

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

На правах рукописи



Бодягина Ксения Сергеевна

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ
И ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В УСЛОВИЯХ
ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ
НА ОСНОВЕ МКЭ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Крысько В. А.

Саратов 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОЕ И ПЛОСКОДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ	23
1.1 Плосконапряженное и плоскодеформированное состояние	23
1.2 Математическая модель трехмерной (пространственной) задачи теории упругости с учетом физической нелинейности	26
1.2.1. Пластины сложной формы в трехмерной постановке с учетом упругопластических деформаций.....	30
1.2.2. Пластины сложной геометрической формы в трехмерной постановке под действием температурного поля.....	38
1.3 Определение эффективных свойств композитов.....	42
1.3.1. Гомогенизация	42
1.3.2 Исследование эффективных упругих характеристик материала с включением кольцевой формы	55
1.3.3 Влияние формы включения на эффективные упругие характеристики материала.....	59
1.3.4 Определение эффективного коэффициента теплопроводности.....	59
ГЛАВА 2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ	61
2.1 Общая постановка задачи топологической оптимизации.....	61
2.2 Методы интерполяции материалов.....	64
2.3 Регуляризация.....	68
2.4 Метод движущихся асимптот	71

2.5 Фундаментальная математическая формулировка задачи топологической оптимизации	73
2.6 Некоторые примеры применения топологической оптимизации при моделировании конструкций	75
2.6.1 Оптимизация армирования элементов микромеханических приборов для геологических изысканий: компьютерное моделирование и эксперимент	81
2.6.2 Топологическая оптимизация конструкций, состоящих из нескольких материалов, с использованием модифицированного метода SIMP	91
ГЛАВА 3 ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПОЗИТОВ	103
3.1 Топологическая оптимизация композитов при воздействии механических полей	103
3.2 Топологическая оптимизация композитов при наличии межфазного слоя....	111
3.3 Топологическая оптимизация композитов при совместном воздействии механических и температурных полей	117
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	127
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	129

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Актуальным вопросом является проектирование пластин сложной формы и новых композиционных материалов, обладающих улучшенными эксплуатационными характеристиками, что представляет для производства не только теоретическую, но и практическую ценность. С помощью методов, основанных на топологической оптимизации, могут быть созданы новые материалы с оптимальной структурой и особыми многофункциональными механическими и термическими свойствами, а также спроектированы элементы механических структур, обладающих оптимальными свойствами. Большой вклад в развитие данной темы внесли Чжоу М., Розвани Г., Сигмунд О., Сванберг К., Победря Б.Е., Бахвалов Н.С., Панасенко Г. П., Малмейстера А.К., Санчес-Паленсия Е., Тамуж В. П., Тетерс Г. А., Тарнопольский Ю. М., Рвачев В. Л., Ильюшин А. А., Биргер И.А., Баженов В. Г., Ворович И. И., Берт, Амбарцумян С. А., Красовский Ю. П., Трещёв А. А., Толоконников Л.А., Крысько В.А., Крысько А.В..

Актуальной областью исследований является изучение и напряженно-деформированного состояния балок и пластин на основе численных методов анализа, таких как МКЭ, однако нет работ по анализу механических и термомеханических характеристик с учетом пластических деформаций элементов конструкций в виде пластин сложной формы в трехмерной постановке. В настоящее время решены некоторые задачи топологической оптимизации элементов конструкций, в которых область оптимизации состоит из двух материалов. На сегодняшний день вопрос топологической оптимизации конструкций из нескольких материалов изучен недостаточно. Большое количество работ посвящено оптимальному проектированию микроструктур композиционных материалов на основе методов топологической оптимизации и гомогенизации, но при проектировании не учитывалось наличие отверстий, технологических включений и межфазного слоя, также для таких материалов не была изучена задача многоцелевой

оптимизации при конкурирующих механических и термических свойствах фаз, входящих в композиционный материал.

Целью работы является разработка математических моделей, алгоритмов и методов анализа механических и термомеханических структур в виде пластин сложной формы в трехмерной постановке на основе метода конечных элементов с учетом упругопластических деформаций, проектирование элементов конструкций, состоящих из нескольких фаз материалов, на основе модификации метода топологической оптимизации и композиционных материалов с улучшенными эксплуатационными характеристиками; проверка адекватности полученных моделей топологической оптимизации конструкций на основе данных натурального эксперимента; построение математических моделей, алгоритмов и методов для проектирования композиционных материалов, обладающих оптимальным набором эффективных свойств на основе топологической оптимизации с учетом наличия отверстий, технологических включений и межфазного слоя, решение задачи многоцелевой топологической оптимизации термических и механических свойств композиционных материалов.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Построение математических моделей, алгоритмов и комплексов программ для изучения напряженно-деформированного и упругопластического состояния элементов конструкций в виде пластин сложной формы на основе метода конечных элементов.

2. Реализация алгоритма и программ для вычисления эффективных характеристик композиционных материалов на основе метода асимптотической гомогенизации.

3. Разработка теории и алгоритмов проектирования топологически оптимальных конструкций по критериям прочности, состоящих из однокомпонентных и многокомпонентных материалов.

4. Проверка адекватности полученных алгоритмов и численных результатов на основе данных натурального эксперимента для задачи топологической оптимизации армирования элемента микромеханических приборов в виде пластины с вырезами.

5. Разработка математических и алгоритмических основ топологической оптимизации композиционных материалов, обладающих улучшенными характеристиками растяжения, сжатия, теплопроводности с учетом пор, технологических включений и межфазного слоя.

Предметом исследования является построение алгоритмов и программ для исследования напряженно-деформированного состояния элементов конструкций в виде пластин сложной формы с учетом пластических деформаций и проектирование топологически оптимальных конструкций, обеспечивающих минимум или максимум отклика структуры при заданных ограничениях и композиционных материалов с эффективными свойствами при помощи метода конечных элементов.

Методы исследования

Для проведения исследований используются методы топологической оптимизации, методы функционального анализа, методы асимптотической гомогенизации, метод скользящих асимптот, метод конечных элементов, метод переменных параметров упругости.

Личный вклад

Диссертация базируется на результатах, полученных лично автором. Выбор направления исследования и формулировки задач осуществлялся лично автором, либо совместно с научным руководителем. Автору принадлежит ведущая роль в построении алгоритмов топологической оптимизации композиционных материалов и механических структур с учетом температурного воздействия. Диссертация соответствует п.п. 1, 3, 4, 5, 6, 8 паспорта специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Научная новизна:

1. Разработаны алгоритмы и комплексы программ для исследования напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы с учетом пластических деформаций (п. 1, 4, 8 паспорта специальности 1.2.2).

2. Реализованы алгоритмы и комплексы программ для вычисления объемного модуля жесткости, модуля сдвига и коэффициента теплопроводности композиционных материалов на основе метода асимптотической гомогенизации (п.

1, 4, 8 паспорта специальности 1.2.2).

3. Построена математическая модель проектирования топологически оптимальных конструкций по критериям прочности. Решен ряд новых задач оптимизации, имеющих практическое приложение, отличающихся введением нового класса функций для интерполяции материала в многокомпонентных конструкциях (п. 1, 3, 5 паспорта специальности 1.2.2).

4. Достоверность полученного алгоритма метода топологической оптимизации и полученных результатов подтверждается совпадением численных результатов по предложенным методам и натурным экспериментом для задачи топологической оптимизации армирования элемента микромеханических приборов в виде пластины с вырезами; полученная оптимальная структура конструкции увеличивает предельное разрывное усилие конструкции (п. 6 паспорта специальности 1.2.2).

5. Разработаны методы и алгоритмы проектирования композиционных материалов и их топологической оптимизации с целью получения заданных механических и термомеханических свойств на основе метода гомогенизации, спроектированы композиционные материалы, отличающиеся наличием пор в структуре, технологических включений с учетом межфазного слоя. Решена задача топологической оптимизации микроструктуры материалов, отличающихся особыми многофункциональными свойствами при конкурирующих механических и термических свойствах фаз, входящих в композиционный материал (п. 1, 3, 4, 5 паспорта специальности 1.2.2).

Теоретическая значимость

Построены математические модели, созданы алгоритмы и комплексы программ для исследования термоупругопластического состояния пластин сложной формы в трехмерной постановке на основе МКЭ и метода переменных параметров упругости. Разработан модифицированный метод интерполяции материала для задачи топологической оптимизации конструкций, содержащих компоненты более чем из двух материалов с использованием одной непрерывной переменной проектирования. Метод позволяет распределить фазы материала так, чтобы получить оптимальные структурные характеристики. Могут быть получены

надежные конструкции из нескольких материалов с улучшенными механическими характеристиками. Реализован алгоритм вычисления эффективных характеристик композиционных материалов на основе метода асимптотической гомогенизации. Разработаны математические и алгоритмические основы проектирования композиционных материалов на основе методов гомогенизации и топологической оптимизации, позволяющие получить материалы, оптимальные по различным критериям при конкурирующих механических и термических свойствах, входящих в материал компонентов. Построенные математические модели позволят спроектировать композиционные материалы, описать поведение композиционных механических структур в сложных условиях окружающей среды с учетом поля температур.

Практическая значимость

Получены численные результаты по анализу термоупругопластического состояния пластин сложной формы, которые могут быть использованы при проектировании конструкций широкого применения (в машиностроении, приборостроении, авиационной промышленности, медицине и др.), содержащих в качестве структурных элементов перфорированные пластины, которые находятся в ходе эксплуатации под действием механических и термических нагрузок.

По разработанным алгоритмам и методам получены оптимальные структуры конструкций, состоящих из нескольких фаз материалов с улучшенными показателями прочности. Численные результаты по предложенным методам хорошо согласуются с проведенным совместно с автором натурным экспериментом для задачи топологической оптимизации армирования элемента приборов в виде пластины с вырезами. Спроектированы микроструктуры композиционных материалов, имеющих в структуре поры, технологические включения с учетом межфазного слоя, и композиционные материалы с особыми многофункциональными свойствами при конкурирующих механических и термических свойствах фаз, входящих в композиционный материал. Результаты работы используются как в научно-исследовательской деятельности, так и в учебном процессе.

Исследования проводились при финансовой поддержке:

Гранта РФФИ 19-31-90064 «Аспиранты» Создание новых композиционных многокомпонентных метаматериалов с оптимальной микроструктурой на основе методов топологической оптимизации;

Грантов РФФИ 16-11-10138, РФФИ 16-11-10138-П Сложные колебания нано балочно-пластинчато-оболочечных систем из гетерогенных материалов под действием теплового поля и белого шума;

Грантов РФФИ 20-08-00354, РФФИ № 17-03-00720.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Математические модели и созданные комплексы программ анализа термоупругопластического состояния пластин сложной формы в трехмерной постановке позволяют проанализировать их упругопластическое состояние при любых краевых условиях и любых зависимостях интенсивности напряжения-деформации.

2. Разработанные алгоритмы на основе метода асимптотической гомогенизации позволяют вычислять эффективные характеристики композиционных материалов с учетом наличия в их структуре включений, отверстий и межфазного слоя.

3. Разработанные алгоритмы проектирования топологически оптимальных по определенным критериям конструкций позволяют смоделировать структуры, состоящие из двух или нескольких материалов с улучшенными критериями прочности.

4. Достоверность полученного алгоритма метода топологической оптимизации и полученных на его основе численных результатов хорошо согласуются с натурным экспериментом, полученная оптимальная структура конструкции увеличивает предельное разрывное усилие на 51,3%.

5. Разработанные математические и алгоритмические основы проектирования композиционных материалов и их топологической оптимизации позволяют получить структуры композиционных материалов с оптимальными механическими и термомеханическими свойствами с учетом наличия отверстий, технологических

включений и межфазного слоя. Разработанные алгоритмы позволяют решить задачу топологической оптимизации микроструктуры материала с особыми многофункциональными термомеханическими свойствами, получены оптимальные микроструктуры материалов в зависимости от весового коэффициента механического и термического критерия.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгой математической и физической постановкой рассматриваемых задач, обоснованным применением численных методов, тщательным тестированием полученных численных алгоритмов. Достоверность полученного алгоритма топологической оптимизации подтверждается совпадением численных результатов по предложенным методам и натурным экспериментом. Проведены численные исследования сходимости используемых методов, а также сравнение с результатами вычислений других авторов. Даны положительные экспертные оценки полученных результатов при обсуждении основных результатов на конференциях и форумах.

Апробация. Основные положения и результаты работы представлялись на конференциях: 1. The Fifth Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM), 2020; 2. XX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 2020; 3. 14th Sino-Russia Symposium on Advanced Materials on Advanced Materials and Technologies, Beijing – Москва, ИМЕТ РАН; 4. VII и VIII Международные конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов», Москва, ИМЕТ РАН; 5. В окончательном виде работа докладывалась на семинаре кафедры «Математика и моделирование» СГТУ имени Гагарина Ю.А. под руководством профессора Крысько В. А. и на заседании диссертационного совета ТулГУ 24.2.417.02 (Д 212.271.05) 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, председатель профессор Иванов В. И.

Публикации. Результаты исследования опубликованы в 38 печатных работах, в том числе – 4 публикации в изданиях из списка ВАК Минобрнауки России, 11 – в журналах Scopus, из них 6 – в высокорейтинговых журналах Q1,2 статьи в журналах Q2, и 23 публикации в прочих изданиях РИНЦ. Получено 2 свидетельства о

регистрации программ для ЭВМ.

Краткое изложение диссертации

Во **введении** приведены обоснования актуальности темы, проведен краткий исторический обзор литературных источников по теме исследования, поставлена цель и определены задачи работы, обозначены методы, используемые для проведения исследования, подчеркнута теоретическая и практическая значимость работы, отмечены достоверность полученных результатов и личный вклад в исследование автора.

В **первой главе** рассмотрена задача исследования плосконапряженного и плоскодеформированного состояния элементов конструкций в виде пластин сложной формы и композиционных материалов в условиях термомеханического воздействия. На основе метода конечных элементов созданы программы анализа напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы, построена математическая модель пространственной задачи теории упругости с учетом физической нелинейности при помощи итерационного метода И. А. Биргера и метода гомогенизации. Построен алгоритм и создана программа вычисления эффективных упругих характеристик композиционных материалов при помощи метода асимптотической гомогенизации.

Во **второй главе** рассматривается вопрос топологической оптимизации конструкций. Дана общая формулировка задач топологической оптимизации, приведен обзор основных методов интерполяции материалов. Рассмотрен вопрос регуляризации решения и алгоритм поиска оптимума, метода подвижных асимптот (ММА).

Приводится постановка задач топологической оптимизации для различных приложений и целевых функций, таких как задача минимизации податливости, топологическая оптимизация напряженного состояния, рассмотрен вопрос топологической оптимизации в задачах термоупругости.

Показаны численные результаты примеров применения топологической оптимизации при моделировании конструкций различного применения, для каждого

из которых формулируется задача топологической оптимизации, проводится выбор метода интерполяции материалов.

Для задачи топологической оптимизации армирования элементов микромеханических приборов для геологических изысканий помимо компьютерного моделирования проведен натуральный эксперимент, подтверждающий достоверность используемых методов.

Решена задача топологической оптимизации конструкций, состоящих из нескольких материалов, с использованием модифицированного метода SIMP, приведены численные результаты.

Третья глава посвящена вопросу математического моделирования композитов с оптимальными эффективными характеристиками. Рассмотрены модели определения эффективных свойств композитов. Приведен обзор аналитических моделей определения эффективных свойств композитов и описан метод асимптотической гомогенизации, который приобретает все большую популярность при моделировании материалов с периодической микроструктурой.

Поставлены и решены задачи топологической оптимизации композитов при воздействии механических полей, в том числе при наличии межфазного слоя, а также топологической оптимизации композитов при совместном воздействии механических и температурных полей.

В **заключении** работы формулируются основные выводы, полученные при анализе результатов данной научно-квалификационной работы.

Обзор литературы по теме диссертационного исследования

Методы топологической оптимизации позволяют определить наиболее эффективное распределение материалов в области проектирования, чтобы получить оптимальные структурные характеристики. Метод топологической оптимизации, предложенный в [15], широко используется при решении задач оптимизации механических характеристик конструкций, а также решения других технических задач, например, задач термоупругости [14, 35], акустики [137], распространения

волн [98], проектировании многофункциональных материалов и мультифизических систем [99, 126, 147] и т. д.

При проектировании конструкций рассмотрения напряженно-деформированного состояния деталей в пределах линейной теории упругости на практике, зачастую, недостаточно, из-за того, что большинство конструкционных материалов подчиняются линейному закону Гука лишь при малых деформациях, во многих случаях эксплуатируются при деформациях, превышающих линейные. За пределами линейной упругости решение задачи в значительной мере усложняется более сложными математическими расчетами и отсутствием некоторых принципов линейной теории упругости, таких как отсутствие потенциала внутренних сил. Среди известных алгоритмов расчета физически нелинейных систем нет какого-либо одного универсального – эффективность того или иного метода зависит, главным образом, от типа и параметров проявляющейся нелинейности. Для данного рода задач широкое применение получил метод упругих решений А.А. Ильюшина [59]. В работе Н. И. Воровича [129] доказано, что метод упругих решений сходится к результату с линейной скоростью. И.А. Биргером [23] для решения физически нелинейных задач теории пластичности и ползучести была предложена модификация метода упругих решений – метод переменных параметров упругости. В работе [28] на основе метода малых параметров исследовалось распределение интенсивности напряжений виброплит с учетом геометрической и физической нелинейности. Проанализированы закономерности распределения интенсивности напряжений в пластине. Отмечено, что в случае нелинейных колебаний, от амплитуды колебаний зависят не только величины интенсивности напряжений, но и характер их распределения. В работе [40] на основе теории малых упругих пластических деформаций, получены уравнения связи между приращениями напряжений и приращениями деформаций при плоском нагружении в упругопластической стадии. Найденные определяющие соотношения реализованы в алгоритме формирования матрицы жесткости конечного элемента оболочки при плоском нагружении. Конкретные примеры показывают эффективность разработанных алгоритмов расчета оболочки с плоской нагрузкой за пределами

упругости. Исследованию задач теории малых упругопластических деформаций для пластин и оболочек с помощью МКЭ посвящены работы [62, 135]. В [64] построены геометрически нелинейные математические модели для анализа напряженно-деформированного состояния при поперечном изгибе упругих и упругопластических балок, претерпевающих малые деформации и умеренные вращения. Изложенный вариационный подход применим также к расчету упругопластических балок с переменным поперечным сечением.

В работе [8] создана математическая модель гибких физически нелинейных микрооболочек с учетом связанности полей температуры и деформаций. Геометрическая нелинейность вводится по теории Кармана, оболочки являются пологими. Используется гипотеза Кирхгофа-Лява. Физическая нелинейность вводится по деформационной теории пластичности. Связанность полей учитывается с помощью вариационного принципа Био. Приводятся примеры расчета нелинейных колебаниях и динамической потере устойчивости гибких пологих квадратных в плане микрооболочек с учетом связанности полей температуры и деформаций и физической нелинейности.

В работе [9] построена математическая модель контактного взаимодействия двух пластин (кинематическая модель Кирхгофа) с учетом разномодульности материалов, физической и конструктивной нелинейностей. Для исследования напряженно-деформированного состояния этой сложной механической системы был применен метод вариационных итераций, позволяющий свести уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Используется метод переменных параметров упругости [63].

В исследовании [51] представлена новая математическая модель для упругопластических балок, жестко заземленных на концах, при действии поперечного давления. Модель учитывает бегущие упругие изгибные волны, стационарные и нестационарные пластические шарниры, упругопластическое растяжение и деформацию сдвига.

В работе [144] исследовалось влияние пластического сдвига и нестационарных пластичных шарниров, используя интерактивный критерий текучести, а также

размягчение материала. Начальный упругий отклик балки, пренебрегая распространением нестационарной изгибной волны, использовался для исследования пластичности и начального положения пластичных шарниров.

Одним из важных и сложных вопросов механики деформируемого твердого тела является исследование пространственного пластического напряженно-деформированного состояния балок и пластин. В [136] исследуется трехмерная задача пластичности для определения сосредоточенных нагрузок, действующих на упругое полупространство. В статье [124] представлен нелинейный анализ деформации предварительно напряженной балочной системы, используемой в пролетном строении автодорожного моста или высотных зданиях, с использованием нелинейной модели материалов.

Исследование [94] направлено на изучение динамического отклика защемленной балки на ударные нагрузки со стороны жесткой массы. Выводятся аналитические формулы для прогнозирования квазистатических соотношений силы и деформации упругопластической балки при нагружении и разгрузке.

Термомеханическое поведение пластины с круглым отверстием в центре при монотонном нагружении в [66] исследуется экспериментально, при помощи оптических методов измерения. Экспериментальные и численные исследования для перфорированных панелей из стали проведены в [75]. Изучено поведение панелей, работающих на сдвиг. Представлены результаты влияния различных схем расположения отверстий и расположения трещины, полученные в результате эксперимента при циклической нагрузке, экспериментальные образцы были смоделированы методом конечных элементов с использованием ABAQUS.

Работы [72, 74] приводят численный анализ напряженного состояния пластины с отверстиями, расположенными по диагонали, находящейся под действием двуслойной плоской нагрузки, в [74] исследование коэффициентов продольного изгиба пластин с отверстиями с учетом изменения размера отверстия и толщины пластины, в [132] предложена численная процедура анализа многократного рассеивания изгибных волн на тонкой пластине с круглыми отверстиями, основанная на теории пластин по модели Кирхгофа. В [115] были исследованы различные конфигурации

пластин с несколькими отверстиями с различным шагом и расстоянием для различных режимов разрушения. Работа [38] ставит своей задачей провести обзор работ по анализу напряжений в бесконечной пластине с различными типами вырезов.

В последние десятилетия выпускается большой объем литературы, которая занимается микромеханическим моделированием и методами расчетов для гетерогенных материалов. Если микроструктура достаточно регулярна, чтобы считаться периодической, эффективные характеристики могут быть определены с помощью элементарной ячейки с соответствующими граничными условиями.

Для нерегулярных микроструктур эффективные свойства не могут быть определены точно. Таким образом, цель состоит в определении диапазона возможного эффективного поведения с точки зрения границ, которые зависят от некоторых параметров, характеризующих микроструктуру, такие, как, например, объемное соотношение включений в матрице. Отметим исследования Фойгта [127] и Рейса [89], которые сформулировали строгое определение оценки для эффективных модулей композитов с заданным объемом включений. Несколько десятилетий спустя, Хашина и Штрикмана [52-54] представили расширение метода, основанное на вариационных методах. Если композиционные материалы имеют нелинейное поведение, то для периодической микроструктуры эффективные свойства все еще могут быть получены в терминах элементарной ячейки с соответствующими граничными условиями. Для композитов со случайной микроструктурой таких, как жесткие пластиковые поликристаллы, первые оценки получены Бишопом и Хиллом [24, 25].

Еще в классических работах Пуассона, Максвелла, Фойгта, Рейсса, Рэлея ставился вопрос о вычислении эффективных упругих характеристик сред с периодической микроструктурой из различных материалов. Фойгт [128] предложил вычислять параметры таких материалов осреднением соответствующих величин по ориентации и объему. Рейс [89] использовал для получения характеристик осреднение компонент обратного тензора. Затем стало известно [6, 57, 120], что

метод Рейсса дает нижнюю, а Фойгта – верхнюю оценки эффективных характеристик.

Однако разница между приближениями может достигать больших значений, поэтому при построении осредненных соотношений часто используются приемы, уточнение которых очень сложно [10, 26]. Верхние и нижние границы композита, были оценены, основываясь на вариационных принципах упругости Хашиным и Штрикманом [52, 53, 54].

Основываясь на работах Херманса [55], для материалов с параллельными жесткими волокнами, Халфин и Цай [48, 49, 54] вывели уравнения для определения значений упругих постоянных.

Аналитические выражения для упругих констант получили Мори и Танака [76]. Основой для этих выражений была эквивалентная модель включения Эшелби [42]. Подход Мори-Танака использовали Цая и Мура [123] и Цая и Чоу [122] для предсказания продольного модуля композитов, усиленных волокнами. Далее Вэнг [134] и Тандон и Вэнг [119] получили уравнения для полного набора упругих констант композиционных материалов со сфероидальными изотропными включениями. Основываясь на результатах вышеназванных ученых Ху и Ши [59] получили упрощенные формулы для предсказания полного набора модулей композитов с параллельными волокнами. Теоретические предсказания этих ученых хорошо согласовываются с экспериментальными данными.

Используя метод Мори-Танака, Цю и Вэн [86] и Чэнь и др. [29] получили формулы для объемного модуля и модуля сдвига для композиционного материала, представляемого моделью изотропичной матрицы с беспорядочно ориентированными поперек сфероидами. Однако эти формулы не были окончательными. Первой моделью микромеханики для композитов, усиленных волокном, была сдвиговая модель Кокса [36].

Хиллом [56] был предложен самосогласованный метод. Этот метод облегчает определение эффективных упругих характеристик для случая, если одна фаза является эллипсоидальным включением. Метод Хилла основан на решении

вспомогательной упругой задачи в предположении, что взаимодействие фаз происходит с однородной средой, имеющей все свойства композита.

Бенвенист [22] переформулировал метод Мори – Танака [76], разработанный для расчета среднего внутреннего напряжения в матрице материала, содержащего включения с начальными деформациями, в применении к композиционным материалам.

Н. С. Бахваловым [2] был предложен метод асимптотического осреднения (МАО), а затем был развит Б. Е. Победрей [4], Санчес-Паленсия Э. [5], Бенсуссаном А., Папаниколау Г. [20] и другими учеными. В зарубежной литературе он называется *Asymptotic Homogenization Method*. Метод позволяет найти точные в математическом смысле эффективные характеристики с помощью решения задач на периодической ячейке, так называемых локальных задач [3].

На сегодняшний день этот одним из наиболее перспективных методов определения эффективных свойств композитов является метод асимптотической гомогенизации.

Для усреднения сложного микроструктурного поведения упругой среды в последнее время в основном применяют метод асимптотической гомогенизации [21, 95, 108].

Для сложных микроструктур аналитическое определение напряжений и деформаций чрезвычайно трудно, поэтому часто гомогенизация проводится на основе численных методов, таких как метод конечных элементов, чтобы найти эффективные свойства упругой среды [27].

В задаче проектирования материалов прорыв был сделан Зигмундом [108, 112] в середине 1990-х годов, им был предложен метод обратной гомогенизации. Предполагается, что композиты изготовлены из идентичных периодических базовых ячеек. Методика топологической оптимизации применяется для распределения однокомпонентных [107] или многофазных [44, 111] материалов, так, что могут быть достигнуты желаемые физические свойства. Известно, что прямая гомогенизация позволяет рассчитывать глобальные свойства на основе структуры элемента базовой ячейки или репрезентативного объема [30, 31]. В противоположность этому метод

обратной гомогенизации ищет подходящее распределение материала в модели базовой ячейки [107]. Различия между глобальными гомогенизированными свойствами материала и их целевыми значениями сводятся к минимуму с помощью методов топологической оптимизации [44, 107, 109]. В этом контексте упругие и тепловые свойства обычно рассматриваются отдельно.

Топологическая оптимизация структуры конструкций состоит в нахождении оптимальной структурной схемы, обеспечивающей минимум или максимум отклика структуры при ограничениях объем, напряжения, перемещения и т. д. Можно назвать множество примеров: минимизация податливости статически нагруженных структур [102, 96], минимизация веса при ограничениях на напряжения [39, 79], максимизация первой собственной частоты колебаний [82], максимизация наименьшего собственного значения в задачах устойчивости [145], максимизация магнитной энергии с ограничением по объему [140]. Топологическая оптимизация также применяется в многоцелевых и мультифизических проектах. В [73] предложена унифицированная методология проектирования топологии для разработки гибкой структуры, которая отвечала бы как требованиям статических, так и вибрационных характеристик с помощью подхода многоцелевой оптимизации. Зигмунд [103, 104] применил метод оптимизации топологии к проектированию многофазных приводов и электротермомеханических систем с одно- и двухфазными структурами. Авторы [139] представили новую схему параметризации проекта для задачи оптимизации топологии с участием трех целевых функций и нескольких материалов для проблемы проектирования с электрическими, термическими критериями и податливостью. Методы топологической оптимизации широко применимы для решения задач проектирования и идентификации конструкций и их элементов различного практического приложения, находящихся под действием механических [147, 148, 158], термических [151, 157] и термомеханических нагрузок [149, 161].

В настоящее время наиболее широко используемыми методами топологической оптимизации структур являются методы явной параметризации, которые известны как методы на основе плотности. Эти методы работают на

области, разбитой на конечные элементы. Вместо набора упругих свойств микроструктуры каждый конечный элемент содержит только одну проектную переменную. Эта переменная часто понимается как плотность материала элемента. Основная идея заключается в определении параметров элемента как проектных переменных, а для расчета параметров в задаче оптимизации устанавливается связь между локальными параметрами (например, плотностью) и глобальными физическими свойствами материала (например, модулем Юнга или проводимостью). При проектировании микроструктур материалов используются такие методы, как метод SIMP (Solid isotropic material with penalization) [17], метод эволюционной структурной оптимизации (ESO) [137] и метод фиксации уровня (Level set method) [13, 100].

С помощью различных алгоритмов поиска оптимума, например, таких как метод оптимального критерия (OC) [146], последовательного линейного программирования (SLP) или метод подвижных асимптот (ММА) [118], материалы в области оптимизации перераспределяются таким образом, что достигаются желаемые функциональные характеристики материала. В существующих исследованиях решаются задачи оптимальности конструкций [137, 143] или функциональных свойств материалов [44, 65, 100 107].

С помощью данного метода могут быть разработаны новые материалы и структуры, например, с использованием методов топологической оптимизации и гомогенизации в работе [100] были разработаны пьезокомпозиты.

Топологическая оптимизация структур композитов становится распространенным инструментом при проектировании материалов с улучшенными физическими характеристиками.

На настоящее время разработаны оптимальные микроструктуры материалов в задачах максимизации объемных и сдвиговых модулей [111]. Используя такой подход, были созданы новые композиты с отрицательным коэффициентом Пуассона и материалы с экстремальными или отрицательными коэффициентами теплового расширения [112], что демонстрирует широкие возможности данного метода при проектировании упругих или термоупругих композитов.

При проектировании структур композитов учитываются упругие, термические или термоупругие критерии. В критериях упругости учитывается только механическая нагрузка [15], термические критерии учитывают тепловую нагрузку [61, 68], а термоупругие критерии охватывают как механические, так и тепловые нагрузки [67, 92].

Следует отметить, что существуют два подхода к включению термических и механических критериев в задачи топологической оптимизации. Первый класс рассматривает материал-кандидат как термоупругий без полной связи как теплового, так и механического полей в топологическом смысле, где обычно предписывается температурное поле и термическая нагрузка, преобразуется в механическую нагрузку [67, 92]. В таком случае конструкция, прежде всего, управляется механическими характеристиками. Второй класс рассматривает материал с учетом и тепловых, и механических полей. Задача заключается в том, чтобы сначала рассчитать температурное поле, а затем соединить его с полем деформаций. В таких случаях проектирование может быть обусловлено как механической функцией цели [67], так и сопряженными механическими и тепловыми функциями [35]. Несмотря на это, в рамках многоцелевой оптимизации существуют ограничения для поиска оптимальных структур как для теплопередачи, так и улучшения механических характеристик.

Во многих случаях теплопроводные и упругие свойства материалов конкурируют друг с другом [47], и чаще всего трудно достичь высокой теплоотдачи и высокой жесткости одновременно. По этой причине важно разработать процедуру, которая эффективно бы работала при проектировании материалов с несколькими противоречивыми целями. В целом многоцелевая оптимизация трудна, если не невозможна для получения глобального оптимума для всех ожидаемых целей проектирования. В процессе оптимизации можно видеть, что на каком-то этапе любое дальнейшее улучшение одного критерия требует компромисса, по меньшей мере, с одним другим критерием. Множеством таких решений определяется пространство Парето, которое состоит из ряда точек в пространстве решений [84, 85], где для каждого из решений невозможно далее улучшать некоторые целевые

функции, не приводя к ухудшению как минимум одной из других целевых функций. При проектировании необходимо собрать как можно больше сведений о пространстве Парето для выбора лучшего решения.

Авторы в работе [141] использовали различные коэффициенты веса при поиске оптимальных топологий для решения Парето в соответствии с критериями податливости и собственной частоты. Эти работы показывают, что использование схемы весовых функций является наилучшим методом для получения множества решений Парето. Следует отметить, что существуют два подхода к включению термических и механических критериев в задачи топологической оптимизации.

Первый класс рассматривает материал-кандидат как термоупругий без полной связи как теплового, так и механического полей в топологическом смысле, где обычно предписывается температурное поле, и термическая нагрузка преобразуется в механическую нагрузку [92, 67]. В таком случае конструкция, прежде всего, управляется механическими характеристиками. Второй класс рассматривает материал с учетом и тепловых, и механических полей. Задача заключается в том, чтобы сначала рассчитать температурное поле, а затем соединить его с полем деформаций. В таких случаях проектирование может быть обусловлено как механической функцией цели [67], так и сопряженными механическими и тепловыми функциями [35]. Несмотря на это, в рамках многоцелевой оптимизации существуют ограничения для поиска оптимальных структур как для теплопередачи, так и улучшения механических характеристик.

ГЛАВА 1. ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОЕ И ПЛОСКОДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

1.1 Плосконапряженное и плоскодеформированное состояние

При двухмерном температурном поле $\theta(x, y, t)$ в длинном цилиндрическом теле (одно- или многосвязном) с продольной осью OZ (рисунок 1.1) возникает плоская деформация, для которой характерны перемещения

$$u_1 = u_1(x, y), \quad u_2 = u_2(x, y), \quad u_3(x, y) = 0.$$

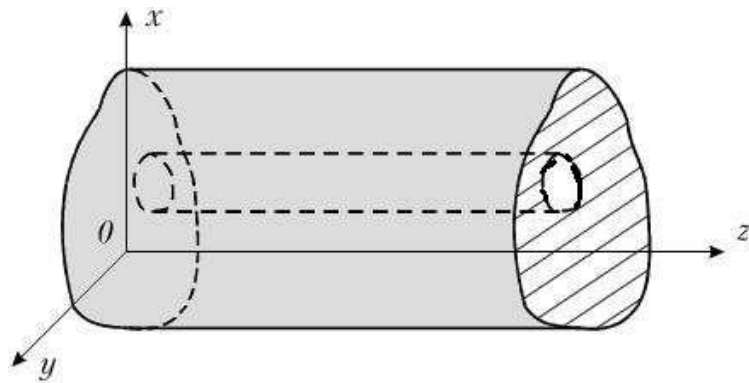


Рисунок 1.1 – Цилиндрическое тело, в котором возникает плоская деформация

При этих перемещениях очевидно, что

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0. \quad (1.1)$$

Подставляя (1.1) в соотношения между напряжениями и деформациями, получаем для изотропного случая

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \alpha^T E \theta, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Зная величину σ_{33} , находим для остальных соотношений между деформациями и напряжениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{11} + \nu_1 \sigma_{22}) + \alpha_1^T \theta,$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{22} - \nu_1 \sigma_{11}) + \alpha_1^T \theta,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + \nu_1}{E_1} \sigma_{12},$$

где

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad \alpha_1^T = \alpha^T (1 + \nu).$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} (\varepsilon_{11} + \nu_1 \varepsilon_{22}) - \frac{E_1}{1 - \nu_1} \alpha_1^T \theta,$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} (\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}) - \frac{E_1}{1 - \nu_1} \alpha_1^T \theta, \quad (1.2)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \varepsilon_{12}.$$

Аналогом функционала полной потенциальной энергии служит функционал

$$\Phi(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij} - \frac{E_1}{1 - \nu_1} \alpha_1^T \theta (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \frac{c_{\varepsilon}}{2T_0} \theta^2 \right) d\Omega - \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} F_i v_i ds, \quad \text{который для}$$

двухмерного случая имеет тот же вид, где $(i, j = 1, 2)$, $\sigma_{ij}^{(e)} = E_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij}(x)$,

$$\sigma_{11}^{(e)} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} (\varepsilon_{11} + \nu_1 \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22}^{(e)} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} (\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12}^{(e)} = \sigma_{12} - \text{упругие напряжения.}$$

Плоское напряженное состояние при плоском температурном поле $\theta(x, y, t)$ реализуется в тонкой пластине, срединная поверхность которой расположена в плоскости XOY , а поверхности $z = \pm h$ свободны от внешних сил. Без существенной погрешности можно считать, что в такой пластине каждая плоскость, параллельная плоскости XOY , свободна от напряжений, то есть

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \alpha^T E \theta, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,$$

а напряжения σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} распределены равномерно по толщине пластины.

Тогда в изотропном случае деформации ε_{11} , ε_{12} , ε_{22} и ε_{33} определяются выражениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \alpha^T \theta, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) + \alpha^T \theta,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12},$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha^T \theta. \quad (1.4)$$

Обратные соотношения имеют тот же вид, что и (1.2), однако значения E, ν и α^T в них необходимо заменить значениями E, ν и α^T .

В ряде случаев возникает так называемое обобщенное *плоское напряженное состояние*.

Если рассматривается пластинка достаточно малой толщины $2h$, то это позволяет считать, что ее напряженное состояние с достаточной точностью описывается заданием средних по толщине значений напряжений

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{ij} dz, \quad i, j = 1, 2.$$

Конечно, поверхностные силы на контурной поверхности пластины и массовые силы также должны быть усреднены по толщине пластинки:

$$F_i^*(s) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_i(s, z) dz, \quad f_i^*(x, y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_i(x, y, z) dz.$$

Обобщенный закон Гука при отсутствии напряжений $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ имеет вид (1.3), (1.4), в котором напряжения σ_{ij} необходимо заменить на напряжения σ_{ij}^* , а

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \quad i, j = 1, 2,$$

где $u_i^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_i(x, y, z) dz$ — средние по толщине значения перемещений. После

усреднения уравнения равновесия приобретают вид

$$(h\sigma_{ij}^*)_{,j} + hf_i^* = 0,$$

так как

$$\int_{-h}^h \sigma_{ij,j} dz = (2h\sigma_{ij}^*)_{,j} - (\sigma_{i,n^+} + \sigma_{i,n^-}) \sqrt{1+h_{,x}^2+h_{,y}^2},$$

и последнее слагаемое равно нулю из-за отсутствия нагрузок на лицевых поверхностях пластины в направлениях \mathbf{n}^+ и \mathbf{n}^- . К этим уравнениям следует добавить граничные условия. На границе могут быть заданы либо средние перемещения, либо нагрузки

$$u_i^*|_{\Gamma_u} = u_i^{*0}, \quad \sigma_{ij}^* n_j = F_i^* \quad (i, j = 1, 2).$$

Обозначая

$$\tilde{f}_i = hf_i^*, \quad \tilde{E} = Eh$$

и опуская звездочки, имеем для обобщенного плоского напряженного состояния следующую систему уравнений для средних значений всех функций:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\tilde{E}} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \alpha^T \theta, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{\tilde{E}} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) + \alpha^T \theta,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{\tilde{E}} \sigma_{12},$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{\tilde{E}} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha^T \theta,$$

$$\sigma_{ij,j} + \tilde{f}_i = 0, \quad (1.6)$$

$$u_i|_{\Gamma_u} = u_i^0, \quad \sigma_{ij} n_j = F_i, \quad (i, j = 1, 2). \quad (1.7)$$

1.2 Математическая модель трехмерной (пространственной) задачи теории упругости с учетом физической нелинейности

Рассмотрим трехмерное тело, показанное на рисунке 1.2. Главные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ возникают под действием внутренних сил в каждой точке трехмерного тела. Эти величины показаны на рисунке 1.2 для элементарного параллелепипеда, вырезанного вокруг точки тела.

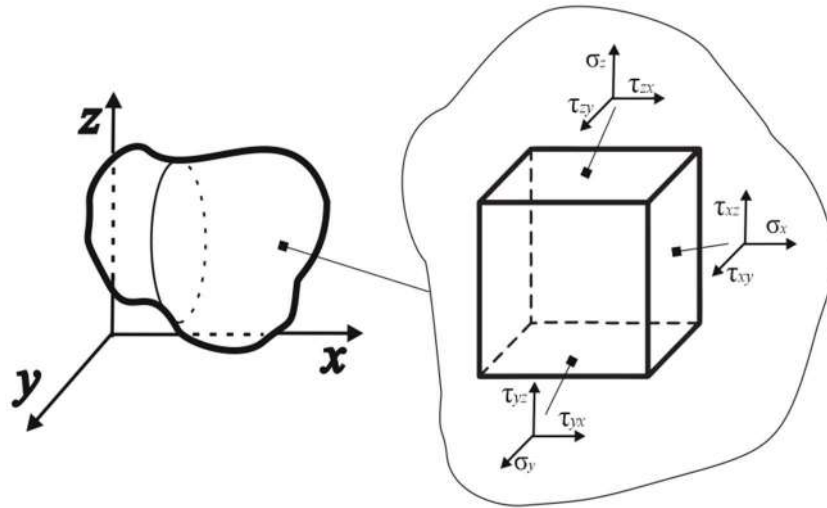


Рисунок 1.2 – Пространственное тело и распределение напряжений на площадках элементарного параллелепипеда

Задача решается относительно перемещений (u, v, w) . Для решения запишем уравнения равновесия Коши [133]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

здесь q_x, q_y, q_z – поверхностные нагрузки по x, y, z .

Связь между деформациями и перемещениями принимает вид [133]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1.9)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – главные деформации, $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – касательные деформации. Связь между деформациями и напряжениями запишется в виде [133]

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, \sigma_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, \sigma_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, \sigma_{zx} = \mu\gamma_{zx}, \end{cases} \quad (1.10)$$

где $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ и $\lambda = \frac{E \vartheta}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\vartheta)}$ – упругие постоянные Ламе.

Коэффициент Пуассона $\vartheta(e_i, x, y, z)$, модуль Юнга $E(e_i, x, y, z)$ зависят от координат x, y, z и интенсивности деформаций e_i по методу переменных параметров упругости Биргера И. А. [23]. Поэтому упругие постоянные Ламе λ и μ также зависят от координат и интенсивности деформаций.

После преобразований уравнения равновесия (1.4) принимают вид

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\theta_x + \mu \Delta u + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + q_x = 0, \\ (\lambda + \mu)\theta_y + \mu \Delta v + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \theta + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q_y = 0, \\ (\lambda + \mu)\theta_z + \mu \Delta w + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \theta + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + q_z = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – частные производные θ по координатам x, y, z соответственно. Перемещения (u, v, w) должны удовлетворять граничным условиям на поверхности, которые с учетом обобщенного закона Гука и условий Коши запишутся как [133]:

$$\begin{cases} X_v = \lambda \theta l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right), \\ Y_v = \lambda \theta m + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right), \\ Z_v = \lambda \theta n + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right), \end{cases} \quad (1.12)$$

где l, m, n – направляющие косинусы внешней нормали. X_v, Y_v, Z_v – компоненты распределенной поверхностной нагрузки.

Связь между деформациями и напряжениями (1.9) с учетом температурного поля представляется в виде

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x + \alpha_T T, & \sigma_{xy} = \mu \tau_{xy} \\ \sigma_y = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y + \alpha_T T, & \sigma_{yz} = \mu \tau_{yz} \\ \sigma_z = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z + \alpha_T T, & \sigma_{zx} = \mu \tau_{zx} \end{cases} \quad (1.13)$$

где $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ и $\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – переменные Ламе.

Материал пластинки изотропный, но неоднородный, так как модуль упругости $E(e_i, x, y, z, T)$ и коэффициент Пуассона $\nu(e_i, x, y, z)$. Важно подчеркнуть, что здесь под e и ν понимаются не фиксированные модуль Юнга E_0 и ν_0 линейной теории упругости, а функции, определенным и нелинейным образом связанные с деформированным состоянием в рассматриваемой точке. На таком представлении базируется метод переменных параметров упругости Биргера решением нелинейных, но упругих и упругопластических задач. Так как для получения разрешающих уравнений рассматриваемых в данной статье теории не требуется знания конкретного вида функции E и ν , то здесь укажем только на их общие варианты: $E = F(x, y, z)$, $\nu = \nu(x, y, z)$, $E = E(\varepsilon_0, e_i)$, $\nu = \nu(\varepsilon_0, e_i)$ соответствующие неоднородному физически-линейному материалу и однородному до деформации физически нелинейному материалу, кроме того возможен случай когда $E = E(T)$, $\nu = \nu(T)$ и $E = E(x, y, z, T)$, $\nu = \nu(x, y, z, T)$ и $E = E(x, y, z, \varepsilon_0, T)$, $\nu = \nu(x, y, z, \varepsilon_0, T)$. То есть в первых двух случаях свойство материала не зависит от температуры, а в последующих двух случаях зависит от температуры. Значения E и ν это сложные функции координат, которые изменяются с изменением деформированного состояния в точке. Таким образом, физически нелинейное тело можно рассматривать, как тело, неоднородность которого нелинейно зависит от деформированного состояния.

Согласно методу переменных параметров упругости Биргера И. А. [23] коэффициент Пуассона $\nu(e_i, x, y, z)$, модуль Юнга $E(e_i, x, y, z)$ и модуль сдвига G зависят от координат x, y, z и интенсивности деформаций e_i . Тем самым λ, μ также зависят от координат. T – распределение температур, вычисленное из решения стационарной задачи теплопроводности из трехмерного уравнения:

$$\alpha_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0, \text{ где } \alpha_T \text{ – коэффициент линейного расширения для}$$

которого могут быть заданы граничные условия следующих типов:

1. Распределение температуры по поверхности $T(x, y, z) = f(x, y, z)$.
2. Задание плотности теплового потока для каждой точки поверхности.

$$-k \operatorname{grad} T = q_p$$

3. Задание теплообмена между поверхностью твердого тела и окружающей средой $-k \text{ grad}T = \alpha(T_{oc} - T) = q_p$.

4. Задание равенства температур и равенства абсолютных величин тепловых потоков $T_{p1} = T_{p2}; q_{p1} = q_{p2}$.

После соответствующих преобразований уравнения равновесия (1.8) переписуются в виде

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\theta_x + \mu\Delta u + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\theta + 2\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \alpha_T\frac{\partial T}{\partial x} + q_x = 0, \\ (\lambda + \mu)\theta_y + \mu\Delta v + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\theta + \frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \alpha_T\frac{\partial T}{\partial y} + q_y = 0, \\ (\lambda + \mu)\theta_z + \mu\Delta w + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\theta + \frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} + \alpha_T\frac{\partial T}{\partial z} + q_z = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – частные производные θ по координатам x, y, z соответственно.

1.2.1. Пластины сложной формы в трехмерной постановке с учетом упругопластических деформаций

Рассмотрим трехмерную пластинку, находящуюся в R^3 (рисунок 1.3), имеющую неоднородности в виде отверстий. В работе рассматриваются малые деформации. Пластинка имеет длину a , высоту h и толщину b и находится под действием поверхностной нагрузки F . Во всех рассмотренных задачах пластинка закреплена по боковым граням $\Omega_1 = \{x = 0, y \in [0, b], z \in [-h/2, h/2]\}; \Omega_2 = \{x = l, y \in [0, b], z \in [-h/2, h/2]\}; \Omega_3 = \{x \in [0, l], y = b, z \in [-h/2, h/2]\}, \Omega_4 = \{x \in [0, l], y = 0, z \in [-h/2, h/2]\}$, то есть $(u = v = w = 0)$. На верхней грани $\Omega_5 = \{x \in [0, l], y \in [0, b], z = h/2\}$ действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности F , на остальных гранях и внутри отверстий отсутствуют силовые воздействия моментов и усилия.

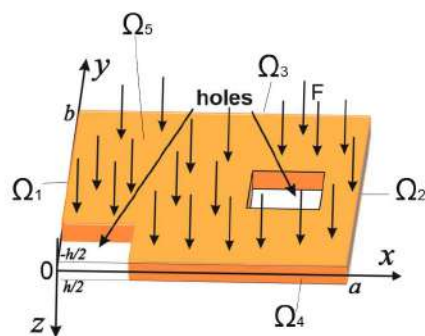


Рисунок 1.3 – Граничные условия для пластины с технологическими отверстиями

В работе исследовано напряженно-деформированное состояние в трехмерной постановке для нескольких конфигураций пластинок с учетом физической нелинейности. Материал для всех рассмотренных задач – чистый алюминий с характеристиками: модуль сдвига $G_0 = 23,3(3) \cdot 10^9$ [Па] и модуль Юнга $E_0 = 70 \cdot 10^9$ [Па], объемный модуль $K = 1,94G_0$. Коэффициент Пуассона принимает значение 0,28. На верхней грани действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности F . Произведем расчет напряженно-деформированного состояния в трехмерной постановке для нескольких пластинок

Рассмотрим пластинку, имеющую 1 (рисунок 1.4 а), 2 (рисунок 1.4 б), 4 (рисунок 1.4 в) отверстия квадратной формы со стороной 10 в углах, а также однородную пластинку (рисунок 1.4 г). Цифрами 1-7 обозначены области предполагаемых концентраторов напряжений, на которые следует обратить особое внимание при расчетах.

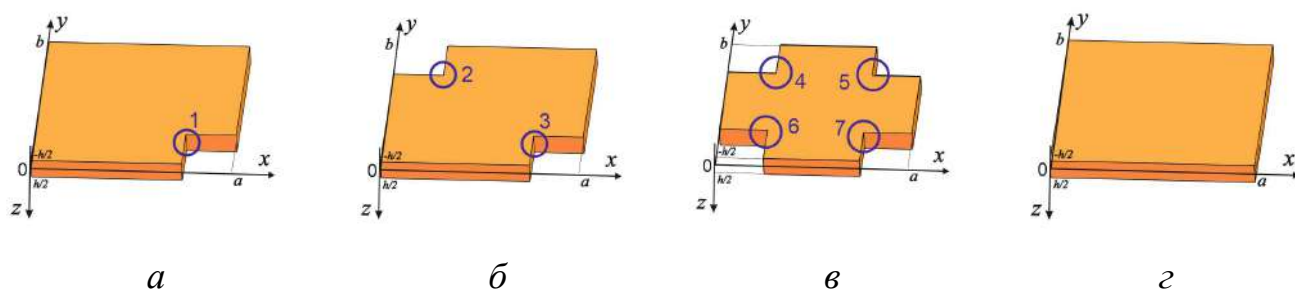


Рисунок 1.4 – Схематичное изображение пластинок

Сходимость решения метода конечных элементов для данной задачи при равномерно распределенной нагрузке $q=11,25$ для пластинки с четырьмя отверстиями (рисунок 1.4 в). зависимости интегральной величины перемещений w по объему пластины от количества конечных элементов N показана на рисунке 1.5. Для данной задачи решение сходится с достаточной точностью при количестве конечных элементов $N=7810$, в дальнейшем все результаты получены для конечных элементов такого же размера.

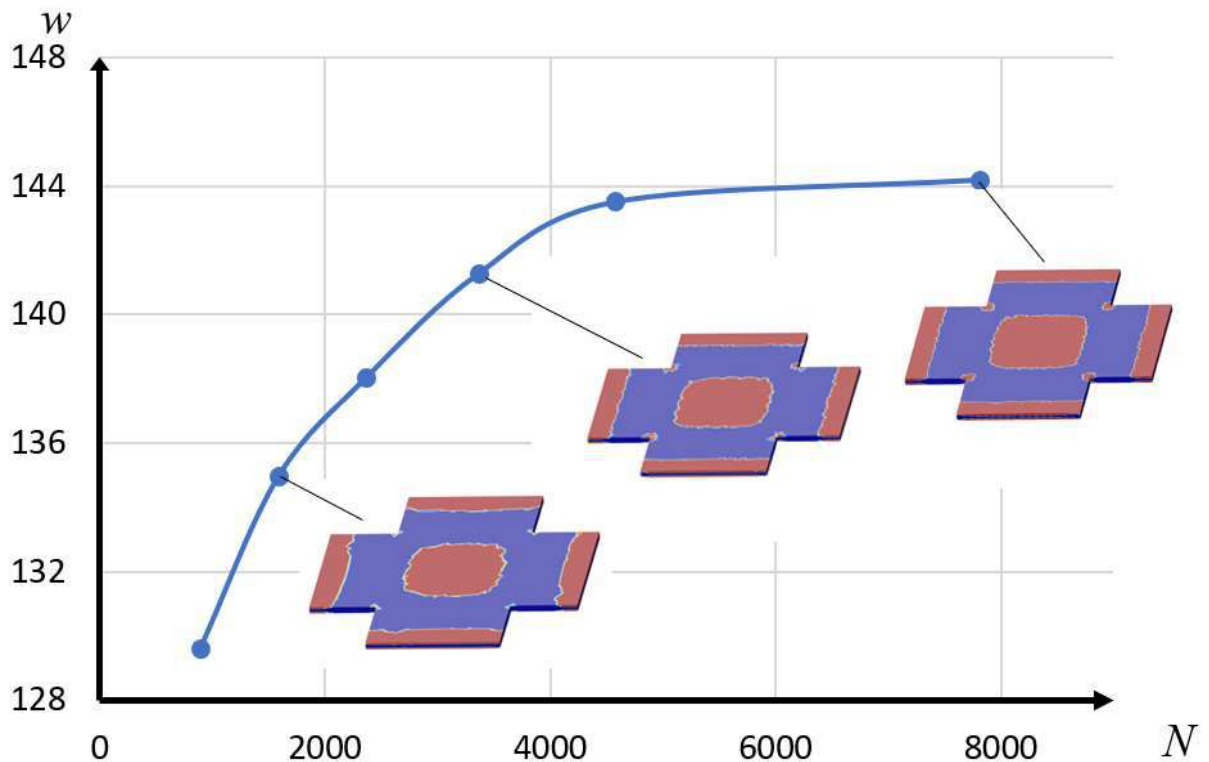


Рисунок 1.5 – Зависимость интегральной величины перемещений w по объему пластины от количества конечных элементов

Сходимость метода переменных параметров упругости существенно зависит от объема пластических зон. В таблице 1.1 показано, как количество итераций метода переменных упругих параметров упругости Биргера (n_{it}) зависит от интенсивности поперечной нагрузки q на примере пластины с четырьмя вырезами (рисунок 1.4 в).

Таблица 1.1 – Значения интегральной величины перемещений w по объему пластины при различных нагрузках q для каждой итерации метода переменных упругости

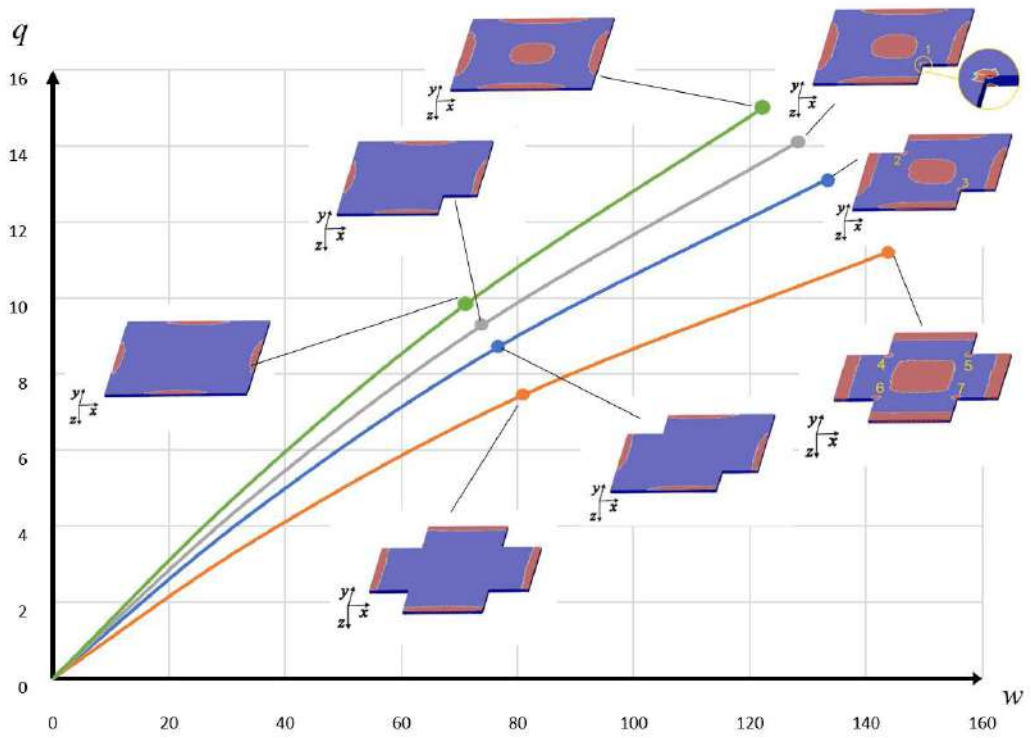
	$n_{it} = 1$	$n_{it} = 2$	$n_{it} = 3$	$n_{it} = 4$	$n_{it} = 5$
$q=3,75$	36,86409	37,39751	37,39751	37,39751	37,39751
$q=7,5$	78,26344	83,04153	83,72104	84,13359	84,13359
$q=11,25$	125,4832	139,3836	144,6765	146,844	147,3834

При граничных условиях защемления ($u = v = w = 0$) граней $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ при действии механической поверхностной по нагрузки по Ω_5 первыми возникают зоны пластических деформаций вблизи защемленных границ пластины $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, при дальнейшем увеличении нагрузки проявляется область пластических деформаций в центре пластины. При наличии вырезов в областях 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, показанных на рисунке 1.4, расположенных в окрестности угла выреза возникает скопление напряжений, что приводит к пластическим деформациям в данных областях.

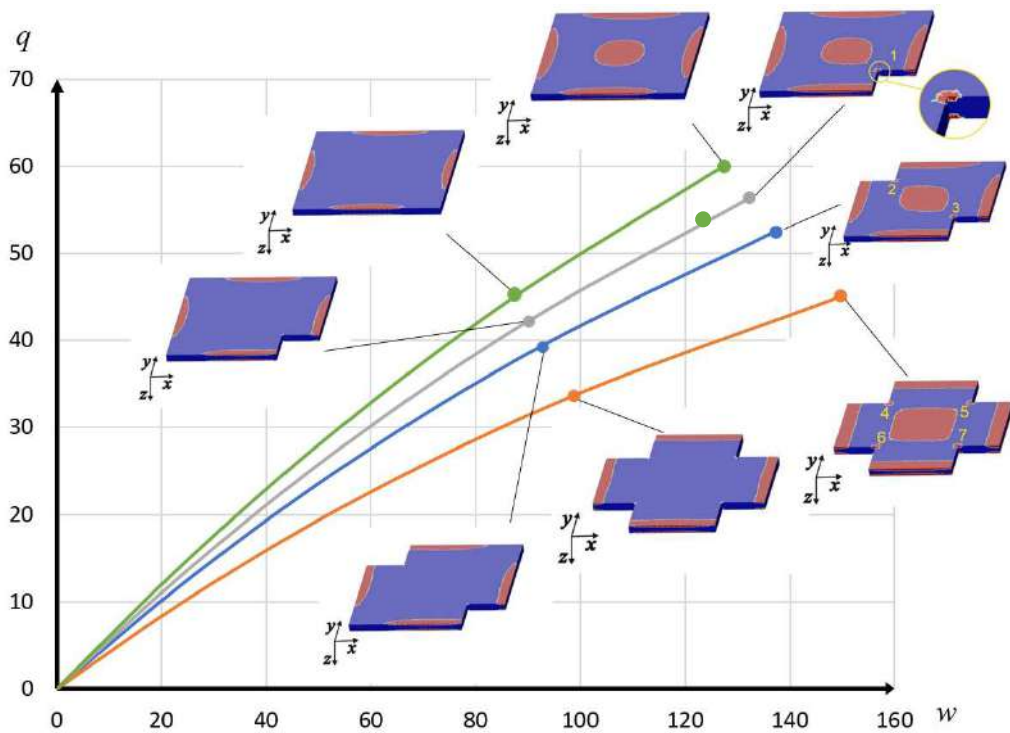
Зависимость интегральной величины перемещений w по объему пластины с разным количеством отверстий и распределение пластических деформаций показаны на рисунке 1.6. На рисунке 1.6 а приведены результаты для пластины толщины $h=1$, на рисунке 1.6 б – для пластины толщины $h=2$.

Полученные зависимости показывают влияние отверстий в углах пластины на величину перемещений по объему пластины, так и на распределение пластических деформаций.

Заметим, что в углах отверстий возникают повышенные концентрации напряжений, что приводит к появлению пластических деформаций в данных областях.



a

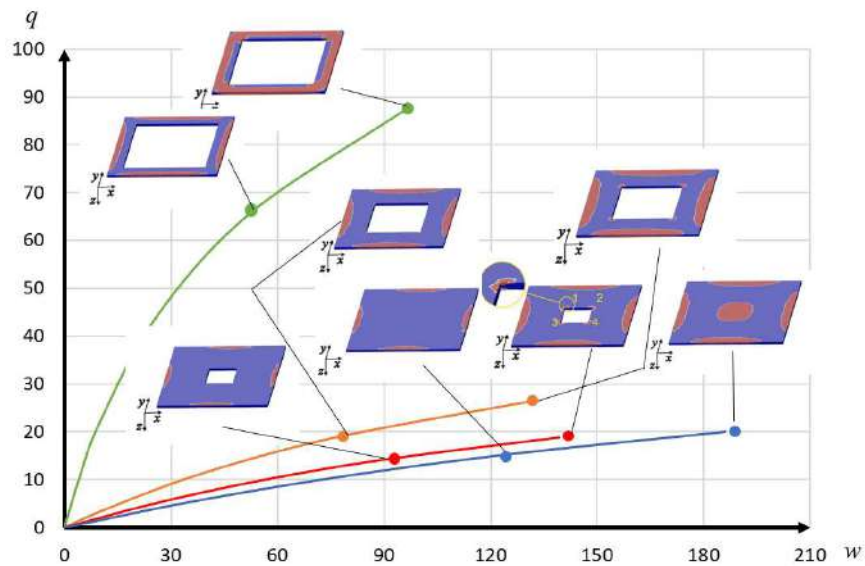


б

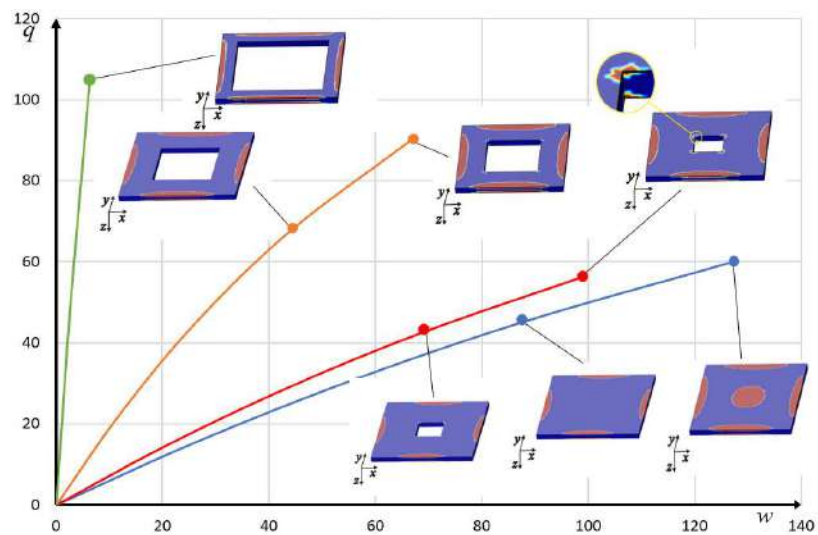
Рисунок 1.6 – Зависимость интегральной величины перемещений w по объему пластины с разным количеством отверстий и распределение пластических деформаций

Пластинки, имеющие отверстие в центре

Рассмотрим пластинки, имеющие отверстие квадратной формы со стороной 10, 20 и 30, расположенное по центру. Зависимости интегральной величины перемещений w по объему пластины с отверстием различных размеров и распределение пластических деформаций показаны на рисунке 1.7. На рисунке 1.7 *а* приведены результаты для пластины толщины $h=1$, на рисунке 1.7 *б* – для пластины толщины $h=2$.



а



б

Рисунок 1.7 – Зависимость интегральной величины перемещений w по объему пластины с отверстием различных размеров и распределение пластических деформаций

Отверстие в центре пластины влияет на величину перемещений по объему пластины и на распределение пластических деформаций. Заметим, что в углах отверстия, как и в предыдущем случае, возникают повышенные концентраторы напряжений и появляются зоны пластических деформаций.

Пластинки, имеющие кроме отверстий по углам, щель в центре

Рассмотрим пластинки, имеющие, кроме отверстий квадратной формы, узкое отверстие (щель) ширины 1 и длины 10. Рассмотренные пластинки показаны на рисунке 1.8.

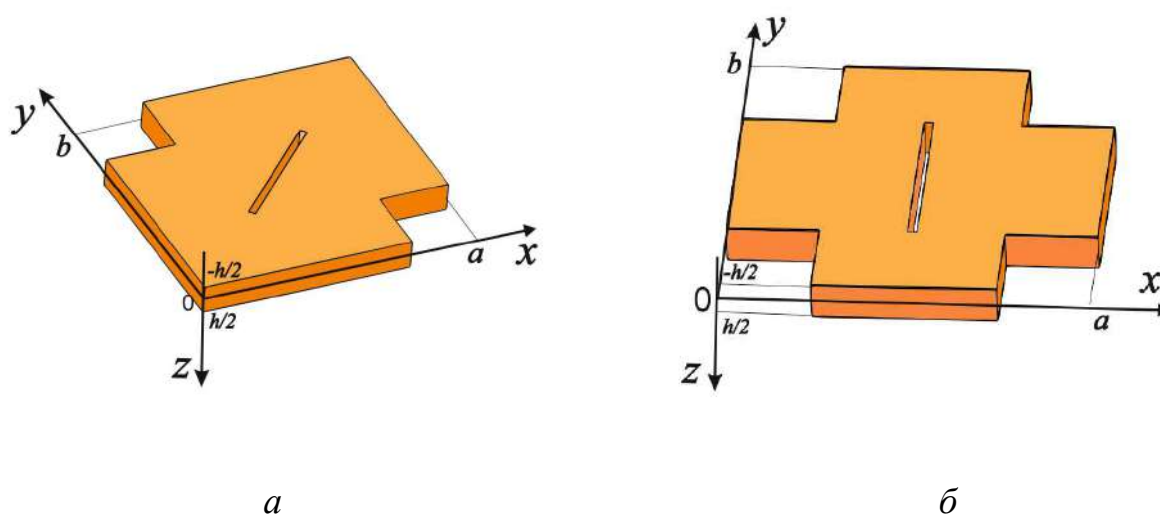
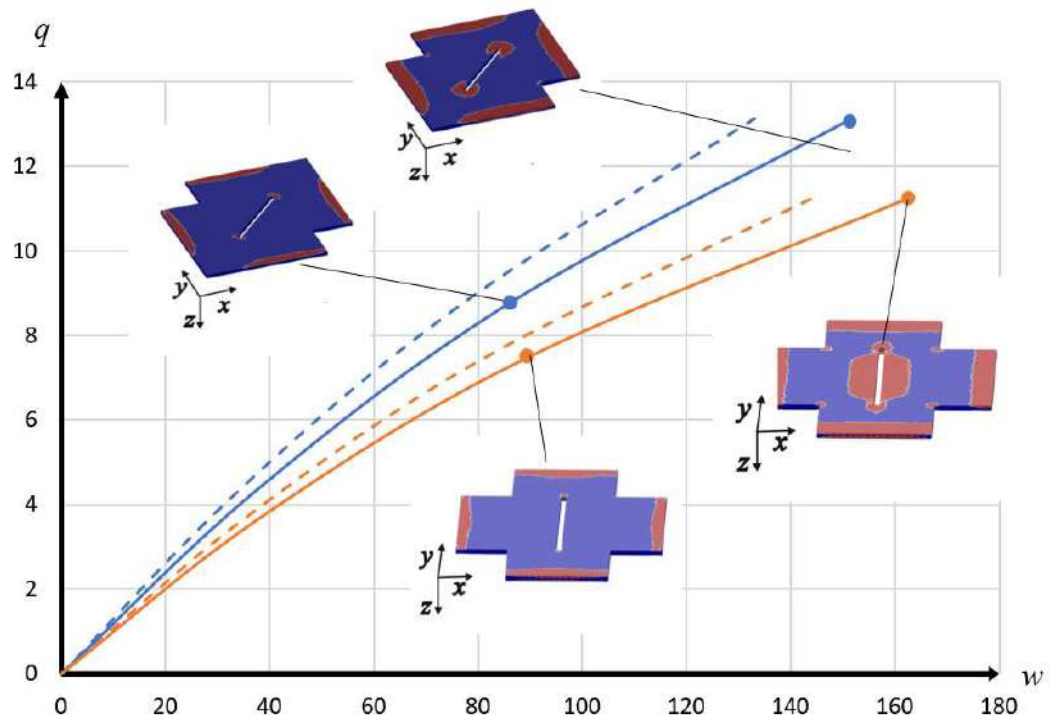


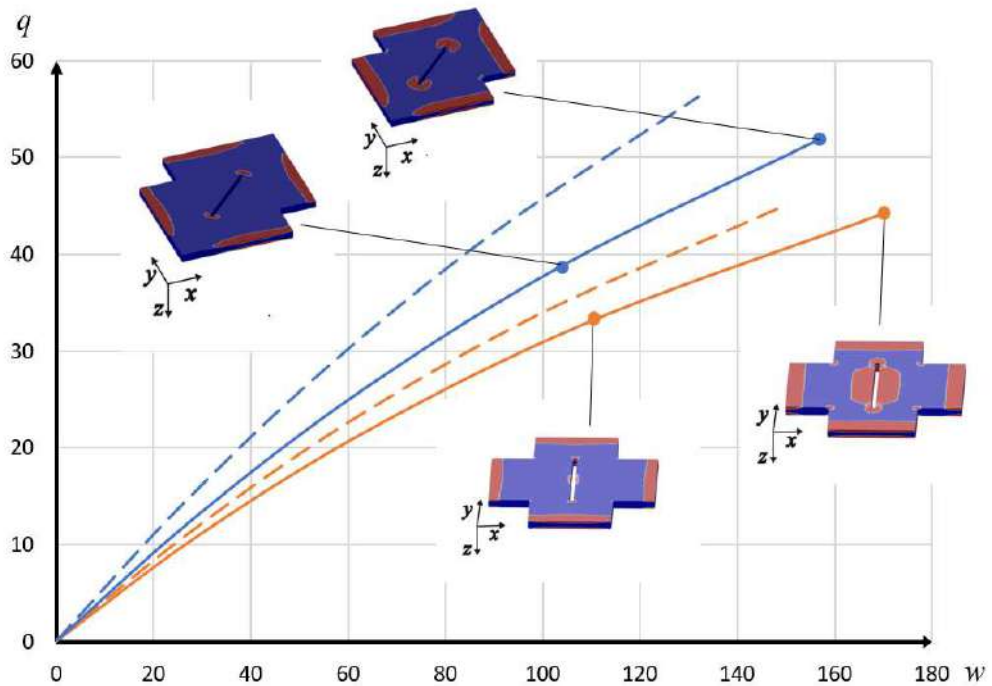
Рисунок 1.8 – Конструкции пластинок с щелью

Зависимости интегральной величины перемещений w по объему пластины с отверстием различных размеров и распределение пластических деформаций показаны на рисунке 1.9. На рисунке 1.9 *а* приведены результаты для пластины толщины $h=1$, на рисунке 1.9 *б* – для пластины толщины $h=2$. Пунктирными линиями обозначены зависимости для пластин соответствующей формы, не имеющей дефекта в виде щели, полученные ранее.

Наличие щели и ее расположение влияет на величину перемещений и пластические деформации, зона вокруг щели является дополнительным концентратором напряжений, который изменяет распределение зон пластических деформаций больше, чем отверстия, находящиеся в углах пластины.



a



б

Рисунок 1.9 – Зависимость интегральной величины перемещений w по объему пластины с разным количеством отверстий и распределение пластических деформаций

Впервые были построены математические модели нагруженных поперечной нагрузкой пластин сложной геометрической формы в трехмерной постановке с учетом физической нелинейности материала [153-155]. Математические модели корректны, так как предлагается метод решения неоднородных изотропных пластин с учетом физической нелинейности и дается его обоснование. Никаких кинематических гипотез не вводится, сводящих трехмерную задачу к одномерной, рассматривается решение задач в трехмерной постановке теории упругости. Используются конечные элементы в виде тетраэдров, исследуется сходимость метода конечных элементов в зависимости от числа элементов разбиения по плану и по толщине.

На основе численных экспериментов показано влияние отверстий в углах и в центре пластины, а также наличие выреза в виде щели на напряженно-деформированное состояние пластин различной толщины при действии статических механических нагрузок. Во всех рассмотренных примерах наличие неоднородности геометрии пластины приводит к увеличению зон пластических деформаций, а также увеличивает значения перемещений w . Показано, что вырезы являются концентраторами напряжений в пластине, что влияет на ее несущую способность.

1.2.2. Пластины сложной геометрической формы в трехмерной постановке под действием температурного поля

Пусть имеется изотропная трёхмерная пластинка, которая имеет длину a , высоту h и толщину b . Во всех рассмотренных задачах пластинка закреплена по боковым граням

$$\Omega_1 = \left\{ x = 0, y \in [0, b], z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\}; \Omega_2 = \left\{ x \in [0, l], y = 0, z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\};$$

$$\Omega_3 = \left\{ x = l, y \in [0, b], z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\}, \Omega_4 = \left\{ x \in [0, l], y = b, z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\},$$

то есть $(u = v = w = 0)$. На верхней грани $\Omega_5 = \{x \in [0, l], y \in [0, b], z = h/2\}$ и нижней грани $\Omega_6 = \{x \in [0, l], y \in [0, b], z = -h/2\}$.

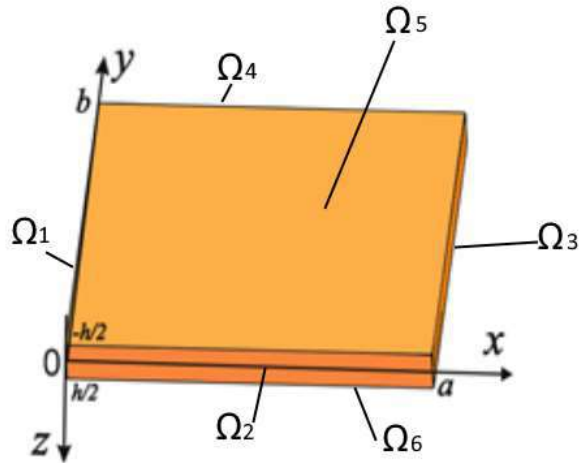


Рисунок 1.10 – Конструкция пластинки

Температурное поле T внутри пластинки удовлетворяет классическому уравнению теплопроводности, то есть

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.15)$$

со следующими граничными условиями

$$T|_{\Omega_{1,2,3,4}} = 0 \quad (1.16)$$

$$T|_{\Omega_{5,6}} = T_0 \quad (1.17)$$

Здесь: T_0 – заданная температура на областях $\Omega_{5,6}$

Рассматривалась упругопластическая пластина с линейным упрочнением при совместном действии механической и термической нагрузки. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций определяется как

$$\sigma_i = 3G_0 e_i \text{ при } e_i < e_s, \quad (1.18)$$

$$\sigma_i = 3G_0 \sigma_s + 3G_1 (e_i - e_s) \text{ при } e_i \geq e_s.$$

где G_0 – характерное значение модуля сдвига в недеформированном состоянии, G_1 – значение модуля сдвига в деформированном состоянии.

Рассмотрим пластинку с вырезами по углам (рисунок 1.11). Материал пластины – сталь, значения коэффициентов G_0 , G_1 , e_s не являются фиксированными, зависят от температуры пластины и приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Значения коэффициентов G_0 , G_1 , e_s для разных температур

T	e_s	G_0	G_1
0	0,002928	1943431,3	163713,08
100	0,002892	1941326	141001,40
125	0,0028875	1928409,53	137954,83
150	0,002883	1915493,53	134908,27
200	0,002874	1889661,52	128815,13

Сходимость решения метода конечных элементов для данной задачи при равномерно распределенной механической нагрузке $q=10$ и температуре $T=100$ для пластинки с четырьмя отверстиями (рисунок 1.11). Зависимость интегральной величины перемещений w по объему пластины от количества конечных элементов N показана на рисунке 1.11. Для данной задачи решение сходится с достаточной точностью при количестве конечных элементов $N=7810$, в дальнейшем все результаты получены для конечных элементов такого же размера.

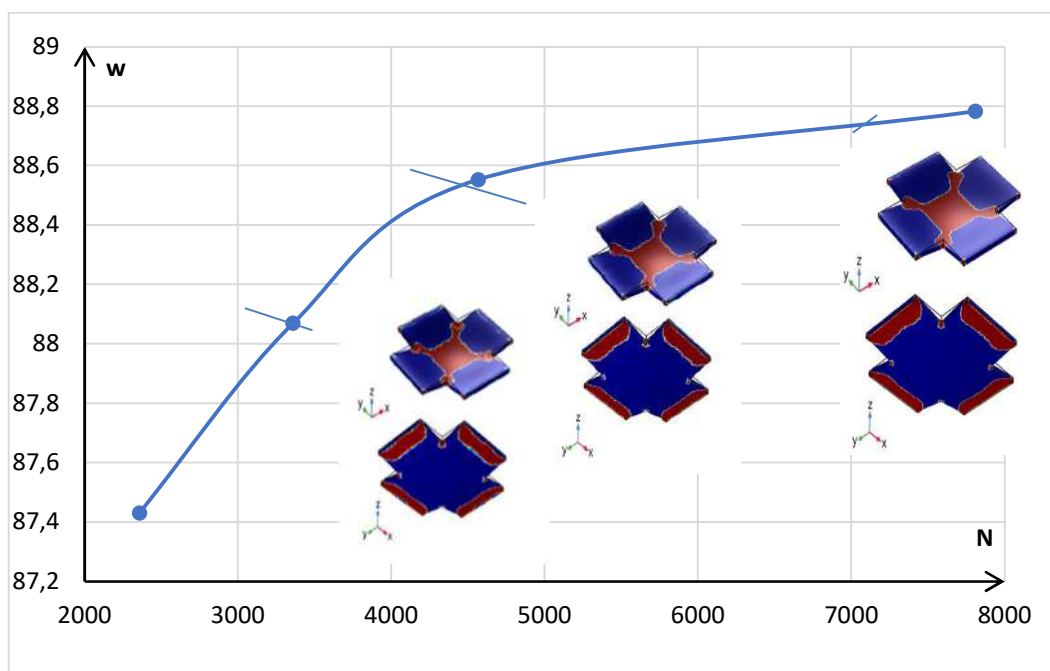
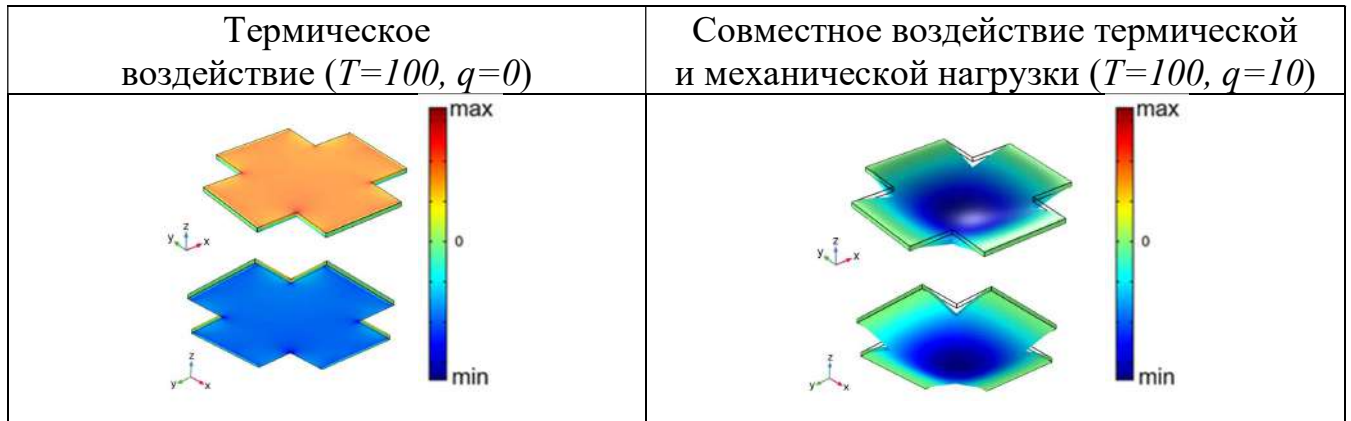
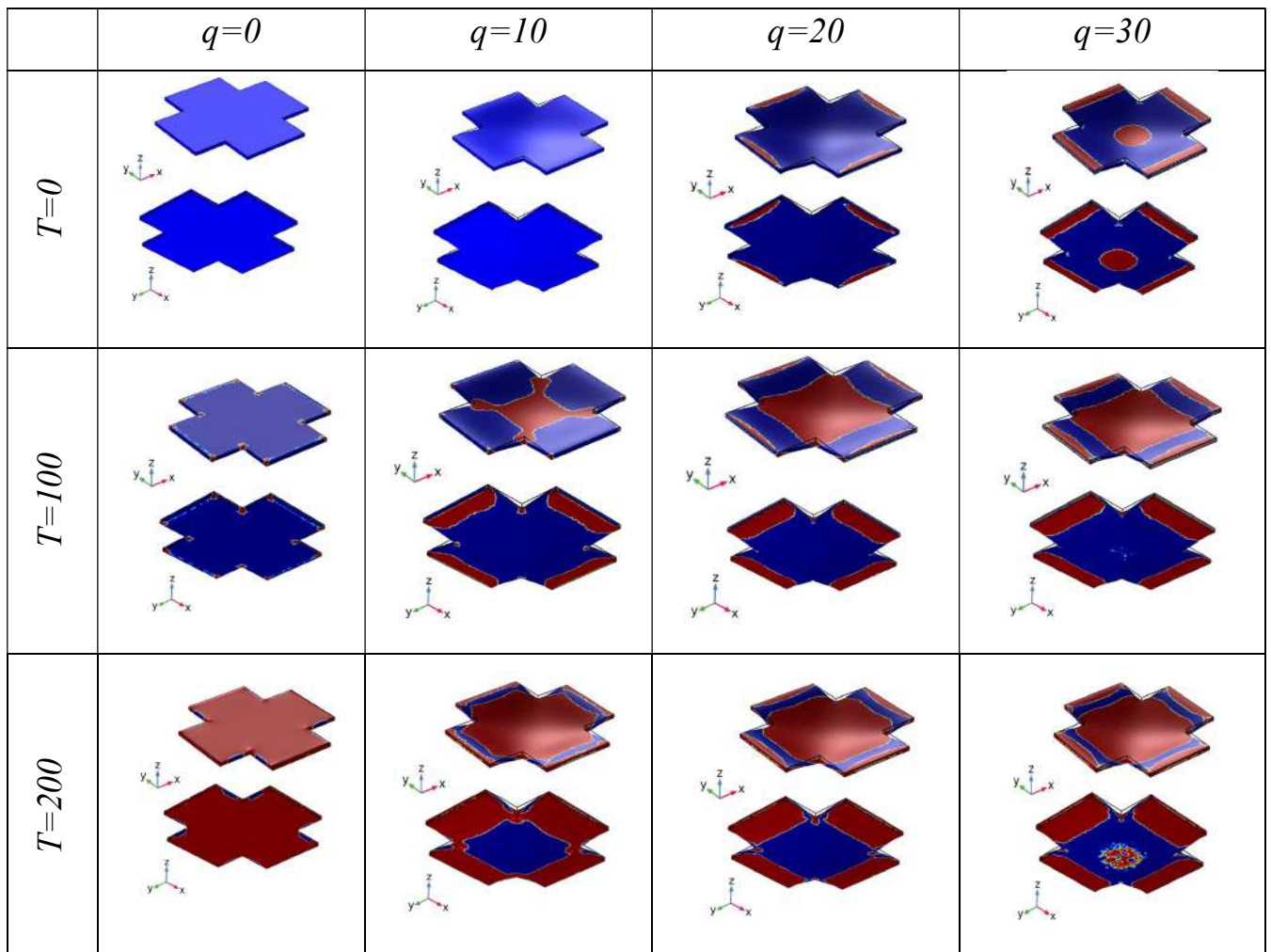


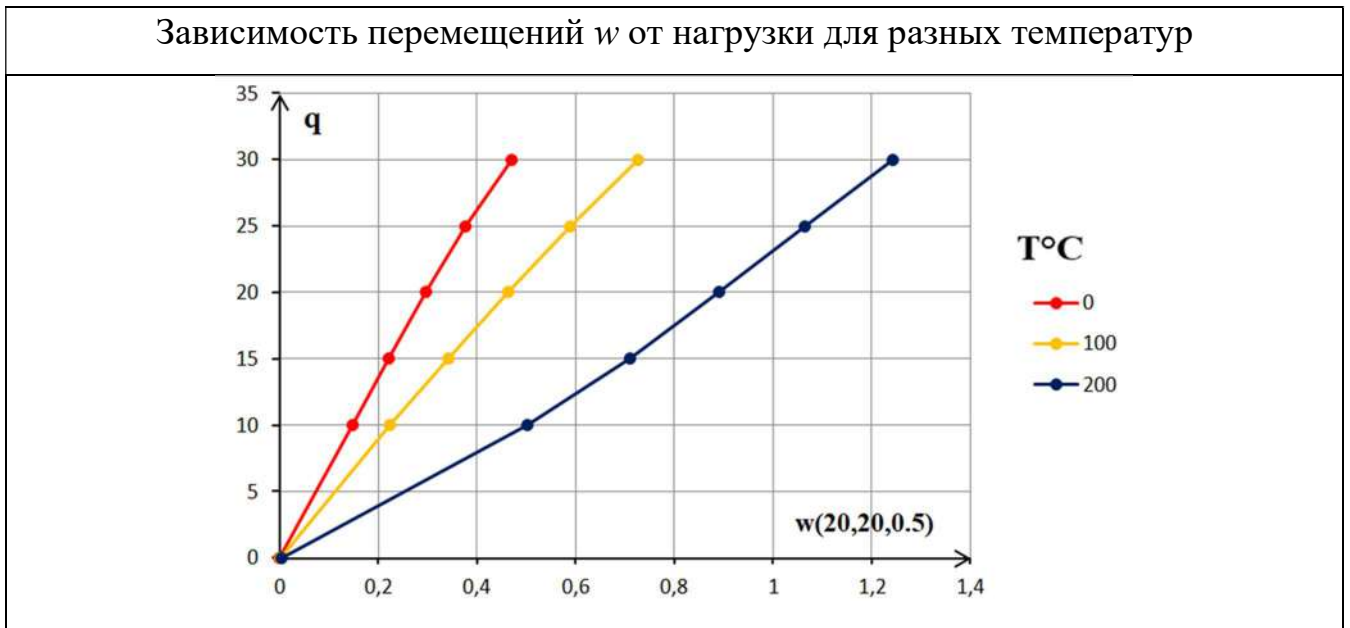
Рисунок 1.11 – Зависимость интегральной величины перемещений w по объёму пластины от количества конечных элементов

В таблице 1.3 приведены поля распределений w по объёму для термического и термомеханического воздействия.

Таблица 1.3 – Поля распределений w по объему

В таблице 1.4 приведены упругопластические деформации и зависимость перемещений w от нагрузки для разных температур пластинки с четырьмя отверстиями. Красный цвет означает зоны упругопластических деформаций, синий – их отсутствие.

Таблица 1.4 – Упругопластические деформации и зависимость перемещений w от нагрузки для разных температур



1.3 Определение эффективных свойств композитов

1.3.1. Гомогенизация

Гомогенизация в одномерном случае

Начнем с одномерного примера. Рассмотрим растяжение упруго стержня с модулем Юнга E и смещением $u(x)$. Балка неоднородна: $E = E(x)$. Пусть левый конец стержня зажат, $u(0) = 0$, и усилие P приложено на правом конце. Истинные смещения минимизируют функционал.

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^L E(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - Pu(L). \quad (1.19)$$

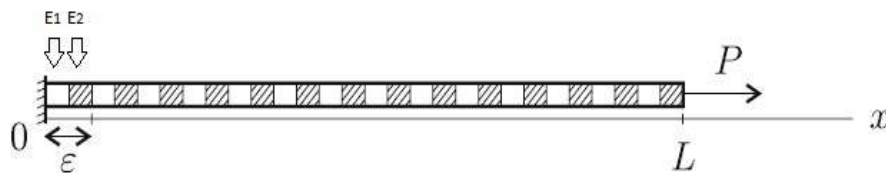


Рисунок 1.12 – Обозначения для стержня с периодической микроструктурой

Минимизирующая функция является решением граничной задачи:

$$\frac{d}{dx} E(x) \frac{du}{dx} = 0, u(0) = 0, E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P. \quad (1.20)$$

Эта задача может быть решена аналитически:

$$E(x) \frac{du}{dx} = P, u(x) = P \int_0^x \frac{dx}{E(x)}. \quad (1.21)$$

Пусть стержень является периодической микроструктурой, как показано на рисунке 1.12 последовательность чередующихся коротких стержней с двумя разными модулями Юнга. Предполагается, что длина периодической ячейки ε значительно меньше, чем длина стержня L , мы можем ввести среднюю деформацию γ как общее относительное удлинение балки:

$$\gamma = \frac{u(L)}{L} \quad (1.22)$$

и определить эффективный модуль Юнга E_{eff} соотношением

$$P = a_{eff} \gamma. \quad (1.23)$$

Согласно точному решению, константа E_{eff} имеет вид

$$E_{eff} = \left(\frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{E(x)} \right)^{-1}. \quad (1.24)$$

Также можно вычислить минимальное значение функционала (1.19). С помощью теоремы Клапейрона имеем

$$\check{I} = -\frac{1}{2} Pu(L) = -\frac{1}{2} P^2 \int_0^L \frac{dx}{E(x)} = -\frac{1}{2} \frac{P^2}{E_{eff}} L. \quad (1.25)$$

Это число \check{I} может также быть получено в качестве минимального значения «гомогенизированного» функционала однородной упругой балки с эффективным модулем Юнга E_{eff} и гомогенизированным смещением $v(x)$:

$$\check{I} = \min_{\substack{v(x): \\ v(0)=0}} \bar{I}(v), \quad (1.26)$$

$$\bar{I}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L E_{eff} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - Pv(L).$$

Прямой подстановкой может быть проверено, что минимизирующая функция в вариационной задаче (1.19) имеет вид

$$v(x) = \frac{P}{E_{eff}} x. \quad (1.27)$$

Совпадение минимальных значений в вариационных задач (1.19) и (1.26) не является случайным. Для выявления причины рассмотрим более внимательно на характер минимизирующей функции (1.27).

Модуль Юнга $E(x)$, и, таким образом, податливость $E^{-1}(x)$ являются периодическими функциями с периодом ε . Интеграл $\int_0^x \frac{dx}{E(x)}$, вычисленный в точках $x_k = k\varepsilon, k = 1, 2, 3 \dots$, равен $\int_0^{k\varepsilon} \frac{dx}{E(x)} = k \int_0^\varepsilon \frac{dx}{E(x)}$.

Очевидно, что из-за периодичности $E(x)$

$$\int_0^\varepsilon \frac{dx}{E(x)} = \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{dx}{E(x)} = \varepsilon \frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{E(x)} = \frac{\varepsilon}{E_{eff}}. \quad (1.28)$$

Здесь мы предположили, что существует целое число клеток в стержне (т. е. L/ε это целое число). Если есть неполные ячейки и L/ε не целое число, то (1.28) содержит небольшую ошибку порядка ε/L , которой можно пренебречь в первом приближении. Таким образом

$$u(x_k) = P \int_0^{k\varepsilon} \frac{dx}{E(x)} = k\varepsilon \frac{P}{E_{eff}}. \quad (1.29)$$

Производная du/dx положительна. Таким образом, между точками x_k и x_{k+1} перемещение монотонно возрастает от значения $k\varepsilon P/E_{eff}$ к значению $(k+1)\varepsilon P/E_{eff}$. В точках $k\varepsilon$, значения $u(x)$ и $v(x)$ совпадают. Качественные графики $u(x)$ и $v(x)$ показаны на рисунке 1.13. Мы видим, что $u(x)$ является быстро осциллирующей функцией, она сильно не отклоняется от медленно меняющейся функции $v(x)$:

$$u(x) = v(x) + \tilde{u}(x). \quad (1.30)$$

Корректирующее слагаемое $\tilde{u}(x)$ вычисляется так:

$$\tilde{u}(x) = P \int_0^x \frac{dx}{E(x)} - x \frac{P}{E^e}. \quad (1.31)$$

Функция $\tilde{u}(x)$ является периодической функцией с периодом ε . Если мы уменьшаем ε , $v(x)$ не меняется, в то время как $\tilde{u}(x)$ уменьшается: она имеет порядок ε в первом приближении $u(x) \approx v(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако это не верно для производной:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} + \frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{P}{E_{eff}} + P \left(\frac{1}{E(x)} - \frac{1}{E^e} \right). \quad (1.32)$$

Мы видим, что производные $u(x)$ имеют не одинаковый порядок с производной $v(x)$.

То же самое можно заметить на рисунке 1.13.

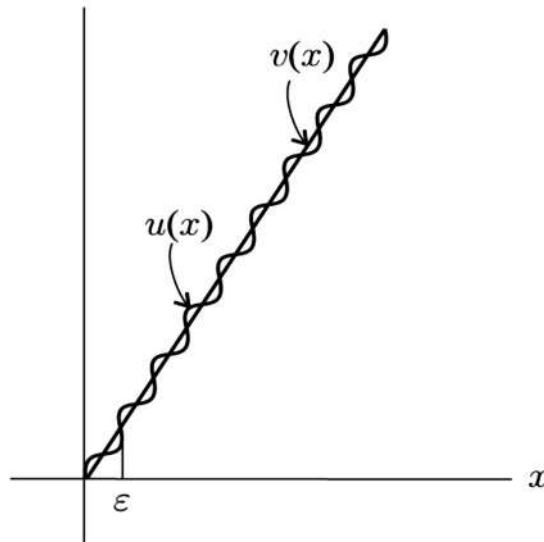


Рисунок 1.13 – Качественная зависимость истинного и усредненного смещения, $u(x)$ и $v(x)$, от координаты

Теперь у нас есть все необходимое для получения «усредненного» функционала (1.26) непосредственно из (1.19). Функционал (1.19) можно записать в виде

$$I(u) = \sum_k \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} E(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2. \quad (1.33)$$

Будем искать минимизирующую функцию для данного функционала в форме (1.30) где $v(x)$ имеет постоянную производную в каждой ячейке, в то время как $u'(x)$ является периодической функцией. Затем на каждой ячейке получим ту же вариационную задачу – задачу на ячейке:

$$\min_{u'(0)=u'(\varepsilon)} \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon E(x) \left(v_x + \frac{d\tilde{u}}{dx} \right)^2 dx, v_x \equiv \frac{dv}{dx}. \quad (1.34)$$

Для $v_x = \text{const}$ минимизирующая функция удовлетворяет краевой задаче:

$$\frac{d}{dx} E(x) \left(v_x + \frac{du'}{dx} \right) = 0, u'(0) = u'(\varepsilon). \quad (1.35)$$

Из дифференциального уравнения получаем:

$$E(x) \left(v_x + \frac{du'}{dx} \right) = \lambda = \text{const}. \quad (1.36)$$

Значение константы λ определяется из периодических условий:

$$E(x) \left(v_x + \frac{du'}{dx} \right) = \lambda = \text{const}. \quad (1.37)$$

Подставляя (1.34) в (1.33), заменяя сумму на интеграл по x и $u(L)$ – на $v(L)$ (они отличаются на небольшую величину порядка ε), приходим к функционалу (1.26).

Таким образом, получается, что эта процедура отыскания усредненного функционала может быть использована для многих неоднородных сред с периодической микроструктурой.

Среды с периодической структурой в двумерном случае

Примерами сред с периодической структурой являются многие композиционные материалы. Композиционный материал имеет периодически повторяющуюся структуру (рисунок 1.14), образованную набором минимальных элементов, называемых периодическими ячейками.

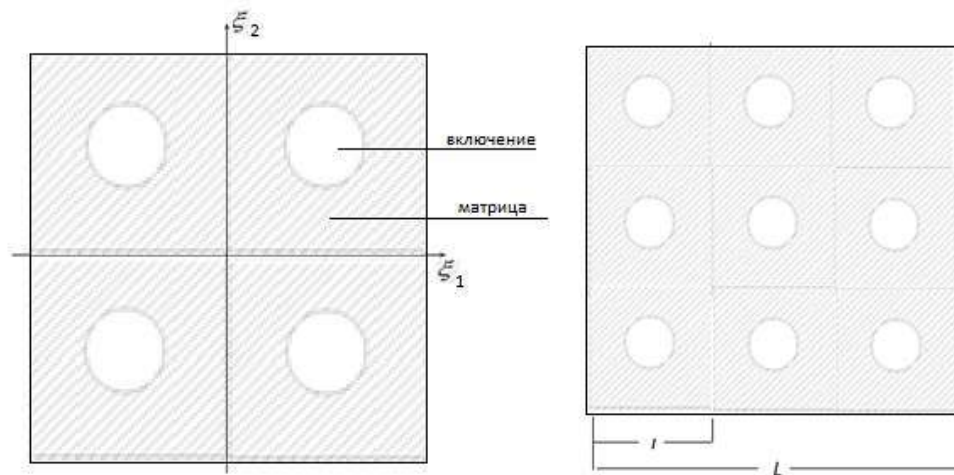


Рисунок 1.14 – Пример периодической ячейки

Введем L – характерный размер занятой композитом области, и l – характерный размер периодической ячейки. С учетом того, что

$$L^2 = l^2 N, \quad (1.38)$$

где N – число ячеек периодичности, которое предполагается большим ($N \gg 1$), можно ввести малый параметр

$$\varepsilon = l/L \ll 1. \quad (1.39)$$

Если ячейка периодичности представляет собой не квадрат, а прямоугольник с длиной сторон $l_1 = l, l_2$, и характерные рамеры всего композита по координатным направлениям составляют $L_1 = L, L_2$, то количество периодических ячеек равно:

$$N = \frac{L_1 L_2}{l_1 l_2}. \quad (1.40)$$

Малый параметр ε в этом случае связан с числом N соотношением:

$$\varepsilon = \frac{l}{L} = \frac{L_2}{l_2} \frac{1}{N}. \quad (1.41)$$

Определение эффективного тензора упругих свойств ПЯ

В работе делаются следующие предположения: композит является линейно упругим, макроскопически трансверсально изотропным, как по механическим, так и тепловым параметрам. Начальные напряжения отсутствуют; включения являются однородными, линейно упругими, изотропными и регулярно

упакованными; матрица является: однородной; линейно упругой, изотропной по механическим и тепловым параметрам.

Для композитов, состоящих из линейных упругих материалов, определяющие дифференциальные уравнения для гомогенного и микроструктурного представительного элемента состоят из линейных уравнений упругости.

В упругом режиме макроскопическое поведение элементарной периодической ячейки из анизотропного материала можно охарактеризовать эффективным тензором напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ и тензором деформации $\bar{\varepsilon}_{ij}$ гомогенизированной среды. Они связаны между собой с помощью эффективного тензора упругости C_{ijkl}^e

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \bar{\varepsilon}_{kl}, \quad (1.42)$$

где C_{ijkl}^e зависит от объемной доли наполнителя и микроструктуры элементарной ячейки.

Введем локальную систему координат (Y) для описания быстрых изменений свойств материала микроструктуры в глобальной системе координат (X) на макро-шкале. Локальную координату y можно рассматривать в качестве быстрой координаты, которая связана с x соотношением $y = x/\varepsilon, (\varepsilon \ll 1)$. Смещение произвольной материальной точки в упругом теле можно аппроксимировать двух масштабным асимптотическим разложением [11]

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (1.43)$$

Подставляя в уравнения равновесия, получаем тензор эффективных упругих свойств в виде

$$C_{ijkl}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(C_{ijkl} - C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) dY, \quad (1.44)$$

где $|Y|$ обозначает площадь элементарной ячейки, χ_p^{kl} – периодическое поле допустимых смещений для случая нагружения kl [11] и удовлетворяющее

следующему интегральному уравнению на элементарной периодической ячейке с периодическими граничными условиями

$$\int_Y C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y C_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY, \quad \forall \mathbf{v} \in Y. \quad (1.45)$$

Здесь \mathbf{v} является кинематически допустимым произвольным полем смещения.

Задача (1.45) решается в дальнейшем на элементарной ячейке методом конечных элементов. Вдоль границ различных фаз задаются соответствующие условия сопряжения. Для задачи о плоском напряженном состоянии существуют два независимых случая нагружения с $kl = 11, 12$. Уравнение (1.44) может быть теперь записано в виде

$$C_{ijkl}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(C_{ijkl} - C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) dY = \langle C_{ijkl} \rangle - \langle \sigma_{ij}^{kl} \rangle, \quad (1.46)$$

где $\langle C_{ijkl} \rangle$ обозначает усредненный упругий тензор, зависящий от объемной доли материала, оценка которого составлена по классическому правилу смеси, и $\langle \sigma_{ij}^{kl} \rangle$ обозначает усредненный тензор напряжений на элементарной ячейке в случае нагрузки kl . Очевидно, $\langle \sigma_{ij}^{kl} \rangle$ является корректирующим слагаемым, отражающим влияние микроструктуры материала элементарной ячейки. Формула (1.36) может быть записана в виде

$$C_{ijkl}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y C_{pqrs} (\varepsilon_{pq}^{0(ij)} - \varepsilon_{pq}^{*(ij)}) (\varepsilon_{rs}^{0(kl)} - \varepsilon_{rs}^{*(kl)}) dY, \quad (1.47)$$

где $\varepsilon_{pq}^{*(ij)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi_p^{ij}}{\partial y_q} + \frac{\partial \chi_q^{ij}}{\partial y_p} \right)$ и $\varepsilon_{pq}^{0(ij)}$ линейно независимые тестовые деформации на базовой ячейке, применяемые для определения характеристик поля деформаций $\varepsilon_{pq}^{*(ij)}$. Здесь χ^{ij} решение следующей задачи на элементарной ячейке периодичности

$$\int_Y (\varepsilon_{pq}^{0(ij)} - \varepsilon_{pq}^{*(ij)}) C_{pqrs} \varepsilon_{rs}^*(v^{kl}) dY \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_Y \quad (1.48)$$

и $\mathbf{V}_Y = \mathbf{v}(\mathbf{y})$ множество достаточно гладких функций определенных в Y и являющихся Y периодическими.

Для двумерной задачи необходимо три тестовых поля деформаций, которые принимают форму $\varepsilon_{pq}^{0(11)} = [1 \ 0 \ 0]$, $\varepsilon_{pq}^{0(22)} = [0 \ 1 \ 0]$ и $\varepsilon_{pq}^{0(12)} = [0 \ 0 \ 0,5]$. В силу симметричности $\varepsilon_{pq}^{0(12)} = \varepsilon_{pq}^{0(21)}$ количество тестовых полей снижается с четырех до трех.

Рассмотрим двумерную элементарную периодическую ячейку симметричной микроструктуры (рисунок 1.15 а) для изотропного материала. Для плоского напряженного состояния систему уравнений можно записать следующим образом

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^e & C_{1122}^e & 0 \\ C_{1122}^e & C_{1111}^e & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

Для изотропного материала гомогенизированный упругий тензор C_{ijkl}^e имеет три компоненты $C_{1111}^e, C_{1122}^e, C_{1212}^e$. Если начальная деформация ε^0 задается в направлении x ($\varepsilon_{11}^0 = 1, \varepsilon_{12}^0 = 0, \varepsilon_{22}^0 = 0$), то из уравнения (1.49) получаем

$$C_{1111}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y (C_{1111} - C_{1111} \varepsilon_{11}^{*(11)} - C_{1122} \varepsilon_{22}^{*(11)}) dY. \quad (1.50)$$

Рассматривая начальные напряжения ε^0 в направлении y ($\varepsilon_{11}^0 = 0, \varepsilon_{12}^0 = 0, \varepsilon_{22}^0 = 1$) для определения C_{1122}^e имеем

$$C_{1122}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y (C_{1122} - C_{1111} \varepsilon_{11}^{*(22)} - C_{1122} \varepsilon_{22}^{*(22)}) dY. \quad (1.51)$$

Если мы рассматриваем сдвиговые начальные напряжения ε^0 ($\varepsilon_{11}^0 = 0, \varepsilon_{12}^0 = 0,5, \varepsilon_{22}^0 = 0$), то из выражения (1.48) следует

$$C_{1212}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y (C_{1212} - 2C_{1212} \varepsilon_{12}^{*(12)}) dY. \quad (1.52)$$

Теперь из (1.48-1.52) получаем:

$$K^e = (C_{1111}^e + C_{1122}^e) / 2, \quad G^e = C_{1212}^e / 2, \quad (1.53)$$

где K^e – эффективный объемный модуль, G^e – эффективный модуль сдвига.

На характеристические поля смещений χ необходимо наложить соответствующие периодические граничные условия. Однако в случае, когда

периодическая ячейка обладает симметрией, условия периодичности можно заменить более обычными граничными условиями. Так, если композиционный материал состоит из изотропных компонентов, а периодическая ячейка имеет симметрию по двум осям, то задача (1.38) сводится к задаче на четверти ячейки. В случае плоского напряженного состояния для четвертой части элементарной ячейки, как это показано на рисунке 1.15, эти граничные условия [130] для характеристической функции можно записать в виде: для случая нагрузки $i = j$ (1 или 2) на $y_1 = 0, y_1 = Y_1 \quad \chi_1^{(ij)} = 0$ и на $y_2 = 0, y_2 = Y_2 \quad \chi_2^{(ij)} = 0$ (рисунок 1.15 б); для случая нагрузки $ij = 12$ (или 21) на $y_1 = 0, y_1 = Y_1 \quad \chi_2^{(12)} = 0$ и на $y_2 = 0, y_2 = Y_2 \quad \chi_1^{(12)} = 0$ (рисунок 1.15 в).

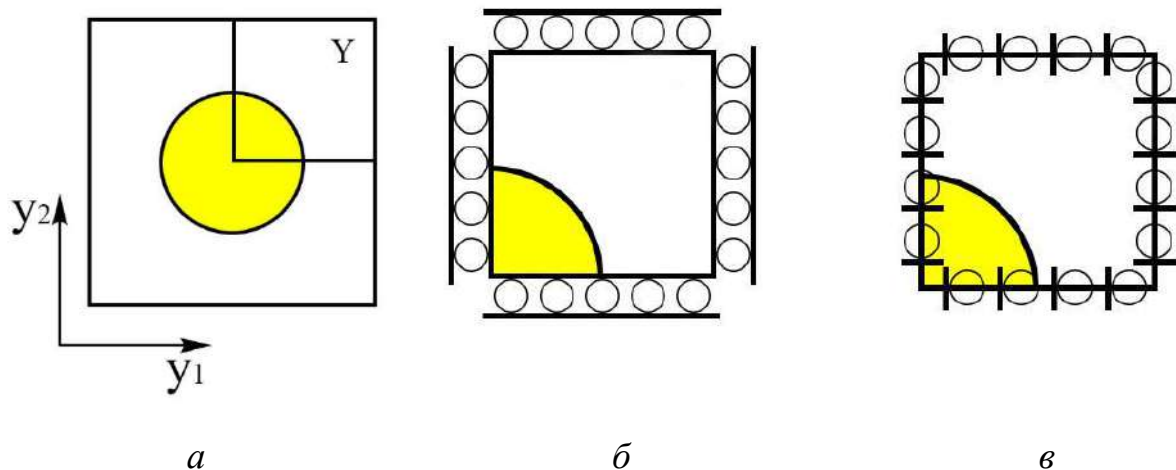


Рисунок 1.15 – Элементарная периодическая ячейка композита:
 а) область топологической оптимизации Y и граничные условия
 для случаев б), в) на четверти базовой ячейки

Для проверки достоверности полученного метода вычисления эффективных характеристик композиционного материала было проведено сравнение с результатами вычислений из [26], а также [142]. Характеристики материалов и форма включений в периодической ячейке были взяты из этих источников. В статье [26] результаты были получены для материала с модулем Юнга материала матрицы 3,5 ГПа, включения – 35,4 ГПа, коэффициентом Пуассона для матрицы – 0,38, включения – 0,2 для представительной ячейки, показанной на рисунке 1.16.

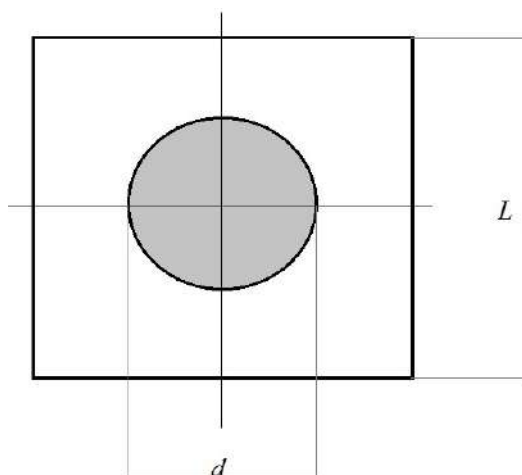


Рисунок 1.16 – Представительная ячейка

Размеры представительной ячейки $d = 10^{-6}$ м, $L = 2 \cdot 10^{-6}$ м, что соответствует концентрации включения $\varphi = 0,2$. Проводились вычисления на 1/4 данной ячейки. В таблице 1.5 представлены результаты вычислений по методу гомогенизации и результаты, приведенные авторами статьи.

Таблица 1.5 – Сравнение результатов вычисления эффективных характеристик

	$E_1^*, \text{ГПа}$	$E_2^*, \text{ГПа}$	$E_3^*, \text{ГПа}$	ν_{12}^*	ν_{23}^*	ν_{31}^*	$G, \text{ГПа}$
Результат из [26]	9,7	5,27	5,27	0,34	0,48	0,48	1,65
Полученный результат	9,7	5,244	5,242	0,344	0,463	0,463	1,65

Погрешность вычислений для модуля Юнга составляет 0,5%.

В статье [142] рассматривается композит с элементами включений двух различных материалов. Основной материал композита – эпоксидная смола, материал включений – глина и резина. Характеристики основного материала и материалов включений приведены в таблице 1.6.

Таблица 1.6 – Характеристики основного материала и материалов включений

	Эпоксидная смола	Резина	Глина
$E, \text{ГПа}$	2,86	0,6	175
ν	0,35	0,49	0,2

Пример 1/4 расчетной ячейки материала изображен на рисунке 1.16.

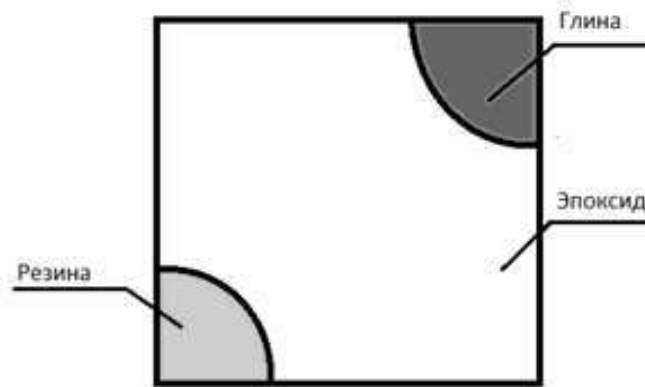


Рисунок 1.17 – Расчетная ячейка для композита с включениями из различных материалов

Были проведены 2 исследования, аналогичные приведенным в [142]. В первом случае возьмем концентрацию включения из глины $\varphi_{\text{гл}} = 0,1$, в это же время концентрацию включения из резины будем менять в пределах $\varphi_{\text{рез}} = 0; 0,05 \dots 0,2$. Для каждого случая рассчитаем трехмерные эффективные характеристики: модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Аналогичное исследование проведем для фиксированной концентрации включения из резины $\varphi_{\text{рез}} = 0,06$, и изменяющейся концентрации глины в пределах $\varphi_{\text{гл}} = 0; 0,05 \dots 0,2$. Полученные в ходе расчетов значения модулей приведены в таблице 1.6.

Таблица 1.6 – Полученные в ходе расчетов значения модулей

$\varphi_{\text{гл}} = 0,1$			$\varphi_{\text{рез}} = 0,06$		
$\varphi_{\text{рез}}$	E , ГПа	ν	$\varphi_{\text{гл}}$	E , ГПа	ν
0	3,299	0,348	0	2,622	0,371
0,05	2,97	0,37	0,05	2,76	0,375
0,1	2,67	0,39	0,1	2,9	0,379
0,15	2,4	0,41	0,15	3,053	0,383
0,2	2,155	0,425	0,2	3,213	0,387

На рисунке 1.18 изображены зависимости эффективного модуля Юнга от концентрации включения резины, полученные в результате вычислений и приведенные в статье [142].

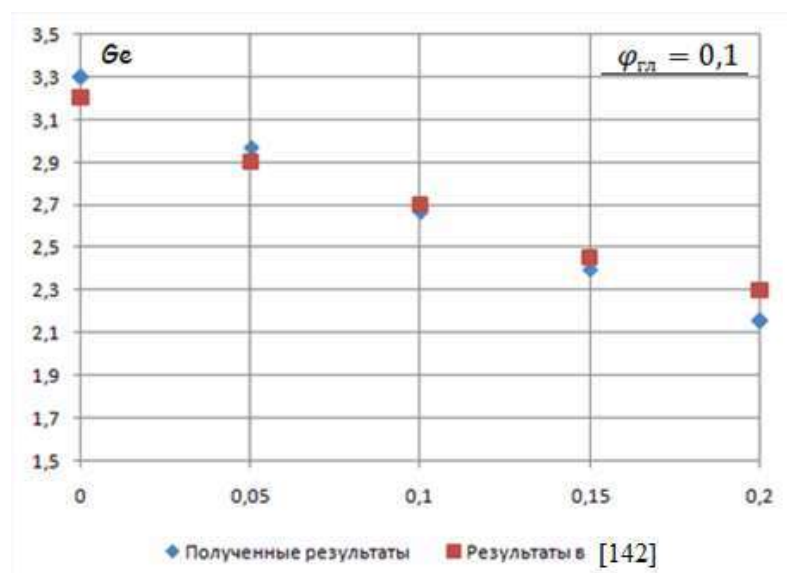


Рисунок 1.18 – Зависимости коэффициента модуля Юнга от концентрации резины

Зависимости модуля Юнга от концентрации включения глины при фиксированной концентрации резины, полученные в ходе исследования и приведенные в статье представлены на рисунке 1.19.

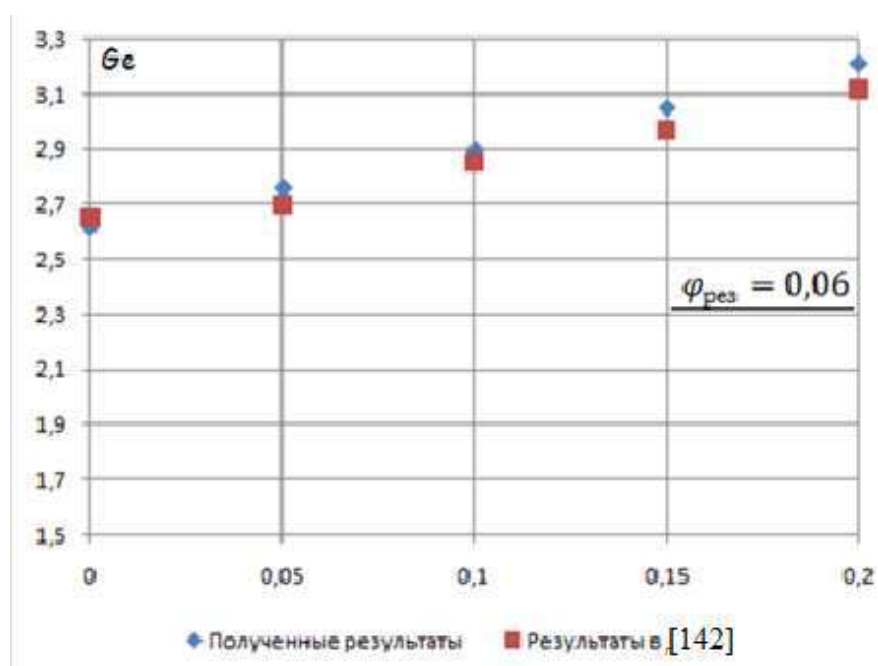


Рисунок 1.19 – Значения коэффициента модуля Юнга в зависимости от концентрации глины

Как видно из рисунков 1.18 и 1.19, полученные результаты достаточно близки с результатами, приведенными в исходном источнике.

1.3.2 Исследование эффективных упругих характеристик материала с включением кольцевой формы

Рассмотрим композиционного материала с включением кольцевой формы. Пример расчетной ячейки такого материала представлен на рисунке 1.20. На рисунке 1.21 показано разбиение представительной ячейки материала на конечные элементы. Были построены модели для включений кольцевой формы одинаковой концентрации, но различного диаметра колец включения.

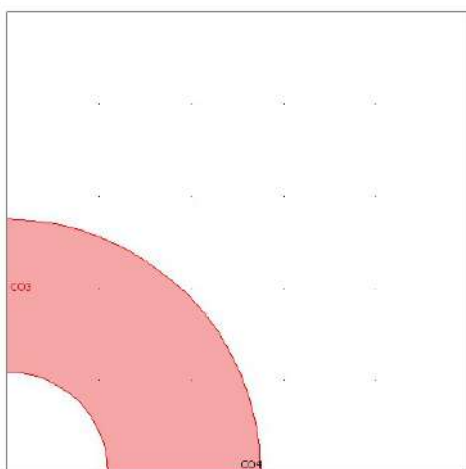


Рисунок 1.20 – Расчетная ячейка для материала с включениями кольцевой формы

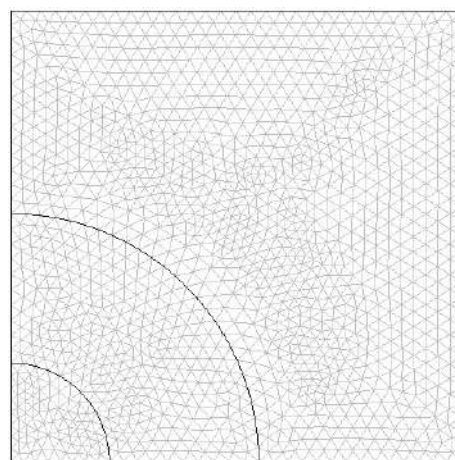


Рисунок 1.21 – Разбиение ячейки на конечные элементы

Для исследования были взяты материалы матрицы и включения со следующими характеристиками: модуль Юнга – 1,53 ГПа для матрицы и 1000 ГПа для включения, коэффициент Пуассона для матрицы – 0,45, для включения 0,27. Все вычисления были произведены для концентрации кольца включения $\varphi = 0,2$.

Покажем на рисунке 1.22 напряженное состояние материала при решении задачи с граничными условиями с рисунка 1.15 б, назовем ее задачей 1, а также с граничными условиями с рисунка 1.15 в, назовем ее задачей 2.

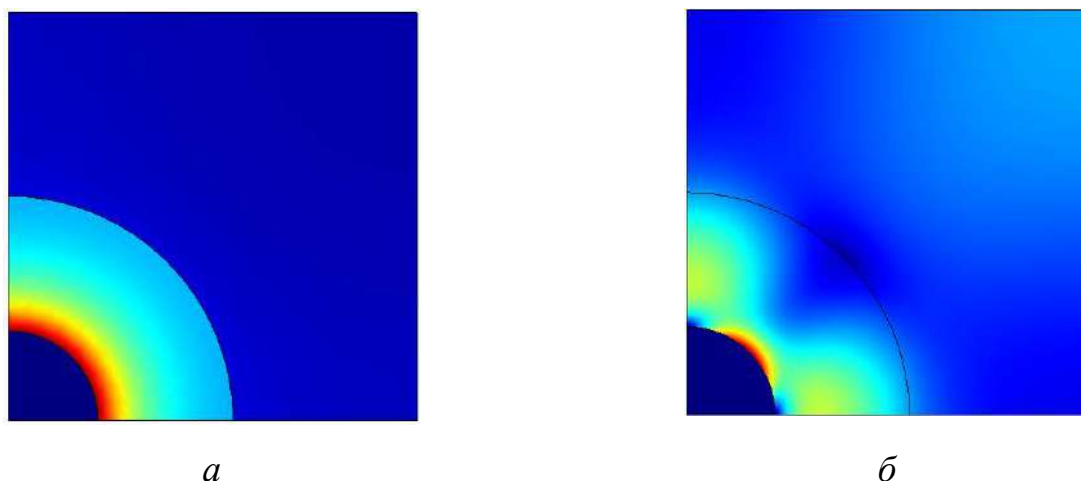


Рисунок 1.22 – Напряженное состояние для задачи 1 (*a*) и для 2 (*б*)

В таблице 1.7 приведена зависимость упругих характеристик материала от внешнего радиуса кольца включения.

Таблица 1.7 – Зависимость упругих характеристик материала от внешнего радиуса кольца включения

Радиус	E^e	ν^e	k^e	G^e
0,55	2,746	0,446	7,253	0,76
0,6	2,287	0,43	7,815	0,8
0,65	2,507	0,448	8,494	0,866
0,7	2,7	0,449	9,388	0,932
0,8	3,215	0,45	11,562	1,088
0,9	4,075	0,451	15,026	1,404
1	14	0,389	24,24	5,04

Как видно из таблицы 1.7 при увеличении радиуса кольца включения эффективные характеристики материала возрастают, а при соединении колец и образовании сплошной структуры (при радиусе $R = 1$) происходит резкое увеличение этих характеристик.

1.3.3 Влияние формы включения на эффективные упругие характеристики материала

Эффективные модули композиционного материала E^e, G^e, ν^e, k^e были получены для включений различной формы при концентрации включения $\varphi = 0,2$, модуля Юнга матрицы 5 ГПа, включения – 4000 ГПа, коэффициента Пуассона для матрицы – 0,25, включения – 0,33.

На рисунке 1.23 для некоторых из исследуемых структур изображены представительные ячейки, а на рисунке 1.24 представлено их разбиение на конечные элементы.



Рисунок 1.23 – Примеры представительных ячеек для материала с включениями различной формы

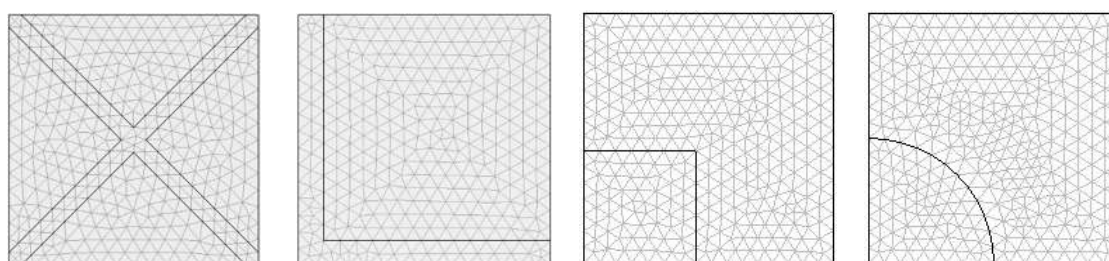


Рисунок 1.24 – Разбиение ячеек на конечные элементы

На рисунке 1.25 приведены примеры напряженных состояний этих структур для задач, необходимых для определения упругих характеристик материала (задачи 1 и задачи 2).

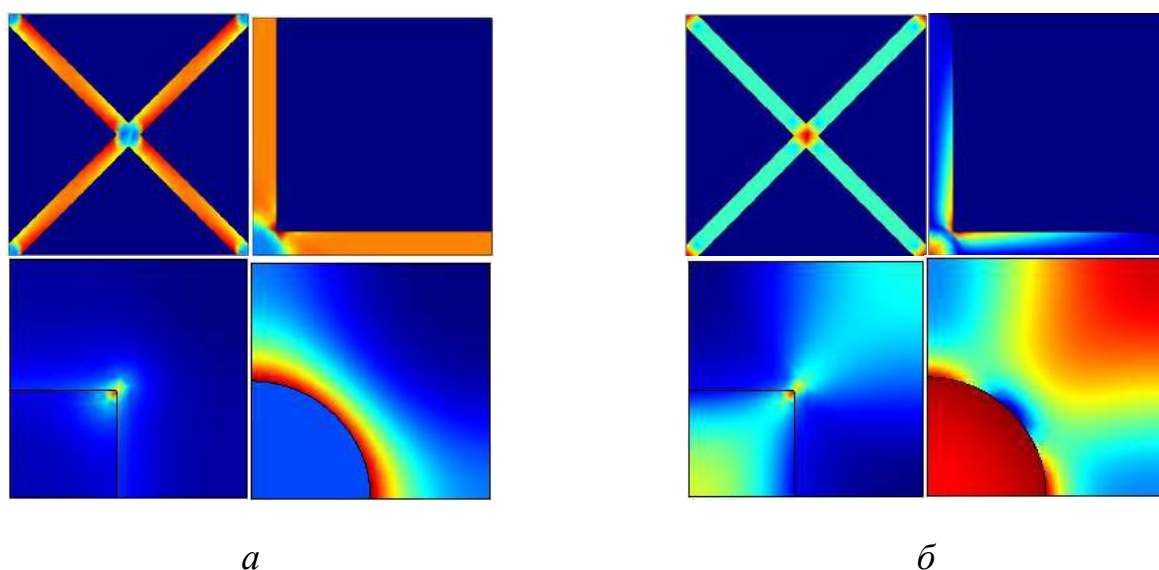
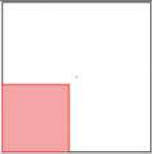
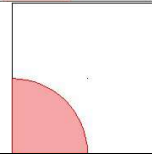

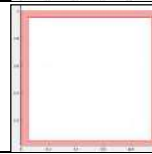
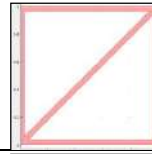
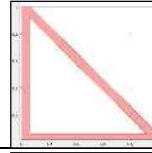
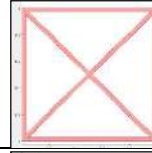
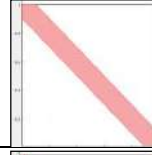
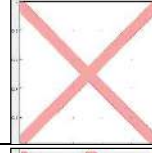
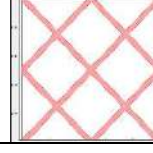


Рисунок 1.25 – Напряженное состояние для задачи 1 (а) и для задачи 2(б)

В таблице 1.8 приведены результаты вычислений эффективных модулей для включений с различной микроструктурой.

Таблица 1.8 – Значения эффективных характеристик для структур различной формы

№	Структура	E^e	G^e	ν^e	k^e
1		7,153	2,65	0,35	5,5
2		7,08	2,62	0,351	5,45
3		19,26	4,925	0,955	220,6
4		19,57	5,005	0,956	200,8
5		199,13	64,4	0,546	195,1
6		251,04	92,53	0,357	220,61
7		269,43	97,2	0,386	221,8
8		438,08	217,5	0,007	219,3
9		438,3	217,75	0,0065	219,3
10		438,1	217,5	0,0072	221,1

Как видно из таблицы 1.8, у структур, которые содержат диагональные элементы во включениях (5-10), значения упругих характеристик в несколько раз выше, чем у остальных структур (1-4), которые обычно применяются при армировании материалов. Так же можно отметить, что структуры, имеющие отдельные элементы включений (1-2), по сравнению с материалами со сплошной сеткой включений, имеют более слабые характеристики. Эти факты могут быть использованы для проектирования композиционных материалов.

1.3.4 Определение эффективного коэффициента теплопроводности

Для расчета эффективного коэффициента теплопроводности элементарной периодической ячейки применяется метод гомогенизации, в котором гомогенизированные выражения могут быть получены из уравнений теплопроводности. По [47] эффективный коэффициент теплопроводности может быть определен в следующей форме

$$k_{ij}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y (k_{ij}(y) - k_{ij}(y)_j \frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}) dY = \frac{1}{|Y|} \int_Y k_{ij}(y) (I - \frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j}) dY, \quad (1.51)$$

с локальной координатой y .

Если обозначить $I - \frac{\partial \zeta_i}{\partial y_j} = \frac{\partial T_i}{\partial y_j}$, то, аналогично схеме, используемой для интерполяции локального тензора жесткости, характеристическая функция T_i – является решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[k_{ij}(y) \frac{\partial T_i}{\partial y_j} \right] = 0. \quad (1.52)$$

Тогда эффективный тензор теплопроводности (1.51) для изотропного материала с коэффициентом теплопроводности $k(y_1, y_2)$ может быть записан в виде

$$k_{ij}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y k(y_1, y_2) \frac{\partial T_j}{\partial y_i} dY. \quad (1.53)$$

Для двумерной ячейки тензор эффективной термической проводимости представляется как

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & 0 \\ 0 & k_{22}^e \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Таким образом, для измерения общей эффективной проводимости материала может служить выражение

$$\text{tr}(\mathbf{k}^e) = k_{11}^e + k_{22}^e. \quad (1.55)$$

Граничные условия для характеристических функций T_i приведены на рисунке 1.26 а, б, и имеют вид:

$$\text{для } k_{11}^e \quad T_1(0, y_2) = 0; T_1(1, y_2) = 1; \frac{\partial T_1}{\partial y_1}(y_1, 0) = \frac{\partial T_1}{\partial y_1}(y_1, 1) = 0;$$

$$\text{для } k_{22}^e \quad T_2(y_1, 0) = 0; T_2(y_1, 1) = 1; \frac{\partial T_2}{\partial y_2}(0, y_2) = \frac{\partial T_2}{\partial y_2}(1, y_2) = 0.$$

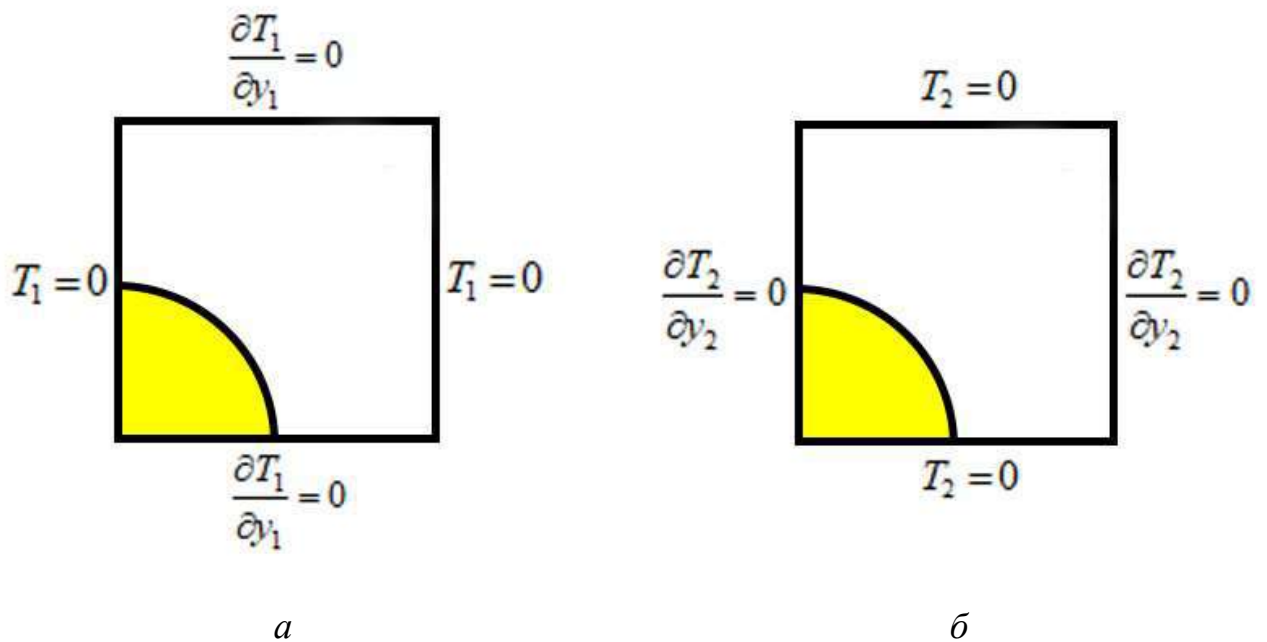


Рисунок 1.26 – Граничные условия для задач теплопроводности *a*, *б*

ГЛАВА 2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ

2.1 Общая постановка задачи топологической оптимизации

Проблема структурной оптимизации описывается функциями целей поставленной задачи, связанными с ними ограничениями и переменными проектирования. Общая проблема структурной оптимизации формулируется так: «Минимизировать (или максимизировать) целевую функцию, подчиненную функциональным или геометрическим ограничениям».

Целевыми функциями или функциональными ограничениями могут являться следующие параметры:

- объем или вес структуры;
- стоимость материала или производства;
- глобальные оценки структурных характеристик, таких как жесткость, потеря устойчивости, частота свободных колебаний, динамический отклик и т. д.;
- локальные структурные реакции, такие как напряжение, деформация или смещение в установленных точках;
- максимальное напряжение, деформация или смещение во всей структуре, коэффициент интенсивности напряжений и т. д.

Для геометрических ограничений типичными являются следующие характеристики:

- производственные ограничения;
- возможность изготовления;
- физические ограничения.

Переменные проектирования определяются в процессе оптимизации. Они могут быть непрерывными или дискретными.

Структурную оптимизацию в области проектирования в соответствии с оптимизируемой переменной проектирования можно разделить на три типа: оптимизацию размеров, формы и топологическую оптимизацию.

Оптимизация размеров: в таких задачах оптимизации область структуры фиксируется в процессе оптимизации. Конструктивные переменные в допустимой области поиска могут быть дискретными или непрерывными.

Оптимизация формы. В задачах оптимизации форма области не фиксирована, но фиксировано внутреннее наполнение области, топология. Оптимизация формы используется при выборе оптимальной формы внешних или внутренних граничных поверхностей или кривых. Задачи такого типа включают в себя поиск границ структуры, определение местоположения отдельных областей структуры, поиск оптимальных значений параметров, определяющих срединную поверхность оболочечной структуры.

Топологическая оптимизация. В некоторых случаях применение методов оптимизации размеров и формы могут приводить к неточным результатам. Для решения этой проблемы, необходимо учитывать топологию структуры.

В отличие от метода оптимизации формы или размера, начальная область проектирования в оптимизации топологии представляет собой универсальную конструкцию, например, в двумерных задачах это может быть прямоугольная пластина. Единственными известными величинами в задаче являются приложенные нагрузки, возможные условия закрепления, объем конструкции и, возможно, некоторые дополнительные ограничения, определенные проектировщиком. Физические размеры, форма и связь элементов структуры неизвестны.

Топология, форма и размер структуры не представлены стандартными параметрическими функциями. Эти функции представляют собой параметризацию тензора жесткости и требуют подходящего выбора этой параметризации, который привел бы к правильной разработке конструкции для оптимизации топологии [13]. Оптимизация топологии является наиболее сложной, но и наиболее интересной задачей среди трех типов задач структурной оптимизации.

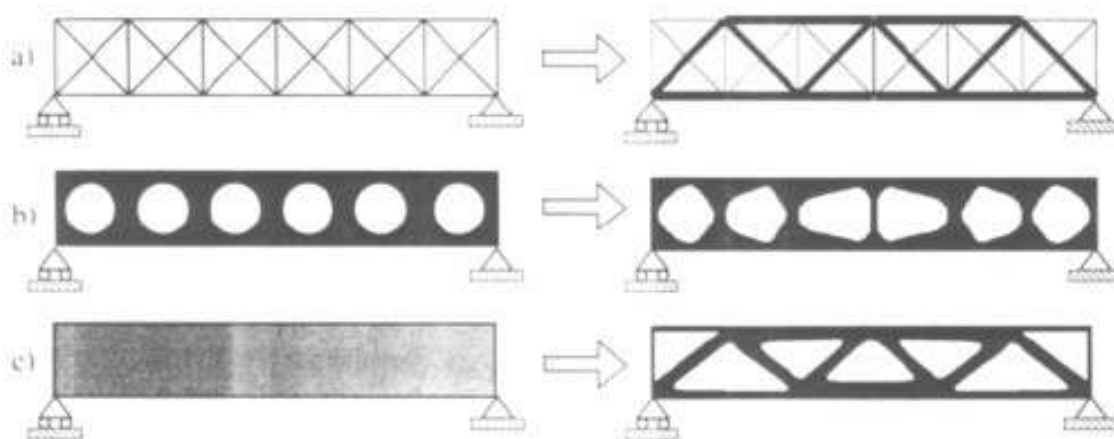


Рисунок 2.1 – Три типа структурной оптимизации:

- а) оптимизация размеров структуры фермы, б) оптимизация формы
и с) топологическая оптимизация структуры

Этимологически слово «топология» происходит от греческого существительного «*topos*», что означает местоположение, место, пространство или домен (область).

В работе [137] предложена эволюционная структурная оптимизация (ESO) для проектирования топологии на основе расчета градиента и удаления материала, который был расширен как двунаправленная эволюционная структурная оптимизация (BESO) [87].

В последнее время как эффективный подход в топологической оптимизации применяется метод уровней (Level set) [131]. В этом методе оптимизированная структура неявно представлена движущейся границей, встроенной в скалярную функцию (функцию набора уровней) большей размерности. Оптимальную топологию структуры можно получить путем изменения неявной движущейся границы.

Генетический алгоритм (GA) – метод оптимизации, основанный на теории естественного отбора [60, 77, 78] для проектирования топологии структур. В практических приложениях оптимизация топологии в основном вносит вклад в проектирование конструкций и материалов [84, 85].

2.2 Методы интерполяции материалов

В настоящее время наиболее широко используемыми методами интерполяции материалов для задач топологической оптимизации структур являются методы явной параметризации, которые известны как методы на основе плотности, которые включают методы SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) [16, 90, 91, 93, 113]. Они также используются в качестве моделей штрафов за плотность, чтобы подавить промежуточную плотность, когда оптимизация топологии трансформируется в непрерывную задачу оптимизации.

Эти методы работают на фиксированной области конечных элементов; однако вместо набора упругих свойств микроструктуры каждый конечный элемент содержит только одну проектную переменную. Эта переменная часто понимается как плотность материала элемента ρ . Свойства материала каждого элемента, например модули упругости или теплопроводность, являются функциями переменной плотности через заданные функции интерполяции. Критическим аспектом методов, основанных на плотности, является выбор подходящей интерполяционной функции и функции штрафа, чтобы связать физические величины задачи с непрерывными проектными переменными, в качестве которых выступает плотность.

Модель («*Solid Isotropic Material with Penalization*» – SIMP) была предложена Бендсе и Кикучи 1989 году [15]. Также в литературе модель SIMP часто называют «фиктивной плотности» моделью материала или интерполяционной схемой. Это было связано с трудностями физической интерпретации SIMP – материала с плотностью $0 < \rho < 1$.

Тензор упругости E_{ijkl} и объем материала, из которого выполнена структура, задаются

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0, \quad p > 1; \quad (2.1)$$

где $\rho(x), x \in \Omega, 0 \leq \rho(x) \leq 1$ – функция плотности материала; E_{ijkl}^0 – тензор упругости изотропного твердого эталонного материала.

Функция плотности $\rho(x)$ входит в выражение, определяющее жесткость в степени $p > 1$, что приводит к штрафование промежуточных плотностей $0 < \rho < 1$, поскольку при таких плотностях материал модели SIMP имеет меньшую жесткость, чем эталонный материал.

Например, для коэффициента Пуассона основного материала $\nu = 1/3$, как для 2D, так и для 3D задач, размер штрафа $p > 3$, гарантирует, что модель SIMP может быть физически реализована в рамках микро структурированных композиционных материалов. На рисунке 2.2 показана зависимость жесткостей E/E^0 от объемной плотности ρ при различных значениях штрафа p .

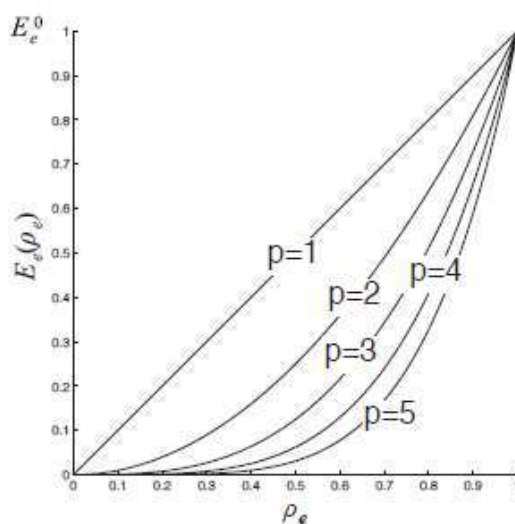


Рисунок 2.2 – Зависимость жесткость/объемная плотность для модели материала SIMP при различных значениях функции штрафа p

Этот рисунок иллюстрирует, что использование модели материала SIMP приведет к тому, что топологическое конструирование будет стремиться к предельным значениям $\rho = 0$ (пустота) и $\rho = 1$ (твердый материал). Недостатком модели SIMP является то, что полученные топологические конструкции демонстрируют зависимость не только от величины штрафа p , но и от применяемой сетки конечных элементов.

Эти недостатки исчезают при регуляризации задачи. В [41] показано, что задачи топологической оптимизации, основанные на модели SIMP, становятся

хорошо поставленными, если в формулировку задачи включить ограничение, например, на периметр или площадь поверхности.

Модель материала «Модифицированная твердая изотропная структура со штрафом» (*Modified Solid Isotropic Material with Penalization (ModSIMP)*) основана на тех же принципах, что и модель SIMP, и штрафует промежуточные значения переменной проектирования ρ_e .

$$E_e(\rho_e) = E_{min} + \rho_e^p (E_e^0 - E_{min}), \quad 0 \leq \rho_e \leq 1 \quad (2.2)$$

где E_{min} – очень малая плотность, назначаемая пустым элементам для того, чтобы исключить сингулярность, связанную с дискретизацией конечного элемента. Размер штрафа p назначается так же, как и в модели SIMP.

В своей работе [19] Бендсе установил, что физический смысл при интерпретации «серой» области может быть обеспечен до тех пор, пока удовлетворяются следующие условия для размера штрафа:

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu^0}, \frac{4}{1 + \nu^0} \right\} \quad \text{для } 2D \text{ структуры} \quad (2.3)$$

$$p \geq \max \left\{ 15 \frac{1 - \nu^0}{7 - 5\nu^0}, \frac{3}{2} \frac{1 - \nu^0}{1 - 2\nu^0} \right\} \quad \text{для } 3D \text{ структуры} \quad (2.4)$$

где ν^0 – коэффициент Пуассона для основного материала с жесткостью E^0 .

Эти условия основаны на границах Хашина – Штрикмана для двухфазных материалов, что позволяет интерпретировать жесткость, полученную с помощью схемы SIMP, как плотность композита, состоящего из пустот и основного материала. В общем случае $\nu^0 = 1/3$, $p \geq 3$, как для 2D, так и 3D структур.

Поскольку в модели ModSIMP возможно значение $\rho_e = 0$, эта модель получает ряд преимуществ по сравнению с моделью SIMP. Наиболее важным из них является возможность непосредственного введения дополнительных фильтров [109, 110].

Модель Rational Approximation of Material Properties (RAMP) была разработана для устранения недостатков моделей. Преимущество модели RAMP заключается в том, что она, в отличие от SIMP и ModSIMP, имеет отличную от нуля чувствительность при нулевой плотности.

В основу модели RAMP положена интерполяционная схема, определяемая

$$E_e(\rho_e) = E_{min} + \frac{\rho_e}{1 + q(1 - \rho_e)} (E_e^0 - E_{min}), \quad 0 \leq \rho_e \leq 1, \quad (2.5)$$

где $q \geq 0$.

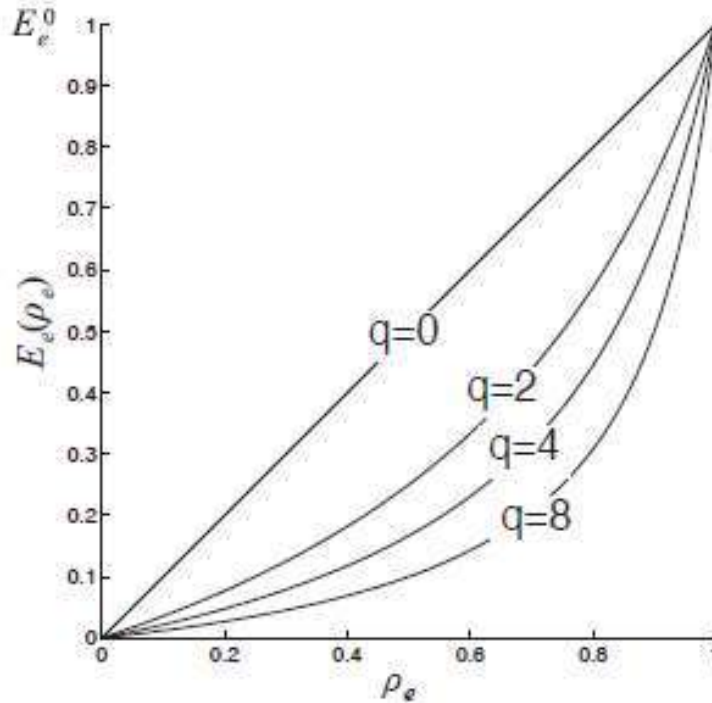


Рисунок 2.3 – Модуль Юнга $E_e(\rho_e)$ как функция параметра проектирования ρ_e модели RAMP для разных значений интерполяционных параметров P и q

На рисунке 2.3 изображены отношения массы к жесткости для различных значений q . Для значений $q \geq \bar{q}$, $\bar{q} \equiv (E_e^0 - E_{min})/E_{min}$ схема RAMP делает построение податливости как вогнутой функцией ρ_e .

Для материалов с коэффициентом Пуассона $\nu^0 = 1/3$ нижняя граница Хашина – Штрикмана (нижний предел для значений модулей сжатия и сдвига двухкомпонентной изотропной среды, в которых компоненты так же обладают изотропными свойствами) удовлетворяет соотношениям

$$q \geq 2 \frac{E_e^0 - E_{min}}{E_e^0 - 2E_{min}} \quad (2.6)$$

$$q \leq \frac{2(E_e^0 - E_{min})}{3E_{min}} \quad (2.7)$$

Производная первого порядка схемы RAMP:

$$\frac{\partial E_e}{\partial \rho_e} = \frac{1 + q}{(1 + q(1 - \rho_e))^2} (E_e^0 - E_{min}), \quad (2.8)$$

всегда больше нуля для всех $q \geq 0$. В то время, как особенностью схем SIMP является то, что для $\rho_e = 0$ производная не нулевая. Это означает, что схемы SIMP не всегда будут удовлетворять границам Хашина-Штрикмана для всех плотностей, тогда как схема RAMP всегда будет таковой, если q выбирается в пределах вышеописанных границ [114].

Однако, следует отметить, что нижняя граница (2.6) в целом не обеспечивают вогнутой податливости по отношению к переменным проектирования [114].

2.3 Регуляризация

Математическими указаниями на необходимость регуляризации являются генерация анизотропии в конструкции и невозможность удовлетворения необходимых условий оптимальности второго порядка в некоторых подобластях структурной области [32, 70, 81].

Численно необходимость регуляризации проявляется отсутствием сходимости или зависимостью топологии от размера применяемой конечно-элементной сетки [33, 34]. Регуляризация может быть осуществлена следующими двумя способами. Первый способ: введение микроструктур с непрерывной плотностью основного материала в качестве конструктивной переменной (расширить пространство проектирования). Второй способ: включение соответствующих ограничений в постановку задачи (ограничить пространство допустимых решений в постановке задачи) [18, 80]. Эти ограничения могут иметь вид штрафа.

Важным требованием к результату оптимизации является отсутствие эффекта «шахматной доски», выражающееся в образовании смежных элементов с большой и малой плотностью, расположенных в виде клеток шахматной доски. Результат топологической оптимизации, демонстрирующий эффект «шахматной доски» показан на рисунке 1.4.



Рисунок 2.4 – Различия между топологическими конструкциями консольной балки: а) с эффектом «шахматной доски» без фильтрации; б) та же конструкция после применения фильтрующей сетки

Для устранения проблемы «шахматной доски» применяются методы фильтрации. Эти методы применяются посредством прямой модификации переменных плотности или получением информации о чувствительности окрестности окружающих элементов.

Если же поглядеть на эти проблемы с точки зрения создания систем автоматизированного проектирования, то, несомненно, методы топологической оптимизации призваны определять оптимальную топологию в соответствии с заданной оптимизационной задачей независимо от разработчика. Однако, они должны поддерживать и интерактивную работу процесса проектирования, в то время как отдельные оптимизационные вычисления не гарантируют оптимального результата. Таким образом, важно использовать творчество разработчика, особенно в тех случаях, когда предъявляются особые требования, которые не могут быть смоделированы непосредственно в процессе оптимизации.

В случаях, когда важно четкое определение границ, разработаны метод функции Хевисайда [46] и метод морфологических операторов [101], которые используются для проекции плотностей в пространство 0/1. Фильтр Хевисайда представляет собой ступенчатую функцию Хевисайда, которая проектирует плотность (теперь называемую промежуточной плотностью и обозначенной как

x_e) на физическую плотность. Физическая плотность ρ_e равна единице, если $x_e > 0$ и нулю, если $x_e = 0$. Чтобы облегчить вычисление градиентов для анализа чувствительности при решении задачи оптимизации в вычислениях используется сглаженная функция Хевисайда

$$\rho_e = 1 - e^{-\gamma x_e} + x_e e^{-\gamma}, \quad (2.9)$$

которая является непрерывной функцией. Параметр $\gamma \geq 0$ описывает кривизну проекции, которая линейна в точке $\gamma = 0$ и приближается к единичной ступеньке Хевисайда, когда $\gamma \rightarrow \infty$. В большинстве приложений, используется схема продолжения, где γ первоначально равна нулю и постепенно увеличивается. Недавно была продемонстрирована версия, которая не требует продолжения [45]. На рисунке 2.5 показаны характерные результаты фильтрации и проекции. Обратим внимание на наличие серого переходного материала вдоль структурных границ для использования фильтра плотности. Эта область устраняется при использовании проекции Хевисайда.



а) использование фильтра плотности



б) использование фильтра Хевисайда

Рисунок 2.5 – Результаты топологической оптимизации с использованием

а) фильтрация плотности; б) фильтрация Хевисайда

2.4 Метод движущихся асимптот

Существуют численные методы, такие как последовательное линейное программирование (SLP), последовательное квадратичное программирование (SQP) и метод движущихся асимптот (ММА) Сванберга [117,118], которые могут быть использованы для топологической оптимизации.

Метод движущихся асимптот (*Method of moving asymptotes* ММА) – это итерационный метод нелинейного программирования общей и, как частный случай, структурной оптимизации, основанный на специальном виде выпуклой аппроксимации. Метод оперирует всеми видами ограничений, позволяет вычислять трудоемкие оценки функции, имеет возможность вычислять градиенты.

ММА способен генерировать последовательность улучшенных решений рассматриваемой задачи, а также является стабильным.

Основная идея метода ММА заключается в том, что на каждом шаге итерационного процесса метод генерирует и решает строго выпуклую подзадачу. Генерация подзадач контролируется так называемыми «движущимися асимптотами», которые могут как стабилизировать, так и ускорять сходимость основного процесса.

Рассмотрим задачу структурной оптимизации в следующем общем виде:

$$P: \text{минимизировать } p_0(x) \quad (x) \in R^n$$

$$\text{с целью } p_i(x) \leq \hat{p}_i \quad \text{для } i = 1, \dots, m$$

$$\text{И } \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j \quad \text{для } j = 1, \dots, n$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор переменных конструирования, $p_0(\mathbf{x})$ – функция цели, обычно вес структуры, $p_i(\mathbf{x}) \leq \hat{p}_i$ – ограничения характеристик, обычно ограничения на нагрузку и рабочий объем, \underline{x}_j и \bar{x}_j – заданные нижняя и верхняя границы (технологические ограничения) переменных конструирования.

В своей работе ММА придерживается общепринятой схемы итерационного процесса, первоначально предложенной Шмитом и Фарши [97] для задач определения размеров элементов.

Шаг 0. Инициализация переменных: выбирается начальное значение переменных проектирования $\mathbf{x}^{(0)}$; итерационному индексу k присваивается нулевое значение ($k = 0$).

Шаг I. Для вектора переменных проектирования $\mathbf{x}^{(k)}$ итерационной точки k вычисляются значения функций $p_i(\mathbf{x}^{(k)})$ и градиенты $\nabla p_i(\mathbf{x}^{(k)})$ для $i = 0, 1, \dots, m$

Шаг II. Генерируется подзадача $P^{(k)}$ путем замены в P функций p_i (обычно неявных) аппроксимирующими однозначными функциями $p_i^{(k)}$, основанными на вычислениях шага I.

Шаг III. Решается подзадача $P^{(k)}$. Оптимальное решение этой подзадачи присваивается следующей итерационной точке $\mathbf{x}^{(k+1)}$. Значение итерационного индекса увеличивается на единицу $k = k + 1$. Происходит возврат к шагу I. Процесс заканчивается при выполнении критерия сходимости.

В работе [88] предлагается для $i > 0$ получать аппроксимирующую функцию $p_i^{(k)}$ путем линеаризации (т.е. разложения в ряд Тейлора первого порядка) функции p_i с переменными $1/\mathbf{x}_j$ в текущей итерационной точке $\mathbf{x}^{(k)}$, до тех пор, пока $p_0^{(k)}$ не станет равной p_0 .

ММА является достаточно гибким, общим и способным работать не только с размерами элемента в качестве переменных проектирования, но и другие с другими переменными, такими как форма и углы ориентации материала. Он должен уметь обрабатывать все виды ограничений. Метод ММА может решать все эти задачи в дополнение к общим задачам нелинейного программирования. Кроме того, он прост в реализации и использовании.

Использование метода движущихся асимптот обеспечивает сходимость, стабильность и скорость процесса оптимизации одновременно. С увеличением числа элементов модели диапазон асимптот для экономии времени должен быть увеличен от 100 до 1200 [43].

2.5 Фундаментальная математическая формулировка задачи топологической оптимизации

Фундаментальная математическая формулировка задачи топологической оптимизации на основе плотности содержит функцию цели, набор ограничений (которые часто включают ограничения на использование материалов) и конечномерное представление физической системы, например, по методу конечных элементов. Общая формулировка, основанная на линейном статическом анализе конечных элементов, может быть представлена как

$$\min f(\mathbf{x}, \mathbf{U}) \quad \text{в } \Omega_{opt}, \quad (2.10)$$

$$\text{при условии } \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

$$g_i(\mathbf{x}, \mathbf{U}) \leq 0,$$

$$0 \leq x_e \leq 1,$$

где f – целевая функция, \mathbf{x} – вектор переменных плотности, которые связаны с ρ_e , \mathbf{U} – вектор смещения, \mathbf{K} – глобальная матрица жесткости, \mathbf{F} – вектор силы, а g_i – ограничения. Заметим, что матрица жесткости \mathbf{K} , а иногда и вектор нагрузки \mathbf{F} явно зависят от проектных переменных. В рамках этой обобщенной постановки можно сформулировать ряд проблем для различных функций цели включая податливость, напряженное состояние, частоту, смещения и другие, такие как проблема собственных значений и нелинейные системы.

Подавляющее большинство приложений топологической оптимизации ограничены проблемами проектирования механических конструкций по критерию жесткости конструкции [37, 105].

Минимизация податливости

Методы топологической оптимизации лучше всего работают, когда целевая функция задается интегралом по области проектирования. Для чисто структурных задач, удобной целевой функцией в этой форме является податливость при ограничении объема. Для линейных структур это соответствует определению

оптимального тензора жесткости $E_{ijkl}(\mathbf{x})$, который предполагается переменным в области оптимизации.

Вводя энергетическую билинейную форму (т. е. внутреннюю виртуальную работу упругого тела, находящегося в равновесии при перемещениях u и для произвольного виртуального перемещения v)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} E_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) d\Omega, \quad (2.11)$$

с линейными деформациями

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.12)$$

и линейную форму для нагрузки

$$c(u) = \int_{\Omega} f u d\Omega + \int_{\Gamma} t u d\Omega, \quad (2.13)$$

проблема минимизации податливости принимает вид

$$\min_{u \in U, E} c(u) \quad (2.14)$$

при условии $a_E(u, v) = c(v), v \in U$.

Здесь уравнение равновесия (2.14) записывается в слабой вариационной форме, где U обозначает пространство кинематически допустимых полей смещения, f – объемные силы, и t – нагрузки на границе. Решение задачи, определенной в (2.14), любым из методов топологической оптимизации дают оптимальную топологию, характеризующуюся максимумом глобальной жесткости. Чаще всего (2.14) дискредитируется конечными элементами и, таким образом, общая постановка задачи топологической оптимизации, приведенная ранее в уравнении (2.11). По самым консервативным оценкам более 85% работ по топологической оптимизации связано с решением этой задачи. Такое широко распространенное признание данная задача получила благодаря по большей части двум характеристикам функции цели в виде податливости: она является самосопряженной и ее чувствительность к добавлению материала строго отрицательна. Эти полезные характеристики делают эту задачу особенно простой в реализации и решении. В инженерной практике внедрение этой проблемы в

коммерческих пакетах программ оказалось широко распространенным для механических применений.

2.6 Некоторые примеры применения топологической оптимизации при моделировании конструкций

В качестве простого примера проектирования элемента конструкции, находящейся под действием механической нагрузки, рассмотрим балку, находящуюся в плоском напряженном состоянии (рисунок 1.6). На верхнюю границу балки действует сила $F = 10 \text{ kN}$. Нижняя граница опирается на скользящие опоры. Размеры балки $6 \times 1 \text{ м}$.

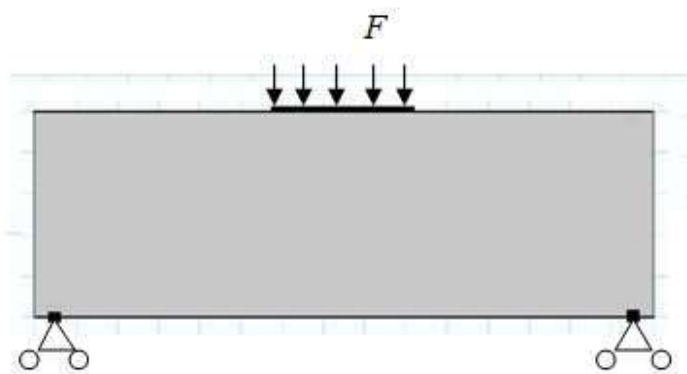


Рисунок 2.6 – Геометрическая область балки, нагрузка и закрепления

Конструкция выполнена из стали с модулем Юнга $E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,33$.

Нашей целью является получение оптимальной топологии конкретной конструкции, находящейся в определенных условиях нагружения. Для получения оптимального распределения материала в балке решается задача (2.15)

$$\frac{(1-q)}{W_{s0}} \int_{\Omega} W_s(\mathbf{x}) d\Omega + q \frac{h_0 h_{\max}}{A} \int_{\Omega} |\nabla \rho(\mathbf{x})|^2 d\Omega, \quad (2.15)$$

с ограничением

$$0 \leq \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \leq \gamma A, \quad (2.16)$$

где A – площадь конструкции, γ обозначает процент экономии материала, W_s – суммарная энергия деформации.

В любой точке модели показатель плотности не должен исчезать полностью и поэтому $10^{-9} \leq \rho^p \leq 1$. Это необходимо для корректности численных расчетов. Показатель $\rho \geq 1$ является штрафным фактором, который создает промежуточные плотности. Чтобы исключить появление так называемого эффекта «шахматной доски» в оптимальной микроструктуре вводится штрафная функция в виде

$$\frac{h_0 h_{\max}}{A} \int_{\Omega} |\nabla \rho_{design}(x)|^2 d\Omega; \quad (2.17)$$

где h_0 – начальный размер сетки, регулирующий размер элементов в разбиении, h_{\max} – текущий размер элемента на заданном уровне. Функция штрафа является безразмерной и для наихудшего возможного решения имеет значение порядка единицы. Выберем начальное значение $h_0 = 0,05 \text{ м}$, $h_{\max} = 0,025 \text{ м}$, коэффициент линейной комбинации функции цели и штрафа примем $q = 0,25$.

На рисунке 2.7 представлено полученное решение для ограничения по площади занимаемой сталью 50% от исходной площади ($\gamma = 0,5$).

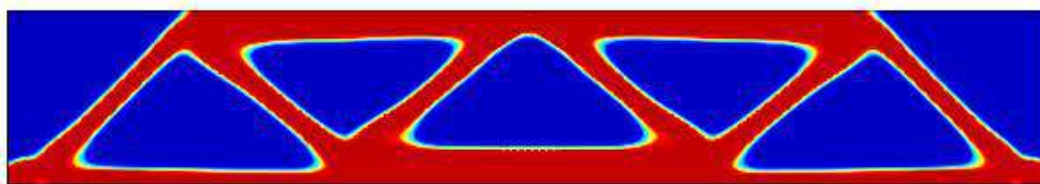


Рисунок 2.7 – Оптимальная топология балки

Полученная конструкция является аналогом ферменной конструкции. Серым цветом на рисунке соответствуют области, заполненные сталью, а темным цветом – области, свободные от материала. Решим задачу минимизации веса конструкции при ограничении на общую максимальную энергию деформации W_s^{\max} .

Конструкция «мостовая опора» (рисунок 2.8) имеет размеры $6 \times 6 \text{ м}$..

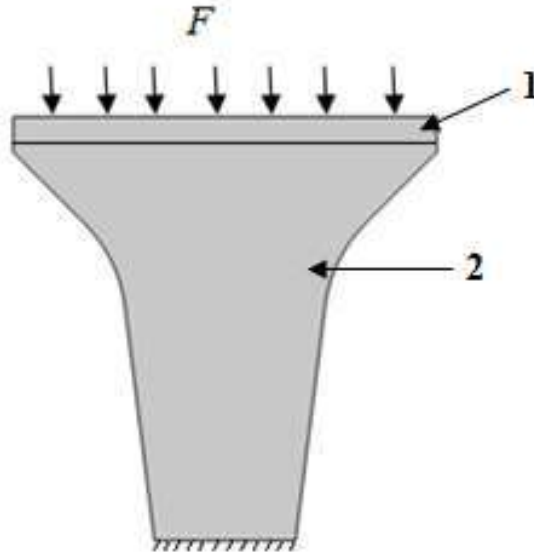


Рисунок 2.8 – Геометрическая область мостовой опоры, нагрузка и закрепление

На верхнюю границу первой области приложена сила $F = 10 \text{ кН}$. Нижняя граница зафиксирована. В первой области задаем асфальтовое покрытие с модулем Юнга $E = 25 \cdot 10^9 \text{ Па}$ и эта область, как и выше, также не подлежит оптимизации.

В примере базовый материал – сталь с упругими параметрами $E_0 = 200 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\nu = 0,33$. Чтобы получить оптимальное распределение материала в этой конструкции, будем использовать целевую функцию (2.18)

$$\frac{(1-q)}{A} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega + q \frac{h_0 h_{\max}}{A} \int_{\Omega} |\nabla \rho(\mathbf{x})|^2 d\Omega, \quad (2.18)$$

с ограничением

$$0 \leq \int_{\Omega} W_s(\mathbf{x}) d\Omega \leq W_s^{\max}. \quad (2.19)$$

Выберем коэффициент $q = 0,25$, начальное значение $h_0 = 0,05 \text{ м}$, $h_{\max} = 0,025 \text{ м}$. Оптимальное распределение материала в конструкциях показано на рисунке 2.9.

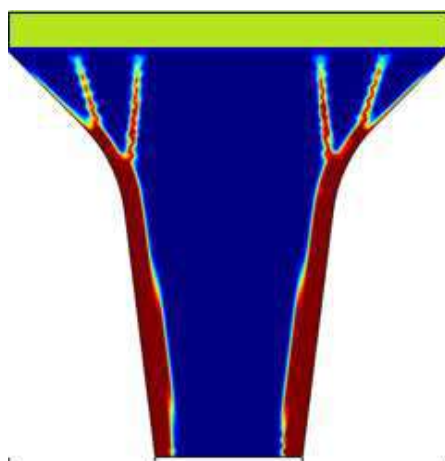


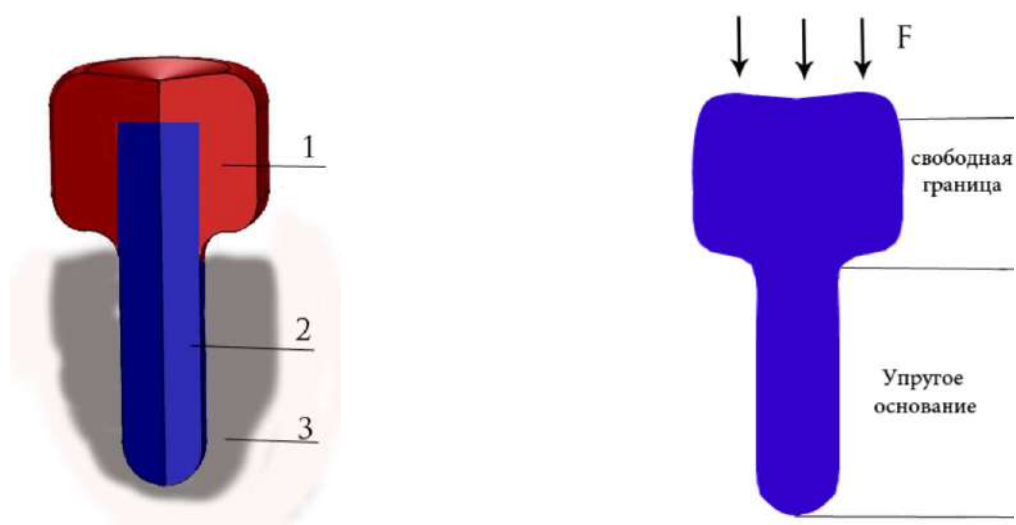
Рисунок 2.9 – Оптимальная топология конструкции

На рисунке 2.9 видно, что усиливающие элементы (красный цвет) прилегают к боковым границам конструкции. Ближе к первой области (желтый цвет), усиливающие элементы разветвляются, напоминая дерево. Оптимальная конструкция состоит из трех различных материалов: матрица с модулем Юнга $E = 1,25 \cdot 10^5 \text{ Па}$, стальные включения с $E = 200 \cdot 10^9 \text{ Па}$, и заданным материалом в первой области $E = 25 \cdot 10^9 \text{ Па}$.

В качестве еще одного примера задачи приведем задачу, полезную в медицине, а именно задачу топологической оптимизации внутрикостного дентального имплантата. Часто для обеспечения дополнительной остеоинтеграции на внутрикостной части имплантата создаются углубления, продольные канавки, отверстия, однако это может привести к снижению механической прочности имплантата. Для определения областей, в которых возможно создание этих элементов, была построена математическая модель и решена задача оптимизации.

Исследуемая расчетная модель восстановленного с помощью имплантата зуба представлена на рисунке 2.10 а. Модель зуба является осесимметричной, но тем не менее позволяет достаточно точно смоделировать форму, размеры, расположение элементов, механические характеристики, а также вертикальные жевательные нагрузки естественной конструкции.

Решение задачи оптимизации выполнялись с использованием метода SIMP. Расчеты проводились для модели имплантата цилиндрической формы. Размеры и форма имплантата соответствуют реальным размерам имплантата. Детали рассматриваемого имплантата изготовлены из чистого титана марки ВТ 1-00 ($E = 115000$ МПа; $\mu = 0,33$). Материал коронки зуба – керамика ($E = 60000$ МПа; $\mu = 0,3$), высота коронки 8 мм, ширина 10 мм, что соответствует среднестатистическим размерам первого моляра нижней челюсти.



а) структура модели: 1 – коронка,
2 – имплантат, 3 – кость

б) граничные условия

Рисунок 2.10 – Расчетная модель

При создании данной модели были приняты граничные условия, показанные на рисунке 2.10 б: область соприкосновения имплантата с костью считается упругим основанием, коэффициент реакции опоры рассчитан исходя из механических характеристик естественной кости ($E = 13700$ МПа; $\mu = 0,25$); в качестве имитации давления, передаваемого на имплантат и прилегающие костные ткани во время жевательного процесса, проводится нагружение конструкции вертикальной силой 180 Н в виде равномерного давления по всей

верхней плоскости коронки зуба; боковая часть коронки является свободной границей.

Задача оптимизации проводится для области титанового имплантата и заключается в сведении к минимуму используемое для моделирования количество материала

$$\frac{1}{A} \int_{\Omega} \rho_{design}(x) d\Omega; \quad (2.20)$$

где A – площадь сечения конструкции, Ω - область оптимизации. При этом должны быть выполнены ограничения на полную энергию деформации

$$0 \leq \int_{\Omega} W_s(x) d\Omega \leq W_s^{max}. \quad (2.21)$$

Значение W_s^{max} – величина максимально возможной энергии деформации, вычисленной для полностью твердой конструкции. Безразмерная функция цели (2.20), и функция штрафа (2.17) должны быть согласованы в виде линейной комбинации с заданным параметром q :

$$f = \frac{(1-q)}{A} \int_{\Omega} \rho_{design}(x) d\Omega + q \frac{h_0 h_{max}}{A} \int_{\Omega} |\nabla \rho_{design}(x)|^2 d\Omega \quad (2.22)$$

Коэффициент линейной комбинации функции цели и штрафа примем $q = 0,25$. Выберем начальное значение $\gamma = 0,5$ и $h_0 = 0,5 \text{ мм}$ $h_{max} = 0,25 \text{ мм}$.

Тензор напряжений считается функцией от начального модуля Юнга E_0 и искусственно заданной плотности ρ_{design} , которая выступает в качестве управляющей переменной в задаче оптимизации.

$$E(x) = \rho_{design}(x)^p E_0; x \in \Omega, \quad (2.23)$$

Для задания механических свойств керамической коронки, плотность ρ_{design} за пределами титанового имплантата задается следующим образом:

$$\rho_{design}(x) = \sqrt[p]{\frac{E_{kep}}{E_{mum}}}; x \notin \Omega. \quad (2.24)$$

где $E_{кер}, E_{тит} = E_0$ – модули Юнга титана и керамики соответственно.

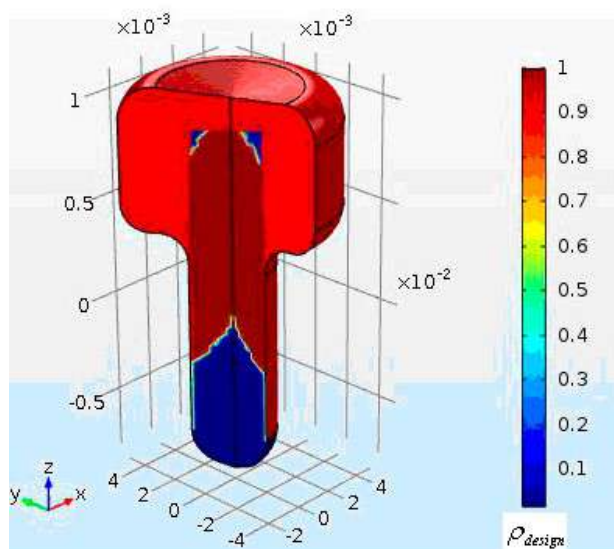


Рисунок 2.11 – Топология имплантата после оптимизации

Оптимальная конструкция, полученная по данному алгоритму, показана на рисунке 2.11. Справа приведена шкала значений ρ_{design} , где значениям, равным единице, соответствуют области, заполненные титаном; значению 0,88 – керамикой, а значениям, близким к 0 – области, свободные от заполнения материалом. Из рисунка 2.11 видно, что основную часть нагрузки принимает на себя верхняя часть имплантата, нижняя часть конструкции имплантата наименее подвержена концентрации напряжений. Именно поэтому в нижней области возможно создание сквозных отверстий, бороздок, канавок для улучшения остеоинтеграции зуба, что не снизит характеристики его механической прочности. Максимальные напряжения в модели конструкции зуба приходятся на пришеечную часть, в этой области необходимо создать максимальное укрепление имплантата.

2.6.1 Оптимизация армирования элементов микромеханических приборов для геологических изысканий: компьютерное моделирование и эксперимент

В нефтегазовой промышленности и добыче полезных ископаемых гироскопы и инклинометры используются для измерения траектории бурения скважин для

непрерывного контроля траектории бурения, так как из-за длительности процесса бурения, а также вращения Земли есть вероятность отклонения бура от вертикальной оси. В качестве элементов этих приборов часто используются пластины различной конфигурации с технологическими вырезами или вставками, наличие которых приводит к концентрации напряжений в некоторых областях и дальнейшему их разрушению, если эти напряжения превысят предел прочности материала σ_{B1} .

Одним из способов повышения надежности этих элементов является армирование пластин, что позволяет усилить конструкцию в проблемных областях. Армирование повышает безопасность конструкции за счет добавления некоторых материалов (подкреплений) в базовые структуры и широко распространено в механических конструкциях [7, 69]. Однако для подкрепления требуются дополнительные материалы и затраты, а неправильный выбор структуры армирования может привести к дополнительным повреждениям основной структуры. В качестве примера рассмотрим пластину, показанную на рисунке 2.12. Похожие пластины используются в гироскопах и инклинометрах, применяемых при проходке скважин.



Рисунок 2.12 – Форма пластины без армирования и расчетная схема

На рисунке 2.12 показана пластина с вырезами, изготовленная из ABS-пластика с модулем Юнга $E_b = 1,6 ГПа$ и пределом прочности $\sigma_{B1}^b = 22 МПа$. В дальнейшем будем называть ее базовой структурой. К пластине прикладывается нагрузка $F = 36 КН$ вдоль оси Ox . Верхняя и нижняя границы свободны от нагрузки. Требуется создать оптимальную структуру армирования пластины из углепластика с модулем Юнга $E_a = 120 ГПа$ и пределом прочности $\sigma_{B1}^a = 800 ГПа$ с

целью увеличения ее прочности при заданном количестве армирующего материала.

Топологическая оптимизация микроструктуры армирования

Для увеличения прочности необходимо минимизировать величину максимального напряжения по Мизесу

$$\sigma_{mises} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}, \quad (2.25)$$

где σ_{ij} – напряжения в области оптимизации Ω , за счет армирования усиливающими элементами из углепластика базового материала пластины при условии, что объем армирующего материала в оптимальной конструкции не превосходит заданной величины. Так как положение точки, в которой достигается максимум функции $\sigma_{mises}(\mathbf{x}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$, неизвестно, то задача сводится к минимизации функционала:

$$J_c = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \sigma_{mises}(\mathbf{x}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}). \quad (2.26)$$

Для локальных функционалов такого типа разработаны приближенные методы редукции к задачам с интегральными функционалами. Один из них основан на близости нормы в пространстве непрерывных функций $\|\sigma_{mises}\|_C$ норме на пространстве L^q функций, интегрируемых с q -й степенью при достаточно больших значениях q . Учитывая это можно приближенно заменить (2.26) функционалом

$$J_q = \left(\frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} (\sigma_{mises})^q d\Omega \right)^{1/q} \quad (2.27)$$

где $m(\Omega)$ – мера множества Ω . Там же дана оценка точности такого приближения.

Без потери общности функционал цели (2.26), с учетом (2.27), может быть взят в виде

$$J = \int_{\Omega} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^q d\Omega, \quad (2.28)$$

где q – заданное достаточно большое число.

Конструкция находится в плоском напряженном состоянии и функции отклика должны удовлетворять соотношениям Коши, уравнениям состояния и равновесия

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.29)$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad (2.30)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu^2} \varepsilon_{12},$$

а также соответствующим граничным условиям. Задача (2.29), (2.30) решается методом конечных элементов.

Оптимизация топологии микроструктуры армирования заключается в поиске наилучшего распределения усиливающего материала для достижения минимума максимальных значений σ_{mises} , то есть минимизации функционала (2.28), в пластине.

Интерполяция материала в данной задаче принята в виде

$$E(\mathbf{x}) = E_b + \rho(\mathbf{x})^p (E_a - E_b), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.31)$$

Показатель степени $p \geq 1$ является фактором штрафа, и увеличение P приводит к более четкому решению. При $\rho(\mathbf{x})=1$ вся область полностью заполнена армирующим материалом. Таким образом необходимо найти

$$\min_{\rho(\mathbf{x})} \int_{\Omega} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^q d\Omega, \quad (2.32)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \leq \gamma A, \\ 0 &\leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где γ – доля армирующего материала.

Для решения задачи оптимизации (2.32), (2.33), при вычислениях с помощью градиентных методов, основной задачей является анализ чувствительности, вычисление производных по проектным переменным. Предположим, что рассматриваемая область массива разбита на конечные элементы и каждому

элементу присваивается переменная плотность ρ_i ($i=1, n$). При этом элементы матрицы жесткости связаны с переменной плотностью степенным законом

$$K_i = [E_b + \rho_i^p (E_a - E_b)] \bar{K}_i, \quad (2.34)$$

где \bar{K}_i обозначает номинальную матрицу жесткости элемента i для $\rho_i=1$. Показатель степени p является фактором штрафа, который обычно выбирают в пределах $3 \leq p \leq 5$.

Таким образом, глобальная матрица жесткости примет следующий вид

$$K = \sum_{i=1}^n L_i^T K_i L_i = \sum_{i=1}^n L_i^T [E_b + \rho_i^p (E_a - E_b)] \bar{K}_i L_i \quad (2.35)$$

Вектор внешний нагрузки F не зависит от переменной плотности, тогда уравнение системы конечных элементов для рассматриваемой области примет вид

$$KU = F. \quad (2.36)$$

В топологической оптимизации мы, как правило, работаем с умеренным числом ограничений, поэтому наиболее эффективным способом вычисления производных является использование метода сопряженных переменных [82], где производные для смещений не вычисляются в явном виде. Для минимизации перепишем функционал $J(\mathbf{x})$ из (2.28), добавив к нему нулевое, в силу (2.36), слагаемое

$$J(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}) - \tilde{U}^T (KU - F), \quad (2.37)$$

где \tilde{U} – произвольный вектор узловых смещений. Исходя из этого получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \rho_i} - \tilde{U}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_i} U - \tilde{U}^T K \frac{\partial U}{\partial \rho_i} = \\ &= -\tilde{U}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_i} U + \left(\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial U} - \tilde{U}^T K \right) \frac{\partial U}{\partial \rho_i}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Это равенство, в свою очередь, может быть записано в виде

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \rho_i} = -\tilde{U}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_i} U, \quad (2.39)$$

когда \tilde{U}^T удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\tilde{F}^T - \tilde{U}^T K = 0, \quad (2.40)$$

где $\tilde{F}^T = \partial J(\mathbf{x}) / \partial U$.

Чувствительность функционала (2.28) к изменению плотности на основании равенств (2.39), (2.40) может быть теперь вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \rho_i} &= -\tilde{F}^T K^{-1} \frac{\partial K}{\partial \rho_i} U = -(\tilde{F}^T K^{-1} L_i^T) p \rho_i^{p-1} (E_a - E_b) \bar{K}_i(L_i U) = \\ &= -(L_i K^{-1} \tilde{F})^T p \rho_i^{p-1} (E_a - E_b) \bar{K}_i(L_i U). \end{aligned} \quad (2.41)$$

После упрощения приведенное выше выражение можно переписать в виде

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \rho_i} = -\tilde{U}_i^T p \rho_i^{p-1} (E_a - E_b) \bar{K}_i U_i. \quad (2.42)$$

в котором \tilde{U}_i^T и U_i обозначают сопряженный вектор смещений и вектор смещений на конечном элементе i . Производная функционала цели (2.42) имеет простой вид, легко вычисляется и очень выгодно реализует возможность топологической оптимизации в любой системе конечных элементов.

Для получения оптимальной микроструктуры армирования пластины и создания дополнительного укрепления вокруг прорезей, воспринимающей нагрузки при растяжении используем метод топологической оптимизации совместно с методом конечных элементов [147]. Долю материала армирующей конструкции возьмем равной $\gamma = 0,4$, а в качестве армирующего материала выберем углепластик. На рисунке 2.13 а представлена оптимальная топология микроструктуры армирования пластины.

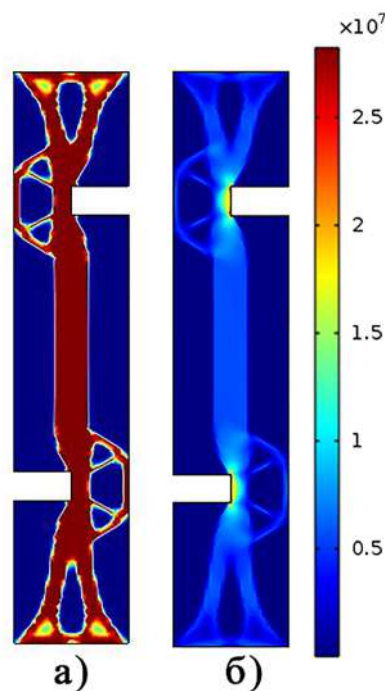


Рисунок 2.13 – а) оптимальные топология микроструктуры усиления вырезов углепластиком; б) распределение напряжений Мизеса

Здесь синим цветом выделен базовый материал пластины, а красным углепластик, укрепляющий конструкцию. На рисунке 2.13 показано распределение напряжений σ_{mises} по площади пластины при оптимальном армировании. Наибольшие напряжения достигаются в углах вырезов полностью армированных углепластиком и составляют $\sigma_{mises} = 27,6 \text{ МПа}$. Запас прочности при этой нагрузке составляет $800 \cdot 10^9 / 27,6 \cdot 10^6 \approx 29000$. Для сравнения был проведен расчет пластины, армированной слоем углепластика постоянной толщины с той же долей армирующего материала $\gamma = 0,4$. В результате было получено значение максимальных напряжений $\sigma_{mises} = 23,2 \text{ МПа}$. Предел прочности составного материала $\sigma_{B1}^{mix} = 194 \text{ ГПа}$. Таким образом, запас прочности при этой нагрузке составляет $194 \cdot 10^9 / 23,2 \cdot 10^6 \approx 8400$, что примерно в 3,5 раза ниже, чем в конструкции с оптимальным армированием.

Экспериментальное подтверждение результатов

В качестве объекта исследований принята пластина из пластика ABS с концентраторами напряжений в виде поперечных пазов, доходящих до оси симметрии размерами $120 \times 40 \times 4$ мм. На основе компьютерной модели (рисунок 2.14) разработаны чертеж и трехмерная модель с полостью глубиной 3 мм.

Образцы формировали на 3D принтере Felix 3.1 Single Extruder по технологии FDM из полимерной нити ABS стандартного диаметра 1,75 мм. Полости послойно заполняли углеродным волокном производства ООО «Балаково Карбон Продакшн» (г. Балаково Саратовской обл.) и эпоксидной смолой ЭД-20 с отвердителем ПЭПА. Волокна распределяли таким образом, чтобы они без разрывов связывали все полости и углубления, сформированные принтером согласно твердотельной модели. Сформированная на 3D принтере

основа и готовый образец с заполненной композиционным материалом профильной полостью представлены на рисунке 2.14.

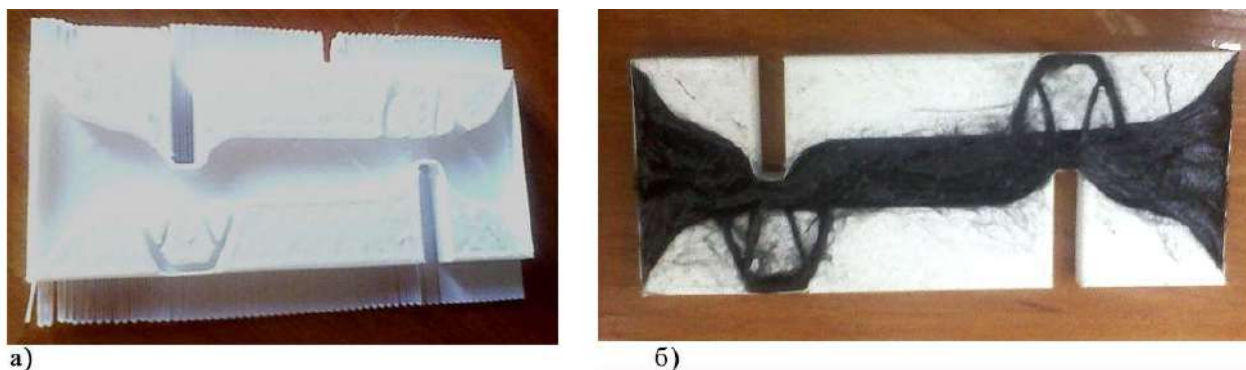


Рисунок 2.14 – а) сформированный на 3D принтере образец с полостью, рассчитанной на основе моделирования; б) образец с топологически оптимальной структурой армирования

Дополнительно для сравнения вариантов упрочнения изготавливали образцы увеличенной до 7 мм толщины и образцы толщиной 4,0 мм с углублением в 2,0 мм, равномерно заполненным композитом, аналогичным топологической структуре по составу. В этом случае объемы слоев армирующего материала примерно одинаковы по двум схемам армирования.

Испытания на разрыв образцов проводили на разрывной машине ИР-5082-100 с компьютерной обработкой результатов при скорости растяжения 50 мм/мин. В процессе испытаний верхние и нижние участки образцов-пластин закрепляли в захватах механизма нагружения машины. Длина полосы захвата составляла 15 мм. Графики нарастания разрывного усилия при испытаниях образцов на растяжение представлены на рисунке 2.15.

Анализ полученных зависимостей позволяет сделать вывод, что армирование относительно мало прочного термопласта ABS, применяемого в технологии FDM, композиционным материалом с наполнителем из углеродных волокон обеспечивает увеличение предельного разрывного усилия на 42,7% даже по сравнению с образцом увеличенной толщины. Использование армирования одинаковым по объему и содержанию углеродных волокон композиционным материалом по специальной схеме, учитывающей прогнозируемое распределение

полей напряжений при растяжении, увеличивает предельное разрывное усилие на 51,3%, т.е. обеспечивается прирост степени упрочнения практически на 20%. При этом модуль упругости повышается в 3 раза.

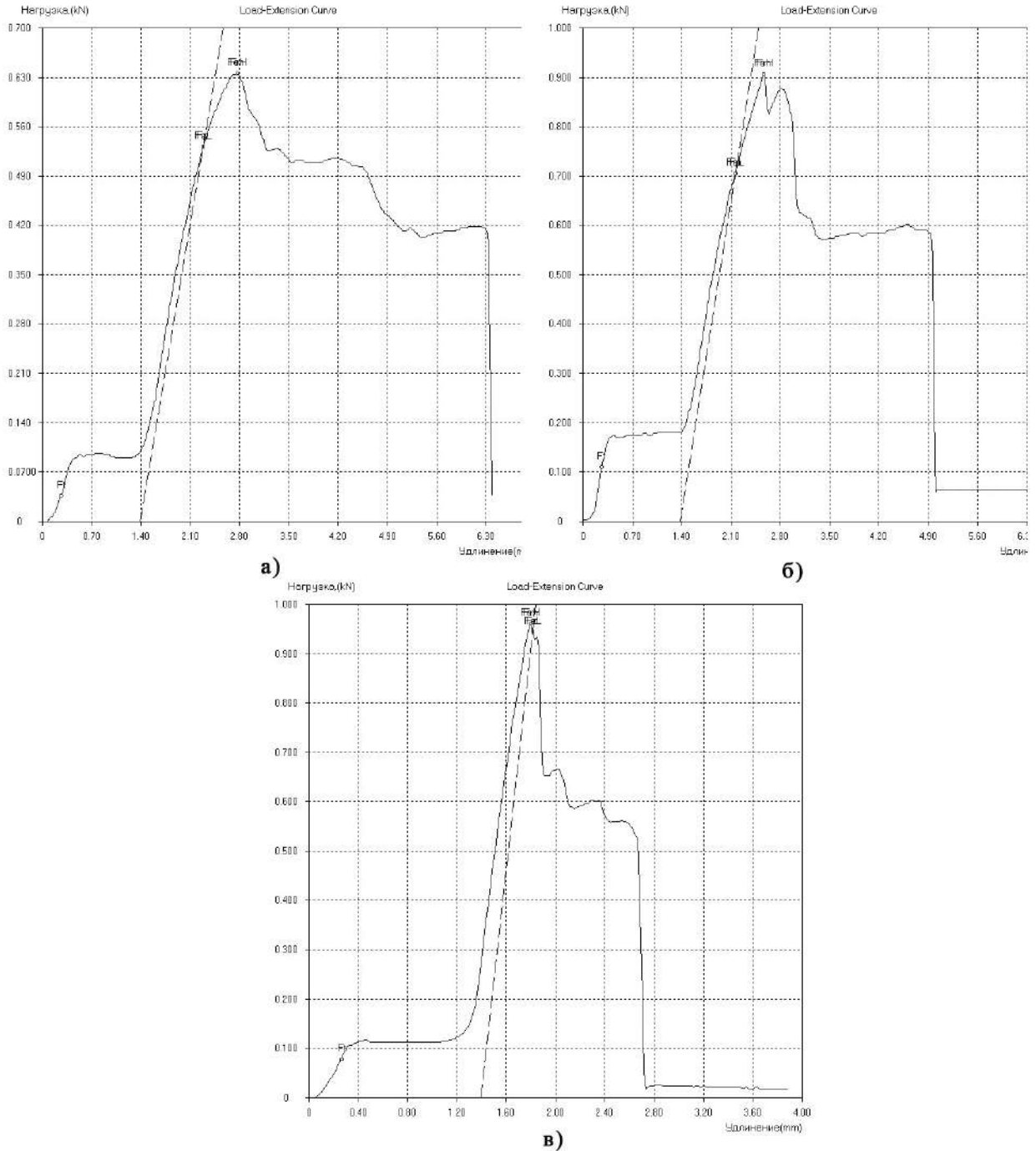


Рисунок 2.15 – а) Графики нагружения образцов: из пластика ABS;
 б) из пластика ABS, равномерно армированного композиционным материалом;
 в) из пластика ABS с топологически оптимальной армирующей структурой

Принятая модель распределения напряжений в образце с ослабленным сечением и эффективность ее реализации путем формирования топологической упрочняющей структуры иллюстрируют фотографии зоны разрушения (рисунок 2.16), на которых явно заметно повторение картины, показанной на рисунке 2.13.

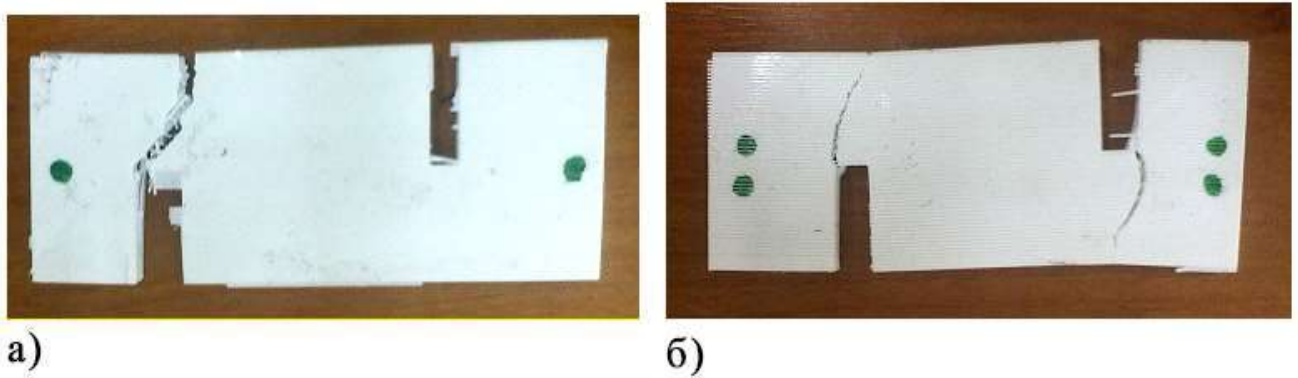


Рисунок 2.16 – а) области разрушения образцов при растяжении: из пластика ABS; б) то же, с топологически оптимальной армирующей структурой

Видно, что максимальные напряжения возникают в области ослабленного вырезами сечения, при этом они локализованы в дугообразных зонах. Зона разрушения контрольного образца из пластика ABS практически лишена остатков волокон структуры, разрушение произошло одномоментно для всей области материала. Образцы с топологически оптимальной армирующей структурой имеют более узкую зону разрушения. Зоны разрушения «прошиты» волокнами пластика, сохранившими целостность.

Таким образом, выполненные экспериментальные исследования качественно подтверждают эффективность упрочнения объектов из термопластичных материалов путем внедрения структур армированного углеродными волокнами композиционного материала, топология которых коррелирует с моделью полей напряжений, возникающих в процессе эксплуатации. Реализация серийного варианта данной технологии упрочнения возможна на базе 3D принтеров, оснащенных двух или четырех струйными печатающими головками-экструдерами. Существенное расхождение с расчетами по модели скорее всего связано с несовершенством опытной технологии топологического армирования, не позволившей с достаточной точностью

воспроизвести модельные характеристики топологии и обеспечить идентичность структуры и состава, армирующего композиционного. В этом направлении целесообразно проведение значительных по объему экспериментальных исследований.

Использование методов оптимизации при проектировании оптимальной микроструктуры армирования пластин, как видно из рассмотренного примера, позволяет теоретически увеличить запас прочности пластины с оптимальной конфигурацией армирования в несколько раз по сравнению с обычной двухслойной пластиной с тем же количеством углепластика. Предложенный и реализованный алгоритм в виде комплекса программ позволяет получать топологически оптимальное армирование пластин не только при наличии вырезов и отверстий, но и при наличии включений в базовый материал.

Полученные результаты моделирования качественно подтверждены в ходе экспериментов по армированию пластин из пластика ABS и их испытаний на разрыв.

2.6.2 Топологическая оптимизация конструкций, состоящих

из нескольких материалов, с использованием модифицированного метода SIMP

В работе [16] описан метод для конструкций из двухфазных материалов:

$$E(\rho) = \rho^p E_1 + (1 - \rho^p) E_2, 0 \leq \rho \leq 1. \quad (2.43)$$

где E_1 и E_2 – значения модулей Юнга каждой из фаз. В данном случае пустота может быть получена при $E_2 = 0$. Для материалов, содержащих две твердые фазы и пустоты схема интерполяции может быть сформулирована в виде [14]:

$$E(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^p (\rho_2^p E_1 + (1 - \rho_2^p) E_2). \quad (2.44)$$

Заметим, что для описания трех фаз материалов требуется введение двух проектных переменных ρ_1 и ρ_2 . Для решения задачи оптимизации материала, содержащего m фаз, необходимы $m-1$ проектных переменных. Данная интерполяция становится громоздкой при решении задач оптимизации

конструкций более чем из двух материалов. Большинство известных сегодня подходов для решения задач топологической оптимизации конструкций, содержащих множество материалов, требуют введения дополнительных переменных проектирования, тем самым увеличивая вычислительные затраты.

В качестве альтернативного метода топологической оптимизации для конструкций из нескольких материалов в работе [138] при аппроксимации материалов была использована пиковая функция. Этот метод не приводит к увеличению числа проектных переменных, но наличие особых точек в этом методе является потенциальным источником трудностей при переходе из одной фазы материала в другую. В работе [121] был предложен алгоритм решения многофазной задачи топологической оптимизации с помощью разделения на несколько традиционных подзадач топологической оптимизации для двух материалов. Тем не менее, для m материалов требуется решить $m(m-1)/2$ традиционных задач, что приводит к большим вычислительным затратам.

Для решения задачи многокомпонентной топологической оптимизации используется модифицированный метод SIMP с одной проектной переменной, который позволяет учесть свойства нескольких фаз материалов [150, 156]. В данном подходе плотность материала ρ_e рассматривается как независимая расчетная переменная и выбирается из непрерывного диапазона (включая нулевую плотность для пустоты), после чего разделяется дискретными значениями плотностей каждой из фаз материалов. Другие свойства рассматриваются как непрерывные функции от плотности.

Поскольку предлагаемый метод не требует введения дополнительных переменных интерполяции материалов, расчетные затраты не зависят от количества рассматриваемых материалов. Итерационная схема позволяет обеспечить стабильный переход из одной фазы материала в другую. Для демонстрации данного метода в работе рассмотрены численные примеры. Благодаря своей концептуальной простоте, предлагаемый модифицированный

метод SIMP для интерполяции мультифазных материалов может быть легко применен для любых существующих задач топологической оптимизации.

Модифицированный метод SIMP для многокомпонентной оптимизации

На рисунке 2.17 приведен общий вид конструкции и граничные условия для задачи многокомпонентной топологической оптимизации.

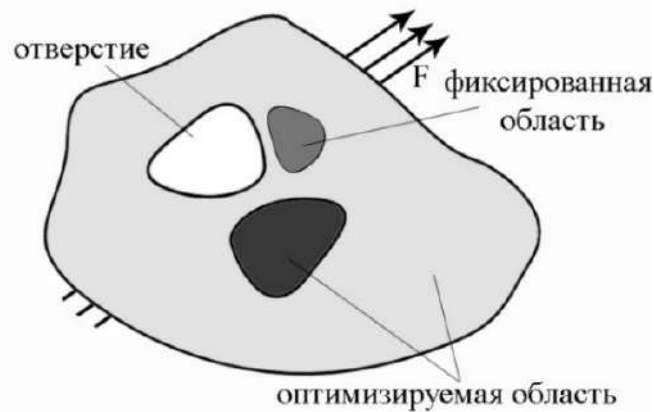


Рисунок 2.17 – Схематическое изображение конструкции и граничных условий для многокомпонентной топологической оптимизации

Конструкция содержит область оптимизации, которая включает в себя два и более материала, также конструкция может содержать технологические отверстия и включения. К границам приложены нагрузки интенсивности F или применены условия жесткого закрепления, также граница может быть свободна от нагрузок, в зависимости от рассматриваемой задачи.

В предлагаемом способе материалы сортируются по возрастанию нормированной плотности материала ρ_i^T :

$$\rho_i = \rho_i^T / \rho_{\max} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (2.45)$$

где ρ_{\max} – максимальная плотность из всех оптимизируемых материалов, ρ_i^T – исходные плотности материалов, m – количество оптимизируемых материалов. Используя представление плотности (2.45), классическая степенная интерполяция ModSIMP материала для случая многокомпонентной оптимизации принимает вид

$$E_e(\rho_e) = A_E \rho_e^p + B_E, \quad (2.46)$$

где коэффициенты A_E и B_E для $\rho_e \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$ выражаются как

$$A_E = \frac{E_i - E_{i+1}}{\rho_i^p - \rho_{i+1}^p}, B_E = E_i - A_E \rho_i^p. \quad (2.47)$$

и E_i, E_{i+1} – модули Юнга для материалов в сортировке (2.45) с номерами i и $i+1$ соответственно. Вид частного случая функции (2.46) для трех материалов приведен на рисунке 1.18.

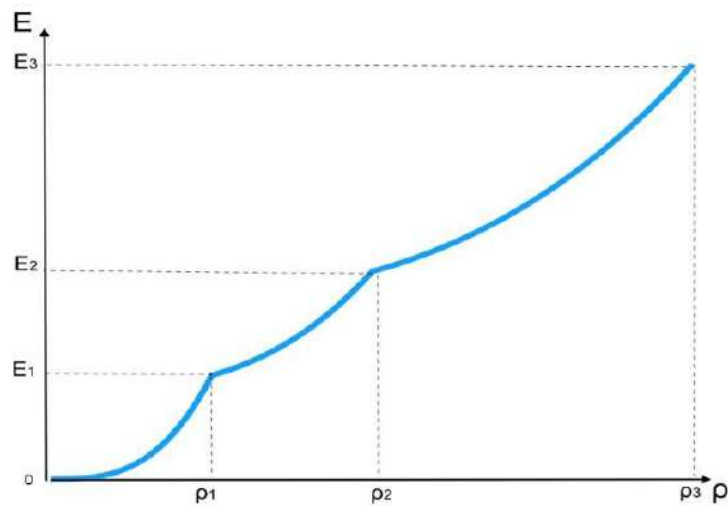


Рисунок 2.18 – Упорядоченная многокомпонентная SIMP-интерполяция модуля упругости для трех материалов

Численные результаты

Для проверки предложенного подхода были решены задачи многокомпонентной топологической оптимизации для ряда конструкций [150]. В дальнейшем все величины взяты в безразмерном виде. Внешняя сила $F = 10$ во всех примерах. Задачи были решены при помощи метода конечных элементов. Все области проектирования разбиты на треугольные конечные элементы с максимальным размером $h_{\max} = 0,03$ по всей площади. При построении моделей используются фиктивные материалы, чьи свойства перечислены для каждого из примеров. На основании проведенных численных экспериментов штрафной

коэффициент P был выбран равным 5. При решении задач оптимизации использован метод скользящих асимптот (ММА).

В качестве примера рассмотрим балку, граничные условия и размеры которой приведены на рисунке 2.19. Длина рассматриваемой балки $l=6$, высота $h=1$. На верхней границе в центре действует нагрузка интенсивности F . Нижние углы балки зафиксированы в вертикальном направлении. В области оптимизации определены материалы с модулями Юнга $E_1=1 \cdot 10^{-9}$, $E_2=150$, $E_3=300$, а также заданы ограничения на количество каждого из материалов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответственно. Количество конечных элементов при расчете данной конструкции – 17000 и граничных элементов – 540. Количество степеней свободы составляет примерно 35000.

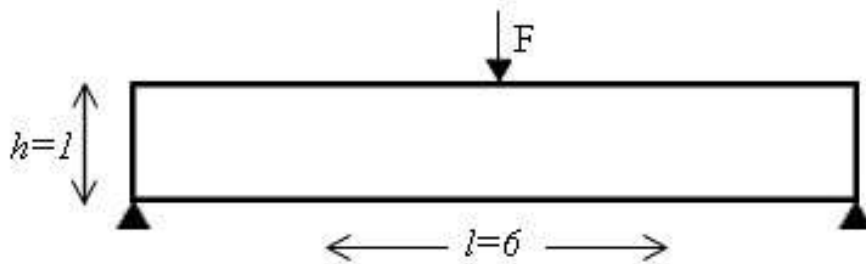


Рисунок 2.19 – Граничные условия для балки

На рисунках 2.20, 2.21 показаны оптимальные микроструктуры полученных балок. Жесткий материал с модулем Юнга $E_3=300$ обозначен красным цветом, зеленым – более мягкий материал $E_2=150$, синий цвет означает наличие в данной области материала, близкого к пустоте $E_1=1 \cdot 10^{-9}$. На рисунке 2.20 приведены топологии для различных ограничений γ_2 при $\gamma_3=0,25$, на рисунке 2.21 – оптимальные топологии при различных γ_3 для $\gamma_2=0,5$.

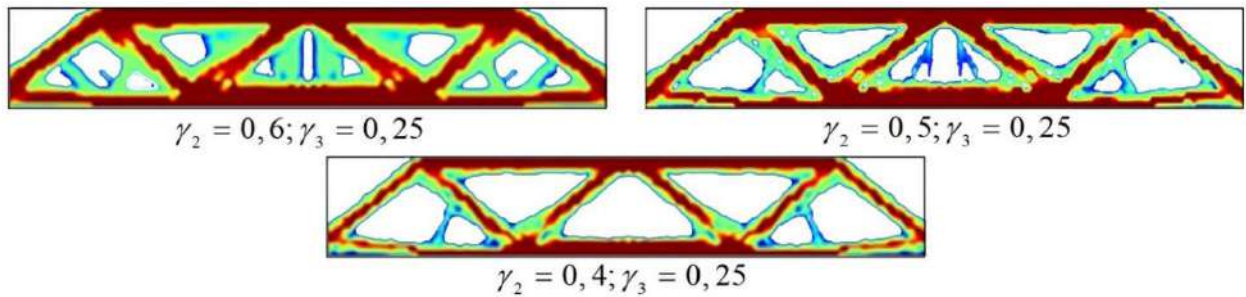
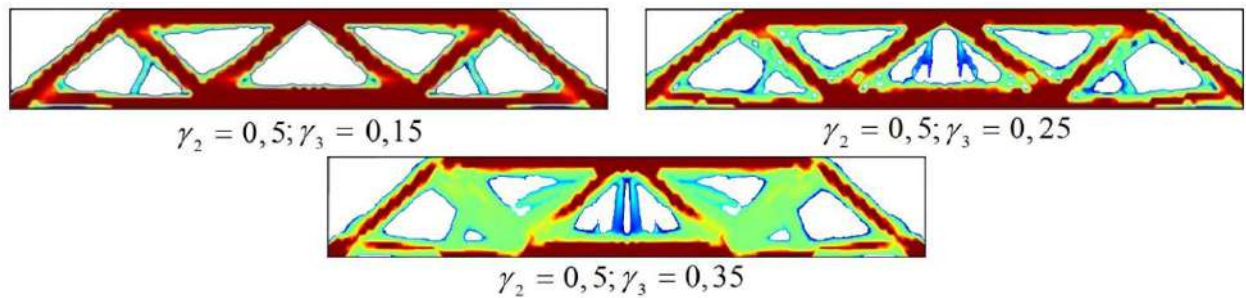


Рисунок 2.20 – Оптимальные топологии балки

для различных ограничений γ_2 Рисунок 2.21 – Оптимальные топологии балки при различных ограничениях γ_3

В таблице 2.1 приведены значения энергии деформации W для полученных оптимальных микроструктур балки при различных ограничениях на количество материалов. Значение γ_1 рассчитывается как $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 - \gamma_3$.

Таблица 2.1 – Значения энергии деформации для оптимальных конструкций

	$\gamma_2 = 0,4$	$\gamma_2 = 0,5$	$\gamma_2 = 0,6$
$\gamma_3 = 0,15$	-	27,329	23,682
$\gamma_3 = 0,25$	33,088	25,560	22,387
$\gamma_3 = 0,35$	30,805	24,358	-

Как видно из данной таблицы 2.1, значение энергии деформации W для оптимальных конструкций уменьшается при увеличении доли жесткого материала, то есть конструкция становится жестче и возрастает при увеличении доли более мягкого материала.

Рассмотрим еще одну конструкцию балки (рисунок 2.22). Левая граница балки зафиксирована, на правой границе в центре приложена направленная вниз нагрузка F . Длина балки $l=3$, высота $h=1$. Расчеты для данной конструкции были

проведены для разбиения на 8479 конечных и 269 граничных элементов. Количество степеней свободы составляет примерно 17500.



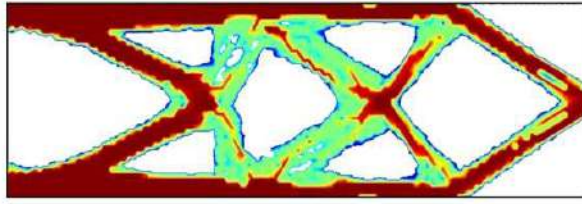
Рисунок 2.22 – Конструкция балки и граничные условия

Были получены оптимальные конструкции балки из двух материалов, полученной с помощью классической схемы интерполяции SIMP (1) (рисунок 2.23 а) и конструкции, состоящей из трех материалов (рисунок 2.23 б), полученной при помощи модифицированной схемы интерполяции SIMP.

На рисунке 2.23 а показана оптимальная микроструктура для балки из материалов $E_1 = 1 \cdot 10^9$ (белый цвет), $E_2 = 150$ (красный цвет), ограничение на количество материала $\gamma_2 = 0,65$. На рисунке 2.23 б приведена оптимальная топология для материалов с модулями Юнга $E_1 = 1 \cdot 10^9$ (белый цвет), $E_2 = 150$ (зеленый цвет), $E_3 = 300$ (красный цвет), ограничения на количество каждого из материалов $\gamma_3 = 0,4$, $\gamma_2 = 0,25$. Сравнивая рисунки, видим, что конструкции принципиально схожи и оптимизация топологии с несколькими материалами дает адекватный результат.



а) 104,96



б) 123,28

Рисунок 2.23 – Конструкция балки и граничные условия.

Оптимальные микроструктуры балки для двух- и трехфазной оптимизации

На рисунке 2.24 показаны напряжения Мизеса для конструкции, приведенной на рисунке 2.23б. Синий цвет означает минимальные напряжения, красный – максимальные. Как можно заметить, в ходе оптимизации более жесткими материалами заполняются области с наибольшими напряжениями.

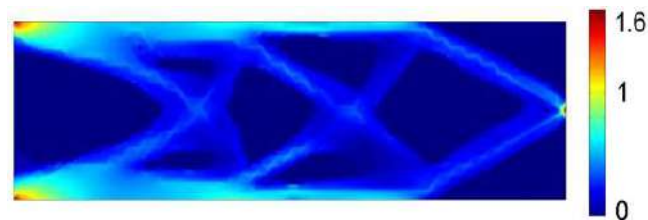
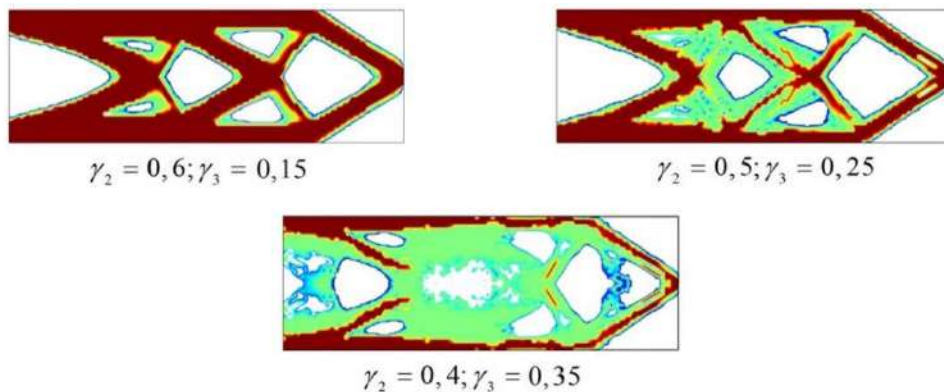


Рисунок 2.24 – Напряжения Мизеса

Для данной конструкции так же, были получены оптимальные топологии для разных соотношений γ_2 и γ_3 с сохранением суммарного количества этих материалов $\gamma_2 + \gamma_3 = 0,75$.

Рисунок 2.25 – Оптимальные топологии балки для различных значений γ_2 и γ_3

Также были получены результаты оптимальных микроструктур для других типов приложения нагрузки. Конструкции и граничные условия рассмотренных

балок приведены на рисунках 2.26 а, 2.27 а. Оптимальные топологии для разных соотношений γ_2 и γ_3 , таких же, как и в предыдущем случае, показаны на рисунках 2.26 б-г и 2.27 б-г.

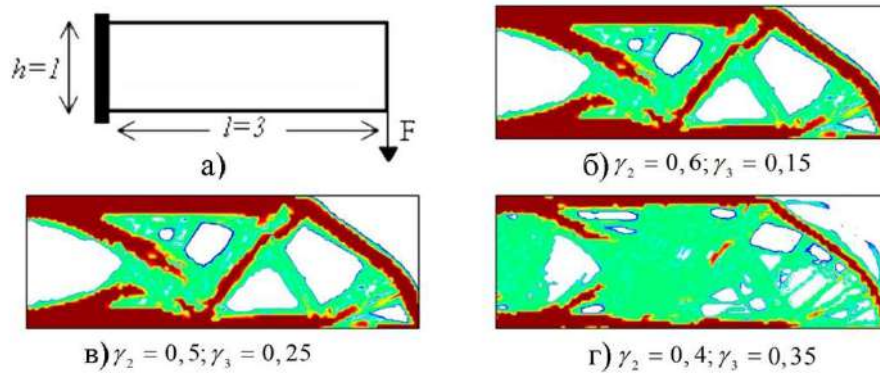


Рисунок 2.26 – Конструкция и граничные условия балки (а), и оптимальные топологии балки для различных значений γ_2 и γ_3 (б-г)

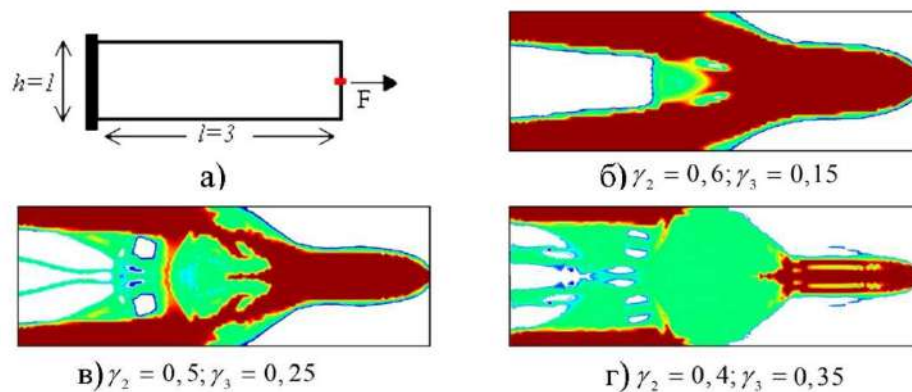


Рисунок 2.27 – Конструкция и граничные условия балки (а), и оптимальные топологии балки для различных значений γ_2 и γ_3 (б-г)

Таблица 2.2 – Значения энергии деформации W для оптимальных конструкций

	$\gamma_2 = 0,4; \gamma_3 = 0,35$	$\gamma_2 = 0,5; \gamma_3 = 0,25$	$\gamma_2 = 0,6; \gamma_3 = 0,15$
Рисунок 2.22	129,72	116,35	101,46
Рисунок 2.26 а	135,84	119,65	108,54
Рисунок 2.27 а	7,48	6,20	5,35

Рассмотрим мостовую конструкцию, изображенную на рисунке 2.28.

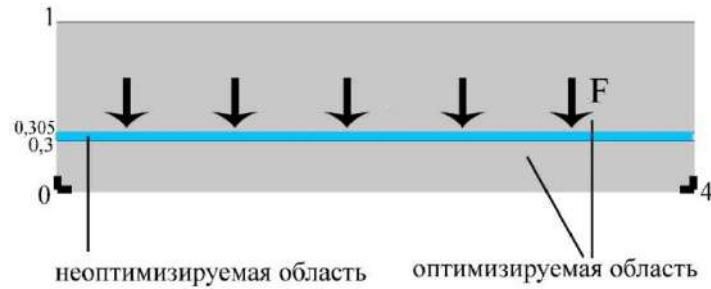


Рисунок 2.28 – Мостовая конструкция

Расчеты для данной конструкции были проведены для разбиения на 11314 конечных и 607 граничных элемента. Количество степеней свободы составляет примерно 24000.

В области оптимизации определено 3 фазы материала с модулями Юнга $E_1 = 1 \cdot 10^{-9}$, $E_2 = 100, 150, 200$ (для трех разных случаев), $E_3 = 300$, а также заданы ограничения на количество каждого из материалов $\gamma_2 = 0,25$; $\gamma_3 = 0,4$.

В результате оптимизации были получены топологии, приведенные на рисунке 2.29 при различных значениях модуля Юнга для материала E_2 . На рисунке 2.29 приведены оптимальные топологии для мостовой конструкции. Здесь красным цветом обозначены области, заполненные материалом $E_3 = 300$, белым цветом – заполненные материалом $E_1 = 1 \cdot 10^{-9}$. На рисунке 2.29 а приведена оптимальная топология для значения $E_2 = 100$ (обозначен голубым в оптимизируемой области), значение энергии деформации W для данной конструкции – 17,54, на рисунке 2.29 б показана оптимальная топология для значения $E_2 = 150$, обозначен зеленым цветом, значение энергии деформации W для данной конструкции – 16,86, на рисунке 2.29 в – оптимальная топология для значения $E_2 = 200$, показан оранжевым цветом, значение W для данной конструкции – 16,12.

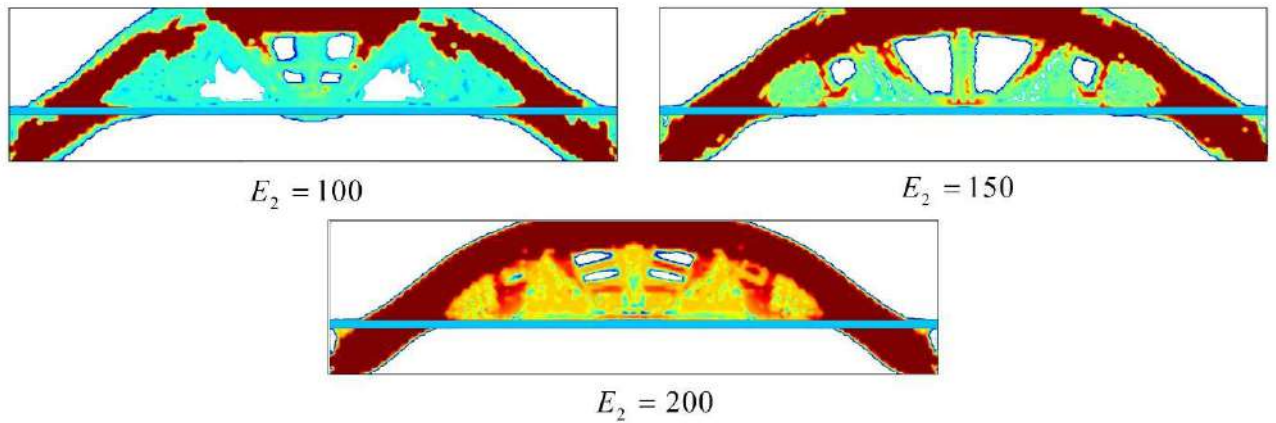
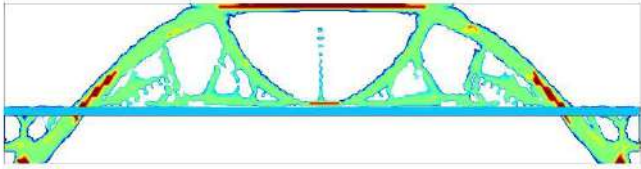
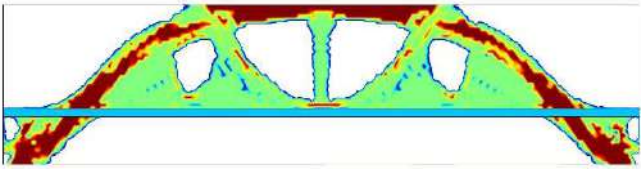


Рисунок 2.29 – Оптимальные топологии для мостовой конструкции

Чтобы продемонстрировать эволюцию решения задачи, в таблице 2.3 приведены топологии на выбранных итерациях для мостовой конструкции при $E_2 = 150$. В первом столбце обозначены номера выбранных итераций, во втором и третьем столбцах приведены значения γ_2 γ_3 на выбранном шаге соответственно, а также значения энергии деформации W в четвертом столбце.

Таблица 2.3 – Значения энергии деформации W для оптимальных конструкций

Номер итерации	γ_2	γ_3	W
19	0,118	0,225	65,14
ТОПОЛОГИЯ			
			
27	0,26	0,227	29,272
ТОПОЛОГИЯ			
			
35	0,4	0,23	17,59
ТОПОЛОГИЯ			

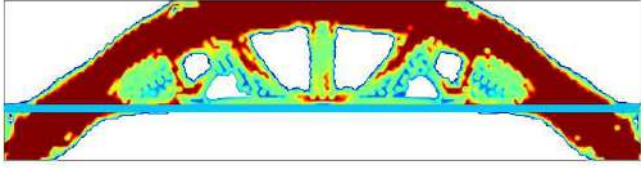
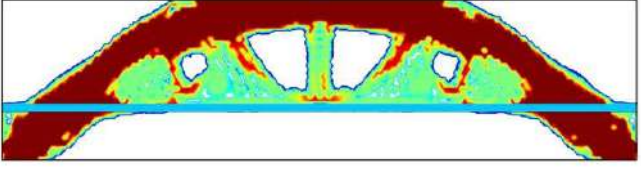
			
45	0,4	0,25	17,54
ТОПОЛОГИЯ			
			

Таблица 2.3 показывает, что для получения оптимальной топологии в данном примере предлагаемым методом достаточно 45 шагов оптимизации. Для других рассмотренных примеров количество шагов отличалось незначительно. Такое небольшое количество итераций демонстрирует высокую сходимость и эффективность данного метода.

Рассмотренные примеры показали, что предлагаемый метод может эффективно решить задачи топологической оптимизации для нескольких материалов без значительного увеличения вычислительных затрат по сравнению с классическим методом SIMP для одного материала. Этот метод легко встраивается в любой существующий алгоритм оптимизации, основанный на классическом методе SIMP, и позволяет решить более сложные задачи структурной оптимизации.

Применение многокомпонентной концепции в топологической оптимизации усложняет процесс поиска решения, но также открывает новые возможности для инженеров за счет появления новых потенциальных альтернатив конструирования, которые трудно предсказать интуитивно.

Функция, рассматриваемая в этом исследовании, может быть легко модифицирована для решения многоцелевых задач. Например, алгоритм может быть использован для создания реализуемых топологий из нескольких материалов для интеллектуальных структур при механических, термических и / или гидростатических нагрузках.

ГЛАВА 3 ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПОЗИТОВ

Известно, что композиционные материалы с улучшенными свойствами могут быть получены за счет модификации топологии их микроструктуры. Подход, основанный на структурной топологической оптимизации, может быть использован в качестве систематического способа для поиска лучшего пространственного распределения фаз составляющих микроструктуру композитов.

В [106-108] предложен метод для проектирования материалов с заданными упругими свойствами на основе топологической оптимизации периодической микроструктурной базовой ячейки. В этом методе в качестве функции цели использован вес, а в качестве проектной переменной – плотность в конечных элементах.

Далее в работе формулируется задача поиска микроструктур для материалов с максимальной жесткостью в виде объемного модуля или модуля сдвига для нового класса задач с микроструктурой, состоящей из набора различных заданных материалов, отверстий и оптимальной топологией усиливающих включений.

Основная идея конструирования микроструктуры композиционного материала, имеющего периодическую структуру, состоит в том, что периодические поля напряжений и деформаций зависят от микроуровня задачи на периодической ячейке [152, 160]. Единственную периодическую ячейку материала возможно проанализировать методом конечных элементов и произвести оптимизацию топологии в этой единственной представительной ячейке вместо всей структуры.

3.1 Топологическая оптимизация композитов при воздействии механических полей

Материалы с экстремальной жесткостью в виде объемного или сдвигового модулей упругости являются примерами обычных задач проектирования материалов.

Предположим, что элементарная ячейка разбита на конечные элементы и каждому элементу присваивается переменная плотность, ρ_e ($e = 1, n$). Следуя закону SIMP в котором модуль Юнга является функцией плотности материала, тензор напряжений считается функцией от модуля Юнга E_0 армирующего материала и искусственно введенной плотности, $\rho_e(\mathbf{x})$, которая выступает в качестве переменной управления в задаче оптимизации:

$$E(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})^p E_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.1)$$

Показатель степени $p \geq 1$ является фактором штрафа и увеличение p приводит к более четкому решению. При $\rho(x)=1$ вся пластина полностью заполнена армирующим материалом. При этом элементы матрицы жесткости связаны с переменной плотностью степенным законом

$$K_e = \rho_e^p \bar{K}_e, \quad (3.2)$$

где \bar{K}_e обозначает номинальную матрицу жесткости элемента e для $\rho_e=1$. Показатель степени p является фактором штрафа, который обычно выбирают равным $p = 4$ или $p = 5$.

Элементарная ячейка материала показана на рисунке 3.1. Она включает область топологической оптимизации (3) и может содержать технологические вставки (2) и отверстия (1).

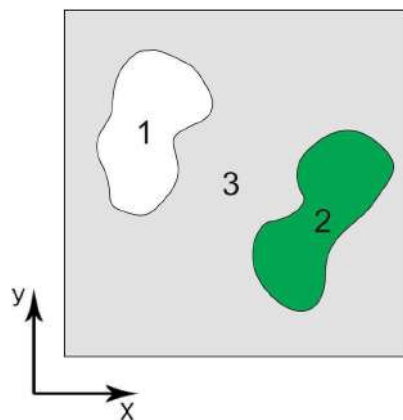


Рисунок 3.1 – Квадратная базовая ячейка: 1 – технологические отверстия; 2 – технологические вставки; 3 – область топологической оптимизации

Для двух виртуальных задач конечно-элементное уравнение, для элементарной ячейки может быть записано как

$$KU^{(kl)} = F^{(kl)}, j=1,2, \quad (3.3)$$

в котором через $U^{(kl)}$ и $F^{(kl)}$ обозначены эквивалентные вектора узловых перемещений и сил для виртуальной задачи kl , соответственно. Глобальная матрица жесткости для всей элементарной ячейки имеет вид

$$K = \sum_{e=1}^n L_e^T K_e L_e = \sum_{e=1}^n L_e^T \rho_e^p \bar{K}_e L_e \quad (3.4)$$

По определению, чувствительность объемной жесткости K_e , к изменению плотности элемента, то есть переменной ρ_e , выражается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_e}{\partial \rho_e} &= \frac{\partial}{\partial \rho_e} (C_{1111}^e + C_{1122}^e) = \frac{\partial}{\partial \rho_e} \left(\frac{\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}}{2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho_e} (U^{(11)T} K U^{(11)}) = U^{(11)T} \frac{\partial K}{\partial \rho_e} U^{(11)} + 2 \frac{\partial U^{(11)T}}{\partial \rho_e} K U^{(11)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из уравнения (3.3) видно, что, так как производная от $F^{(11)}$ по ρ_e равна нулю, то

$$\frac{\partial K}{\partial \rho_e} U^{(11)} = -K \frac{\partial U^{(11)}}{\partial \rho_e} \quad (3.6)$$

В результате (3.5) можно упростить следующим образом:

$$\frac{\partial K_e}{\partial \rho_e} = -U^{(11)T} \frac{\partial K}{\partial \rho_e} U^{(11)} = -U^{(11)T} p \frac{K_e}{\rho_e} U^{(11)} = -\frac{p}{\rho_e} (U_e^{(11)T} K_e U_e^{(11)}) = -\frac{p}{\rho_e} K_e \quad (3.7)$$

Аналогично для чувствительности коэффициента жесткости C_{1212}^e получаем

$$\frac{\partial C_{1212}^e}{\partial \rho_e} = -\frac{p}{\rho_e} C_{1212}^e \quad (3.8)$$

Оптимизация топологии микроструктуры материалов заключается в поиске оптимальной микроструктуры элементарной ячейки, которая обладает

максимальной жесткостью в виде объемного или сдвигового модулей упругости. Например, если необходимо максимизировать жесткость при сдвиге C_{1212}^e , определяемую для двухмерной элементарной ячейки, то задача оптимизации в терминах переменной плотности может быть строго записана в виде

$$\min \left\{ \frac{(1-q)(-\bar{\sigma}_{12}^{(12)})}{\sigma_0} + q \frac{h_0 h_{\max}}{A} \int_{\Omega} |\nabla \rho_e(\mathbf{x})|^2 d\Omega \right\}, \quad (3.9)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \rho_e(\mathbf{x}) d\Omega \leq \gamma A, \\ 0 &< \delta \leq \rho_e(\mathbf{x}) \leq 1, \quad e = 1, n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь q – коэффициент позволяющий сбалансировать функцию цели (первое слагаемое) и функцию штрафа друг с другом, h_0 – первоначальный размер сетки и h_{\max} – текущий размер сетки и σ_0 – нормирующий множитель. Кроме того, γ обозначает процент экономии материала, Ω – область элементарной ячейки, A обозначает общий объем материала всех элементов при $\rho_e(\mathbf{x})=1$ в элементарной ячейке. Поскольку для получения численного решения жесткость не должна полностью исчезать, положим в последнем неравенстве $\delta = 10^{-5}$, чтобы избежать сингулярности начальной матрицы жесткости при оптимизации. Второе слагаемое в функции цели (3.9) позволяет исключить появление так называемого эффекта «шахматной доски» в оптимальной микроструктуре.

При оптимизации объемной жесткости микроструктуры K_e целевая функция (3.9) примет следующий вид:

$$\min \left\{ \frac{-(1-q)(\bar{\sigma}_{11}^{(11)} + \bar{\sigma}_{22}^{(11)})}{\sigma_0} + q \frac{h_0 h_{\max}}{A} \int_{\Omega} |\nabla \rho_e(\mathbf{x})|^2 d\Omega \right\}. \quad (3.11)$$

При топологической оптимизации в задаче наличие отверстий в программе оптимизации дополнительно учитывать не нужно. Достаточно знать на их границе только граничные условия свободных границ, т. е.

$$F_n = F_\tau = 0. \quad (3.12)$$

Поле контрольных переменных $\rho(x)$ и модуль Юнга $E(x)$, определяемый формулой, задается только в оптимизируемой области, а в областях фиксированных включений задаем значения модуля Юнга, соответствующие материалу этих включений.

Если нижнюю границу $\rho_{\min}(x) = \delta$ принять равной очень малому числу $\delta = (10^{-9})^{1/p}$, то область будет состоять из пустот (отверстий) и базового материала включений с модулем Юнга E_0 .

Для заполнения пустот, т.е. создания композита содержащего включения армирующего материала с модулем Юнга E_f , помещенных в матрицу с модулем Юнга E_m , в последнем неравенстве (3.10) в качестве нижнего ограничения $\rho_{\min}(x)$ для поля контрольных переменных необходимо взять величину, равную

$$\rho_{\min} = \left(\frac{E_m}{E_f} \right)^{1/p}. \quad (3.13)$$

С использованием метода гомогенизации и схемы анализа чувствительности найдем оптимальную микроструктуру композита периодической структуры, состоящей из стали с параметрами $E_0 = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \nu = 0,33$, выступающей в качестве включения, и матрицы с параметрами $E = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Pa}, \nu = 0,33$. Периодическая ячейка композита содержит технологические отверстия (квадрат и эллипс) и показана на рисунке 3.2. В этом случае из выражения $\delta = (E_m/E_f)^{1/p}$ следует, что параметр $\delta = 0,00125^{(1/p)}$. Это значение параметра δ обеспечивает заполнение пространства между включениями материалом матрицы.

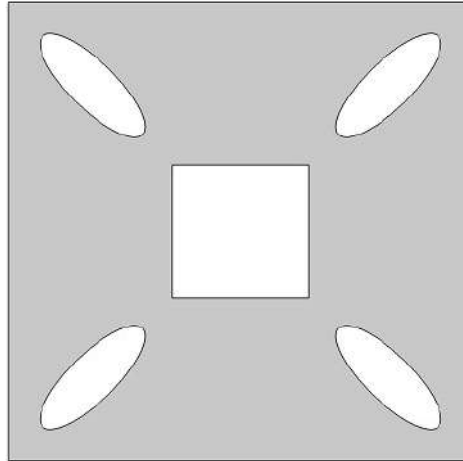


Рисунок 3.2 – Периодическая ячейка композита
с технологическими отверстиями

Композит содержит периодическую систему квадратных отверстий со стороной $c = 0,6$ и периодическую систему эллиптических отверстий с полуосями $a = 0,3; b = 0,1$. Центр эллипса в первой четверти находится в точке с координатами $(0,65; 0,65)$.

Первая задача состоит в оптимизации объемной жесткости микроструктуры с целевой функцией (3.11), вторая задача – в максимизации сдвиговой жесткости с целевой функцией (3.9) с ограничениями (3.10).

Чтобы изучить влияние количества конечных элементов в разбиении на результаты топологической оптимизации, изучается задача (3.9), (3.10) и (3.11), (3.10). Оптимальные микроструктуры для различного числа конечных элементов представлены в таблице 3.1.

Из приведенных выше результатов видно, что задача топологической оптимизации быстро сходится к оптимуму как на грубых, так и на мелких сетках. Окончательные значения K_{opt}^{eff} и G_{opt}^{eff} также сходятся. Поскольку максимум в такой задаче может быть не глобальным, мы провели исследование решений для различных начальных условий для ρ_{ini} . Результаты для $N = 1089$ представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.1 – Оптимальные микроструктуры для различного числа конечных элементов







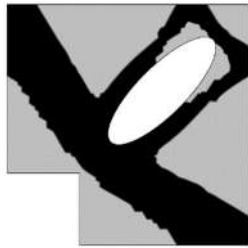
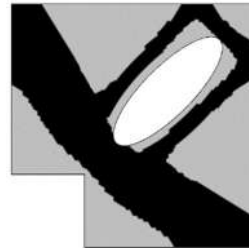




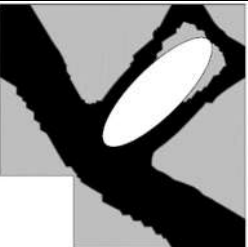
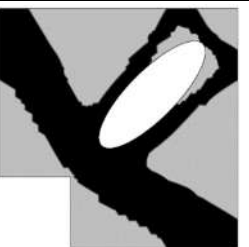
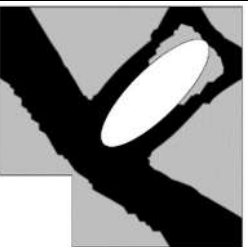

N	256	484	1089	4489
Оптимальная структура				
K_{opt}^{eff} , Па	$4,7490 \cdot 10^{10}$	$4,9097 \cdot 10^{10}$	$5,0575 \cdot 10^{10}$	$5,2549 \cdot 10^{10}$
Оптимальная структура				
G_{opt}^{eff} , Па	$1,6541 \cdot 10^{10}$	$1,7146 \cdot 10^{10}$	$1,8072 \cdot 10^{10}$	$1,9029 \cdot 10^{10}$

Таблица 3.2 – Влияние начальных условий на оптимальную микроструктуру

ρ_{ini}	0,3	0,4	0,6	0,7
Оптимальная структура				
K_{opt}^{eff} , Па	$5,0205 \cdot 10^{10}$	$5,0189 \cdot 10^{10}$	$5,0575 \cdot 10^{10}$	$4,9127 \cdot 10^{10}$
Оптимальная структура				
G_{opt}^{eff} , Па	$1,8060 \cdot 10^{10}$	$1,8060 \cdot 10^{10}$	$1,8072 \cdot 10^{10}$	$1,8257 \cdot 10^{10}$

Из результатов таблицы 3.2 следует, что все полученные структуры подобны и лучшее значение для K_{opt}^{eff} и G_{opt}^{eff} достигается, если $\rho_{ini} = 0.6$.

В результате были получены оптимальные микроструктуры, которые показаны на рисунке 3.3 (красные участки соответствуют материалу включения, синие – материалу матрицы) для доли включений $\gamma = 0.5$. Область разбита на треугольные конечные элементы, от 256 до 4489 конечных элементов.



а) максимизация объемной жесткости б) максимизация сдвиговой жесткости

Рисунок 3.3 – Оптимальные микроструктуры

В первой задаче при оптимизации по максимуму объемной жесткости K_e было получено значение $K_e^{opt} = 6,329 \cdot 10^{10} Pa$ при начальном значении $K_e^{beg} = 2,108 \cdot 10^{10} Pa$. Для второй задачи при оптимизации сдвиговой жесткости G_e получено значение $G_e^{opt} = 2,178 \cdot 10^{10} Pa$ при начальном значении $G_e^{beg} = 0,647 \cdot 10^{10} Pa$. Таким образом, оптимальная микроструктура дает усиление исходной более, чем в 3 раза.

Как видно на рисунке 3.3, процесс оптимизации, в первую очередь, усиливает конструкцию возле отверстий в центре по краям квадрата и эллипса. На рисунке 3.3 б видно, что усиливающие элементы расположены под углом 45° .

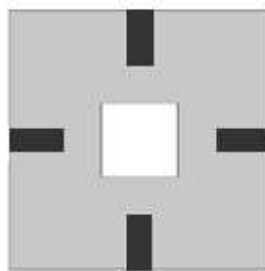


Рисунок 3.4 – Периодическая ячейка композита с технологическими вставками (темный цвет)

В качестве второго примера рассмотрим композит периодической структуры, состоящий из повторяющихся ячеек, содержащих, кроме отверстий, еще и технологические вставки из заданного материала (рисунок 3.4). Квадратные отверстия имеют размеры $0,6 \times 0,6$, а прямоугольные вставки размеры $0,4 \times 0,1$.

Значения параметров возьмем такие же, как и в предыдущем случае. Оптимальные топологически микроstructures приведены на рисунке 3.5.



а) максимизация объемной жесткости б) максимизация сдвиговой жесткости

Рисунок 3.5 – Оптимальные микроstructures

Максимальное значение объемной жесткости K_e , полученное в процессе оптимизации, составляет $K_e^{opt} = 4,747 \cdot 10^{10} Pa$ при начальном значении $K_e^{beg} = 1,481 \cdot 10^{10} Pa$. Для второй задачи максимальное значение сдвиговой жесткости G_e составляет $G_e^{opt} = 0,843 \cdot 10^{10} Pa$ при начальном значении $G_e^{beg} = 0,239 \cdot 10^{10} Pa$. Таким образом, оптимальная микроstructure дает усиление исходной более чем в 2,2 раза.

3.2 Топологическая оптимизация композитов при наличии межфазного слоя

Для установления связи между свойствами композиционного материала с микроstructureй и его макроскопическими характеристиками (эффективными упругими свойствами) применяется метод гомогенизации. Формулируется задача поиска микроstructures для материалов с максимальной жесткостью, в виде объемного модуля или модуля сдвига, для нового класса задач с микроstructureй, состоящей из набора различных заданных материалов,

окруженных межфазным слоем и оптимальной топологией усиливающих включений.

На границе раздела матрицы и включения образуется межфазный слой (МФС) толщины h в виде дополнительной фазы. Эта фаза отличается по своим свойствам от фазы матрицы и фазы включения. Прочностные характеристики композитов во многом определяются структурой и свойствами межфазного слоя. Для традиционного композита, где радиус волокон/частиц находится в диапазоне нескольких микрометров или больше, влияние межфазного слоя на жесткость материала может быть незначительным и материал может быть смоделирован как двухфазная система материалов. Однако если наполнителем являются наноразмерные волокна/частицы или углеродные нанотрубки, то его влияние на эффективные свойства композита может быть существенным. Например, для $h/r_0 = 0,8$, где r_0 – радиус включения, межфазная объемная доля превышает 200 % от объемной доли включения, так что упругие свойства межфазного слоя доминируют над свойствами включения.

Таким образом, в целом термомеханические свойства композита будут зависеть от отношения толщины МФС к размеру включения. Кроме того, параметры самого межфазного слоя, как правило, являются неоднородными по толщине.

Обычно оценки эффективных упругих характеристик КМ не учитывают возможного наличия МФС между матрицей и включением, и поэтому влияние МФС не учитывается при топологической оптимизации.

Анализ этой зависимости, а также влияния формы включений на эффективные характеристики и оптимальную микроструктуру композиционного материала является одной из целей настоящей работы. Далее формулируется задача поиска микроструктур для материалов с максимальной жесткостью в виде объемного модуля или модуля сдвига для нового класса задач с микроструктурой, состоящей из набора различных заданных включений, окруженных МФС, и оптимальной топологией усиливающих включений.

При моделировании были рассмотрены два возможных закона изменения модуля упругости межфазного слоя по толщине.

Первый – экспоненциальный:

$$E_i(r) = E_f e^{-k(r-r_0)}, \quad k = -\frac{1}{h} \ln \frac{E_m}{E_f}. \quad (3.14)$$

где обозначено: E_m, E_f – модули Юнга матрицы и включения радиуса r_0 , соответственно, $E_i(r)$ – переменный модуль Юнга МФС, $r \in [r_0, r_0 + h]$, h – толщина МФС.

Второй – степенной:

$$E_i(r) = E_m \left[1 + D \left(\frac{r_0 - r}{h} \right)^Q \right], \quad (3.15)$$

где $D = (E_f - E_m)/E_m$ и Q принимает значения от 0,2 до 5.

Математическое моделирование проводилось для объемной доли включения 20 % при следующих значениях свойств материала: $E_f = 110 \cdot 10^9$ Па, $\nu_f = 0,27$, $E_m = 1,2 \cdot 10^9$ Па, $\nu_m = 0,45$, $\nu_i = 0,36$. Графики изменения $E_i(r)$ по толщине межфазного слоя для $r_0 = 0,5$ и $h = 0,1r_0$ показаны на рисунке 3.6: а) график изменения $E_i(r)$ для закона (3.14); б) для закона (3.15) при $Q = 0,5$ – пунктирная кривая и $Q = 2$ сплошная кривая; в) график изменения $E_i(r)$ для закона (3.15) и значения $h = 0,1r_0$.

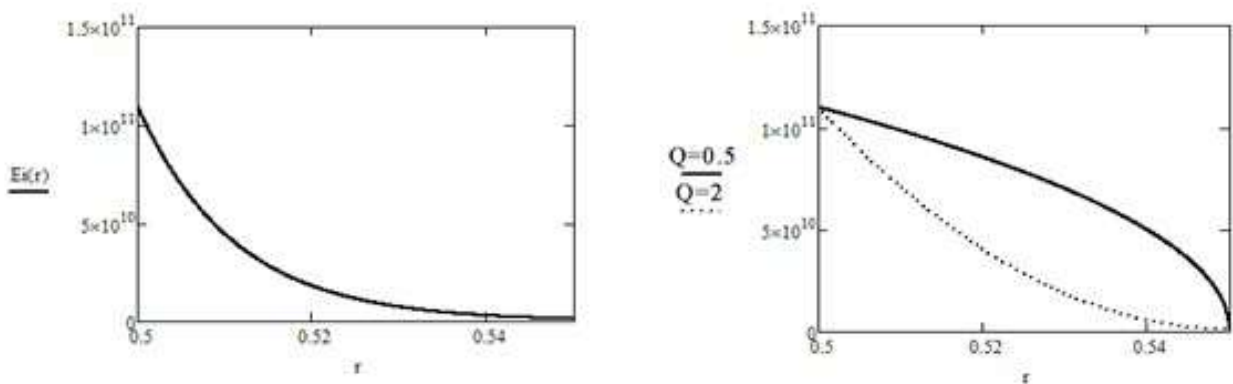


Рисунок 3.6 – Кривые зависимости $E_i(r)$:

а) для закона (3.14); б) для закона (3.15);

Из определения периодичности граничные условия в случае плоского напряженного состояния можно получить только тогда, когда рассматривается одна четвертая часть элементарной ячейки, как это показано на рисунке 3.7. Эти граничные условия для характеристической функции можно записать в виде: для случая нагрузки $i = j$ (1 или 2) на $y_1 = 0, y_1 = Y_1$ $\chi_1^{(ij)} = 0$ и на $y_2 = 0, y_2 = Y_2$ $\chi_2^{(ij)} = 0$; для случая нагрузки $ij = 12$ (или 21) на $y_1 = 0, y_1 = Y_1$ $\chi_2^{(12)} = 0$ и на $y_2 = 0, y_2 = Y_2$ $\chi_1^{(12)} = 0$ (рисунок 3.7).

Первая задача состоит в оптимизации объемной жесткости микроструктуры с целевой функцией (3.11), вторая задача – в максимизации сдвиговой жесткости с целевой функцией (3.9) с ограничениями (3.10).

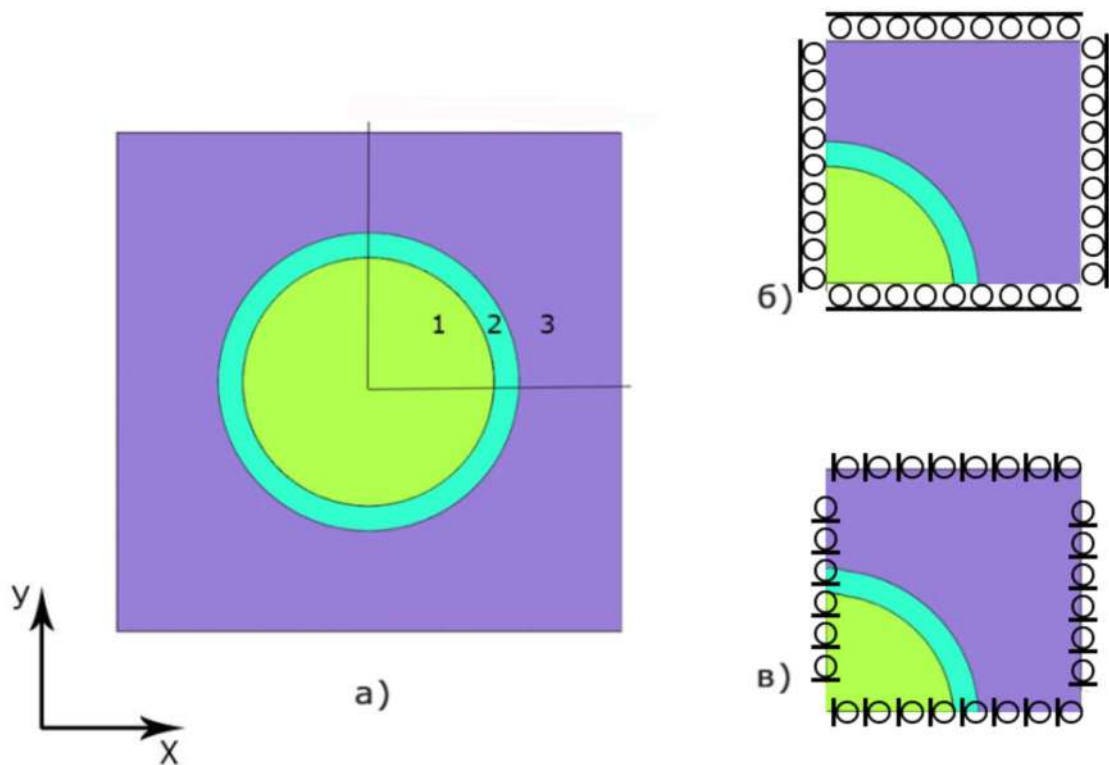


Рисунок 3.7 – Периодическая ячейка композита – а): 1 – включение, 2 – межфазный слой, 3 – область топологической оптимизации Ω и граничные условия для случаев б), в) на четверти базовой ячейки

Были решены задачи оптимизации для структуры, показанной на рисунке 3.7 а. для доли армирующего материала по области оптимизации 50%,

$E_{inc} = 250 \cdot 10^9$, законов распределения материала (3.14) и (3.15) и различных толщин межфазного слоя.

В таблице 3.3 приведены значения эффективных модулей для оптимальных микроструктур для различных толщин межфазного слоя и законов распределения материала.

Таблица 3.3 – Значения эффективных модулей

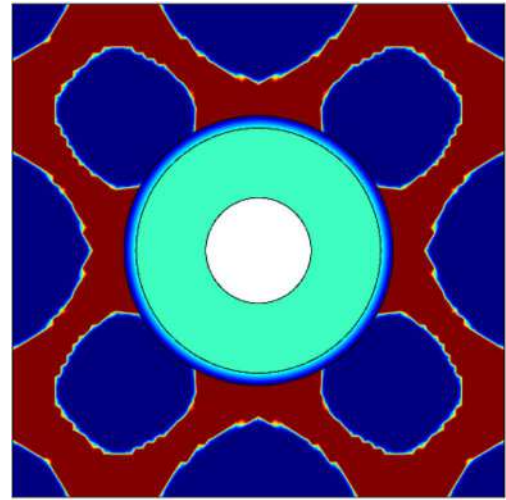
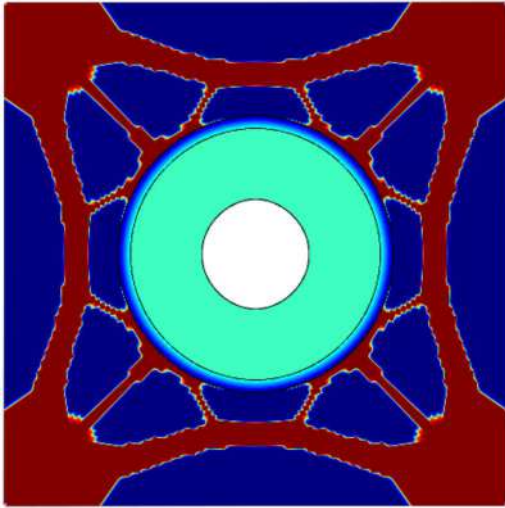
Закон распределения	h=0,005		h=0,05		h=0,1	
	G^e , ГПа	K^e , ГПа	G^e , ГПа	K^e , ГПа	G^e , ГПа	K^e , ГПа
(1)	35,504	109,466	29,500	94,403	26,400	85,053
(2), Q=0,5	36,420	112,29	35,525	112,48	34,705	111,81
(2), Q=1	36,305	111,73	34,351	106,990	32,386	101,19
(2), Q=2	36,002	108,63	31,349	92,800	27,917	89,181

В качестве второго примера топологической оптимизации приведем результаты исследования для трубчатого включения с теми же материалами и межфазным слоем толщины 0.05 для закона распределения (3.15), значение параметра Q=1 для различных значений отношения внешнего и внутреннего радиусов трубки, причем объемная доля включений остается неизменной и равной 20 %. Результаты исследования приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Оптимальные эффективные модули в зависимости от R

Внешний радиус	R=0,55	R=0,6	R=0,65
G^e , ГПа	31,513	30,558	28,880
K^e , ГПа	90,596	78,470	71,347

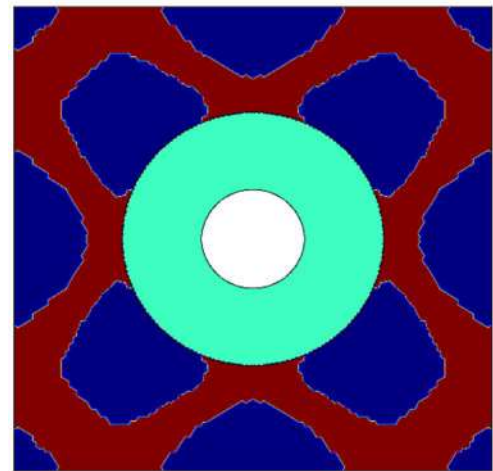
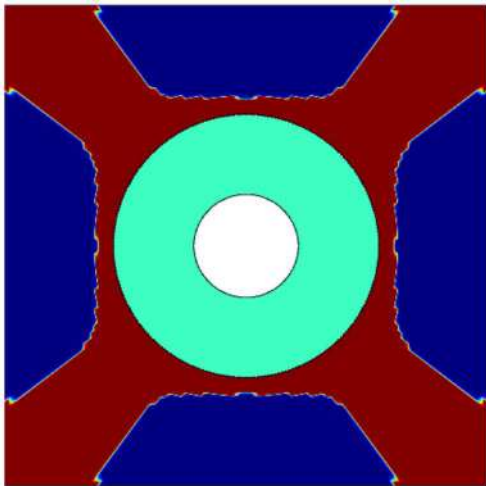
Для примера на рисунке 3.8 показаны оптимальные микроструктуры, полученные для трубчатой структуры с внешним радиусом включения $R=0,55$ с межфазным слоем. Для сравнения была проведена топологическая оптимизация для той же микроструктуры без межфазного слоя. Оптимальные микроструктуры показаны на рисунке 3.9 (красные участки соответствуют материалу включения, синие – материалу матрицы).



а) максимизация объемной жесткости

б) максимизация сдвиговой жесткости

Рисунок 3.8 – Оптимальные микроструктуры с межфазным слоем



а) максимизация объемной жесткости

б) максимизация сдвиговой жесткости

Рисунок 3.9 – Оптимальные микроструктуры без межфазного слоя

Для структуры без межфазного слоя оптимальные значения эффективных модулей сдвига и объемного модуля равны $G^e=35,331$ ГПа, $K^e=101,731$ ГПа соответственно. Для структуры с межфазным слоем значения эффективных модулей ниже, так как модуль Юнга МФС в среднем ниже модуля включения.

Как видно из рисунков 3.8, 3.9, оптимальная топология для структуры с МФС существенно отличается от структуры без МФС. В процессе оптимизации топология армирующих элементов в обоих случаях приобретает ячеистую структуру, но при наличии МФС структура более тонкая.

3.3 Топологическая оптимизация композитов при совместном воздействии механических и температурных полей

Далее ставится и решается задача топологической оптимизации микроструктуры материала с особыми многофункциональными свойствами при противонаправленных механических и термических свойствах входящих в композит материалов. Исследуется влияние на оптимальную топологию композиционного материала наличие двух, входящих в конфронтацию, критериев оптимальности [159].

Определившись с упругой и термической гомогенизацией в главе 1, возможно поставить задачу оптимизации, которая позволит определить оптимальную топологию для термоупругой задачи. Такие задачи особенно интересны, когда упругие и термические свойства материалов сильно конкурируют друг с другом, и оптимальные топологии для отдельных задач оптимизации сильно отличаются друг от друга. Чтобы решить поставленную задачу, необходимо одновременно учитывать как упругие, так и термические свойства материала.

Предположим, что элементарная периодическая ячейка разбита на конечные элементы и каждому элементу присваивается переменная плотность ρ_n ($n = 1, N$). Следуя закону SIMP, в котором в качестве переменной управления в задаче оптимизации выступает искусственно введенная плотность, $\rho_n(\mathbf{x})$, модуль Юнга $E(\mathbf{x})$ и коэффициент теплопроводности $k(\mathbf{x})$ для двухкомпонентной смеси на конечном элементе с номером n могут быть записаны в виде

$$E_n(\mathbf{x}) = E_1 \rho_n^p(\mathbf{x}) + E_2 (1 - \rho_n^p(\mathbf{x})). \quad (3.21)$$

$$k_n(\mathbf{x}) = k_1 \rho_n^p(\mathbf{x}) + k_2 (1 - \rho_n^p(\mathbf{x}))$$

где E_1 , E_2 – модули Юнга используемых в задаче материалов, k_1 , k_2 – коэффициенты теплопроводности материалов, соответственно.

Показатель степени $p \geq 1$ является фактором штрафа, и увеличение p приводит к более четкому разделению фаз материалов. Показатель степени p обычно выбирают равным $p = 4$ или $p = 5$ [14].

Обычно задачи оптимизации на максимум для удобства расчетов сводятся к задачам на минимум.

Пусть M^e означает одну из механических величин: K^e – эффективный объемный модуль или G^e – эффективный модуль сдвига. Целевую функцию определим в виде

$$\min \left\{ (q-1) \left(\frac{\omega M^e}{M_b} + \frac{(1-\omega) \text{tr}(\mathbf{k}^e)}{k_b} \right) + q \frac{h_0 h_{\max}}{A} \int_Y |\nabla \rho(\mathbf{y})|^2 dY \right\}. \quad (3.22)$$

Здесь ω – весовой коэффициент, учитывающий вклад от целевых функций упругого и теплового слагаемых и M_b, k_b – заданные значения эффективного упругого модуля (модуля сдвига или объемного эффективного модуля) и коэффициента теплопроводности, используемые для нормировки. Второе слагаемое является функцией штрафа для исключения эффекта «шахматной доски» в процессе оптимизации, h_0 – первоначальный размер сетки и h_{\max} – текущий размер сетки. Величина $0 \leq q \leq 1$ – заданный коэффициент, позволяющий сбалансировать функцию цели и функцию штрафа друг с другом. Следует отметить, что поиск минимума функции, (3.22) соответствует задаче поиска максимума функции, стоящей после множителя $(q-1)$ за счет того, что $q-1 \leq 0$ [47].

Изопараметрические ограничения для искусственно введённой плотности $\rho(\mathbf{x})$ выберем в виде

$$0 \leq \int_Y \rho(\mathbf{y}) dY \leq \gamma A, \quad (3.23)$$

$$0 < \delta \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1. \quad (3.24)$$

В формуле (3.23) через A обозначен общий объем материала оптимизируемой области Y в элементарной периодической ячейке при $\rho(\mathbf{x})=1$ и γ обозначает долю материала с параметрами E_1, k_1 .

Поскольку для получения численного решения жесткость не должна полностью исчезать, положим, в неравенстве (3.24) δ равной некоторой достаточно малой величине, чтобы избежать сингулярности начальной матрицы жесткости при оптимизации.

Численные результаты

Рассмотрим элементарную ячейку, заполненную двумя конкурирующими материалами в соотношении 1:1 ($\gamma = 0,5$), то есть в одном материале модуль Юнга больше, чем во втором, а в другом материале коэффициент теплопроводности больше, чем в первом. Примем для первого материала $E_1 = 1, k_1 = 5$, для второго – $E_2 = 5, k_2 = 1$. Расчеты проводились МКЭ при разбиении элементарной ячейки на 2500 элементов. Для решения задачи оптимизации был использован метод подвижных асимптот.

На рисунке 3.10 показана сходимость процесса максимизации объемного модуля. На рисунке 3.10 кривая 1 показывает изменение первого слагаемого целевой функции (3.22) при $\omega = 1$, кривая 2 – второго слагаемого, кривая 3 соответствует значениям интеграла в неравенстве (3.23). Видно, что для получения достаточно точного решения необходимо как минимум 25 итераций.

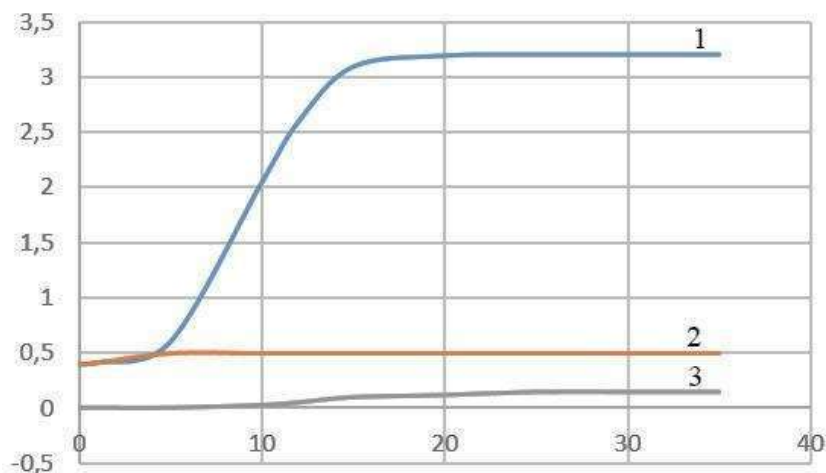
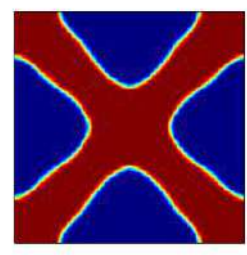
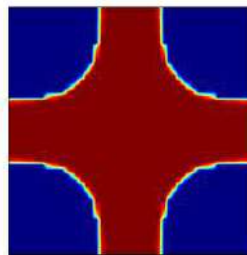
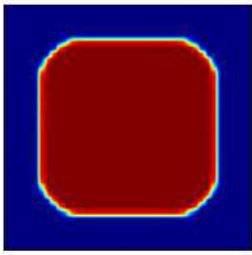


Рисунок 3.10 – Сходимость процесса максимизации объемного модуля

Вначале решалась задача максимизации эффективного коэффициента теплопроводности, то есть весовой коэффициент в (3.22) $\omega = 0$. Далее на всех рисунках красный цвет означает первый материал, синий – второй материал. На

рисунке 3.11 а показана полученная оптимальная топология для этой задачи. Оптимальное значение $tr(\mathbf{k}^e)/2 = 2,364$. При этом модуль сдвига и объемный модуль $G^e = 1,619$, $K^e = 2,428$. Для задачи максимизации объемного модуля ($\omega = 1$), оптимальная топология показана на рисунке 3.11 б, оптимальное значение $K^e = 3,219$, значение $tr(\mathbf{k}^e)/2 = 1,725$. Для модуля сдвига ($\omega = 1$) оптимальная топология показана на рисунке 3.11 в. Оптимальное значение $G^e = 1,946$ и значение $tr(\mathbf{k}^e) = 1,633$.



а) Максимизация $tr(\mathbf{k}^e)$
($\omega = 0$)

б) Максимизация K^e
($\omega = 1$)

в) Максимизация G^e
($\omega = 1$)

Рисунок 3.11 – Оптимальные микроструктуры композитов
для двух конкурирующих базовых материалов

Как можно заметить из рисунка 3.11, оптимальные микроструктуры для максимальной теплопроводности и механических модулей сильно отличаются друг от друга. При решении многокритериальных задач решение следует искать только среди элементов множества альтернатив, оптимальных по Парето, т. е. тех решений, где не существует другого решения, которое было бы предпочтительнее. На рисунке 3.12 приведены оптимальные топологии в зависимости от весового коэффициента ω для оптимизации по двум критериям: эффективных модуля сдвига и коэффициента теплопроводности, входящие во множество решений Парето. Горизонтальная ось соответствует относительным значениям модуля сдвига $G^e / G^e(1)$, $G^e(1)$ - оптимальное значение модуля сдвига при $\omega = 1$. По вертикальной оси откладываются относительные значения $tr(\mathbf{k}^e) / tr(\mathbf{k}^e(0))$, $tr(\mathbf{k}^e(0)) / 2$ - оптимальное значение коэффициента теплопроводности при $\omega = 0$.

При изменении весового коэффициента ω в целевой функции (3.22) происходит смена приоритетов от оптимизации по критерию максимума коэффициента теплопроводности при $\omega = 0$ до оптимизации по критерию максимума объемного модуля упругости или модуля сдвига.

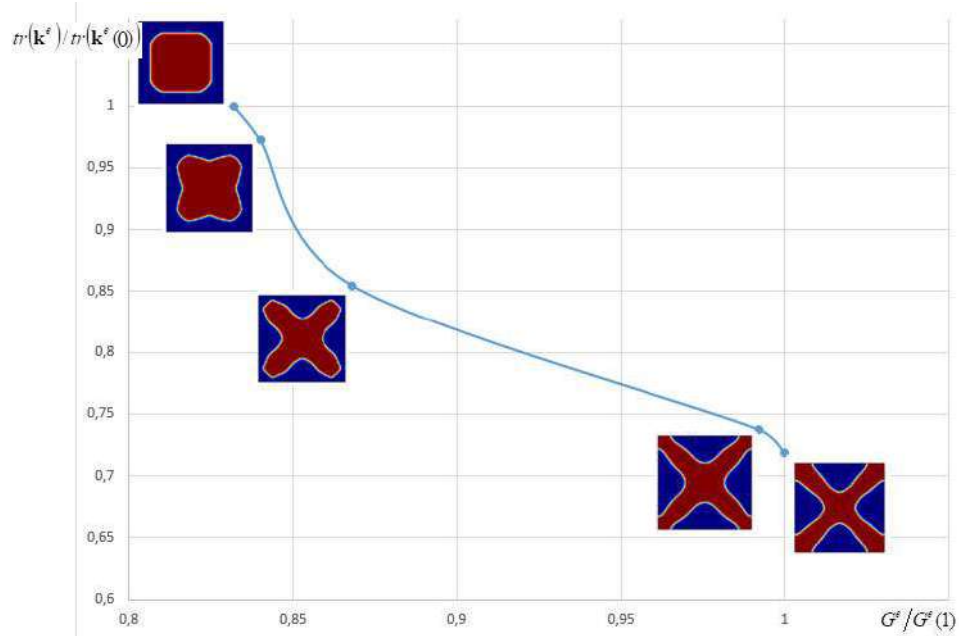


Рисунок 3.12 – Оптимальные топологии из множества Парето

На рисунке 3.13 кривая 1 показывает относительное изменение оптимального эффективного объемного модуля $K^e(\omega)/K^e(1)$, кривая 2 показывает аналогичную величину для коэффициента теплопроводности.

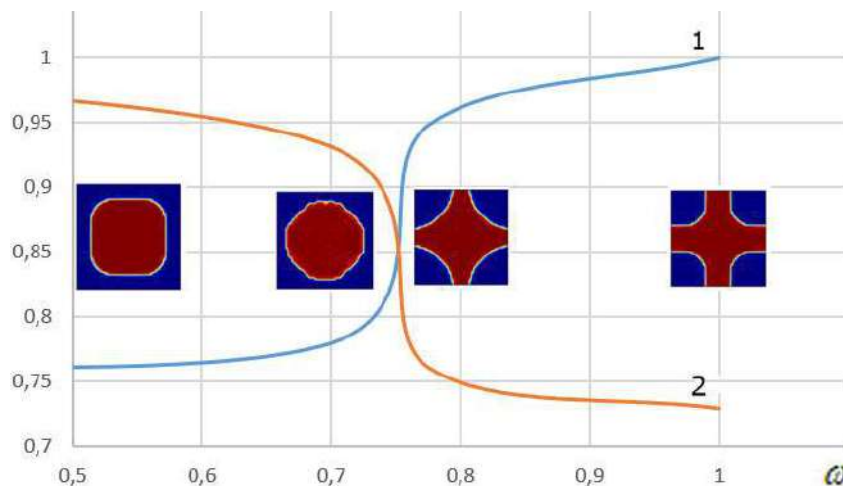


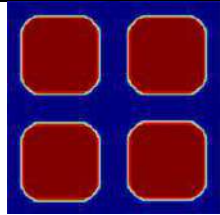
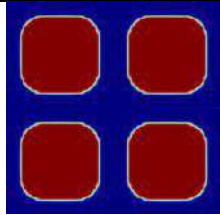
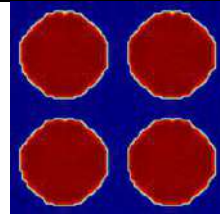
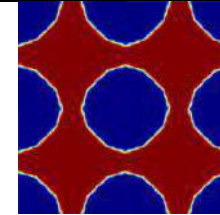
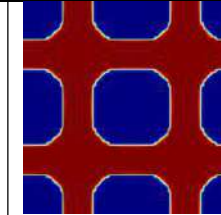
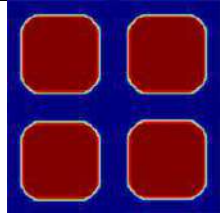
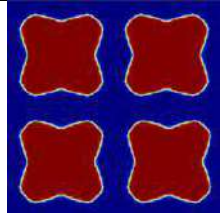
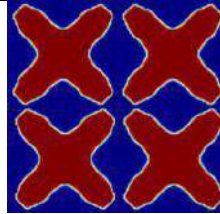
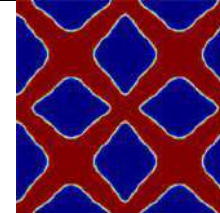
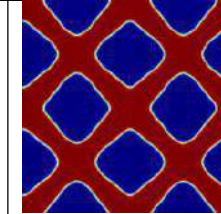
Рисунок 3.13 – Относительные изменения:

- 1 – эффективного объемного модуля $K^e(\omega)/K^e(1)$;
- 2 – коэффициента теплопроводности $tr(k^e(\omega))/tr(k^e(0))$

Из рисунка 3.13 видно, что в задаче оптимизации объемного модуля при значении весового коэффициента $\omega \approx 0,75$ происходит смена приоритетов в функции цели. При $\omega < 0,75$ приоритетной является максимизация коэффициента теплопроводности, при $\omega > 0,75$ – объемного модуля. Оптимальные конструкции, получаемые при значениях ω , достаточно близких к точке перехода $\omega = 0,75$, сильно зависят от начального приближения и значения их эффективных модулей резко изменяются при переходе точки $\omega = 0,75$.

В таблице 3.5 приведены оптимальные топологии, значения эффективных механических модулей и коэффициента теплопроводности при различных значениях ω .

Таблица 3.5 – Оптимальные микроструктуры и значения эффективных модулей

ω	0	0,2	0,7	0,775	1
					
K^e	2,4288	2,4545	2,5100	3,0513	3,2190
$tr(\mathbf{k}^e)$	2,3640	2,3401	2,2027	1,8002	1,7249
ω	0	0,2	0,5	0,715	1
					
G^e	1,6191	1,6348	1,6900	1,9314	1,9463
$tr(\mathbf{k}^e)$	2,3640	2,2099	1,9413	1,6744	1,6331

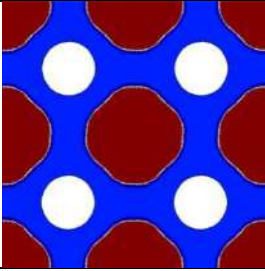
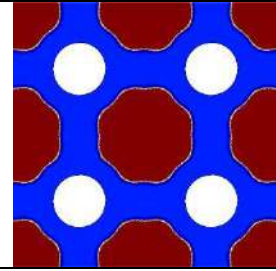
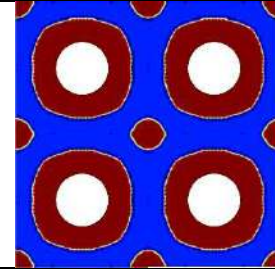
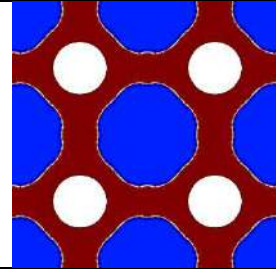
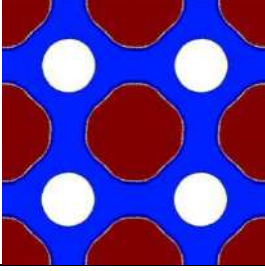
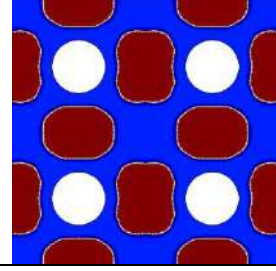
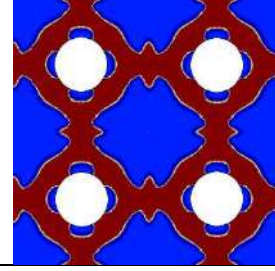
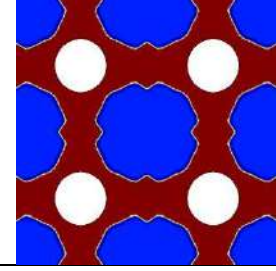
В этом примере баланс достигается для K^e при значении весового коэффициента $\omega \approx 0,75$, а для G^e при $\omega \approx 0,7$. Из таблицы 3.5 видно, что резкая смена оптимальной микроструктуры происходит именно в этих точках.

Топологическая оптимизация композитов с технологическими отверстиями (порами)

Кроме сплошных структур, состоящих из двух конкурирующих материалов, были рассмотрены композитные структуры, содержащие кроме двух материалов еще и отверстия заданной формы.

Рассмотрим элементарную ячейку композита, имеющего технологическое отверстие круглой формы радиуса 0,3, или ячейку с квадратным отверстием такой же площади. Как и в предыдущем случае, оптимизируемая область ячейки заполнена двумя конкурирующими материалами в соотношении 1:1 с теми же параметрами. В таблице 3.6 приведены полученные оптимальные микроструктуры композитов и значения эффективных модулей для композита с отверстием круглой формы при различных значениях ω .

Таблица 3.6 – Оптимальные микроструктуры и значения эффективных модулей для композита с отверстием круглой формы

ω	0	0,2	0,5	1
				
K^e	1,5281	1,5809	2,1414	2,5262
$tr(\mathbf{k}^e)$	1,9783	1,9382	1,8334	1,3070
				
G^e	1,2160	1,3434	1,5361	1,6338
$tr(\mathbf{k}^e)$	1,9783	1,8326	1,3626	1,2438

Микроструктура, оптимальная для K^e , схожа по форме с микроструктурой, получаемой для ячейки без отверстия, а форма оптимальной микроструктуры для значения $tr(\mathbf{k}^e)$ похожа на микроструктуру для композита без отверстия, но

сдвинута на $1/4$ ячейки. Оптимальные топологии для ячейки с отверстием при изменении ω изменяются более плавно, чем при оптимизации однородной ячейки, изменение приоритетов в функции цели происходит без резкого перехода.

В таблице 3.7 показаны оптимальные микроструктуры и приведены значения эффективных модулей для ячейки с отверстием квадратной формы.

Таблица 3.7 – Оптимальные микроструктуры и значения эффективных модулей для композита с отверстием квадратной формы

ω	0	0,2	0,5	1
K^e	1,5073	1,5634	2,0590	2,3727
$tr(\mathbf{k}^e)$	1,9035	1,7934	1,8063	1,2943
G^e	1,1788	1,2905	1,5709	1,6093
$tr(\mathbf{k}^e)$	1,9035	1,8345	1,2583	1,2422

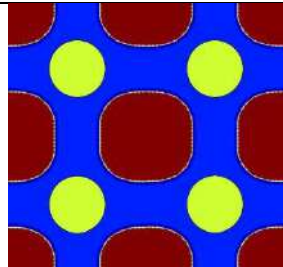
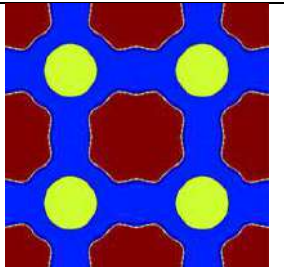
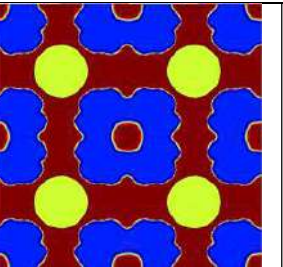
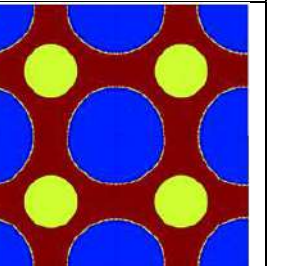
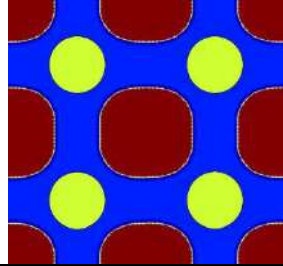
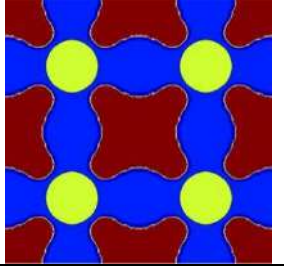
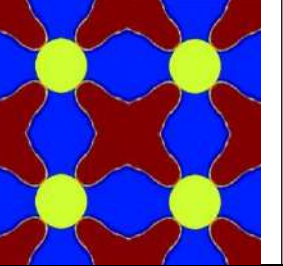
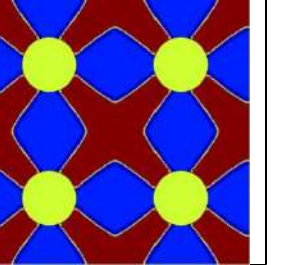
Как можно заметить из таблиц 3.6, 3.7, наличие отверстий в ячейке существенно меняет микроструктуры, оптимальные для G^e . В отличие от отверстия круглой формы квадратное отверстие сильнее изменяет оптимальные топологии для всех эффективных модулей. Переход от микроструктуры, оптимальной для теплового модуля, к микроструктурам, оптимальным для механических модулей, также происходит более плавно, чем в случае оптимизации однородной ячейки.

Топологическая оптимизация композитов с технологическими включениями

Рассмотрим структуры, содержащие включения заданной формы из материала, отличного от первых двух. Форма и размер включений совпадают с

характеристиками отверстий в предыдущем случае. На рисунках области включений обозначены желтым цветом. Форма и местоположение включений заданы, модуль Юнга включения равен $E_{inc} = 3$ и коэффициент теплопроводности $k_{inc} = 3$. Соотношение первого и второго материалов в остальной части области, как и ранее, равно 1:1. В таблице 3.8 приведены результаты для композитов, имеющих включения круглой формы.

Таблица 3.8 – Оптимальные микроструктуры и значения эффективных модулей

ω	0	0,2	0,5	1
Композиционный материал с включением круглой формы				
				
K^e	2,6069	2,6254	3,0512	3,367
$tr(\mathbf{k}^e)$	2,6844	2,6683	1,7779	1,6626
				
G^e	1,7792	1,8013	1,8782	1,9416
$tr(\mathbf{k}^e)$	2,6844	2,5697	2,3977	1,7052

Наличие включения круглой формы в отличие от отверстий принципиально не меняет формы топологий для полной оптимизации механических или теплового модулей, однако смягчает переход при смене приоритетов в функции цели и повышает значения оптимальных эффективных модулей для всех критериев. В таблице 3.9 представлены результаты для композита с включением квадратной формы.

Таблица 3.9 – Оптимальные микроструктуры и значения эффективных модулей

ω	0	0,2	0,5	1
Композит с включением квадратной формы				
K^e	2,6143	2,7014	3,0023	3,1615
$tr(\mathbf{k}^e)$	2,5402	2,5364	1,8873	1,8085
G^e	1,7488	1,7497	1,9005	1,9273
$tr(\mathbf{k}^e)$	2,5402	2,4476	2,4397	1,7220

Наличие включения квадратной формы сильно влияет на топологию при решении тепловой задачи и при решении задачи оптимизации по критерию максимума объемного модуля упругости K^e . В процессе исследования выявлена сильная зависимость оптимальной топологии распределения материалов в микроструктуре композитов от вида целевой функции. Проведено исследование трансформации оптимальной топологии микроструктуры композита при изменении весового коэффициента от $\omega = 0$ (максимизация теплопроводности) до $\omega = 1$ (максимизация механических модулей и построено множество альтернатив, оптимальных по Парето. Приведенные примеры показывают невозможность одновременного достижения наилучших показателей для обоих случаев в связи с противоречащими друг другу критериями в функции цели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построены математические модели, алгоритмы и созданы программные комплексы для исследования напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы, находящихся в температурном поле, на основе пространственной теории упругости и деформационной теории пластичности. Выявлено, что наличие угловых точек для пластин сложной геометрии приводит к увеличению зон пластических деформаций, вырезы являются концентраторами напряжений в пластине, что влияет на ее несущую способность.

2. Предложены методы и алгоритмы проектирования топологически оптимальных на минимум или максимум отклика структуры при заданных ограничениях конструкций различных областей практического применения, состоящих из однокомпонентных и многокомпонентных материалов. Изучена проблема топологической оптимизации конструкций, состоящих из нескольких материалов, с использованием модифицированного метода интерполяции материалов на основе одной непрерывной переменной проектирования, приведены численные результаты. Установлено, что предложенный метод может эффективно решить задачи топологической оптимизации для нескольких материалов без значительного увеличения вычислительных затрат, он может быть легко встроен в любой существующий алгоритм оптимизации, основанный на классических методах, и позволяет решить более сложные задачи структурной оптимизации.

3. Достоверность получаемых результатов подтверждается физическим и численным экспериментом для топологической оптимизации конструкции. Выявлено, что предложенный алгоритм позволяет увеличить запас прочности пластины за счет оптимальной конфигурации армирования в несколько раз по сравнению с обычной двухслойной пластиной.

4. Разработаны алгоритмы и программы для расчета эффективных характеристик композиционных материалов на основе метода гомогенизации. Достоверность алгоритма подтверждается совпадением полученных результатов и

результатов, полученных другими авторами. Получены результаты для композиционных материалов с включениями различных форм.

5. Созданы новые корректные математические модели, алгоритмы и комплексы программ для топологической оптимизации композиционных материалов с многофункциональными требованиями к эффективным характеристикам как для двухкомпонентной смеси, так и для композиционных материалов с порами или технологическими включениями, учтена возможность наличия межфазного слоя между матрицей и включением. Выявлено, что невозможно одновременно достичь наилучших показателей для обоих случаев в связи с противоречащими друг другу критериями в функции цели.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Баничук Н. В.** Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
- [2] **Бахвалов Н. С.** Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1040–1048.
- [3] **Димитриенко Ю.И., Соколов А.П.** Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. 66.
- [4] **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
- [5] **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний: Пер. с фр. М.: Мир, 1984. 472 с.
- [6] **Хилл Р.** Упругие свойства составных сред: некоторые теоретические принципы // Механика: сб. переводов. 1964. № 5. С. 127–143.
- [7] **Amir O.** A topology optimization procedure for reinforced concrete structures // Comput. Struct. 2013. V. 114 P. 46–58.
- [8] **Awrejcewicz J., Krysko V.A., Sopenko A.A., Zhigalov M.V., Kirichenko A.V., Krysko A.V.** Mathematical modelling of physically/geometrically non-linear micro-shells with account of coupling of temperature and deformation fields // Chaos, Solitons and Fractals. 2017. V. 104. P. 635–654.
- [9] **Awrejcewicz J., Krysko V.A., Zhigalov M.V., Krysko A.V.** Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical non-linearity // Nonlinear Dynamics. 2018. V. 91. № 2. P. 1191–1211.
- [10] **Babuska I.** Homogenisation approach in Engineering. // Lectures Notes in Economics and Math. Systems. 1976. № 134. P. 137-153.
- [11] **Bakhvalov N.S., Panasenko G.** Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media. Netherlands: Springer, 1989. 366 p.

- [12] **Belytschko T., Xiao S., Parimi C.** Topology optimization with implicit functions and regularization // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003. V. 57. № 8. P. 1177–1196.
- [13] **Bendsoe M.P., Sigmund O.** Topology optimization: theory, methods and applications. 2nd ed. Berlin: Springer, 2004. 370 p.
- [14] **Bendsoe M.P., Sokolowski J.** Design sensitivity analysis of elastic-plastic analysis problems // *Mech. Struct. Mach.* 1988. V. 16 P. 81–102.
- [15] **Bendsoe M.P., Kikuchi N.** Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1988. V. 71. № 2. P. 197–224.
- [16] **Bendsoe M.P., Sigmund O.** Material interpolations in topology optimization // *Archives of Applied Mechanics*. V. 69. P. 635–654.
- [17] **Bendsoe M.P.** Optimal shape design as a material distribution problem. M., 1989. *Structural Optimization* V. 1. P. 193–202.
- [18] **Bendsoe M.P.** G-closure and homogenization problems arising in plate optimization // *Optimization Methods in Structural Design, EUROMECH-Colloquium 164*. Wien: B. 1. Wissenschaftsverlag. 1982. P. 270 – 275.
- [19] **Bendsoe M.P.** Material interpolation schemes in topology optimization // *Archive of Applied Mechanics*. 1999. V. 69. P. 9–10.
- [20] **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North Holland. 1978. 700 p.
- [21] **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Homogenization and ergodic theory // *Banach Center Publications* 5.1. 1979. P. 15–25.
- [22] **Benveniste Y.** A new approach to the application of Mori-Tanaka theory in composite materials // *Mech. Mater.* 1987. V. 6. P. 147-157.
- [23] **Birger A.** Some general methods of solution for problems in the theory of plasticity // *Prikladnaya Matematika I Mekhanika*. 1951. V. 25. № 6. P. 765-770.
- [24] **Bishop J. F. W., Hill R.** A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-center metal // *Philos. Mag.* 1951. V. 42. P. 1298–1307.

- [25] **Bishop J. F. W., Hill R.** A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses // *Philos. Mag.* V. 2. P. 414–427.
- [26] **Borovkov A.I., Sabadash V.O.** Finite element multiscale homogenization and sequential heterogenization of composite structures // *Simulation: Leading Design into the New Millennium: Proc. 10th Int. ANSYS'2002 Conf.* Pittsburgh, USA, 2002. 15 p.
- [27] **Bourgat J.F.** Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients // *Lecture notes in mathematics.* Berlin: Springer-Verlag, 1977. V. 704. P. 330–356.
- [28] **Breslavsky I.** Stress distribution over plates vibrating at large amplitudes // *Journal of Sound and Vibration.* 2012. V. 331, P. 2901–2910.
- [29] **Chen T., Dvorak G. J., Benveniste Y.** Mori-Tanaka Estimate of the overall elastic moduli of certain composite materials // *J. Appl. Mech.* 1992. V. 59: P. 539–546.
- [30] **Chen X., Mai Y.** Micromechanics of rubber-toughened polymers // *Journal of Materials Science.* 1998. V. 33. № 14. P. 3529–3539.
- [31] **Chen J, Ge K, Zhang C, Guo J, Yang L, Song D, Li F, Xu Z, Xu Y, Mai Y.** Vacuum-free, Room-temperature Organic Passivation of Silicon: towards Very Low Recombination of Micro/Nano-Textured Surface Structures // *Appl. Mater. Interfaces.* 2018. V. 10. № 51. P. 44890–44896.
- [32] **Cheng G.** On non-smoothness in optimal design of solid, elastic plates // *Int. J. Solids Struct.* 1981. V. 17. P. 795–810.
- [33] **Cheng G.** An investigation concerning optimal design of solid elastic plates // *Int. J. Solids Struct.* 1981. V. 17. P. 305–323.
- [34] **Cheng G.** Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates // *Int. J. Solids Struct.* 1982. V. 18. № 2. P. 153–169.
- [35] **Cho S., Choi J.** Efficient topology optimization of thermo-elasticity problems using coupled field ad joint sensitivity analysis method // *Finite Elements in Analysis and Design.* 2005. V. 41. № 15. P. 1481–1495.

- [36] **Cox H. L.** The elasticity and strength of paper and other fibrous materials // British J. Appl. Sciences. 1952. V. 3. P. 72–79.
- [37] **Deaton J. D., Grandhi R. V.** Stiffening of restrained thermal structures via topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2013. V. 48. № 4. P. 731–745.
- [38] **Dharmin, P., Khushbu, P. and Chetan, J.** A Review on Stress Analysis of an Infinite Plate with Cut-Outs // International Journal of Scientific and Research Publications. 2012. V. 2. P. 1–7.
- [39] **Duysinx P., Bendsøe M.P.** Topology optimization of continuum structures with local stressconstraints // International Journal for Numerical Method Engineering. 1998. V. 3. P. 1453-1478.
- [40] **Dzhabrailov Sh., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P.** Accounting for physically nonlinear deformation of the shell under flat loading based on the finite element method // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. V. 675. 9 p.
- [41] **Eschenauer H. A.** Topology optimization of continuum structures // Appl. Mech. Rev. 2001. V. 54. № 4. P. 331-390.
- [42] **Eshelby J. D.** The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. R. Soc. A. London, 1957. V. 241. P. 376–396.
- [43] **Fanni M.** A comparison between different topology optimization methods // Engineering Journal. 2013. V. 12.
- [44] **Gibiansky L., Sigmund O.** Multiphase elastic composites with extremal bulk modulus // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2000. V. 48. P. 461–498.
- [45] **Guest J. K., Asadpoure A., Ha S.-H.** Eliminating beta-continuation from Heaviside projection and density filter algorithms // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2011. V. 44. № 4, P. 443–453.
- [46] **Guest J. K., Prevost J. H., Belytschko T.** Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2004. V. 61. № 2. P. 238–254.

- [47] **Guest J., Prevost J.** Optimizing multifunctional materials: design of microstructures for maximized stiffness and fluid permeability // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. V. 43. P. 7028–7047.
- [48] **Halpin J. C., Kardos J. L.** The Halpin-Tsai equations: a review // *PolymEngSci*. 1976. V. 16. P. 344–352.
- [49] **Halpin J., Tsai S. W.** Effects of Environmental Factors of Composite Materials // Air Force Materials Research Laboratory Technical Report AFML-TR. 1969. P. 67-423
- [50] **Halpin J. C.** Primer on composite materials: analysis. Lancaster: Technomic Publishing Company. 1984. 187 p.
- [51] **Hannes L., Gauch., Francesco Montomoli, Vito L. Tagarielli** The response of an elastic-plastic clamped beam to transverse pressure loading *International Journal of Impact Engineering* 112 (2018) 30–40
- [52] **Hashin Z., Shtrikman S.** A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals // *J. Mech. Phys. Solids*. 1962. V. 10. P. 343–352.
- [53] **Hashin Z., Shtrikman S.** On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // *J. Mech. Phys. Solids*. 1962. V. 10. P. 335–342.
- [54] **Hashin Z., Shtrikman S.** A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 1963. V. 11. P. 127–140.
- [55] **Hermans J. J.** The elastic properties of fiber oriented materials when the fibers are aligned // *Proc. Konf. / ed. Akad. Wetensch B*. 1967. V. 65 P. 1–9.
- [56] **Hill R.** A self-consistent mechanics of composite materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. V. 13. P. 213-222.
- [57] **Hill R.** Theory of mechanical properties of fibrestrengthened materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 1964. V. 12. № 4. P. 199-218.
- [58] **Hui C. Y., Shia D.** Simple formulae for the effective moduli of unidirectional aligned composites // *Polym. Eng. Sci*. 1998. V. 38. P. 774–782.
- [59] **Ilyushin A., Lensky V. S.** *Strength of Materials*. 1st Edition. Oxford: Pergamon Press, 1967. 452 p.

- [60] **Jakiela M. J., Chapman C., Duda J., Adewuya A., Saitou K.** Continuum structural topology design with genetic algorithms // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000. V. 186. P. 339-356.
- [61] **Jonsmann J., Sigmund, O., Bouwstra S.** Compliant thermal microactuators. *Sensors and Actuators*. 1999. V. 76. P. 463–469.
- [62] **Korelc J., Stupkiewicz S.** Closed-form matrix exponential and its application in finite strain plasticity // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2014. V. 98. P. 960-987.
- [63] **Kruijf N., Zhou S., Li Q., Mai Y.W.** Topological design of structures and composite materials with multiobjectives // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. V. 44. P. 7092–7109
- [64] **Krysko V. A., Awrejcewicz J., Bruk V. M.** On existence and uniqueness of solutions to coupled thermomechanics problem of non-homogeneous isotropic plates // *J. Appl. Anal.* 2002. № 8 (1). P. 129–139.
- [65] **Larsen U., Sigmund O., Bouwstra S.** Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative poisson's ratio // *Journal of Microelectromechanical Systems*. 1997. V. 6. № 2. P. 99–106.
- [66] **Li L., Martel C., Bartali A. El., Witz J. F., Charkaluk E.** Experimental investigation of kinematic and thermal localizations of perforated plate under plastic deformations // *13th International Conference on Quantitative Infrared Thermography (QIRT 2016)*. 2016. P. 509–510.
- [67] **Li Q., Steven G., Xie Y.** Thermoelastic topology optimization for problems with varying temperature fields // *Journal of Thermal Stresses*. 2001. V. 24. P. 347–366.
- [68] **Li Q., Steven G., Xie Y., Qurein O.,** Shape and topology design for heat conduction by evolutionary structural optimization // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1999. V. 42. P. 3361–3371.
- [69] **Luo Y, Wang M. Y., Zhou M., Deng Z.** Topology optimization of reinforced concrete structures considering control of shrinkage and strength failure // *Comput. Struct.* 2015. V. 157. P. 31–41.

- [70] **Lurie K.A.** Regularization of optimal design problems for bars and plates. / JOTA. 1982. Part I. V. 37. P. 499–522.
- [71] **Manevitch L. I., Andrianov V. G., Oshmyan I. V.** Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures. Great Britain: Springer–Verlag, 2002. 264 p.
- [72] **Mateusz K., Henryk A., Grzegorz G.** Stress Distribution in a Plate with a Holes Along the Diagonal Distribution Under Plane Biaxial Load // Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering. 2020. V. 70. P. 91–100.
- [73] **Min S., Nishiwaki S., Kikuchi N.** Unified topology design of static and vibrating structures using multiobjective optimization // Computers and Structures. 2000. V. 75. P. 93–116.
- [74] **Mohammadzadeh B., Noh H-C.** Investigation into buckling coefficients of plates with holes considering variation of hole size and plate thickness // Mechanics. 2016. V. 22. 167–175.
- [75] **Monsef Ahmad H., Sheidaii M., Tariverdilo S., Formisano A. De Matteis G.** Experimental and Numerical Study of Perforated Steel Plate Shear Panels // International Journal of Engineering. 2020. V. 33. № 4. P. 520-529.
- [76] **Mori T., Tanaka K.** Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metall. 1973. V. 21 P. 571–574.
- [77] **Nakanishi Y., Nakagiri S.** Structural optimization under topological constraint represented by homology groups (topological constraint on one-dimensional complex by use of zero- and one-dimensional homology groups) // Jpn. Soc. Mech. Engrg. (JSME) Int. J. A. 1997. V. 40. № 3. P. 219–227.
- [78] **Nakanishi Y.,** Application of homology theory to topology optimization of three-dimensional structures using genetic algorithm // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001. V. 190. № 29. P. 3849–3863.
- [79] **Navarrina F., Muinos I., Colominas I., Casteleiro M.** Topology optimization of structures: A minimum weight approach with stress constraints // Advances in Engineering Software. 2005. V. 36. P. 599–606.

- [80] **Niordson F.** Some new results regarding optimal design of elastic plates // Optimization Methods in Structural Design EUROMECH-Colloquium 164, Wien: B. I.-Wissenschaftsverlag. 1982. P. 380–386.
- [81] **Olhoff N., Lurie K.A., Cherkaev A.V.** Sliding regimes of anisotropy in optimal design of vibrating plates // Int. J. Solids Struct. 1981. V. 17. № 10. P. 931–948.
- [82] **Pedersen N. L.** Maximization of eigenvalues using topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2000. V. 20. P. 2–11.
- [83] **Pedersen N. L.** Topology optimization of laminated plates with prestress // Computers and Structures. 2002. V. 80. P. 559–570.
- [84] **Prager W., Shield R.** Optimal Design of Multi-Purpose Structures // International Journal of Solids and Structures. 1968. V. 4. № 4. P. 469–475.
- [85] **Prager W., Taylor J.** Problems of optimal structural design // Journal of Applied Mechanics. 1968. V. 35. P. 102–106.
- [86] **Qiu Y. P., Weng G. J.** On the application of Mori-Tanaka's theory involving transversely isotropic spheroidal inclusions // Int. J. Eng. Sci. 1990. V. 28. P. 1121–1137.
- [87] **Querin O., Steven G., Xie Y.** Evolutionary structural optimization (ESO) using a bidirectional algorithm // Engineering Computations. 1998. V. 15. P. 1031–1048.
- [88] **Rao S. S.** Analysis of Three-Dimensional Problems // In book The Finite Element Method in Engineering (Sixth Edition). 2018. P. 427–455.
- [89] **Reuss A.** Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // Z. Angew. Math. Mech. 1929. V. 9. P.: 49–58.
- [90] **Rietz A.** Weld optimization with stress constraints and thermal load // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2012. V. 46. P. 755–760.
- [91] **Rietz A.** Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2001. V. 21. P. 159–163.

- [92] **Rodrigues H., Fernandes P.** A material-based model for topology optimization of thermoelastic structures // *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 1995. V. 38. № 12, P. 1951–1965.
- [93] **Rozvany G. I. N., Bendsoe M. P., Kirsch U.** Layout optimization of structures // *Applied Mechanics Reviews*. 1995. V. 48. P. 41–119.
- [94] **Shia S., Zhu L., Yud T.X.** Dynamic modelling of elastic-plastic beams under impact // *International Journal of Impact Engineering*. 2019. V. 126. P. 1–10.
- [95] **Sanchez-Palencia E.** Non-homogeneous media and vibration theory // *Lecture Notes in Physics*. Berlin: Springer Verlag, 1980. V. 127. 398 p.
- [96] **Sapountzakis E. J., Tsipiras V. J.** Inelastic nonuniform torsion of bars of doubly symmetric cross section by BEM // *Comput. Struct.* 2011. V. 89. P. 2388–2401.
- [97] **Schmit L.A.** Some approximation concepts for structural synthesis // *AIAA Journal*. 1974. V. 12. P. 692–699.
- [98] **Sethian J. A., Smerenka P.** Level set methods for fluid interfaces // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2003. V. 35. P. 341–372.
- [99] **Sethian J., Wiegmann A.** Structural boundary design via level set and immersed interface methods // *Journal of Computational Physics*. 2000. V. 163. № 2. P. 489–528.
- [100] **Sethian J. A.** Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999. 2nd ed. 420 p.
- [101] **Sigmund O.** Morphology-based black and white filters for topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2007. V. 33, № 4-5, P. 401–424.
- [102] **Sigmund O.** A 99-line topology optimization code written in Matlab // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2001. V. 21. P. 120–127.
- [103] **Sigmund O.** Design of multiphysics actuators using topology optimization – Part I: One-material structures // *Computer Methods in Applied Mechanics and References Engineering*. 2001. V. 190. P. 6577–6604.

- [104] **Sigmund O.** Design of multiphysics actuators using topology optimization – Part II: Two-material structures // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001. V. 190. P. 6605–6627.
- [105] **Sigmund O., Maute K.** Topology optimization approaches // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2013. V. 48. № 6. P. 1031–1055.
- [106] **Sigmund O.** Design of Material Structures using Topology Optimization. PhD Thesis. Denmark Technical University. 1994. 109 p.
- [107] **Sigmund O.** Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem // *Int. J. Solids Structures*. V. 31. № 17. P. 2313–2329.
- [108] **Sigmund O.** Tailoring materials with prescribed elastic properties // *Mechanics of Materials*. 1995. V. 20. P. 351–368.
- [109] **Sigmund O.** Morphology-based black and white filters for topology optimization // *Struct. Multidisc. Optim.* 2007. V. 33. P. 4–5.
- [110] **Sigmund O.** Morphology-based black and white filters for topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2007. V. 33. № 4. P. 401–424.
- [111] **Sigmund O.** A new class of extremal composites // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2000. V. 48. P. 397–428.
- [112] **Sigmund O., Torquato S.** Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1997. V. 45. P. 1037–1067.
- [113] **Stolpe M., Svanberg K.** An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. (2001). V. 22. P. 116–124.
- [114] **Stolpe M., Svanberg K.** An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2001. V. 22. № 2. P. 116–124.
- [115] **Supar, K., Ahmad, H.** XFEM modelling of multi-holes plate with single-row and staggered holes configurations // *MATEC Web Conf.* 2017. V. 103. № 02031. 8 p.

- [116] **Svanberg K.** The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization // International Journal for Numerical Method in Engineering. 1987. V. 24. P. 359–373.
- [117] **Svanberg K.** The Method of Moving Asymptotes – Modelling aspects and solution schemes // Lecture Notes for the DCAMM course Advanced Topics in Structural Optimization. 1998. 24 p.
- [118] **Svanberg K.** The Method of Moving Asymptotes (MMA) with Some Extensions. In: Rozvany, G.I.N. (eds) Optimization of Large Structural Systems // NATO ASI Series. 1993. V. 231. P. 555–566.
- [119] **Tandon G. P., Weng G. J.** The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites // Polym. Compos. 1984. V. 5. P. 327–333.
- [120] **Tartar L.** Estimation de coefficients homogeneises // Lecture Notes in Mathematics book series. V. 704. 2006. P. 364–373.
- [121] **Tavakoli R., Mohseni S.** Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems: a 115-line MATLAB implementation // Struct. Multidisc Optim. 2013. V. 49. № 4. P. 621–642.
- [122] **Taya M., Chou T-W.** On two kinds of ellipsoidal inhomogeneities in an infinite elastic body: an application to a hybrid composite. // Int. J. Solids Struct. 1981. V. 17. P. 553-563.
- [123] **Taya M., Mura T.** On stiffness and strength of an aligned short-fiber reinforced composite containing fiber-end cracks under uniaxial applied stress // J. Appl. Mech. 1981. V. 48. P. 361-367.
- [124] **Thi T. V. T., Shapiro D.** Nonlinear deformation analysis for precast prestressed concrete beam systems // FORM-2019. Web of Conferences 97. 2019. 03039. 13 p.
- [125] **Torquato S., Hyun S., Donev A.,** Optimal design of manufacturable three-dimensional composites with multifunctional characteristics // Journal of Applied Physics. 2003. V. 94. № 9. P. 5748–5755.

- [126] **Torquato S., Hyun S., Donev A.** Multifunctional composites: optimizing microstructures for simultaneous transport of heat and electricity // *Phys Rev. Lett.* 2002. V. 89. № 26. P. 1–4
- [127] **Voight W.** Über die Beziehung zwischen den beiden lastizitätskonstanten isotroper Körper // *Wied Ann.* 1889. V. 38. P. 573–587
- [128] **Voight W.** *Lehrbuch Kristall physic.* Berlin: Teubner, 1928. P. 962.
- [129] **Vorovich I., Krasovskii Yu. P.** On the Method of Elastic Solutions // *Doklady Akademii nauk SSSR.* 1959. V. 126. №. 4. p. 118–121.
- [130] **Wang Y.** *A Study on Microstructures of Homogenization for Topology Optimization.* Melbourne. Australia, 2003. 315 p.
- [131] **Wang M., Wang X., Guo D.** A level set method for structural topology optimization // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2003. V. 192. № 1-2. P. 227-246.
- [132] **Wang M., Shiro Z., Shiro B.** Multiple scattering and stop band characteristics of flexural waves on a thin plate with circular holes // *Journal of Sound and Vibration.* 2018. V. 416. P. 80–93.
- [133] **Washizu K.** *Variational methods in the theory of elasticity and plasticity.* Pergamon Pr. 3rd edition. 1982. 540 p.
- [134] **Weng G. J.** Some elastic properties of reinforced solids, with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions // *Int. J. Engng. Sci.* 1984. V. 22 P. 845–856.
- [135] **Wriggers P., Hudobivnik B.** A low order virtual element formulation for finite elastoplastic deformation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2017. V. 53. № 8. P. 123–129.
- [136] **Wu K., Yu T.** Simple dynamic models of elastic–plastic structures under impact // *Int. J. Impact Eng.* 2001. V. 25. № 8. P. 735–754.
- [137] **Xie Y., Steven G.** A simple evolutionary procedure for structural optimization. // *Computers and Structures.* 1993. V. 49. P. 885–896.

- [138] **Yin L., Ananthasuresh G. K.** Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme // *Struct. Multidisc Optim.* 2001. V. 23. № 1. P. 49–62.
- [139] **Yin L. Z., Ananthasuresh G. K.** A novel topology design scheme for the multi-physics problems of electro-thermally actuated compliant micromechanisms // *Sensors and Actuators.* 2002. V. A97-98. P. 599–609.
- [140] **Yoo J., Hong H.** A modified density approach for topology optimization in magnetic fields // *International Journal of Solids and Structures.* 2004. V. 41. P. 2461–2477.
- [141] **Yoo J., Lee C.** Topology optimization of a swing arm type actuator using the response surface method // *Microsystem Technologies-Micro-and-Nanosystems-Information Storage and Processing Systems.* 2007. V. 13. № 1. P. 21–31.
- [142] **Yosser M. S., Gong-Tao Wang** Thermomechanical modeling of polymer nanocomposites by the asymptotic homogenization method // *Acta Mech.* 2013. V. 224. P. 1213–1224.
- [143] **Young V., Querin O. M., Steven G. P., Xie Y. M.** 3D and multiple load case bi-directional evolutionary structural optimization (BESO) // *Struct. Optim.* 1999. V. 18. № 2–3. P. 183–192.
- [144] **Yuan Y., Tan P. J., Shojaei K. A., Wrobel P.** Large deformation, damage evolution and failure of ductile structures to pulse-pressure loading // *Int. J. Solids Struct.* 2016. V. 96. P. 320–339.
- [145] **Zhou M.** Topology optimization for Shell Structures with Linear Buckling Responses // *Proceedings of WCCM VI.* 2004. 6 p.
- [146] **Zhou M., Rozvany G.** DCOC: an optimality criteria method for large systems. Part I: theory // *Structural Optimization.* 1993. V. 5. P. 12–25.

Публикации автора

- [147] **Павлов С.П., Бекренев Н.В., Злобина И.В., Бодягина К.С.** Оптимизация армирования элементов микромеханических приборов для геологических изысканий: компьютерное моделирование и эксперимент // *Известия*

- Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2018. Т. 329. № 3. С. 44-52. (*ВАК*)
- [148] **Павлов С.П., Крысько В.А., Бодягина К.С.** К вопросу об оптимизации формы геологических выработок и топологии их укрепления // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2017. Т. 328. № 1. С. 6-12. (*ВАК*)
- [149] **Бодягина К.С., Павлов С.П.** Топологическая оптимизация микроструктуры адгезивов при действии тепловых и механических нагрузок // Математика и математическое моделирование. 2019. № 2. С. 1-28. (*ВАК*)
- [150] **Павлов С.П., Бодягина К.С.** Топологическая оптимизация конструкций, состоящих из нескольких материалов с использованием модифицированного метода SIMP // Математика и математическое моделирование. 2019. № 6. С. 19-34. (*ВАК*)
- [151] **Павлов С.П., Жигалов М.В., Пальков Р.С., Бодягина К.С.** Программа оптимизации формы теплоприемника в замкнутом теплообменнике. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015611600, 02.02.2015. Заявка № 2014662557 от 04.12.2014.
- [152] **Павлов С.П., Жигалов М.В., Пальков Р.С., Бодягина К.С.** Программа оптимизации внутренней микроструктуры композиционных материалов. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015611619, 02.02.2015. Заявка № 2014662617 от 08.12.2014.
- [153] **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Krysko V.A.** Mathematical modeling of planar physically nonlinear inhomogeneous plates with rectangular cuts in the three-dimensional formulation // Acta Mechanica. 2021. V. 232. № 12. P. 4933-4950. (*Q1*)
- [154] **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Bodyagina K.S., Krysko V.A.** On 3d and 1d mathematical modeling of physically nonlinear beams // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2021. V. 134. P. 103734. (*Q1*)

- [155] **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A.** Mathematical modeling of physically nonlinear 3d beams and plates made of multimodulus materials // *Acta Mechanica*. 2021. V. 232. № 9. P. 3441-3469. (Q1)
- [156] **Zhigalov M.V., Bodyagina K.S., Krysko V.A.** Improving multi-material structures using topological optimization and the modified SIMP method // *Journal of Physics: Conference Series. The Fifth Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2020)*. 2021. P. 012001.
- [157] **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Krysko V.A., Bodyagina K.S., Makseev A., Zhigalov M.V.** Identifying inclusions in a non-uniform thermally conductive plate under external flows and internal heat sources using topological optimization // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2021. V. 27 № 9. P. 1649–1671. (Q2)
- [158] **Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Zhigalov M.V., Bodyagina K.S., Krysko V.A., Krysko A.V.** Decreasing shear stresses of the solder joints for mechanical and thermal loads by topological optimization // *Materials*. 2020. V. 13. № 8. P. 1862. (Q2)
- [159] **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Bodyagina K.S., Krysko V.A.** Topological optimization of thermoelastic composites with maximized stiffness and heat transfer // *Composites Part B: Engineering*. 2019. V. 158. P. 319–327. (Q1)
- [160] **Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A.** Design of composite structures with extremal elastic properties in the presence of technological constraints // *Composite Structures*. 2017. V. 174. P. 19-25. (Q1)
- [161] **Krysko A.V., Pavlov S.P., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A., Awrejcewicz J.** Non-linear dynamics of size-dependent Euler–Bernoulli beams with topologically optimized microstructure and subjected to temperature field // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2018. V. 104. P. 75-86. (Q1)