решений задач при $H \rightarrow 0$ подтвердили этот эффект для симметричных линейных и нелинейных законов неоднородности.

При отражении и прохождении звука через однородную упругую пластину с неоднородным покрытием указанный эффект не наблюдается.

Однако анализ результатов численных исследований выявил интересную особенность. Угловые и частотные зависимости оказываются идентичными для покрытия сверху при неоднородности вида $f_1(z)$ ($f_2(z)$) и для покрытия снизу при неоднородности вида $\tilde{f}_2(z)$ ($\tilde{f}_1(z)$). Это видно из сравнения соответствующих угловых зависимостей на рис. 2.4 и 2.16 (2.6 и 2.18), 2.8 и 2.20 (2.10 и 2.22), 2.12 и 2.24 (2.14 и 2.26). Тот же эффект наблюдается и для квадратичных законов неоднородности $f_4(z)$ ($f_3(z)$) – покрытие сверху и $\tilde{f}_3(z)$ ($\tilde{f}_4(z)$) – покрытие снизу (см., например, угловые зависимости на рис. 2.5 и 2.17, 2.9 и 2.21, 2.13 и 2.25). Идентичность частотных характеристик для указанных выше пар функций видим, сравнивая графики для линейных законов неоднородности на рис. 2.28 и 2.36, (2.30 и 2.38), а также для квадратичных законов неоднородности на рис. 2.29 и 2.37 (2.31 и 2.39) в случае нормального падения. Аналогичное совпадение частотных зависимостей наблюдаем и в случае наклонного падения плоской волны.

Таким образом, обнаружено, что в случае контакта пластины с одинаковыми идеальными жидкостями перенос с переворотом покрытия с од-

ной стороны однородной пластины на другую не изменяет картину отражения и прохождения звука при любых линейных и нелинейных законах неоднородности материала покрытия в случае, когда жидкости по обе стороны пластины одинаковы.

Замечаем, что при переносе однородного покрытия с одной стороны пластины на другую угловые и частотные характеристики остаются неизменными. Однако переносе неоднородного покрытия без переворота приводит к изменению акустических характеристик пластины.

Чтобы проверить наличие указанного выше эффекта для случая, когда по обе стороны пластины находятся разные жидкости, были проведены расчеты угловых зависимостей коэффициентов прозрачности для пластин с однородным покрытием и покрытиями с линейными и квадратичными законами неоднородности при волновом размере пластины $k_1 H = 10$. Предполагалось, что жидкость, граничащая с пластиной сверху – бензол ($\rho_1 = 775$ кг/м³, $c_1 = 1170$ м/с), а снизу – вода ($\rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_2 = 1485$ м/с).

На рис. 2.44, 2.45 изображены угловые зависимости, когда покрытие нанесено на пластину со стороны падения плоской волны, а на рис. 2.46, 2.47 – с противоположной.

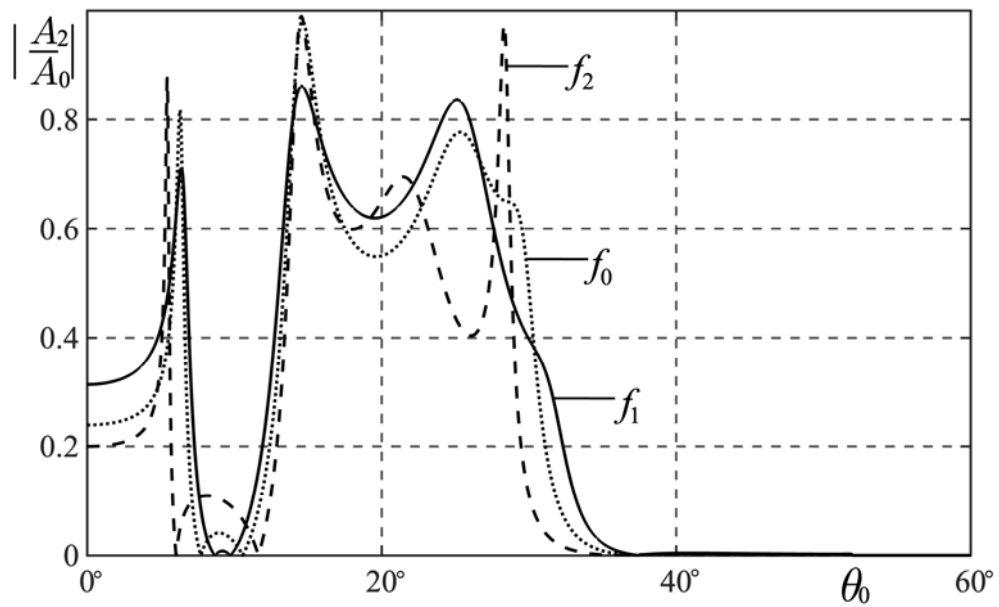


Рис. 2.44. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$

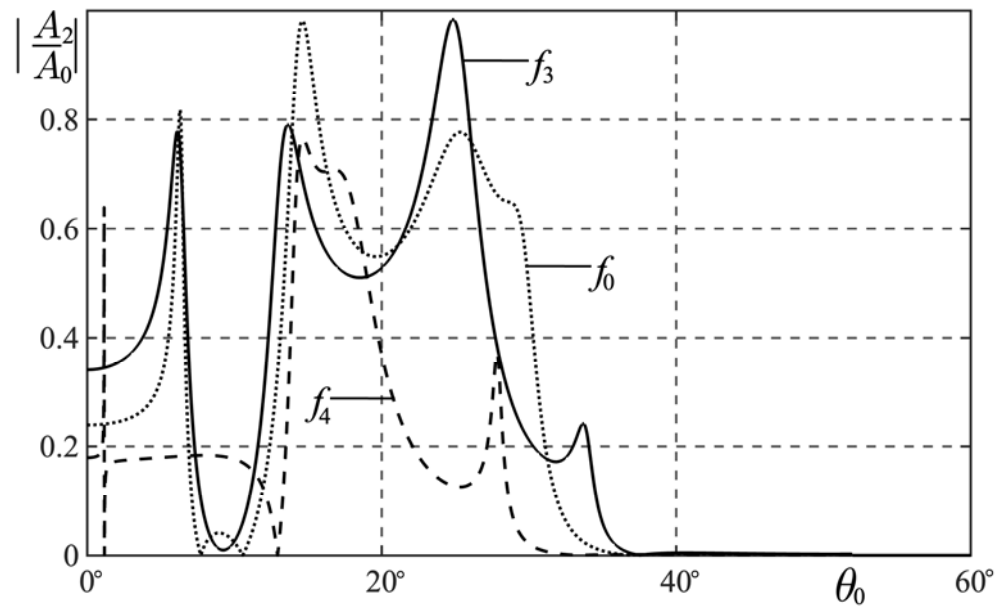


Рис. 2.45. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$

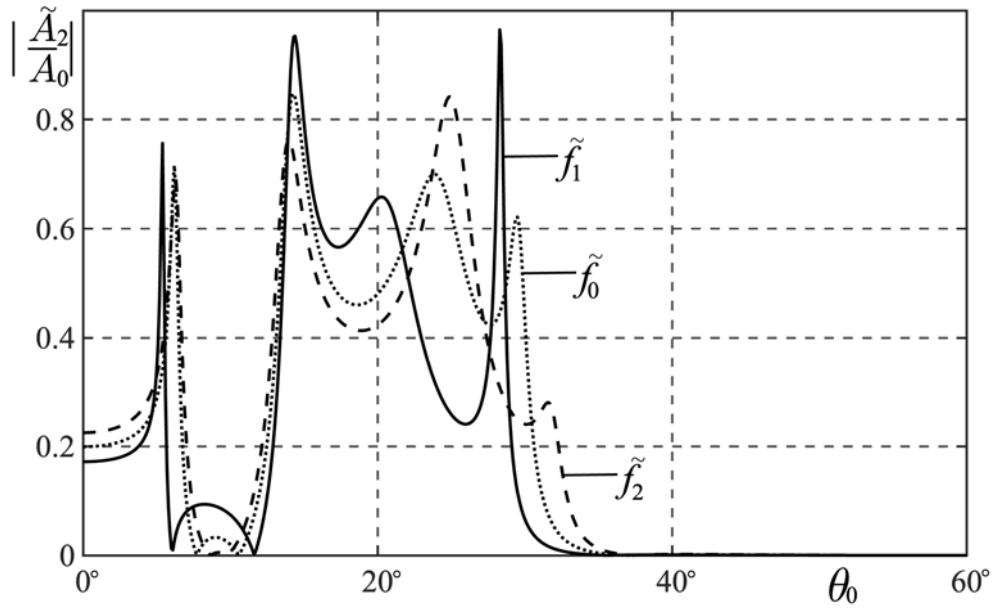


Рис. 2.46. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$

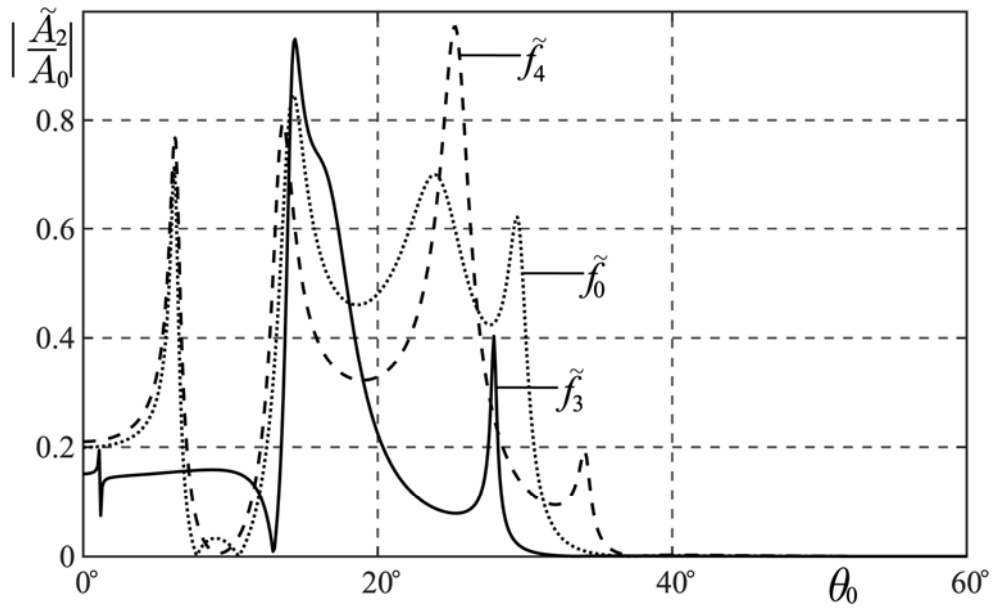


Рис. 2.47. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $\tilde{f}_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$

Как видно из графиков на рис. 2.44 – 2.47 в случае разных граничащих жидкостей обнаруженный выше эффект не наблюдается. Даже, если покрытие однородное, то его перенос на другую сторону пластины приводит к изменению звукоотражения и звукопрохождения, что видно из рис. 2.48.

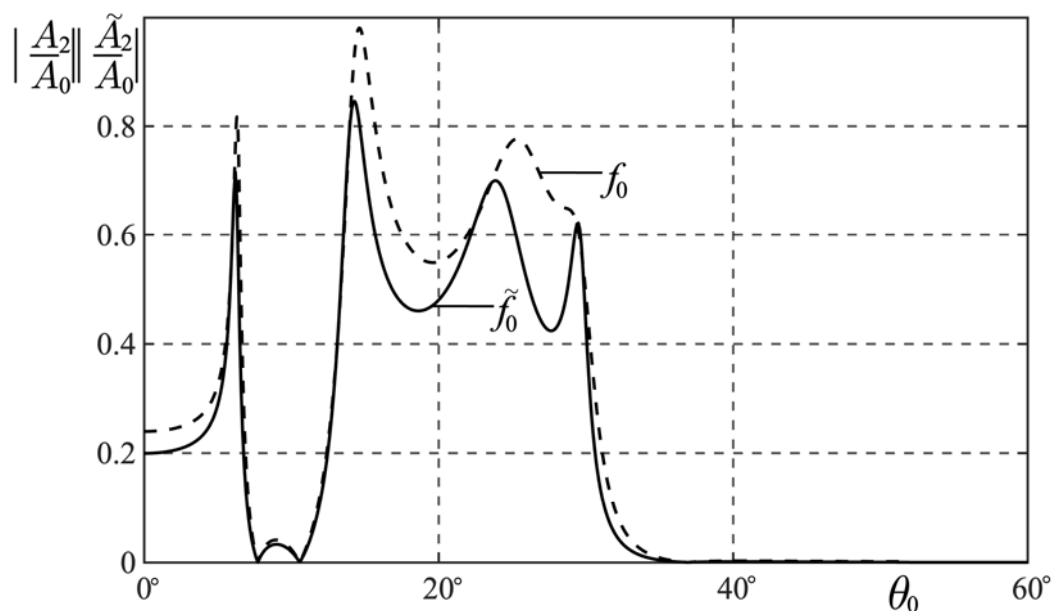


Рис. 2.48. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для однородных покрытий

Таким образом, перенос покрытия на другую сторону пластины с поворотом или без него приводит к изменению картины отражения и прохождения звука, если жидкости по обе стороны пластины разные.

Отметим, что знание структуры угловых и частотных характеристик может быть использовано для управления диаграммой направленности переизлученного и преломленного полей.

Глава 3. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

В главе 2 первичное поле возмущений представлено в виде падающей плоской волны. Однако, как правило, приходится учитывать конечную удаленность источника звука от рассеивателя. Криволинейность фронта падающей волны оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоский слой. С математической точки зрения в этом случае задача становится значительно сложнее.

В главе 3 получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении гармонической цилиндрической звуковой волны через упругую однородную пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием. Представлены результаты численных расчетов частотных характеристик отраженного и прошедшего акустических полей.

Результаты исследований, представленные во второй главе, изложены в работах [42, 65].

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h . Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты z : $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, $\rho = \rho(z)$. При этом декартова система прямоугольных координат x, y, z выбрана таким образом, что ось x лежит в плоскости, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пла-

стины (рис. 3.1). Пластина с покрытием помещена между двумя полупространствами, заполненными идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

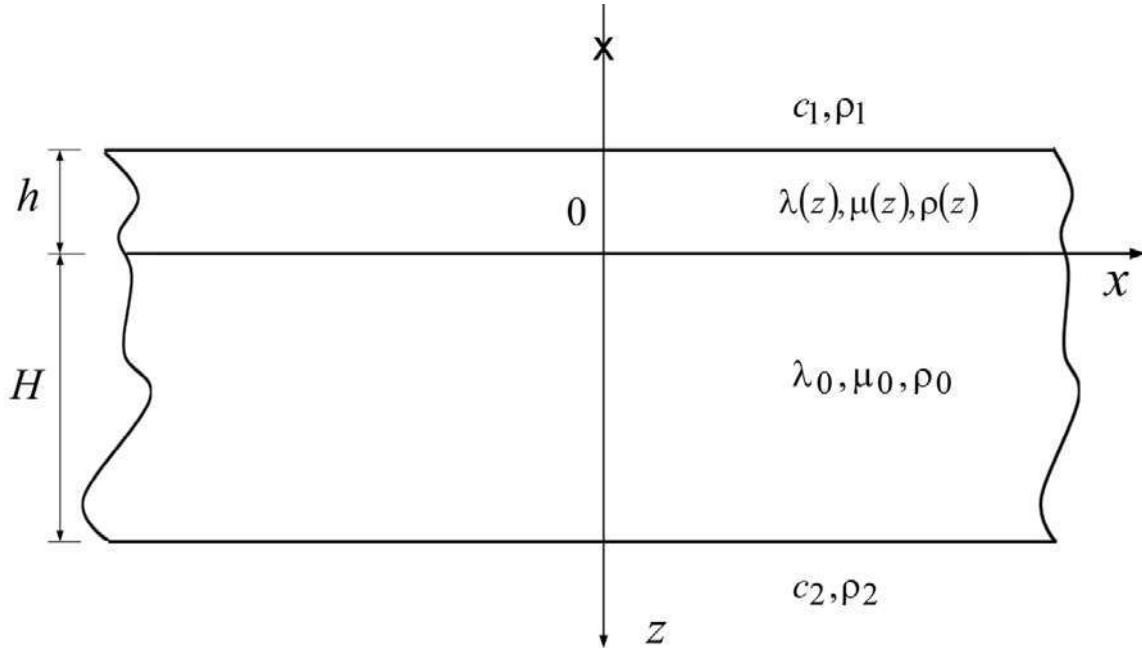


Рис. 3.1. Геометрия задачи

Пусть из полупространства $z < -h$ на пластину с покрытием падает монохроматическая симметричная цилиндрическая звуковая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси y . Без ограничения общности полагаем, что положение источника определяется координатами

$$x = x_0 = 0; \quad -\infty < y < \infty; \quad z = -z_0.$$

Потенциал скорости падающей волны имеет вид

$$\psi_0 = AH_0(k_1 R) \exp(-i\omega t), \quad (3.1)$$

где A – амплитуда волны; $k_1 = \omega / c_1$ – волновое число в полупространстве $z < -h$; ω – круговая частота; $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка; $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$; \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 – векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения $M(x, 0, z)$ и с точкой

$M_0(0,0,-z_0)$, определяющей положение источника, соответственно;
 $R = [x^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}$; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием звуковые волны, а также найдем поля смещений в однородной пластине и неоднородном слое.

3.2. Математическая модель задачи

Ввиду осевой симметрии задачи и свойств упругого материала покрытия, рассматриваемая задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты y .

Распространение звуковых волн в полупространствах $z < -h$ и $z > H$ в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [60]

$$\Delta\psi_j + k_j^2\psi_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (3.2)$$

где ψ_1 и ψ_2 – потенциалы скорости отраженной от пластины и прошедшей через нее волн; $k_2 = \omega / c_2$ – волновое число в полупространстве $z > H$ ($j = 2$); $\psi = \psi_0 + \psi_1$ – потенциал скорости полного акустического поля в полупространстве $z < -h$ ($j = 1$). При этом скорость частиц жидкости \mathbf{v}_j и акустическое давление p_j в верхнем и нижнем полупространствах определяются по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \text{grad}(\psi_0 + \psi_1), \quad \mathbf{v}_2 = \text{grad} \psi_2, \quad p_1 = i\rho_1\omega(\psi_0 + \psi_1), \quad p_2 = i\rho_2\omega\psi_2.$$

Распространение малых возмущений в упругой однородной изотропной пластине в случае гармонического движения описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [60]

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad \Delta\Phi + k_t^2\Phi = 0, \quad (3.3)$$

где Ψ и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega / c_l$ и

$k_\tau = \omega / c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + \mu_0) / \rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0 / \rho_0}$ – скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя $\mathbf{u}^0 = \text{grad} \Psi + \text{rot} \Phi$ ($\text{div} \Phi = 0$).

Так как рассматриваемая задача является двумерной, то $\Phi = \Phi(x, z) \mathbf{e}_y$, где \mathbf{e}_y – единичный вектор оси y . Тогда векторное уравнение относительно Φ сведется к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции $\Phi(x, z)$.

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [43], которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\omega^2 \rho(z) u_x, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\omega^2 \rho(z) u_z, \quad (3.4)$$

где u_x и u_z – компоненты вектора смещения \mathbf{u} частиц неоднородного слоя, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Решения дифференциальных уравнений (3.2) – (3.4) должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на поверхностях, соприкасающихся с жидкостями, заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$z = -h: \quad -i\omega u_z = v_{1z}, \quad \sigma_{zz} = -p_1, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (3.5)$$

$$z = H: \quad -i\omega u_z^0 = v_{2z}, \quad \sigma_{zz}^0 = -p_2, \quad \sigma_{xz}^0 = 0. \quad (3.6)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$z=0: \quad u_x = u_x^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0. \quad (3.7)$$

В (3.6) и (3.7) u_x^0 и u_z^0 – компоненты вектора смещения \mathbf{u}^0 частиц однородной пластины; σ_{ij}^0 – компоненты тензора напряжений в однородной пластине.

3.3. Аналитическое решение задачи

Найдем решение задачи (3.2) – (3.7), воспользовавшись решением задачи о прохождении плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием, полученным в [75].

Приведем некоторые элементы решения задачи для случая плоской падающей волны и отметим их индексом pl (*plane*). Согласно [75] потенциал скорости падающей плоской волны выражается формулой

$$\psi_{0\,pl} = A_0 \exp\{i[k_{1x}x + k_{1z}(z + h)]\}, \quad (3.8)$$

а потенциалы скорости отраженной от пластины и прошедшей через нее волн, потенциалы смещения а однородной пластине и компоненты вектора смещения в неоднородном покрытии выражаются формулами

$$\psi_{1\,pl} = A_1 \exp\{i[k_{1x}x - k_{1z}(z + h)]\},$$

$$\psi_{2\,pl} = A_2 \exp\{i[k_{2x}x + k_{2z}(z - H)]\},$$

$$\Psi_{pl} = B_1 \exp[i(k_{1x}x + k_{1z}z)] + B_2 \exp[i(k_{1x}x - k_{1z}z)],$$

$$\Phi_{pl} = C_1 \exp[i(k_{1x}x + k_{1z}z)] + C_2 \exp[i(k_{1x}x - k_{1z}z)], \quad (3.9)$$

$$u_{x\,pl} = U_1(z) \exp(ik_{1x}x), \quad u_{z\,pl} = U_2(z) \exp(ik_{1x}x),$$

где A_0 – амплитуда падающей плоской волны; $k_{1x} = k_1 \sin \theta_0$, $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2} = k_1 \cos \theta_0$ – проекции волнового вектора \mathbf{k}_1 в полупространстве $z < -h$ на оси координат x и z соответственно; θ_0 – угол падения плоской волны, составляемый нормалью к фронту плоской волны с

осью z ; k_{2x} , k_{2z} – проекции волнового вектора прошедшей волны \mathbf{k}_2 на оси координат x и z ; $k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2}$; $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2}$, $k_{tz} = \sqrt{k_t^2 - k_{tx}^2}$.

При этом согласно закону Снеллиуса [4] $k_{2x} = k_{lx} = k_{tx} = k_{1x}$.

В выражения для коэффициентов A_j , B_j , C_j ($j = 1, 2$) входят величины $U_2(-h)$, $U_1(0)$ и $U_2(0)$. Функции $U_n(z)$ ($n = 1, 2$) являются решением краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathbf{A}\mathbf{U}'' + \mathbf{B}\mathbf{U}' + \mathbf{C}\mathbf{U} = 0, \quad (3.10)$$

с краевыми условиями

$$(\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{E}\mathbf{U})_{z=-h} = \mathbf{D}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{F}\mathbf{U})_{z=0} = 0, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$; $\mathbf{A} = (A_{mn})$, $\mathbf{B} = (B_{mn})$, $\mathbf{C} = (C_{mn})$, $\mathbf{E} = (E_{mn})$, $\mathbf{F} = (F_{mn})$ – матрицы второго порядка; $\mathbf{D} = (D_m)_{2 \times 1}$ ($m, n = 1, 2$). Выражения для элементов матриц приведены в разделе 2.2.

Отметим, что в [75] краевая задача (3.10), (3.11) решена численно методом ортогональной прогонки С.К. Годунова.

Воспользуемся приближенным аналитическим решением краевой задачи (3.10), (3.11), полученным в разделе 2.3

$$U_n(z) = \sum_{l=1}^4 \bar{C}_l U_n^l(z), \quad U_n^l(z) = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n = 1, 2). \quad (3.12)$$

Коэффициенты \bar{C}_l ($l = 1, 2, 3, 4$) определяются из системы четырех линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=1}^4 \bar{C}_l (\mathbf{A}\mathbf{U}^{l'} + \mathbf{E}\mathbf{U}^l)_{z=-h} = \mathbf{D},$$

$$\sum_{l=1}^4 \bar{C}_l (\mathbf{A}\mathbf{U}_n^{l'} + \mathbf{F}\mathbf{U}^l)_{z=0} = 0,$$

где $\mathbf{U}^l(z) = (U_1^l, U_2^l)^T$.

Коэффициенты $U_n^{l(s)}$ ($n=1,2$; $l=1,2,3,4$) разложений (3.12) вычисляются по формулам

$$U_1^{l(0)} = \delta_{1l}, \quad U_2^{l(0)} = \delta_{2l}, \quad U_1^{l(1)} = \delta_{3l}, \quad U_2^{l(1)} = \delta_{4l},$$

$$U_n^{l(s+2)} = -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} +$$

$$+ B_{nq}^{(k)}]U_q^{l(s+1-k)} + C_{nq}^{(k)}U_q^{l(s-k)}\} \quad (s=0,1,\dots)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера;

$$A_{11}^{(k)} = \mu^{(k)}; \quad A_{12}^{(k)} = A_{21}^{(k)} = 0; \quad A_{22}^{(k)} = \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)};$$

$$B_{11}^{(k)} = (k+1)\mu^{(k+1)}; \quad B_{12}^{(k)} = B_{21}^{(k)} = ik_{1x}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)});$$

$$B_{22}^{(k)} = (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)});$$

$$C_{11}^{(k)} = -k_{1x}^2(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}) + \omega^2 \rho^{(k)}; \quad C_{12}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\mu^{(k+1)};$$

$$C_{21}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad C_{22}^{(k)} = -k_{1x}^2\mu^{(k)} + \omega^2 \rho^{(k)}.$$

Используя интегральное представление функции $H_0(x)$ [77], запишем цилиндрическую волну (3.1) в виде

$$\psi_0(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_0(\xi) d\xi, \quad (3.13)$$

где

$$\tilde{\psi}_0(\xi) = A \frac{1}{\pi \eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} e^{i\eta_1|z+z_0|}, \quad \eta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}. \quad (3.14)$$

При $|\xi| > k$ величина η_1 становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k_1^2 - \xi^2}$ из условия $\text{Im} \eta_1 \geq 0$ обеспечивает ограниченность поля падающей волны при $|z| \rightarrow \infty$.

Таким образом, $\eta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$ при $-k_1 < \xi < k_1$, $\eta_1 = i\sqrt{\xi^2 - k_1^2}$ при $|\xi| > k_1$.

Произведение экспонент в подынтегральном выражении (3.14)

представляет собой плоскую волну, направление распространения которой задается горизонтальной ξ и вертикальной η_1 компонентами волнового вектора \mathbf{k}_1 .

При $z > -z_0$ формула (3.14) принимает вид (с учетом того, что $x_0 = 0$)

$$\tilde{\Psi}_0(\xi) = I(\xi) e^{i(\xi x + \eta_1 z)}, \quad I(\xi) = A \frac{1}{\pi \eta_1} e^{i \eta_1 z_0}. \quad (3.15)$$

В дальнейшем величины, зависящие от ξ будем обозначать знаком «тильда».

Сравнивая формулы (3.15) и (3.8) замечаем, что подынтегральное выражение в (3.13), определяемое (3.15), аналогично по форме выражению плоской волны (3.8). При этом ξ соответствует k_{1x} , а $I(\xi) - A_0 e^{i k_{1z} h}$. Следовательно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом $\tilde{\Psi}_0(\xi)$, потенциалы отраженной $\tilde{\Psi}_1$ и прошедшей $\tilde{\Psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ и компоненты вектора смещения \tilde{u}_x , \tilde{u}_z в покрытии определяется формулами, аналогичными (3.9), в которых следует сделать указанные выше замены.

В результате будем иметь

$$\tilde{\Psi}_1 = \tilde{A}_1 \exp\{i[\xi x - \eta_1(z + h)]\}, \quad \tilde{\Psi}_2 = \tilde{A}_2 \exp\{i[\xi x + \eta_2(z - H)]\}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{\Psi} = \tilde{B}_1 \exp[i(\xi x + \eta_l z)] + \tilde{B}_2 \exp[i(\xi x - \eta_l z)], \quad (3.17)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{C}_1 \exp[i(\xi x + \eta_\tau z)] + \tilde{C}_2 \exp[i(\xi x - \eta_\tau z)], \quad (3.18)$$

$$\tilde{u}_x = \tilde{U}_1(z, \xi) \exp(i \xi x), \quad \tilde{u}_z = \tilde{U}_2(z, \xi) \exp(i \xi x), \quad (3.19)$$

где

$$\tilde{A}_1 = I(\xi) e^{-i \eta_1 h} + \frac{\omega}{\eta_1} \tilde{U}_2(-h, \xi), \quad (3.20)$$

$$\tilde{A}_2 = -\frac{i\omega}{\eta_2} \left[\eta_l (\tilde{B}_1 \tilde{e}_{1l} - \tilde{B}_2 \tilde{e}_{2l}) + \xi (\tilde{C}_1 \tilde{e}_{1\tau} + \tilde{C}_2 \tilde{e}_{2\tau}) \right], \quad (3.21)$$

$$\tilde{B}_j = \tilde{\beta}_{1j} \tilde{U}_1(0, \xi) + \tilde{\beta}_{2j} \tilde{U}_2(0, \xi),$$

$$\tilde{C}_j = \tilde{\gamma}_{1j} \tilde{U}_1(0, \xi) + \tilde{\gamma}_{2j} \tilde{U}_2(0, \xi) \quad (j=1, 2),$$

$$\eta_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}, \quad \eta_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2}, \quad \eta_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2},$$

$$\tilde{e}_{1l} = e^{i\eta_l H}, \quad \tilde{e}_{2l} = e^{-i\eta_l H}, \quad \tilde{e}_{1\tau} = e^{i\eta_\tau H}, \quad \tilde{e}_{2\tau} = e^{-i\eta_\tau H},$$

$$\tilde{\beta}_{11} = \xi \tilde{t}_2 \tilde{w}_1, \quad \tilde{\beta}_{21} = \eta_\tau \tilde{r}_2 \tilde{w}_1, \quad \tilde{\beta}_{12} = \xi \tilde{t}_1 \tilde{w}_1, \quad \tilde{\beta}_{22} = -\eta_\tau \tilde{r}_1 \tilde{w}_1,$$

$$\tilde{\gamma}_{11} = -\eta_l \tilde{q}_2 \tilde{w}_2, \quad \tilde{\gamma}_{21} = \xi \tilde{g}_2 \tilde{w}_2,$$

$$\tilde{\gamma}_{12} = \eta_l \tilde{q}_1 \tilde{w}_2, \quad \tilde{\gamma}_{22} = -\xi \tilde{g}_1 \tilde{w}_2,$$

$$\tilde{w}_1 = \frac{-4i\mu_0 \tilde{s}_3}{\tilde{r}_1 \tilde{t}_2 + \tilde{r}_2 \tilde{t}_1}, \quad \tilde{w}_2 = \frac{4i\tilde{s}_1}{\tilde{g}_1 \tilde{q}_2 - \tilde{g}_2 \tilde{q}_1},$$

$$\tilde{g}_j = (-1)^j 4\tilde{s}_1 \eta_l \eta_\tau - (\tilde{s}_{7-j} \tilde{e}_{1l} + \tilde{s}_{9-j} \tilde{e}_{2l}) \tilde{e}_{j\tau},$$

$$\tilde{q}_j = 4\tilde{s}_1 \xi^2 + (\tilde{s}_{7-j} \tilde{e}_{1l} - \tilde{s}_{9-j} \tilde{e}_{2l}) \tilde{e}_{j\tau},$$

$$\tilde{t}_j = 4\mu_0 \tilde{s}_3 \eta_l \eta_\tau + (\tilde{s}_{6+(-1)^j} \tilde{e}_{2\tau} - \tilde{s}_{7+(-1)^j} \tilde{e}_{1\tau}) \tilde{e}_{jl},$$

$$\tilde{r}_j = 4\mu_0 \xi^2 \tilde{s}_3 + (-1)^j (\tilde{s}_{6+(-1)^j} \tilde{e}_{2\tau} + \tilde{s}_{7+(-1)^j} \tilde{e}_{1\tau}) \tilde{e}_{jl},$$

$$\tilde{s}_1 = (\lambda_0 + 2\mu_0) k_l^2 - 2\mu_0 \xi^2, \quad \tilde{s}_2 = 2\mu_0 \xi \eta_\tau, \quad \tilde{s}_3 = 2\xi^2 - k_\tau^2, \quad \tilde{s}_4 = \frac{\omega_2 \rho_2}{\eta_2},$$

$$\tilde{s}_{4+j} = \tilde{s}_3 (\tilde{s}_4 \eta_l - \tilde{s}_1) - 2\xi \eta_l (\tilde{s}_4 \xi - (-1)^j \tilde{s}_2),$$

$$\tilde{s}_{6+j} = \tilde{s}_3 (\tilde{s}_4 \eta_l + \tilde{s}_1) - 2\xi \eta_l (\tilde{s}_4 \xi - (-1)^j \tilde{s}_2) \quad (j=1, 2).$$

Кроме того, указанные замены k_{1x} на ξ и A_0 на $I(\xi)e^{-i\xi h}$ следует произвести и в элементах матриц **B**, **C**, **E**, **F**, **D** краевой задачи (3.10) – (3.11) для нахождения $\tilde{U}_n(z, \xi)$ ($n=1, 2$) из преобразованного выражения (3.12).

Получим

$$\tilde{U}_n(z, \xi) = \sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l \tilde{U}_n^l(z, \xi), \quad \tilde{U}_n^l(z, \xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{U}_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n=1,2), \quad (3.22)$$

где

$$\tilde{U}_1^{l(0)} = \delta_{1l}, \quad \tilde{U}_2^{l(0)} = \delta_{2l}, \quad \tilde{U}_1^{l(1)} = \delta_{3l}, \quad \tilde{U}_2^{l(1)} = \delta_{4l};$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n^{l(s+2)} = & -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + \\ & + \tilde{B}_{nq}^{(k)}] \tilde{U}_q^{l(s+1-k)} + \tilde{C}_{nq}^{(k)} \tilde{U}_q^{l(s-k)}\} \quad (s=0,1,\dots), \end{aligned}$$

$$B_{11}^{(k)} = (k+1)\mu^{(k+1)}, \quad B_{12}^{(k)} = B_{21}^{(k)} = i\xi(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}),$$

$$B_{22}^{(k)} = (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)}),$$

$$C_{11}^{(k)} = -\xi^2(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}) + \omega^2\rho^{(k)}, \quad C_{12}^{(k)} = i\xi(k+1)\mu^{(k+1)},$$

$$C_{21}^{(k)} = i\xi(k+1)\lambda^{(k+1)}, \quad C_{22}^{(k)} = -\xi^2\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}.$$

Коэффициенты \tilde{C}_l ($l=1,2,3,4$) определяются из системы уравнений

$$\sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l \left(\mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}}^l + \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{U}}^l \right)_{z=-h} = \tilde{\mathbf{D}},$$

$$\sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l \left(\mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}}_n^l + \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{U}}^l \right)_{z=0} = 0,$$

где $\tilde{\mathbf{U}}^l(z, \xi) = (\tilde{U}_1^l, \tilde{U}_2^l)^T$,

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & i\xi\mu \\ i\xi\lambda & i\omega^2\rho_1/\eta_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} & i\xi\mu + \tilde{f}_{12} \\ i\xi\lambda + \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = (0; -2i\rho_1\omega I(\xi)e^{-i\xi h})^T,$$

$$\tilde{f}_{1j} = \mu_0 \left[2\xi\sqrt{k_l^2 - \xi^2} (\tilde{\beta}_{j1} - \tilde{\beta}_{j2}) + \tilde{s}_3(\tilde{\gamma}_{j1} + \tilde{\gamma}_{j2}) \right],$$

$$\tilde{f}_{2j} = \tilde{s}_1(\tilde{\beta}_{j1} + \tilde{\beta}_{j2}) + \tilde{s}_2(\tilde{\gamma}_{j1} - \tilde{\gamma}_{j2}) \quad (j=1,2).$$

Штрихи означают дифференцирование по z .

Чтобы обеспечить ограниченность поля прошедшей волны при $z \rightarrow \infty$, выбор знака корня $\eta_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}$ осуществим из условия $\text{Im} \eta_2 \geq 0$, то есть

$$\eta_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \quad \text{при } -k_2 < \xi < k_2, \quad \eta_2 = i\sqrt{\xi^2 - k_2^2} \quad \text{при } |\xi| > k_2.$$

Величины $\eta_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2}$, $\eta_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2}$ определяются по формулам

$$\eta_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2} \quad \text{при } -k_l < \xi < k_l, \quad \eta_l = i\sqrt{\xi^2 - k_l^2} \quad \text{при } |\xi| > k_l;$$

$$\eta_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2} \quad \text{при } -k_\tau < \xi < k_\tau, \quad \eta_\tau = i\sqrt{\xi^2 - k_\tau^2} \quad \text{при } |\xi| > k_\tau.$$

При рассеянии цилиндрической волны пластиной с покрытием искомые потенциалы ψ_j ($j=1,2$), Ψ , Φ и компоненты вектора смещения u_x , u_z в неоднородном покрытии определяется путем интегрирования

$$\psi_j(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\xi) d\xi \quad (j=1,2), \quad (3.23)$$

$$\Psi(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(\xi) d\xi, \quad \Phi(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\xi) d\xi, \quad (3.24)$$

$$u_x(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_x(\xi) d\xi, \quad u_z(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_z(\xi) d\xi. \quad (3.25)$$

Таким образом, получили аналитическое решение поставленной задачи.

3.4. Численные исследования и анализ результатов

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты зависимостей $|\psi_1/A|$ и $|\psi_2/A|$ от волнового размера пластины k_1H при расположении источника в точке M_0 с координатами $(0,0,-z_0)$, где $z_0 = 5H; 10H; 100H$. Точки наблюдения M_1 и M_2 в отраженном и прошедшем акустических полях имели координаты

($x = 0, z = -2H$) и ($x = 0, z = 2H$) соответственно. При этом исследовался случай, когда жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми ($k_1 = k_2, \rho_1 = \rho_2$). Полагалось, что амплитуда падающей волны $A = 1$, а отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H , равно 0,2. Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0,1$ м ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с покрытием на основе поливинилбутираля, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с). Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\bar{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м², так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \bar{\rho} f(z), \quad \lambda = \bar{\lambda} f(z), \quad \mu = \bar{\mu} f(z).$$

Рассматривались следующие линейные и квадратичные законы неоднородности:

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5 \right), \quad f_2(z) = a_2 \left(\frac{z}{h} + 1,5 \right) \quad (a_1 = a_2 = 1);$$

$$f_3(z) = a_3 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 2\frac{z}{h} + 0,5 \right], \quad f_4(z) = a_4 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 + 4\frac{z}{h} + 3,5 \right] \quad (a_3 = a_4 = 6/11);$$

Множители a_j ($j = 1, 2, 3, 4$) выбраны так, чтобы среднее значение функции $f_j(z)$ по толщине слоя было равно единице.

Несобственные интегралы (3.23) – (3.25) являются сходящимися. Они могут быть оценены только численно.

При вычислении интегралов (3.23) (при $k_1 = k_2$) интервал интегрирования разбивался на участки (с учетом того, что $k_l < k_\tau < k_1$)

$$(-\infty, -k_1), (-k_1, -k_\tau), (-k_\tau, -k_l), (-k_l, k_l), (k_l, k_\tau), (k_\tau, k_1), (k_1, +\infty).$$

На рис. 3.2 – 3.13 приведены зависимости $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$.

Сплошной и штриховой линиями обозначены зависимости для линейного и квадратичного законов неоднородности соответственно. Пунктирной линией обозначена зависимость для однородного покрытия.

На рис. 3.2 – 3.5 приведены зависимости $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 5H$ для линейных и квадратичных законов неоднородности.

На рис. 3.6 – 3.9 приведены зависимости $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 10H$.

На рис. 3.10 – 3.13 приведены зависимости $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 100H$.

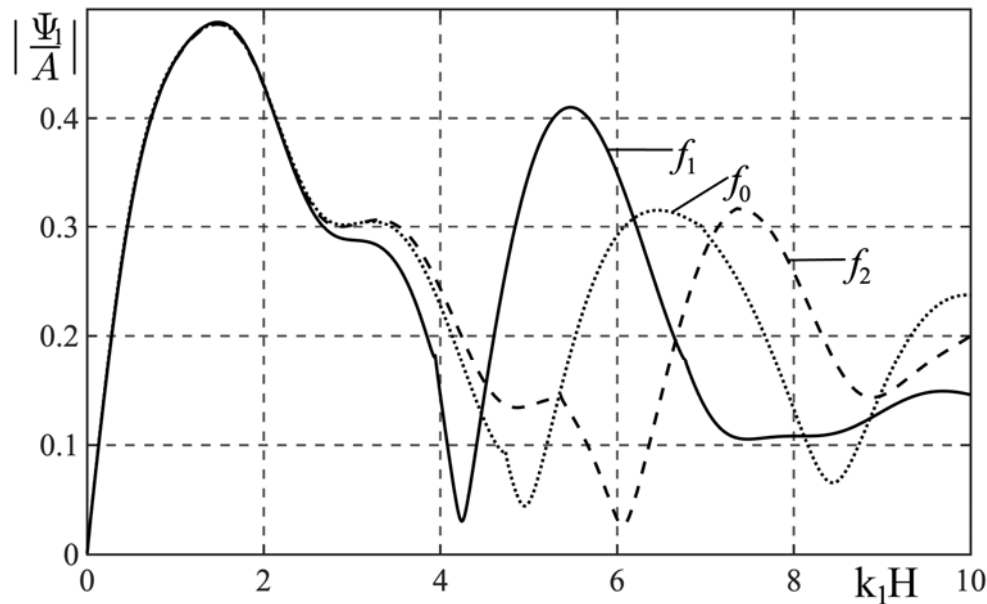


Рис. 3.2. Зависимость $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 5H$

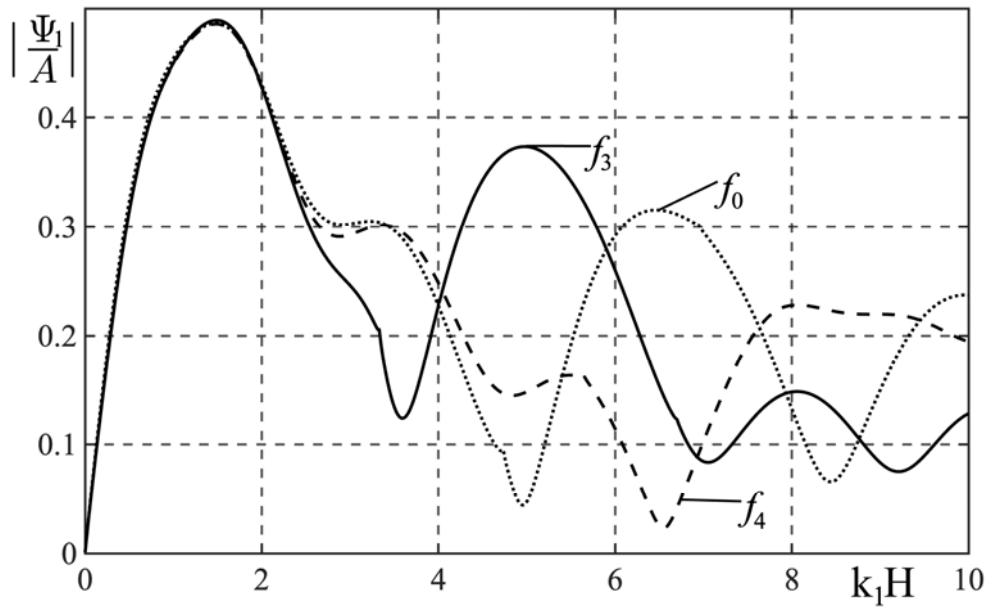


Рис. 3.3. Зависимость $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 5H$

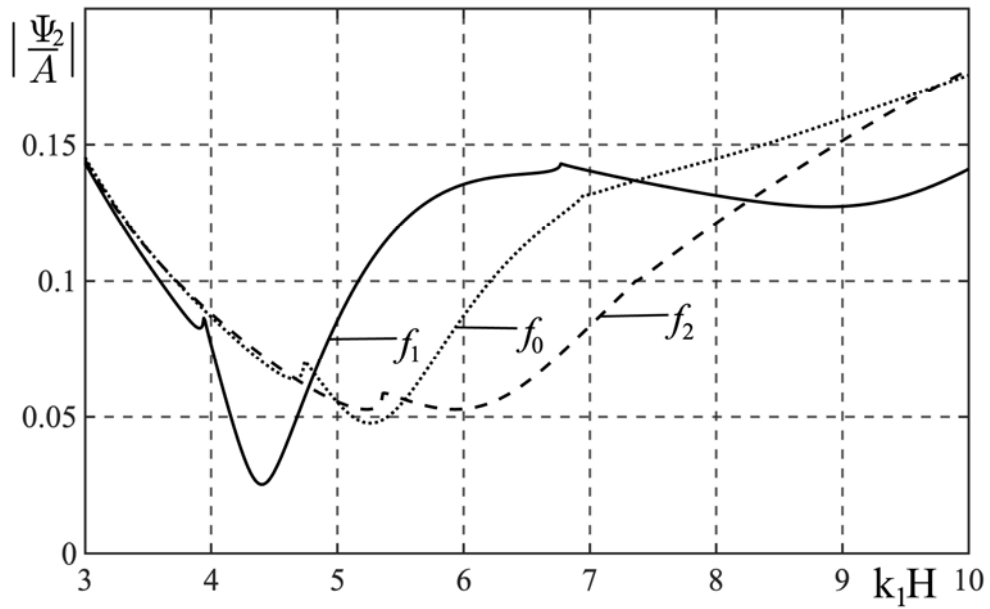


Рис. 3.4. Зависимость $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 5H$

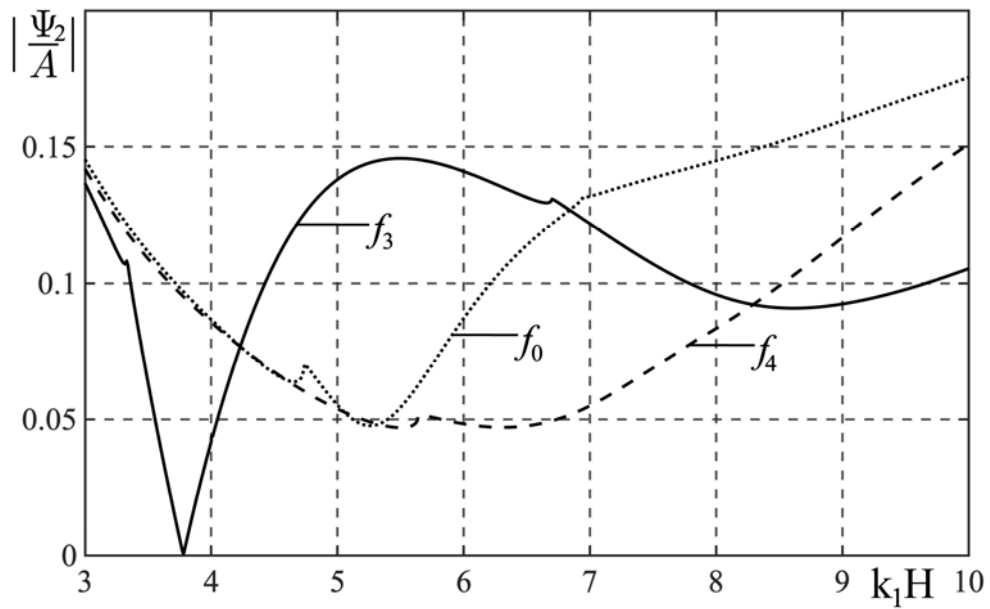


Рис. 3.5. Зависимость $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 5H$

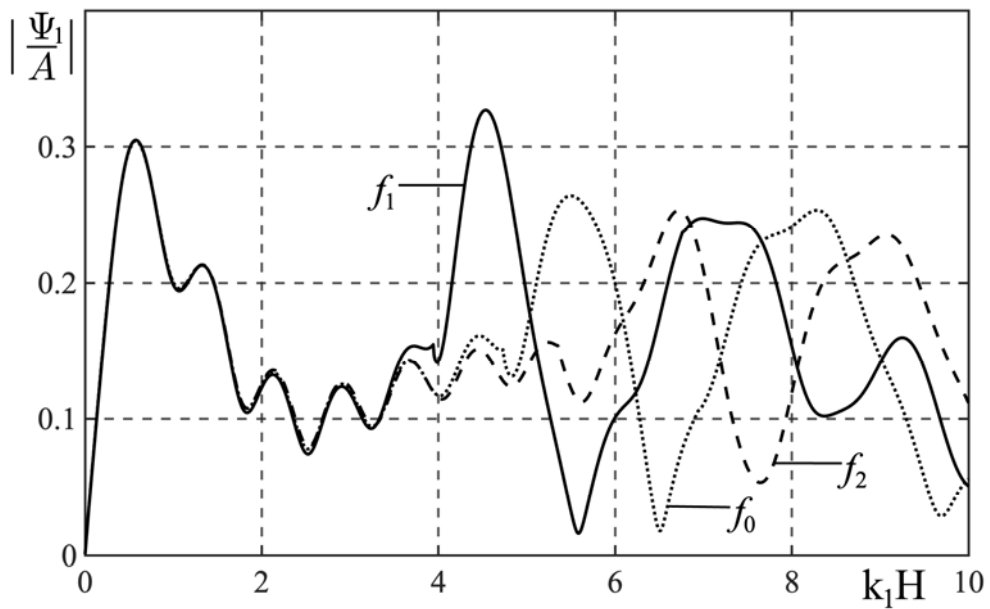


Рис. 3.6. Зависимость $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 10H$

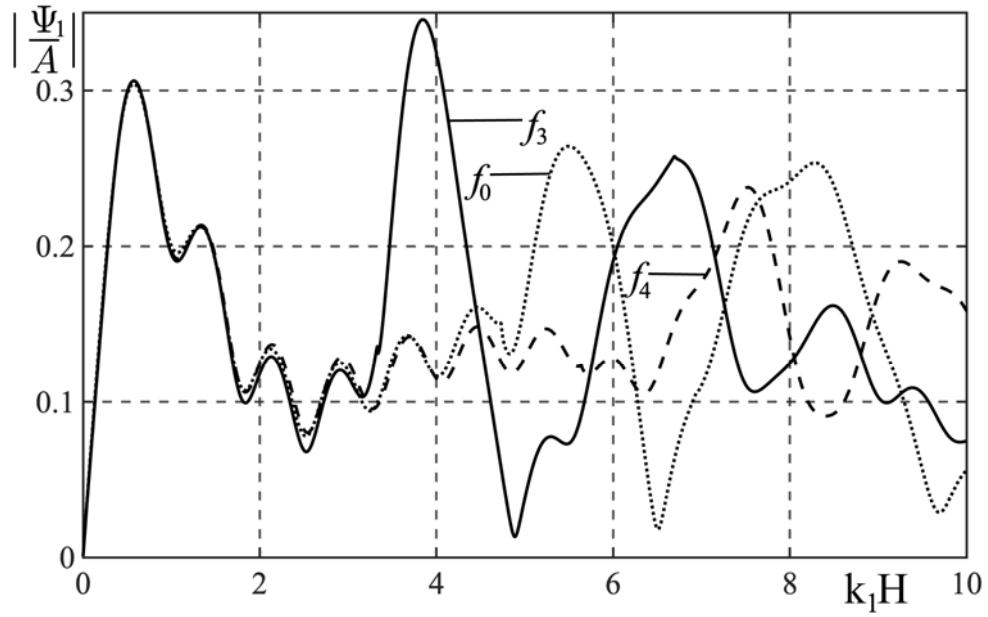


Рис. 3.7. Зависимость $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 10H$

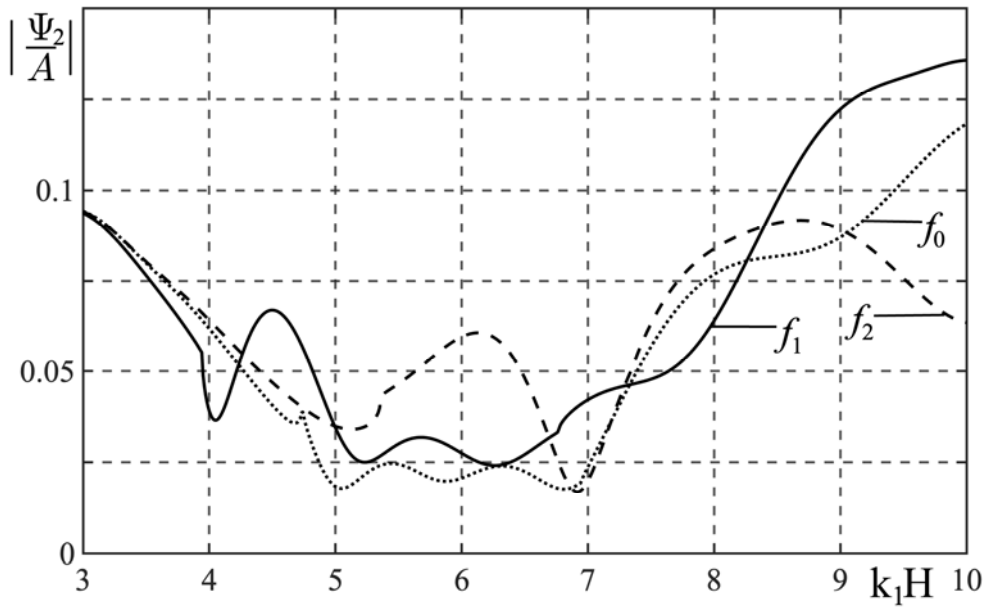


Рис. 3.8. Зависимость $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 10H$

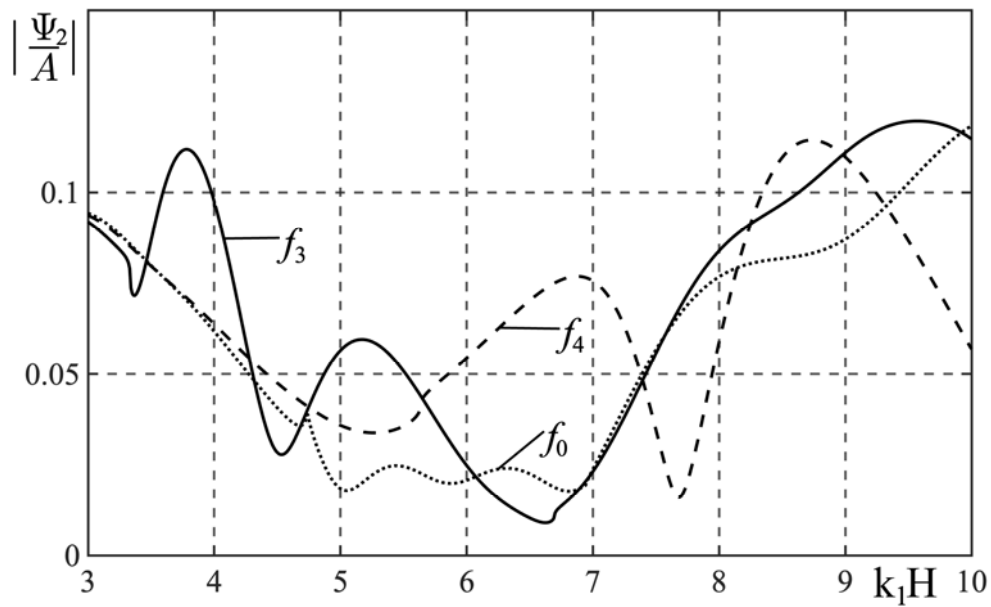


Рис. 3.9. Зависимость $|\Psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 10H$

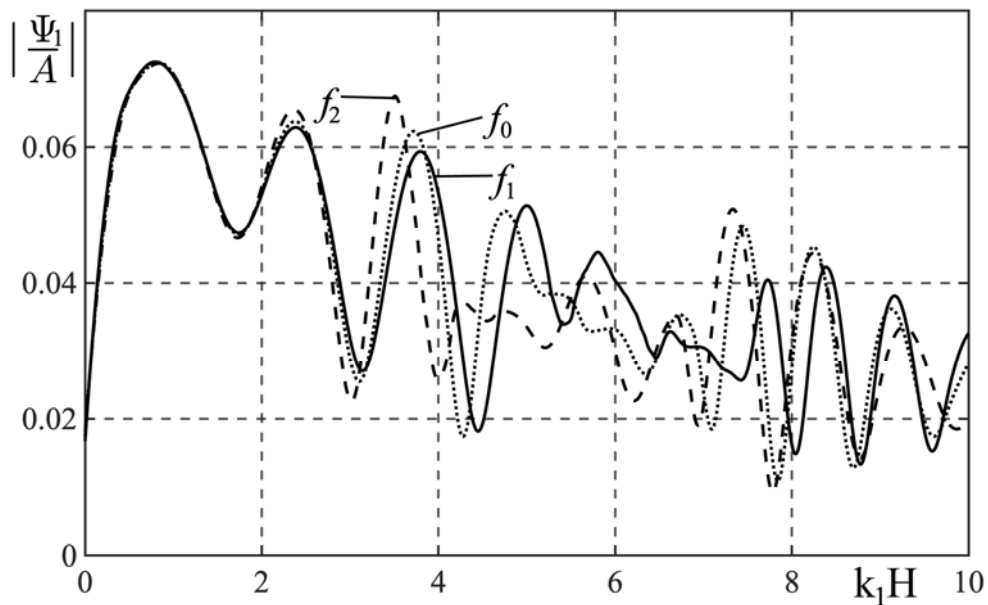


Рис. 3.10. Зависимость $|\Psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 100H$

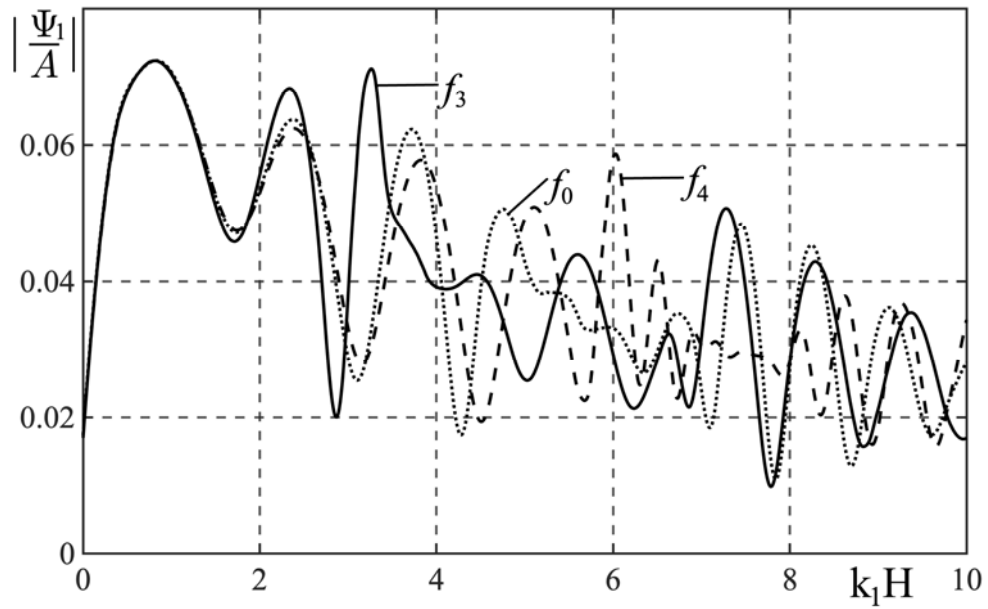


Рис. 3.11. Зависимость $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 100H$

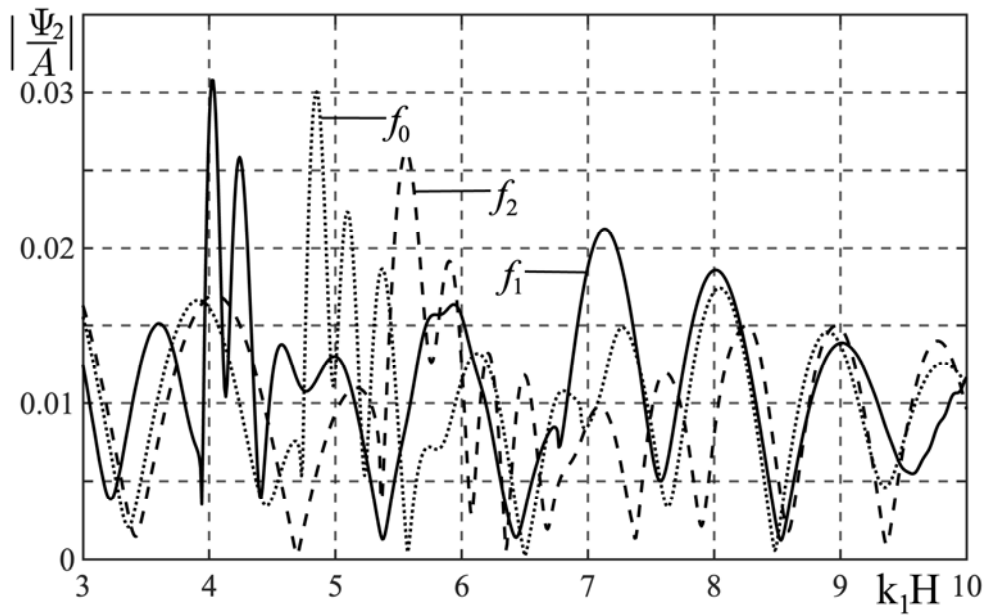


Рис. 3.12. Зависимость $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 100H$

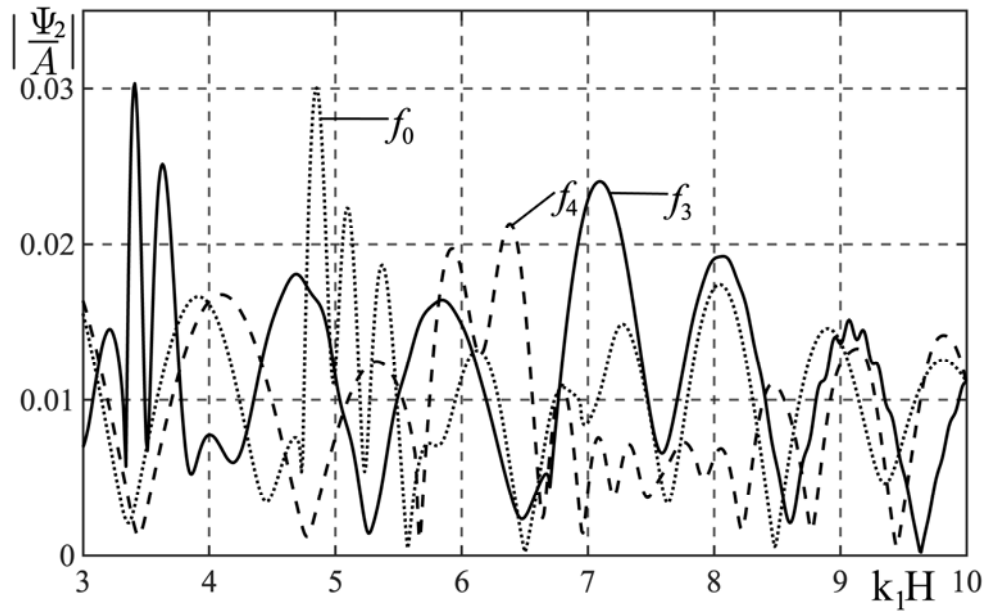


Рис. 3.13. Зависимость $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 100H$

Как видно из рисунков частотные зависимости для отраженного и прошедшего акустических полей для однородного и неоднородных покрытий существенно различаются при каждом конкретном значении z_0 . Расчеты показывают сильное отличие частотных характеристик для разных законов неоднородности как линейных, так и квадратичных на всем рассматриваемом диапазоне волнового размера пластины. При различной удаленности источника от пластины наблюдается периодичность появления резонансов и в случае однородного покрытия, и при разных законах неоднородности.

На рис. 3.14 – 3.15 и 3.16 – 3.17 приведены частотные характеристики $|\psi_1 / A|$ для линейных и $|\psi_2 / A|$ для квадратичных законов неоднородности при разном удалении источника от пластины. Кривые 1, 2, 3 соответствуют случаям, когда $z_0 = 5H; 10H; 100H$ соответственно.

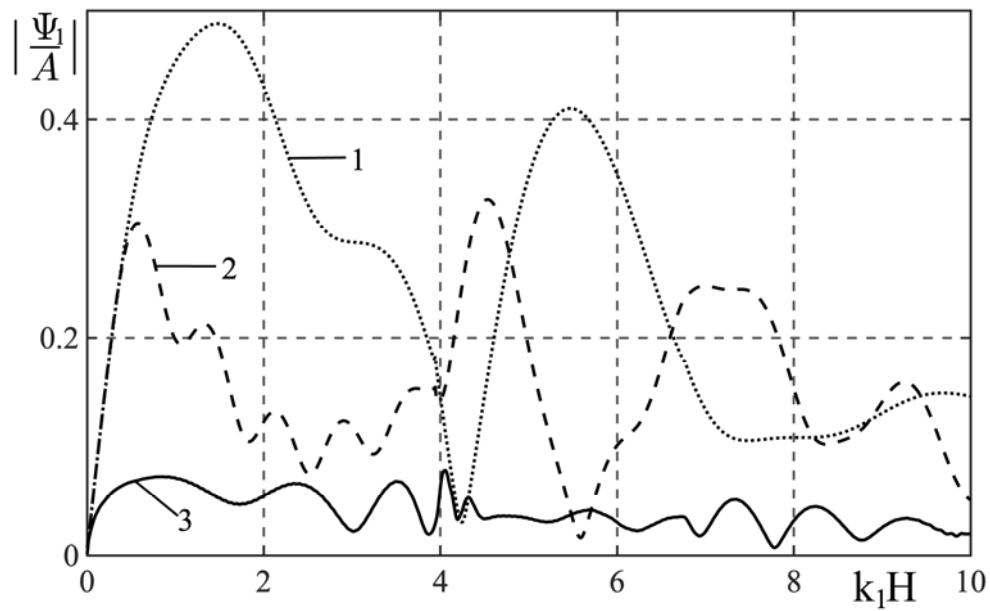


Рис. 3.14. Зависимость $|\Psi_1 / A|$ от волнового размера пластины k_1H для линейного закона неоднородности $f_1(z)$ при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

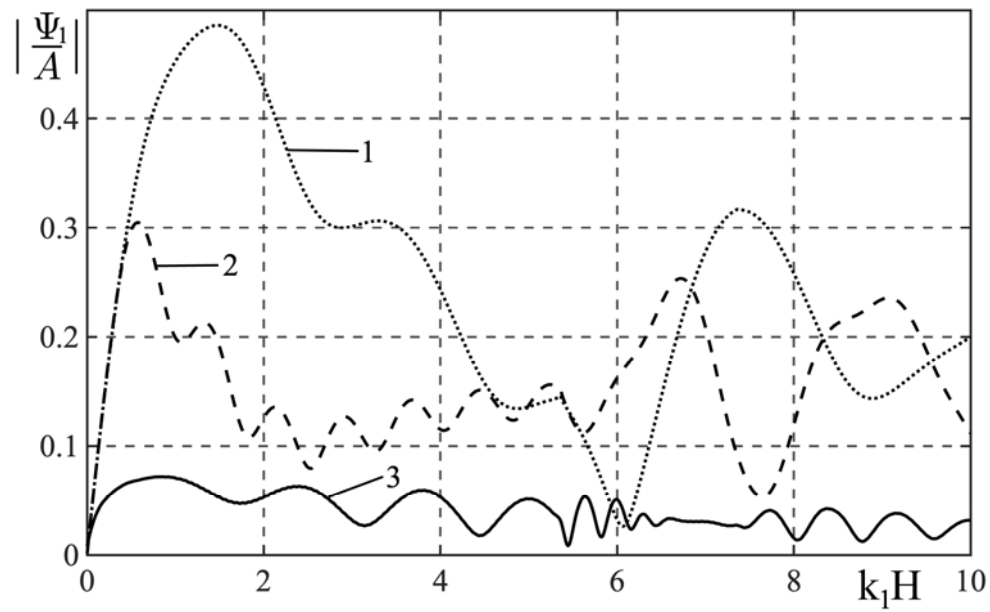


Рис. 3.15. Зависимость $|\Psi_1 / A|$ от волнового размера пластины k_1H для линейного закона неоднородности $f_2(z)$ при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

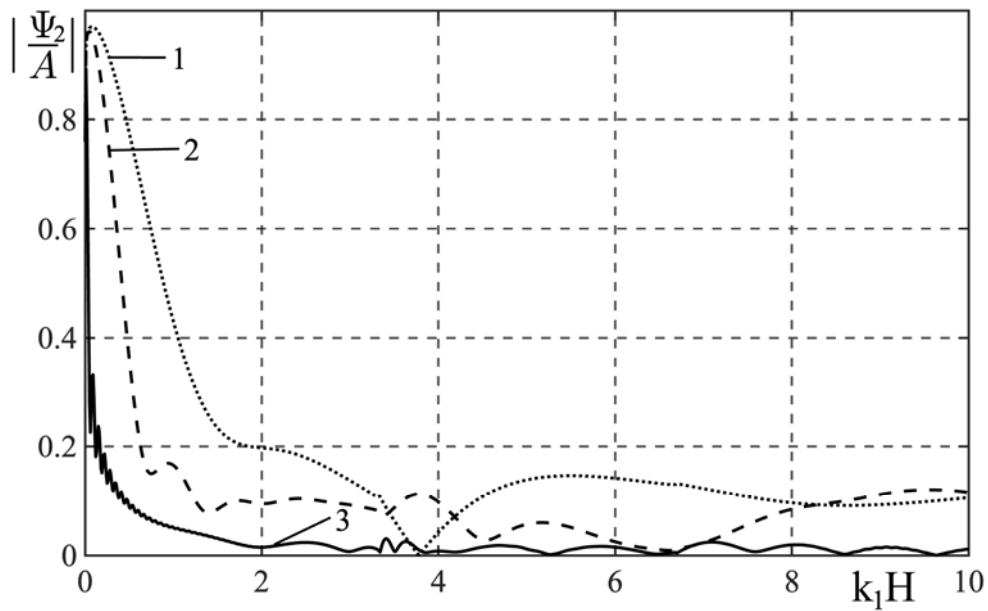


Рис. 3.16. Зависимость $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины k_1H для квадратичного закона неоднородности $f_3(z)$ при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

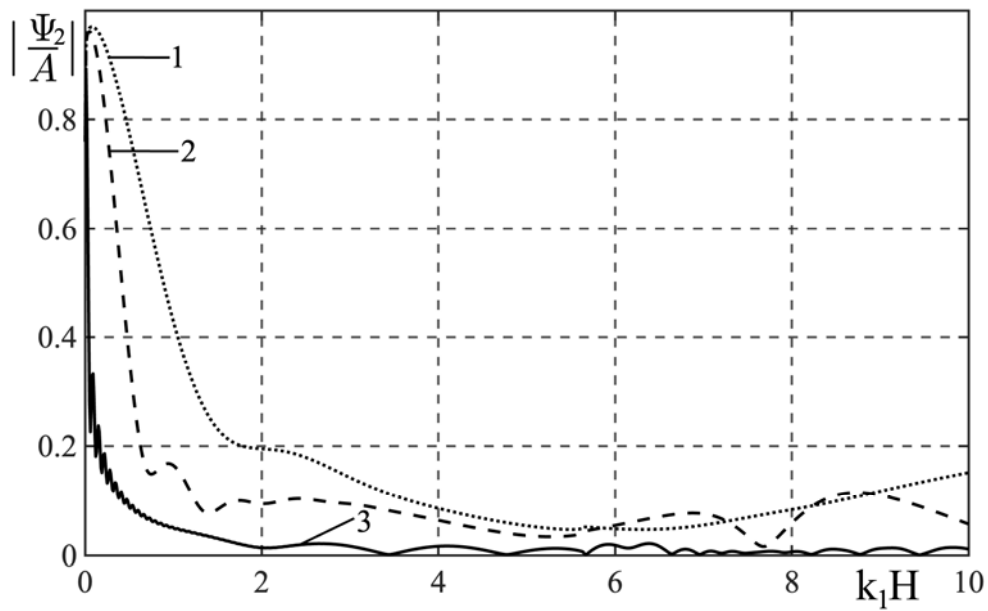


Рис. 3.17. Зависимость $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины k_1H для квадратичного закона неоднородности $f_4(z)$ при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

Как видно из рис. 3.14 – 3.17 при изменении расстояния от источника до пластины наблюдается существенное изменение частотных зависимостей как для линейных, так и для квадратичных законов неоднородности материала покрытия. При этом наблюдается значительное изменение уровней характеристик и сдвиг резонансных частот. При удалении линейного источника от пластины усиливается колебательный характер частотных характеристик для отраженных и преломленных акустических полей.

Глава 4. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ С НЕОДНО- РОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

В главах 2 и 3 в качестве первичного поля возмущений рассматривались плоская и цилиндрическая падающие волны.

В настоящей главе получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении гармонической сферической звуковой волны через упругую однородную пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием. Так как геометрия фронта падающей волны не совпадает с геометрией тела, то непосредственное решение соответствующих дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями сильно затруднено.

Результаты исследований, представленные во второй главе, изложены в работах [39, 67].

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h . Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты z : $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, $\rho = \rho(z)$. При этом декартова система прямоугольных координат x, y, z выбрана таким образом, что ось x лежит в плоскости, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины (рис. 4.1). Пластина с покрытием помещена между двумя полупространствами, заполненными идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

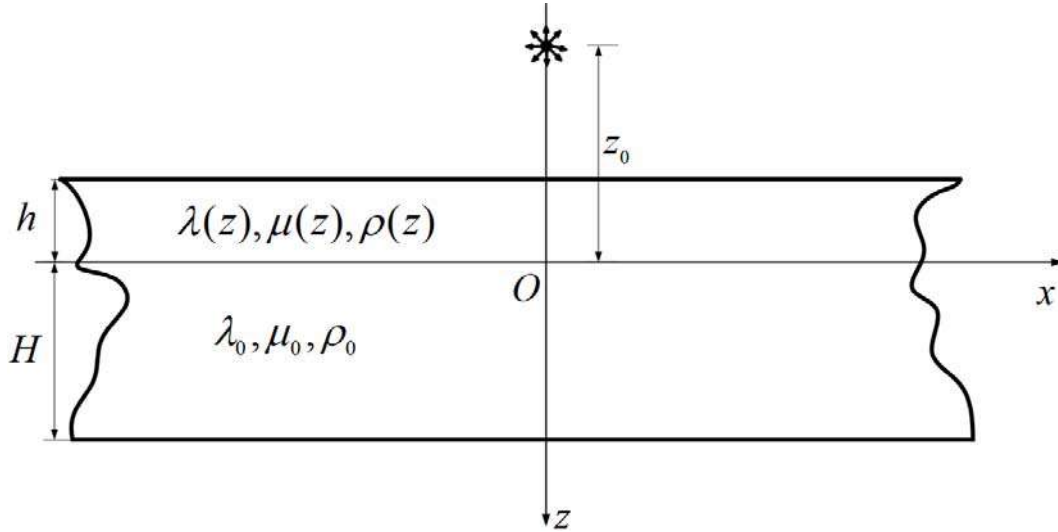


Рис. 4.1. Геометрия задачи

Пусть из полупространства $z < -h$ на пластину с покрытием падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, координаты которого (x_i, y_i, z_i) . Без ограничения общности положим, что $x_i = 0$, $y_i = 0$, $z_i = -z_0$. Потенциал скорости падающей волны имеет вид

$$\psi_0 = A \frac{\exp[i(k_1 R - \omega t)]}{R}, \quad (4.1)$$

где A – амплитуда волны; $k_1 = \omega / c_1$ – волновое число в полупространстве $z < -h$; ω – круговая частота; $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$; \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 – векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения $M(x, y, z)$ и с точкой, $M_0(0, 0, -z_0)$, определяющей положение источника, соответственно; $R = [x^2 + y^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}$; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием звуковые волны, а также найдем поля смещений в однородной пластине и неоднородном слое.

4.2. Математическая модель задачи

Распространение звуковых волн в полупространствах $z < -h$ и $z > H$ в случае установившихся колебаний описывается уравнениями Гельмгольца [79]

$$\Delta \psi_j + k_j^2 \psi_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (4.2)$$

где ψ_1 и ψ_2 – потенциалы скорости отраженной от пластины и прошедшей через нее волн; $k_2 = \omega / c_2$ – волновое число в полупространстве $z > H$ ($j = 2$); $\psi = \psi_0 + \psi_1$ – потенциал скорости полного акустического поля в полупространстве $z < -h$ ($j = 1$). При этом скорость частиц жидкости \mathbf{v}_j и акустическое давление p_j в верхнем и нижнем полупространствах определяются по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \text{grad}(\psi_0 + \psi_1), \quad \mathbf{v}_2 = \text{grad} \psi_2,$$

$$p_1 = i\rho_1\omega(\psi_0 + \psi_1), \quad p_2 = i\rho_2\omega\psi_2.$$

Распространение малых возмущений в упругой однородной изотропной пластине в случае гармонического движения описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [79]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad \Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (4.3)$$

где Ψ и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega / c_l$ и $k_\tau = \omega / c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + \mu_0) / \rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0 / \rho_0}$ – скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя определяется по формуле

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad} \Psi + \text{rot} \Phi. \quad (4.4)$$

Так как рассматриваемая задача является трёхмерной, то

$$\Phi = \Phi_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + \Phi_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + \Phi_z(x, y, z)\mathbf{e}_z, \quad (4.5)$$

где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z – единичные векторы осей x , y и z прямоугольной декартовой системы координат соответственно.

Компоненты вектора \mathbf{u}^0 выражаются через функции Φ_x , Φ_y и Φ_z следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x^0 &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}, \\ u_y^0 &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}, \quad u_z^0 = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij}^0 связаны с составляющими вектора смещения u_x^0 , u_y^0 и u_z^0 в однородной упругой пластине следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0 &= \lambda_0 \operatorname{div} \mathbf{u}^0 + 2\mu_0 \frac{\partial u_x^0}{\partial x}, & \sigma_{yy}^0 &= \lambda_0 \operatorname{div} \mathbf{u}^0 + 2\mu_0 \frac{\partial u_y^0}{\partial y}, \\ \sigma_{zz}^0 &= \lambda_0 \operatorname{div} \mathbf{u}^0 + 2\mu_0 \frac{\partial u_z^0}{\partial z}, & \sigma_{xy}^0 &= \mu_0 \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xz}^0 &= \mu_0 \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial z} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right), & \sigma_{yz}^0 &= \mu_0 \left(\frac{\partial u_y^0}{\partial z} + \frac{\partial u_z^0}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды, которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= -\omega^2 \rho(z) u_x, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= -\omega^2 \rho(z) u_y, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\omega^2 \rho(z) u_z,$$

где u_x , u_y и u_z – компоненты вектора смещения \mathbf{u} частиц неоднородного слоя, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с составляющими вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом покрытии следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(z) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu(z) \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \sigma_{yy} &= \lambda(z) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu(z) \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda(z) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu(z) \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{xz} &= \mu(z) \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \sigma_{yz} &= \mu(z) \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), & \sigma_{xy} &= \mu(z) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Решения дифференциальных уравнений (4.2), (4.3) и (4.8) должны удовлетворять граничным условиям задачи.

Граничные условия на поверхностях, соприкасающихся с жидкостями, заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$\text{при } z = -h: \quad -i\omega u_z = v_{1n} \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p_1; \quad (4.10)$$

$$\text{при } z = H: \quad -i\omega u_z^0 = v_{2n}, \quad \sigma_{xz}^0 = 0, \quad \sigma_{yz}^0 = 0, \quad \sigma_{zz}^0 = -p_2. \quad (4.11)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\begin{aligned} &\text{при } z = 0 \\ u_x &= u_x^0, \quad u_y = u_y^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.3. Аналитическое решение задачи

Прежде всего отметим, что векторное уравнение из (4.3) распадается на три независимых скалярных уравнения относительно проекций вектора Φ

$$\Delta\Phi_x + k_\tau^2\Phi_x = 0, \quad \Delta\Phi_y + k_\tau^2\Phi_y = 0, \quad \Delta\Phi_z + k_\tau^2\Phi_z = 0,$$

и система уравнений (4.3) представляет собой систему четырех уравнений Гельмгольца относительно четырех скалярных функций. Граничные условия задачи полностью определяют лишь три функции. Поэтому решение системы (4.3) содержит некоторый произвол. Чтобы полностью определить четыре искомых функции при подчинении граничным условиям необходимо привлечь еще одно дополнительное условие. Этим условием может служить равенство $\operatorname{div}\Phi = 0$.

Компоненты Φ_x и Φ_z вектора Φ будем определять как решения уравнений Гельмгольца, а компоненту Φ_y найдем с помощью уравнения $\operatorname{div}\Phi = 0$, из которого следует

$$\frac{\partial\Phi_y}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial z}. \quad (4.13)$$

Представим потенциал скорости падающей сферической волны в виде разложения по плоским волнам [4, 79]

$$\Psi_0(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_0(\xi, \varsigma) d\xi d\varsigma, \quad (4.14)$$

где

$$\tilde{\Psi}_0(\xi, \varsigma) = A \frac{i}{2\pi\chi_1} e^{i[\xi x + \varsigma y + \chi_1 |z + z_0|]}, \quad (4.15)$$

$$\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}.$$

При $z > -z_0$ формула (4.15) принимает вид

$$\tilde{\Psi}_0(\xi, \varsigma) = I(\xi, \varsigma) e^{i(\xi x + \varsigma y + \chi_1 z)}, \quad (4.16)$$

где

$$I(\xi, \varsigma) = A \frac{i}{2\pi\chi_1} e^{i\chi_1 z_0}.$$

Замечаем, что подынтегральное выражение в (4.14), определяемое (4.15), аналогично по форме выражению плоской волны, падающей произвольным образом на пластину с покрытием. Потенциал скорости такой волны определяется выражением

$$\psi_{0pl} = A_0 \exp \{i[k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}(z+h)]\}, \quad (4.17)$$

где A_0 – амплитуда волны; $k_{1x} = k_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $k_{1y} = k_1 \sin \theta_0 \sin \varphi_0$, $k_{1z} = k_1 \cos \theta_0$ – проекции волнового вектора \mathbf{k}_1 на оси координат x, y и z ; $k_1 = \omega / c_1$ – волновое число в полупространстве $z < -h$; $k_1 = |\mathbf{k}_1|$; ω – круговая частота; θ_0 и φ_0 – полярный и азимутальный углы падения плоской волны соответственно.

Сравнивая формулы (4.16) и (4.17) находим, что ξ соответствует k_{1x} , $\varsigma = k_{1y}$, а $I(\xi, \varsigma) = A_0 e^{ik_{1z}h}$. Поэтому решение задачи (4.2) (4.3), (4.8), (4.10) – (4.12), можно найти, воспользовавшись решением задачи о прохождении плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием.

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом $\tilde{\psi}_0(\xi, \varsigma)$, потенциалы отраженной $\tilde{\psi}_1$ и прошедшей $\tilde{\psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ в однородной пластине и компоненты вектора смещения \tilde{u}_x , \tilde{u}_y , \tilde{u}_z в покрытии определяются формулами, аналогичными для случая падения плоской волны с потенциалом ψ_{0pl} , в которых следует сделать указанные выше замены.

Искомые величины ψ_j ($j = 1, 2$), Ψ , Φ , \mathbf{u} подлежат определению путем интегрирования $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ по ξ и ς .

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться решением задачи об отражении и прохождении плоской волны через упругую пластину с неоднородным покрытием в случае произвольного падения.

4.3.1. Отражение и преломлении плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругую пластину с неоднородным покрытием

Пусть из полупространства $z < -h$ на слой с покрытием падает произвольным образом плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой определяется выражением (4.17). Определим волновые поля в пластине и вне ее. Элементы решения задачи будем сопровождать индексом pl .

Потенциалы скоростей отраженной от слоя и прошедшей через слой волн Ψ_{1pl} и Ψ_{2pl} , являющиеся решениями уравнений Гельмгольца (4.2), будем искать в виде

$$\begin{aligned}\Psi_{1pl} &= A_1 \exp\{i[k_{1x}x + k_{1y}y - k_{1z}(z + h)]\}, \\ \Psi_{2pl} &= A_2 \exp\{i[k_{2x}x + k_{2y}y + k_{2z}(z - H)]\},\end{aligned}\quad (4.18)$$

где k_{2x} , k_{2y} , k_{2z} – проекции волнового вектора \mathbf{k}_2 на оси x , y и z ;

$|\mathbf{k}_2| = k_2$; $k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2 - k_{2y}^2}$. При этом согласно закону Снеллиуса [4]

$$k_{2x} = k_{1x}; \quad k_{2y} = k_{1y}.$$

Потенциалы смещения в упругой однородной пластине, являющиеся решениями уравнений (4.3), будем искать в виде

$$\begin{aligned}\Psi_{pl} &= B_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{ly}y + k_{lz}z)] + B_2 \exp[i(k_{lx}x + k_{ly}y - k_{lz}z)], \\ \Phi_{xpl} &= C_1 \exp[i(k_{tx}x + k_{ty}y + k_{tz}z)] + C_2 \exp[i(k_{tx}x + k_{ty}y - k_{tz}z)], \\ \Phi_{zpl} &= D_1 \exp[i(k_{tx}x + k_{ty}y + k_{tz}z)] + D_2 \exp[i(k_{tx}x + k_{ty}y - k_{tz}z)],\end{aligned}\quad (4.19)$$

где $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2 - k_{ly}^2}$, $k_{tz} = \sqrt{k_t^2 - k_{tx}^2 - k_{ty}^2}$.

При этом $k_{lx} = k_{tx} = k_{1x}$, $k_{ly} = k_{ty} = k_{1y}$.

Подставим выражения для $\Phi_{x pl}$ и $\Phi_{z pl}$ из (4.19) в (4.13) и проинтегрируем по y . Получим

$$\begin{aligned} \Phi_{y pl} = & -(k_{tx} / k_{ty}) \{ (C_1 + D_1) \exp[i(k_{tx}x + k_{ty}y + k_{tz}z)] + \\ & + (C_2 - D_2) \exp[i(k_{tx}x + k_{ty}y - k_{tz}z)] \}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Коэффициенты A_j , B_j , C_j , D_j ($j=1,2$) в выражениях (4.18) и (4.19) подлежат определению из граничных условий.

Согласно закону Снеллиуса зависимость составляющих вектора смещения от координаты x будет иметь вид $\exp(ik_{1x}x)$, а от координаты y – $\exp(ik_{1y}y)$. Поэтому составляющие вектора \mathbf{u}_{pl} будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_{x pl} &= U_1(z) \exp(ik_{1x}x) \exp(ik_{1y}y), \\ u_{y pl} &= U_2(z) \exp(ik_{1x}x) \exp(ik_{1y}y), \\ u_{z pl} &= U_3(z) \exp(ik_{1x}x) \exp(ik_{1y}y). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Подставляя выражения (4.21) в уравнения (4.8) с учетом (4.9), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_i(z)$ ($i=1,2,3$)

$$\mathbf{A}\mathbf{U}'' + \mathbf{B}\mathbf{U}' + \mathbf{C}\mathbf{U} = 0, \quad (4.22)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu' & 0 & ik_{1x}(\lambda + \mu) \\ 0 & \mu' & ik_{1y}(\lambda + \mu) \\ ik_{1x}(\lambda + \mu) & ik_{1y}(\lambda + \mu) & \lambda' + 2\mu' \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -k_{1x}^2(\lambda + 2\mu) - k_{1y}^2\mu + \omega^2\rho & -k_{1x}k_{1y}(\lambda + \mu) & i\mu'k_{1x} \\ -k_{1x}k_{1y}(\lambda + \mu) & -k_{1x}^2\mu - k_{1y}^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho & i\mu'k_{1y} \\ i\lambda'k_{1x} & i\lambda'k_{1y} & -\mu(k_{1x}^2 + k_{1y}^2) + \omega^2\rho \end{pmatrix}.$$

Здесь штрихи обозначают производные по координате z .

Подставим выражения (4.18) – (4.21) в граничные условия. В ре-

зультате получим выражения для коэффициентов A_j , B_j , C_j , D_j ($j=1,2$) и шесть условий для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (4.22):

$$A_1 = A_0 + (\omega / k_{1z})U_3(-h),$$

$$A_2 = (-i\omega / k_{2z})[k_{1z}(B_1e_l - B_2e_{2l}) - (k_{1x}^2 + k_{1y}^2)(C_1e_{1\tau} + C_2e_{2\tau}) / k_{1y} - k_{1x}k_{tz}(D_1e_{1\tau} - D_2e_{2\tau}) / k_{1y}], \quad (4.23)$$

$$B_j = b_{j1}U_1(0) + b_{j2}U_2(0) + b_{j3}U_3(0),$$

$$C_j = c_{j1}U_1(0) + c_{j2}U_2(0) + c_{j3}U_3(0),$$

$$D_j = d_{j1}U_1(0) + d_{j2}U_2(0) + d_{j3}U_3(0) \quad (j=1,2),$$

$$(\mathbf{AU}' + \mathbf{EU})_{z=-h} = \mathbf{G}, \quad (\mathbf{AU}' + \mathbf{FU})_{z=0} = 0, \quad (4.24)$$

где

$$e_{1l} = e^{ik_{1z}H}, \quad e_{2l} = e^{-ik_{1z}H}, \quad e_{1\tau} = e^{ik_{tz}H}, \quad e_{2\tau} = e^{-ik_{tz}H},$$

$$b_{11} = -b_{21} - k_{tz}(c_{11} - c_{21}) / k_{1y} - s_{13}(d_{11} + d_{21}) - i / k_{1x},$$

$$b_{12} = -b_{22} - k_{tz}(c_{12} - c_{22}) / k_{1y} - s_{13}(d_{12} + d_{22}),$$

$$b_{13} = -b_{23} - k_{tz}(c_{13} - c_{23}) / k_{1y} - s_{13}(d_{13} + d_{23}),$$

$$b_{21} = (-t_1c_{11} - t_2c_{21} - t_3d_{11} - t_4d_{21} + k_{1y}k_{1z}) / (is_0k_{1y}),$$

$$b_{22} = (-t_1c_{12} - t_2c_{22} - t_3d_{12} - t_4d_{22}) / (is_0k_{1y}),$$

$$b_{23} = (-t_1c_{13} - t_2c_{23} - t_3d_{13} - t_4d_{23} - k_{1x}k_{1y}) / (is_0k_{1y}),$$

$$c_{1\varepsilon} = (-w_2c_{2\varepsilon} - w_3d_{1\varepsilon} - w_4d_{2\varepsilon} + g_\varepsilon) / w_1,$$

$$c_{2\varepsilon} = (-m_2d_{1\varepsilon} - m_3d_{2\varepsilon} + n_{2+\varepsilon}) / m_1 \quad (\varepsilon=1,2,3),$$

$$d_{11} = (-n_7d_{21} + n_3m_4 - n_1m_1) / n_6, \quad d_{12} = (-n_7d_{22} + n_4m_4) / n_6,$$

$$d_{13} = (-n_7d_{23} + n_5m_4 - n_2m_1) / n_6,$$

$$d_{21} = [h_6(n_3m_4 - n_1m_1) - k_{1y}n_6] / (h_6n_7 - h_6n_6),$$

$$\begin{aligned}
d_{22} &= (h_6 n_4 m_4 + k_{1x} n_6) / (h_6 n_7 - h_6 n_6), \\
d_{23} &= (n_5 m_4 - n_2 m_1) / (h_6 n_7 - h_6 n_6), \\
n_1 &= w_5 e_{1\tau} t_9, \quad n_2 = g_4 e_{1\tau} t_9, \quad n_3 = g_1 w_6 - w_5 w_1, \\
n_4 &= g_2 w_6, \quad n_5 = g_3 w_6 - g_4 w_1, \quad n_{5+j} = m_{1+j} m_4 - m_{4+j} m_1, \\
m_\varepsilon &= w_{\varepsilon+1} w_6 - w_1 w_{6+\varepsilon} \quad (\varepsilon = 1, 2, 3), \\
m_4 &= w_7 e_{1\tau} t_9 - e_{2\tau} t_9 w_6, \quad m_{4+j} = w_{7+j} e_{1\tau} t_9 + (-1)^{j+1} e_{j\tau} t_{10} w_6, \\
w_j &= t_j h_1 - 2ik_{1x} k_{1y} k_{lz} h_{1+j}, \quad w_{2+j} = t_{2+j} h_1 - 2ik_{1x} k_{1y} k_{lz} h_{3+j}, \\
w_5 &= k_{lz} k_{1y} e_{2l} \mu_0 (r_1 + r_2), \quad w_{5+j} = t_j e_{2l} \mu_0 (r_1 + r_2) - ik_{1y} t_{4+j} e_{j\tau}, \\
w_{7+j} &= t_{2+j} e_{2l} \mu_0 (r_1 + r_2) - ik_{1y} t_{6+j} e_{j\tau}, \\
g_1 &= k_{1y} k_{lz} h_1, \quad g_2 = -2ik_{1x} k_{1y} k_{lz} r_1 e_{1l}, \\
g_3 &= -k_{1x} k_{1y} h_1, \quad g_4 = -k_{1x} k_{1y} e_{2l} \mu_0 (r_1 + r_2), \\
h_1 &= r_1 e_{1l} - r_2 e_{2l}, \quad h_{1+j} = (-1)^{j+1} ik_{\tau z} r_1 e_{1l} - ik_{1y} s_{4+j} e_{j\tau}, \\
h_{3+j} &= -ik_{1x} r_1 e_{1l} - ik_{1y} s_{6+j} e_{j\tau}, \quad h_6 = ik_{\tau}^2, \\
t_j &= ik_{1x} [k_{1x}^2 + k_{1y}^2 + (-1)^{j+1} k_{\tau z} k_{lz}], \\
t_{2+j} &= (-1)^{j+1} ik_{1x}^2 k_{\tau z} + ik_{lz} (k_{\tau z}^2 + k_{1y}^2), \quad t_{4+j} = s_9 r_1 + s_{4+j} s_0, \\
t_{6+j} &= (-1)^j s_{10} r_1 + s_{6+j} s_0, \quad t_9 = s_9 k_{1y} - s_{11} k_{1x}, \\
t_{10} &= s_{10} k_{1y} + s_2 k_{1x}, \quad r_j = s_1 + (-1)^j s_4 k_{lz}, \\
s_0 &= 2\mu_0 k_{1x} k_{lz}, \quad s_1 = \lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 k_{lz}^2, \quad s_2 = 2\mu_0 k_{1x} k_{\tau z}, \\
s_3 &= 2\mu_0 k_{1y} k_{\tau z}, \quad s_4 = \omega^2 \rho_2 / k_{2z}, \\
s_{4+j} &= (k_{1x}^2 + k_{1y}^2) [s_4 + (-1)^j 2\mu_0 k_{\tau z}] / k_{1y}, \\
s_{6+j} &= (-1)^{j+1} k_{1x} k_{\tau z} [s_4 + (-1)^j 2\mu_0 k_{\tau z}] / k_{1y},
\end{aligned}$$

$$s_{8+j} = \mu_0 k_{1y} k_{tz} + (-1)^j \mu_0 k_{tz} (k_{tz}^2 - k_{1x}^2) / k_{1y} \quad (j=1,2),$$

$$s_{11} = \mu_0 (k_{tz}^2 - 2k_{tz}^2), \quad s_{12} = 2\mu_0 k_{tz} k_{1y},$$

$$s_{13} = (k_{1y}^2 + k_{tz}^2) / (k_{1y} + k_{1x}),$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ik_{1x}\mu \\ 0 & 0 & ik_{1y}\mu \\ ik_{1x}\lambda & ik_{1y}\lambda & i\omega^2 \rho_1 / k_{1z} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & ik_{1x}\mu + f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & ik_{1y}\mu + f_{23} \\ ik_{1x}\lambda + f_{31} & ik_{1y}\lambda + f_{32} & f_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = (0; 0; -2i\rho_1\omega A_0)^T,$$

$$f_{1\varepsilon} = s_0(b_{1\varepsilon} - b_{2\varepsilon}) + p_1(c_{1\varepsilon} + c_{2\varepsilon}) + p_2(d_{1\varepsilon} - d_{2\varepsilon}),$$

$$f_{2\varepsilon} = p_3(b_{1\varepsilon} - b_{2\varepsilon}) + p_4(c_{1\varepsilon} + c_{2\varepsilon}) - s_2(d_{1\varepsilon} - d_{2\varepsilon}),$$

$$f_{3\varepsilon} = s_1(b_{1\varepsilon} + b_{2\varepsilon}) + p_5(c_{1\varepsilon} + c_{2\varepsilon}) + p_6(d_{1\varepsilon} - d_{2\varepsilon}) \quad (\varepsilon=1,2,3),$$

$$p_1 = \mu_0 k_{1x} (k_{tz}^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2) / k_{1y}, \quad p_2 = \mu_0 k_{tz} (k_{tz}^2 - k_{1x}^2 + k_{1y}^2) / k_{1y},$$

$$p_3 = 2\mu_0 k_{1y} k_{tz}, \quad p_4 = \mu_0 (k_{tz}^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2),$$

$$p_5 = -2\mu_0 k_{tz} (k_{1x}^2 + k_{1y}^2), \quad p_6 = -2\mu_0 k_{1x} k_{tz}^2 / k_{1y}.$$

Из формул (4.23) следует, что коэффициент отражения A_1 и коэффициент прозрачности A_2 могут быть вычислены лишь после определения значений функции $U_1(z)$, $U_2(z)$ и $U_3(z)$ на поверхностях неоднородного слоя при $z = -h$ и $z = 0$.

Для определения поля смещений в упругом неоднородном слое необходимо решить краевую задачу (4.22), (4.24).

Получим решение этой задачи методом степенных рядов так, как

это сделано в разделе 2.3.

Предположим, что функции $\rho(z)$, $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ имеют вид многочленов относительно переменной z (или аппроксимированы такими многочленами):

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^R \rho^{(k)}(z + h/2)^k, \quad \lambda(z) = \sum_{k=0}^R \lambda^{(k)}(z + h/2)^k,$$

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^R \mu^{(k)}(z + h/2)^k,$$

где R – степень многочленов.

Приближенное аналитическое решение краевой задачи (4.22), (4.24) будем искать в виде

$$U_n(z) = \sum_{l=1}^6 T_l U_n^l(z), \quad U_n^l = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n=1,2,3). \quad (4.25)$$

Коэффициенты T_l ($l=1,2,3,4,5,6$) определяются из системы шести линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=1}^6 T_l \left(\mathbf{A}U^{l'} + \mathbf{E}U^l \right)_{z=-h} = \mathbf{G},$$

$$\sum_{l=1}^6 T_l \left(\mathbf{A}U^{l'} + \mathbf{F}U^l \right)_{z=0} = 0,$$

где $\mathbf{U}^l(z) = (U_1^l, U_2^l, U_3^l)^T$.

Коэффициенты $U_n^{l(s)}$ ($n=1,2,3$; $l=1,2,3,4,5,6$) разложений (4.25) вычисляются по формулам

$$U_1^{l(0)} = \delta_{1l}, \quad U_2^{l(0)} = \delta_{2l}, \quad U_3^{l(0)} = \delta_{3l}, \quad U_1^{l(1)} = \delta_{4l}, \quad U_2^{l(1)} = \delta_{5l}, \quad U_3^{l(1)} = \delta_{6l};$$

$$U_n^{l(s+2)} = -[(s+1)(s+2A_{nn}^{(0)})]^{-1} \sum_{q=1}^3 \sum_{k=0}^{R_1} \{ (s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} +$$

$$+ B_{nq}^{(k)}] U_q^{l(s+1-k)} + C_{nq}^{(k)} U_q^{l(s-k)} \} \quad (s=0,1,\dots),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; $R_1 = \min(R, s)$;

$$A_{11}^{(k)} = A_{22}^{(k)} = \mu^{(k)}; A_{12}^{(k)} = A_{13}^{(k)} = A_{21}^{(k)} = A_{23}^{(k)} = A_{31}^{(k)} = A_{32}^{(k)} = 0;$$

$$A_{33}^{(k)} = \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}; B_{11}^{(k)} = B_{22}^{(k)} = (k+1)\mu^{(k+1)}; B_{13}^{(k)} = B_{31}^{(k)} = ik_{1x}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)});$$

$$B_{23}^{(k)} = B_{32}^{(k)} = ik_{1y}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); B_{12}^{(k)} = B_{21}^{(k)} = 0;$$

$$B_{33}^{(k)} = (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)});$$

$$C_{11}^{(k)} = -k_{1x}^2(\lambda + 2\mu) - k_{1y}^2\mu + \omega^2\rho; C_{12}^{(k)} = C_{21}^{(k)} = -k_{1x}k_{1y}(\lambda + \mu);$$

$$C_{13}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\mu^{(k+1)}; C_{22}^{(k)} = -k_{1x}^2\mu - k_{1y}^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho;$$

$$C_{23}^{(k)} = ik_{1y}(k+1)\mu^{(k+1)}; C_{31}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\lambda^{(k+1)};$$

$$C_{32}^{(k)} = ik_{1y}(k+1)\lambda^{(k+1)}; C_{33}^{(k)} = -(k_{1x}^2 + k_{1y}^2)\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}.$$

4.3.2. Определение волновых полей в случае сферической падающей волны

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом

$$\tilde{\psi}_0 = I(\xi, \varsigma) \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_1 z)],$$

потенциалы отраженной $\tilde{\psi}_1$ и прошедшей $\tilde{\psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$, $\tilde{\Phi}_z$ в однородной пластине и компоненты вектора смещения \tilde{u}_x , \tilde{u}_y , \tilde{u}_z в покрытии определяются соответствующими формулами (4.18) – (4.21), полученными при решении задачи в случае падения плоской волны с потенциалом $\psi_0 pl$, в которых следует заменить k_{1x} на ξ , k_{1y} на ς , A_0 на $I(\xi, \varsigma)e^{-i\chi_1 h}$.

В результате получаем

$$\tilde{\psi}_1 = \tilde{A}_1 \exp\{i[\xi x + \varsigma y - \chi_1(z + h)]\},$$

$$\tilde{\psi}_2 = \tilde{A}_2 \exp\{i[\xi x + \varsigma y + \chi_2(z - H)]\},$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi} &= \tilde{B}_1 \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_l z)] + \tilde{B}_2 \exp[i(\xi x + \varsigma y - \chi_l z)], \\
\tilde{\Phi}_x &= \tilde{C}_1 \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_\tau z)] + \tilde{C}_2 \exp[i(\xi x + \varsigma y - \chi_\tau z)], \\
\tilde{\Phi}_y &= -(\xi / \varsigma) \{ (\tilde{C}_1 + \tilde{D}_1) \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_\tau z)] + \\
&\quad + (\tilde{C}_2 - \tilde{D}_2) \exp[i(\xi x + \varsigma y - \chi_\tau z)] \}, \\
\tilde{\Phi}_z &= \tilde{D}_1 \exp[i(\xi x + \varsigma y + \chi_\tau z)] + \tilde{D}_2 \exp[i(\xi x + \varsigma y - \chi_\tau z)], \\
\tilde{u}_x &= \tilde{U}_1(z, \xi, \varsigma) \exp(i \xi x) \exp(i \varsigma y), \\
\tilde{u}_y &= \tilde{U}_2(z, \xi, \varsigma) \exp(i \xi x) \exp(i \varsigma y), \\
\tilde{u}_z &= \tilde{U}_3(z, \xi, \varsigma) \exp(i \xi x) \exp(i \varsigma y),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \quad \chi_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \\
\chi_l &= \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \quad \chi_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \\
\tilde{A}_1 &= I(\xi, \varsigma) e^{-i \chi_1 h} + (\omega / \chi_1) \tilde{U}_3(-h, \xi, \varsigma), \\
\tilde{A}_2 &= (-i \omega / \chi_2) [\chi_l (\tilde{B}_1 \tilde{e}_{1l} - \tilde{B}_2 \tilde{e}_{2l}) - (\xi^2 + \varsigma^2) (\tilde{C}_1 \tilde{e}_{1\tau} + \tilde{C}_2 \tilde{e}_{2\tau}) / \varsigma - \\
&\quad - \xi \chi_\tau (\tilde{D}_1 \tilde{e}_{1\tau} - \tilde{D}_2 \tilde{e}_{2\tau}) / \varsigma], \\
\tilde{B}_j &= \tilde{b}_{1j} \tilde{U}_1(0, \xi, \varsigma) + \tilde{b}_{2j} \tilde{U}_2(0, \xi, \varsigma) + \tilde{b}_{3j} \tilde{U}_3(0, \xi, \varsigma), \\
\tilde{C}_j &= \tilde{c}_{1j} \tilde{U}_1(0, \xi, \varsigma) + \tilde{c}_{2j} \tilde{U}_2(0, \xi, \varsigma) + \tilde{c}_{3j} \tilde{U}_3(0, \xi, \varsigma), \\
\tilde{D}_j &= \tilde{d}_{1j} \tilde{U}_1(0, \xi, \varsigma) + \tilde{d}_{2j} \tilde{U}_2(0, \xi, \varsigma) + \tilde{d}_{3j} \tilde{U}_3(0, \xi, \varsigma) \quad (j = 1, 2).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Коэффициенты, входящие в формулы (4.26) определяются выраже-

ниями

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{1l} &= e^{i \chi_l H}, \quad \tilde{e}_{2l} = e^{-i \chi_l H}, \quad \tilde{e}_{1\tau} = e^{i \chi_\tau H}, \quad \tilde{e}_{2\tau} = e^{-i \chi_\tau H}, \\
\tilde{b}_{11} &= -\tilde{b}_{21} - \chi_\tau (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{21}) / \varsigma - \tilde{s}_{13} (\tilde{d}_{11} + \tilde{d}_{21}) - i / \xi, \\
\tilde{b}_{12} &= -\tilde{b}_{22} - \chi_\tau (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{22}) / \varsigma - \tilde{s}_{13} (\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{22}), \\
\tilde{b}_{13} &= -\tilde{b}_{23} - \chi_\tau (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23}) / \varsigma - \tilde{s}_{13} (\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{23}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{21} &= (-\tilde{t}_1\tilde{c}_{11} - \tilde{t}_2\tilde{c}_{21} - \tilde{t}_3\tilde{d}_{11} - \tilde{t}_4\tilde{d}_{21} + \varsigma\chi_l) / (i\tilde{s}_0\varsigma), \\
\tilde{b}_{22} &= (-\tilde{t}_1\tilde{c}_{12} - \tilde{t}_2\tilde{c}_{22} - \tilde{t}_3\tilde{d}_{12} - \tilde{t}_4\tilde{d}_{22}) / (i\tilde{s}_0\varsigma), \\
\tilde{b}_{23} &= (-\tilde{t}_1\tilde{c}_{13} - \tilde{t}_2\tilde{c}_{23} - \tilde{t}_3\tilde{d}_{13} - \tilde{t}_4\tilde{d}_{23} - \xi\varsigma) / (i\tilde{s}_0\varsigma), \\
\tilde{c}_{1\varepsilon} &= (-\tilde{w}_2\tilde{c}_{2\varepsilon} - \tilde{w}_3\tilde{d}_{1\varepsilon} - \tilde{w}_4\tilde{d}_{2\varepsilon} + \tilde{g}_\varepsilon) / \tilde{w}_1, \\
\tilde{c}_{2\varepsilon} &= (-\tilde{m}_2\tilde{d}_{1\varepsilon} - \tilde{m}_3\tilde{d}_{2\varepsilon} + \tilde{n}_{2+\varepsilon}) / \tilde{m}_1 \quad (\varepsilon=1,2,3), \\
\tilde{d}_{11} &= (-\tilde{n}_7\tilde{d}_{21} + \tilde{n}_3\tilde{m}_4 - \tilde{n}_1\tilde{m}_1) / \tilde{n}_6, \quad \tilde{d}_{12} = (-\tilde{n}_7\tilde{d}_{22} + \tilde{n}_4\tilde{m}_4) / \tilde{n}_6, \\
\tilde{d}_{13} &= (-\tilde{n}_7\tilde{d}_{23} + \tilde{n}_5\tilde{m}_4 - \tilde{n}_2\tilde{m}_1) / \tilde{n}_6, \\
\tilde{d}_{21} &= (\tilde{h}_6(\tilde{n}_3\tilde{m}_4 - \tilde{n}_1\tilde{m}_1) - \varsigma\tilde{n}_6) / (\tilde{h}_6\tilde{n}_7 - \tilde{h}_6\tilde{n}_6), \\
\tilde{d}_{22} &= (\tilde{h}_6\tilde{n}_4\tilde{m}_4 + \xi\tilde{n}_6) / (\tilde{h}_6\tilde{n}_7 - \tilde{h}_6\tilde{n}_6), \quad \tilde{d}_{23} = (\tilde{n}_5\tilde{m}_4 - \tilde{n}_2\tilde{m}_1) / (\tilde{h}_6\tilde{n}_7 - \tilde{h}_6\tilde{n}_6), \\
\tilde{n}_1 &= \tilde{w}_5\tilde{e}_{1\tau}\tilde{t}_9, \quad \tilde{n}_2 = \tilde{g}_4\tilde{e}_{1\tau}\tilde{t}_9, \quad \tilde{n}_3 = \tilde{g}_1\tilde{w}_6 - \tilde{w}_5\tilde{w}_1, \\
\tilde{n}_4 &= \tilde{g}_2\tilde{w}_6, \quad \tilde{n}_5 = \tilde{g}_3\tilde{w}_6 - \tilde{g}_4\tilde{w}_1, \quad \tilde{n}_{5+j} = \tilde{m}_{1+j}\tilde{m}_4 - \tilde{m}_{4+j}\tilde{m}_1, \\
\tilde{m}_\varepsilon &= \tilde{w}_{\varepsilon+1}\tilde{w}_6 - \tilde{w}_1\tilde{w}_{6+\varepsilon} \quad (\varepsilon=1,2,3), \\
\tilde{m}_4 &= \tilde{w}_7\tilde{e}_{1\tau}\tilde{t}_9 - \tilde{e}_{2\tau}\tilde{t}_9\tilde{w}_6, \quad \tilde{m}_{4+j} = \tilde{w}_{7+j}\tilde{e}_{1\tau}\tilde{t}_9 + (-1)^{j+1}\tilde{e}_{j\tau}\tilde{t}_{10}\tilde{w}_6, \\
\tilde{w}_j &= \tilde{t}_j\tilde{h}_1 - 2i\xi\varsigma\chi_l\tilde{h}_{1+j}, \quad \tilde{w}_{2+j} = \tilde{t}_{2+j}\tilde{h}_1 - 2i\xi\varsigma\chi_l\tilde{h}_{3+j}, \\
\tilde{w}_5 &= \chi_l\varsigma\tilde{e}_{2l}\mu_0(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2), \quad \tilde{w}_{5+j} = \tilde{t}_j\tilde{e}_{2l}\mu_0(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2) - i\varsigma\tilde{t}_{4+j}\tilde{e}_{j\tau}, \\
\tilde{w}_{7+j} &= \tilde{t}_{2+j}\tilde{e}_{2l}\mu_0(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2) - i\varsigma\tilde{t}_{6+j}\tilde{e}_{j\tau}, \\
\tilde{g}_1 &= \varsigma\chi_l\tilde{h}_1, \quad \tilde{g}_2 = -2i\xi\varsigma\chi_l\tilde{r}_1\tilde{e}_{1l}, \\
\tilde{g}_3 &= -\xi\varsigma\tilde{h}_1, \quad \tilde{g}_4 = -\xi\varsigma\tilde{e}_{2l}\mu_0(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2), \\
\tilde{h}_1 &= \tilde{r}_1\tilde{e}_{1l} - \tilde{r}_2\tilde{e}_{2l}, \quad \tilde{h}_{1+j} = (-1)^{j+1}i\chi_\tau\tilde{r}_1\tilde{e}_{1l} - i\varsigma\tilde{s}_{4+j}\tilde{e}_{j\tau}, \\
\tilde{h}_{3+j} &= -i\xi\tilde{r}_1\tilde{e}_{1l} - i\varsigma\tilde{s}_{6+j}\tilde{e}_{j\tau}, \quad \tilde{h}_6 = ik_\tau^2, \quad \tilde{t}_j = i\xi(\xi^2 + \varsigma^2 + (-1)^{j+1}\chi_\tau\chi_l), \\
\tilde{t}_{2+j} &= (-1)^{j+1}i\xi^2\chi_\tau + i\chi_l(\chi_\tau^2 + \varsigma^2), \quad \tilde{t}_{4+j} = \tilde{s}_9\tilde{r}_1 + \tilde{s}_{4+j}\tilde{s}_0, \\
\tilde{t}_{6+j} &= (-1)^j\tilde{s}_{10}\tilde{r}_1 + \tilde{s}_{6+j}\tilde{s}_0, \quad \tilde{t}_9 = \tilde{s}_9\varsigma - \tilde{s}_{11}\xi, \quad \tilde{t}_{10} = \tilde{s}_{10}\varsigma + \tilde{s}_2\xi,
\end{aligned}$$

$$\tilde{r}_j = \tilde{s}_1 + (-1)^j \tilde{s}_4 \chi_l \quad (j=1,2),$$

$$\tilde{s}_0 = 2\mu_0 \xi \chi_l, \quad \tilde{s}_1 = \lambda_0 k_l^2 + 2\mu_0 \chi_l^2, \quad \tilde{s}_2 = 2\mu_0 \xi \chi_\tau, \quad \tilde{s}_3 = 2\mu_0 \varsigma \chi_\tau, \quad \tilde{s}_4 = \omega^2 \rho_2 / \chi_2,$$

$$\tilde{s}_{4+j} = (\xi^2 + \varsigma^2)(\tilde{s}_4 + (-1)^j 2\mu_0 \chi_\tau) / \varsigma,$$

$$\tilde{s}_{6+j} = (-1)^{j+1} \xi \chi_\tau (\tilde{s}_4 + (-1)^j 2\mu_0 \chi_\tau) / \varsigma,$$

$$\tilde{s}_{8+j} = \mu_0 \varsigma \chi_\tau + (-1)^j \mu_0 \chi_\tau (\chi_\tau^2 - \xi^2) / \varsigma \quad (j=1,2),$$

$$\tilde{s}_{11} = \mu_0 (k_\tau^2 - 2\chi_\tau^2), \quad \tilde{s}_{12} = 2\mu_0 \chi_l \varsigma, \quad \tilde{s}_{13} = (\varsigma^2 + \chi_\tau^2) / (\varsigma + \xi).$$

Кроме того, указанные замены k_{1x} на ξ , k_{1y} на ς и A_0 на $I(\xi)e^{-i\chi_1 h}$ следует произвести и в элементах матриц **B**, **C**, **E**, **F**, **G** краевой задачи (4.22) – (4.24) для нахождения $\tilde{U}_n(z, \xi, \varsigma)$ ($n=1, 2, 3$).

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mu' & 0 & i\xi(\lambda + \mu) \\ 0 & \mu' & i\varsigma(\lambda + \mu) \\ i\xi(\lambda + \mu) & i\varsigma(\lambda + \mu) & \lambda' + 2\mu' \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -\xi^2(\lambda + 2\mu) - \varsigma^2\mu + \omega^2\rho & -\xi\varsigma(\lambda + \mu) & i\mu'\xi \\ -\xi\varsigma(\lambda + \mu) & -\xi^2\mu - \varsigma^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho & i\mu'\varsigma \\ i\lambda'\xi & i\lambda'\varsigma & -\mu(\xi^2 + \varsigma^2) + \omega^2\rho \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\xi\mu \\ 0 & 0 & i\varsigma\mu \\ i\xi\lambda & i\varsigma\lambda & i\omega^2\rho_1 / \chi_l \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} & i\xi\mu + \tilde{f}_{13} \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} & i\varsigma\mu + \tilde{f}_{23} \\ i\xi\lambda + \tilde{f}_{31} & i\varsigma\lambda + \tilde{f}_{32} & \tilde{f}_{33} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = (0; 0; -2i\rho_1\omega I(\xi, \varsigma)e^{-i\chi_1 h})^T,$$

$$\tilde{f}_{1\varepsilon} = \tilde{s}_0(\tilde{b}_{1\varepsilon} - \tilde{b}_{2\varepsilon}) + \tilde{p}_1(\tilde{c}_{1\varepsilon} + \tilde{c}_{2\varepsilon}) + \tilde{p}_2(\tilde{d}_{1\varepsilon} - \tilde{d}_{2\varepsilon}),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{2\varepsilon} &= \tilde{p}_3(\tilde{b}_{1\varepsilon} - \tilde{b}_{2\varepsilon}) + \tilde{p}_4(\tilde{c}_{1\varepsilon} + \tilde{c}_{2\varepsilon}) - \tilde{s}_2(\tilde{d}_{1\varepsilon} - \tilde{d}_{2\varepsilon}), \\
\tilde{f}_{3\varepsilon} &= \tilde{s}_1(\tilde{b}_{1\varepsilon} + \tilde{b}_{2\varepsilon}) + \tilde{p}_5(\tilde{c}_{1\varepsilon} + \tilde{c}_{2\varepsilon}) + \tilde{p}_6(\tilde{d}_{1\varepsilon} - \tilde{d}_{2\varepsilon}) \quad (\varepsilon = 1, 2, 3), \\
\tilde{p}_1 &= \mu_0 \xi (\chi_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2) / \varsigma, \quad \tilde{p}_2 = \mu_0 \chi_\tau (\chi_\tau^2 - \xi^2 + \varsigma^2) / \varsigma, \quad \tilde{p}_3 = 2\mu_0 \varsigma \chi_l, \\
\tilde{p}_4 &= \mu_0 (\chi_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2), \quad \tilde{p}_5 = -2\mu_0 \chi_\tau (\xi^2 + \varsigma^2), \quad \tilde{p}_6 = -2\mu_0 \xi \chi_\tau^2 / \varsigma.
\end{aligned}$$

Согласно (4.25) будем иметь

$$\tilde{U}_n(z, \xi, \varsigma) = \sum_{l=1}^6 \tilde{T}_l \tilde{U}_n^l(z, \xi, \varsigma), \quad \tilde{U}_n^l(z, \xi, \varsigma) = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{U}_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n=1, 2, 3),$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_1^{l(0)} &= \delta_{1l}; \quad \tilde{U}_2^{l(0)} = \delta_{2l}; \quad \tilde{U}_3^{l(0)} = \delta_{3l}; \quad \tilde{U}_1^{l(1)} = \delta_{4l}; \quad \tilde{U}_2^{l(1)} = \delta_{5l}; \quad \tilde{U}_3^{l(1)} = \delta_{6l}; \\
\tilde{U}_n^{l(s+2)} &= -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^3 \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + \\
&\quad + \tilde{B}_{nq}^{(k)}] \tilde{U}_q^{l(s+1-k)} + \tilde{C}_{nq}^{(k)} \tilde{U}_q^{l(s-k)}\} \quad (s=0, 1, \dots); \\
\tilde{B}_{11}^{(k)} &= \tilde{B}_{22}^{(k)} = (k+1)\mu^{(k+1)}; \quad \tilde{B}_{13}^{(k)} = \tilde{B}_{31}^{(k)} = i\xi(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \\
\tilde{B}_{23}^{(k)} &= \tilde{B}_{32}^{(k)} = i\varsigma(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \quad \tilde{B}_{12}^{(k)} = \tilde{B}_{21}^{(k)} = 0; \quad \tilde{B}_{33}^{(k)} = (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)}); \\
\tilde{C}_{11}^{(k)} &= -\xi^2(\lambda + 2\mu) - \varsigma^2\mu + \omega^2\rho; \quad \tilde{C}_{12}^{(k)} = \tilde{C}_{21}^{(k)} = -\xi\varsigma(\lambda + \mu); \\
\tilde{C}_{13}^{(k)} &= i\xi(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{22}^{(k)} = -\xi^2\mu - \varsigma^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho; \\
\tilde{C}_{23}^{(k)} &= i\varsigma(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{31}^{(k)} = i\xi(k+1)\lambda^{(k+1)}; \\
\tilde{C}_{32}^{(k)} &= i\varsigma(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{33}^{(k)} = -(\xi^2 + \varsigma^2)\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты \tilde{T}_l ($l=1, 2, 3, 4, 5, 6$) определяются из системы уравнений

$$\sum_{l=1}^6 \tilde{T}_l \left(\mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}}^{l'} + \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{U}}^l \right)_{z=-h} = \tilde{\mathbf{G}}, \quad \sum_{l=1}^6 \tilde{T}_l \left(\mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}}^{l'} + \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{U}}^l \right)_{z=0} = 0,$$

где $\tilde{\mathbf{U}}^l(z, \xi, \varsigma) = (\tilde{U}_1^l, \tilde{U}_2^l, \tilde{U}_3^l)^T$.

Штрихи означают дифференцирование по z .

Чтобы обеспечить ограниченность поля отраженной волны при $z \rightarrow -\infty$ выбор знака корня $\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ осуществим из условия $\text{Im}\chi_1 \geq 0$, а для ограниченности поля прошедшей волны при $z \rightarrow \infty$ потребуем выполнения условия $\text{Im}\chi_2 \geq 0$, то есть

$$\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 < k_1^2, \chi_1 = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_1^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 > k_1^2;$$

$$\chi_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2 - \varsigma^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 < k_2^2, \chi_2 = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_2^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 > k_2^2.$$

Величины $\chi_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$, $\chi_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ определяются по формулам

$$\chi_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \varsigma^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 < k_l^2, \chi_l = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_l^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 > k_l^2;$$

$$\chi_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 < k_\tau^2, \chi_\tau = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_\tau^2} \text{ при } \xi^2 + \varsigma^2 > k_\tau^2.$$

При рассеянии сферической волны пластиной с покрытием иско-
мые потенциалы ψ_j ($j=1, 2$), Ψ , Φ_x , Φ_y , Φ_z и компоненты вектора
смещения u_x , u_y , u_z в неоднородном покрытии определяется путем инте-
грирования по ξ и ς в бесконечных пределах величин $\tilde{\psi}_j$ ($j=1, 2$), $\tilde{\Psi}$,
 $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$, $\tilde{\Phi}_z$, \tilde{u}_x , \tilde{u}_y , \tilde{u}_z соответственно согласно (4.14)

$$\psi_j(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\xi, \varsigma) d\xi d\varsigma \quad (j=1, 2), \quad (4.27)$$

$$\Psi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(\xi, \varsigma) d\xi d\varsigma,$$

$$\Phi_x(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_x(\xi, \varsigma) d\xi d\varsigma,$$

$$\Phi_y(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_y(\xi, \varsigma) d\xi d\varsigma,$$

$$\Phi_z(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_z(\xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

$$u_x(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_x(\xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

$$u_y(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_y(\xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

$$u_z(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_z(\xi, \zeta) d\xi d\zeta.$$

Таким образом, получили аналитическое решение поставленной задачи.

4.4. Численные исследования

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты зависимостей $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при расположении источника в точке M_0 с координатами $(0, 0, -z_0)$. Точки наблюдения M_1 и M_2 в полупространствах $z < -h$ и $z > H$ имели координаты $(x = 0, y = 0, z = -2H)$ и $(x = 0, y = 0, z = 2H)$ соответственно. При этом исследовался случай, когда жидкости по обе стороны пластины являются одинаковыми ($k_1 = k_2$, $\rho_1 = \rho_2$). Полагалось, что амплитуда падающей волны $A = 1$, а отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H равно 0,2. Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0,1$ м ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с покрытием на основе поливинилбутираля, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с). Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\tilde{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$

H/m^2 , так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \bar{\rho}f(z), \quad \lambda = \bar{\lambda}f(z), \quad \mu = \bar{\mu}f(z).$$

Рассматривались следующие линейные и квадратичные законы неоднородности:

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5 \right), \quad f_2(z) = a_2 \left(\frac{z}{h} + 1,5 \right) \quad (a_1 = a_2 = 1);$$

$$f_3(z) = a_3 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 2\frac{z}{h} + 0,5 \right], \quad f_4(z) = a_4 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 + 4\frac{z}{h} + 3,5 \right] \quad (a_3 = a_4 = 6/11).$$

Множитель a_j ($j = 1, 2, 3, 4$) выбран так, чтобы среднее значение функции $f_j(z)$ по толщине слоя было равно единице.

Несобственные интегралы (4.27) могут быть оценены только численно.

На рис. 4.2 – 4.13 представлены зависимости $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$. Сплошной и штриховой линиями обозначены зависимости для линейного и квадратичного законов неоднородности соответственно. Пунктирной линией обозначена зависимость для однородного покрытия.

На рис. 4.2 – 4.5 приведены зависимости $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 5H$ для линейных и квадратичных законов неоднородности.

На рис. 4.6 – 4.9 приведены зависимости $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 10H$ для линейных и квадратичных законов неоднородности.

На рис. 4.10 – 4.13 приведены зависимости $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ при $z_0 = 100H$ для линейных и квадратич-

ных законов неоднородности.

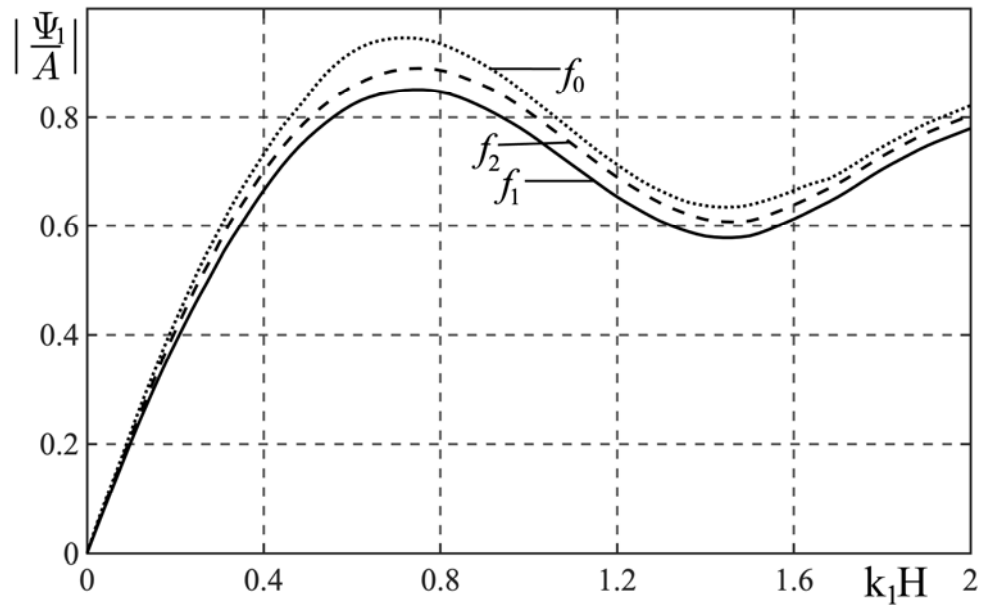


Рис. 4.2. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 5H$

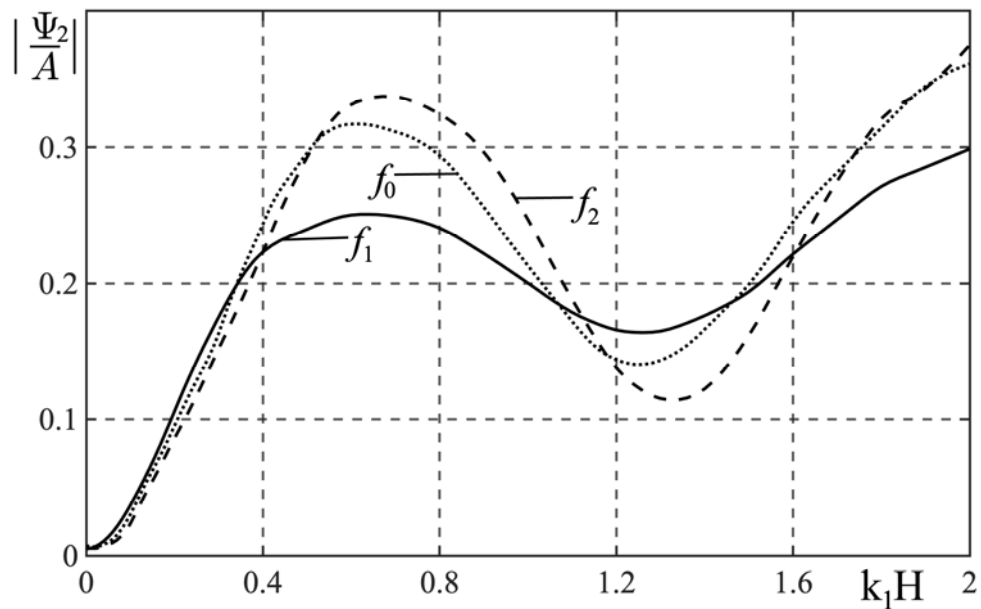


Рис. 4.3. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 5H$

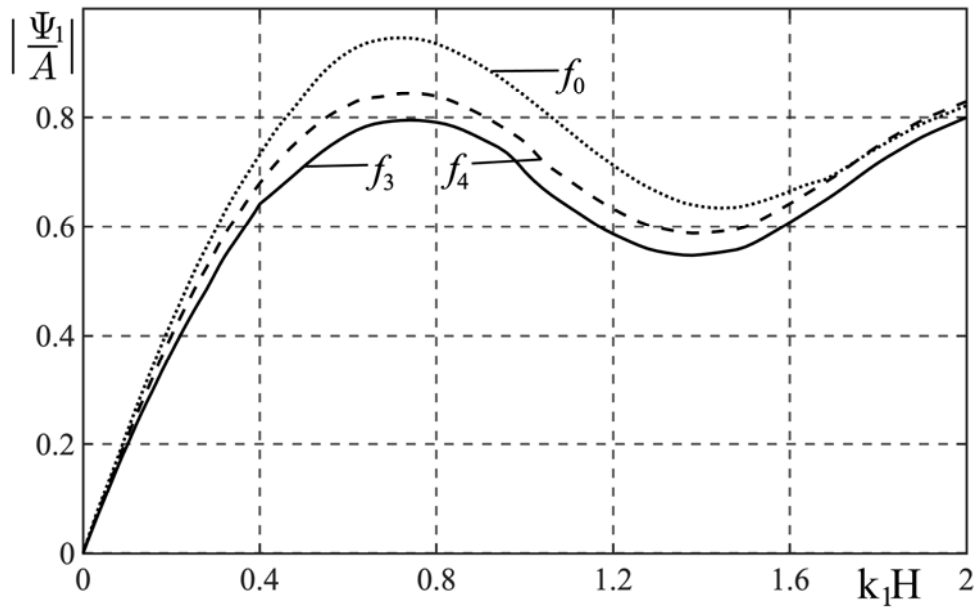


Рис. 4.4. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 5H$

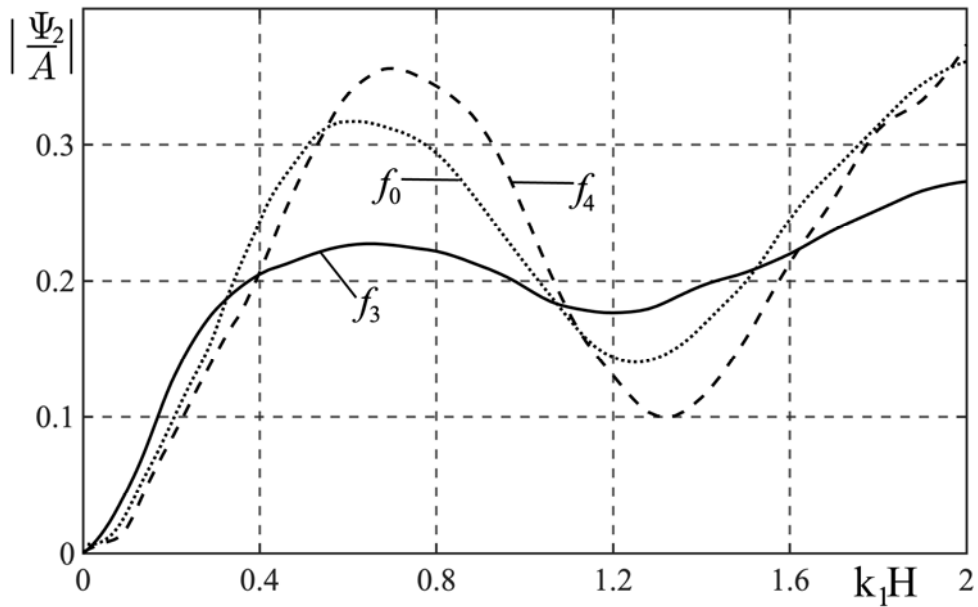


Рис. 4.5. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 5H$

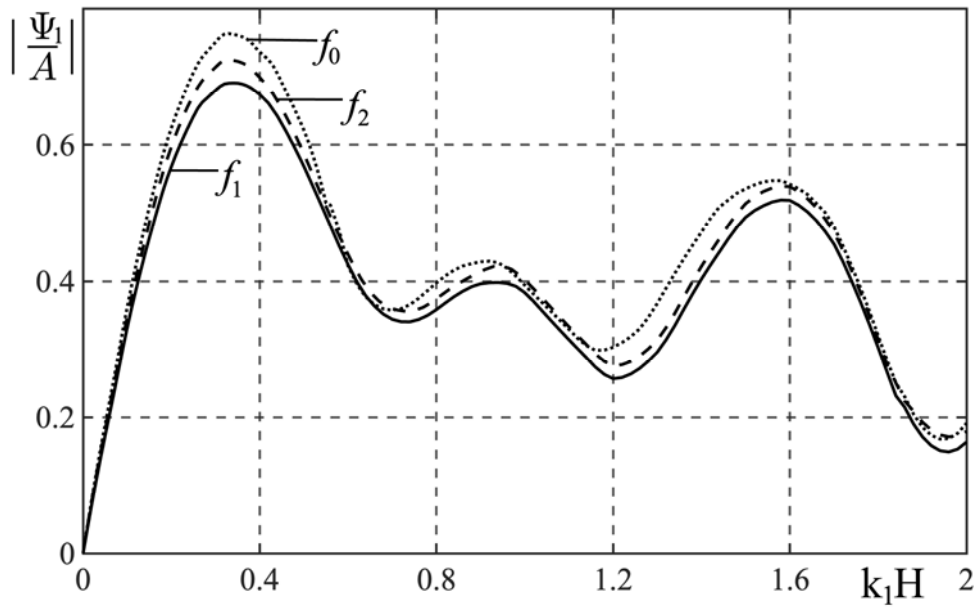


Рис. 4.6. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 10H$

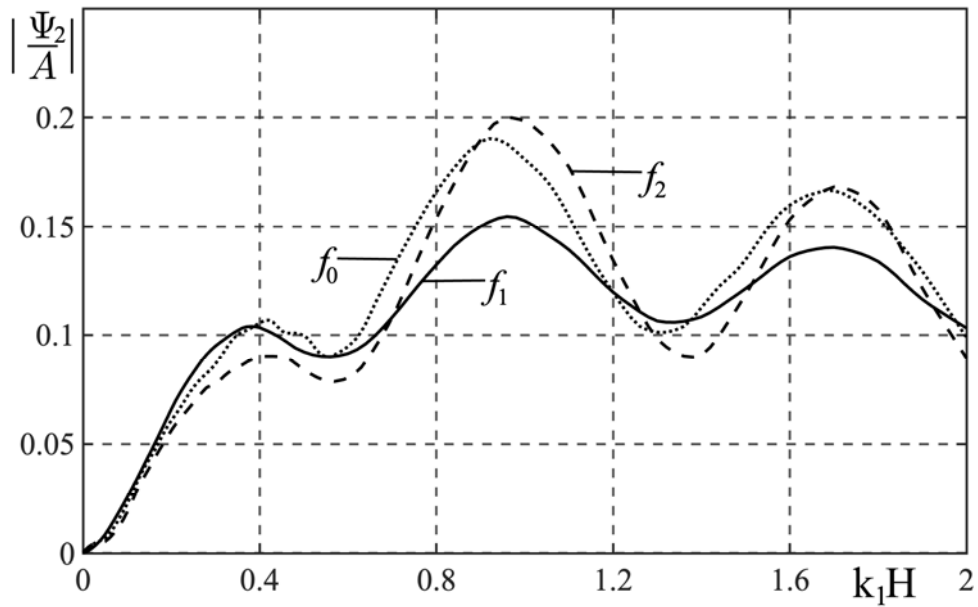


Рис. 4.7. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 10H$

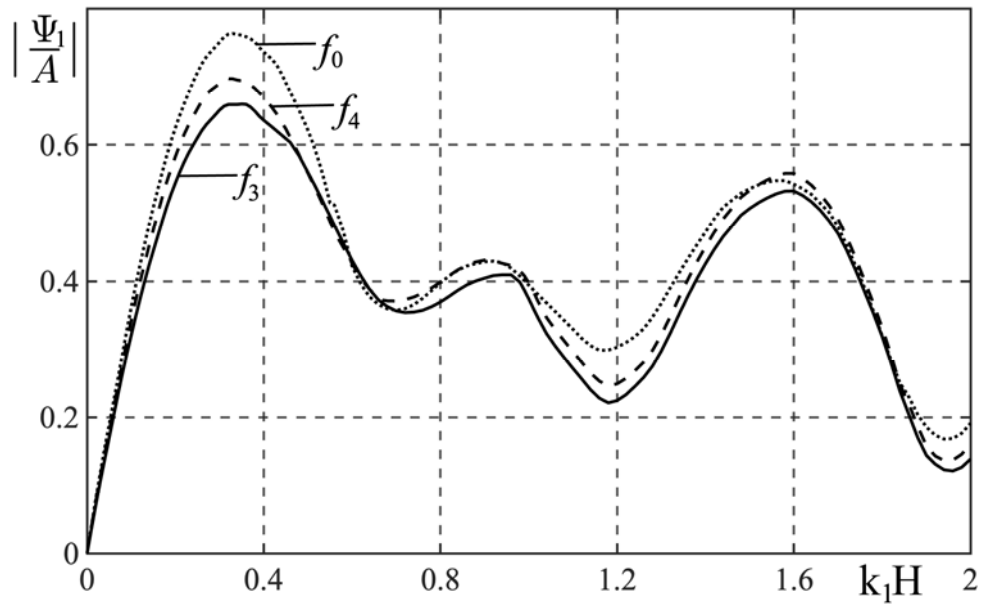


Рис. 4.8. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 10H$

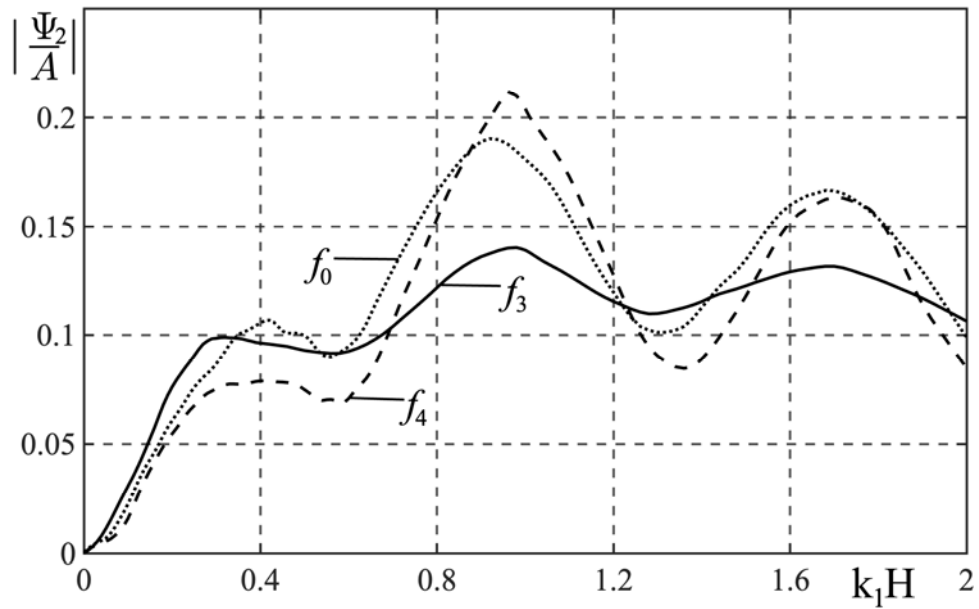


Рис. 4.9. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 10H$

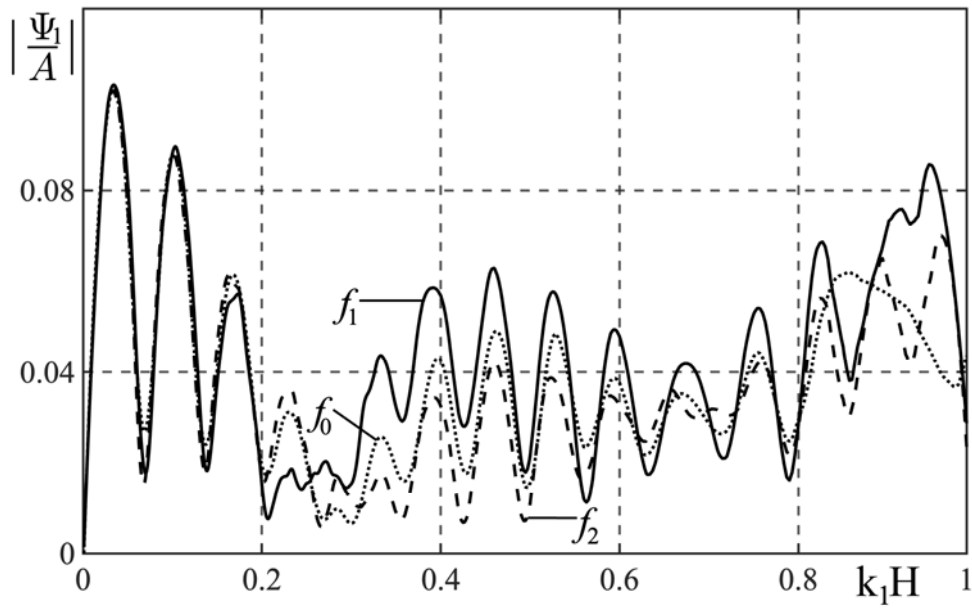


Рис. 4.10. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 100H$

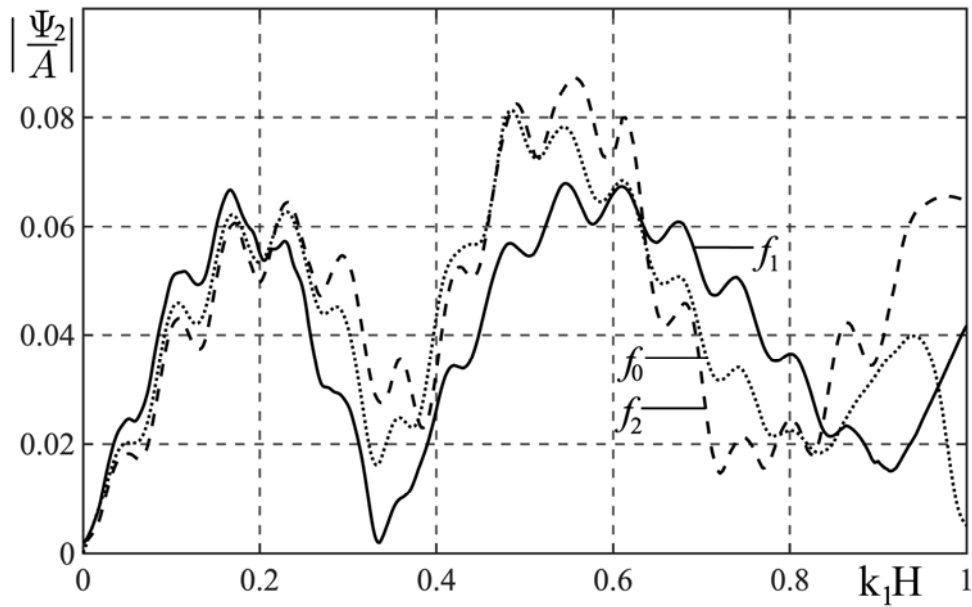


Рис. 4.11. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 100H$

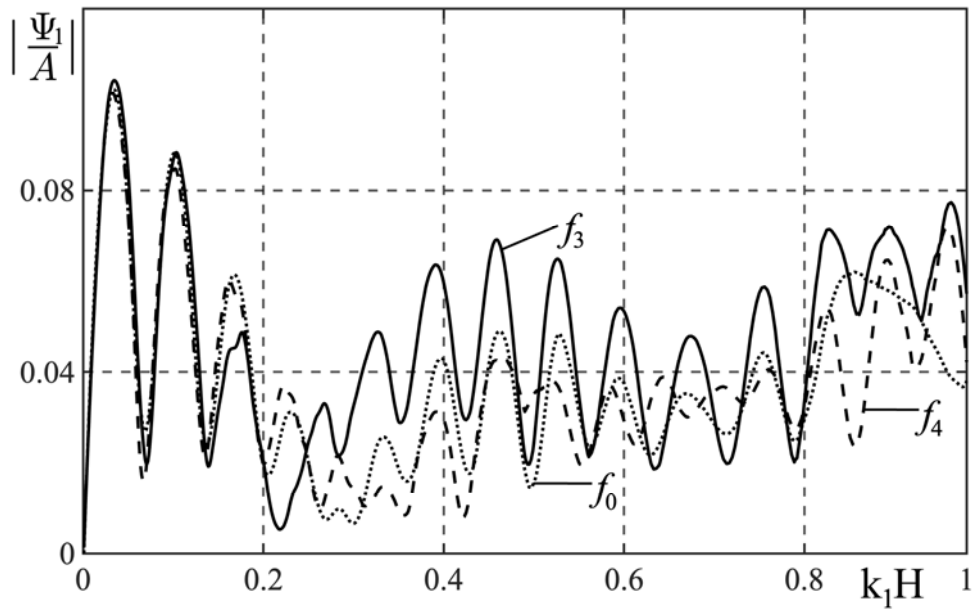


Рис. 4.12. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 100H$

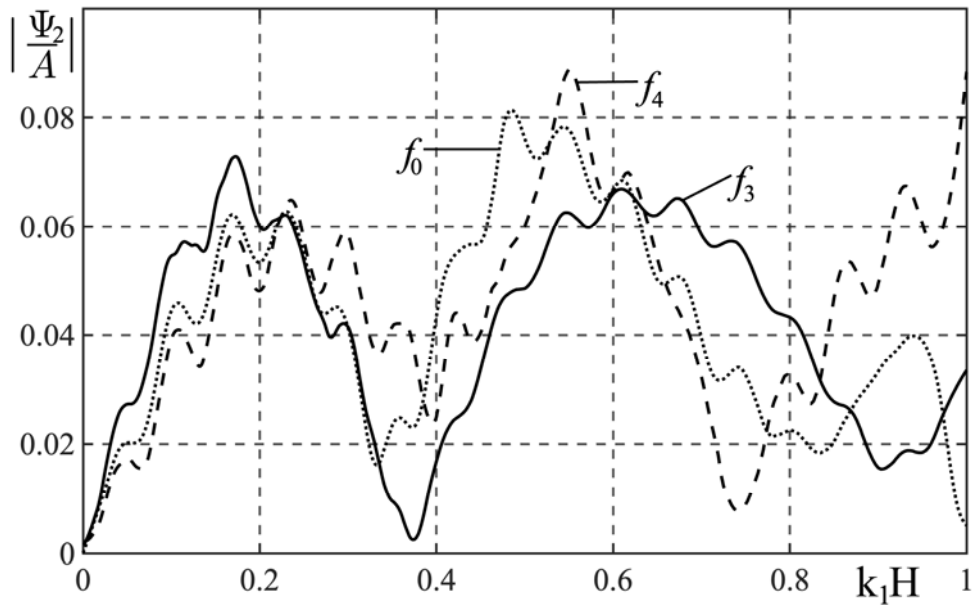


Рис. 4.13. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для квадратных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 100H$

Как видно из рисунков, частотные зависимости отраженного и прошедшего акустических полей для однородного и разных видов неоднородных покрытий при небольших значениях волнового размера пластины мало различаются друг от друга. С ростом волнового размера пластины отличие частотных характеристик усиливается. Причем это отличие является более выраженным для коэффициента прозрачности.

Сравнивая частотные зависимости при линейных и квадратичных законах неоднородности на всем рассматриваемом диапазоне волнового размера пластины, замечаем, что они незначительно отличаются друг от друга. Это объясняется тем, что расчеты были проведены для небольшого диапазона изменения $k_1 H$.

Расчеты показывают, что при удалении источника звука от пластины усиливается колебательный характер частотных зависимостей как для отраженного, так и для прошедшего акустических полей и в случае однородного покрытия, и при разных законах неоднородности материала покрытия.

Кроме того, с увеличением расстояния от источника до пластины имеет место ослабление отраженных и прошедших сигналов.

На рис. 4.14 – 4.19 приведены частотные характеристики $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ для однородного покрытия и покрытий с законами неоднородности вида $f_1(z)$ и $f_4(z)$ при разном удалении источника от пластины. Кривые 1, 2, 3 соответствуют случаям, когда $z_0 = 5H; 10H; 100H$ соответственно.

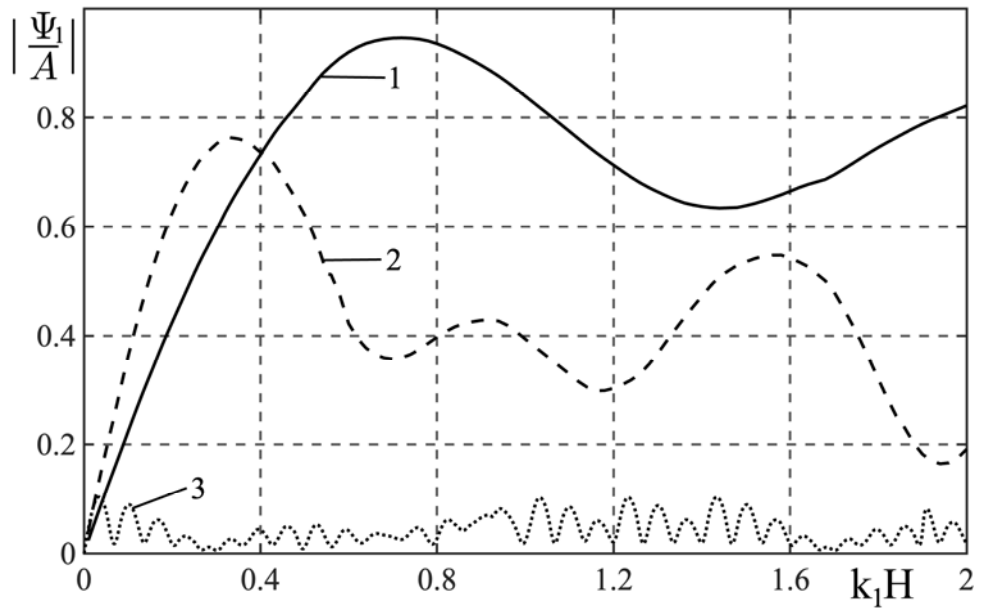


Рис. 4.14. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ для однородного покрытия при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

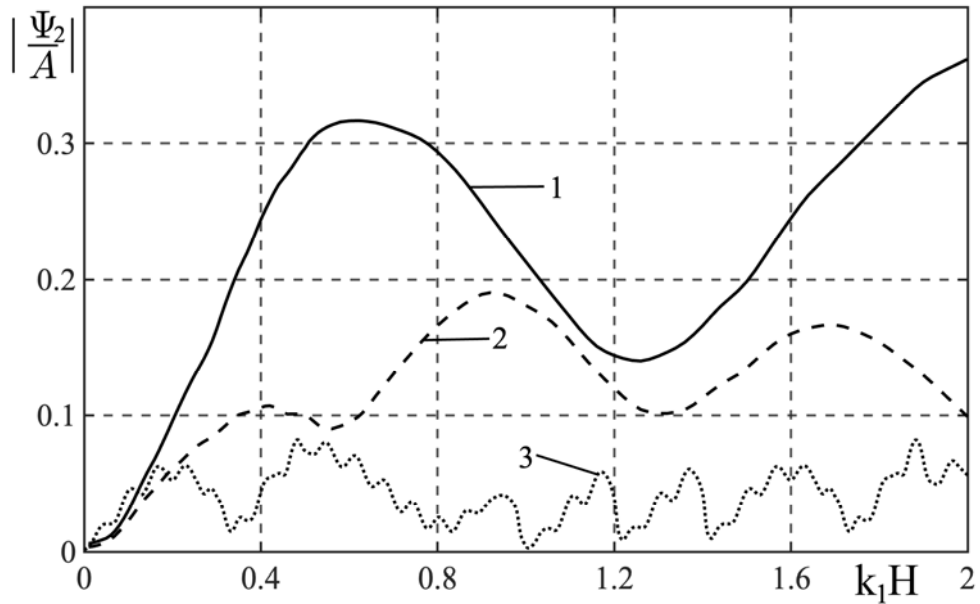


Рис. 4.15. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ для однородного покрытия при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

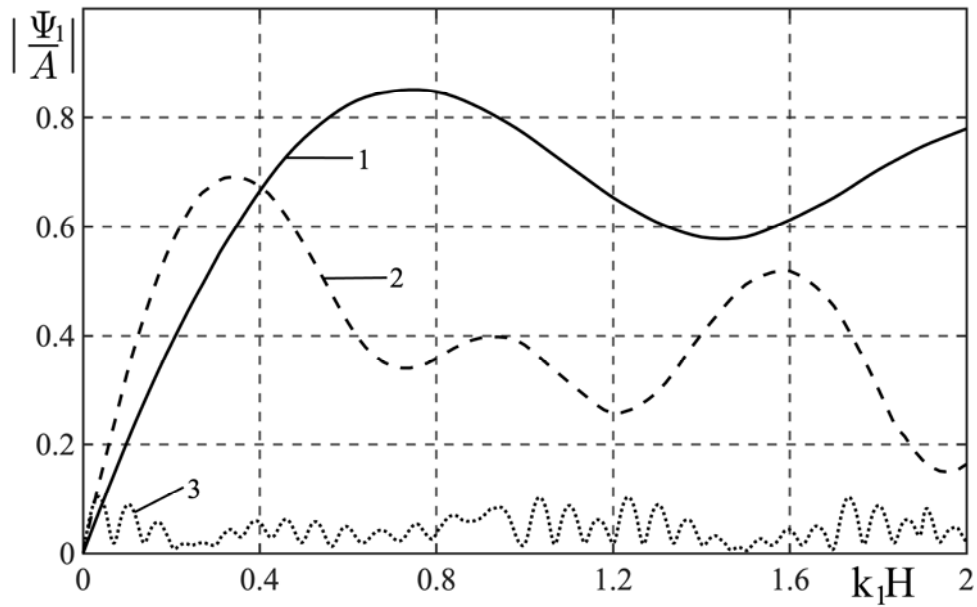


Рис. 4.16. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины k_1H для линейного закона неоднородности $f_1(z)$ при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

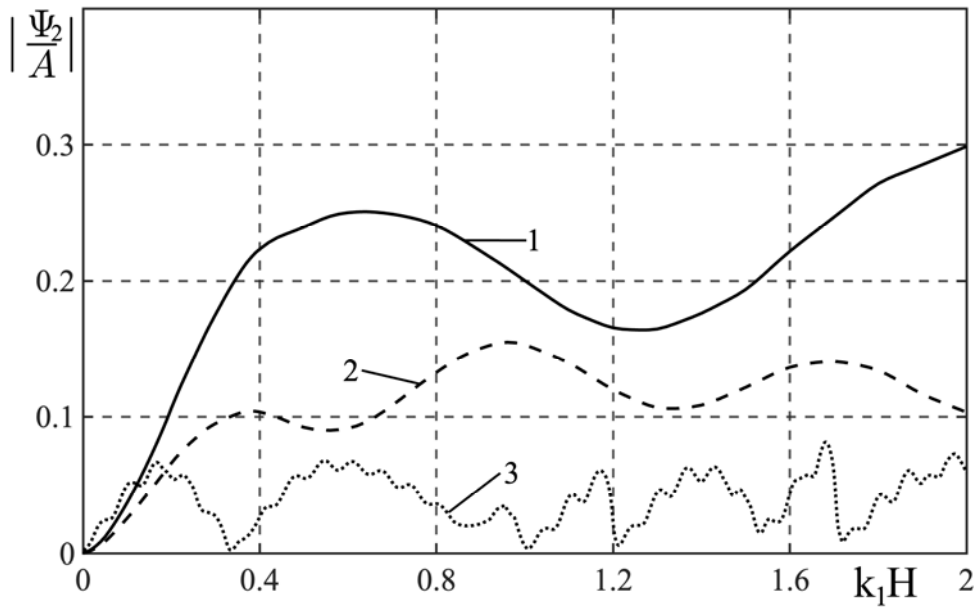


Рис. 4.17. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины k_1H для линейного закона неоднородности $f_1(z)$ при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

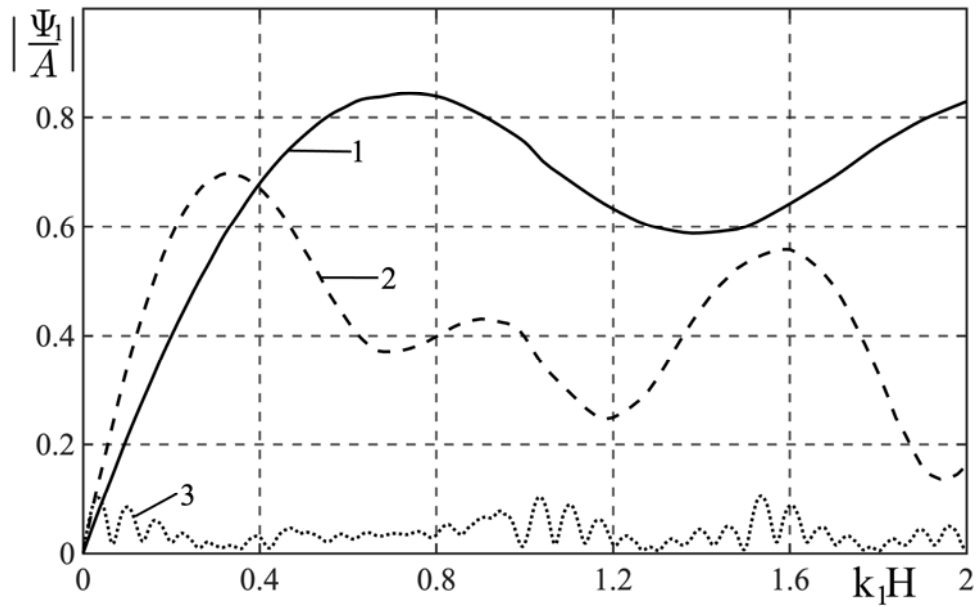


Рис. 4.18. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ для квадратичного закона неоднородности $f_4(z)$ при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

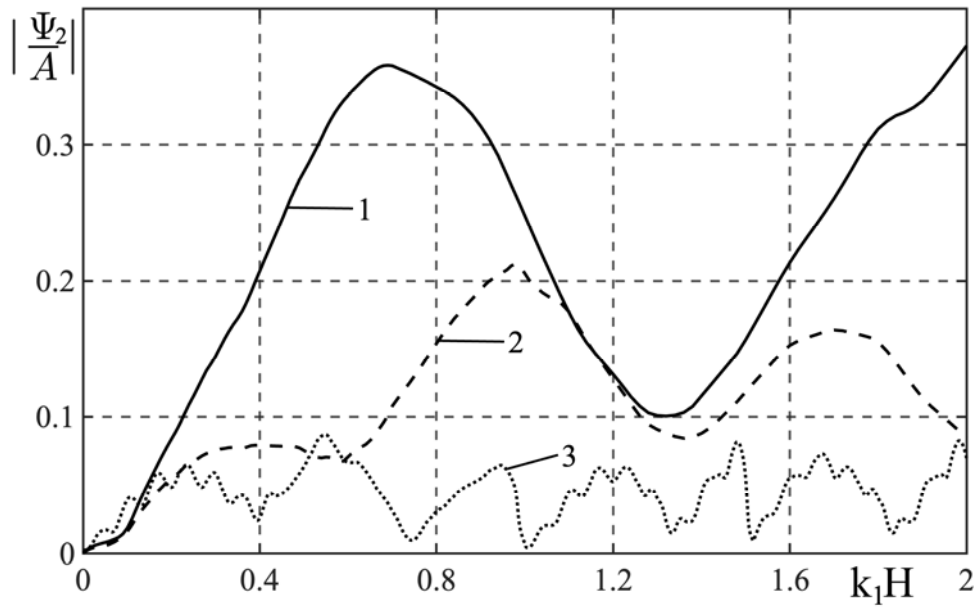


Рис. 4.19. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ для квадратичного закона неоднородности $f_4(z)$ при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

При изменении расстояния от источника до пластины наблюдается сильное изменение частотных зависимостей для одного и того же вида неоднородности, что проявляется в изменении уровней характеристик и сдвиге резонансных частот. Это относится и к отраженному полю, и к прошедшему полю. По мере удаления точечного источника от пластины происходит увеличение осцилляции частотных зависимостей для однородного и рассматриваемых неоднородных покрытий, а также уменьшение значений коэффициентов отражения и прозрачности.

4.5. Использование решения двумерной задачи о прохождении плоской волны через пластину с покрытием

Для верификации полученных результатов воспользуемся другим подходом получения решения базовой задачи об отражении и преломлении плоской волны, падающей произвольным образом на упругую пластину с неоднородным покрытием. В отличие от решения задачи, изложенного в разделе 4.3.1, воспользуемся решением этой задачи в двумерном случае, полученным в главе 2.

В главе 2 для решения задачи была введена декартова прямоугольная системы координат x, y, z , которую переобозначим через x_1, y_1, z_1 , а в случае произвольного падения (трехмерный случай) будем использовать систему координат x, y, z . При этом координатные оси Oz_1 и Oz совпадают.

В двумерном случае волновой вектор \mathbf{k}_1 которой лежит в плоскости x_1, z_1 и его проекции на оси координат x и z соответственно равны $k_{1x_1} = k_1 \sin \theta_0$, $k_{1y_1} = 0$, $k_{1z_1} = k_1 \cos \theta_0$, где θ_0 – полярный угол падения плоской волны (угол, составляемый нормалью к фронту волны с осью z). Элементы решения двумерной задачи, рассмотренной в главе 2, будем снабжать индексом 1.

Тогда потенциал скорости падающей волны записывается в виде

$$\psi_{0pl}^1 = A_0 \exp \{i[k_{1x_1} x_1 + k_{1z_1} (z_1 + h)]\}, \quad (4.28)$$

потенциалы скорости отраженной от слоя и прошедшей через слой волн –

$$\psi_{1pl}^1 = A_1^1 \exp \{i[k_{1x_1} x_1 - k_{1z_1} (z_1 + h)]\}, \quad (4.29)$$

$$\psi_{2pl}^1 = A_2^1 \exp \{i[k_{1x_1} x_1 + k_{2z_1} (z_1 - H)]\}, \quad (4.30)$$

компоненты вектора смещений в неоднородном покрытии –

$$u_{x_1} = U_{x_1}(z_1) \exp(ik_{1x_1} x_1), \quad u_{z_1} = U_{z_1}(z_1) \exp(ik_{1x_1} x_1). \quad (4.31)$$

При наклонном падении плоской волны имеем

$$k_{1x} = k_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \quad k_{1y} = k_1 \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad k_{1z} = k_1 \cos \theta_0,$$

где θ_0 и φ_0 – полярный и азимутальный углы падения плоской волны.

Чтобы перейти от двумерного случая к трехмерному, осуществим поворот координат как показано на рис. 4.20.

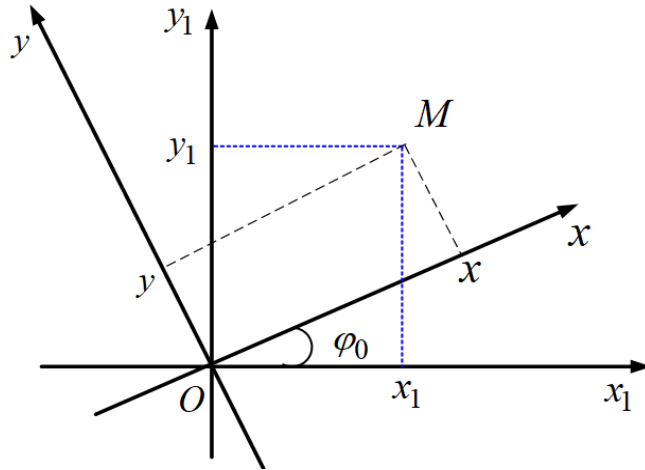


Рис. 4.20. Поворот осей координат

Тогда координаты x, y, z будут связаны с координатами x_1, y_1, z_1 следующими формулами преобразования [12]:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0, \\ y_1 &= -x \sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0, \\ z_1 &= z. \end{aligned} \quad (4.32)$$

или

$$\begin{aligned}
x &= x_1 \cos \varphi_0 - y_1 \sin \varphi_0, \\
y &= -x_1 \sin \varphi_0 + y_1 \cos \varphi_0, \\
z &= z_1.
\end{aligned}$$

Подставим (4.32) в (4.28) – (4.30) получим выражения для потенциалов в трехмерном случае

$$\Psi_{0pl} = A_0 \exp \{i[k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}(z + h)]\}, \quad (4.33)$$

$$\Psi_{1pl} = A_1^1 \exp \{i[k_{1x}x + k_{1y}y - k_{1z}(z + h)]\}, \quad (4.34)$$

$$\Psi_{2pl} = A_2^1 \exp \{i[k_{1x}x + k_{1y}y + k_{2z}(z - H)]\}, \quad (4.35)$$

где согласно (2.24)

$$\begin{aligned}
A_1^1 &= A_0 + (\omega / k_{1z})U_{z_1}(-h), \\
A_2^1 &= -(i\omega / k_{2z_1})[k_{l_{z_1}}(B_1^1 e_{1l} - B_2^1 e_{2l}) + k_{1x_1}(C_1^1 e_{1\tau} + C_2^1 e_{2\tau})], \\
B_j^1 &= \beta_{1j}U_{x_1}(0) + \beta_{2j}U_{z_1}(0), \quad C_j^1 = \gamma_{1j}U_{x_1}(0) + \gamma_{2j}U_{z_1}(0), \\
k_{2z_1} &= \sqrt{k_2^2 - k_{1x_1}^2}, \quad k_{l_{z_1}} = \sqrt{k_l^2 - k_{1x_1}^2}, \quad k_{\tau z_1} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{1x_1}^2}, \\
e_{1l} &= e^{ik_{l_{z_1}}H}, \quad e_{2l} = e^{-ik_{l_{z_1}}H}, \quad e_{1\tau} = e^{ik_{\tau z_1}H}, \quad e_{2\tau} = e^{-ik_{\tau z_1}H}, \\
\beta_{11} &= k_{1x_1}t_2w_1, \quad \beta_{21} = k_{\tau z_1}r_2w_1, \quad \beta_{12} = k_{1x_1}t_1w_1, \quad \beta_{22} = -k_{\tau z_1}r_1w_1, \\
\gamma_{11} &= -k_{l_{z_1}}q_2w_2, \quad \gamma_{21} = k_{1x_1}g_2w_2, \quad \gamma_{12} = k_{l_{z_1}}q_1w_2, \quad \gamma_{22} = -k_{1x_1}g_1w_2, \\
w_1 &= \frac{-4i\mu_0s_3}{r_1t_2 + r_2t_1}, \quad w_2 = \frac{4is_1}{g_1q_2 - g_2q_1}, \\
g_j &= (-1)^j 4s_1k_{l_{z_1}}k_{\tau z_1} - (s_{7-j}e_{1l} + s_{9-j}e_{2l})e_{j\tau}, \\
q_j &= 4s_1k_{1x_1}^2 + (s_{7-j}e_{1l} - s_{9-j}e_{2l})e_{j\tau}, \\
t_j &= 4\mu_0s_3k_{l_{z_1}}k_{\tau z_1} + (s_{6+(-1)^j}e_{2\tau} - s_{7+(-1)^j}e_{1\tau})e_{jl}, \\
r_j &= 4\mu_0k_{1x_1}^2s_3 + (-1)^j (s_{6+(-1)^j}e_{2\tau} + s_{7+(-1)^j}e_{1\tau})e_{jl},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= (\lambda_0 + 2\mu_0)k_{l_{z_1}}^2 + \lambda_0 k_{1x_1}^2, \quad s_2 = 2\mu_0 k_{1x_1} k_{\tau_{z_1}}, \\
s_3 &= k_{1x_1}^2 - k_{\tau_{z_1}}^2, \quad s_4 = \omega^2 \rho_2 / k_{2z_1}, \\
s_{4+j} &= s_3(s_4 k_{l_{z_1}} - s_1) - 2k_{1x_1} k_{l_{z_1}} (s_4 k_{1x_1} - (-1)^j s_2), \\
s_{6+j} &= s_3(s_4 k_{l_{z_1}} + s_1) - 2k_{1x_1} k_{l_{z_1}} (s_4 k_{1x_1} - (-1)^j s_2) \quad (j=1, 2).
\end{aligned}$$

В трехмерном случае составляющие вектора смещения \mathbf{u} определяются выражениями

$$u_x = u_{x_1} \cos \varphi_0, \quad u_y = u_1 \sin \varphi_0, \quad u_z = u_{z_1}.$$

или с учетом (4.31) и (4.32)

$$\begin{aligned}
u_x &= U_{x_1}(z) e^{ik_{1x}x} e^{ik_{1y}y} \cos \varphi_0, \\
u_y &= U_{x_1}(z) e^{ik_{1x}x} e^{ik_{1y}y} \sin \varphi_0, \\
u_z &= U_{z_1}(z) e^{ik_{1x}x} e^{ik_{1y}y},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

где функции $U_{x_1}(z)$ и $U_{z_1}(z)$ являются решениями краевой задачи (2.26), (2.27).

Теперь для нахождения звуковых волн, отраженных и прошедших через пластину с покрытием при падении сферической волны, в формулах (4.34) и (4.35) сделаем замену k_{1x} на ξ , k_{1y} на ζ , A_0 на $I(\xi, \zeta) e^{-ik_{1z}h}$ и проведем интегрирования по ξ и ζ так, как это выполнено в разделе 4.3.2.

В качестве примеров на рис. 4.21 и 4.22 приведены зависимости $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от $k_1 H$ при $z_0 = 10H$, рассчитанные двумя способами для случая, когда пластина имеет покрытие с линейным законом неоднородности $f_1(z)$. Сплошной линией обозначены зависимости, рассчитанные по двумерной модели, а пунктирной линией обозначены зависимости, рассчитанные по трехмерной модели и приведенные на рис. 4.6 и 4.7.

Расчеты показали практически полное совпадение соответствующих зависимостей.

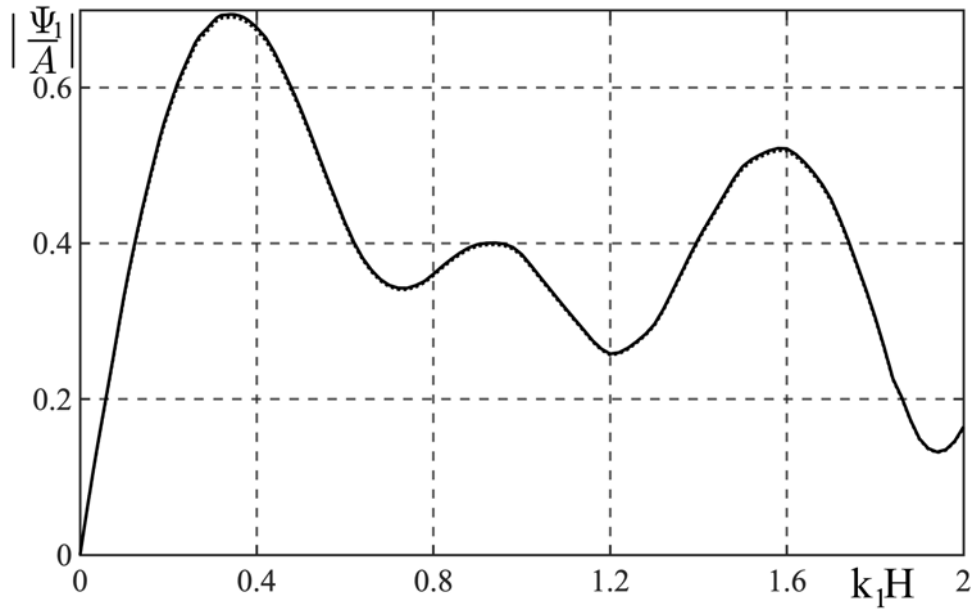


Рис. 4.21. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ при $z_0 = 10H$

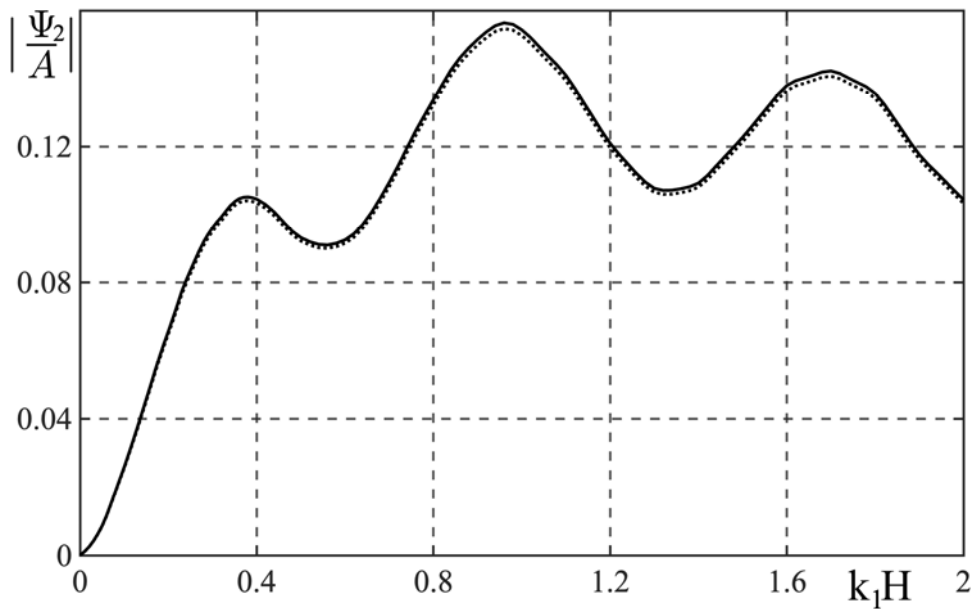


Рис. 4.22. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ при $z_0 = 10H$

Глава 5. ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИ- ЕМ, ГРАНИЧАЩУЮ С ВЯЗКИМИ ЖИДКОСТЯМИ

В предыдущих главах полагалось, что пластина с покрытием граничит с идеальными жидкостями. Реальные свойства жидкости не учитывались, хотя в ряде случаев ими пренебрегать нельзя.

При распространении звука в реальной среде часть звуковой энергии превращается в тепловую. Причиной диссипации энергии звуковых волн является наличие вязкости и теплопроводности. Однако, если для газов указанные причины поглощения вносят примерно одинаковый вклад, то в капельных жидкостях основную роль в поглощении играет вязкость и влиянием теплопроводности можно пренебречь.

В данной главе исследуется влияние непрерывно-неоднородного покрытия однородной упругой пластины, граничащей с вязкими жидкостями, на отражение и прохождение плоской звуковой волны при расположении покрытия на разных сторонах пластины и при разных законах неоднородности механических параметров материала покрытия.

Результаты исследований, представленные во второй главе, изложены в работах [38, 66].

5.1. Постановка задача

Рассмотрим однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h . Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты z : $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, $\rho = \rho(z)$. При этом декартова система прямоугольных координат x, y, z выбрана таким образом, что ось

x лежит в плоскости, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины. Рассмотрим два случая расположения покрытия на пластине: покрытие расположено со стороны падения плоской волны (рис. 5.1 *a*) и с противоположной стороны (рис. 5.1 *b*). Пластина с покрытием помещена между двумя полупространствами, заполненными вязкими однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1 и ρ_2 , скорости звука c_1 и c_2 , кинематические коэффициенты вязкости (первый и второй) ν_1 и ν_2 , ξ_1 и ξ_2 соответственно.

Пусть из полупространства с отрицательными значениями z на пластину с покрытием падает под произвольным углом плоская гармоническая звуковая волна, волновой вектор \mathbf{k}_1 которой лежит в плоскости x, z .

Потенциал скорости падающей волны записывается в виде

$$\psi_0 = A_0 \exp \{i[k_{1x}^{(1)}x + k_{1z}^{(1)}(z + h) - \omega t]\}, \quad (5.1)$$

для случая, изображенного на рис. 5.1 *a*, и в виде

$$\tilde{\psi}_0 = A_0 \exp \{i[k_{1x}^{(1)}x + k_{1z}^{(1)}(z + H) - \omega t]\}, \quad (5.2)$$

для случая, изображенного на рис. 5.1 *b*.

Здесь A_0 — амплитуда волны; $k_{1x}^{(1)} = k_1^{(1)} \sin \theta_0$ и $k_{1z}^{(1)} = \sqrt{k_1^{(1)2} - k_{1x}^{(1)2}} = k_1^{(1)} \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_1^{(1)}$ на оси координат x и z соответственно; $k_1^{(1)}$ — волновое число в верхнем полупространстве; ω — круговая частота; θ_0 — угол падения плоской волны, составляемый нормалью к фронту волны с осью z .

Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

Определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием волны. Выясним особенности прохождения звука при расположении

покрытия на разных сторонах пластины.

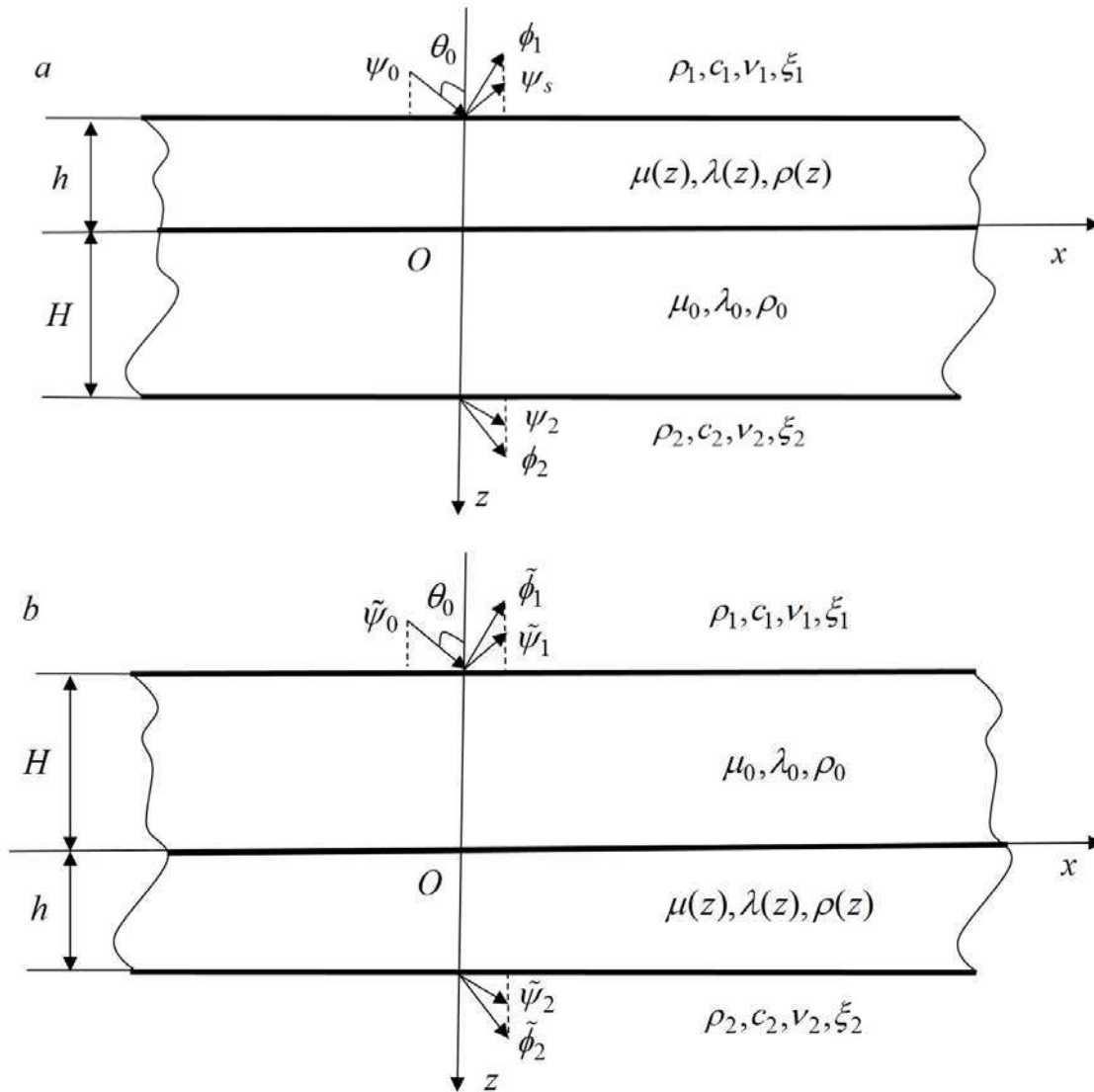


Рис. 5.1. Геометрия задачи

5.2. Аналитическое решение

Поскольку волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}_1^{(1)}$ лежит в плоскости x, z и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты y , а неоднородность материала покрытия проявляется лишь по оси z , то от координат y не будут зависеть ни отраженное от пластины, ни прошедшее через пластину, ни возбужденные в упругой однородной пластине и в её неоднородном покрытии волновые поля.

Распространение малых возмущений в вязкой жидкости в случае установившихся колебаний в области описывается системой, состоящей из скалярного и векторного уравнений Гельмгольца [71]:

$$\Delta\psi_j + k_1^{(j)2}\psi_j = 0, \quad (5.3)$$

$$\Delta\phi_j + k_2^{(j)2}\phi_j = 0, \quad (5.4)$$

где ψ_j и ϕ_j – потенциалы скорости продольных и вязких волн в j – ой среде соответственно; $k_1^{(j)}$ и $k_2^{(j)}$ – волновые числа продольных звуковых и вязких волн в j – ой среде соответственно;

$$k_1^{(j)} = \frac{\omega^2}{c_j^2 - i\omega(\xi_j + 4\nu_j/3)}, \quad k_2^{(j)2} = i\omega/\nu_j.$$

При этом

$$\psi_1 = \psi_0 + \psi_s,$$

где ψ_s – потенциал скорости отраженной звуковой волны, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца

$$\Delta\psi_s + k_1^{(1)2}\psi_s = 0. \quad (5.5)$$

Так как рассматриваемая задача является двумерной, то $\phi_j = \phi_j(x, z)\mathbf{e}_y$, где \mathbf{e}_y – единичный вектор оси y . Тогда векторное уравнение (5.4) сведется к одному скалярному уравнению относительно функции $\phi_j(x, z)$

$$\Delta\phi_j + k_2^{(j)2}\phi_j = 0. \quad (5.6)$$

Вектор скорости частиц \mathbf{v}_j и акустическое давление в j – ой вязкой жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v}^{(j)} = \text{grad } \psi_j + \text{rot } \phi_j, \quad (5.7)$$

$$p_j = i\omega\rho_j \left[1 + i \frac{k_1^{(j)2}}{\omega} \left(\xi_j + \frac{4}{3} v_j \right) \right] \Psi_j. \quad (5.8)$$

Если выполняются соотношения

$$\frac{\omega v_j}{c_j^2} \ll 1, \quad \frac{\omega \xi_j}{c_j^2} \ll 1,$$

то

$$k_1^{(j)} \approx \frac{\omega}{c_j}, \quad p_j = i\rho_j \omega \Psi_j \quad (j=1,2).$$

Компоненты тензора напряжений в j – ой вязкой жидкости $\sigma_{zz}^{(j)}$ и $\sigma_{xz}^{(j)}$ определяются по формулам [17]

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(0)} &= -p_j + \rho_j \left(\xi_j - \frac{2}{3} v_j \right) \operatorname{div} \mathbf{v}^{(j)} + 2v_j \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z}, \\ \sigma_{xz}^{(j)} &= \rho_j v_j \left(\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $v_x^{(j)}$ и $v_z^{(j)}$ – компоненты вектора скорости $\mathbf{v}^{(j)}$ ($j=1,2$);

$$v_x^{(j)} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}, \quad v_z^{(j)} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}. \quad (5.10)$$

Распространение малых возмущений в однородном изотропном упругом слое описывается двумя волновыми уравнениями для продольных и поперечных волн, которые в случае установившихся колебаний переходят в уравнения Гельмгольца [79]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad (5.11)$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (5.12)$$

где Ψ и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega / c_l$ и $k_\tau = \omega / c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + \mu_0) / \rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0 / \rho_0}$ – скорости продольных и поперечных

волн соответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi \quad (\text{div } \Phi = 0). \quad (5.13)$$

Так как $\Phi = \Phi(x, z)\mathbf{e}_y$, то векторное уравнение (5.12) сведется к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции $\Phi(x, z)$

$$\Delta\Phi + k_\tau^2\Phi = 0. \quad (5.14)$$

Компоненты вектора \mathbf{u}^0 записываются через функции Ψ и Φ следующим образом:

$$u_x^0 = \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad u_z^0 = \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}. \quad (5.15)$$

Связь между компонентами тензора напряжений и компонентами вектора смещения в однородной упругой пластине имеет вид [43]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0 &= \lambda_0 \text{div } \mathbf{u}^0 + 2\mu_0 \frac{\partial u_x^0}{\partial x}, \\ \sigma_{xz}^0 &= \mu_0 \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial z} + \frac{\partial u_z^0}{\partial x} \right), \\ \sigma_{zz}^0 &= \lambda_0 \text{div } \mathbf{u}^0 + 2\mu_0 \frac{\partial u_z^0}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [43], которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} &= -\omega^2\rho(z)u_x, \\ \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} &= -\omega^2\rho(z)u_z. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с составляющими вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом покрытии следующими со-

отношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda(z) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu(z) \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \sigma_{xz} = \mu(z) \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda(z) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu(z) \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

На поверхностях, соприкасающихся с вязкими жидкостями, граничные условия заключаются в равенстве скоростей частиц упругой среды и жидкости, непрерывности нормальных и тангенциальных напряжений.

В случае, когда покрытие граничит с жидкостью в верхнем полупространстве, имеем

при $z = -h$:

$$-i\omega u_x = v_x^{(1)}, \quad -i\omega u_z = v_z^{(1)}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(1)};\tag{5.19}$$

при $z = H$:

$$-i\omega u_x^0 = v_x^{(2)}, \quad -i\omega u_z^0 = v_z^{(2)}, \quad \sigma_{zz}^0 = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{xz}^0 = \sigma_{xz}^{(2)};\tag{5.20}$$

В случае, когда покрытие граничит со средой в нижнем полупространстве, имеем

при $z = -H$:

$$-i\omega u_x^0 = v_x^{(1)}, \quad -i\omega u_z^0 = v_z^{(1)}, \quad \sigma_{zz}^0 = \sigma_{zz}^{(1)}, \quad \sigma_{xz}^0 = \sigma_{xz}^{(1)};\tag{5.21}$$

при $z = h$:

$$-i\omega u_x = v_x^{(2)}, \quad -i\omega u_z = v_z^{(2)}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{(2)}.\tag{5.22}$$

На поверхности $z = 0$, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения.

$$u_x = u_x^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0.\tag{5.23}$$

Для исследования особенностей прохождения звука через пластину с разным расположением покрытия рассмотрим отдельно каждый случай.

Сначала рассмотрим случай, когда неоднородное покрытие расположено на верхней поверхности пластины со стороны падения плоской

волны (рис. 5.1 а).

Потенциалы скоростей продольных и вязких волн отраженных от пластины и прошедшей через нее волн ψ_s , ϕ_1 и ψ_2 , ϕ_2 будем искать в виде

$$\psi_s = A_1 \exp \{i[k_{1x}^{(1)}x - k_{1z}^{(1)}(z + h)]\}, \quad (5.24)$$

$$\phi_1 = B_1 \exp \{i[k_{2x}^{(1)}x - k_{2z}^{(1)}(z + h)]\},$$

$$\psi_2 = A_2 \exp \{i[k_{1x}^{(2)}x + k_{1z}^{(2)}(z - H)]\}, \quad (5.25)$$

$$\phi_2 = B_2 \exp \{i[k_{2x}^{(2)}x + k_{2z}^{(2)}(z - H)]\},$$

где $k_{1x}^{(2)}$, $k_{1z}^{(2)}$ – проекции волнового вектора прошедшей продольной волны $\mathbf{k}_1^{(2)}$ на оси x и z ; $k_{1z}^{(2)} = \sqrt{k_1^{(2)2} - k_{1x}^{(2)2}}$; $k_{2x}^{(j)}$, $k_{2z}^{(j)}$ – проекции волнового вектора $\mathbf{k}_2^{(j)}$ на оси x и z в j – ой жидкости; $k_{2z}^{(j)} = \sqrt{k_2^{(j)2} - k_{2x}^{(j)2}}$.

При этом согласно закону Снеллиуса [4] $k_{1x}^{(2)} = k_{2x}^{(1)} = k_{2x}^{(2)} = k_{1x}^{(1)}$.

Потенциалы смещения Ψ и Φ будем искать в виде

$$\Psi = C_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{lz}z)] + C_2 \exp[i(k_{lx}x - k_{lz}z)], \quad (5.26)$$

$$\Phi = D_1 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau z}z)] + D_2 \exp[i(k_{\tau x}x - k_{\tau z}z)], \quad (5.27)$$

где, согласно закону Снеллиуса, $k_{lx} = k_{\tau x} = k_{1x}^{(1)}$; $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2}$, $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2}$.

Так как по закону Снеллиуса зависимость составляющих вектора смещения \mathbf{u} от координаты x имеет вид $\exp(ik_{1x}^{(1)}x)$, то компоненты вектора \mathbf{u} будем искать в виде

$$u_x = U_1(z) \exp(ik_{1x}^{(1)}x), \quad u_z = U_2(z) \exp(ik_{1x}^{(1)}x). \quad (5.28)$$

Подставляя выражения (5.28) в уравнения (5.17) и учитывая соотношения (5.18), получим систему линейных обыкновенных

дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_1(z)$ и $U_2(z)$

$$\mathbf{A}U'' + \mathbf{B}U' + \mathbf{C}U = 0, \quad (5.29)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu' & ik_{1x}^{(1)}(\lambda + \mu) \\ ik_{1x}^{(1)}(\lambda + \mu) & \lambda' + 2\mu' \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -k_{1x}^{(1)2}(\lambda + \mu) + \omega^2\rho & ik_{1x}^{(1)}\mu' \\ ik_{1x}^{(1)}\lambda' & -ik_{1x}^{(1)}\mu + \omega^2\rho \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по координате z .

Коэффициенты A_j, B_j, C_j, D_j ($j=1,2$) в выражениях (5.24) – (5.27) подлежат определению из граничных условий.

Подставим выражения (5.24) – (5.27) в граничные условия (5.19), (5.20), (5.23).

Из первых двух условий (5.19) получаем систему двух уравнений, из которой находим коэффициенты A_1 и B_1 , выраженные через значения $U_1(z)$ и $U_2(z)$ на поверхности неоднородного покрытия $z = -h$

$$A_1 = [A_0(k_{1z}^{(1)}k_{2z}^{(1)} - k_{1x}^{(1)2}) - \omega k_{1x}^{(1)}U_1(-h) - \omega k_{2z}^{(1)}U_2(-h)]\Delta_1^{-1},$$

$$B_1 = -[2A_0k_{1z}^{(1)}k_{1z}^{(1)} + \omega k_{1z}^{(1)}U_1(-h) - \omega k_{1x}^{(1)}U_2(-h)]\Delta_1^{-1}.$$

Из четырех граничных условий (5.20) и первых двух условий (5.23) получаем систему уравнений, из которой находим коэффициенты A_2, B_2, C_j, D_j ($j=1,2$), выраженные через значения функций $U_1(z)$ и $U_2(z)$ на поверхности неоднородного покрытия $z = 0$

$$A_2 = -i\omega(C_1a_1e_{1l} + C_2a_2e_{2l} + D_1b_1e_{1\tau} + D_2b_2e_{2\tau})\Delta_2^{-1},$$

$$B_2 = -i\omega(C_1c_1e_{1l} - C_2c_2e_{2l} + D_1d_1e_{1\tau} + D_2d_2e_{2\tau})\Delta_2^{-1},$$

$$C_1 = \beta_{12}U_1(0) + \beta_{22}U_2(0), \quad C_2 = \beta_{11}U_1(0) + \beta_{21}U_2(0),$$

$$D_1 = \gamma_{12}U_1(0) + \gamma_{22}U_2(0), \quad D_2 = \gamma_{11}U_1(0) + \gamma_{21}U_2(0),$$

где

$$e_{1l} = e^{ik_{lz}H}, \quad e_{2l} = e^{-ik_{lz}H}, \quad e_{1\tau} = e^{ik_{\tau z}H}, \quad e_{2\tau} = e^{-ik_{\tau z}H},$$

$$\Delta_j = k_{1z}^{(j)}k_{2z}^{(j)} + k_{1x}^{(j)2},$$

$$a_j = k_{1x}^{(j)2} + (-1)^{j+1}k_{2z}^{(2)}k_{lz}, \quad b_j = k_{1x}^{(1)}[k_{2z}^{(2)} + (-1)^j k_{\tau z}],$$

$$c_j = k_{1x}^{(1)}[k_{lz} + (-1)^j k_{1z}^{(2)}], \quad d_j = k_{1x}^{(1)2} + (-1)^{j+1}k_{1z}^{(2)}k_{\tau z},$$

$$\beta_{1j} = (-1)^j i [t_j k_{1x}^{(1)}(w_2 - w_1) + k_{lz}(r_2 w_1 - r_1 w_2) + h_j k_{1x}^{(1)}(r_1 - r_2)] \Delta_3^{-1},$$

$$\beta_{2j} = -i [t_j k_{\tau z}(w_2 + w_1) + k_{1x}^{(1)}(r_1 w_2 - r_2 w_1) + (-1)^j h_j k_{\tau z}(r_1 + r_2)] \Delta_3^{-1},$$

$$\gamma_{1j} = -i [w_j k_{lz}(t_1 + t_2) + k_{1x}^{(1)}(t_1 h_2 - t_2 h_1) - r_j k_{lz}(h_1 + h_2)] \Delta_3^{-1},$$

$$\gamma_{2j} = (-1)^{j+1} i [w_j k_{1x}^{(1)}(t_2 - t_1) + (-1)^j k_{\tau z}(t_1 h_2 - t_2 h_1) + r_j k_{1x}^{(1)}(h_1 - h_2)] \Delta_3^{-1},$$

$$t_j = e_{jl} [s_1 - i\omega(m_2 a_j + n_2 c_j)] \Delta_2^{-1},$$

$$r_j = e_{j\tau} [(-1)^{j+1} s_2 - i\omega(m_2 b_j + n_2 d_j)] \Delta_2^{-1},$$

$$w_j = e_{j\tau} [s_4 - i\omega(q_2 b_j + p_2 d_j)] \Delta_2^{-1},$$

$$h_j = e_{l\tau} [(-1)^{j+1} s_3 - i\omega(q_2 a_j + p_2 c_j)] \Delta_2^{-1},$$

$$m_j = (-1)^{j+1} i \omega \rho_j [1 + ik_1^{(j)2} (\xi_j + 4\nu_j / 3) / \omega] +$$

$$+ (-1)^{j+1} \rho_j (k_{1x}^{(j)2} + k_{1z}^{(j)2}) (\xi_j - 2\nu_j / 3) + (-1)^{j+1} 2\nu_j k_{1z}^{(j)2},$$

$$n_j = -2\nu_j k_{1x}^{(j)} k_{2z}^{(j)}, \quad q_j = -2\rho_j \nu_j k_{1x}^{(j)} k_{1z}^{(j)},$$

$$p_j = (-1)^{j+1} \rho_j \nu_j (k_{1x}^{(j)2} - k_{2z}^{(j)2}) \quad (j = 1, 2),$$

$$s_1 = \lambda_0 k_{1x}^{(1)2} + (\lambda_0 + 2\mu_0) k_{lz}^2, \quad s_2 = 2\mu_0 k_{1x}^{(1)} k_{\tau z},$$

$$s_3 = 2\mu_0 k_{1x}^{(1)} k_{1z}, \quad s_4 = \mu_0 (k_{1x}^{(1)2} - k_{tz}^2),$$

$$\Delta_3 = k_{1x}^{(1)} [(t_1 - t_2)(w_1 - w_2) + (h_1 - h_2)(r_2 - r_1) + k_{1z} k_{tz} (t_1 + t_2)(w_1 + w_2) - (h_1 + h_2)(r_1 + r_2)] + 2k_{1x}^{(1)} [k_{1z}(r_1 w_2 - r_2 w_1) + k_{tz}(t_1 h_2 - t_2 h_1)].$$

Таким образом, чтобы вычислить коэффициенты A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$), необходимо найти величины $U_1(-h)$ и $U_2(-h)$ и $U_1(0)$ и $U_2(0)$. Эти величины подлежат определению из решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (5.29).

Краевые условия для системы (5.29) получим из оставшихся неиспользованными граничных условий (5.19) и (5.23). Будем иметь

$$\begin{aligned} (\mathbf{AU}' + \mathbf{EU})_{z=-h} &= \mathbf{D}, \\ (\mathbf{AU}' + \mathbf{FU})_{z=0} &= 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & ik_{1x}^{(1)}\mu + e_{12} \\ ik_{1x}^{(1)}\lambda + e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & ik_{1x}^{(1)}\mu + f_{12} \\ ik_{1x}^{(1)}\lambda + f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = (d_1, d_2)^T,$$

$$e_{11} = -i\omega(q_1 k_{1x}^{(1)} + p_1 k_{1z}^{(1)})\Delta_1^{-1}, \quad e_{12} = -i\omega(p_1 k_{1x}^{(1)} + q_1 k_{2z}^{(1)})\Delta_1^{-1},$$

$$e_{21} = -i\omega(m_1 k_{1x}^{(1)} + n_1 k_{1z}^{(1)})\Delta_1^{-1}, \quad e_{22} = -i\omega(n_1 k_{1x}^{(1)} - m_1 k_{2z}^{(1)})\Delta_1^{-1},$$

$$f_{1j} = s_4(\beta_{j2} - \beta_{j1}) + s_3(\gamma_{j2} + \gamma_{j1}),$$

$$f_{2j} = s_1(\beta_{j2} + \beta_{j1}) + s_2(\gamma_{j2} - \gamma_{j1}),$$

$$d_1 = q_1 + [q_1 k_{1x}^{(1)2} + (2p_1 - q_1)k_{1z}^{(1)}k_{2z}^{(1)}]\Delta_1^{-1},$$

$$d_2 = -m_1 + [m_1 k_{1x}^{(1)2} + (2n_1 - m_1)k_{1z}^{(1)}k_{2z}^{(1)}]\Delta_1^{-1}.$$

Здесь и далее штрихи обозначают производные по координате z .

Решив краевую задачу (5.29), (5.30), получаем аналитическое описание акустических полей в жидкостях, а также полей смещений в одно-

родной упругой пластине и неоднородном упругом покрытии.

Теперь рассмотрим случай, когда неоднородное покрытие расположено на нижней поверхности пластины, то есть со стороны противоположной падению плоской волны (рис. 5.1 *b*). Элементы решения этой задачи будем обозначать символом « \sim ». Решение задачи проводится аналогично тому, как это делалось в первом случае.

Потенциалы скорости продольных $\tilde{\Psi}_s$, $\tilde{\Psi}_2$ и вязких волн $\tilde{\Phi}_1$, $\tilde{\Phi}_2$, являющиеся решениями уравнений (5.3), (5.5) и (5.6), будем искать в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_s &= \tilde{A}_1 \exp\{i[k_{1x}^{(1)}x - k_{1z}^{(1)}(z + H)]\}, \\ \tilde{\Psi}_2 &= \tilde{A}_2 \exp\{i[k_{1x}^{(2)}x + k_{1z}^{(2)}(z - h)]\},\end{aligned}\quad (5.31)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_1 &= \tilde{B}_1 \exp\{i[k_{2x}^{(1)}x - k_{2z}^{(1)}(z + H)]\}, \\ \tilde{\Phi}_2 &= \tilde{B}_2 \exp\{i[k_{2x}^{(2)}x + k_{2z}^{(2)}(z - h)]\},\end{aligned}\quad (5.32)$$

а функции $\tilde{\Psi}$ и $\tilde{\Phi}$, являющиеся решениями уравнений (5.11) и (5.14), – в виде

$$\tilde{\Psi} = \tilde{C}_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{lz}z)] + \tilde{C}_2 \exp[i(k_{lx}x - k_{lz}z)], \quad (5.33)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{D}_1 \exp[i(k_{\tau x}x + k_{\tau z}z)] + \tilde{D}_2 \exp[i(k_{\tau x}x - k_{\tau z}z)]. \quad (5.34)$$

Составляющие вектора смещения $\tilde{\mathbf{u}}$ в покрытии запишем следующим образом:

$$\tilde{u}_x = \tilde{U}_1(z) \exp(ik_{1x}^{(1)}x), \quad \tilde{u}_z = \tilde{U}_2(z) \exp(ik_{1x}^{(1)}x). \quad (5.35)$$

Подставляя выражения (5.18) в уравнения (5.17) с учетом (5.35), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (5.29) относительно неизвестных функций $\tilde{U}_j(z)$ ($j = 1, 2$), являющихся составляющими вектора $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)^T$.

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}}'' + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{U}}' + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{U}} = 0, \quad (5.36)$$

где $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)^T$.

Коэффициенты \tilde{A}_j , \tilde{B}_j , \tilde{C}_j , \tilde{D}_j ($j=1,2$) в выражениях (5.31) – (5.34) и краевые условия для нахождения частного решения системы (5.36) определяем из граничных условий.

Находим

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= \tilde{a}_{11}\tilde{U}_1(0) + \tilde{a}_{12}\tilde{U}_3(0) + \tilde{a}_{13}, \\ \tilde{A}_2 &= -(\omega / \tilde{w})[k_{1x}^{(2)}\tilde{U}_1(h) - k_{2z}^{(2)}\tilde{U}_2(h)], \\ \tilde{B}_1 &= \tilde{b}_{11}\tilde{U}_1(0) + \tilde{b}_{12}\tilde{U}_2(0) + \tilde{b}_{13}, \quad \tilde{B}_2 = (\omega / \tilde{w})[k_{1z}^{(2)}\tilde{U}_1(h) - k_{1x}^{(2)}\tilde{U}_3(h)], \\ \tilde{C}_j &= \tilde{c}_{j1}\tilde{U}_1(0) + \tilde{c}_{j2}\tilde{U}_2(0) + \tilde{c}_{j3}, \quad \tilde{D}_j = \tilde{d}_{j1}\tilde{U}_1(0) + \tilde{d}_{j2}\tilde{U}_2(0) + \tilde{d}_{j3} \quad (j=1,2),\end{aligned}$$

и четыре краевых условия

$$(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}}' + \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{U}})_{z=0} = \tilde{\mathbf{D}}, \quad (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{U}}' + \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{U}})_{z=h} = 0, \quad (5.37)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= (-\tilde{g}_3\tilde{b}_{11} + \tilde{s}_7\tilde{s}_2 - \omega k_{\tau z}\tilde{s}_{13}) / \tilde{\Delta}_3, \\ \tilde{a}_{12} &= (-\tilde{g}_3\tilde{b}_{12} + \tilde{s}_8\tilde{s}_2 - \omega k_{\tau z}\tilde{s}_{14}) / \tilde{\Delta}_3, \\ \tilde{a}_{13} &= (-\tilde{g}_3\tilde{b}_{13} + \tilde{s}_9\tilde{s}_2 - \omega k_{\tau z}\tilde{s}_{15}) / \tilde{\Delta}_3, \\ \tilde{b}_{11} &= [\tilde{g}_2(\tilde{s}_7\tilde{s}_2 - \omega k_{\tau z}\tilde{s}_{13}) - \tilde{\Delta}_3(\tilde{s}_{10}\tilde{s}_3 - \omega k_{1x}\tilde{s}_{16})] / \tilde{\Delta}_1, \\ \tilde{b}_{12} &= [\tilde{g}_2(\tilde{s}_8\tilde{s}_2 - \omega k_{\tau z}\tilde{s}_{14}) - \tilde{\Delta}_3(\tilde{s}_{11}\tilde{s}_3 - \omega k_{1x}\tilde{s}_{17})] / \tilde{\Delta}_1, \\ \tilde{b}_{13} &= [\tilde{g}_2(\tilde{s}_9\tilde{s}_2 - \omega k_{\tau z}\tilde{s}_{15}) - \tilde{\Delta}_3(\tilde{s}_{12}\tilde{s}_3 - \omega k_{1x}\tilde{s}_{18})] / \tilde{\Delta}_1, \\ \tilde{c}_{11} &= -\tilde{c}_{21} + k_{\tau z}(\tilde{d}_{11} - \tilde{d}_{21}) / k_{1x}^{(1)} + i / k_{1x}^{(1)}, \\ \tilde{c}_{12} &= -\tilde{c}_{22} + k_{\tau z}(\tilde{d}_{12} - \tilde{d}_{22}) / k_{1x}^{(1)}, \\ \tilde{c}_{13} &= -\tilde{c}_{23} + k_{\tau z}(\tilde{d}_{13} - \tilde{d}_{23}) / k_{1x}^{(1)}, \\ \tilde{c}_{21} &= (\tilde{s}_5\tilde{d}_{11} + \tilde{s}_6\tilde{d}_{21}) / \tilde{s}_4 - i / (2k_{1x}^{(1)}), \\ \tilde{c}_{22} &= (\tilde{s}_5\tilde{d}_{12} + \tilde{s}_6\tilde{d}_{22}) / \tilde{s}_4 + i / (2k_{1z}), \\ \tilde{c}_{23} &= (\tilde{s}_5\tilde{d}_{13} + \tilde{s}_6\tilde{d}_{23}) / \tilde{s}_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{11} &= (\tilde{d}_{21}\tilde{s}_2\tilde{e}_{2\tau} - \tilde{t}_3\tilde{a}_{11} - \tilde{t}_4\tilde{b}_{11} + \tilde{s}_{13}) / (\tilde{s}_2\tilde{e}_{1\tau}), \\
\tilde{d}_{12} &= (\tilde{d}_{22}\tilde{s}_2\tilde{e}_{2\tau} - \tilde{t}_3\tilde{a}_{12} - \tilde{t}_4\tilde{b}_{12} + \tilde{s}_{14}) / (\tilde{s}_2\tilde{e}_{1\tau}), \\
\tilde{d}_{13} &= (\tilde{d}_{23}\tilde{s}_2\tilde{e}_{2\tau} - \tilde{t}_3\tilde{a}_{13} - \tilde{t}_4\tilde{b}_{13} + \tilde{s}_{15}) / (\tilde{s}_2\tilde{e}_{1\tau}), \\
\tilde{d}_{21} &= [\tilde{g}_1\tilde{a}_{11} + \tilde{g}_4\tilde{b}_{11}(-\tilde{s}_{10}\tilde{s}_2 + \tilde{s}_8\tilde{s}_2 - \omega k_{1x}^{(1)}\tilde{s}_{13})] / \tilde{\Delta}_2, \\
\tilde{d}_{22} &= [\tilde{g}_1\tilde{a}_{12} + \tilde{g}_4\tilde{b}_{12}(\tilde{s}_{11}\tilde{s}_2 + \tilde{s}_8\tilde{s}_2 - \omega k_{1x}^{(1)}\tilde{s}_{14})] / \tilde{\Delta}_2, \\
\tilde{d}_{23} &= [\tilde{g}_1\tilde{a}_{13} + \tilde{g}_4\tilde{b}_{13}(\tilde{s}_{12}\tilde{s}_2 + \tilde{s}_8\tilde{s}_2 - \omega k_{1x}^{(1)}\tilde{s}_{15})] / \tilde{\Delta}_2, \\
\tilde{\Delta}_1 &= \tilde{g}_3\tilde{g}_2 - \tilde{g}_1(\tilde{s}_{10}\tilde{s}_3 - \tilde{s}_{16}\omega k_{1x}^{(1)}), \quad \tilde{\Delta}_2 = 2\omega\tilde{s}_2k_{1x}^{(1)}\tilde{e}_{2\tau}, \\
\tilde{\Delta}_3 &= ik_{1x}^{(1)}\tilde{s}_2 - \omega k_{\tau z}\tilde{t}_3, \\
\tilde{e}_{1l} &= e^{-ik_{lz}H}, \quad \tilde{e}_{2l} = e^{ik_{lz}H}, \quad \tilde{e}_{1\tau} = e^{-ik_{\tau z}H}, \quad \tilde{e}_{2\tau} = e^{ik_{\tau z}H}, \\
\tilde{s}_0 &= 2k_{1x}^{(1)}k_{lz}\mu_0, \quad \tilde{s}_1 = k_{1x}^{(1)2}\lambda_0 + k_{lz}^2(\lambda_0 + 2\mu_0), \\
\tilde{s}_2 &= 2k_{1x}^{(1)}k_{\tau z}\mu_0, \quad \tilde{s}_3 = (k_{1x}^{(1)2} - k_{\tau z}^2)\mu_0, \quad \tilde{s}_4 = 2k_{1x}^{(1)}k_{lz}, \\
\tilde{s}_5 &= k_{lz}k_{\tau z} + k_{1x}^{(1)2}, \quad \tilde{s}_6 = -k_{lz}k_{\tau z} + k_{1x}^{(1)2}, \\
\tilde{s}_7 &= \omega k_{1x}^{(1)}(\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{11} - \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{21}), \quad \tilde{s}_8 = \omega k_{1x}^{(1)}(\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{12} - \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{22}), \\
\tilde{s}_9 &= \omega k_{1x}^{(1)}(\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{13} - \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{23}) - ik_{1x}^{(1)}A_0, \quad \tilde{s}_{10} = \omega k_{lz}(-\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{11} + \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{21}), \\
\tilde{s}_{11} &= \omega k_{lz}(-\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{12} + \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{22}), \quad \tilde{s}_{12} = \omega k_{lz}(-\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{13} + \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{23}) + ik_{1z}^{(1)}A_0, \\
\tilde{s}_{13} &= -\tilde{s}_1(\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{11} + \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{21}), \quad \tilde{s}_{14} = -\tilde{s}_1(\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{12} + \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{22}), \\
\tilde{s}_{15} &= -\tilde{s}_1(\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{13} + \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{23}) - \tilde{t}_3A_0, \quad \tilde{s}_{16} = \tilde{s}_0(-\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{11} + \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{21}), \\
\tilde{s}_{17} &= \tilde{s}_0(-\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{12} + \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{22}), \quad \tilde{s}_{18} = \tilde{s}_0(-\tilde{e}_{1l}\tilde{c}_{13} + \tilde{e}_{2l}\tilde{c}_{23}) + \tilde{r}_1A_0, \\
\tilde{r}_1 &= 2k_{1x}^{(1)}k_{1z}^{(1)}, \quad \tilde{r}_2 = k_{1z}^{(1)2} + k_{1x}^{(1)2}, \\
\tilde{t}_j &= \rho_j(\xi_j + 2\nu_j / 3), \quad \tilde{t}_3 = \tilde{h}_1 + \tilde{t}_1k_{1x}^{(1)2} + k_{1z}^{(1)2}(2\nu_1\rho_1 + \tilde{t}_1), \\
\tilde{t}_4 &= -\tilde{t}_1k_{2z}^{(1)}k_{1x}^{(1)} + k_{1x}^{(1)}k_{2z}^{(1)}(2\nu_1\rho_1 + \tilde{t}_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_1 &= \tilde{h}_2 + k_{1x}^{(1)2} \tilde{t}_2 + k_{1z}^{(2)2} (2v_2 \rho_2 + \tilde{t}_2), & \tilde{m}_2 &= 2k_{1x}^{(1)} k_{2z}^{(2)} v_2 \rho_2, \\
\tilde{w} &= k_{1x}^{(2)2} + k_{1z}^{(2)} k_{2z}^{(2)}, & \tilde{h}_j &= i\rho_j \omega \quad (j=1,2), \\
\tilde{n}_1 &= 2k_{1x}^{(1)} k_{1z}^{(2)} v_2 \rho_2, & \tilde{n}_2 &= (k_{1x}^{(1)2} - k_{2z}^{(2)2}) v_2 \rho_2, \\
\tilde{g}_1 &= -ik_{1z}^{(1)} \tilde{s}_2 - \omega \tilde{t}_3 k_{1x}^{(1)}, & \tilde{g}_2 &= ik_{1z}^{(1)} \tilde{s}_3 - \omega k_{1x}^{(1)} \tilde{r}_1, \\
\tilde{g}_3 &= ik_{2z}^{(1)} \tilde{s}_2 - \omega k_{\tau z} \tilde{t}_4, & \tilde{g}_4 &= -ik_{1x}^{(1)} \tilde{s}_2 - \omega \tilde{t}_4 k_{1x}^{(1)}, \\
\tilde{\mathbf{E}} &= \begin{pmatrix} \tilde{e}_{11} & ik_{1x}^{(1)} \mu + \tilde{e}_{12} \\ ik_{1x}^{(1)} \lambda + \tilde{e}_{21} & \tilde{e}_{22} \end{pmatrix}, & \tilde{\mathbf{F}} &= \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} & ik_{1x}^{(1)} \mu + \tilde{f}_{12} \\ ik_{1x}^{(1)} \lambda + \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{pmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{D}} &= (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2)^T, \\
\tilde{e}_{1j} &= \tilde{s}_0 (\tilde{c}_{1j} - \tilde{c}_{2j}) + \tilde{s}_3 (\tilde{d}_{1j} + \tilde{d}_{2j}), \\
\tilde{e}_{2j} &= \tilde{s}_1 (\tilde{c}_{1j} + \tilde{c}_{2j}) + \tilde{s}_2 (\tilde{d}_{1j} - \tilde{d}_{2j}), \\
\tilde{d}_1 &= -\tilde{s}_0 (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23}) - \tilde{s}_3 (\tilde{d}_{13} + \tilde{d}_{23}), \\
\tilde{d}_2 &= -\tilde{s}_1 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23}) - \tilde{s}_2 (\tilde{d}_{13} - \tilde{d}_{23}), \\
\tilde{f}_{1j} &= \tilde{n}_1 \tilde{a}_{2j} + \tilde{n}_2 \tilde{b}_{2j}, & \tilde{f}_{2j} &= \tilde{m}_1 \tilde{a}_{2j} + \tilde{m}_2 \tilde{b}_{2j} \quad (j=1,2).
\end{aligned}$$

Таким образом, решая краевую задачу (5.36), (5.37) находим функции $\tilde{U}_1(z)$, $\tilde{U}_2(z)$. Затем определяем значения этих функций на поверхностях неоднородного слоя и вычисляем коэффициенты отражения \tilde{A}_1 и коэффициенты \tilde{A}_2 , \tilde{B}_j , \tilde{C}_j , \tilde{D}_j ($j=1,2$). В результате получаем аналитическое описание волновых полей в жидкостях, однородной пластине и ее неоднородном покрытии.

Отметим, что решения краевых задач (5.29), (5.30) и (5.36), (5.37) можно найти различными методами. Например, можем воспользоваться приближенным аналитическим решением, полученным в разделе 2.3 методом степенных рядов.

Теперь определим коэффициент поглощения α , характеризующий

потерю энергии падающей волны вследствие вязкости жидкостей. При этом будем учитывать, что вязкие волны являются быстрозатухающими и существенны лишь в тонком пограничном слое вблизи твердой поверхности. Поэтому коэффициент поглощения будем определять следующим образом:

$$\alpha = (I_0 - I_1 - I_2) / I_0,$$

где I_0 , I_1 и I_2 – интенсивности падающей, продольной отраженной и продольной прошедшей плоских волн в направлении, нормальном к пластине.

Интенсивность гармонической плоской волны в направлении, нормальном в пластине, определяется формулой [8, 27]

$$I = \frac{1}{2} |p| |v_z| \cos(\varphi_p - \varphi_v), \quad (5.38)$$

где $|p|$, $|\varphi_p|$ и $|v_z|$, φ_v – модули и фазы давления и нормальной скорости частиц в акустическом поле.

В случае, когда покрытие нанесено на пластину со стороны падения плоской волны согласно (5.38) получаем

$$I_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 \omega^2}{c_1} \cos \theta_0 A_0^2, \quad I_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 \omega^2}{c_1} \cos \theta_0 A_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} \rho_2 \omega k_{1z}^{(2)} A_2^2. \quad (5.39)$$

Тогда

$$\alpha = 1 - \frac{|A_1|^2}{|A_0|^2} - \frac{\rho_2 c_1 |k_{1z}^{(2)}| |A_2|^2}{\rho_1 \omega \cos \theta_0 |A_0|^2}. \quad (5.40)$$

Если жидкости по обе стороны пластины одинаковы, то есть $\rho_1 = \rho_2$, $k_1^{(1)} = k_1^{(2)}$ и $k_2^{(1)} = k_2^{(2)}$, то из (5.40) получаем

$$\alpha = 1 - \frac{|A_1|^2}{|A_0|^2} - \frac{|A_2|^2}{|A_0|^2}. \quad (5.41)$$

В случае, когда покрытие нанесено на пластину со стороны, проти-

воположной падению плоской волны, в формулах (5.39) – (5.41) следует заменить A_1 и A_2 на \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 .

5.3. Численные исследования

На основе решений рассмотренных задач были проведены расчеты коэффициентов отражения и поглощения для упругой пластины с покрытием. Исследовались угловые и частотные зависимости.

Полагалось, что амплитуда падающей волны $A_0 = 1$, а отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H равно 0,2, жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми ($k_1^{(1)} = k_1^{(2)} = k_1$).

Рассматривалась стальная пластина толщиной $H = 2,5$ мм ($\rho_0 = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 1,2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu_0 = 7,9 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с покрытием на основе алюминия, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с, $v_1 = v_2 = 1,006 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\xi_1 = \xi_2 = 0$) и в глицерине ($\rho_1 = \rho_2 = 1,26 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1920$ м/с, $v_1 = v_2 = 1111,11 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\xi_1 = \xi_2 = 0$).

Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\bar{\rho} = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\bar{\lambda} = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\bar{\mu} = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м², так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по законам

$$\lambda(z) = \bar{\lambda} f(z), \quad \mu(z) = \bar{\mu} f(z), \quad \rho(z) = \bar{\rho} f(z);$$

для покрытия, расположенного сверху и

$$\tilde{\lambda}(z) = \bar{\lambda} \tilde{f}(z), \quad \tilde{\mu}(z) = \bar{\mu} \tilde{f}(z), \quad \tilde{\rho}(z) = \bar{\rho} \tilde{f}(z).$$

для покрытия, расположенного снизу.

Рассматривались следующие линейные и квадратичные законы неоднородности:

для покрытия, расположенного сверху

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5 \right), \quad f_2(z) = a_2 \left(\frac{z}{h} + 1,5 \right), \quad (a_1 = a_2 = 1);$$

$$f_3(z) = a_3 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 2\frac{z}{h} + 0,5 \right], \quad f_4(z) = a_4 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 + 4\frac{z}{h} + 3,5 \right] \quad (a_3 = a_4 = 6/11);$$

для покрытия, расположенного снизу,

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{a}_1 \left(-\frac{z}{h} + 1,5 \right), \quad \tilde{f}_2(z) = \tilde{a}_2 \left(\frac{z}{h} + 0,5 \right), \quad (\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 1);$$

$$\tilde{f}_3(z) = \tilde{a}_3 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 4\frac{z}{h} + 3,5 \right], \quad \tilde{f}_4(z) = \tilde{a}_4 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 + 2\frac{z}{h} + 0,5 \right] \quad (\tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = 6/11).$$

Множители a_j , \tilde{a}_j ($j=1..4$) выбраны так, чтобы средние значения функций $f_j(z)$ и $\tilde{f}_j(z)$ по толщине слоя были равны единице.

Зависимости $f_1(z)$ и $f_2(z)$, а также $f_3(z)$ и $f_4(z)$ выбраны такими, что их графики являются зеркальным отражением друг друга относительно прямой $z = -h/2$. При этом на внешней поверхности покрытия $z = -h$ функций $f_1(z)$ и $f_3(z)$ достигают максимумов, равных $1,5a_1$ и $3,5a_3$ соответственно, а на внутренней поверхности покрытия $z = 0$ – минимумов, равных $0,5a_1$ и $0,5a_3$. Функции $f_2(z)$ и $f_4(z)$ достигают тех же максимальных и минимальных значений, но уже на внутренней и внешней поверхностях покрытия.

На рис. 5.2 – 5.8 представлены результаты расчетов угловых и частотных зависимостей коэффициентов отражения для случаев, когда покрытие нанесено на пластину со стороны падения плоской волны и с противоположной стороны, а волновой размер пластины $k_1H = 15$. При этом содержащая среда – глицерин.

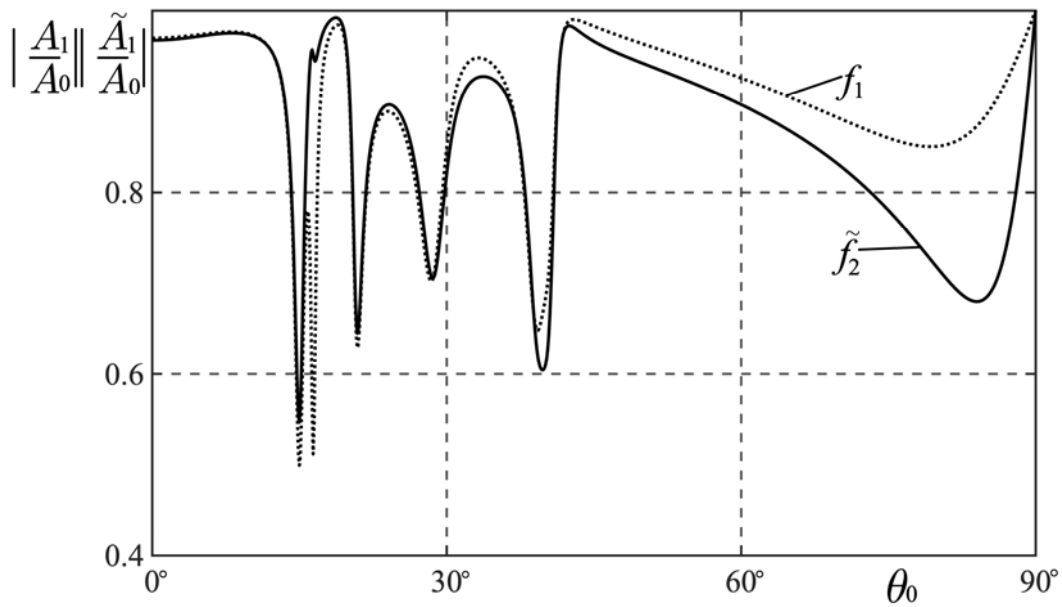


Рис. 5.2. Зависимости коэффициентов отражения от угла падения плоской волны для неоднородных покрытий $f_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ при $k_1H = 15$.

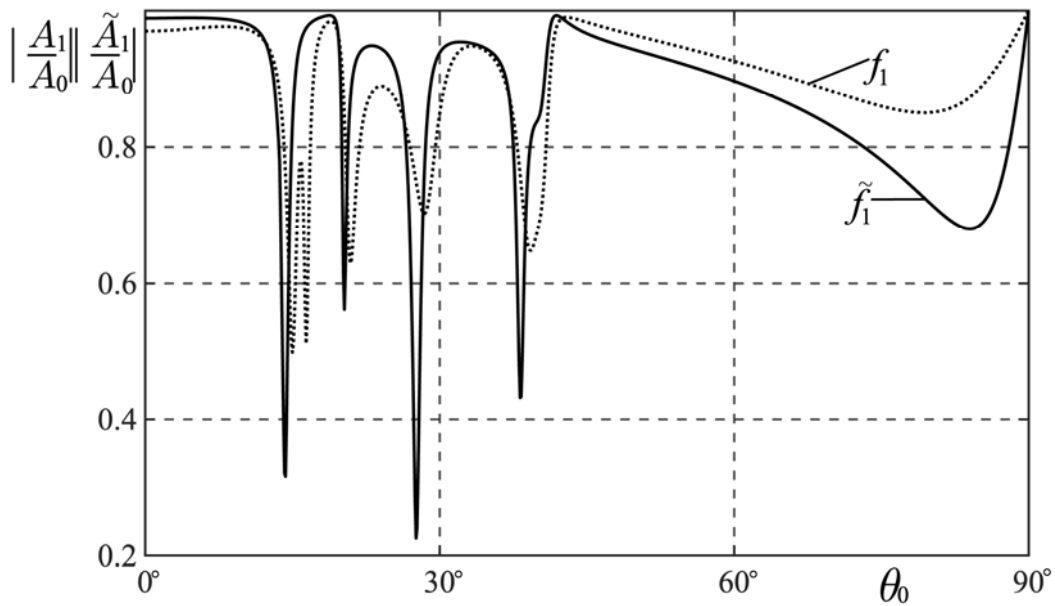


Рис. 5.3. Зависимости коэффициентов отражения от угла падения плоской волны для неоднородных покрытий $f_1(z)$ и $\tilde{f}_1(z)$ при $k_1H = 15$

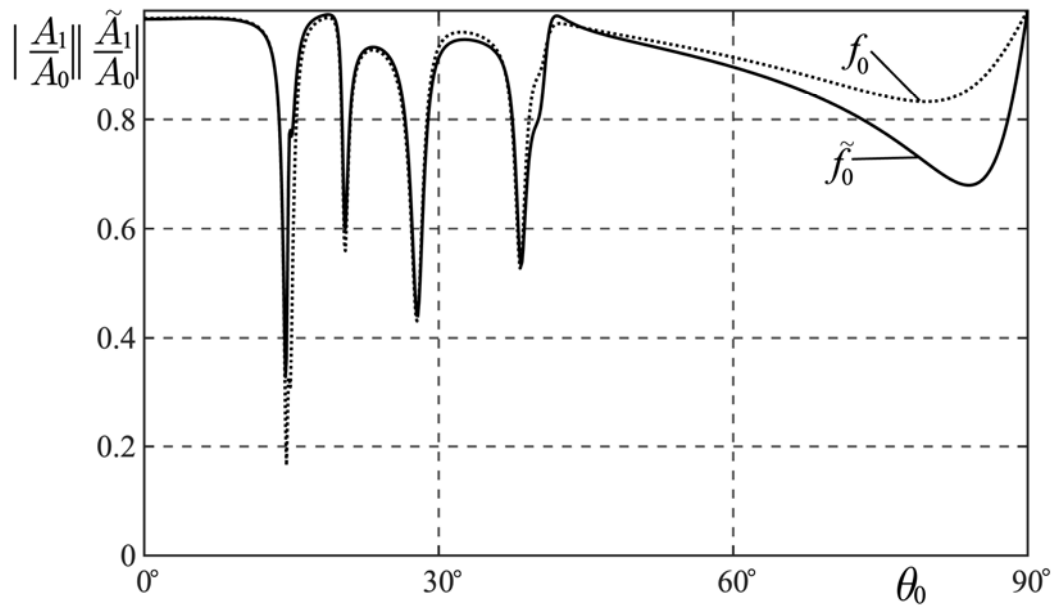


Рис. 5.4. Зависимости коэффициентов отражения от угла падения плоской волны для однородных покрытий при $k_1H = 15$

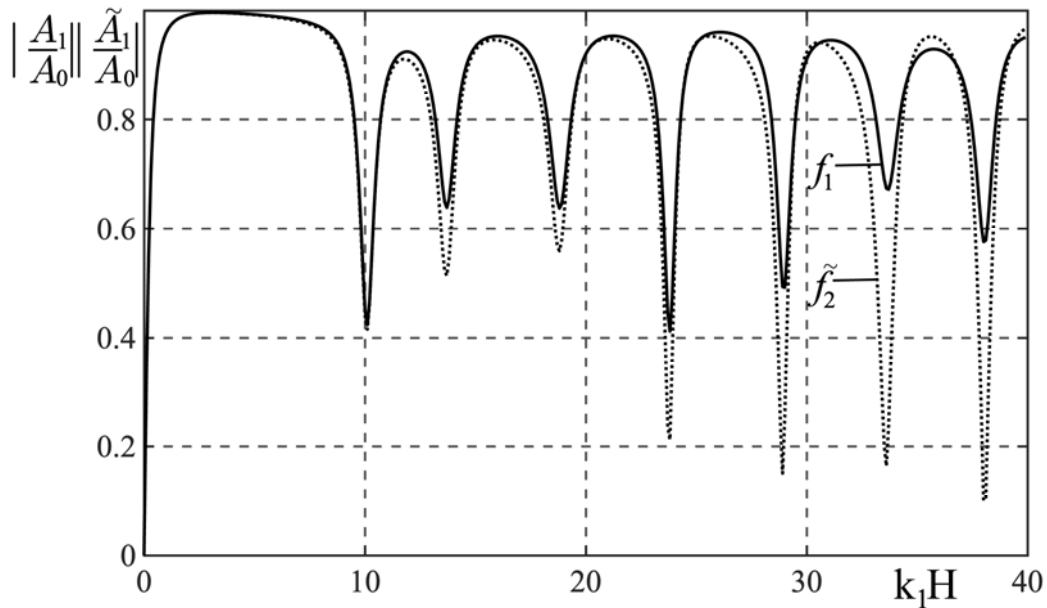


Рис. 5.5. Частотные зависимости коэффициентов отражения для неоднородных покрытий $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $\theta_0 = 20^\circ$

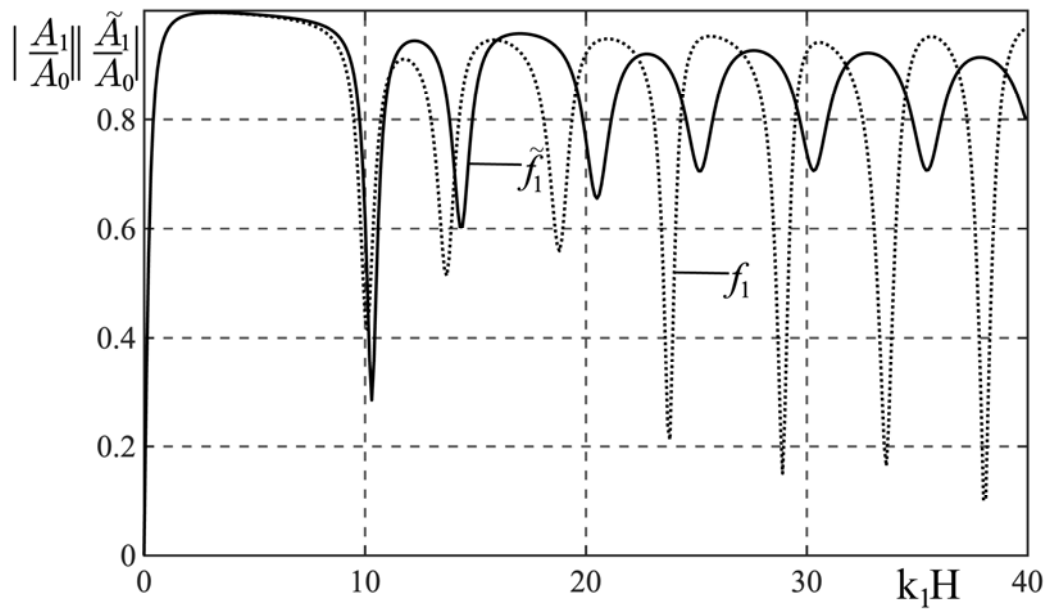


Рис. 5.6. Частотные зависимости коэффициентов отражения для неоднородных покрытий $f_1(z)$ и $\tilde{f}_1(z)$ при $\theta_0 = 20^\circ$

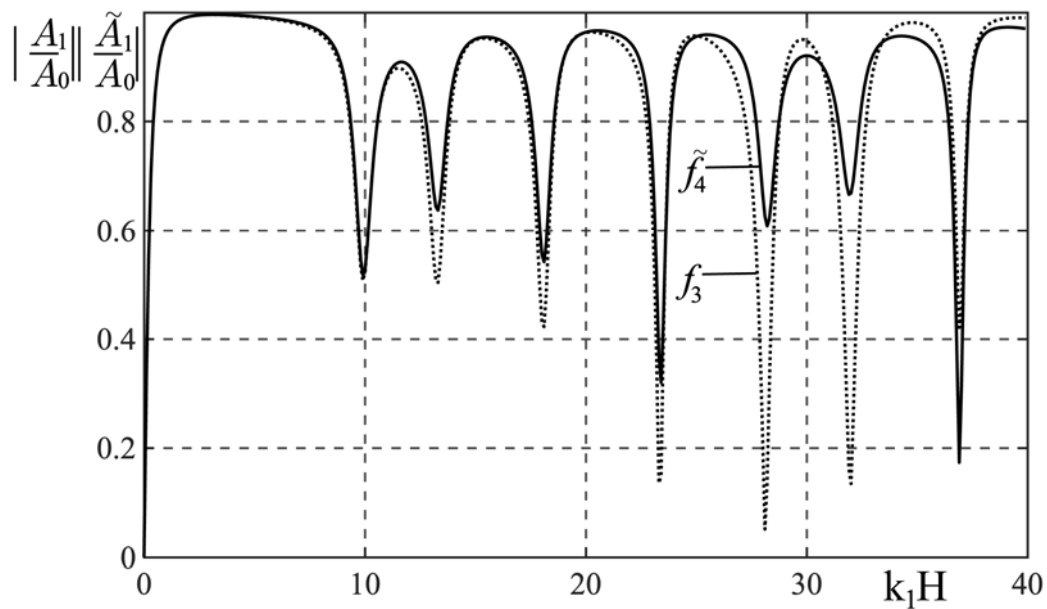


Рис. 5.7. Частотные зависимости коэффициентов отражения для неоднородных покрытий $f_3(z)$ и $\tilde{f}_4(z)$ при $\theta_0 = 20^\circ$.

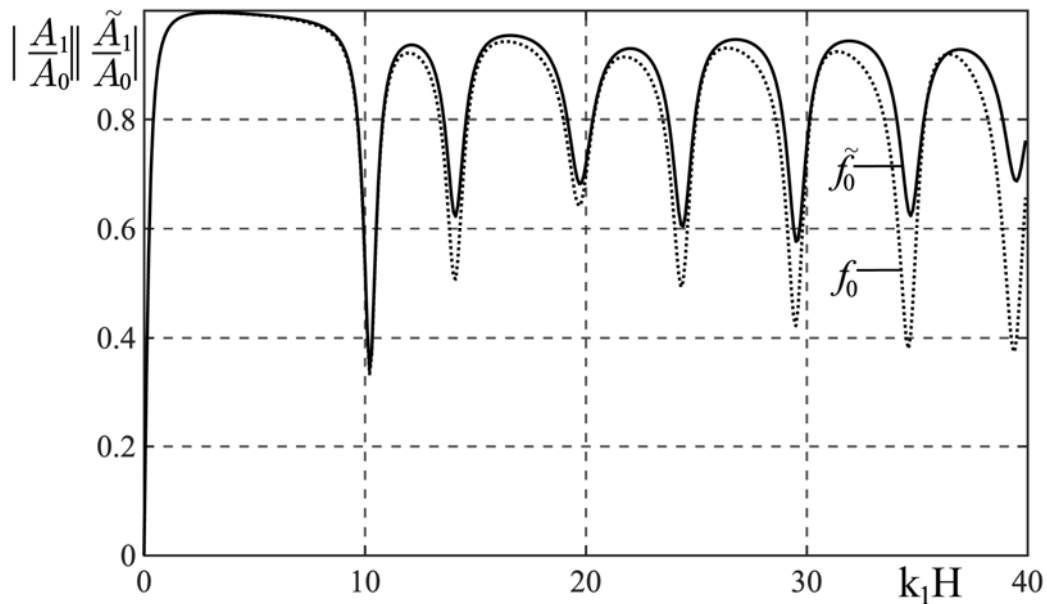


Рис. 5.8. Частотные зависимости коэффициентов отражения для однородных покрытий при $\theta_0 = 20^\circ$

В главе 2 было обнаружено, что когда пластина с покрытием помещена в однородную идеальную жидкость, то перенос с переворотом покрытия с одной стороны однородной пластины на другую не изменяет картину отражения и прохождения звука при любых линейных и нелинейных законах неоднородности материала покрытия.

Как видно из графиков на рис. 5.2, 5.5 и 5.7 в случае одинаковых вязких жидкостей по обе стороны пластины, обнаруженный выше эффект не наблюдается. Если осуществить перенос покрытия без переворота (рис. 5.3), то зависимости коэффициентов отражения от угла падения плоской волны для неоднородных покрытий существенно различаются. Даже, если покрытие однородное (рис. 5.4 и 5.8), то его перенос на другую сторону пластины приводит к изменению звукоотражения.

Из рис. 5.2 – 5.4 видно, что угловые характеристики для покрытий, расположенных на разных сторонах пластины, значительно отличаются друг от друга при углах падения, превышающих 30° .

Графики на рис. 5.5 – 5.8 демонстрируют увеличение отличий частотных характеристик для покрытий, расположенных на разных сторонах пластины, при возрастании волнового размера пластины.

На рис. 5.9 и рис. 5.10 представлены зависимости коэффициентов отражения от угла падения плоской волны для неоднородных покрытий вида $f_1(z)$ при $k_1H = 15$, когда содержащая среда – вода (рис. 5.9) и глицерин (рис. 5.10). Причем кривые, изображенные сплошными линиями, рассчитаны по формулам, полученным в главе 5 для вязких жидкостей, а кривые, изображенные пунктирными линиями, рассчитаны по формулам, полученным в главе 2 для идеальных жидкостей. Кривые на рис. 5.9 практически совпадают из-за малой вязкости воды. Кривые на рис. 5.10 отличаются друг от друга существенно. Это следовало ожидать, так как для глицерина учет вязкости необходим.

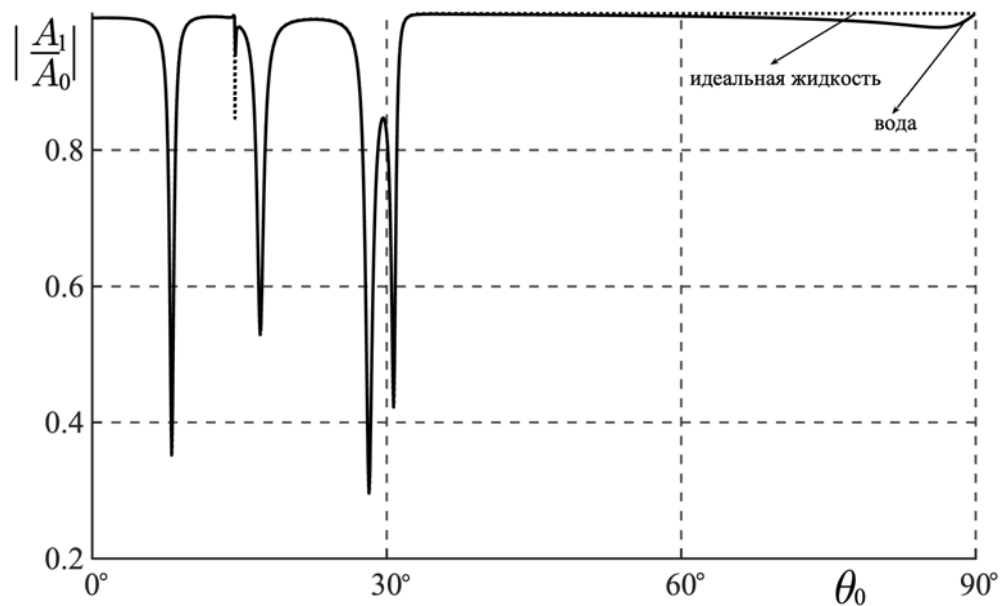


Рис. 5.9. Зависимости коэффициентов отражения от угла падения плоской волны для неоднородных покрытий $f_1(z)$ при $k_1H = 15$, содержащая среда – вода

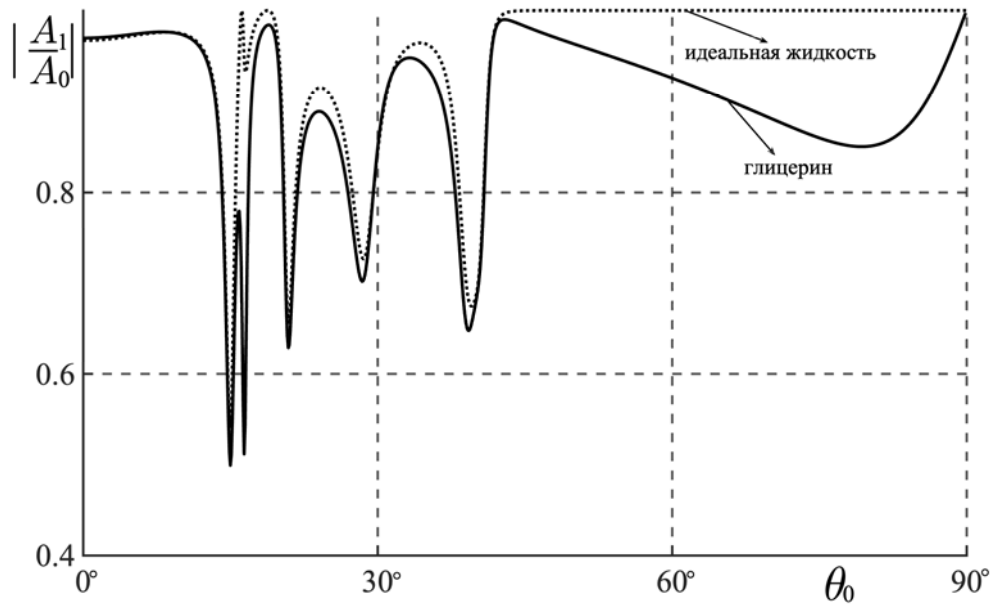


Рис. 5.10. Зависимости коэффициентов отражения от угла падения плоской волны для неоднородных покрытий $f_1(z)$ при $k_1H = 15$, содержащая среда – глицерин

Для оценки влияния вязкости граничащих со слоем жидкостей на процессе отражения и прохождения звука через упругую пластину с неоднородным покрытием были проведены численные расчеты коэффициента поглощения α , характеризующего потерю энергии падающей звуковой волны вследствие вязкости жидкостей. Исследовался случай, когда покрытие нанесено на пластину со стороны падения плоской волны.

На рис. 5.11 – 5.14 изображены зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для линейных и квадратичных законов неоднородности покрытия при волновом размере пластины $k_1H = 20$. Для сравнения приведены кривые, соответствующие однородному покрытию. Угловые зависимости на рис. 5.11, 5.12 и 5.13, 5.14 рассчитаны для случаев, когда пластина помещена в глицерин и воду соответственно.

Прежде всего отметим, что, как и следовало ожидать из-за значи-

тельного отличия в значениях кинематических коэффициентов вязкости, поглощение звука в глицерине на порядок выше, чем поглощение в воде. Это относится и к однородному, и к неоднородному покрытиям.

Расчеты показывают, что при углах падения вплоть до $\theta_0 = 60^\circ$ величина α незначительна и почти одинакова для всех рассматриваемых покрытий пластины, находящейся в воде. В этом же диапазоне, когда содержащей жидкостью является глицерин, графики для однородного и неоднородных покрытий различаются в большей степени.

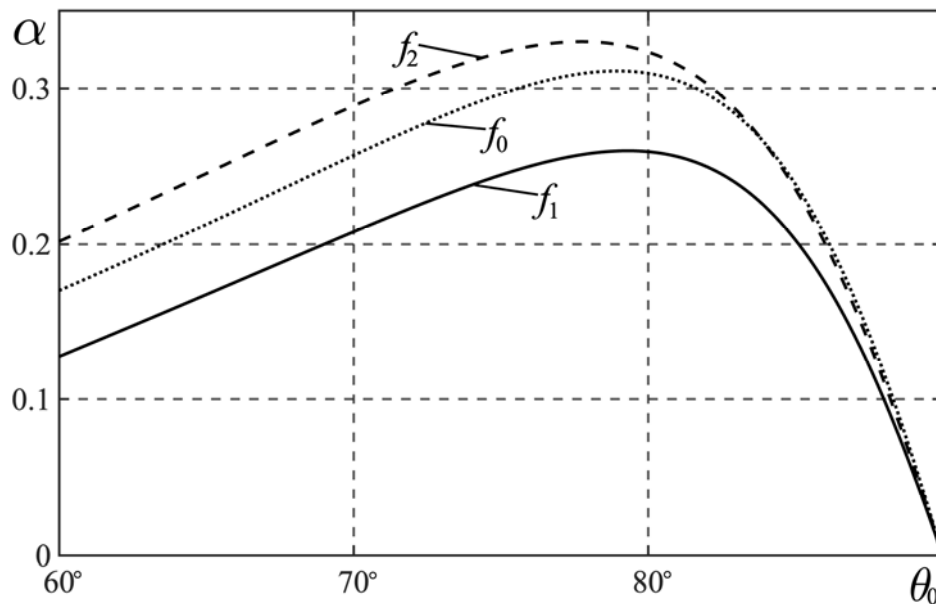


Рис. 5.11. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $k_1H = 20$, содержащая среда – глицерин

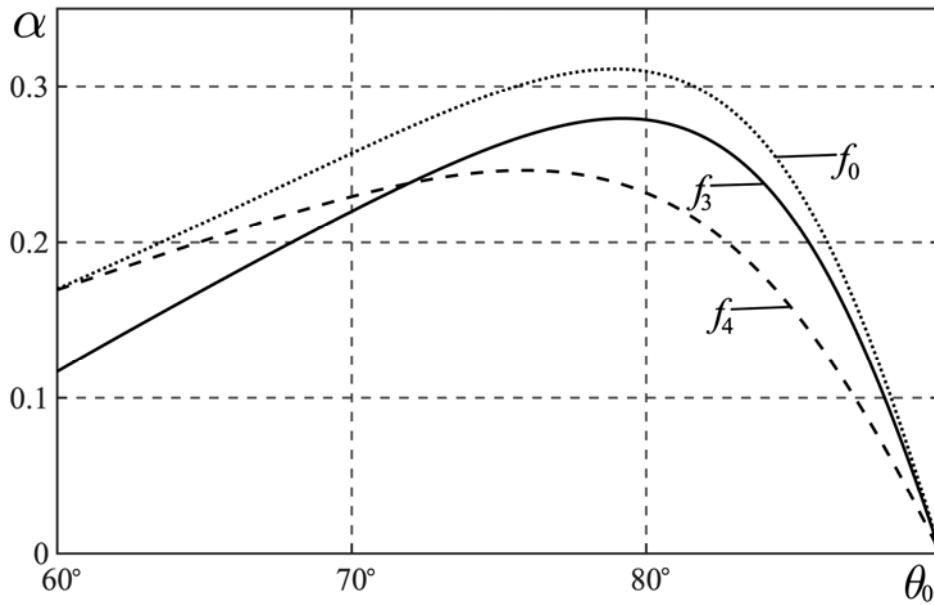


Рис. 5.12. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $k_1H = 20$, содержащая среда – глицерин

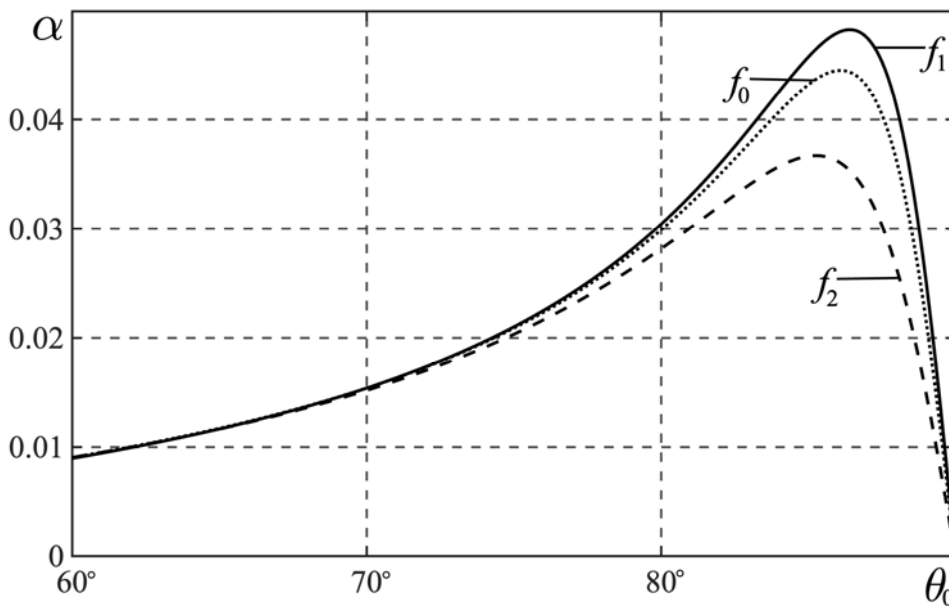


Рис. 5.13. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для линейных законов неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $k_1H = 20$, содержащая среда – вода

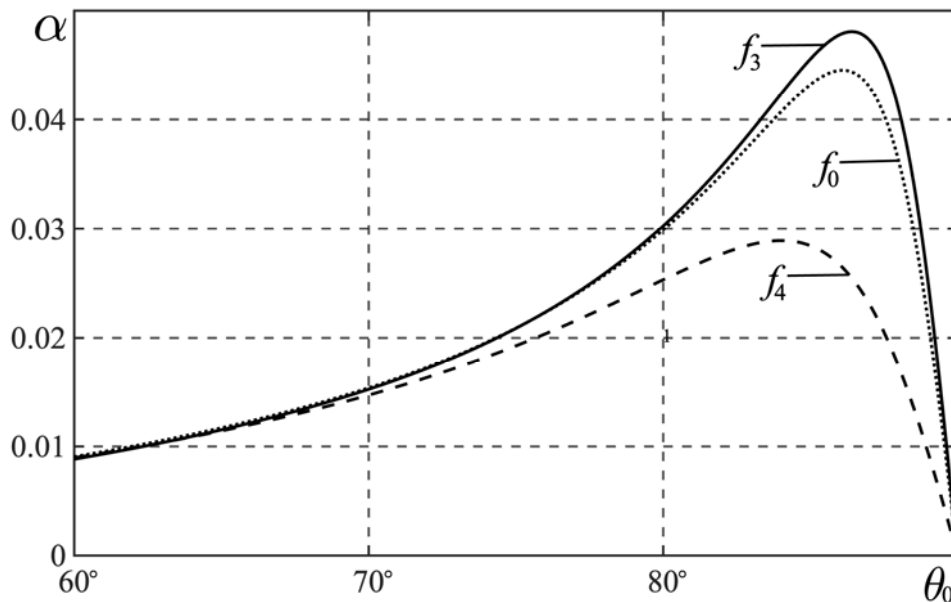


Рис. 5.14. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $k_1 H = 20$, содержащая среда – вода

При возрастании угла падения наблюдается увеличение диссипации энергии. При некотором критическом угле θ_0^* величина потерь достигает некоторого максимального значения при некотором критическом угле θ_0^* , а затем снижается до нуля при приближении к $\theta_0 = 90^\circ$.

Такой качественный характер зависимости коэффициента поглощения от угла падения оказывается сходным с характером аналогичной зависимости, полученной при изучении отражения плоской волны от абсолютно жесткой поверхности [10, 11]. Существенное влияние вязкости жидкости на коэффициенты отражения и прохождения при углах падения плоской волны, близких к 90° называют эффектом Константина [49].

Отмеченное выше увеличение коэффициента α происходит неодинаково для однородных и неоднородных покрытий. Для разных типов покрытий различными оказываются и величины критических углов падения.

Когда содержащей жидкостью является вода, то кривая, соответствующая однородному покрытию, располагается между кривыми, соответствующими неоднородным покрытиям с законами неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$, а также $f_3(z)$ и $f_4(z)$. При этом критические углы для убывающих по глубине (с возрастанием z) зависимостей $f_1(z)$ и $f_3(z)$ превышают критические углы для возрастающих зависимостей $f_2(z)$ и $f_4(z)$. Критический угол для однородного покрытия занимает промежуточное положение.

В случае контакта пластины с глицерином кривая для однородного покрытия ведет себя по-разному: оказывается между кривыми, соответствующими неоднородным покрытиям с линейными законами неоднородности и выше кривых для покрытий с квадратичными законами неоднородности. При этом значения критических углов для неоднородных покрытий подчиняются указанной выше закономерности. Но, если в воде максимальные значения α для убывающих по глубине зависимостей $f_1(z)$ и $f_3(z)$ превышают максимальные значения α для возрастающих зависимостей $f_2(z)$ и $f_4(z)$, то в глицерине наблюдаем обратное. Наибольшее возрастание потерь акустической энергии вследствие вязкости наблюдается для однородного покрытия. Критический угол для однородного покрытия оказывается ближе всего к 90° .

Влияние изменения частоты падающей волны на величину поглощения звуковой энергии и величину критического угла видно из графиков на рис. 5.15 – 5.20, где представлены зависимости α от θ_0 для покрытия с квадратичными неоднородностями при различных значениях волнового размера пластины $k_1H = 2,5; 5; 10; 20$.

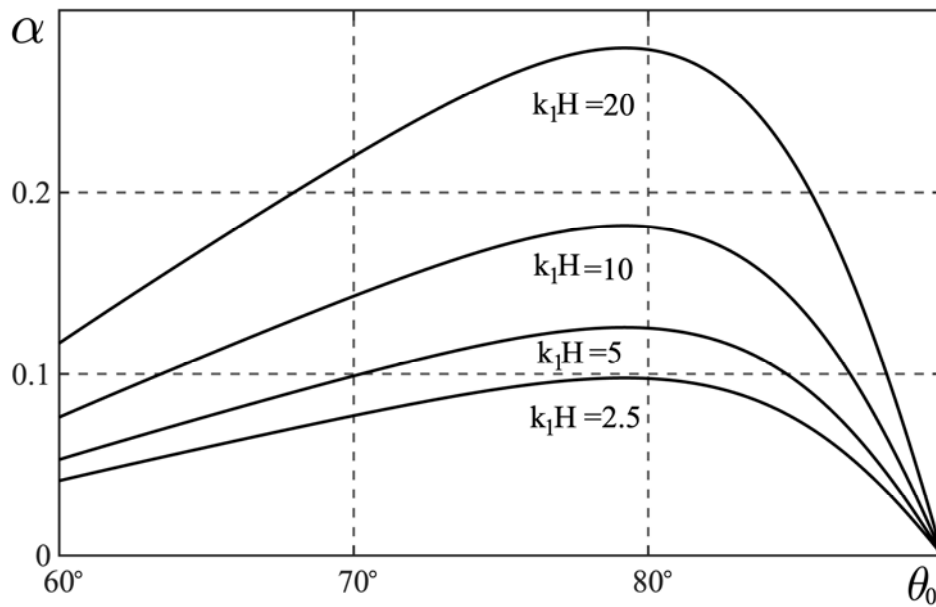


Рис. 5.15. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для неоднородности вида $f_3(z)$, содержащая среда – глицерин

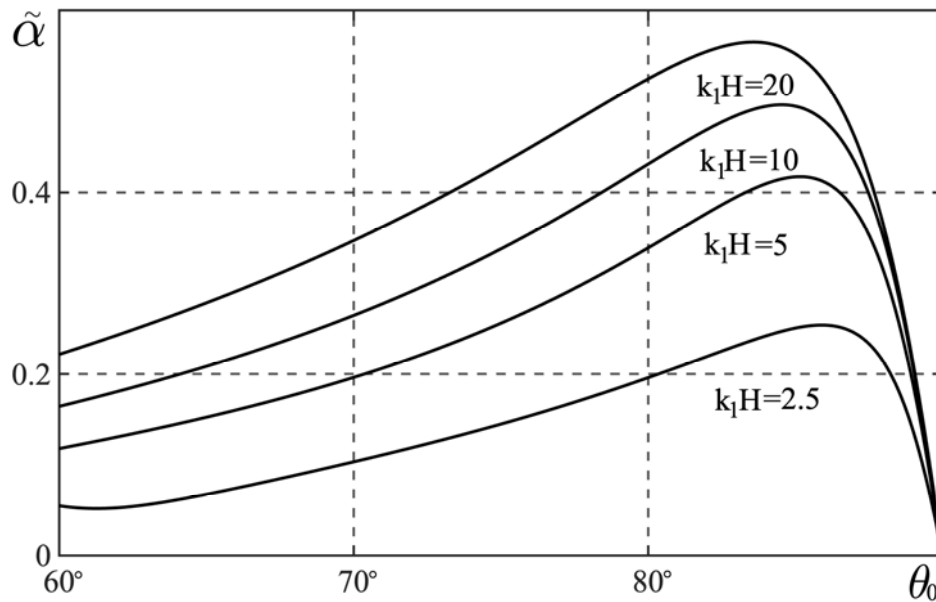


Рис. 5.16. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для неоднородности вида $\tilde{f}_3(z)$, содержащая среда – глицерин

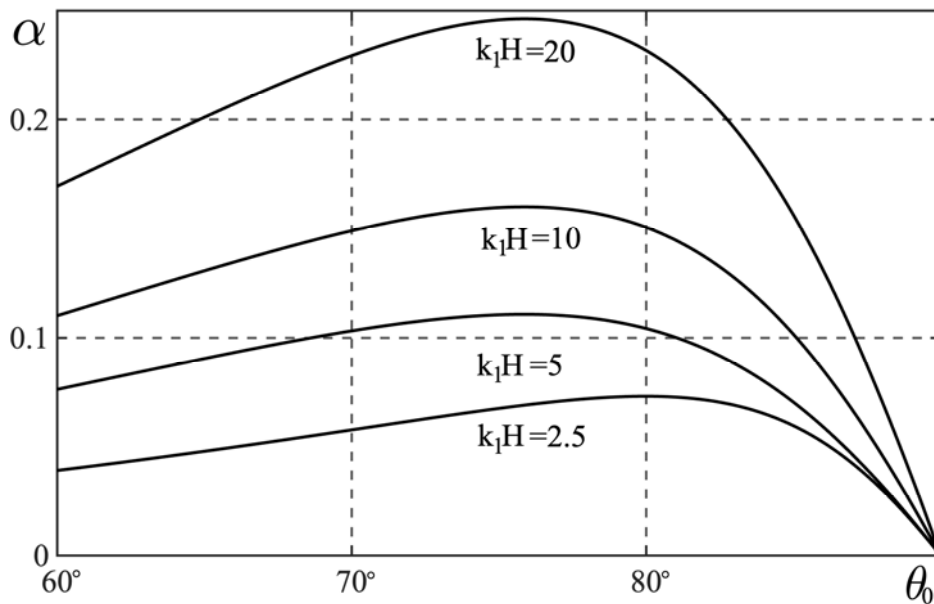


Рис. 5.17. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны при неоднородности вида $f_4(z)$, содержащая среда – глицерин.

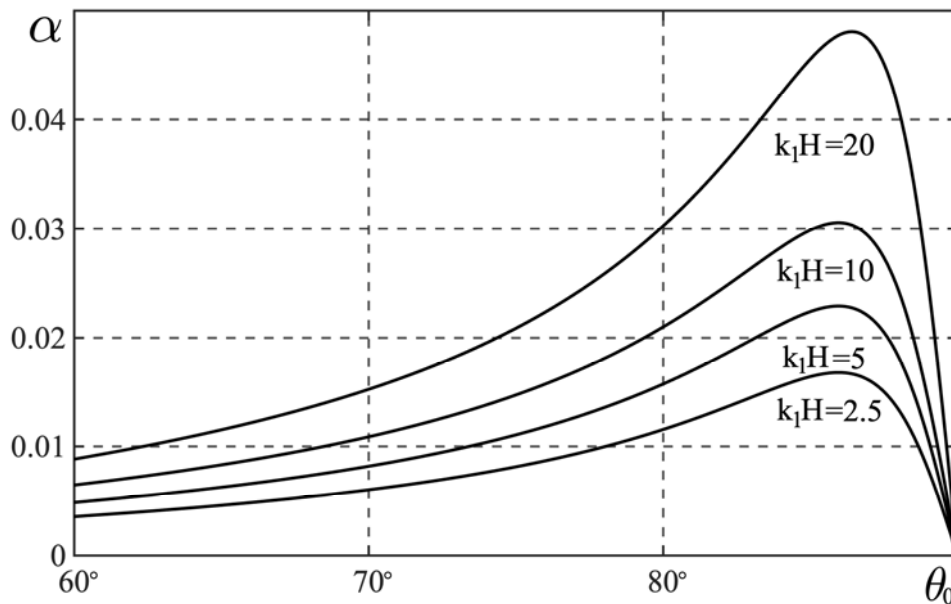


Рис. 5.18. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для неоднородности вида $f_3(z)$, содержащая среда – вода

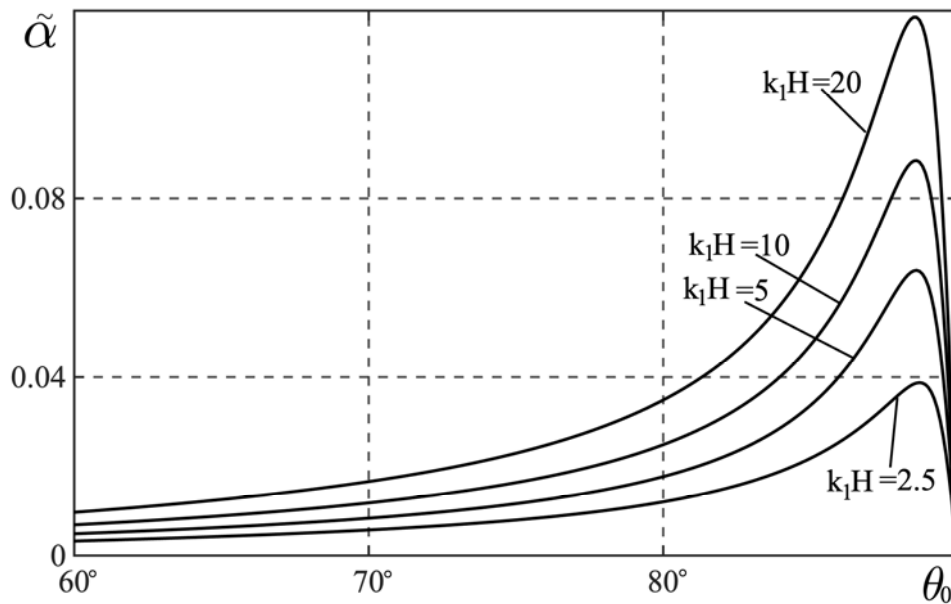


Рис. 5.19. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для неоднородности вида $\tilde{f}_3(z)$, содержащая среда – вода

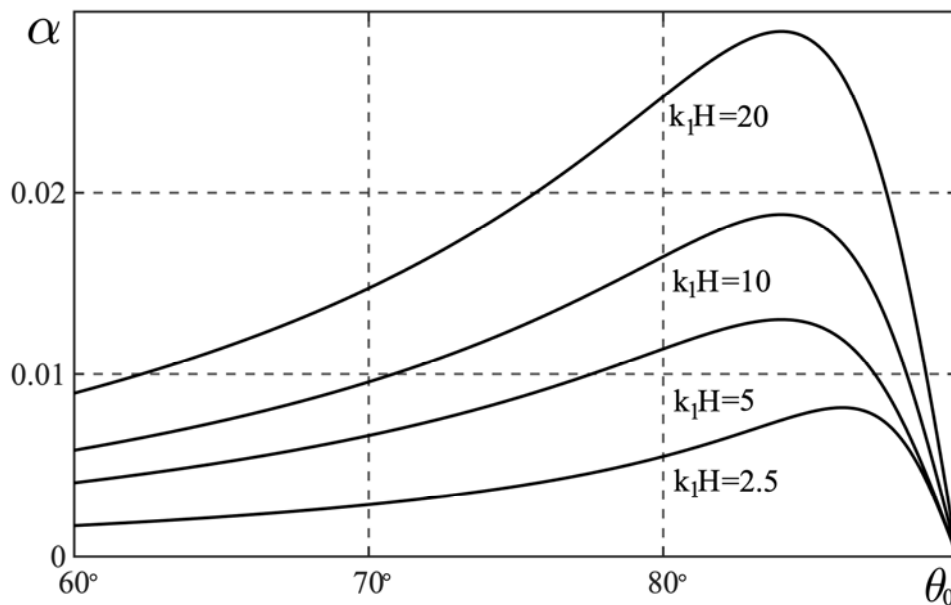


Рис. 5.20. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны при неоднородности вида $f_4(z)$, содержащая среда – вода.

Графики показывают, что повышение частоты приводит к увеличению поглощения не только в области критических углов, но и при меньших углах падения. Повышение частоты смещает положение критического угла в область меньших значений.

Из рис. 5.15, 5.17 и 5.18, 5.20 видно, что и в воде, и в глицерине коэффициент поглощения для неоднородности вида $f_3(z)$ (механические параметры покрытия убывают с глубиной) принимает значения большие, чем для неоднородности вида $f_4(z)$ (механические параметры покрытия возрастают с глубиной) при каждом значении волнового размера пластины.

Сравнивая зависимости на рис. 5.15 с зависимостями на рис. 5.16, а также рис. 5.18 с рис. 5.19, замечаем, что для каждого волнового размера пластины коэффициент поглощения для неоднородности вида $f_3(z)$ меньше, чем коэффициент поглощения для неоднородности вида $\tilde{f}_3(z)$ как в глицерине, так и в воде. При этом механические параметры материала покрытия убывают с глубиной и для неоднородности вида $f_3(z)$, когда покрытие нанесено со стороны падения плоской волны, и для неоднородности вида $\tilde{f}_3(z)$, когда покрытие нанесено с противоположной стороны.

Анализ результатов численных расчетов показывает, что поглощение акустической энергии вследствие вязкости окружающих жидкостей при отражении и прохождении звука через однородную упругую пластину с покрытием заметно зависит от закона неоднородности покрытия, свойств жидкостей, граничащих с пластиной, угла падения плоской волны и ее частоты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получила развитие теория дифракции звуковых волн. Получен ряд новых результатов, краткое содержание которых излагается ниже.

1. Построены математические модели отражения и прохождения гармонических звуковых волн через упругую пластину с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, граничащую с идеальными и вязкими жидкостями.

2. Получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении плоских звуковых волн через однородную упругую пластину с неоднородным упругим покрытием, граничащую с идеальными жидкостями. Проведены расчеты угловых и частотных зависимостей отраженных и преломленных акустических полей.

Выявлено существенное влияние неоднородности материала покрытия на акустические характеристики пластины.

Описаны характерные черты влияния разных типов неоднородности материала покрытия на величину коэффициентов отражения и прохождения звука.

Исследовано влияние расположения покрытия пластины (когда покрытие нанесено на пластину со стороны падения плоской волны и с противоположной стороны) на звукоотражение и звукопрохождение.

Обнаружено, что в случае, когда жидкости по обе стороны пластины одинаковы, перенос с переворотом покрытия с одной стороны однородной пластины на другую не изменяет картину отражения и прохождения звука при любых линейных и нелинейных законах неоднородности материала покрытия. Если по обе стороны пластины жидкости разные, то такой эффект не наблюдается. При переносе однородного покрытия с одной стороны пластины на другую угловые и частотные характеристики остаются неизменными. Перенос неоднородного покрытия без переворота при-

водит к изменению акустических характеристик пластины.

3. Предложен подход к решению задач об отражении упругой пластиной с неоднородным покрытием и прохождении через нее звуковых волн с криволинейным фронтом распространения. Подход заключается в получении аналитических решений задач с использованием решения задачи об отражении и прохождении плоской волны.

4. Получены аналитические решения задач о прохождении цилиндрических и сферических гармонических звуковых волн через однородную упругую пластину с неоднородным упругим покрытием, граничащую с идеальными жидкостями, и проведены численные исследования.

Выяснено влияние расходимости падающих цилиндрических и сферических волн на отражение и прохождение звука.

Проведено сравнение частотных зависимостей отраженного и прошедшего акустических полей для однородного и разных видов неоднородных покрытий. Выявлено, что они существенно различаются друг от друга на всем рассматриваемом диапазоне волнового размера пластины. Причем это отличие становится все более выраженным при увеличении волнового размера пластины.

При изменении расстояния от источника до пластины наблюдается сильное изменение частотных зависимостей для одного и того же вида неоднородности материала покрытия как для линейных, так и для квадратичных законов неоднородности, что проявляется в изменении уровней характеристик и сдвиге резонансных частот.

Обнаружено, что по мере удаления линейного и точечного источника от пластины усиливается колебательный характер частотных зависимостей для отраженного и для прошедшего акустических полей как в случае однородного покрытия, так и при разных законах неоднородности материала покрытия.

5. Получено аналитическое решение задачи о прохождении плос-

кой звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями.

Анализ результатов численных расчетов показал, что поглощение акустической энергии вследствие вязкости окружающих жидкостей существенно зависит от закона неоднородности материала покрытия, расположения покрытия, свойств жидкостей, граничащих с пластиной, угла падения плоской волны и ее частоты.

Обнаружено, что при возрастании угла падения наблюдается увеличение диссипации энергии. Величина потерь достигает максимального значения при некотором критическом угле, а затем снижается до нуля при приближении к углу 90° . Такой качественный характер зависимости коэффициента поглощения от угла падения оказывается сходным с характером аналогичной зависимости при отражении плоской волны от абсолютно жесткой поверхности (эффект Константинова).

Выявлены характерные черты изменения коэффициента поглощения для покрытий с разными типами неоднородности материала.

Показано, что повышение частоты звуковых волн приводит к увеличению поглощения не только в области критических углов, но и при меньших углах падения. При этом происходит смещение критического угла в область меньших значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
2. Бобровницкий Ю.И. Импедансная теория рассеяния звука: общие соотношения // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 5. С. 601 – 606.
3. Бобровницкий Ю.И. Теория новых поглощающих и нерассеивающих покрытий повышенной эффективности // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 5. С. 613 – 624.
4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
5. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
6. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред: в приложении к теории волн. М.: Наука, 1982. 335 с.
7. Гусь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 308 с.
8. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
9. Исмагилов Ф.М., Кравцов Ю.А., Лямшев Л.М. Эффект усиления обратного рассеяния звуковой волны на тонкой произвольно ориентированной пластинке в жидкости // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 5. С. 874 – 878.
10. Константинов Б.П. Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченной среде. Л.: Наука, 1974. 144 с.
11. Константинов Б.П. О поглощении звуковых волн при отражении от твердой границы // Журн. техн. физ. 1939. Т. 9. № 3. С. 226 – 238.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.
13. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

14. Красильников В.Н. Влияние тонкого упругого слоя на распространение звука в жидком полупространстве // Акуст. журн. 1960. Т. 6. Вып 2. С. 220 – 228.
15. Куртепов В.М. Звуковое поле точечного гармонического источника при наличии в однородной среде тонкой бесконечной пластинки (непрерывный спектр) // Акуст. журн. 1970. Т. 16. Вып 1. С. 96 – 101.
16. Куртепов В.М. Звуковое поле точечного источника при наличии в среде тонкой бесконечной пластины (дискретный спектр) // Акуст. журн. 1969. Т. 15. Вып 4. С. 560 – 566.
17. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
18. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
19. Ларин Н.В. Анализ резонансного рассеяния звука термоупругой пластиной // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 109 – 123.
20. Ларин Н.В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216 – 234.
21. Ларин Н.В. Прохождение звука через однородный термоупругий плоский слой // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 145 – 153.
22. Ларин Н.В. Прохождение звуковой волны через неоднородный анизотропный термоупругий плоский слой // Изв. ТулГУ. Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2016. Вып. 1. С. 130 – 135.
23. Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480 – 488.
24. Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Определе-

ние законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 5. С. 552 – 558.

25. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. О прохождении звука через плоский неоднородный термоупругий слой // Изв. ТулГУ. Естественные науки. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2001. Т. 7. Вып. 2. С. 104 – 109.

26. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 650 – 659.

27. Лепендин Л.Ф. Акустика. М.: Высшая Школа, 1978. 448 с.

28. Локтева Н.А., Иванов С.И. Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде // Труды МАИ. 2021. № 117.

29. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В. Влияние формы набегающей волны на звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины сложной структуры // Труды МАИ. 2015. № 82. С. 1– 20.

30. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В. Исследование звукоизоляционных свойств трехслойной пластины при воздействии плоской волны // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. №1 (670). С. 27 – 34.

31. Лонкевич М.П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акуст. журн. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 85 – 92.

32. Лямшев Л.М. Дифракция звука на тонкой ограниченной пластинке в жидкости // Акуст. журн. 1955. Т. 1. Вып 2. С. 138 – 143.

33. Лямшев Л.М. Отражение звука тонкими пластинками и облочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР. 1955. 73с.

34. Лямшев Л.М., Рудаков С.Н. Отражение звука толстыми огра-

ниченными пластинами в жидкости // Акуст. журн. 1956. Т. 2. Вып 2. С. 228 – 230.

35. Мачевариани М.М., Тютюкин В.В., Шкварников А.П. Импе-дантный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1971. Т. 17. Вып. 1. С. 97 – 102.

36. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 202 с.

37. Нгуен Тхи Шанг. Об определении волнового поля в неоднородном покрытии пластины при произвольном падении на нее плоской звуковой волны // Вестник ТулГУ. Сер. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2022. Вып. 1. С. 72 – 83.

38. Нгуен Тхи Шанг. Об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2021. Вып. 5. С. 404 – 414.

39. Нгуен Тхи Шанг. О рассеянии звуковых волн, излучаемых точечным источником, упругой пластиной с неоднородным покрытием // Сб. трудов Междунар. Научно-технической конф. "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" Воронеж: «Научно-исследовательские публикации». 2023.

40. Нгуен Тхи Шанг. Программа определения поля смещений неоднородного покрытия упругой пластины при прохождении через нее плоской звуковой волны. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021664792, 14.09.2021. 1 с.

41. Нгуен Тхи Шанг. Программа расчёта акустических полей при отражении и прохождении звука через упругую пластину с неоднородным покрытием. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021665340, 23.09.2021. 1 с.

42. Нгуен Тхи Шанг , Толоконников Л.А. Численный анализ про-

хождения цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным прилегающим слоем // Сб. трудов Междунар. Научно-технической конф. "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" Воронеж: «Научно-исследовательские публикации». 2022. С. 1280 – 1285.

43. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

44. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.

45. Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 212 – 218.

46. Ринкевич А.Б., Смирнов А.Н. Распространение упругих волн в неоднородной трансверсально-изотропной пластине // Дефектоскопия. 2000. № 8. С. 73 – 83.

47. Рыбак С.А. Прохождение звука через периодически неоднородную пластину в жидкости // Акуст. журнал. 1962. Т. 8. Вып. 1. С. 113 – 118.

48. Рыбак С.А., Тартаковский Б.Д. Некоторые применения матрицы перехода к теории плоских волн в системе упругих слоев // Акуст. журн. 1962. Т. 8. Вып. 1. С. 119 – 123.

49. Савельев А.Я. Эффект Константинова в некоторых задачах акустики // Акуст. журн. 1973. Т. 19. Вып. 2. С. 231 – 239.

50. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.

51. Селезов И.Т., Сорокина В.В., Яковлев В.В. Распространение волн в упругом неоднородном по толщине слое, ограниченном жидкостями // Акуст. журн. 1985. Т. 31. Вып. 3. С. 374 – 379.

52. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Использование МКЭ для решения задачи о рассеянии звука ограниченной неоднородной анизотроп-

ной термоупругой пластиной // Вестник ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 13. Вып. 2. С. 172 – 182.

53. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246 – 257.

54. Скобельцын С.А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2017. Вып. 7. С. 83 – 92.

55. Скобельцын С.А. Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 1. С. 220 – 237.

56. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Определение параметров неоднородности анизотропного покрытия упругого полупространства по отражению звука. // Тез. Докл. 8-й Всероссийской научной конф. С международным участием “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред”. М.: ИПРИМ РАН, 2018. С. 58.

57. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 4. С. 740 – 744.

58. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн в вязкой жидкости неоднородной анизотропной оболочной с произвольной кривизной поверхности // Изв. ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 1995. Т. 1. Вып. 2. С. 135 – 143.

59. Скучик Е. Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. 520 с.

60. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.

61. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // Прикладная механика и техническая физика.

2017. Т. 58. № 1. С. 108 – 116.

62. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Прохождение звуковых волн через неоднородный термоупругий слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // Оборонная техника. 2001. № 11 – 12. С. 49 – 53.

63. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362 – 372.

64. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. Определение поля смещений неоднородном покрытии упругой пластины при прохождении через нее плоской звуковой волны // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 1. С. 310 – 321.

65. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 312 – 327.

66. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20 Вып. 2. С. 311 – 324.

67. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2023. Т. 23. Вып. 5. С. 305 – 319.

68. Толоконников Л.А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 5. С. 179 – 184.

69. Толоконников Л.А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1029 – 1035.

70. Толоконников Л.А. Прохождение звуковых волн через искривленную неоднородную термоупругую пластину, граничащую с вязкими теплопроводными жидкостями // Изв. ТулГУ. Серия Естественные науки.

2007. Вып. 1. С. 186 – 194.

71. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А. Дифракция звуковых волн на неоднородных и анизотропных телах / Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. 200с.

72. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А., Ларин Н.В. О методе решения задач дифракции звуковых волн на упругих телах с неоднородными покрытиями // Матер. междунар. научн. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики”. Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. С. 477 – 480.

73. Толоконников Л.А., Толоконников С.Л. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 423 – 437.

74. Толоконников Л.А., Юдачев В.В. О прохождении плоской волны через плоский упругий слой неоднородным покрытием / Матер. междунар. научн. конф. “Совр. пробл. математики, механики, информатики”. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С. 477 – 480.

75. Толоконников Л.А., Юдачев В.В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219 – 226.

76. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах М.: Наука, 1965. 388 с.

77. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 555 с.

78. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Прохождение плоской звуковой волны через слоистый композит с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // Акуст. журн. 2015. Т. 61. Вып. 1. С. 10 – 20.

79. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

80. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304с.
81. Шендеров Е.Л. Прохождение звука через тонкую пластину с опорами // Акуст. журн. 1964. Т. 10. Вып 2. С. 229 – 233.
82. Шендеров Е.Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акуст. журн. 1984. Т. 30. Вып. 1. С. 122 – 129.
83. Шендеров Е.Л. Прохождение сферической звуковой волны сквозь упругий слой // Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 4. С. 800 – 807.
84. Шушкевич Г.Ч., Киселева Н.Н. Экранирование звукового поля плоским упругим слоем и тонкой незамкнутой сферической оболочкой // Информатика. 2014. Вып. 2. С. 36 – 48.
85. Avramenko O.V., Selezov I.T. The effect of inhomogeneity of elastic layer placed between different fluids on the wave propagation // International journal of fluid mechanics research, 2002. V. 29. № 2. P. 60 – 70.
86. Avramenko O.V., Selezov I.T. Wave propagation in elastic layer placed between two different fluid media // International journal of fluid mechanics research, 2001. V. 28. № 3. P. 1 – 12.
87. Barnard G.R., Bardin J.L., Whiteley J.W. Acoustic reflection and transmission characteristics for thin plates // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. V. 57. № 3. P. 577 – 584.
88. Beranek L.L. The transmission and radiation of acoustic waves by solid structures. Noise Reduction. New York: McGraw-Hill, 1971. 346 p.
89. Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Kausel E. Wave propagation analysis in inhomogeneous piezo-composite layer by the thin-layer method // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2005. V. 64. P. 567 – 598.
90. Clive L. Dym., Mark A. Lang. Transmission of sound sandwich panels // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56. № 5. P. 1523 – 1532.
91. Fay R.D., Fortier O.V. Transmission of sound through steel plates immersed in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. V. 23. № 3. P. 339 – 346.

92. Finney W.J. Reflection of sound from submerged plates // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1948. V. 20. № 5. P. 626 – 637.
93. Hasheminejad S.M., Jamalpoor A. Sound transmission control through a hybrid smart double sandwich plate structure // *J. of Sandwich Structures & Materials.* 2021. V. 23. № 6. P. 2443 – 2483.
94. Hasheminejad S.M., Shabanimotlagh M. Sound insulation characteristics of functionally graded panels // *Acta Acustica United with Acustica.* 2008. V. 94. № 2. P. 290 – 300.
95. Huang C., Nutt S. An analytical study of sound transmission through unbounded panels of functionally graded materials // *J. of Sound and Vibration.* 2011. V. 330. № 6. P. 1153 – 1165.
96. Igumnov L., Tarlakovskii D.V., Lokteva N.A., Phung N.D. Interaction of Harmonic Waves of Different Types with the Three-Layer Plate Placed in the Soil // *Advanced Structured Materials.* 2020. V. 137. P. 111 – 124.
97. Lamb Jr. The transmission of a spherical sound wave through a thin elastic plate // *Ann. Phys.* 1957. V. 1. № 3. P. 233 – 246.
98. Leppington F.G. Scattering of sound waves by finite membranes and plates near resonance // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics.* 1976. V. 29. № 4. P. 527 – 546.
99. Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Tarlakovskii D.V. Stationary Dynamic Acoustoelasticity Problems of a Thin plate in a Perfect Compressible Fluid, Taking into Account the Dissipation of Energy in the Plate and Liquid // *Structural Integrity.* 2019. V. 8. P. 364 – 369.
100. Piquette J.C. Interactions of a spherical wave with a bilaminar plate composed of homogeneous and isotropic solid layers // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. V. 84. № 4. P. 1526 – 1535.
101. Piquette J.C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. V. 83. № 4. P. 1284 – 1294.

102. Shuvalov A.L., Poncelet O., Deschamps M., Baron C. Long-wavelength dispersion of acoustic waves in transversely inhomogeneous anisotropic plates // *Wave Motion*. 2005. V. 42. P. 367 – 382.