

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

На правах рукописи

ЛАРИН НИКОЛАЙ ВЛАДИМИРОВИЧ



**РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН
НЕОДНОРОДНЫМИ ТЕРМОУПРУГИМИ ТЕЛАМИ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор Толоконников Л. А.

Тула 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. О ДИФРАКЦИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ И ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛАХ	12
1.1. Обзор литературы по проблеме дифракции звуковых волн на неоднородных деформируемых твердых телах	12
1.1.1. Прямые задачи	12
1.1.2. Обратные задачи	21
1.2. Математическая модель дифракции звука на неоднородных термоупругих телах	25
1.2.1. Уравнения волновых полей в теплопроводной жидкости	25
1.2.2. Уравнения волновых полей в термоупругих телах	29
1.2.3. Граничные и дополнительные условия в задачах дифракции	34
2. ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЗВУКА НА НЕОДНОРОДНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛАХ	38
2.1. Отражение плоской звуковой волны неоднородным термоупругим плоским слоем	38
2.2. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным термоупругим цилиндрическим слоем	51
2.3. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным термоупругим сферическим слоем	66
2.4. Рассеяние цилиндрических и сферических звуковых волн неоднородными термоупругими слоями цилиндрической и сферической формы	79
2.4.1. Рассеяние цилиндрических звуковых волн неоднородным термоупругим цилиндрическим слоем	80
2.4.2. Рассеяние сферических звуковых волн неоднородным термо-	

упругим сферическим слоем	87
2.4.3. Рассеяние цилиндрических звуковых волн неоднородным термоупругим сферическим слоем	91
2.5. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругой пластине с неоднородным покрытием	98
2.5.1. Случай непрерывно-слоистого покрытия	98
2.5.2. Случай дискретно-слоистого покрытия	117
2.6. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с неоднородным покрытием	131
2.6.1. Случай непрерывно-слоистого покрытия	131
2.6.2. Случай дискретно-слоистого покрытия	152
2.7. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом шаре с неоднородным покрытием	163
2.7.1. Случай непрерывно-слоистого покрытия	163
2.7.2. Случай дискретно-слоистого покрытия	181
2.8. Рассеяние термоупругим цилиндром с непрерывно-слоистым покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, в плоском волноводе	190
3. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЗВУКА НА НЕОДНОРОДНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛАХ	210
3.1. Метод решения обратных задач дифракции звуковых волн на неоднородных термоупругих телах	210
3.2. Определение законов неоднородности непрерывно-слоистых термоупругих тел с заданными звукоотражающими свойствами	214
3.2.1. Решение задачи для плоского слоя	215
3.2.2. Решение задачи для цилиндрического слоя	218
3.2.3. Решение задачи для сферического слоя	222

3.3. Математическое моделирование неоднородных покрытий термоупругих тел с требуемыми звукоотражающими свойствами	223
3.3.1. Моделирование покрытия пластины	223
3.3.2. Моделирование покрытия цилиндра	227
3.3.3. Моделирование покрытия шара	231
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	236
ЛИТЕРАТУРА	238

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Широкое применение теории дифракции в исследовательской и производственной практике требует разработки все более точных математических моделей, адекватно описывающих реально наблюдаемые дифракционные процессы. Для многих технических задач актуальна проблема взаимодействия акустических волн в жидкости с упругими телами различной конфигурации.

Распространение и дифракция волн в упругих средах изучались в работах Бабешко В.А., Бреховских Л.М., Векслера Н.Д., Горшкова А.Г., Гузя А.Н., Завадского В.Ю., Исаковича М.А., Кубенко В.Д., Кузнецова С.В., Лямшева Л.М., Молоткова Л.А., Петрашени Г.И., Поручикова В.Б., Тарлаковского Д.В., Шендерова Е.Л., Allegra J.R., Faran J.J., Flax L., Hook J.F., Lock M.H., Stoneley R., Thomson W.T., Uberall H., Varadan V.K., Varadan V.V. и др.

Большинство исследований в теории дифракции звуковых волн на упругих телах относится к телам из однородного материала. Но характерной особенностью всякого реального материала является его неоднородность. Неоднородную структуру материал может приобрести в процессе изготовления, в частности, для придания ему требуемых свойств (функционально-градиентные материалы, слоистые композиты), а также при эксплуатации под воздействием температурных полей, магнитных полей, облучения, влажности. Кроме того, встречается неоднородность природного происхождения (грунты, горные породы, биологические ткани). Актуальности исследований дифракции звуковых волн на телах со сложной реологией способствуют современные задачи гидроакустики, судовой акустики, дефектоскопии, медицинской диагностики, биомеханики, геофизики.

Построение решений прямых задач дифракции звуковых волн на неоднородных упругих телах для произвольных законов изменения материальных параметров тел связано с большими математическими трудностями.

Обратные задачи дифракции звука на упругих телах приводят к малоисследованным математическим проблемам, требующим новых подходов и методов решения. Необходимость решения таких задач возникает при определении неизвестных свойств рассеивателя (свойств материала, геометрических параметров).

Результаты исследований прямых и обратных задач дифракции звуковых волн на неоднородных упругих телах приведены в работах Бобровницкого Ю.И., Бреховских Л.М., Булова В.А., Воровича И.И., Коваленко Г.П., Медведского А.Л., Молоткова Л.А., Приходько В.Ю., Скобельцына С.А., Толоконникова Л.А., Тюткина В.В., Шендерова Е.Л., Veilina L., Colton D., Kress R. и др. При этом тепловые процессы в упругих телах исключались из рассмотрения.

Деформирование упругого тела под воздействием внешнего акустического поля сопровождается изменением температуры тела. Возникает взаимное влияние полей деформаций и температуры. Таким образом, при решении задач дифракции звука появляется необходимость учитывать термоупругость рассеивателя. Для некоторых материалов этот учет имеет существенное значение.

Результаты исследований термоупругого состояния тел содержатся в работах Амбарцумяна С.А., Болотина В.В., Ватульяна А.О., Коваленко А.Д., Коляно Ю.М., Ломазова В.А., Ломакина В.А., Нестерова С.А., Новацкого В., Подстригача Я.С., Пшеничнова С.Г., Россихина Ю.А., Шитиковой М.В., Babaei R., Lukasiewicz S.A, Qian R.E, Furuhashi R. и др.

Во всех упомянутых выше исследованиях воздействие звуковых волн на термоупругие тела не рассматривалось. Поэтому важной проблемой является изучение совместного влияния неоднородности и термоупругости тел на их звукоотражающие свойства.

Цель работы состоит в исследовании акустических полей, рассеянных неоднородными термоупругими телами.

Для достижения этой цели необходимо:

- построить математическую модель взаимодействия акустических волн с неоднородными термоупругими телами;
- разработать новые методы, позволяющие решать прямые и обратные задачи дифракции звуковых волн на неоднородных термоупругих телах;
- провести верификацию разработанных теоретических положений путем решения представительного набора прямых и обратных задач дифракции звуковых волн на неоднородных термоупругих телах.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- построена математическая модель дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных термоупругих телах, граничащих с теплопроводными жидкостями;
- предложен метод решения прямых задач дифракции звука на неоднородных термоупругих телах;
- поставлены и решены прямые задачи дифракции гармонических звуковых волн на плоских, цилиндрических и сферических термоупругих телах различной неоднородной структуры (непрерывно-слоистых телах, однородных телах с непрерывно- или дискретно-слоистыми покрытиями);
- исследовано влияние неоднородности и термоупругости тел на рассеяние звука;
- показана возможность изменения звукоотражающих свойств термоупругих тел с помощью неоднородных покрытий;
- осуществлено математическое моделирование непрерывно-слоистых термоупругих покрытий многослойными покрытиями;
- предложен метод решения обратных задач дифракции звука на неоднородных термоупругих телах, основанный на использовании решений прямых дифракционных задач;

– поставлены и решены обратные дифракционные задачи об определении законов неоднородности термоупругих тел с заданными звукоотражающими свойствами.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы представляют собой вклад в теорию дифракции звука на деформируемых телах. Получила развитие теория дифракции звуковых волн на неоднородных термоупругих телах, граничащих с теплопроводными жидкостями.

Результаты работы могут быть использованы в гидроакустике для звуковой эхолокации различных объектов; в судовой акустике при изучении акустических характеристик судовых конструкций; в дефектоскопии для разработки методов неразрушающего контроля; в медицине при разработке методов ультразвуковой диагностики; в архитектурной акустике; для проектирования промышленных материалов и конструкций с требуемыми звукоотражающими свойствами.

Методы исследования. В диссертационной работе используются аналитические и численные методы исследования.

Решение прямых задач дифракции звуковых волн на неоднородных термоупругих телах получено в рамках линейной теории связанной термоупругости и гидродинамики теплопроводной сжимаемой жидкости.

Аналитическое описание волновых полей получено на основе метода разделения переменных с использованием разложений по волновым функциям.

Решение краевых задач для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при определении полей смещений и температуры в неоднородном термоупругом теле, находится методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических B -сплайнов.

Решение обратных дифракционных задач приводится к нелинейной задаче математического программирования. Нахождение условного экстре-

мума целевой функции со многими переменными выполняется методами случайного поиска и покоординатного спуска.

Достоверность полученных результатов вытекает из корректной постановки задач и обоснованности применяемых математических методов; обеспечивается проведением расчетов на ЭВМ с контролируемой точностью; подтверждается совпадением полученных решений с известными результатами для частных и предельных случаев, а также с решениями в специализированных пакетах.

Положения, выносимые на защиту:

- математическая модель дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных термоупругих телах, граничащих с теплопроводными жидкостями;
- метод решения прямых задач дифракции звука на неоднородных термоупругих телах;
- решения прямых задач дифракции гармонических звуковых волн на непрерывно-слоистых термоупругих телах (слоях плоской, цилиндрической и сферической формы) и на однородных термоупругих телах (плоском слое, цилиндре, шаре) с непрерывно- или дискретно-слоистыми термоупругими покрытиями;
- метод решения обратных задач дифракции звука на неоднородных термоупругих телах;
- решения обратных дифракционных задач об определении законов неоднородности термоупругих тел с оптимальными звукоотражающими свойствами;
- результаты численных исследований решений прямых и обратных задач о рассеянии звука неоднородными термоупругими телами.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались:

- на ежегодных научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава Тульского государственного университета (Россия, Тула, 2003-2021);
- на международных научных конференциях «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Россия, Тула, ТулГУ, 2003, 2005-2007, 2009, 2010, 2013, 2014);
- на II Всероссийской акустической конференции, совмещенной с XXX сессией Российского акустического общества (Россия, Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2017);
- на Международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 2017, 2018, 2021);
- на 8-й, 10-й, 11-й Всероссийских научных конференциях с международным участием "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (Россия, Москва, ИПРИМ РАН, 2018, 2020, 2021);
- на XXVI, XXVII и XXVIII Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, (Россия, Москва, Вятчи, МАИ, НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИ механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2020, 2021, 2022).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 41 работа, в том числе: 13 статей в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus; 11 статей в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ; 2 монографии. Получены 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

На различных этапах работа поддерживалась грантами РФФИ (проекты 06-01-00701, 09-01-97504, 11-01-97509, 13-01-97514, 16-41-710083, 19-41-

710005), Минобрнауки России (государственное задание № 1.1333.2014 К), Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

Личный вклад. Модель в главе 1 и решения задач, представленные в разделах 2.4, 2.5.1, 2.6, 2.7.2, 3.1, 3.2, 3.3.1, 3.3.2, получены автором. Решения задач, приведенные в разделах 2.1, 2.2, 2.3, 2.5.2, 2.7.1, 2.8, 3.3.3, изложены на основе совместных работ с Толоконниковым Л.А. Личный вклад автора в эти работы состоит в постановке и получении аналитических и численных решений задач, проведении численных исследований и анализе результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 272 страницы, в том числе 118 рисунков и 12 таблиц. Список литературы включает 290 наименований.

1. О ДИФРАКЦИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ И ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛАХ

1.1. Обзор литературы по проблеме дифракции звуковых волн на неоднородных деформируемых твердых телах

В настоящем обзоре обсуждаются работы по решению прямых и обратных задач дифракции звука на неоднородных деформируемых твердых телах.

1.1.1. Прямые задачи

Большинство исследований в теории дифракции звуковых волн на деформируемых твердых телах относится к однородным упругим телам, в частности, к телам с плоскими границами (см., например, [9, 102, 233, 236]), к цилиндрическим телам (см., например, [31, 103, 242, 245, 248]), к сферическим телам (см., например, [63, 245, 247, 250, 258, 287]), к сфероидальным телам (см., например, [52–54, 124, 246, 255]).

Менее значительно представлены исследования дифракции звука на неоднородных упругих телах. Прежде всего это связано с трудностью решения уравнений движения сплошной среды, в которых коэффициенты, описывающие физико-механические характеристики материала тела, являются функциями пространственных координат. В случае, когда материальные параметры тела зависят только от одной координаты, задача упрощается, однако остается достаточно сложной.

Прямые задачи дифракции звуковых волн на неоднородных деформируемых твердых телах рассматривались в ряде работ, причем в большинстве из них исследуемые волновые поля являлись гармоническими. Среди этих работ сначала укажем те, которые относятся к изотропным телам.

В [9] получено решение задачи об отражении плоской звуковой волны от системы однородных упругих плоских слоев, ограниченных сверху

жидким, а снизу однородным упругим полупространствами. В [233] найдено решение задачи о прохождении плоской звуковой волны через такую многослойную систему, ограниченную жидкими полупространствами.

Решена задача определения коэффициентов отражения и преломления плоской звуковой волны, падающей из жидкости на твердое полупространство, плотность и коэффициенты Ламе которого изменяются с глубиной согласно степенной зависимости [58] или являются гладкими функциями глубины полупространства [57]. Причем в последнем случае среда, заполняющая полупространство, полагалась слабонеоднородной. С помощью импедансного метода [105, 225, 226] рассчитаны коэффициенты отражения плоских звуковых волн от твердых плоских слоев и полупространств с переменными материальными параметрами [120]. При этом неоднородное полупространство моделировалось системой «неоднородный слой на однородном полупространстве».

В [257] изучено отражение и прохождение плоской звуковой волны через панели из функционально-градиентных материалов. В [230, 231] рассмотрена задача о прохождении плоской звуковой волны через плоский слой композита конечной толщины. Предполагается, что композит состоит из взаимно чередующихся слоев упругого и вязкоупругого изотропных материалов. В [243, 289, 290] исследовано прохождение звука через сэндвич-панели.

Показана возможность изменения звукоотражающих свойств однородной упругой пластины произвольной толщины с помощью покрытия в виде упругого плоского слоя с непрерывно изменяющимися по толщине плотностью и модулями упругости при падении на пластину с покрытием плоской звуковой волны [112, 211, 213, 224] и цилиндрической звуковой волны [111, 212]. При этом в [111, 212, 213, 224] полагалось, что пластина с покрытием граничит с идеальными жидкостями, а в [112, 211] – с вязкими. Кроме того, в [112, 213] дифракционная задача решена для двух случа-

ев расположения покрытия пластины. В первом случае покрытие граничит с полупространством, из которого падает волна, а во втором случае – с полупространством в которое волна проходит.

В [147] с использованием метода конечных элементов (МКЭ) решена задача о рассеянии плоской звуковой волны однородной упругой ограниченной криволинейной пластиной, имеющей сферическую полость и оснащенной непрерывно-неоднородным упругим покрытием.

В [104] найдено решение задачи дифракции акустического поля точечного ненаправленного источника на многослойной цилиндрической оболочке, состоящей из произвольного числа упругих коаксиальных слоев любой толщины. В [235] решена задача дифракции плоской звуковой волны на системе однородных упругих коаксиальных цилиндрических слоев произвольной толщины при нормальном падении волны на эту систему.

В [225] с использованием импедансного метода расчета виброакустических характеристик цилиндрических тел, упругие и инерционные параметры которых являются кусочно-непрерывными функциями радиальной координаты, решены задачи о рассеянии и прохождении плоской звуковой, нормально падающей на слоисто-неоднородный полый цилиндр. В [3] предложено развитие рассмотренного в [225] импедансного метода применительно к расчету рассеяния плоских звуковых волн на цилиндрических радиально-слоистых телах в виде сплошных и полых цилиндров. Получены решения двумерных задач о рассеянии цилиндрической [215] и плоской [127] звуковых волн непрерывно-слоистым упругим полым цилиндром, снаружи и в полости которого находятся вязкие жидкости.

Рассматривалось покрытие в виде упругого цилиндрического слоя с непрерывно изменяющимися по толщине плотностью и модулями упругости для изменения звукоотражающих свойств абсолютно жесткого цилиндра [126, 183], однородного упругого сплошного цилиндра [180, 189, 196] и однородного упругого полого цилиндра с концентрической цилиндриче-

ской [185] и неконцентрической эллиптической [66] полостями. Такие покрытия рассматривались и применительно к системе тел из двух одинаковых однородных упругих цилиндров при нормальном падении на них плоской звуковой волны [176]. Схожая по постановке задача для системы тел из двух одинаковых непрерывно-слоистых упругих цилиндрических слоев с абсолютно жесткими включениями решена ранее в [210].

В [117] методом конечных элементов найдено решение задачи о рассеянии звука упругим цилиндром с кусочно-непрерывным неоднородным упругим покрытием.

Изучено прохождение звука через цилиндрическую оболочку из функционально-градиентного материала [241, 269].

В указанных выше работах рассматривались цилиндрические тела с круговым сечением. В [56] получена приближенная система связанных обобщенных волновых уравнений удобная для описания высокочастотных колебаний упругих твердых тел, параметры которых зависят от одной координаты. В этой работе плоская задача о дифракции плоской акустической волны на неоднородном упругом цилиндре произвольного поперечного сечения сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений. Решена задача дифракции плоской [207] и цилиндрической [97] звуковых волн на упругом эллиптическом цилиндре с круговой цилиндрической полостью, плотность и модули упругости которого являются непрерывными функциями радиальной координаты. В [46] найдено решение задачи дифракции плоской звуковой волны на однородной упругой оболочке (замкнутой или имеющей форму полого цилиндра) достаточно общей формы с покрытием в виде неоднородного упругого слоя с зависимостью плотности и модулей упругости от его постоянной толщины.

В [119] с помощью импедансного метода приведено решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны радиально-слоистой упругой сферической оболочкой.

Получены решения задач дифракции плоской [190], сферической [214], цилиндрической [182] звуковых волн на однородном упругом шаре с непрерывно-слоистым покрытием. Такое покрытие рассматривалось и применительно к однородному упругому шару с произвольно расположенной сферической полостью при падении на него плоской звуковой волны [178]. С помощью матричного метода [10, 109] решена задача дифракции плоской звуковой волны на однородном упругом шаре с многослойным упругим покрытием [184]. В этой работе с использованием полученных в [190] результатов показана возможность математического моделирования непрерывно-слоистого покрытия упругого шара многослойным покрытием по диаграммам рассеянного акустического поля. При этом для моделирования с заданной точностью предложен критерий подбора количества слоев в многослойном покрытии. Рассеяние звука сферическим телом с покрытием рассматривалось и в работах [253, 256].

Исследовано рассеяние плоской [97, 208, 209], сферической и цилиндрической [97] звуковых волн непрерывно-неоднородным упругим сфероидом, имеющим сферическую полость, а также рассеяние звука однородным упругим сфероидом с непрерывно-неоднородным покрытием [130, 163].

В меньшей мере получены решения прямых дифракционных задач для анизотропных неоднородных тел.

В [169, 283] найдены решения задачи об отражении и прохождении плоской звуковой волны через слоистую среду, состоящую из однородных материалов, обладающих анизотропией упругих свойств наиболее общего типа. В [122] рассматривалась дифракция звука на неоднородной трансверсально-изотропной пластине. В [98, 99] исследованы звукоизоляционные свойства бесконечной трехслойной пластины, окруженной с двух сторон акустическими средами, при воздействии на нее плоской, цилиндрической или сферической гармонических волн. Пластина имеет

сложную структуру (несущие слои – упругие изотропные, а наполнитель – ортотропный, сотовой конфигурации).

Решена задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны непрерывно-неоднородным по толщине упругим плоским слоем трансверсально-изотропного материала [164] и материала, обладающего анизотропией общего вида [186, 187]. При этом в [164, 186] полагалось, что слой граничит с жидкостями идеальными, а в [187] – с вязкими. Рассматривалось падение плоской звуковой волны на однородный изотропный упругий плоский слой с непрерывно-слоистым анизотропным упругим покрытием [222].

Получены решения задач дифракции плоской [166] и цилиндрической [181] звуковых волн на непрерывно-слоистом трансверсально-изотропном упругом цилиндрическом слое, а также решение задачи дифракции плоской звуковой волны на непрерывно-слоистом анизотропном упругом цилиндрическом слое в общем случае цилиндрической анизотропии [173]. При этом в [166, 173] рассматривалось наклонное падение плоской волны на тело, а в [181] полагалось, что ось цилиндрического источника n -го порядка параллельна оси вращения цилиндрического слоя.

В [132] приведено численно-аналитическое решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с трансверсально-изотропным радиально-неоднородным упругим покрытием.

С помощью МКЭ решены задача о рассеянии плоской звуковой волны некруговым неоднородным анизотропным упругим цилиндром [47] и задача дифракции плоской звуковой волны на конечном однородном упругом цилиндре с покрытием в виде радиально-неоднородного анизотропного упругого цилиндрического слоя [149].

Найдено решение двумерной задачи о нестационарном рассеянии плоского [35] и цилиндрического [34] акустических импульсов непрерывно-слоистым трансверсально-изотропным упругим цилиндрическим слоем.

В [235] получено решение задачи дифракции звука на системе однородных трансверсально-изотропных упругих сферических слоев.

Рассматривалось рассеяние плоской [165], сферической и цилиндрической [138] звуковых волн непрерывно-слоистым трансверсально-изотропным упругим сферическим слоем с жидкостью в полости, а также рассеяние плоской звуковой волны таким слоем с абсолютно жестким заполнителем [150] и однородной изотропной упругой средой в полости [221].

В [11, 14, 33, 36] решены задачи дифракции нестационарной акустической волны на неоднородной трансверсально-изотропной полой сфере.

В [131] с использованием МКЭ получено решение задачи дифракции плоской звуковой волны на однородном изотропном упругом трехосном эллипсоиде с покрытием в виде слоисто-неоднородного трансверсально-изотропного упругого слоя фиксированной толщины.

В [218] методом локального поля [113, 123, 229] найдено решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на слоисто-неоднородной анизотропной упругой оболочке с произвольной кривизной поверхности, граничащей с вязкими жидкостями.

В упомянутых выше работах рассматривались тела в безграничном пространстве. Ряд работ [125, 128, 172, 174, 175, 216, 217] посвящены решению задачи дифракции звуковых волн на неоднородном упругом цилиндрическом теле в плоском волноводе с идеальными (акустически мягкими или абсолютно жесткими) границами, заполненном идеальной жидкостью. При этом рассеянное акустическое поле в волноводе находится в виде потенциала простого слоя, где функция Грина выбрана так, чтобы искомое рассеянное поле удовлетворяло уравнению Гельмгольца, граничным условиям на стенках волновода и условиям излучения на бесконечности. Определение поля смещений в цилиндрическом теле сведено к решению краевой задачи для системы линейных обыкновенных

дифференциальных уравнений. В случае, когда одна из границ волновода является акустически мягкой, а другая абсолютно жесткой, функция Грина для потенциала простого слоя построена в [188].

В [162] с использованием МКЭ решена задача о рассеянии звуковой волны, излучаемой точечным источником, абсолютно жестким шаром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе с идеальными границами и заполняющей его жидкостью.

В [160] получено аналитическое решение задачи дифракции сферических звуковых волн на абсолютно жестком шаре с непрерывно-слоистым покрытием в плоском волноводе, заполненном идеальной жидкостью. Одна из границ волновода является идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой), а другая сколь угодно мало отличается от идеальной. Акустическое поле в волноводе ищется в виде суммы вкладов от источника и рассеивателя. Вклад от рассеивателя определяется на основе решения задачи дифракции сферической звуковой волны на жестком шаре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием в безграничном пространстве. С использованием интегральной формы записи сферической волны, получаемой из разложения сферической волны по плоским волнам, и интегрального представления сферических базисных решений уравнения Гельмгольца через цилиндрические базисные решения, вклады от источника и рассеивателя находятся в виде суперпозиции плоских волн с учетом многократного отражения от границ волновода.

В ряде работ [148, 153, 154, 161, 167, 177, 179, 191, 198] рассматривалась дифракция звуковых волн на неоднородном деформируемом теле, находящемся в идеальной жидкости в присутствии идеальной плоской поверхности. Во всех этих работах, кроме [191], дифракционная задача решалась путем замены отражающей границы на зеркально отраженные от нее рассеиватель и первичную звуковую волну. При такой замене возникает задача о дифракции звука на двух идентичных телах в безграничном

пространстве, которая в [177, 179, 198] решена аналитически с применением теорем сложения для специальных функций, входящих в разложения звуковых полей. В [148, 153, 154, 161, 167] при решении этой задачи использовался МКЭ. В [191] для приближенного аналитического решения задачи используется подход, при котором полное акустическое поле представляется в виде суммы первичной плоской волны, ее отражения от плоскости и двух полей, возникающих при рассеянии этих двух плоских волн телом. Однако при таком подходе не учитывается отражение от плоскости волн, рассеянных телом.

Замена границы на зеркальный рассеивающий объект справедлива только для идеальной границы. Если граница является упругой или импедансной, то такой метод не применим. В [159] с применением МКЭ решена задача о рассеянии плоской звуковой волны однородным упругим эллиптическим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием постоянной толщины, помещенным в идеальную жидкость, граничащую с упругим полупространством. При этом не учитывалось переотражение волн между телом и упругой поверхностью. С учетом такого переотражения в [195] получено аналитическое решение задачи о дифракции цилиндрической звуковой волны распространяющейся в идеальной жидкости на однородном упругом круговом цилиндре с непрерывно-слоистым упругим покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. В этой работе для определения полного акустического поля в жидкости использована [234] интегральная форма записи уравнения Гельмгольца, куда входит функция Грина, удовлетворяющая граничным условиям на поверхности полупространства. Определение волнового поля в теле сведено к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, краевая задача для которой решена методом сплайн-коллокации.

В указанных выше работах температура тел исключалась из рассмотрения. Число работ, в которых рассматривалось волновое взаимодействие жидкости и деформируемого твердого тела при наличии температурных полей невелико. При этом рассматривались однородные или пористые тела (см., например, [232, 265, 284, 286]).

Собственные колебания деформируемого тела оказывают значительное влияние на его звукоотражающие свойства. Результаты исследований этого влияния содержатся, например, в работах [9, 65, 165, 192, 228, 244, 247, 249, 267, 287]. Укажем здесь и ряд работ [62, 260–264], посвященных изучению волновых процессов в анизотропных, стратифицированных и функционально-градиентных пластинах.

Рассматривались и другие смежные вопросы. В частности, влияние анизотропии и неоднородности материала сред на распространение в них упругих волн (см., например, [12, 13, 106–108, 133, 152, 219, 220, 273, 274, 276]), моделирование непрерывно-слоистых твердых сред дискретно-слоистыми средами (см., например, [37, 60, 259]), динамические задачи термоупругости (см., например, [41, 55, 114, 118, 121, 275, 277–282]) и анализ в них связанности полей деформации и температуры [55, 121].

1.1.2. Обратные задачи

Работы, в которых решены обратные задачи дифракции звука на деформируемых твердых телах, в том числе неоднородных, обсуждаются в обзоре [42].

Основные подходы к решению обратных задач при дифракции звуковых волн и их особенности сформулированы в работах [59, 237–240]. В них рассмотрено применение классических методов теории потенциала и интегральных уравнений к задачам теории дифракции акустических и электромагнитных волн на ограниченных телах, расположенных в однородном пространстве.

В [38] представлены обзор решений и оригинальные решения обрат-

ных задач рассеяния и излучения в акустике. Освещены известные подходы, постановки и методы решений акустических обратных задач, приведены основные результаты, полученные к моменту выхода работы. Проведен анализ методов определения количественных характеристик рассеивающих неоднородностей, основанных на наблюдениях рассеяния падающего на них акустического поля. Представлены результаты численного моделирования решений некоторых обратных задач.

В [18] рассматривалась двумерная задача рассеяния ультразвука неизвестной полостью в твердом теле. В [22] обсуждался алгоритм восстановления двумерных неоднородностей на основе знания амплитуды рассеяния скалярной монохроматической плоской волны. В [17] рассматривалась задача акустической томографии океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей. Работы [1, 2] посвящены решению трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина и модифицированного алгоритма Новикова. В [16] предлагалось построение оценок максимального правдоподобия в корреляционной акустической термотомографии. Работа [23] посвящена проблемам численного и физического моделирования процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка. В [15] обсуждалось моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами. Анализ единственности и устойчивости решения обратной задачи акустического рассеяния проводился в [19]. В [20, 21] рассматривались обратные волновые задачи и их прикладные аспекты, связанные с современным состоянием исследований в области линейной и нелинейной акустической томографии, а также акустической термотомографии.

В работах [32, 288] исследовались задачи восстановления образа дефекта по рассеянному полю в акустическом приближении. В них при решении геометрической обратной задачи предлагалась идентификация по-

лостей по диаграмме направленности.

В [252] рассматривалось решение задачи восстановления отражающей неоднородности методом среднего. Работа [251] посвящена вопросу использования матричной функции Грина при решении задач акустической интроскопии.

Рассматривались физические основы и методы акустического контроля, приложения на основе решения обратных задач рассеяния звука. В [272] приведены результаты определения групповой скорости ультразвуковых волн в трансверсально-изотропной упругой среде. В [271] представлен анализ ультразвуковых полей и дефектоскопии в монокристаллах алюминия на основе лазерной методики. Работа [270] посвящена использованию вейвлетов для анализа ультразвуковых полей, обнаруженных лазерным интерферометром. В [268] обсуждались вопросы настройки и калибровки оборудования с использованием образцов с цилиндрическим сверлением при ультразвуковой дефектоскопии.

По характеристикам рассеяния звука упругим телом восстанавливались его геометрические [136, 140, 141, 145, 151, 155–158, 223, 285] и материальные [134, 135, 143, 144] параметры. В этих работах предполагалось, что из эксперимента известны данные о замерах акустических окликов и задача идентификации сводилась (кроме [145]) к процедуре минимизации функционала невязки, который характеризует отклонение теоретических значений измеряемых величин, полученных на основе решения прямых задач, от экспериментальных данных. В [145] при однократном замере коэффициента звукоотражения определение положения границы разделения двухслойной упругой пластины сведено к решению нелинейного уравнения с одной неизвестной на интервале, определяемом толщиной пластины. В качестве неизвестной выступает толщина одного из слоев.

Значительный интерес представляет обратная задача об определении свойств рассеивателя, обеспечивающих требуемое звукоотражение. Одним

из способов эффективного изменения звукоотражающих свойств твердого тела является нанесение на него покрытия. Моделировались различные типы покрытий, наносимых на твердые тела. В [48] для обеспечения заданного уровня гашения поля дифракции на абсолютно твердом цилиндре использовалось перфорированное покрытие в виде набора резонаторов Гельмгольца, распределенных по окружности цилиндра. В [6] предложена общая схема формирования поглощающих и нерассеивающих покрытий нового типа с повышенной эффективностью – т.н. покрытий с протяженной реакцией. Приводятся теория таких покрытий и метод определения наилучших значений его параметров. Подробно анализируется плоское покрытие с протяженной реакцией. В [4, 5, 7] покрытие с протяженной реакцией применялось для подавления отражения и рассеяния волн телами цилиндрической геометрии. В [61] выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов однородного покрытия и упругой цилиндрической оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Отметим и работу [8], где дан обзор и анализ методов решения и современного состояния задачи о поглощении звука в линейной постановке.

Требуемые звукоотражающие свойства твердого тела можно получить с помощью непрерывно-неоднородного упругого покрытия, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия (об этом говорится и в [142, 146]). Математическому моделированию таких покрытий, обеспечивающих минимальное рассеяние звука телами, посвящены работы [137, 185, 193, 194, 197, 202, 203]. В них для решения коэффициентных обратных дифракционных задач используется подход, основанный исключительно на решении прямых задач и не требующий экспериментальных замеров акустических откликов. Такой подход состоит в построении на основе решения прямой задачи функционала, выражающего интенсивность или амплитуду рассеянной звуковой

волны и его минимизации на допустимом множестве функций, описывающих механические параметры покрытия.

Коэффициентные обратные задачи термоупругости решены, например, в работах [24–30, 100, 101, 266]. При этом волновое взаимодействие термоупругих тел с жидкостью не рассматривалось.

1.2. Математическая модель дифракции звука на неоднородных термоупругих телах

В данном разделе построена математическая модель дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных термоупругих телах, граничащих с теплопроводными жидкостями. Приведены уравнения, описывающие волновые поля в теплопроводной жидкости и термоупругих телах, а также граничные и дополнительные условия в задачах дифракции.

Полученные в этом разделе результаты опубликованы в работах [71–73, 199].

1.2.1. Уравнения волновых полей в теплопроводной жидкости

Рассмотрим однородную теплопроводную сжимаемую жидкость. Давление, плотность и температуру в возмущенной звуком жидкости представим в виде

$$\tilde{p} = p_0 + p, \quad \tilde{\rho} = \rho_0 + \rho', \quad \tilde{T} = T_0 + \Theta,$$

где p_0 , ρ_0 и T_0 – равновесные давление, плотность и температура жидкости соответственно; p – акустическое давление; ρ' – изменение плотности в звуковой волне; Θ – акустическая температура.

Учитывая, что скорость частиц жидкости в звуковой волне \mathbf{v} и относительные изменения плотности, давления и температуры малы, и пренебрегая величинами второго порядка малости, движение жидкости будем описывать полной системой уравнений гидродинамики теплопроводной жидкости для малых возмущений, состоящей из уравнений Эйлера, нераз-

рывности, притока тепла и физического состояния. Эти уравнения соответственно имеют вид [170]:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} p, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \beta^T \frac{\partial s}{\partial t} + \chi^T \Delta \Theta, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \alpha^T \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right), \quad (1.2.4)$$

где t – время; $s = \rho'/\rho_0$ – акустическое сжатие; α^T , β^T , χ^T – коэффициенты температурного расширения, пропорциональности, температуропроводности соответственно; Δ – оператор Лапласа; $c_0 = (p_0/\rho_0)^{1/2}$ – скорость звука Ньютона.

Введем скалярную функцию Ψ (потенциал скорости), зависящую от пространственных координат и времени, такую что

$$\mathbf{v} = \text{grad} \Psi. \quad (1.2.5)$$

Подставляя выражение (1.2.5) в уравнение (1.2.1), получим

$$\text{grad} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = 0.$$

Это уравнение будет справедливым, если

$$\frac{1}{\rho_0} p + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \quad (1.2.6)$$

Теперь продифференцируем по t уравнение (1.2.3). Получим

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \beta^T \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \chi^T \Delta \frac{\partial \Theta}{\partial t}. \quad (1.2.7)$$

Из уравнения (1.2.4) выразим $\partial \Theta / \partial t$. Будем иметь

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{\alpha^T} \left(\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial t} \right). \quad (1.2.8)$$

Дифференцируя последнее уравнение по t , находим

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{1}{\alpha^T} \left(\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right). \quad (1.2.9)$$

Подставляя в уравнение (1.2.7) выражения для производных (1.2.8), (1.2.9), а также выражения

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{v}, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{v},$$

полученные из уравнения (1.2.2), приходим к уравнению

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \chi^T \Delta \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \gamma \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \chi^T \Delta \Delta \Psi = 0,$$

где $\gamma = 1 + \alpha^T \beta^T$ – отношение удельных теплоемкостей жидкости при постоянных давлении и объеме. После подстановки в последнее уравнение выражения для давления, найденного из уравнения (1.2.6), получим следующее уравнение относительно потенциала скорости Ψ :

$$\chi^T \Delta \Delta \Psi - \frac{\chi^T}{c_0^2} \Delta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \gamma \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^3} = 0. \quad (1.2.10)$$

В дальнейшем будем рассматривать установившийся режим движения жидкости с временным множителем $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота. В этом случае уравнение (1.2.10) принимает вид (временной множитель опускается)

$$\hat{A} \Psi + \hat{B} \Delta \Psi - \hat{C} \Delta \Delta \Psi = 0, \quad (1.2.11)$$

где

$$\hat{A} = \gamma \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \hat{B} = \gamma \left(1 - \frac{i\omega \chi^T}{c^2} \right), \quad \hat{C} = \frac{i\chi^T}{\omega}, \quad c^2 = \gamma c_0^2,$$

c – скорость звука Лапласа.

Уравнение (1.2.11) может быть представлено в операторном виде

$$\left(\Delta + k_1^2\right)\left(\Delta + k_2^2\right)\Psi = 0, \quad (1.2.12)$$

где

$$k_1^2 + k_2^2 = -\frac{\hat{B}}{\hat{C}}, \quad k_1^2 k_2^2 = -\frac{\hat{A}}{\hat{C}}. \quad (1.2.13)$$

Для выполнения соотношений (1.2.13) величины k_1^2 и k_2^2 должны быть корнями уравнения

$$\hat{A} - \hat{B}k^2 - \hat{C}k^4 = 0,$$

то есть

$$k_1^2 = \frac{-\hat{B} + \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}}}{2\hat{C}}, \quad k_2^2 = \frac{-\hat{B} - \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}}}{2\hat{C}}. \quad (1.2.14)$$

Положим

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (1.2.15)$$

Тогда уравнение (1.2.12) будет справедливым, если

$$\left(\Delta + k_1^2\right)\Psi_1 = 0, \quad \left(\Delta + k_2^2\right)\Psi_2 = 0.$$

Действительно, вводя в рассмотрение функцию

$$f = \left(\Delta + k_2^2\right)\Psi,$$

уравнение (1.2.12) сведем к системе уравнений

$$\left(\Delta + k_1^2\right)f = 0, \quad \left(\Delta + k_2^2\right)\Psi = f. \quad (1.2.16)$$

Подставим выражение (1.2.15) во второе уравнение системы (1.2.16) и положим

$$\left(\Delta + k_2^2\right)\Psi_2 = 0.$$

Тогда

$$f = \left(\Delta + k_2^2\right)\Psi_1.$$

Подставим последнее выражение в первое уравнение системы (1.2.16). Полученное уравнение будет справедливым, если

$$(\Delta + k_1^2)\Psi_1 = 0.$$

Таким образом, для установившегося режима движения уравнение (1.2.12) приводится к скалярным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\Psi_1 + k_1^2\Psi_1 = 0, \quad \Delta\Psi_2 + k_2^2\Psi_2 = 0, \quad (1.2.17)$$

которые описывают распространение в теплопроводной жидкости продольных волн двух видов, из которых один, связанный с k_1 , будем называть звуковой волной, а другой, связанный с k_2 – тепловой волной. Соответственно функции Ψ_1 и Ψ_2 будем называть потенциалами звуковой и тепловой волн, а величины k_1 и k_2 – волновыми числами этих волн.

Распространение звуковых волн в теплопроводной жидкости сопровождается относительно малым поглощением. В отличие от звуковых волн тепловые волны быстро затухают при удалении от источника и существуют лишь в тонком тепловом пограничном слое у поверхности твердого тела. Поэтому в дальнейшем будем считать, что падающая на тело волна является звуковой. При этом в жидкости возникают рассеянная телом звуковая и возбужденная тепловая волны.

Если решения уравнений (1.2.17) известны, то скорость частиц жидкости определяется по формуле (1.2.5), а акустические давление, сжатие и температура – по формулам

$$p = i\omega\rho_0(\Psi_1 + \Psi_2), \quad s = -\frac{i}{\omega}\Delta(\Psi_1 + \Psi_2),$$

$$\Theta = \frac{i}{\alpha T} \left[\frac{\omega\gamma}{c^2}(\Psi_1 + \Psi_2) + \frac{1}{\omega}\Delta(\Psi_1 + \Psi_2) \right].$$

1.2.2. Уравнения волновых полей в термоупругих телах

В данной работе при решении дифракционных задач в качестве рассеивателей рассматриваются термоупругие тела различной неоднородной

структуры: непрерывно-слоистые тела (физико-механические характеристики материала таких тел – функции, непрерывно изменяющиеся по глубине от поверхности тела), однородные тела с непрерывно- или дискретно-слоистыми (многослойными) покрытиями. Для описания термоупругого состояния таких рассеивателей воспользуемся полной системой уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости изотропного неоднородного тела [118], состоящей из уравнений движения сплошной среды, уравнения теплопроводности, соотношений Дюгамеля — Неймана и соотношений между деформациями и смещениями. В отсутствии объемных сил и внутренних источников тепла эти уравнения и соотношения соответственно имеют вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.2.18)$$

$$\operatorname{div}(\lambda_T \operatorname{grad} T) - T_0(3\lambda + 2\mu)\alpha_T \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.2.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + [\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T] \mathbf{E}, \quad (1.2.20)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T) / 2, \quad (1.2.21)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{E} , \mathbf{u} – тензор напряжений, тензор деформаций, тензор Кронекера и вектор смещения соответственно; T – приращение температуры в теле; T_0 – температура тела в невозмущенном состоянии; ρ , λ , μ , α_T , λ_T , c_ε – соответственно плотность, модули упругости, температурный коэффициент линейного расширения, теплопроводность и объемная теплоемкость материала тела. Указанные физико-механические характеристики материала являются непрерывными функциями пространственных координат: $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$, $\mu = \mu(\mathbf{r})$, $\alpha_T = \alpha_T(\mathbf{r})$, $\lambda_T = \lambda_T(\mathbf{r})$, $c_\varepsilon = c_\varepsilon(\mathbf{r})$.

Из уравнений и соотношений (1.2.18) – (1.2.21) вытекают уравнения, описывающие термоупругую деформацию однородного изотропного тела [55, 115, 116]:

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\text{grad}\text{div}\mathbf{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T\text{grad}T = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.2.22)$$

$$\Delta T - \frac{T_0(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{\lambda_T}\text{div}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\chi_T}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.2.23)$$

где $\chi_T = \lambda_T/c_\varepsilon$ – коэффициент температуропроводности.

Введем скалярную Φ_0 и векторную Φ функции (скалярный и векторный потенциалы смещения), зависящие от пространственных координат и времени, такие что

$$\mathbf{u} = \text{grad}\Phi_0 + \text{rot}\Phi. \quad (1.2.24)$$

Подставляя выражение (1.2.24) в уравнения (1.2.22), (1.2.23), получаем уравнения [115]

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_\tau^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2.25)$$

$$\Delta\Phi_0 - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{\lambda + 2\mu}T - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2.26)$$

$$\Delta T - \frac{1}{\chi_T}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_0}{\lambda_T}\Delta\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} = 0, \quad (1.2.27)$$

где c_l и c_τ – скорости распространения продольной и поперечной упругих волн соответственно. При этом

$$c_l = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2}, \quad c_\tau = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Исключая из уравнений (1.2.26), (1.2.27) функцию T , получим следующее уравнение относительно потенциала Φ_0 :

$$\chi_T\Delta\Delta\Phi_0 - \frac{\chi_T}{c_l^2}\Delta\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2} - (1 + \varepsilon)\Delta\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} + \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial t^3} = 0, \quad (1.2.28)$$

где

$$\varepsilon = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{(\lambda + 2\mu)c_\varepsilon}.$$

Поскольку в падающей на тело звуковой волне рассматривается установившийся режим колебаний частиц жидкости, то зависимость от времени смещения и приращения температуры в теле будет иметь вид $\exp(-i\omega t)$ (далее временной множитель опускается).

Для установившегося режима движения уравнение (1.2.25) приводится к векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0 \quad (1.2.29)$$

($k_\tau = \omega/c_\tau$ – волновое число поперечной упругой волны), а уравнение (1.2.28) может быть представлено в виде

$$\left(\Delta + \kappa_1^2\right)\left(\Delta + \kappa_2^2\right)\Phi_0 = 0, \quad (1.2.30)$$

где

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = k_l^2 + k_T^2(1 + \varepsilon), \quad \kappa_1^2 \kappa_2^2 = k_l^2 k_T^2. \quad (1.2.31)$$

Здесь

$$k_l = \frac{\omega}{c_l}, \quad k_T = \eta_T(1 + i), \quad \eta_T = \left(\frac{\omega}{2\chi_T}\right)^{1/2},$$

k_l и k_T – волновые числа продольной упругой волны и тепловой волны соответственно. Для выполнения соотношений (1.2.31) величины κ_1^2 и κ_2^2 должны быть корнями уравнения

$$\kappa^4 - \left[k_l^2 + k_T^2(1 + \varepsilon)\right]\kappa^2 + k_l^2 k_T^2 = 0,$$

то есть

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 &= \frac{k_l^2}{2} \left[1 + \delta(1 + \varepsilon) + \sqrt{1 - 2\delta(1 - \varepsilon) + \delta^2(1 + \varepsilon)^2} \right], \\ \kappa_2^2 &= \frac{k_l^2}{2} \left[1 + \delta(1 + \varepsilon) - \sqrt{1 - 2\delta(1 - \varepsilon) + \delta^2(1 + \varepsilon)^2} \right], \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

где $\delta = k_T^2 / k_l^2$.

Представление потенциала Φ_0 в виде

$$\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (1.2.33)$$

позволяет перейти от решения уравнения (1.2.30) к решению волновых уравнений Гельмгольца

$$\Delta\Phi_1 + k_1^2\Phi_1 = 0, \quad \Delta\Phi_2 + k_2^2\Phi_2 = 0 \quad (1.2.34)$$

подобно тому, как это сделано выше для уравнения (1.2.12).

Таким образом, в случае установившегося режима движения, в однородном изотропном термоупругом теле могут существовать поперечные упругие волны и продольные термоупругие волны. Поперечные упругие волны описываются решением векторного уравнения Гельмгольца (1.2.29), а продольные термоупругие волны – решениями скалярных уравнений Гельмгольца (1.2.34).

Если решения уравнений (1.2.29), (1.2.34) известны, то общее решение связанной задачи термоупругости (1.2.22), (1.2.23) имеет вид

$$\mathbf{u} = \text{grad}(\Phi_1 + \Phi_2) + \text{rot}\mathbf{\Phi}, \quad T = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} \left[\Delta(\Phi_1 + \Phi_2) + k_l^2(\Phi_1 + \Phi_2) \right].$$

Заметим, что система уравнений (1.2.22), (1.2.23) эквивалентна системе четырех скалярных уравнений относительно трех компонент вектора смещения \mathbf{u} и приращения температуры T , а система уравнений (1.2.29), (1.2.34) представляет собой систему пяти скалярных уравнений относительно пяти скалярных функций – функций Φ_1 , Φ_2 и трех компонент вектора $\mathbf{\Phi}$. Поэтому решение системы уравнений (1.2.29), (1.2.34) содержит некоторый произвол.

Чтобы однозначно определить функции Φ_1 , Φ_2 , $\mathbf{\Phi}$ при удовлетворении граничных условий необходимо привлечь еще одно дополнительное условие. Часто этим условием служит равенство $\text{div}\mathbf{\Phi} = 0$, которое соответствует условию, что векторное поле $\mathbf{\Phi}$ свободно от источников.

В случае плоской или осесимметричной задачи указанной проблемы не возникает, так как при этом остается только одна ненулевая проекция вектора Φ , и число переменных при переходе от системы уравнений (1.2.22), (1.2.23) к системе уравнений (1.2.29), (1.2.34) не изменяется.

1.2.3. Граничные и дополнительные условия в задачах дифракции

Для постановки задач дифракции гармонической звуковой волны, падающей из теплопроводной жидкости на поверхность термоупругого тела, помимо уравнений, описывающих распространение волн в жидкости и термоупругом теле, необходимо задать граничные условия.

Следует отметить, что в силу малости амплитуд колебаний частиц взаимодействующих жидкой и термоупругой сред, деформация границ термоупругого рассеивателя является малой. Поэтому граничные условия на деформируемой поверхности тела, контактирующей с жидкостью, сносятся на границу тела, соответствующую невозмущенному состоянию [129]. Эти граничные условия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, равенстве нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений, в непрерывности акустической температуры и теплового потока:

$$-i\omega u_n = \mathfrak{V}_n, \sigma_{nn} = -p, \sigma_{n\tau} = 0, T = \Theta, \lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda^T \frac{\partial \Theta}{\partial n}, \quad (1.2.35)$$

где u_n – нормальная компонента вектора смещения частиц термоупругого тела; \mathfrak{V}_n – нормальная компонента вектора скорости частиц жидкости; σ_{nn} , $\sigma_{n\tau}$ – нормальное и касательные напряжения; $\partial/\partial n$ – производная по нормали.

Граничные условия (1.2.35) записаны как для однородной, так и для неоднородной термоупругих сред. В случае однородной среды компоненты тензора напряжений σ_{nn} , $\sigma_{n\tau}$ определяются соотношениями Дюгамеля

— Неймана (1.2.20), в которых упругие коэффициенты λ , μ и термический коэффициент α_T постоянные величины.

При переходе через границу раздела термоупругих сред компоненты вектора смещения, нормальные и касательные напряжения, а также температура и тепловой поток должны быть непрерывны:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \quad u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad \sigma_{nn}^{(1)} = \sigma_{nn}^{(2)}, \quad \sigma_{n\tau}^{(1)} = \sigma_{n\tau}^{(2)}, \\ T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \lambda_T^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} = \lambda_T^{(2)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n}, \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

где u_j – компоненты вектора смещения \mathbf{u} . В равенствах (1.2.36) различие верхних индексов у соответствующих величин указывают на то, что эти величины относятся к различающимся по физико-механическим характеристикам термоупругим средам.

При решении дифракционных задач для получения однозначного решения требуются дополнительные условия: условия излучения на бесконечности для внешних волновых полей и условия ограниченности для внутренних волновых полей.

Условия излучения на бесконечности, привлекаемые при решении дифференциальных уравнений, отвечают уходящим от тела волнам [45, 233]. В неограниченном трехмерном пространстве эти условия имеют вид

$$\Psi_s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik_m \Psi_s = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad m=1,2, \quad (1.2.37)$$

а в двумерном случае записываются в виде

$$\Psi_s = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik_m \Psi_s = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad m=1,2, \quad (1.2.38)$$

где под Ψ_s следует понимать как потенциал скоростей рассеянной телом звуковой волны, так и потенциал скоростей возбужденной тепловой волны.

Условия ограниченности привлекаются при отыскании внутреннего волнового поля. Они требуют ограниченности решений соответствующих дифференциальных уравнений внутри области.

Таким образом, построенная математическая модель дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных термоупругих телах включает уравнения, описывающие волновые поля в теплопроводной жидкости и термоупругом теле, граничные и дополнительные условия.

Отметим, что в системе ортогональных криволинейных координат q_1 , q_2 , q_3 для установившегося режима движения с временным множителем $\exp(-i\omega t)$ уравнения связанной динамической задачи термоупругости неоднородного тела (1.2.18) – (1.2.21) записываются соответственно в виде [116, 118]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 \sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 \sigma_{13}) - \right. \\ \left. - \sigma_{22} h_3 \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \sigma_{33} h_2 \frac{\partial h_3}{\partial q_1} + \sigma_{12} h_3 \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \sigma_{13} h_2 \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \right] = -\rho \omega^2 u_1, \\ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 \sigma_{22}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 \sigma_{23}) + \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 \sigma_{12}) - \right. \\ \left. - \sigma_{33} h_1 \frac{\partial h_3}{\partial q_2} - \sigma_{11} h_3 \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \sigma_{23} h_1 \frac{\partial h_2}{\partial q_3} + \sigma_{12} h_3 \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right] = -\rho \omega^2 u_2, \\ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 \sigma_{33}) + \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 \sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 \sigma_{23}) - \right. \\ \left. - \sigma_{11} h_2 \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \sigma_{22} h_1 \frac{\partial h_2}{\partial q_3} + \sigma_{13} h_2 \frac{\partial h_3}{\partial q_1} + \sigma_{23} h_1 \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \right] = -\rho \omega^2 u_3, \end{array} \right. \quad (1.2.39)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \lambda_T \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \lambda_T \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \lambda_T \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) \right] +$$

$$+ \frac{i\omega T_0 (3\lambda + 2\mu) \alpha_T}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 u_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 u_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 u_3) \right] = -i\omega c_\varepsilon T. \quad (1.2.40)$$

$$\sigma_{jk} = 2\mu \varepsilon_{jk} + [\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T] \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (1.2.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u_2 + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} u_3, \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} u_3 + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} u_1, \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_3}{\partial q_3} + \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} u_1 + \frac{1}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} u_2, \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) \right], \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u_3}{h_3} \right) + \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{u_1}{h_1} \right) \right], \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{u_2}{h_2} \right) + \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{u_3}{h_3} \right) \right], \end{array} \right. \quad (1.2.42)$$

где h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Ламе системы криволинейных координат q_1, q_2, q_3 ; $\sigma_{jk}, \varepsilon_{jk}$ – компоненты тензора напряжений и деформаций в нумерованных осях q_j, q_k ($j, k = 1, 2, 3$); δ_{jk} – символ Кронекера.

Из уравнения (1.2.40) следует, что функция λ_T должна быть дифференцируемой по аргументам q_1, q_2, q_3 . При записи уравнений движения (1.2.39) в смещениях с использованием соотношений (1.2.41), (1.2.42), необходимо чтобы функции λ, μ, α_T были дифференцируемыми по q_1, q_2, q_3 .

2. ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЗВУКА НА НЕОДНОРОДНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛАХ

В настоящей главе приведены решения прямых задач о рассеянии гармонических звуковых волн (плоских, цилиндрических, сферических) непрерывно-неоднородными по толщине термоупругими слоями плоской, цилиндрической и сферической формы. Исследовано влияние термоупругости и неоднородности материала слоев, а также геометрии падающего поля на их звукоотражающие свойства. Построены решения прямых дифракционных задач, в которых рассматривается падение звуковых волн на однородные термоупругие тела (пластину произвольной толщины, цилиндр, шар) с непрерывно- или дискретно-слоистыми термоупругими покрытиями. На основе этих решений показана возможность изменения звукоотражающих свойств тел за счет неоднородности покрытий и осуществлено математическое моделирование непрерывно-слоистых покрытий дискретно-слоистыми покрытиями.

Результаты исследований, приведенные в данной главе, отражены в работах [64, 67–70, 74–81, 83–87, 91–95, 199, 201, 204].

2.1. Отражение плоской звуковой волны неоднородным термоупругим плоским слоем

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный изотропный термоупругий плоский слой, имеющий толщину $2h$ (рис. 2.1.1). Источники тепла в слое отсутствуют. Система прямоугольных координат (x, y, z) выбрана таким образом, что ось x лежит в средней плоскости слоя, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности слоя. Плотность материала слоя $\rho = \rho(z)$ и его объемная теплоемкость $c_\varepsilon = c_\varepsilon(z)$ описываются непрерывными функциями координаты z . Модули упругости $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T = \alpha_T(z)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda_T = \lambda_T(z)$ материала слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты z .

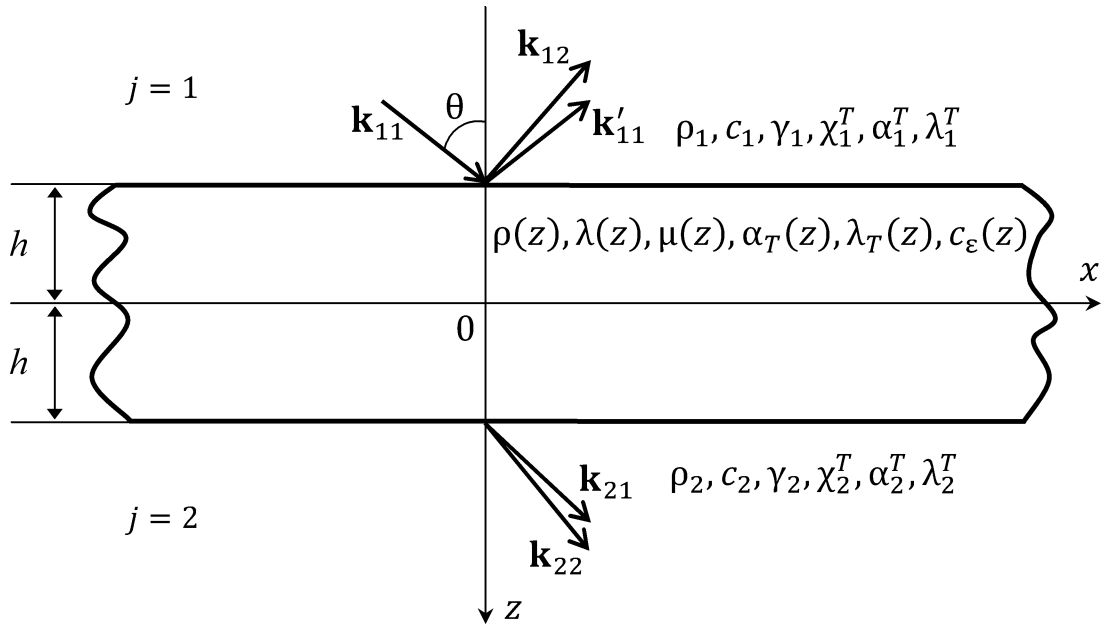


Рис. 2.1.1. Схема задачи

Полагаем, что верхнее ($j=1$) и нижнее ($j=2$) полупространства, с которыми граничит слой, заполнены теплопроводными однородными сжимаемыми жидкостями. Жидкости имеют плотность ρ_j , скорость звука c_j , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ_j , температуропроводность χ_j^T , коэффициент температурного расширения α_j^T , теплопроводность λ_j^T . Считаем, что в невозмущенном состоянии слой и жидкости имеют одинаковую постоянную температуру T_0 .

Пусть из верхнего полупространства на плоский слой наклонно падает плоская звуковая волна, у которой волновой вектор \mathbf{k}_{11} лежит в плоскости xz , составляя угол θ с осью z . Потенциал скоростей такой волны запишем в виде

$$\Psi_i = A_i \exp \left\{ i \left[k_{11}^x x + k_{11}^z (z + h) - \omega t \right] \right\},$$

где

$$k_{11}^x = k_{11} \sin \theta, \quad k_{11}^z = k_{11} \cos \theta,$$

A_i – амплитуда волны; k_{11}^x, k_{11}^z – проекции вектора \mathbf{k}_{11} на оси координат x и z ; k_{11} – волновое число звуковых волн в верхнем полупространстве; ω – круговая частота. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускаем.

При падении звуковой волны на плоский слой, в верхнем и нижнем полупространствах возникают, соответственно, отраженная от слоя и прошедшая через него звуковые волны. Кроме того, в этих полупространствах возбуждаются тепловые волны. Также происходит малая деформация слоя, которая сопровождается изменением его температурного поля. На рис. 2.1.1 векторами $\mathbf{k}'_{11}, \mathbf{k}_{12}$ обозначены соответственно волновые векторы звуковых и тепловых волн в верхнем полупространстве ($|\mathbf{k}'_{11}| = k_{11}$), а векторами $\mathbf{k}_{21}, \mathbf{k}_{22}$ – волновые векторы звуковых и тепловых волн в нижнем полупространстве.

Определим волновые поля в неоднородном термоупругом плоском слое и граничащих с ним жидкостях.

Уравнения волновых полей. В силу постановки рассматриваемая задача является двумерной. Искомые волновые поля не зависят от координаты y .

Потенциалы скоростей звуковых Ψ_{j1} и тепловых Ψ_{j2} волн в верхнем ($j=1$) и нижнем ($j=2$) полупространствах записываются в виде [91, 199]

$$\Psi_{1s}(x, z) = V_s \exp\left\{i\left[k_{1s}^x x - k_{1s}^z (z + h)\right]\right\}, \quad \Psi_{2s}(x, z) = W_s \exp\left\{i\left[k_{2s}^x x + k_{2s}^z (z - h)\right]\right\},$$

$$\left(k_{js}^x\right)^2 + \left(k_{js}^z\right)^2 = k_{js}^2, \quad j, s = 1, 2,$$

где V_1, W_1 – коэффициенты отражения и прохождения звуковых волн; V_2, W_2 – коэффициенты возбуждения тепловых волн; k_{j1}, k_{j2} ($j=1,2$) – волновые числа звуковых и тепловых волн в j -й жидкой среде соответственно; k_{js}^x, k_{js}^z ($j, s = 1, 2$) – проекции волнового вектора \mathbf{k}_{js} на оси x и z соответственно.

С учетом закона Снеллиуса [9, 50] $k_{12}^x = k_{21}^x = k_{22}^x = k_{11}^x$.

Поля скоростей \mathbf{v}_j , давлений p_j и температур Θ_j в верхнем ($j=1$) и нижнем ($j=2$) полупространствах определяются из выражений

$$\mathbf{v}_j = \text{grad}\Psi_j, p_j = i\omega\rho_j\Psi_j, \Theta_j = \frac{i}{\alpha_j^T} \left(\frac{\omega\gamma_j}{c_j^2} \Psi_j + \frac{1}{\omega} \Delta\Psi_j \right), j=1,2, \quad (2.1.1)$$

где

$$\Psi_1 = \Psi_i + \Psi_{11} + \Psi_{12}, \Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22}.$$

Волновые поля в слое описываются уравнениями линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела (1.2.39) – (1.2.42), записанными в прямоугольной системе координат ($q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$). С учетом закона Снеллиуса проекции вектора смещения u_x , u_z ($u_y = 0$) и приращение температуры T в слое представляются в виде [91, 199]

$$u_x(x, z) = U_1(z) \exp(ik_{11}^x x), u_z(x, z) = U_2(z) \exp(ik_{11}^x x), T(x, z) = U_3(z) \exp(ik_{11}^x x).$$

Функции $U_1(z)$, $U_2(z)$, $U_3(z)$ удовлетворяют системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [91, 199]

$$AU'' + BU' + CU = 0, \quad (2.1.2)$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$, штрихи обозначают дифференцирование по z . Выражения для элементов матриц третьего порядка A , B , C , зависящих, в частности, от угла падения θ звуковой волны и ее частоты ω , приведены ранее [91, 199].

Из граничных условий (1.2.35) на поверхностях контакта слоя и жидкостей, записанных в прямоугольной системе координат, получены выражения для коэффициентов отражения, прохождения и возбуждения

$$\begin{aligned} V_s &= \alpha_{s1}U_2(-h) + \alpha_{s2}U_3(-h) + \alpha_{s3}A_i, \\ W_s &= \beta_{s1}U_2(h) + \beta_{s2}U_3(h), s=1,2 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.1.2)

$$(AU' + E_1\mathbf{U})|_{z=-h} = \mathbf{D}, (AU' + E_2\mathbf{U})|_{z=h} = 0. \quad (2.1.4)$$

Выражения для коэффициентов α_{s1} , α_{s2} , α_{s3} , β_{s1} , β_{s2} , элементов матриц третьего порядка E_1 , E_2 и вектора \mathbf{D} приведены ранее [91, 199]. Отметим, что эти величины также являются функциями угла θ и частоты ω .

Из выражений (2.1.3) следует, что волновые поля в жидкостях могут быть определены лишь после нахождения поля смещений и температурного поля в теле, для чего необходимо решить краевую задачу (2.1.2), (2.1.4). Эта краевая задача решена методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических B -сплайнов [91, 199].

Результаты расчетов. Проведены расчеты коэффициента отражения звуковой волны по интенсивности

$$I(\omega, \theta) = |V_1(\omega, \theta) / A_i|^2$$

($\omega = 2|k_{11}|h$ – волновой размер плоского слоя) для слоев в воде, имеющей следующие физические параметры:

$$\begin{aligned} \rho_j &= 1000 \text{ кг/м}^3, \quad c_j = 1485 \text{ м/с}, \quad \gamma_j = 1.006, \quad \chi_j^T = 1.43 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \\ \alpha_j^T &= 2.1 \times 10^{-4} \text{ 1/К}, \quad \lambda_j^T = 0.59 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad T_0 = 293 \text{ К}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Амплитуда падающей волны полагалась равной единице.

Расчеты проводились как для однородных термоупругих слоев, так и для термоупругих слоев с тремя видами неоднородности.

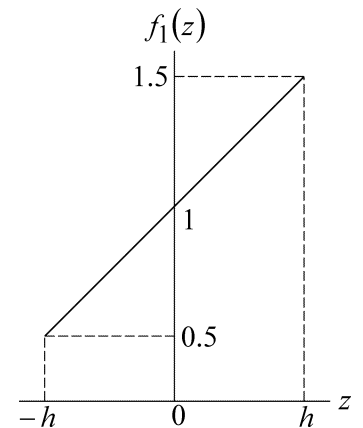
Неоднородность первого вида проявляется в изменении плотности материала слоя:

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \tilde{\rho} f_1(z), \quad \lambda(z) = \tilde{\lambda}, \quad \mu(z) = \tilde{\mu}, \\ \alpha_T(z) &= \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(z) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(z) = \tilde{c}_\varepsilon, \quad -h \leq z \leq h, \end{aligned}$$

где

$$f_1(z) = 1 + \frac{z}{2h},$$

справа на рисунке показан график функции $f_1(z)$.



Здесь и далее в разделах 2.2 – 2.4 величины $\tilde{\rho}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\alpha}_T$, $\tilde{\lambda}_T$, \tilde{c}_ε – физико-механические характеристики однородного термоупругого тела.

Неоднородность второго вида характеризуется изменением плотности и модулей упругости материала слоя:

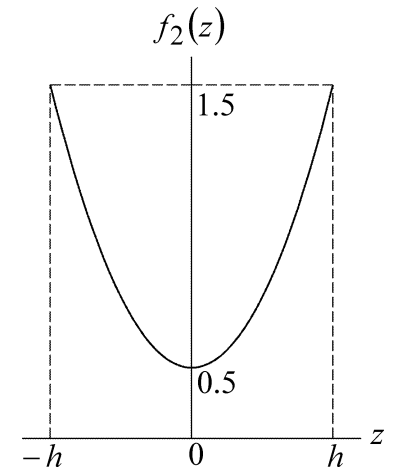
$$\rho(z) = \tilde{\rho}f_1(z), \lambda(z) = \tilde{\lambda}f_2(z), \mu(z) = \tilde{\mu}f_2(z),$$

$$\alpha_T(z) = \tilde{\alpha}_T, \lambda_T(z) = \tilde{\lambda}_T, c_\varepsilon(z) = \tilde{c}_\varepsilon, \quad -h \leq z \leq h,$$

где

$$f_2(z) = 0.5 + \frac{z^2}{h^2},$$

справа на рисунке показан график функции $f_2(z)$.



Неоднородность третьего вида состоит в изменении теплофизических параметров материала слоя:

$$\rho(z) = \tilde{\rho}, \lambda(z) = \tilde{\lambda}, \mu(z) = \tilde{\mu},$$

$$\alpha_T(z) = \tilde{\alpha}_T f_1(z), \lambda_T(z) = \tilde{\lambda}_T f_1(z), c_\varepsilon(z) = \tilde{c}_\varepsilon f_2(z), \quad -h \leq z \leq h.$$

В качестве однородного материала плоского слоя рассматривались металл (алюминий) и полимер (поливинилбутираль), физико-механические характеристики которых приведены в табл. 2.1.1. Для поливинилбутираля эти характеристики взяты из [171].

Таблица 2.1.1

Физико-механические характеристики материалов

Материал	$\tilde{\rho}$, кг/м ³	$\tilde{\lambda}$, Н/м ²	$\tilde{\mu}$, Н/м ²	$\tilde{\alpha}_T$, 1/К	$\tilde{\lambda}_T$, Вт/(м·К)	\tilde{c}_ε , Дж/(м ³ ·К)
Алюминий	2700	5.3×10^{10}	2.6×10^{10}	25.5×10^{-6}	236	2.3×10^6
Полимер	1070	3.9×10^9	9.8×10^8	2.3×10^{-4}	0.2	1.2×10^6

Заметим, что поливинилбутираль относится к группе поливинилацеталей (поливинилформаль, поливинилэтилаль). Механические и теплофизические характеристики этих полимеров близки [51].

Для оценки влияния термоупругости неоднородных слоев на отражение звука расчеты проводились и для упругих неоднородных слоев.

На рис. 2.1.2–2.1.6 представлены зависимости интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ при фиксированной частоте падающей волны, соответствующей волновому размеру плоского слоя $\varpi = 8.5$. Малое отличие кривой 2 от кривой 3 на рис. 2.1.2, 2.1.3 указывает на слабое влияние термоупругости слоя из металла на отражение звука.

Термоупругость слоя из полимерного материала заметно влияет на величину $I(8.5, \theta)$. Так, на исследуемой частоте упругий полимерный плоский слой с неоднородностью первого вида является почти полностью звукопроницаемым ($I(8.5, \theta) \approx 0$) вблизи угла $\theta = 15^\circ$ (рис. 2.1.4), а с неоднородностью второго вида – вблизи угла $\theta = 20^\circ$ (рис. 2.1.5). Для термоупругих полимерных плоских слоев с этими видами неоднородности таких углов θ в рассматриваемом угловом диапазоне не наблюдается.

В термоупругом слое из алюминия наличие неоднородности по механическим материальным параметрам приводит к сдвигу по углу θ и увеличению минимальных значений функции $I(8.5, \theta)$ (рис. 2.1.2, 2.1.3), а в термоупругом слое из полимерного материала – к значительному искажению формы кривой $I(8.5, \theta)$ (рис. 2.1.4, 2.1.5), причем для разных видов неоднородности все эти изменения угловой зависимости различны. Например, присутствие в металлическом слое неоднородности первого вида приводит к смещению первого минимума угловой зависимости в сторону меньших углов падения (рис. 2.1.2), а присутствие неоднородности второго вида – в сторону больших углов падения (рис. 2.1.3). Последующие два минимума этой зависимости из-за влияния обоих видов неоднородности смещаются в сторону больших углов θ . Однако, в случае неоднородности второго вида это смещение выражено сильнее. Кроме того, в этом случае происходит и более сильное увеличение всех трех минимальных значений функции $I(8.5, \theta)$.

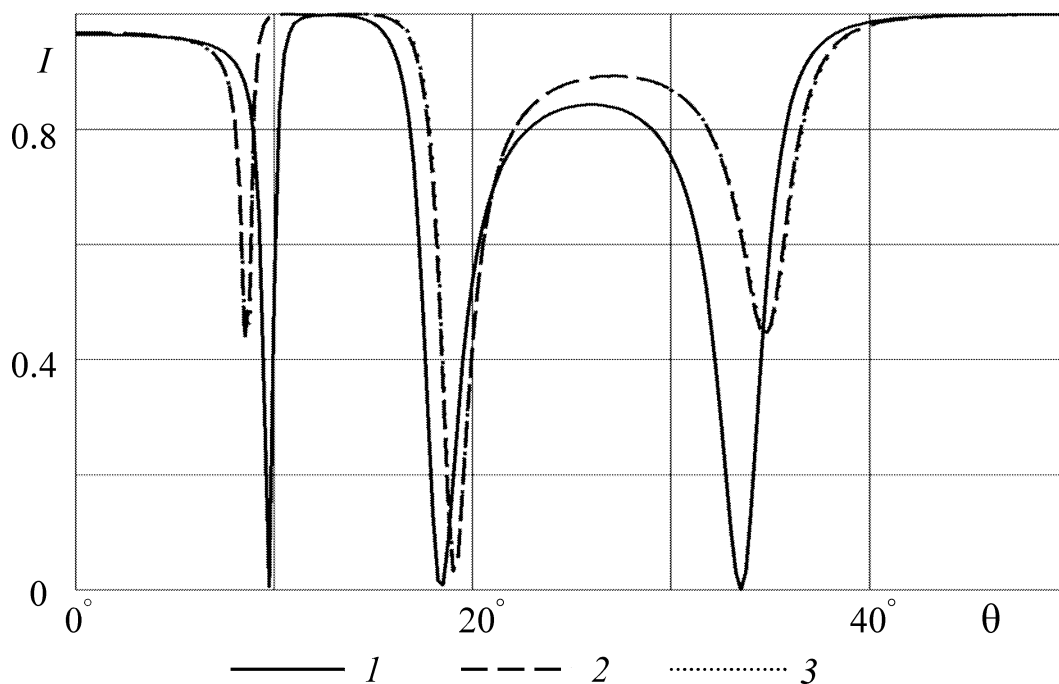


Рис. 2.1.2. Зависимость интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ при $\varpi = 8.5$ для плоского слоя из материала на основе алюминия: I — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

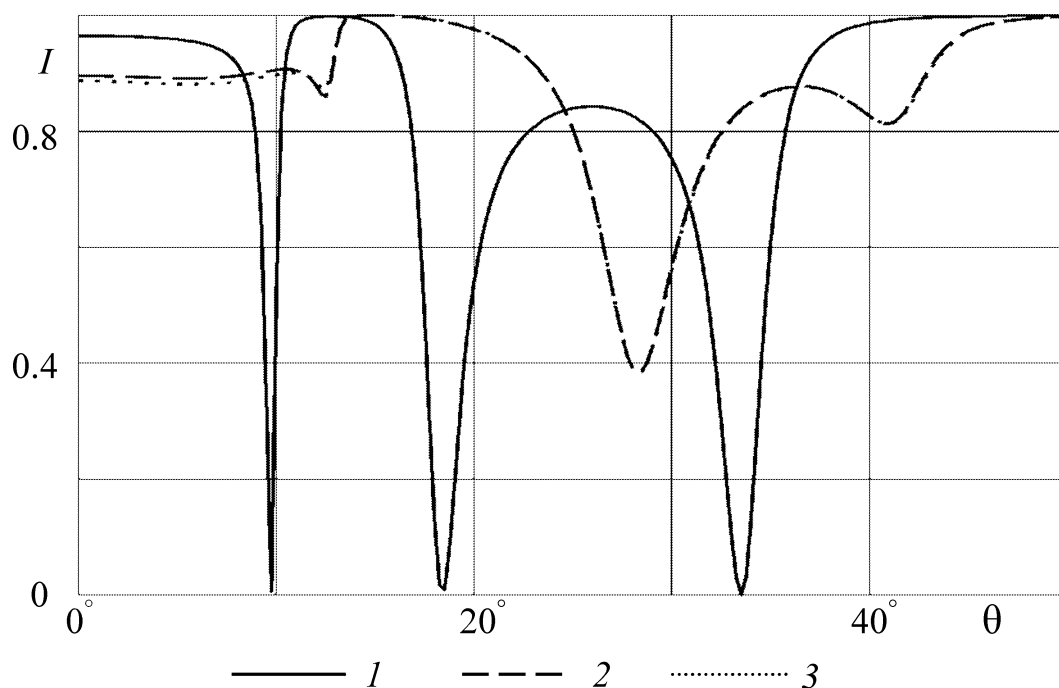


Рис. 2.1.3. Зависимость интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ при $\varpi = 8.5$ для плоского слоя из материала на основе алюминия: I — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

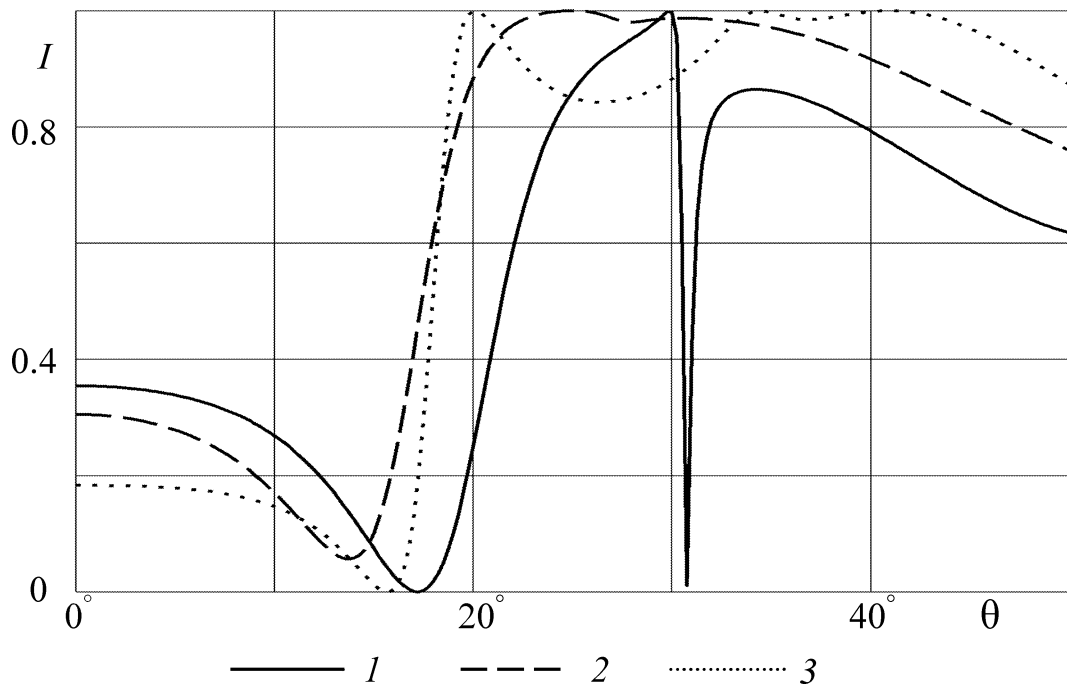


Рис. 2.1.4. Зависимость интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ при $\varpi = 8.5$ для плоского слоя из материала на основе поливинилбутираля:

I — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

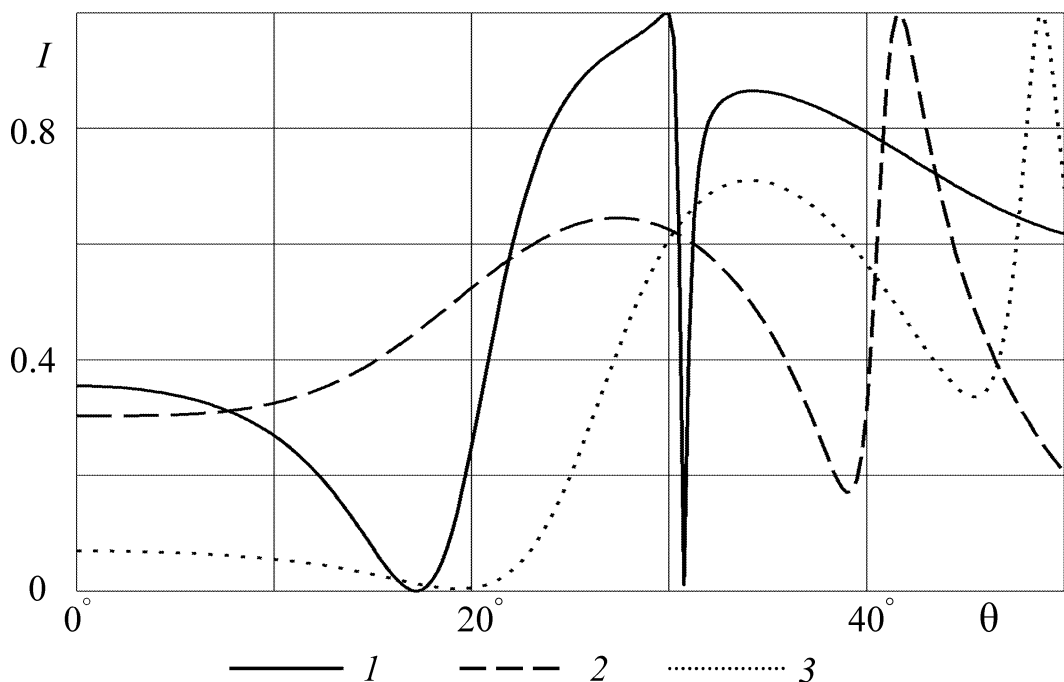


Рис. 2.1.5. Зависимость интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ при $\varpi = 8.5$ для плоского слоя из материала на основе поливинилбутираля:

I — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

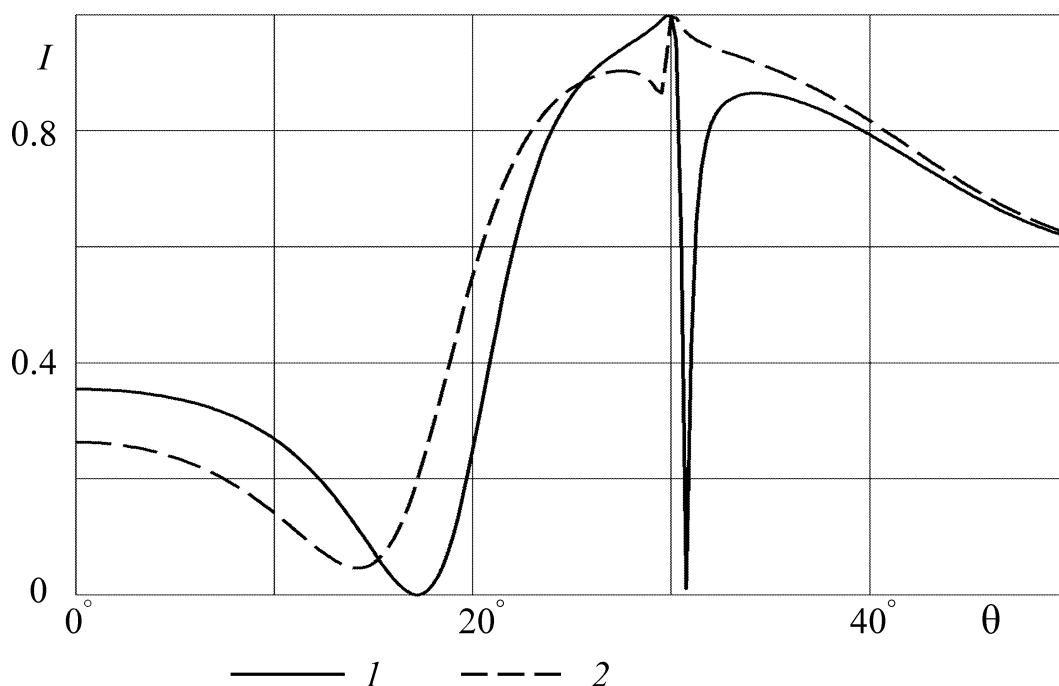


Рис. 2.1.6. Зависимость интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ при $\varpi = 8.5$ для плоского слоя из материала на основе поливинилбутираля:
 I — однородный термоупругий слой, 2 — термоупругий слой с неоднородностью третьего вида

Также отметим, что в полимерном плоском слое наличие неоднородности первого вида приводит к существенному сглаживанию кривой $I(8.5, \theta)$ во второй половине рассматриваемого интервала углов падения, а наличие неоднородности второго вида – в первой половине этого интервала. Из рис. 2.1.6 следует, что присутствие в термоупругом полимерном плоском слое неоднородности по теплофизическим материальным параметрам также может влиять на коэффициент звукоотражения.

На рис. 2.1.7–2.1.11 представлены зависимости интенсивности звукоотражения от волнового размера плоского слоя, рассчитанные в интервале $0 < \varpi \leq 45$ при нормальном падении звуковой волны ($\theta = 0^\circ$). Сравнение графиков на рис. 2.1.7, 2.1.8 с графиками на рис. 2.1.9–2.1.11 показывает, что для слоя из полимерного материала характерно большее количество резонансных частот и уменьшение почти в два раза диапазона изменения функции $I(\varpi, 0^\circ)$ по сравнению с алюминиевым слоем.

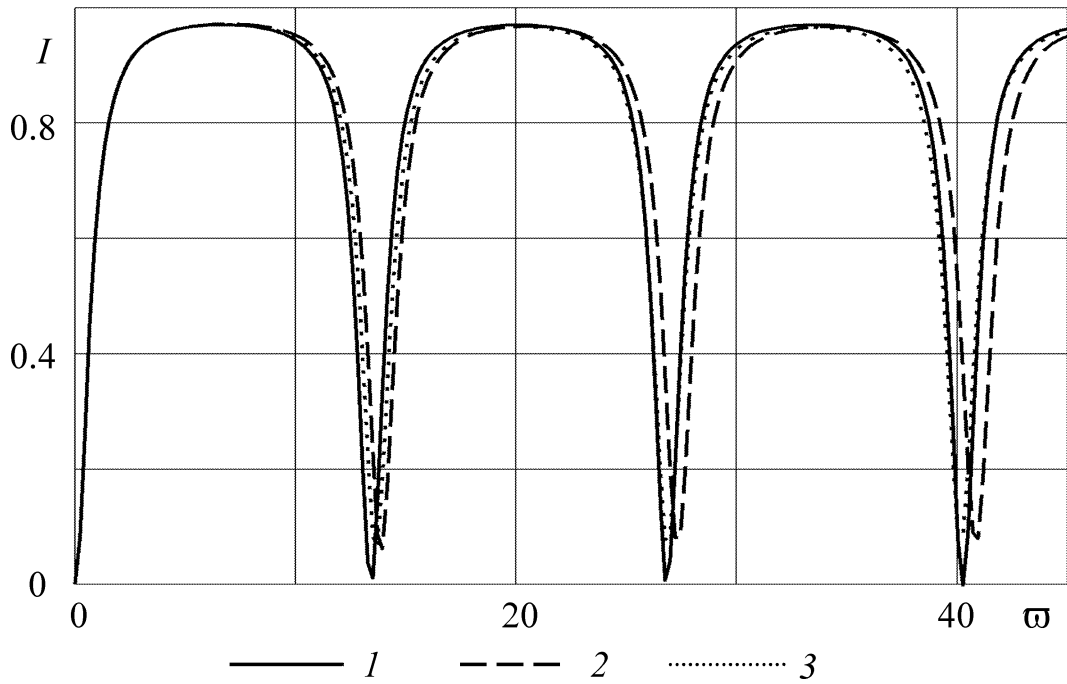


Рис. 2.1.7. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера металлического плоского слоя в интервале $0 < \varpi \leq 45$ при нормальном падении волны:
 I — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

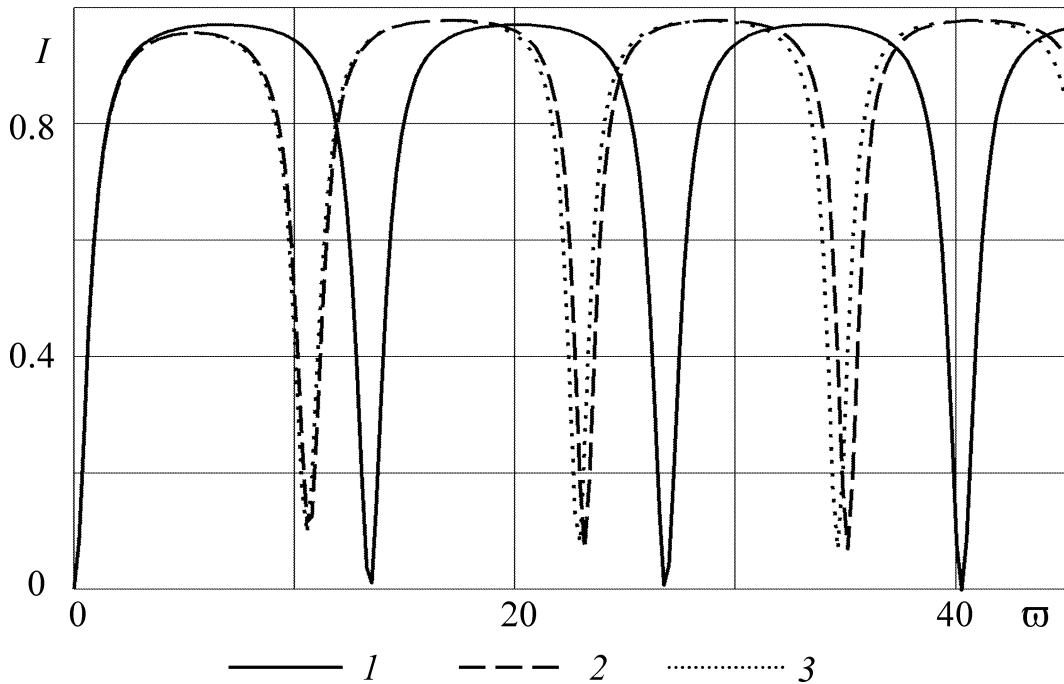


Рис. 2.1.8. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера металлического плоского слоя в интервале $0 < \varpi \leq 45$ при нормальном падении волны:
 I — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

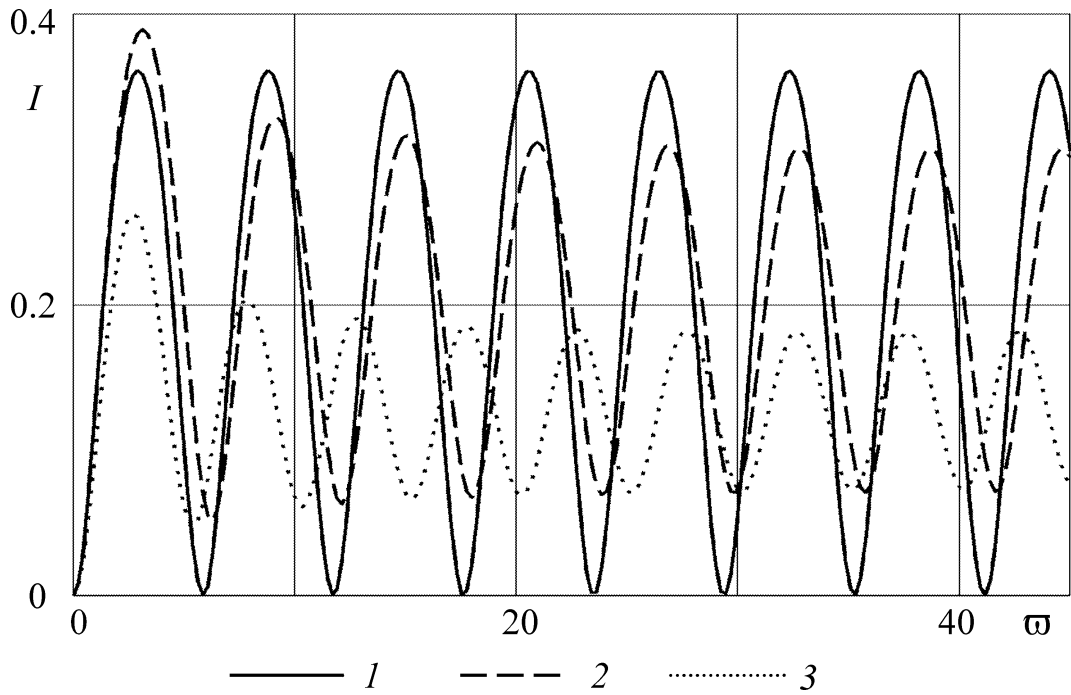


Рис. 2.1.9. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера полимерного плоского слоя в интервале $0 < \varpi \leq 45$ при нормальном падении волны:
 I — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

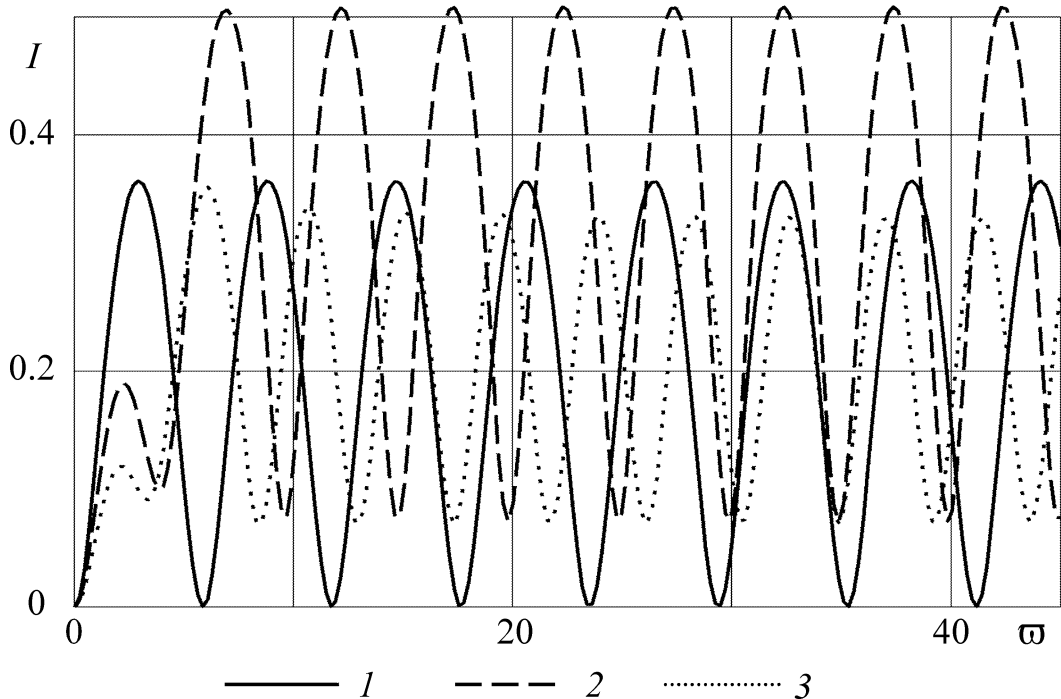


Рис. 2.1.10. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера полимерного плоского слоя в интервале $0 < \varpi \leq 45$ при нормальном падении волны:
 I — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

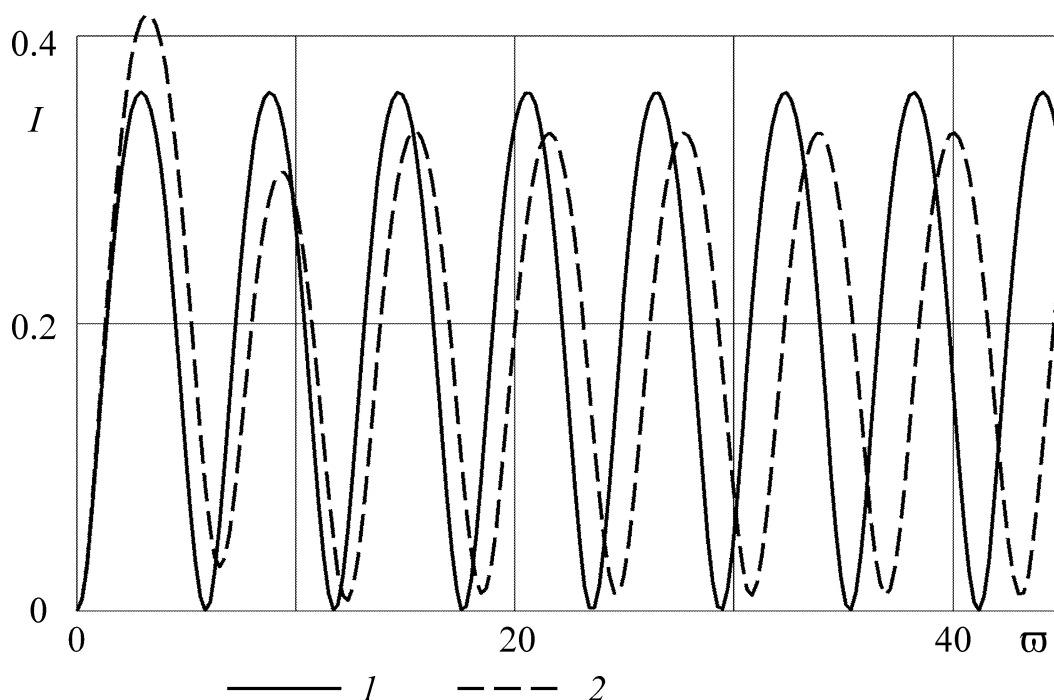


Рис. 2.1.11. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера полимерного плоского слоя в интервале $0 < \varpi \leq 45$ при нормальном падении волны:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 — термоупругий слой с неоднородностью третьего вида

Представленные частотные зависимости показывают, что в области низких частот ($\varpi < 1$) на отражение звука не влияют ни термоупругость, ни неоднородность материала плоского слоя. По мере увеличения волнового числа ϖ учет термоупругости в неоднородных слоях приводит к некоторому сдвигу резонансных частот в область более высоких частот. Этот сдвиг гораздо заметнее для полимерных неоднородных слоев. Для последних учет термоупругости сказывается и в расширении диапазона изменения функции $I(\varpi, 0^\circ)$.

Из графиков на рис. 2.1.7–2.1.11 следует, что на резонансных частотах неоднородный термоупругий плоский слой может оказаться менее звукопроницаемым по сравнению с почти полностью звукопроницаемым однородным термоупругим слоем. Кроме того, как и термоупругость, неоднородность плоского слоя также приводит к смещению резонансных частот. При этом величина и направление этого смещения зависят от вида неоднородности. В частности, в термоупругом слое наличие неоднородности первого или третьего видов приводит к менее сильному смещению зависимости $I(\varpi, 0^\circ)$ в область более высо-

ких частот (рис. 2.1.7, 2.1.9, 2.1.11), чем наличие неоднородности второго вида – в область более низких частот (рис. 2.1.8, 2.1.10).

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что как термоупругость, так и неоднородность плоского слоя влияют на его звукоотражающие свойства, однако степень этого влияния существенно зависит от физико-механических характеристик материала слоя.

Следует отметить, что аналогичные выводы сделаны и в работе [199], где было исследовано влияние термоупругости и неоднородности материала плоского слоя на его звукопроницаемость для видов неоднородности, описываемых с помощью кусочно-дифференцируемой и экспоненциальной функций:

$$f(z) = 0.5 + \frac{|z|}{h}, \quad f(z) = a \left(0.2 + \exp \left\{ - \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \right\} \right), \quad -h \leq z \leq h,$$

где множитель a выбирался так, чтобы среднее значение функции $f(z)$ по толщине слоя равнялось единице. При этом рассматривались плоские слои из материалов на основе стали, алюминия и поливинилбутирала.

2.2. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным термоупругим цилиндрическим слоем

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный изотропный термоупругий цилиндрический слой бесконечной длины, имеющую внешний радиус r_1 и внутренний r_2 (рис. 2.2.1). Цилиндрическая система координат (r, φ, z) выбрана таким образом, что координатная ось z совпадает с осью вращения цилиндрического слоя. Плотность материала слоя $\rho = \rho(r)$ и его объемная теплоемкость $c_\varepsilon = c_\varepsilon(r)$ описываются непрерывными функциями радиальной координаты r . Модули упругости $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T = \alpha_T(r)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda_T = \lambda_T(r)$ материала слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты r . Источники тепла в теле отсутствуют.

Полагаем, что окружающее цилиндрический слой пространство ($j=1$) и полость слоя ($j=2$) заполнены теплопроводными однородными сжимаемыми жидкостями. Жидкости имеют плотность ρ_j , скорость звука c_j , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ_j , температуропроводность χ_j^T , коэффициент температурного расширения α_j^T , теплопроводность λ_j^T . Считаем, что в невозмущенном состоянии тело и жидкости имеют одинаковую постоянную температуру T_0 .

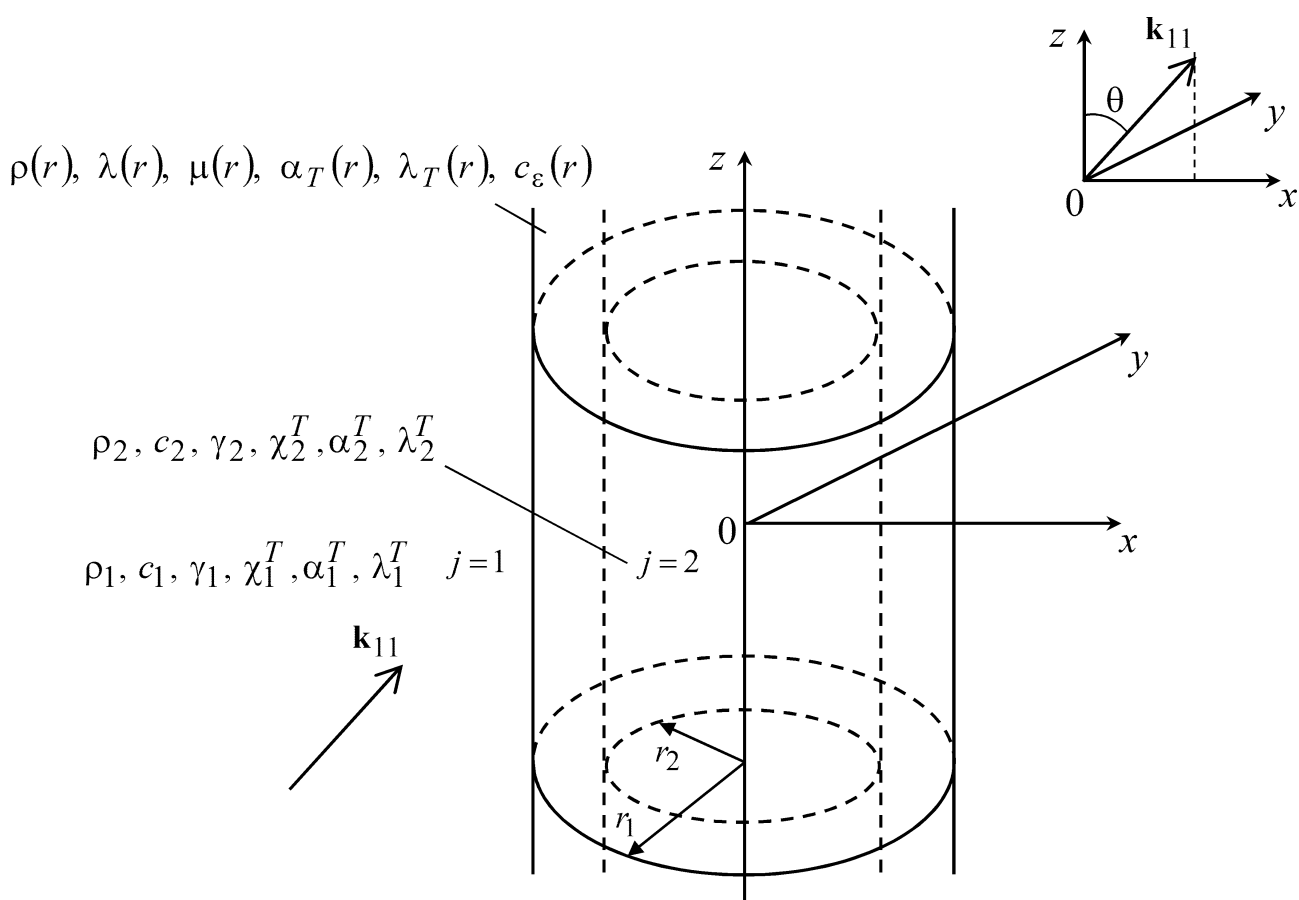


Рис. 2.2.1. Схема задачи

Пусть из внешнего пространства на цилиндрический слой наклонно падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_i = A_i \exp[i(\mathbf{k}_{11}\mathbf{r} - \omega t)],$$

где A_i – амплитуда волны; \mathbf{k}_{11} – волновой вектор; \mathbf{r} – радиус-вектор; ω – круговая частота. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается. Полагаем, что вектор \mathbf{k}_{11} лежит в плоскости $\varphi = 0, \pi$, образуя угол θ с осью z . Потенциал падающей волны может быть представлен в виде [49]

$$\Psi_i(r, \varphi, z) = \exp(ik_{11}^z z) \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m J_m(k_{11}^r r) \cos m\varphi,$$

где

$$k_{11}^r = k_{11} \sin \theta, \quad k_{11}^z = k_{11} \cos \theta, \quad \eta_m = A_i (2 - \delta_{0m}) i^m,$$

k_{11}^r, k_{11}^z – проекции волнового вектора \mathbf{k}_{11} на координатные оси r и z ; k_{11} – волновое число звуковых волн в окружающей слой жидкости; $J_m(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка m ; δ_{0m} – символ Кронекера.

При падении звуковой волны на термоупругий цилиндрический слой, граничащий с теплопроводными жидкостями, в окружающей слой жидкости и в жидкости, заполняющей полость слоя, возникают соответственно рассеянная и прошедшая звуковые волны. Кроме того, в этих жидкостях возбуждаются тепловые волны. Само тело деформируется, его температура изменяется.

Определим волновые поля в неоднородном термоупругом цилиндрическом слое и граничащих с ним жидкостях.

Уравнения волновых полей. С учетом условий излучения на бесконечности (1.2.38) потенциалы скоростей рассеянной цилиндрическим слоем звуковой волны Ψ_{11} и возбужденной во внешнем пространстве тепловой волны Ψ_{12} записываются в виде [92, 199]

$$\Psi_{1s}(r, \varphi, z) = \exp(ik_{1s}^z z) \sum_{m=0}^{\infty} V_{sm} H_m(k_{1s}^r r) \cos m\varphi, \quad s = 1, 2, \quad (2.2.1)$$

где $H_m(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; k_{12}^r, k_{12}^z – проекции волнового вектора тепловых волн во внешнем пространстве на

оси r и z , причем $(k_{12}^r)^2 + (k_{12}^z)^2 = k_{12}^2$. Здесь k_{12} – волновое число тепловых волн в окружающей слой жидкости.

С учетом условий ограниченности потенциалы скоростей звуковой волны Ψ_{21} и тепловой волны Ψ_{22} в полости слоя записываются в виде [92, 199]

$$\Psi_{2s}(r, \varphi, z) = \exp(ik_{2s}^z z) \sum_{m=0}^{\infty} W_{sm} J_m(k_{2s}^r r) \cos m\varphi, \quad s=1,2, \quad (2.2.2)$$

где k_{2s}^r, k_{2s}^z ($s=1,2$) – проекции волнового вектора звуковых ($s=1$) и тепловых ($s=2$) волн в полости слоя на оси r и z , причем $(k_{2s}^r)^2 + (k_{2s}^z)^2 = k_{2s}^2$. Здесь k_{21}, k_{22} – волновые числа звуковых и тепловых волн в полости слоя.

Заметим, что согласно закону Снеллиуса $k_{11}^z = k_{12}^z = k_{21}^z = k_{22}^z$.

Поля скоростей \mathbf{v}_j , давлений p_j и температур Θ_j снаружи ($j=1$) и в полости ($j=2$) тела определяются из выражений (2.1.1).

Волновые поля в цилиндрическом слое описываются уравнениями линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела (1.2.39) – (1.2.42), записанными в цилиндрической системе координат ($q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z$). Так как неоднородность материала слоя проявляется лишь в радиальном направлении, то согласно закону Снеллиуса зависимость от координаты z компонентов вектора смещения $u_r(r, \varphi, z), u_\varphi(r, \varphi, z), u_z(r, \varphi, z)$ и приращения температуры $T(r, \varphi, z)$ в слое имеет вид $\exp(ik_{11}^z z)$. Кроме того, эти функции являются периодическими по углу φ с периодом 2π . Причем в рассматриваемом случае $u_r(r, \varphi, z), u_z(r, \varphi, z), T(r, \varphi, z)$ – четные функции координаты φ , а $u_\varphi(r, \varphi, z)$ – нечетная функция φ . Поэтому эти функции представляются следующими рядами Фурье [92, 199]:

$$u_r(r, \varphi, z) = \exp(ik_{11}^z z) \sum_{m=0}^{\infty} U_{1m}(r) \cos m\varphi, \quad u_\varphi(r, \varphi, z) = \exp(ik_{11}^z z) \sum_{m=0}^{\infty} U_{2m}(r) \sin m\varphi,$$

$$u_z(r, \varphi, z) = \exp(ik_1^z z) \sum_{m=0}^{\infty} U_{3m}(r) \cos m\varphi, \quad T(r, \varphi, z) = \exp(ik_1^z z) \sum_{m=0}^{\infty} U_{4m}(r) \cos m\varphi.$$

Функции $U_{\tau m}(r)$ ($\tau = 1, 2, 3, 4$) для каждого значения индекса $m = 0, 1, 2, \dots$ являются решением системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [92, 199]:

$$A_m \mathbf{U}_m'' + B_m \mathbf{U}_m' + C_m \mathbf{U}_m = 0, \quad (2.2.3)$$

где $\mathbf{U}_m = (U_{1m}, U_{2m}, U_{3m}, U_{4m})^T$, штрихи обозначают дифференцирование по r . Выражения для элементов матриц четвертого порядка A_m, B_m, C_m приведены ранее [92, 199].

Из граничных условий (1.2.35) на поверхностях контакта цилиндрического слоя и жидкостей, записанных в цилиндрической системе координат, получены выражения для неизвестных коэффициентов в рядах (2.2.1), (2.2.2)

$$V_{sm} = \alpha_{sm}^{(1)} U_{1m}(r_1) + \alpha_{sm}^{(2)} U_{4m}(r_1) + \alpha_{sm}^{(3)} \eta_m, \quad (2.2.4)$$

$$W_{sm} = \beta_{sm}^{(1)} U_{1m}(r_2) + \beta_{sm}^{(2)} U_{4m}(r_2), \quad s = 1, 2$$

и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.2.3)

$$(A_m \mathbf{U}_m' + E_{1m} \mathbf{U}_m)_{r=r_1} = \mathbf{D}_m, \quad (A_m \mathbf{U}_m' + E_{2m} \mathbf{U}_m)_{r=r_2} = 0. \quad (2.2.5)$$

Выражения для коэффициентов $\alpha_{sm}^{(1)}, \alpha_{sm}^{(2)}, \alpha_{sm}^{(3)}, \beta_{sm}^{(1)}, \beta_{sm}^{(2)}$, элементов матриц четвертого порядка E_{1m}, E_{2m} и вектора \mathbf{D}_m приведены ранее [92, 199].

Из выражений (2.2.4) следует, что волновые поля в граничащих с телом жидкостях могут быть определены лишь после нахождения поля смещений и температурного поля в теле, для чего необходимо решить краевую задачу (2.2.3), (2.2.5). Эта краевая задача решена методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических B -сплайнов [92, 199].

Результаты расчетов. Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическую формулу для цилиндрической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [49, 96] ($x \gg 1$)

$$H_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

из равенства (2.2.1) при $s = 1$ получаем

$$\Psi_{11}(r, \varphi, z) = A_i \sqrt{\frac{r_1}{2r}} \exp\left[i\left(k_{11}^r r + k_{11}^z z - \frac{\pi}{4}\right)\right] F(\varpi, \varphi),$$

где

$$F(\varpi, \varphi) = \frac{2}{A_i \sqrt{\pi k_{11}^r r_1}} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m V_{1m} \cos m\varphi. \quad (2.2.6)$$

Здесь и далее в разделах 2.3, 2.4 величина $\varpi = |k_{11}|r_1$ – волновой размер слоя.

Проведены расчеты амплитуды рассеянной звуковой волны $|F(\varpi, \varphi)|$ для цилиндрических слоев, граничащих с водой. В расчетах полагали, что толщина слоев составляет 10% от их внутреннего радиуса ($r_1/r_2 = 1.1$). Рассматривался случай падения плоской звуковой волны с единичной амплитудой по направлению нормали к образующим цилиндрических слоев ($\theta = \pi/2$).

Расчеты проводились как для однородных термоупругих цилиндрических слоев из алюминия или поливинилбутираля, так и для неоднородных термоупругих слоев на основе этих материалов. При этом рассматривались два вида неоднородности. Неоднородность первого вида описывается функциями:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \tilde{\rho} f_1(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda} f_2(r), \quad \mu(r) = \tilde{\mu} f_2(r), \\ \alpha_T(r) &= \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon, \quad r_2 \leq r \leq r_1, \end{aligned}$$

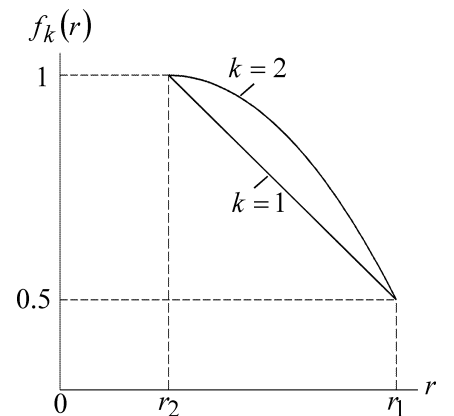
а неоднородность второго вида – функциями:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \tilde{\rho} f_2(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda} f_1(r), \quad \mu(r) = \tilde{\mu} f_1(r), \\ \alpha_T(r) &= \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon, \quad r_2 \leq r \leq r_1, \end{aligned}$$

где

$$f_k(r) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r - r_2}{r_1 - r_2} \right)^k, \quad k = 1, 2.$$

Справа на рисунке показан график функции $f_k(r)$.



Для оценки влияния термоупругости неоднородных цилиндрических слоев на рассеяние звука расчеты проводились и для упругих неоднородных слоев.

На рис. 2.2.2 – 2.2.7 представлены зависимости амплитуды рассеянной звуковой волны в направлении $\varphi = \pi$ от волнового размера цилиндрического слоя в интервале $0 < \varpi \leq 10$.

Из графиков, приведенных на рис. 2.2.2, 2.2.3, 2.2.6, 2.2.7 видно, что наличие рассматриваемых видов неоднородности в термоупругом цилиндрическом слое сказывается на обратном рассеянии звука уже в начале рассматриваемого интервала волновых чисел. Для термоупругого алюминиевого слоя существенное различие в частотных характеристиках, обусловленное влиянием разных видов неоднородности слоя, становится заметным в основном при $\varpi > 4$ (рис. 2.2.2, 2.2.3). Для термоупругого слоя из полимерного материала такое различие заметно уже при $\varpi < 4$, где наличие в слое неоднородности первого вида приводит к отчетливому смещению первых трех резонансных максимумов зависимости $|F(\varpi, \pi)|$ в сторону больших волновых чисел (рис. 2.2.6), а наличие неоднородности второго вида – к смещению этих максимумов в сторону меньших волновых чисел (рис. 2.2.7).

В интервале $0 < \varpi \leq 10$ учет термоупругости в неоднородном цилиндрическом слое из материала на основе алюминия приводит к некоторому смещению резонансных частот, что отражается на небольшом сдвиге кривых $|F(\varpi, \pi)|$, заметном в основном вблизи резонансных значений величины ϖ (рис. 2.2.4, 2.2.5). Влияние же на отражение звука термоупругости неоднородного цилиндрического слоя из полимерного материала проявляется почти во всем рассматриваемом интервале волновых чисел и с увеличением ϖ становится заметнее (рис. 2.2.6, 2.2.7), особенно в случае неоднородности первого вида.

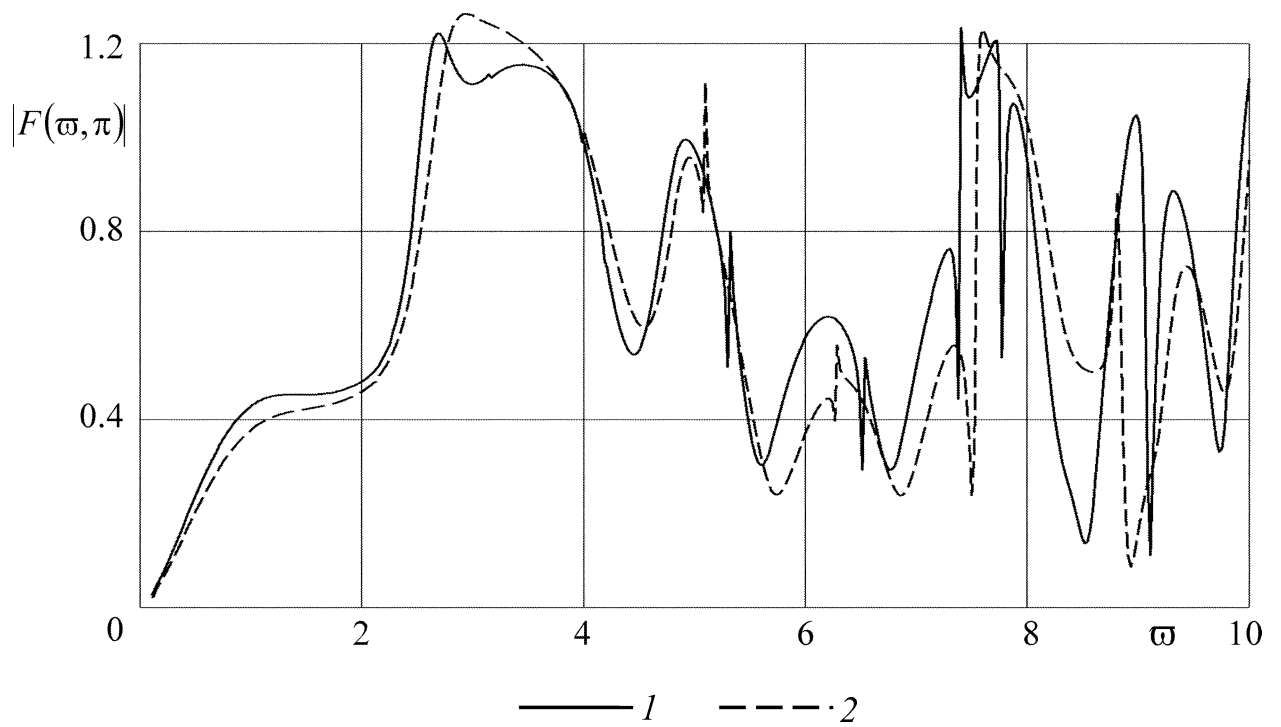


Рис. 2.2.2. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндрического слоя из металла в интервале $0 < \varpi \leq 10$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 — термоупругий слой с неоднородностью первого вида

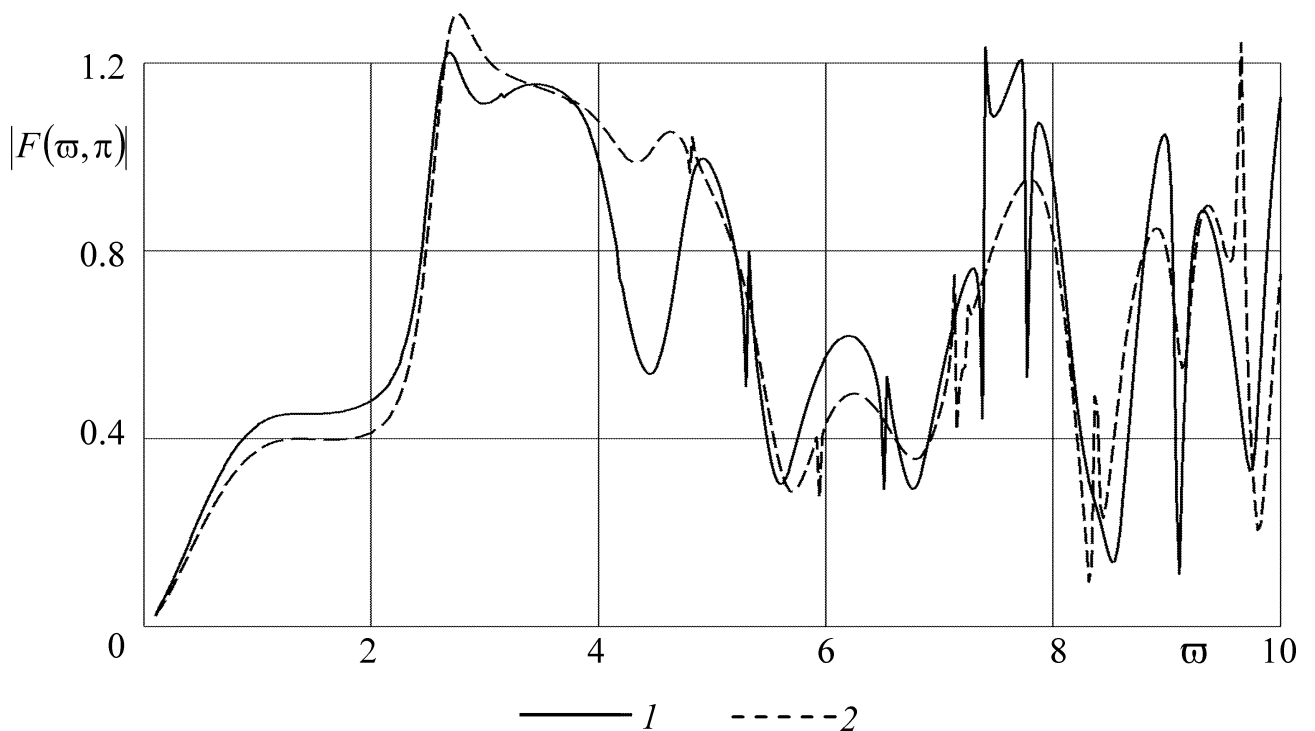


Рис. 2.2.3. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндрического слоя из металла в интервале $0 < \varpi \leq 10$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 — термоупругий слой с неоднородностью второго вида

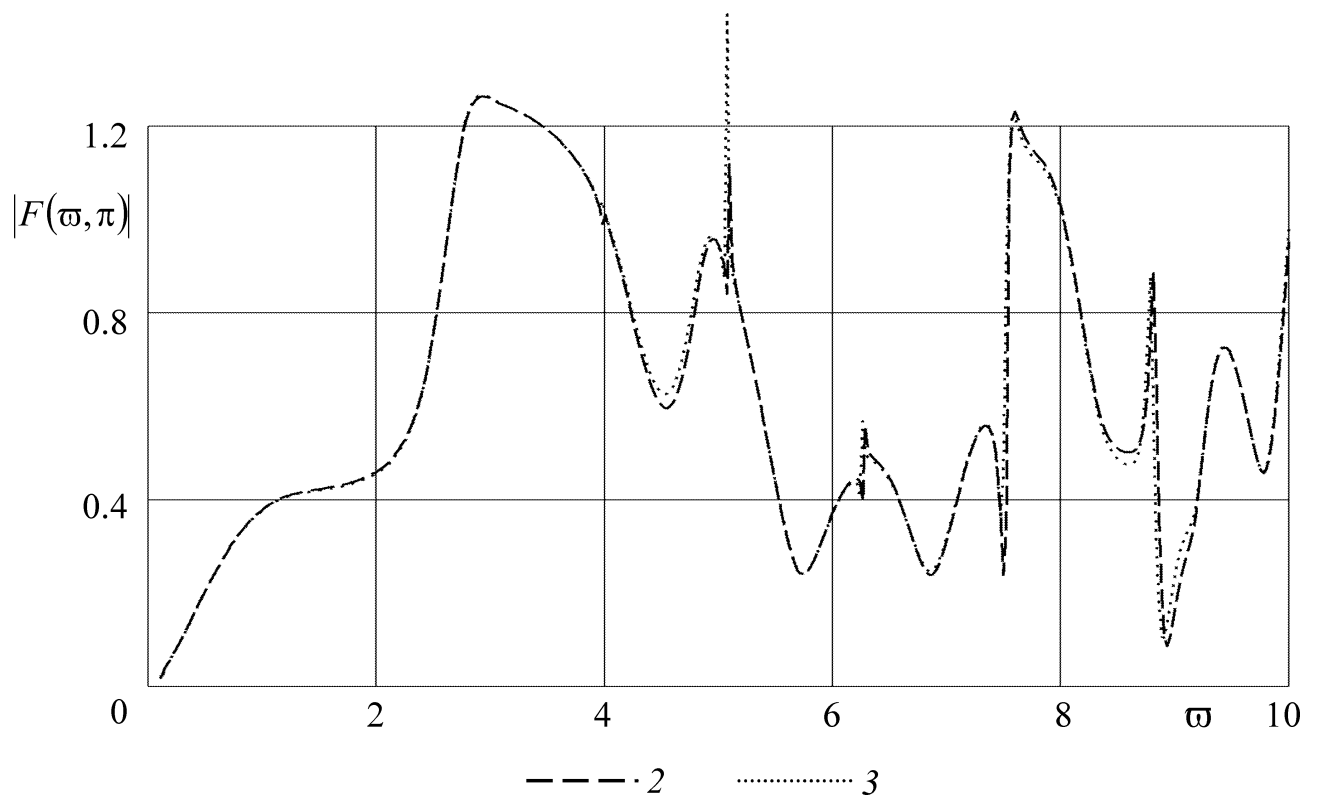


Рис. 2.2.4. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндрического слоя из металла в интервале $0 < \omega \leq 10$:
 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

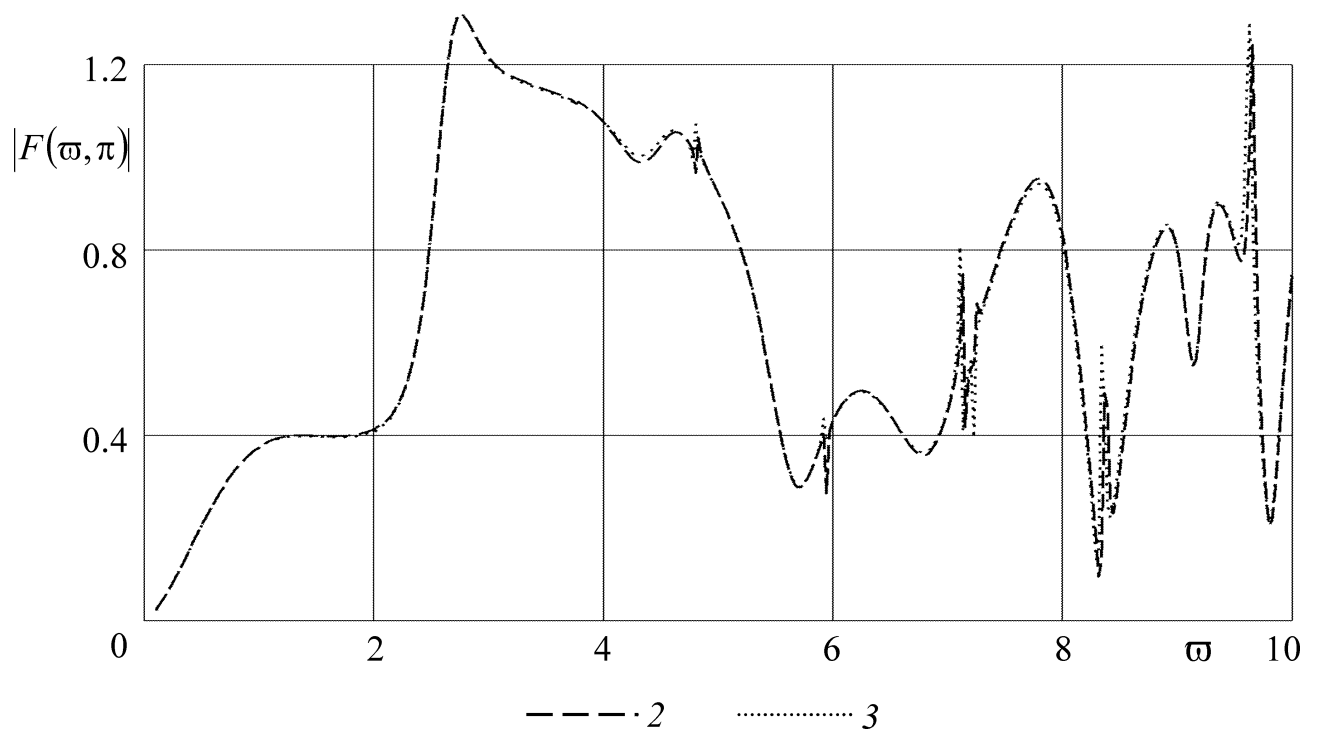


Рис. 2.2.5. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндрического слоя из металла в интервале $0 < \omega \leq 10$:
 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

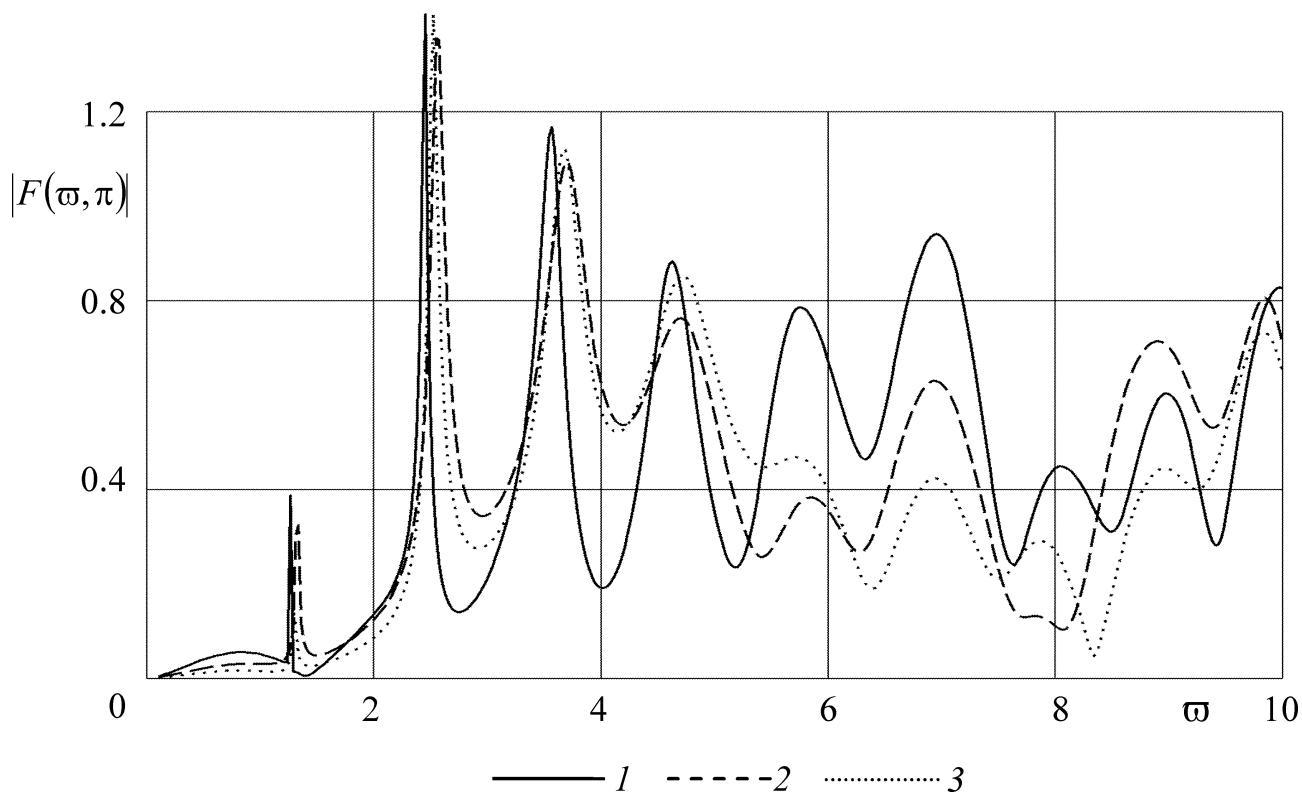


Рис. 2.2.6. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндрического слоя из полимерного материала в интервале $0 < \varpi \leq 10$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

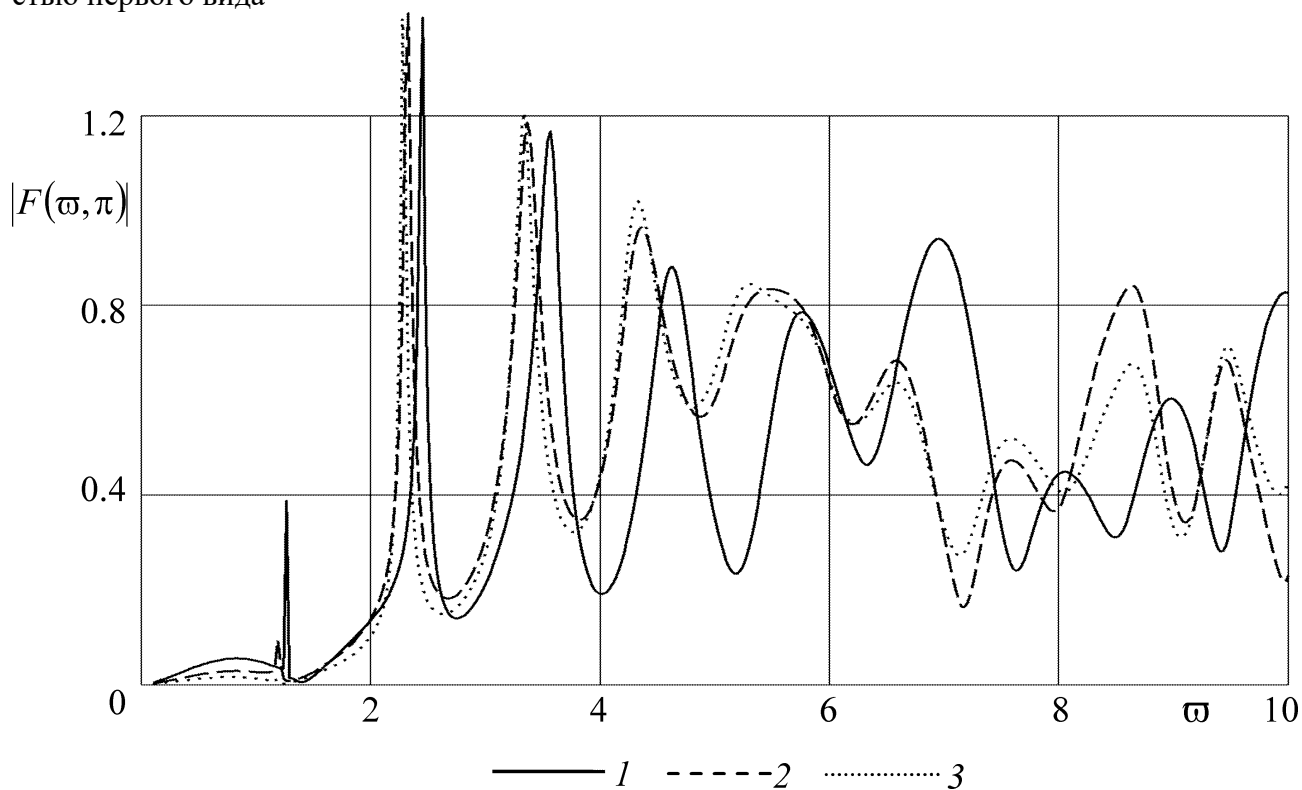


Рис. 2.2.7. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндрического слоя из полимерного материала в интервале $0 < \varpi \leq 10$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

На рис. 2.2.8 – 2.2.15 построены полярные диаграммы направленности амплитуды рассеянной звуковой волны при различных значениях волнового размера цилиндрического слоя. Ввиду симметрии рассеянного акустического поля диаграммы строились для полярного угла в секторе $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$. Стрелкой на рисунках показано направление распространения падающей плоской звуковой волны.

Различие кривых 1 и 2 на каждом из рисунков 2.2.8 – 2.2.15 указывает на влияние неоднородности термоупругого цилиндрического слоя на угловую характеристику рассеяния звука. Это влияние зависит, в частности, от частоты падающего поля и распределения самой неоднородности по толщине слоя. Например, графики на рис. 2.2.8, 2.2.9 (рис. 2.2.10, 2.2.11) показывают, что один и тот же вид неоднородности термоупругого алюминиевого слоя при $\varpi = 5.07$ ($\varpi = 4.5$) проявляется слабее (сильнее) в характеристике рассеяния, чем при $\varpi = 7.5$ ($\varpi = 7.1$). В случае же термоупругого полимерного слоя, влияние его неоднородности на диаграммы рассеяния существенно на обеих исследуемых частотах, соответствующих $\varpi = 3$ и $\varpi = 5$ (рис. 2.2.12 – 2.2.15). Однако, как при $\varpi = 3$ (рис. 2.2.12, 2.2.14), так и при $\varpi = 5$ (рис. 2.2.13, 2.2.15) наблюдается различие в характеристиках рассеяния (более заметное в области тени) обусловленное разными видами неоднородности термоупругого слоя.

Рис. 2.2.8, 2.2.9, 2.2.11 иллюстрируют пример существенного влияния термоупругости неоднородного цилиндрического слоя из алюминия на рассеяние звука вблизи резонансных частот. Видно обусловленное этим влиянием изменение формы диаграмм рассеяния по сравнению с упругим случаем. Расчеты показали слабое влияние термоупругости металлического слоя на его рассеивающие свойства вблизи нерезонансных частот, например на частоте, соответствующей $\varpi = 4.5$ (рис. 2.2.10). Учет термоупругости в слое из полимерного материала может значительно проявляться в угловой характеристике рассеяния звука даже вблизи нерезонансных частот. Это видно на рис. 2.2.12 – 2.2.15, где сравнение кривых 2 и 3 показывает, что из-за влияния термоупругости неодно-

родного полимерного слоя с волновым размером $\varpi = 3$ или $\varpi = 5$ изменяются величина и ширина лепестков полярных диаграмм направленности.

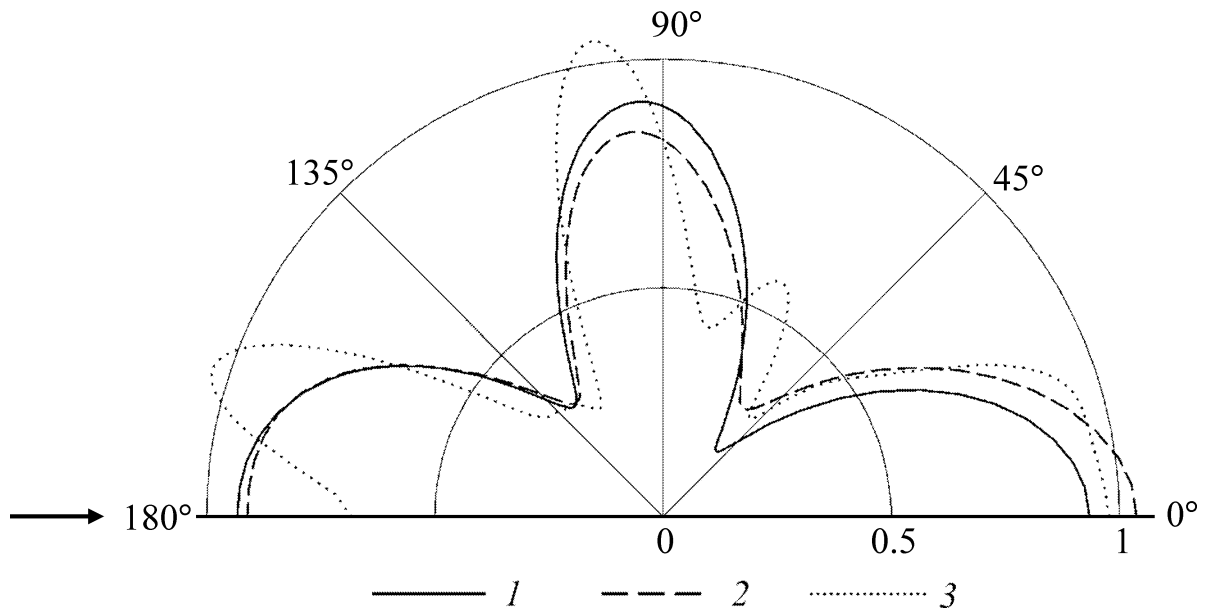


Рис. 2.2.8. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя из металла при $\varpi = 5.07$:

1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

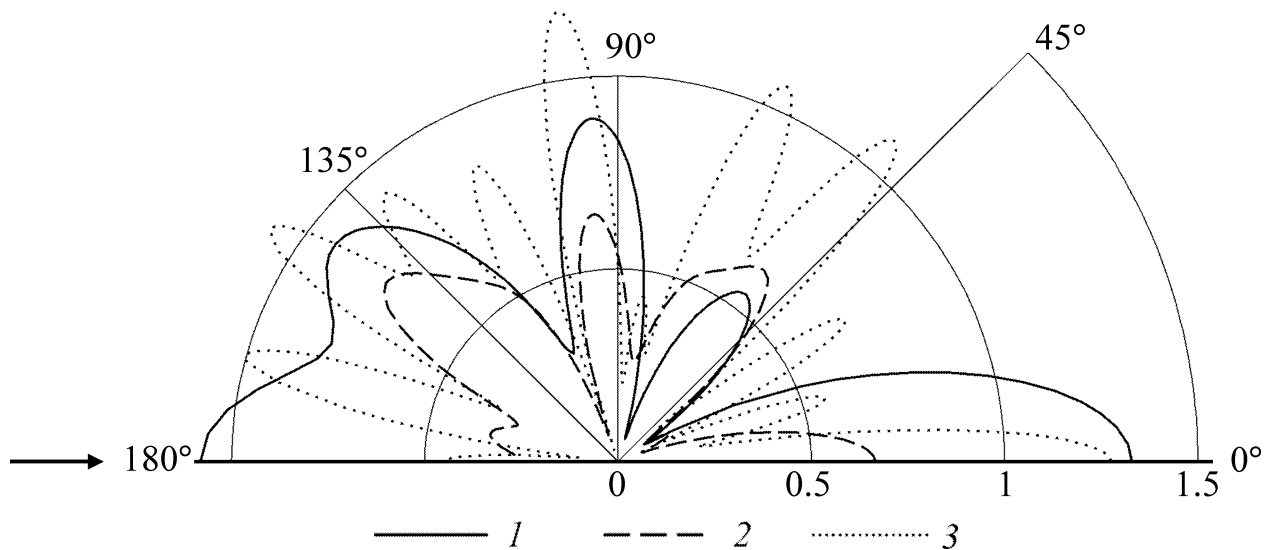


Рис. 2.2.9. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя из металла при $\varpi = 7.50$:

1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

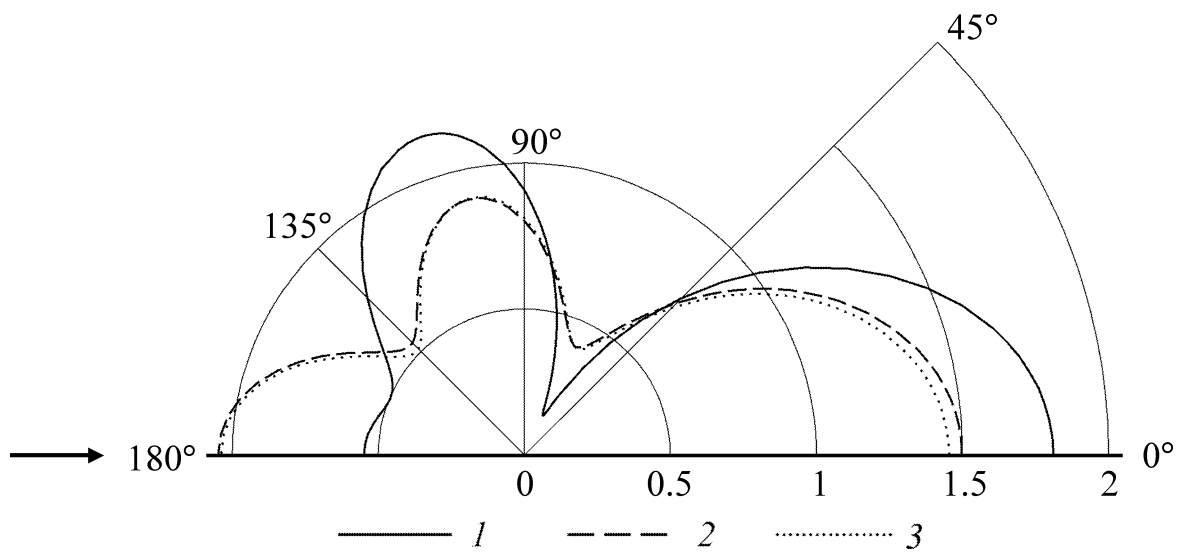


Рис. 2.2.10. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя из металла при $\omega = 4.50$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

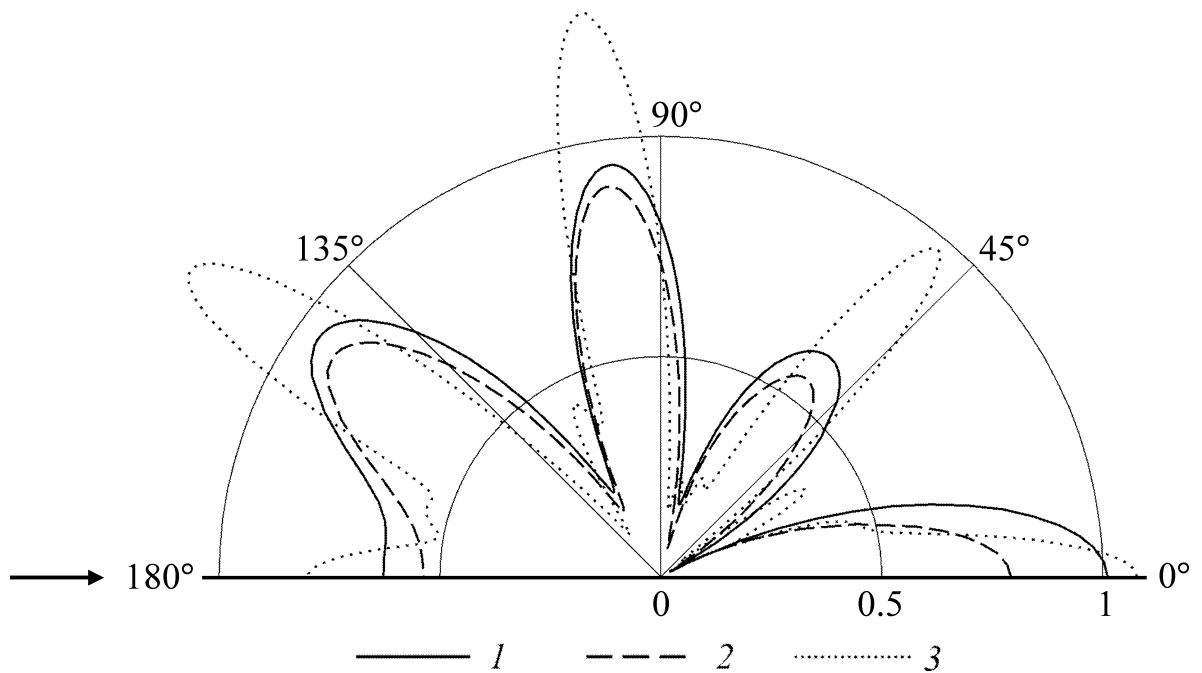


Рис. 2.2.11. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя из металла при $\omega = 7.10$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

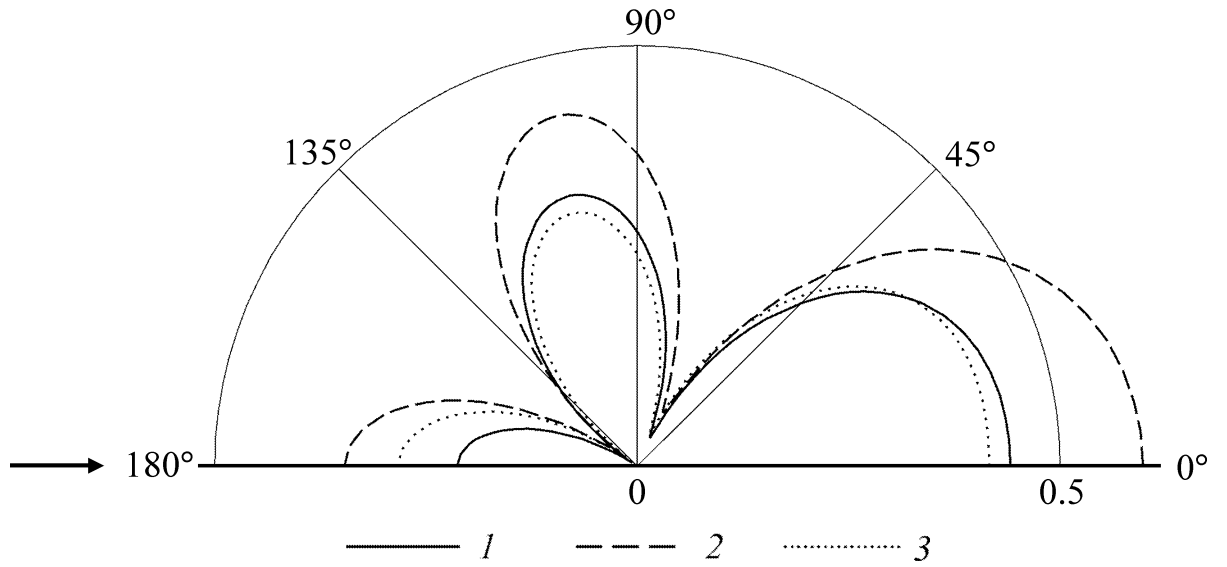


Рис. 2.2.12. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя из полимерного материала при $\varpi = 3$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

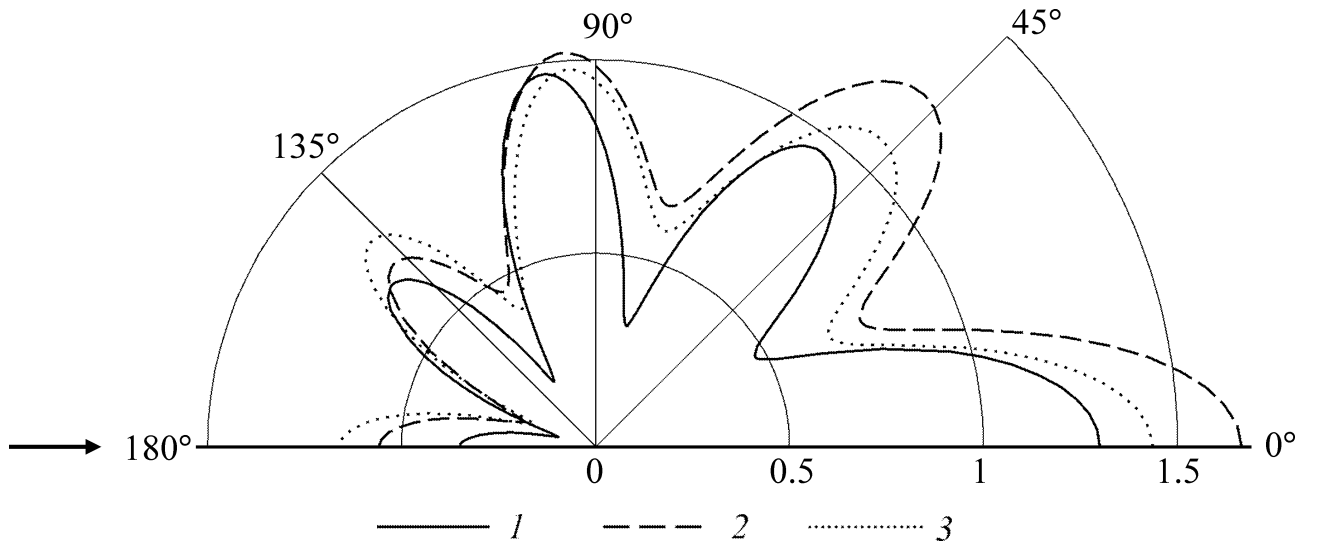


Рис. 2.2.13. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя из полимерного материала при $\varpi = 5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

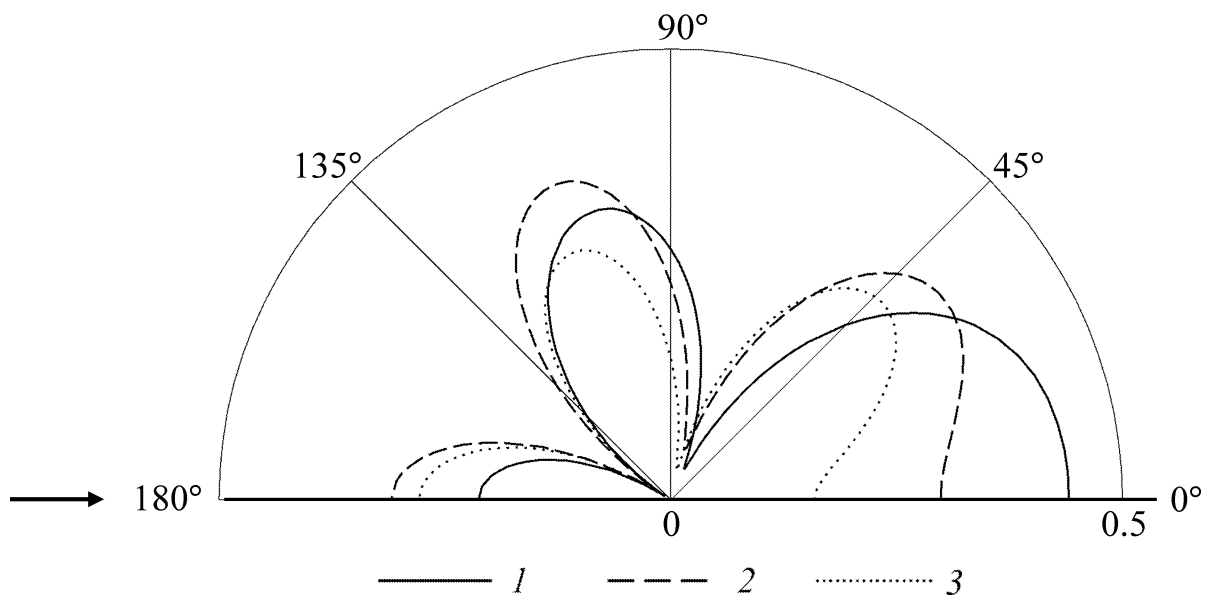


Рис. 2.2.14. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя из полимерного материала при $\varpi = 3$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

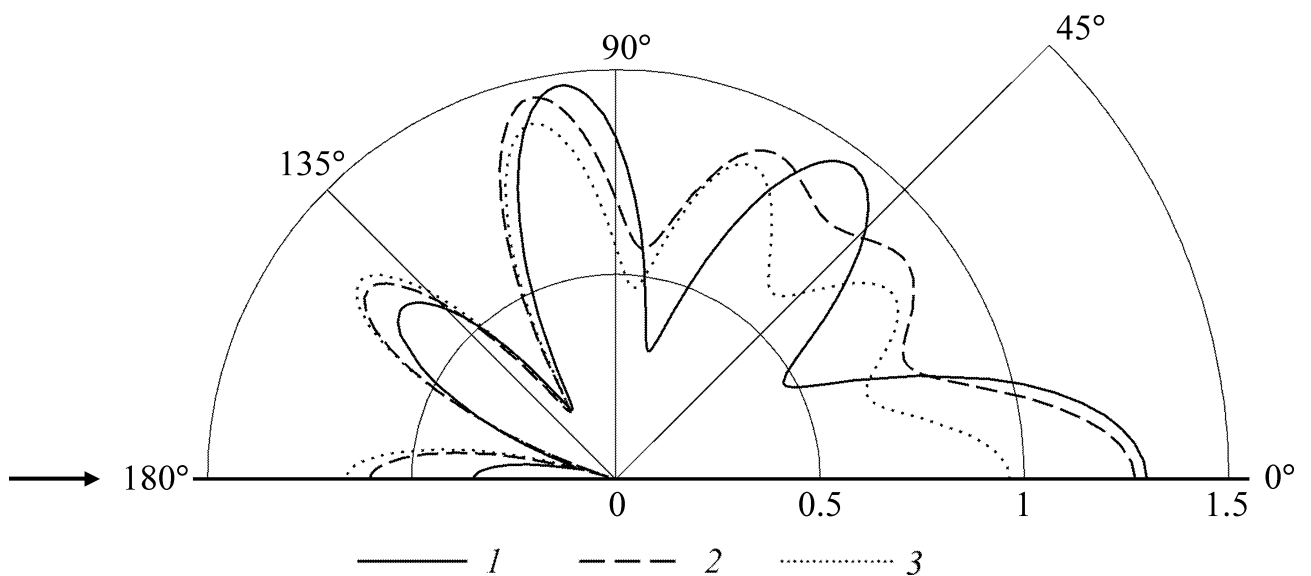
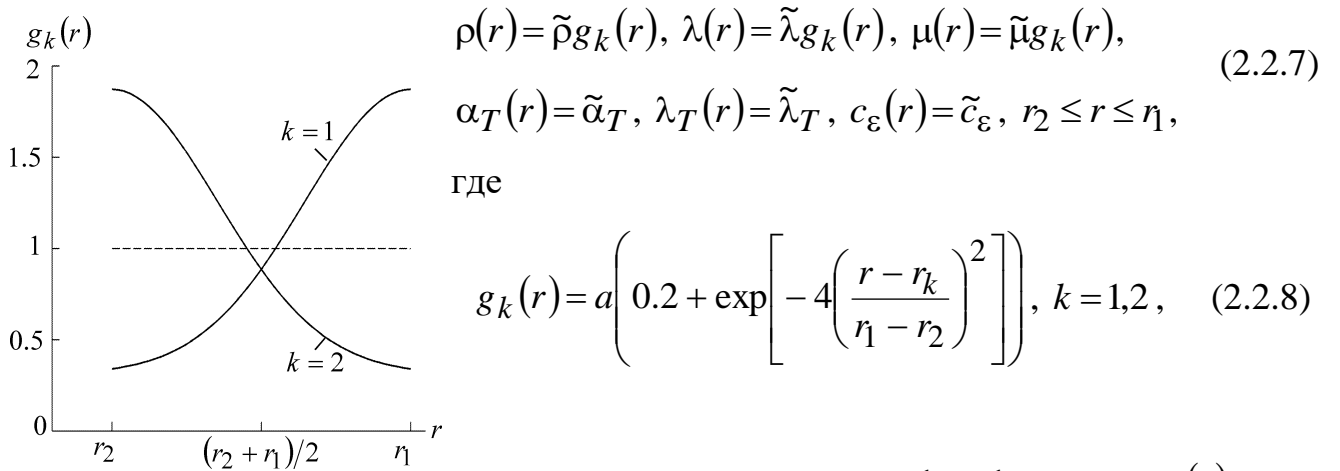


Рис. 2.2.15. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя из полимерного материала при $\varpi = 5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что термоупругость и неоднородность цилиндрического слоя влияют на его звукоотражающие свойства, причем степень этого влияния значительно зависит от физико-механических характеристик материала слоя.

Отметим, что аналогичные выводы сделаны и в работах [92, 199], где исследовано влияние на рассеяние звука термоупругости и неоднородности цилиндрических слоев из материалов на основе стали, алюминия и поливинилбутираля для законов неоднородности вида



$$\rho(r) = \tilde{\rho}g_k(r), \lambda(r) = \tilde{\lambda}g_k(r), \mu(r) = \tilde{\mu}g_k(r), \quad (2.2.7)$$

$$\alpha_T(r) = \tilde{\alpha}_T, \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon, r_2 \leq r \leq r_1,$$

где

$$g_k(r) = a \left(0.2 + \exp \left[-4 \left(\frac{r - r_k}{r_1 - r_2} \right)^2 \right] \right), k = 1, 2, \quad (2.2.8)$$

слева на рисунке показан график функции $g_k(r)$.

Множитель $a = 1.56$ выбирался так, чтобы среднее значение функции $g_k(r)$ по толщине слоя было равно единице. При этом рассматривались цилиндрические слои, имеющие толщину равную их внутреннему радиусу ($r_1/r_2 = 2$).

2.3. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным термоупругим сферическим слоем

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный изотропный термоупругий сферический слой с внешним радиусом r_1 и внутренним r_2 (рис. 2.3.1). Плотность материала слоя $\rho = \rho(r)$ и его объемная теплоемкость $c_\varepsilon = c_\varepsilon(r)$ описываются непрерывными функциями радиальной координаты r сферической системы координат (r, θ, φ) , начало которой совпадает с центром сферического слоя. Модули упругости $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T = \alpha_T(r)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda_T = \lambda_T(r)$

материала слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты r . Источники тепла в теле отсутствуют.

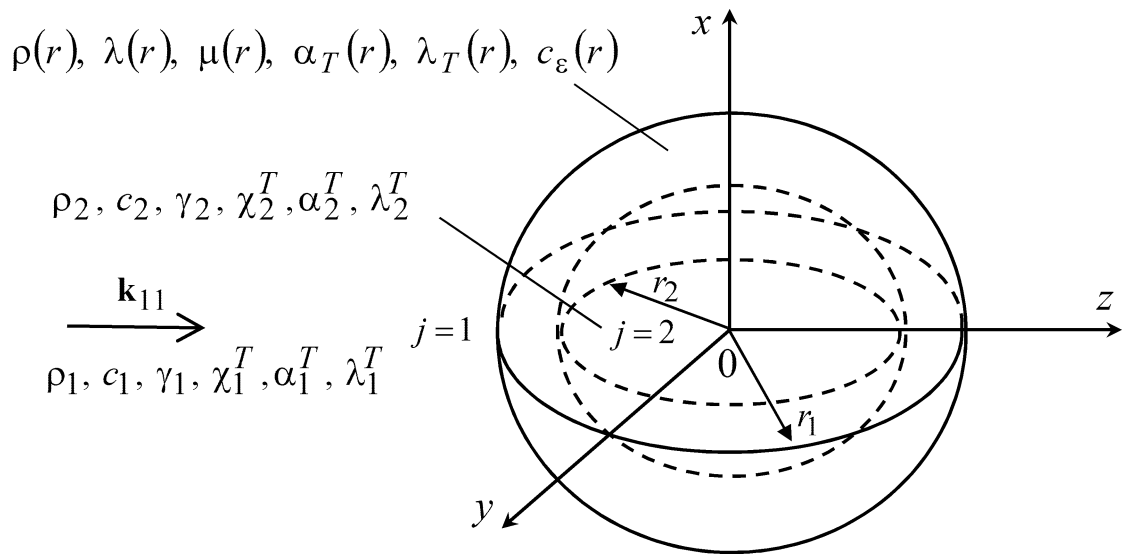


Рис. 2.3.1. Схема задачи

Полагаем, что окружающее сферический слой пространство ($j=1$) и полость слоя ($j=2$) заполнены теплопроводными однородными сжимаемыми жидкостями. Жидкости имеют плотность ρ_j , скорость звука c_j , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ_j , температуропроводность χ_j^T , коэффициент температурного расширения α_j^T , теплопроводность λ_j^T . Считаем, что в невозмущенном состоянии тело и жидкости имеют одинаковую постоянную температуру T_0 .

Пусть из внешнего пространства на сферический слой в направлении $\theta = 0$ падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_i = A_i \exp[i(\mathbf{k}_{11}\mathbf{r} - \omega t)],$$

где A_i – амплитуда волны; \mathbf{k}_{11} – волновой вектор; \mathbf{r} – радиус-вектор; ω – круговая частота. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается. В сферической системе координат потенциал падающей волны может быть представлен в виде [49]

$$\Psi_i(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n j_n(k_{11}r) P_n(\cos \theta), \quad \eta_n = A_i (2n+1) i^n, \quad (2.3.1)$$

где k_{11} – волновое число звуковых волн в окружающей жидкости; $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя порядка n ; $P_n(x)$ – многочлен Лежандра степени n .

Определим волновые поля в неоднородном термоупругом сферическом слое и граничащих с ним жидкостях.

Уравнения волновых полей. Ввиду осевой симметрии задачи и свойств материала сферического слоя искомые волновые поля не будут зависеть от азимутальной координаты φ .

С учетом условий излучения на бесконечности (1.2.37) потенциалы скоростей рассеянной сферическим слоем звуковой волны Ψ_{11} и возбужденной во внешнем пространстве тепловой волны Ψ_{12} записываются в виде [93, 199]

$$\Psi_{1s}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{sn} h_n(k_{1s}r) P_n(\cos \theta), \quad s = 1, 2, \quad (2.3.2)$$

где $h_n(x)$ – сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; k_{12} – волновое число тепловых волн в окружающей жидкости.

С учетом условий ограниченности потенциалы скоростей звуковой волны Ψ_{21} и тепловой волны Ψ_{22} в полости слоя записываются в виде [93, 199]

$$\Psi_{2s}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_{sn} j_n(k_{2s}r) P_n(\cos \theta), \quad s = 1, 2, \quad (2.3.3)$$

где k_{21} , k_{22} – волновые числа звуковых и тепловых волн в полости слоя.

Поля скоростей \mathbf{v}_j , давлений p_j и температур Θ_j снаружи ($j=1$) и в полости ($j=2$) тела определяются из выражений (2.1.1).

Волновые поля в сферическом слое описываются уравнениями линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела (1.2.39) – (1.2.42), записанными в сферической системе координат ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$). Компоненты вектора смещения u_r , u_θ ($u_\varphi = 0$) и приращение

температуры T в слое представляются в виде разложений по многочленам Лежандра [93, 199]:

$$u_r(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{1n}(r) P_n(\cos \theta), \quad u_{\theta}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n}(r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta),$$

$$T(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{3n}(r) P_n(\cos \theta).$$

Функции $U_{\tau n}(r)$ ($\tau = 1, 2, 3$) для каждого значения индекса $n = 0, 1, 2, \dots$ являются решением системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [93, 199]:

$$A_n \mathbf{U}_n'' + B_n \mathbf{U}_n' + C_n \mathbf{U}_n = 0, \quad (2.3.4)$$

где $\mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})^T$, штрихи обозначают дифференцирование по r . Выражения для элементов матриц третьего порядка A_n, B_n, C_n приведены ранее [93, 199].

Из граничных условий (1.2.35) на поверхностях контакта сферического слоя и жидкостей, записанных в сферической системе координат, получены выражения для неизвестных коэффициентов в рядах (2.3.2), (2.3.3)

$$\begin{aligned} V_{sn} &= \alpha_{sn}^{(1)} U_{1n}(r_1) + \alpha_{sn}^{(2)} U_{3n}(r_1) + \alpha_{sn}^{(3)} \eta_n, \\ W_{sn} &= \beta_{sn}^{(1)} U_{1n}(r_2) + \beta_{sn}^{(2)} U_{3n}(r_2), \quad s = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.3.4)

$$(A_n \mathbf{U}_n' + E_{1n} \mathbf{U}_n) \Big|_{r=r_1} = \mathbf{D}_n, \quad (A_n \mathbf{U}_n' + E_{2n} \mathbf{U}_n) \Big|_{r=r_2} = 0. \quad (2.3.6)$$

Выражения для коэффициентов $\alpha_{sn}^{(1)}, \alpha_{sn}^{(2)}, \alpha_{sn}^{(3)}, \beta_{sn}^{(1)}, \beta_{sn}^{(2)}$, элементов матриц третьего порядка E_{1n}, E_{2n} и вектора \mathbf{D}_n приведены ранее [93, 199].

Из выражений (2.3.5) следует, что волновые поля в граничащих с телом жидкостях могут быть определены лишь после нахождения поля смещений и температурного поля в теле, для чего необходимо решить краевую задачу (2.3.4), (2.3.6). Эта краевая задача решена методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических B -сплайнов [93, 199].

Результаты расчетов. Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическую формулу для сферической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [49, 96] ($x \gg 1$)

$$h_n(x) \approx (-i)^{n+1} \frac{\exp(ix)}{x},$$

из равенства (2.3.2) при $s = 1$ получаем

$$\Psi_{11}(r, \theta) = \frac{A_i r_1}{2r} \exp(ik_1 r) F(\varpi, \theta),$$

где

$$F(\varpi, \theta) = \frac{2}{A_i k_1 r_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} V_{1n} P_n(\cos \theta). \quad (2.3.7)$$

Проведены расчеты амплитуды рассеянной звуковой волны $|F(\varpi, \theta)|$ для сферических слоев, граничащих с водой. В расчетах полагали, что толщина слоев составляет 10% от их внутреннего радиуса ($r_1/r_2 = 1.1$). Рассматривался случай падения плоской звуковой волны с единичной амплитудой.

Расчеты проводились как для однородных термоупругих слоев из алюминия и поливинилбутираля, так и для неоднородных термоупругих слоев на основе этих материалов. При этом рассматривались два вида неоднородности по механическим материальным параметрам.

Неоднородность первого вида описывается функциями:

$$\rho(r) = \tilde{\rho} f_1(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda} f_2(r), \quad \mu(r) = \tilde{\mu} f_2(r),$$

$$\alpha_T(r) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon, \quad r_2 \leq r \leq r_1,$$

а неоднородность второго вида – функциями:

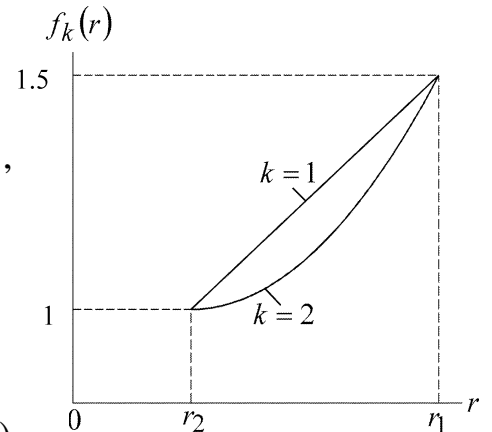
$$\rho(r) = \tilde{\rho} f_2(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda} f_1(r), \quad \mu(r) = \tilde{\mu} f_1(r),$$

$$\alpha_T(r) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon, \quad r_2 \leq r \leq r_1,$$

где

$$f_k(r) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r - r_2}{r_1 - r_2} \right)^k, \quad k = 1, 2,$$

справа на рисунке показан график функции $f_k(r)$.



Для оценки влияния термоупругости неоднородных сферических слоев на рассеяние звука расчеты проводились и для упругих неоднородных слоев.

На рис. 2.3.2–2.3.7 представлены зависимости амплитуды рассеянной звуковой волны в направлении $\theta = \pi$ от волнового размера сферического слоя в интервале $0 < \varpi \leq 10$. Видно, что в этом интервале как термоупругость, так и рассматриваемые виды неоднородности металлического слоя приводят к сдвигу резонансных максимумов функции $|F(\varpi, \pi)|$ в сторону больших значений величины ϖ (рис. 2.3.2–2.3.5). С увеличением волнового размера слоя этот сдвиг становится заметнее. Кроме того, сдвиг резонансных максимумов, обусловленный влиянием неоднородности, выражен значительно сильнее, особенно в случае неоднородности второго вида.

Графики на рис. 2.3.6, 2.3.7 показывают, что в интервале $0 < \varpi < 2$ влияние термоупругости и неоднородности сферического слоя из полимерного материала на амплитуду обратного рассеяния звука слабо различимо. В интервале $2 < \varpi < 6$ учет термоупругости в неоднородном слое из этого материала приводит к более заметному смещению резонансных максимумов зависимости $|F(\varpi, \pi)|$, чем в случае металлического слоя. В этом же интервале наличие в термоупругом полимерном слое неоднородности первого вида приводит к смещению резонансных максимумов зависимости $|F(\varpi, \pi)|$ в сторону меньших волновых чисел, а наличие неоднородности второго вида – в сторону больших волновых чисел. При $\varpi > 6$ влияние на обратное рассеяние звука как термоупругости, так и неоднородности слоя из полимера становится еще заметнее.

Сравнение графиков на рис. 2.3.6, 2.3.7 с графиками на рис. 2.2.6, 2.2.7 показывает, что в интервале $0 < \varpi < 6$ имеется некоторое сходство форм кривых частотных зависимостей, построенных для сферического и цилиндрического слоев из материала на основе поливинилбутираля.

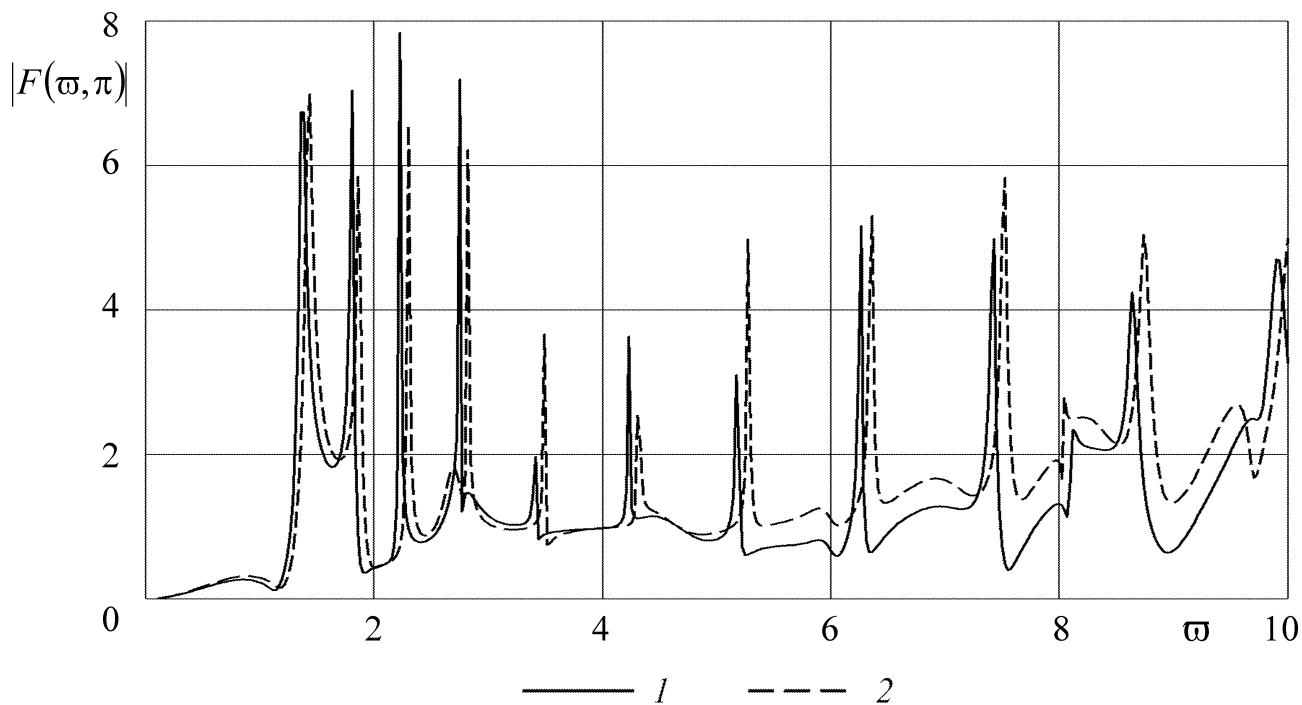


Рис. 2.3.2. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера сферического слоя из металла в интервале $0 < \omega \leq 10$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 — термоупругий слой с неоднородностью первого вида

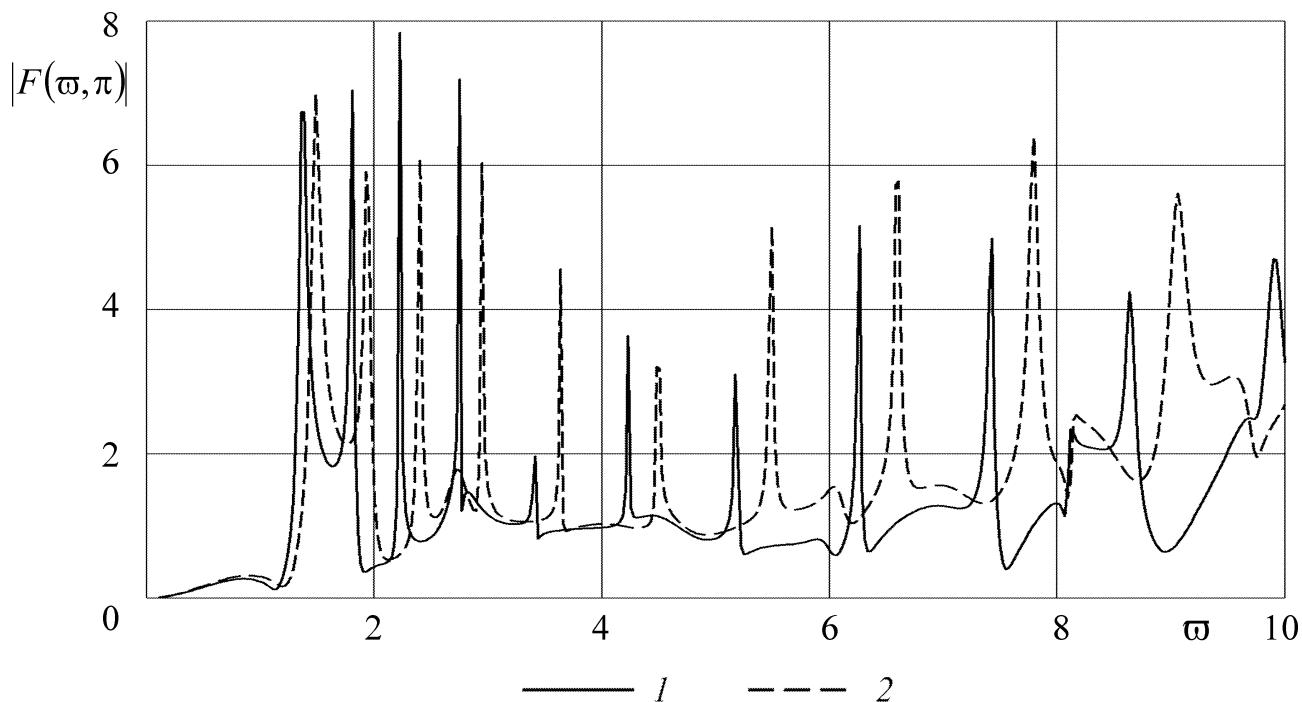


Рис. 2.3.3. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера сферического слоя из металла в интервале $0 < \omega \leq 10$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 — термоупругий слой с неоднородностью второго вида

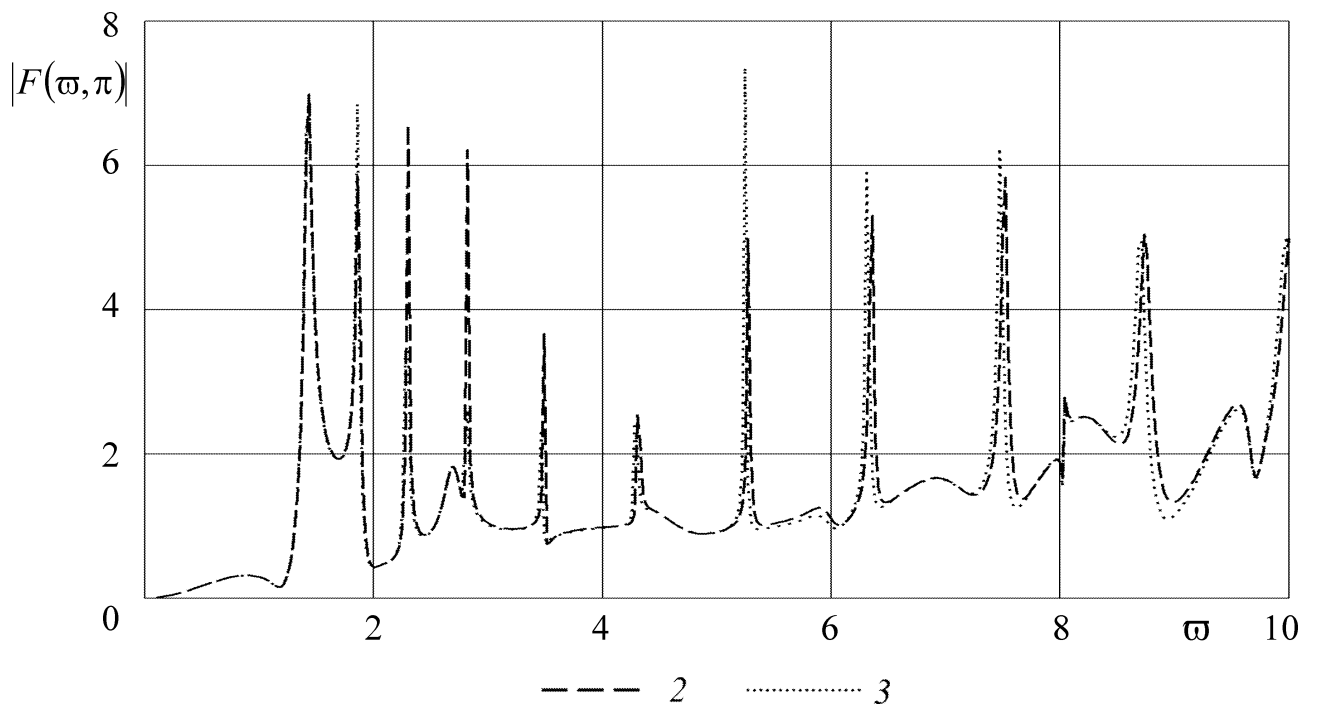


Рис. 2.3.4. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера сферического слоя из металла в интервале $0 < \varpi \leq 10$:
 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

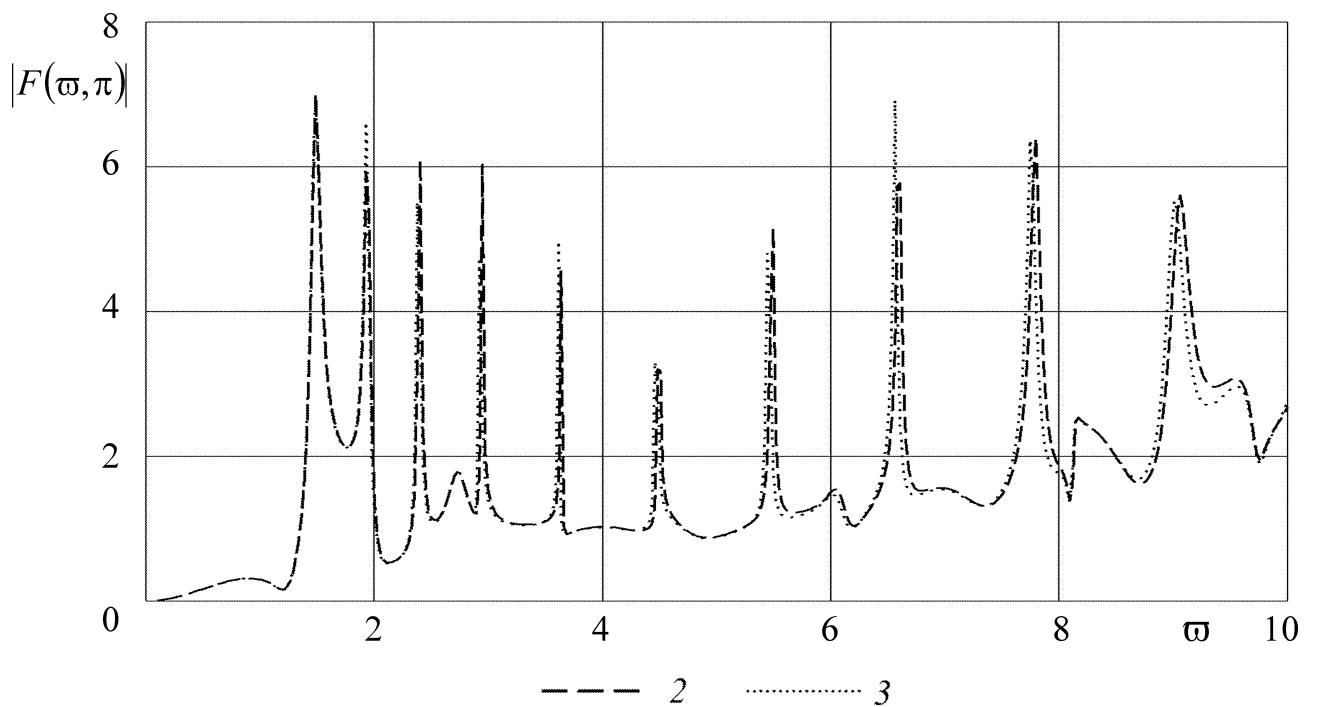


Рис. 2.3.5. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера сферического слоя из металла в интервале $0 < \varpi \leq 10$:
 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

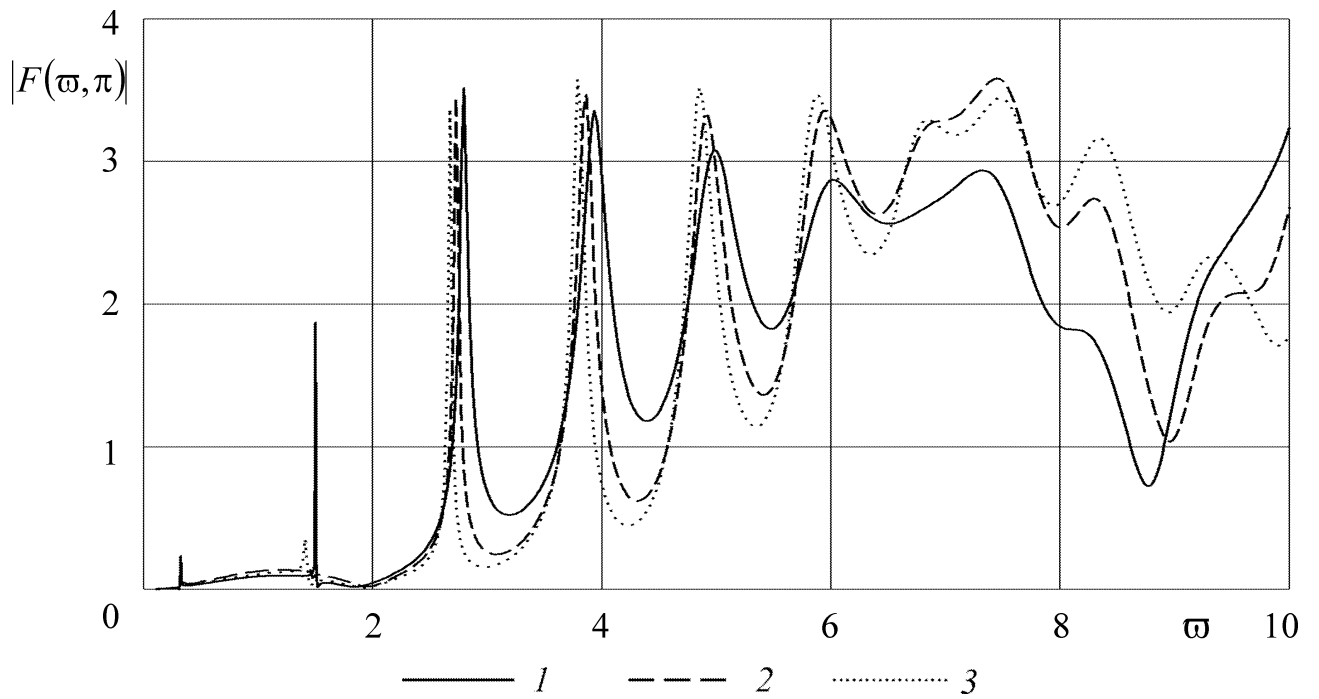


Рис. 2.3.6. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера сферического слоя из полимерного материала в интервале $0 < \omega \leq 10$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

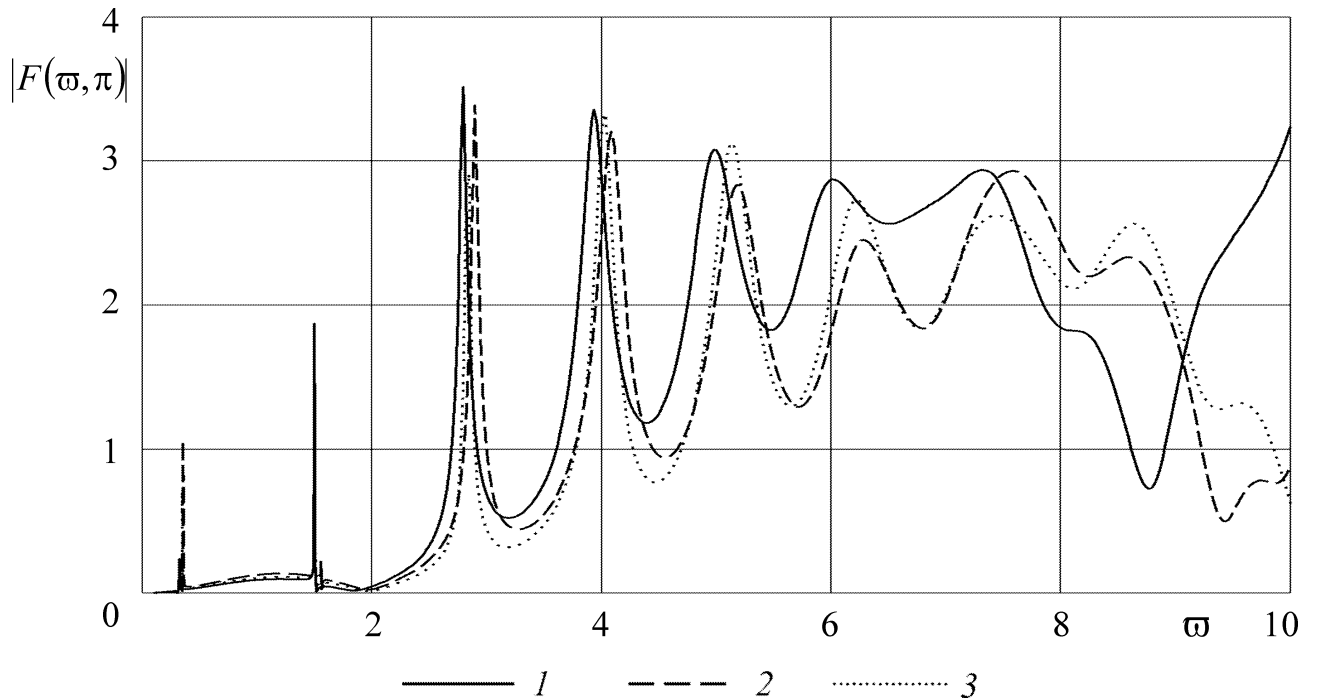


Рис. 2.3.7. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера сферического слоя из полимерного материала в интервале $0 < \omega \leq 10$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

На рис. 2.3.8 – 2.3.15 построены полярные диаграммы направленности амплитуды рассеянной звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ при значениях волнового размера сферического слоя $\varpi = 3.5$ и $\varpi = 5.5$. Стрелкой на рисунках показано направление распространения падающей плоской звуковой волны. Заметим, что вблизи значения $\varpi = 3.5$ ($\varpi = 5.5$) расположен резонансный максимум функции $|F(\varpi, \pi)|$, построенной для металлического слоя с неоднородностью первого (второго) вида.

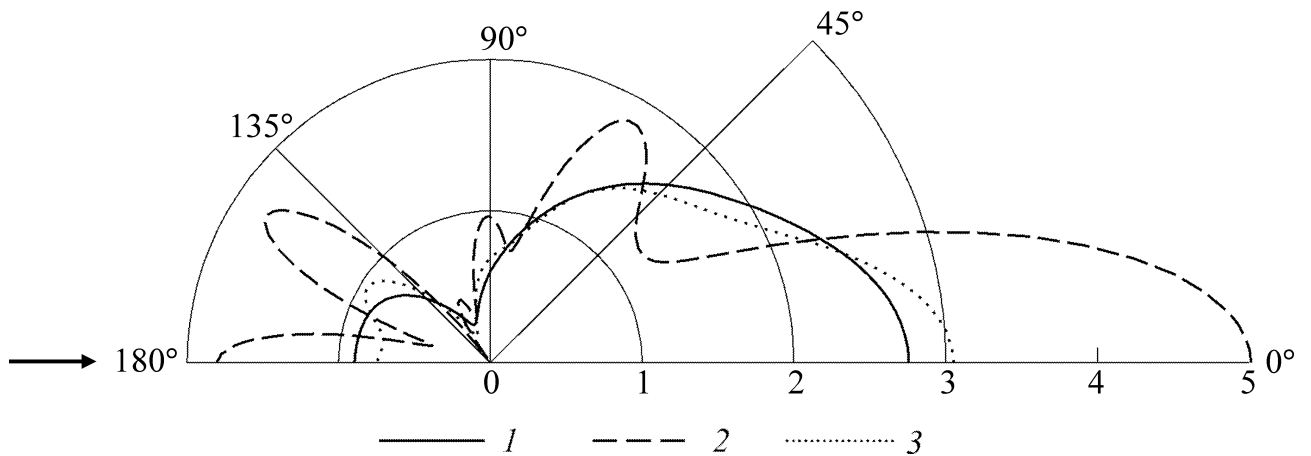


Рис. 2.3.8. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя из металла при $\varpi = 3.5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

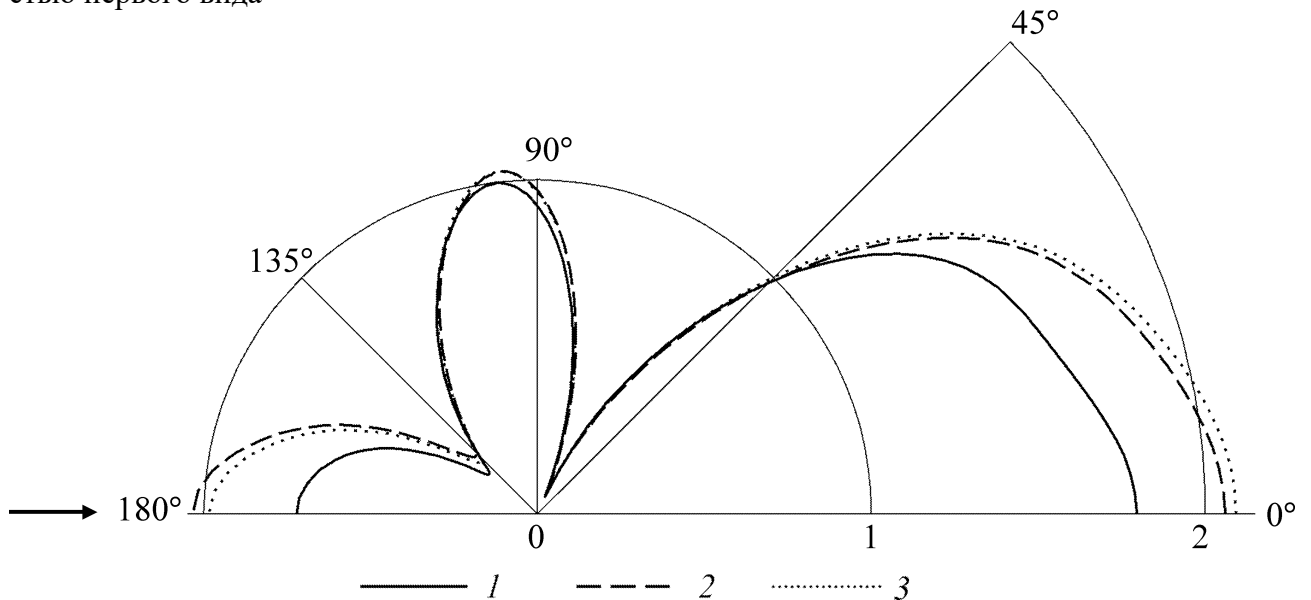


Рис. 2.3.9. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя из металла при $\varpi = 5.5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

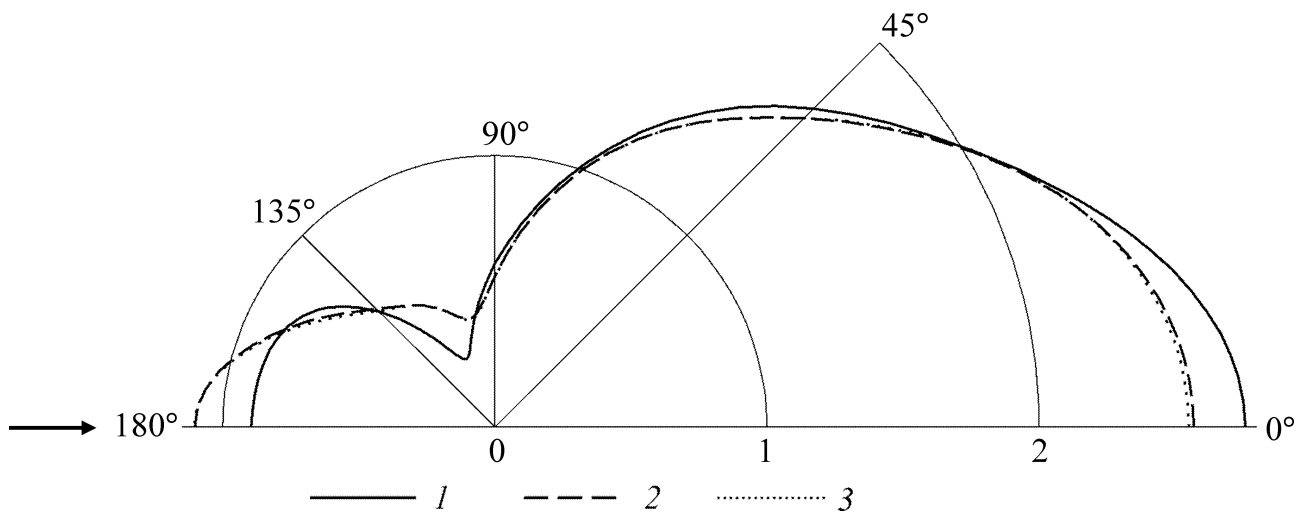


Рис. 2.3.10. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя из металла при $\varpi = 3.5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

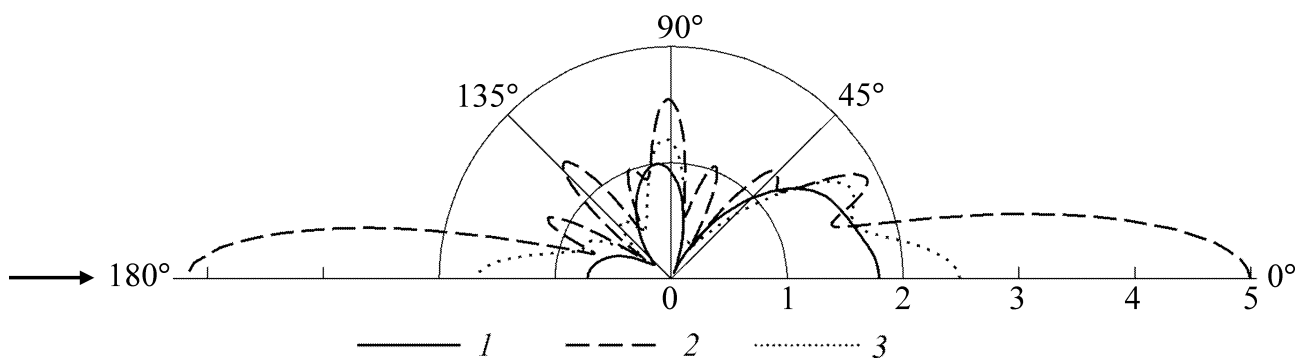


Рис. 2.3.11. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя из металла при $\varpi = 5.5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

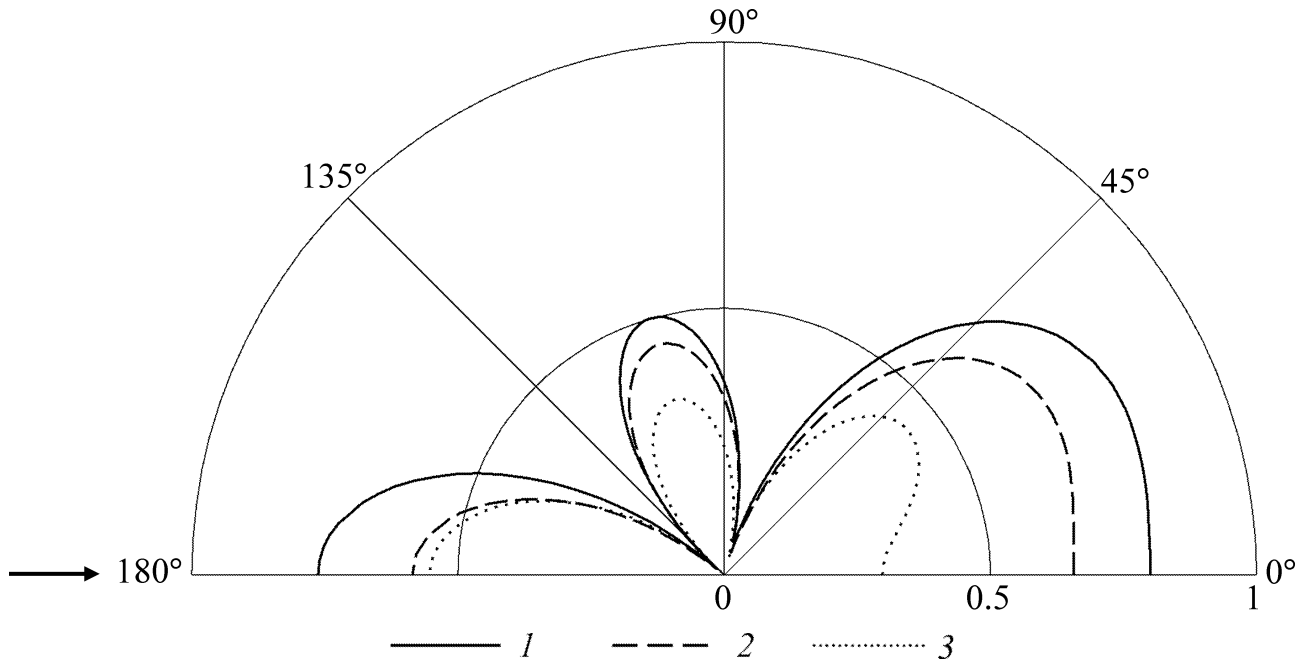


Рис. 2.3.12. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя из полимерного материала при $\varpi = 3.5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

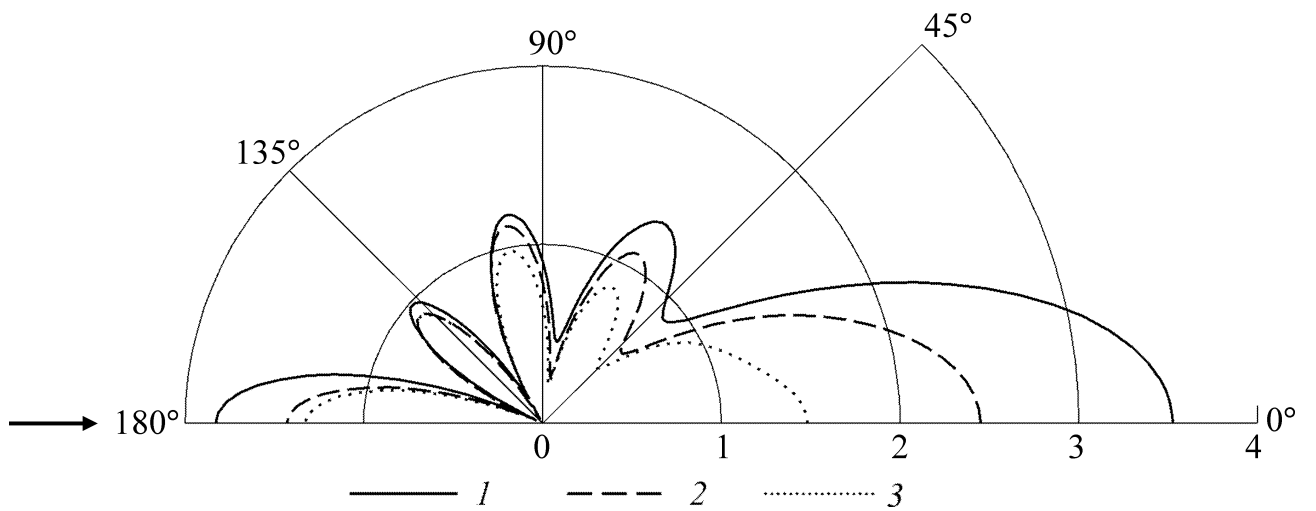


Рис. 2.3.13. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя из полимерного материала при $\varpi = 5.5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью первого вида

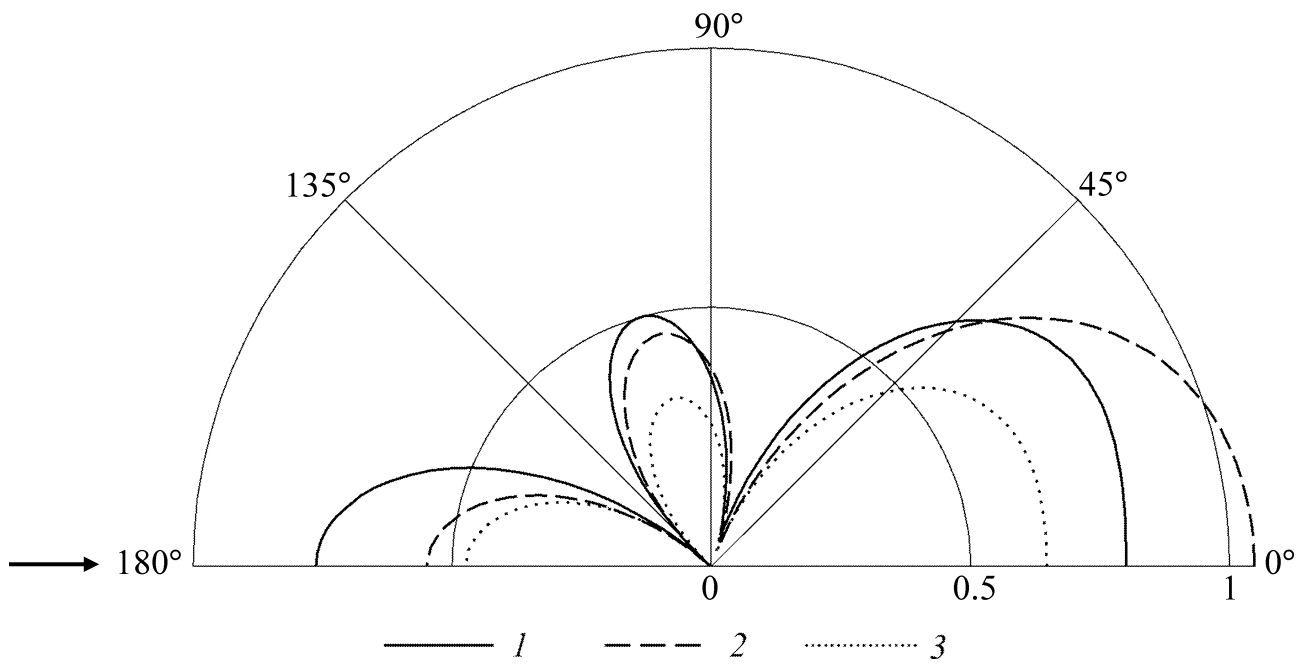


Рис. 2.3.14. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя из полимерного материала при $\varpi = 3.5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

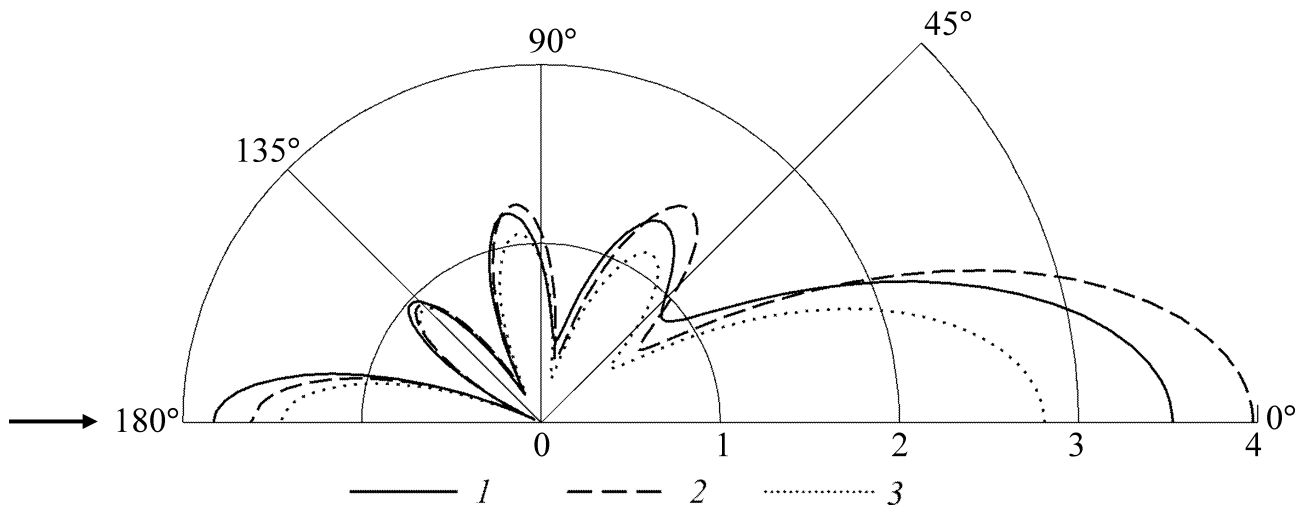


Рис. 2.3.15. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя из полимерного материала при $\varpi = 5.5$:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 (3) — термоупругий (упругий) слой с неоднородностью второго вида

На рис. 2.3.8, 2.3.11 кривая 2 сильно отличается от кривых 1 и 3. Это свидетельствует о возможности существенного влияния как термоупругости, так и неоднородности сферического слоя из металла на рассеяние звука вблизи резонансных частот. Расчеты показали, что вблизи нерезонансных частот рассеивающие свойства неоднородного металлического слоя слабо зависят от его термоупругости, что можно видеть, например, на рис. 2.3.9, 2.3.10. Эти же рисунки иллюстрируют пример влияния неоднородности термоупругого металлического слоя на диаграммы направленности, когда рассматриваемые виды неоднородности приводят к некоторому изменению амплитуды рассеяния главным образом в освещенной и теневой зонах.

Учет как термоупругости, так и неоднородности в сферическом слое из полимерного материала может привести к заметному изменению полярной диаграммы направленности даже вблизи нерезонансных частот, например, изменить величину и ширину лепестков этой диаграммы (рис. 2.3.12–2.3.15).

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что термоупругость и неоднородность сферического слоя влияют на его звукоотражающие свойства, причем степень этого влияния значительно зависит от физико-механических характеристик материала слоя.

Отметим, что аналогичные выводы сделаны и в работах [93, 199], где исследовано влияние на рассеяние звука термоупругости и неоднородности сферических слоев из материалов на основе стали, алюминия и поливинилбутираля для законов неоднородности вида (2.2.7). При этом рассматривались слои, имеющие толщину равную их внутреннему радиусу ($r_1/r_2 = 2$).

2.4. Рассеяние цилиндрических и сферических звуковых волн неоднородными термоупругими слоями цилиндрической и сферической формы

Аппроксимация реального первичного акустического поля плоской волной справедлива, только когда расстояние от источника звука до рассеивателя много больше длины звуковой волны. На практике это условие часто не выполняется. В этом случае нельзя не учитывать криволинейность фронта падающей

волны. Расходимость падающей волны приводит не только к количественным, но и качественным изменениям дифракционной картины.

Акустические поля сложных излучателей можно моделировать с помощью цилиндрических и сферических источников. Поэтому изучение дифракции звуковых волн, излучаемых такими источниками, представляет наибольший интерес.

2.4.1. Рассеяние цилиндрических звуковых волн неоднородным термоупругим цилиндрическим слоем

Постановка задачи. Пусть на описанный в разделе 2.2 непрерывно-слоистый термоупругий цилиндрический слой, граничащий с теплопроводными жидкостями, падает звуковая волна, излучаемая бесконечно длинным цилиндрическим источником n -го порядка с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота (в дальнейшем временной множитель будем опускать). На поверхности источника возбуждается одна из мод. Ось источника расположена параллельно оси вращения цилиндрического слоя и имеет координаты (r_i, φ_i) . Введем связанную с источником дополнительную цилиндрическую систему координат (R, Φ, z) так, чтобы полярные оси ox и OX основной и дополнительной систем координат были одинаково ориентированы (рис. 2.4.1).

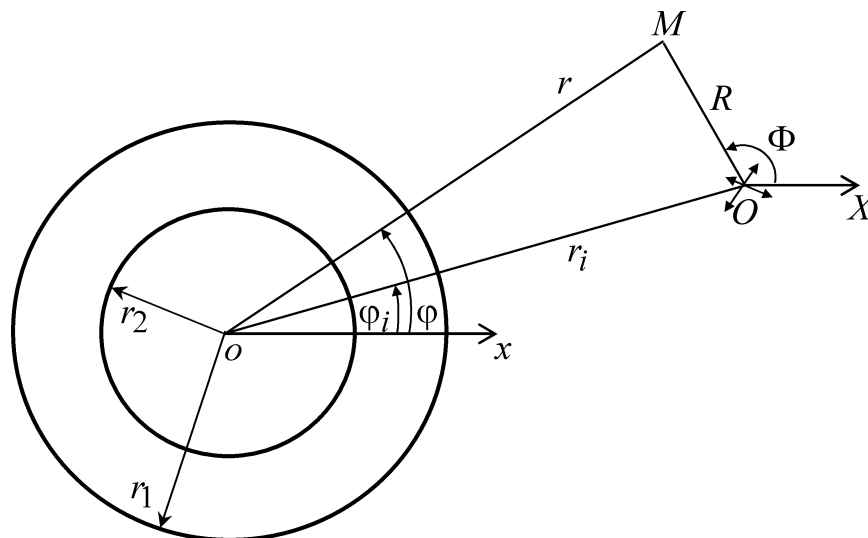


Рис. 2.4.1. Геометрия задачи

В дополнительной системе координат потенциал скоростей падающей волны имеет вид [168]

$$\Psi_i(R, \Phi) = A_i H_n(k_{11}R) \exp(in\Phi), \quad R = \left[r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\varphi - \varphi_i) \right]^{1/2},$$

где R – расстояние от источника до точки наблюдения M вне тела; k_{11} – волновое число звуковых волн в окружающей слой жидкости; A_i – амплитуда волны; $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n . В основной системе координат для точек пространства, таких что $r < r_i$, падающее поле может быть представлено в виде [40, 183]

$$\Psi_i(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_{nm} J_m(k_{11}r) \exp[im(\varphi - \varphi_i)],$$

где

$$\eta_{nm} = A_i (-1)^{n+m} H_{n-m}(k_{11}r_i) \exp(in\varphi_i),$$

$J_m(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка m .

Определим волновые поля в теле и жидкостях.

Уравнения волновых полей. В рассматриваемой постановке задача является двумерной. Искомые волновые поля не зависят от координаты z .

С учетом условий излучения на бесконечности потенциалы скоростей рассеянной телом звуковой волны Ψ_{11} и возбужденной во внешнем пространстве тепловой волны Ψ_{12} записываются в виде [199]

$$\Psi_{1s}(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{sm} H_m(k_{1s}r) \exp[im(\varphi - \varphi_i)], \quad s = 1, 2, \quad (2.4.1)$$

где k_{12} – волновое число тепловых волн в окружающей слой жидкости.

С учетом условий ограниченности потенциалы скоростей звуковой волны Ψ_{21} и тепловой волны Ψ_{22} в полости слоя записываются в виде [199]

$$\Psi_{2s}(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_{sm} J_m(k_{2s}r) \exp[im(\varphi - \varphi_i)], \quad s = 1, 2, \quad (2.4.2)$$

где k_{21} , k_{22} – волновые числа звуковых и тепловых волн в полости слоя.

Поля скоростей, давлений и температур снаружи и в полости слоя определяются из выражений (2.1.1).

Компоненты вектора смещения u_r , u_φ ($u_z = 0$) и изменение температуры T в теле представляются следующими рядами Фурье [199]:

$$(u_r(r, \varphi), u_\varphi(r, \varphi), T(r, \varphi)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (U_{1m}(r), U_{2m}(r), U_{3m}(r)) \exp[im(\varphi - \varphi_i)].$$

Функции $U_{\tau m}(r)$ ($\tau = 1, 2, 3$) для каждого значения индекса $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ являются решением системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [199]:

$$A_m \mathbf{U}_m'' + B_m \mathbf{U}_m' + C_m \mathbf{U}_m = 0, \quad (2.4.3)$$

где $\mathbf{U}_m = (U_{1m}, U_{2m}, U_{3m})^T$, штрихи обозначают дифференцирование по r . Выражения для элементов матриц третьего порядка A_m , B_m , C_m приведены ранее [199].

Из граничных условий на поверхностях контакта тела и жидкостей получены выражения для неизвестных коэффициентов в рядах (2.4.1), (2.4.2)

$$\begin{aligned} V_{sm} &= \alpha_{sm}^{(1)} U_{1m}(r_1) + \alpha_{sm}^{(2)} U_{3m}(r_1) + \alpha_{sm}^{(3)} \eta_{nm}, \\ W_{sm} &= \beta_{sm}^{(1)} U_{1m}(r_2) + \beta_{sm}^{(2)} U_{3m}(r_2), \quad s = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.4.3)

$$(A_m \mathbf{U}_m' + E_{1m} \mathbf{U}_m)|_{r=r_1} = \mathbf{D}_m, \quad (A_m \mathbf{U}_m' + E_{2m} \mathbf{U}_m)|_{r=r_2} = 0. \quad (2.4.5)$$

Выражения для коэффициентов $\alpha_{sm}^{(1)}$, $\alpha_{sm}^{(2)}$, $\alpha_{sm}^{(3)}$, $\beta_{sm}^{(1)}$, $\beta_{sm}^{(2)}$, элементов матриц третьего порядка E_{1m} , E_{2m} и вектора \mathbf{D}_m приведены ранее [199].

Из выражений (2.4.4) следует, что волновые поля в граничащих с цилиндрическим слоем жидкостях могут быть определены лишь после нахождения поля смещений и температурного поля в слое, для чего необходимо решить

краевую задачу (2.4.3), (2.4.5). Эта краевая задача решена методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических B -сплайнов [199].

Результаты расчетов. С использованием выражения [199]

$$F(\varphi) = \frac{2}{A_i \sqrt{\pi k_{11} r_1}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m V_{1m} \exp[im(\varphi - \varphi_i)]$$

проведены расчеты полярной диаграммы направленности амплитуды рассеянной звуковой волны $|F(\varphi)|$ в дальней зоне поля для цилиндрического слоя при $r_1/r_2 = 2$, граничащего с водой. Рассматривался случай падения звуковой волны, излучаемой цилиндрическим источником нулевого порядка ($n = 0$), расположенным в направлении $\varphi_i = \pi$. При таком симметричном излучении волны величины u_r , T будут симметричны, а величина u_φ антисимметрична относительно плоскости $\varphi = 0, \pi$. Поэтому выполняются соотношения

$$U_{1,-m}(r) = U_{1m}(r), \quad U_{2,-m}(r) = -U_{2m}(r), \quad U_{3,-m}(r) = U_{3m}(r)$$

и, следовательно, при решении краевой задачи (2.4.3), (2.4.5) достаточно ограничиться только неотрицательными значениями индекса m . Кроме того, используя известные соотношения для цилиндрических функций

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x), \quad H_{-m}(x) = (-1)^m H_m(x),$$

можно показать, что

$$V_{1,-m} = (-1)^m V_{1m}.$$

Отметим также, что из решения задачи дифракции излучаемой цилиндрическим источником нулевого порядка звуковой волны на непрерывно-слоистом термоупругом цилиндрическом слое можно получить решение дифракционной задачи для случая, когда падающая звуковая волна является плоской и распространяется в направлении нормали к образующей цилиндрического слоя. Для этого следует в приведенном выше решении заменить функцию $H_m(k_{11}r_i)$ ее асимптотическим выражением, считая, что расстояние между источником и рассеивателем достаточно велико ($k_{11}r_i \gg 1$). В результате получим решение

задачи дифракции плоской волны, амплитуда которой равна

$$A_i \sqrt{\frac{2}{\pi k_{11} r_i}} \exp \left[i \left(k_{11} r_i - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Расчеты проводились как для однородного, так и для неоднородного термоупругого цилиндрического слоя из полимерного материала (поливинилбутираль). При этом рассматривалась неоднородность вида (2.2.7) при $k = 1$.

Для оценки влияния термоупругости неоднородного слоя на рассеяние звука расчеты выполнялись и для упругого неоднородного слоя.

Результаты расчетов представлены на рис. 2.4.2 – 2.4.5. В силу симметрии рассеянного акустического поля диаграмма рассеяния $|F(\varphi)|$ строилась для полярного угла в секторе $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$. Стрелкой на рисунках показано направление падения волны на тело.

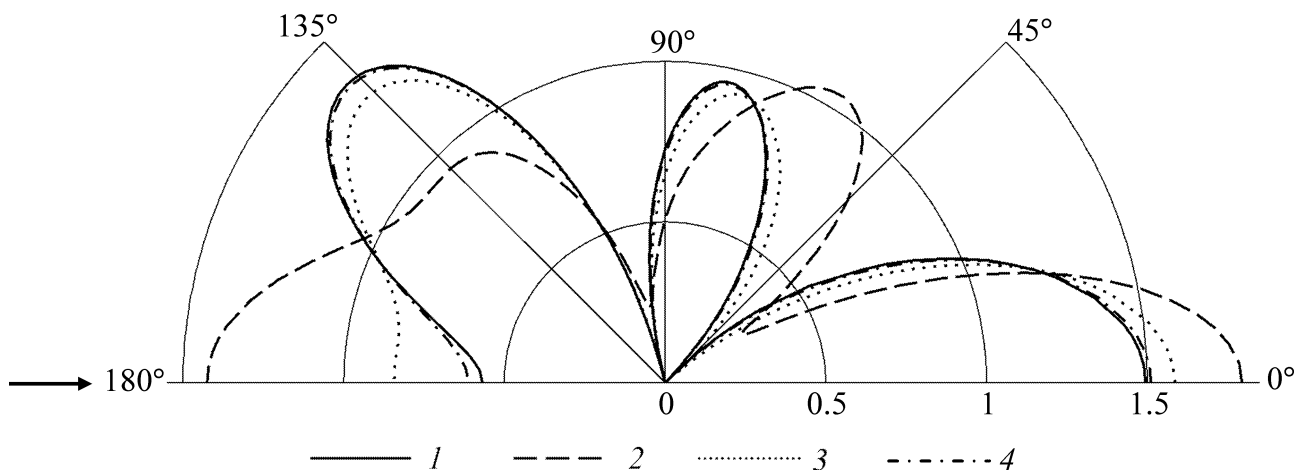


Рис. 2.4.2. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для неоднородного термоупругого цилиндрического слоя с волновым размером $\varpi = 4$: 1 — случай падения плоской волны, 2–4 — случай падения цилиндрической волны при разном удалении источника от рассеивателя (2 — $r_i = 1.2 r_l$, 3 — $r_i = 3.6 r_l$, 4 — $r_i = 20 r_l$)

На рис. 2.4.2 построены графики диаграммы рассеяния для неоднородного термоупругого цилиндрического слоя с волновым размером $\varpi = 4$ при разном удалении цилиндрического источника от тела. Для сравнения с помощью формулы (2.2.6) на рисунке нанесен график диаграммы рассеяния для случая падения плоской звуковой волны на такой слой. Кроме того, на этом рисунке гра-

фики строились при условии равенства амплитуды падающей цилиндрической волны амплитуде плоской волны на расстоянии r_i от источника. Из графиков следует, что на достаточно большом удалении источника от рассеивателя ($r_i = 20r_1$) различие в геометрии падающего поля практически не влияет на геометрию рассеянного поля (на рисунке кривые 1 и 4 почти не различимы). По мере приближения источника к рассеивателю криволинейность фронта падающей волны приводит к значительному изменению формы полярной диаграммы направленности.

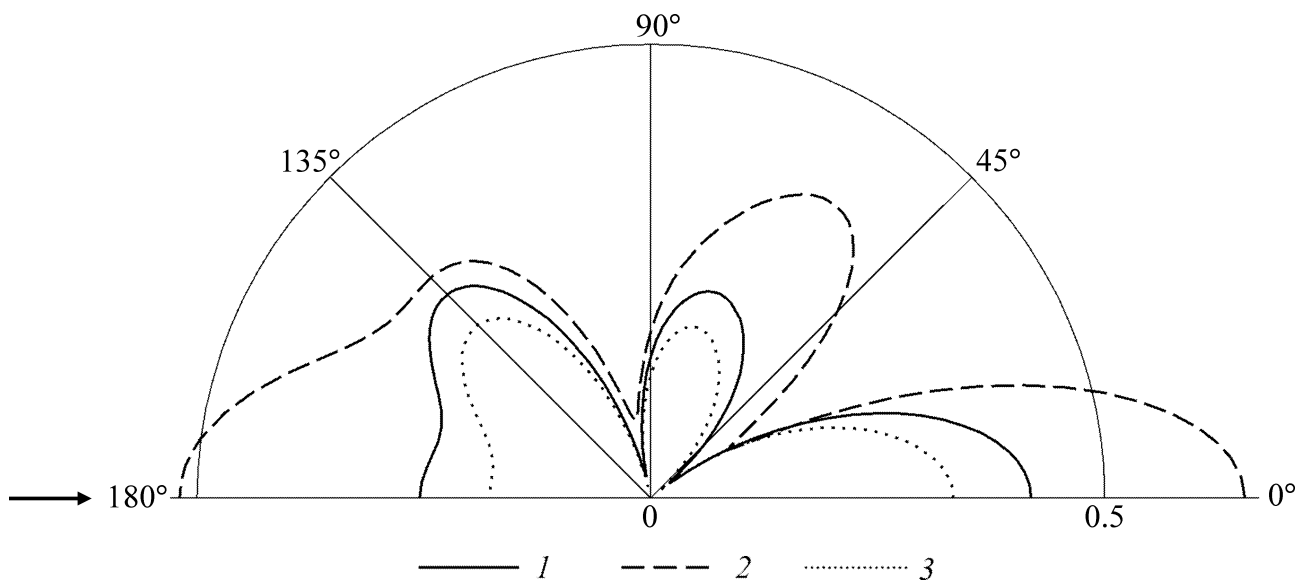


Рис. 2.4.3. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для неоднородного термоупругого цилиндрического слоя с волновым размером $\varpi = 4$ при разном удалении от рассеивателя источника цилиндрической волны с единичной амплитудой:
 1 — $r_i = 2.4 r_1$, 2 — $r_i = 1.2 r_1$, 3 — $r_i = 3.6 r_1$

На рис. 2.4.3 построены графики диаграммы рассеяния для неоднородного термоупругого цилиндрического слоя с волновым размером $\varpi = 4$ при разном удалении источника от тела в случае падения на тело цилиндрической звуковой волны с единичной амплитудой ($A_i = 1$). Видно, что в этом случае почти во всем интервале $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ с уменьшением расстояния r_i наблюдается увеличение амплитуды рассеяния звука. Это указывает на то, что при приближении источника к рассеивателю картина рассеяния изменяется не только качественно (формы кривых 2, 3 на рис. 2.4.2 и 2.4.3 сохраняются), но и количественно.

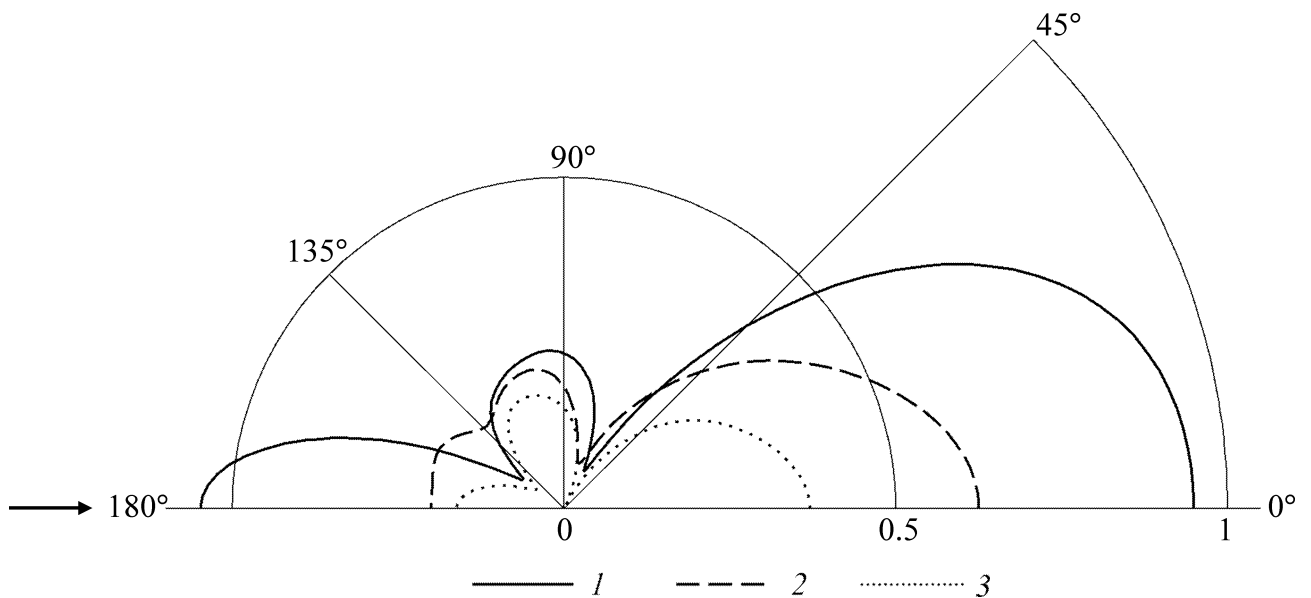


Рис. 2.4.4. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя с волновым размером $\varpi = 3$ при удалении на расстояние $r_i = 1.2 r_l$ от рассеивателя источника цилиндрической волны с единичной амплитудой: 1 — однородный термоупругий слой, 2 — неоднородный термоупругий слой, 3 — неоднородный упругий слой

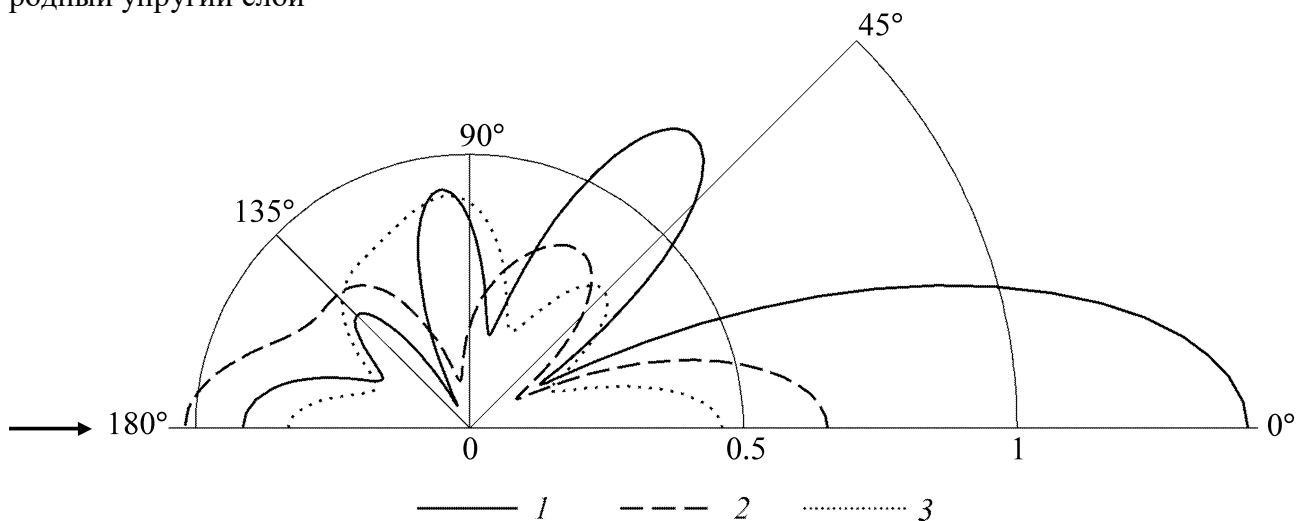


Рис. 2.4.5. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для цилиндрического слоя с волновым размером $\varpi = 4$ при удалении на расстояние $r_i = 1.2 r_l$ от рассеивателя источника цилиндрической волны с единичной амплитудой: 1 — однородный термоупругий слой, 2 — неоднородный термоупругий слой, 3 — неоднородный упругий слой

На рис. 2.4.4 и 2.4.5 построены графики диаграммы рассеяния для цилиндрического слоя с волновым размером $\varpi = 3$ и $\varpi = 4$ соответственно. При этом рассматривался случай падения на тело звуковой волны с единичной амплитудой ($A_i = 1$), излучаемой цилиндрическим источником, находящимся на расстоянии $r_i = 1.2 r_l$ от тела. Из графиков следует, что на исследуемых частотах, в

случае близко расположенного цилиндрического источника звуковых волн, как учет термоупругости, так и наличие неоднородности в цилиндрическом слое из полимерного материала приводит к существенному изменению формы и величины лепестков полярной диаграммы направленности амплитуды рассеянной звуковой волны.

2.4.2. Рассеяние сферических звуковых волн неоднородным термоупругим сферическим слоем

Постановка и решение задачи. Пусть на описанный в разделе 2.3 непрерывно-слоистый термоупругий сферический слой, граничащий с теплопроводными жидкостями, падает звуковая волна, излучаемая точечным источником с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота (в дальнейшем временной множитель будем опускать). Источник расположен в точке с координатами $r = r_i$, $\theta = \pi$ (рис. 2.4.6). Потенциал скоростей такой волны имеет вид [168]

$$\Psi_i(R) = A_i \frac{\exp(ik_{11}R)}{R}, \quad R = [r^2 + r_i^2 + 2rr_i \cos\theta]^{1/2},$$

где R – расстояние от источника до точки наблюдения M вне тела; A_i – амплитуда волны; k_{11} – волновое число звуковых волн в окружающей тело жидкости. Определим волновые поля в теле и жидкостях.

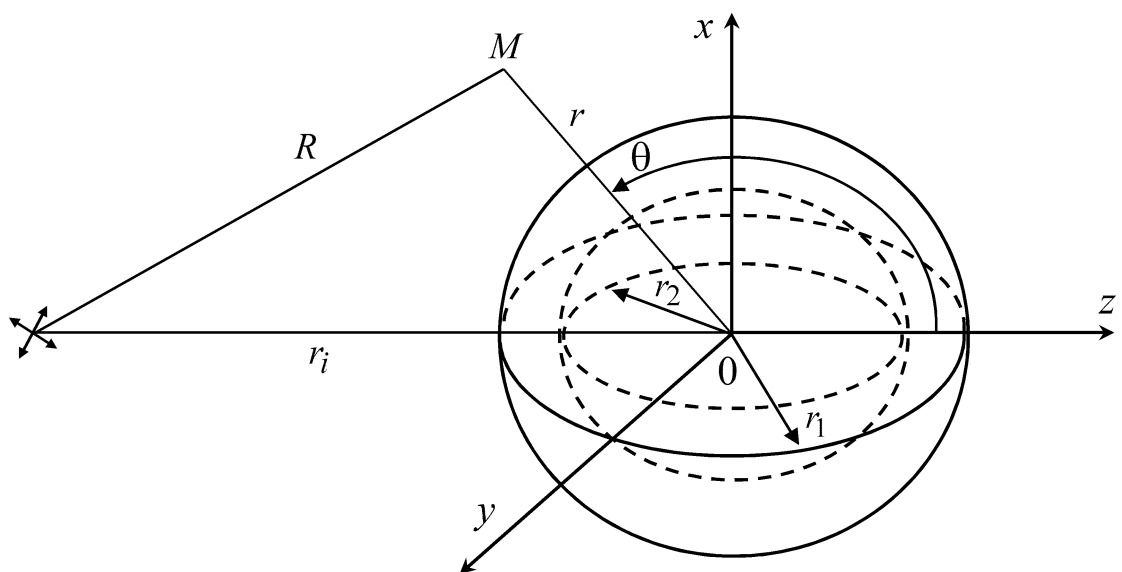


Рис. 2.4.6. Геометрия задачи

В сферической системе координат для точек пространства, таких что $r < r_i$, потенциал скоростей падающей волны может быть представлен разложением [110]

$$\Psi_i(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n j_n(k_{11}r) P_n(\cos \theta), \quad \eta_n = A_i (-1)^n i(2n+1) k_{11} h_n(k_{11}r_i),$$

которое аналогично разложению (2.3.1). Поэтому решение задачи о рассеянии звука непрерывно-слоистым термоупругим сферическим слоем в случае падения на него сферической волны проводится точно также как и в случае падения плоской волны (см. раздел 2.3 и работы [64, 199]). Кроме того, если считать, что расстояние между сферическим источником и данным телом достаточно велико ($k_{11}r_i \gg 1$) и заменить функцию $h_n(k_{11}r_i)$ ее асимптотическим выражением, то можно, наоборот, получить из решения дифракционной задачи для случая падения сферической волны решение задачи для случая падения плоской волны с амплитудой равной $A_i \frac{\exp(ik_{11}r_i)}{r_i}$.

Результаты расчетов. С помощью формулы (2.3.7) проведены расчеты полярной диаграммы направленности амплитуды рассеянной звуковой волны в дальней зоне поля для сферического слоя при $r_1/r_2 = 2$, граничащего с водой.

Расчеты проводились как однородного термоупругого слоя из поливинилбутирала, так и для неоднородного термоупругого слоя на основе этого материала. При этом рассматривалась неоднородность вида (2.2.7) при $k = 1$.

Для оценки влияния термоупругости неоднородного слоя на рассеяние звука расчеты проводились и для упругого неоднородного слоя.

Результаты расчетов представлены на рис. 2.4.7 – 2.4.10. Для сравнения на рисунке 2.4.7 нанесен график диаграммы рассеяния для случая падения плоской звуковой волны на сферический слой. Кроме того, на этом рисунке графики строились при условии равенства амплитуды падающей сферической волны амплитуде плоской волны на расстоянии r_i от источника. Значения параметров

ϖ и r_i , при которых построены графики на рис. 2.4.7, соответствуют значениям параметров рис. 2.4.2, рис. 2.4.8 – рис. 2.4.3, рис. 2.4.9 – рис. 2.4.4, рис. 2.4.10 – рис. 2.4.5.

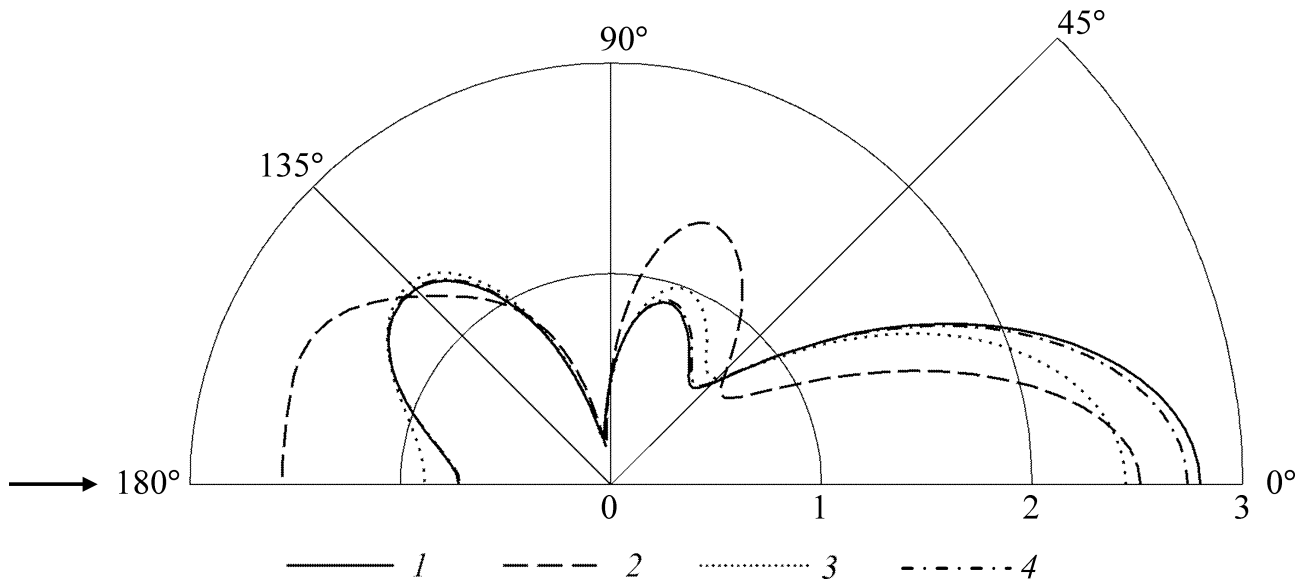


Рис. 2.4.7. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для неоднородного термоупругого сферического слоя с волновым размером $\varpi = 4$:
 1 — случай падения плоской волны, 2–4 — случай падения сферической волны при разном удалении источника от рассеивателя (2 — $r_i = 1.2 r_l$, 3 — $r_i = 3.6 r_l$, 4 — $r_i = 20 r_l$)

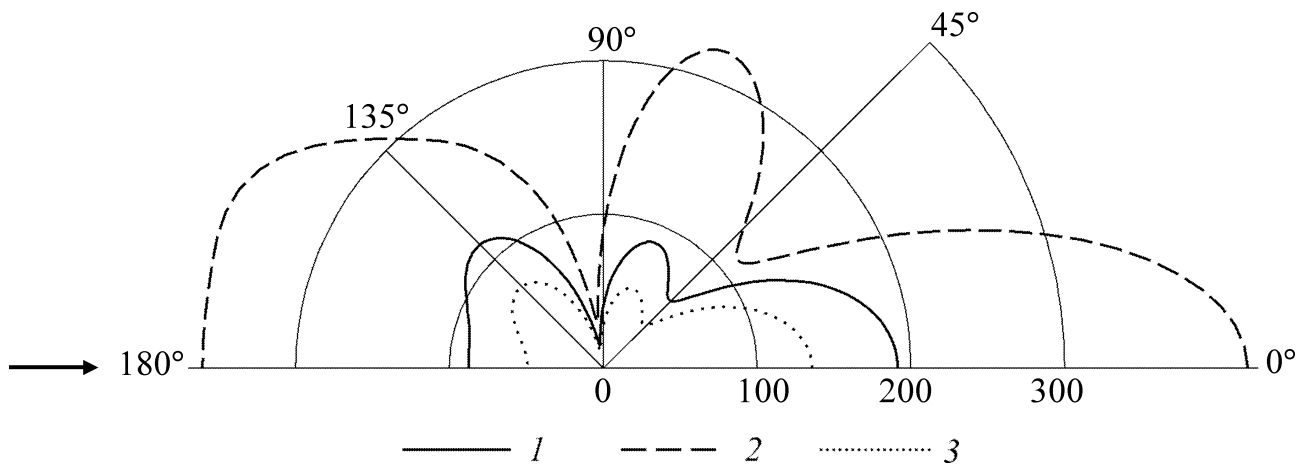


Рис. 2.4.8. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для неоднородного термоупругого сферического слоя с волновым размером $\varpi = 4$ при разном удалении от рассеивателя источника сферической волны с единичной амплитудой:
 1 — $r_i = 2.4 r_l$, 2 — $r_i = 1.2 r_l$, 3 — $r_i = 3.6 r_l$

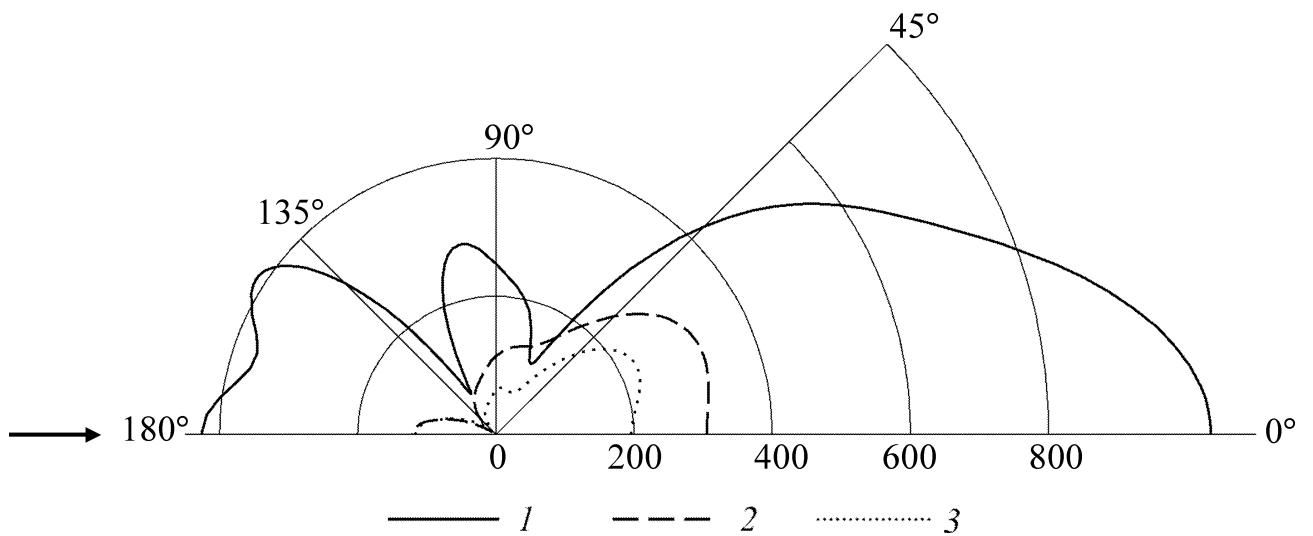


Рис. 2.4.9. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя с волновым размером $\varpi = 3$ при удалении на расстояние $r_i = 1.2 r_l$ от рассеивателя источника сферической волны с единичной амплитудой:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 — неоднородный термоупругий слой, 3 — неоднородный упругий слой

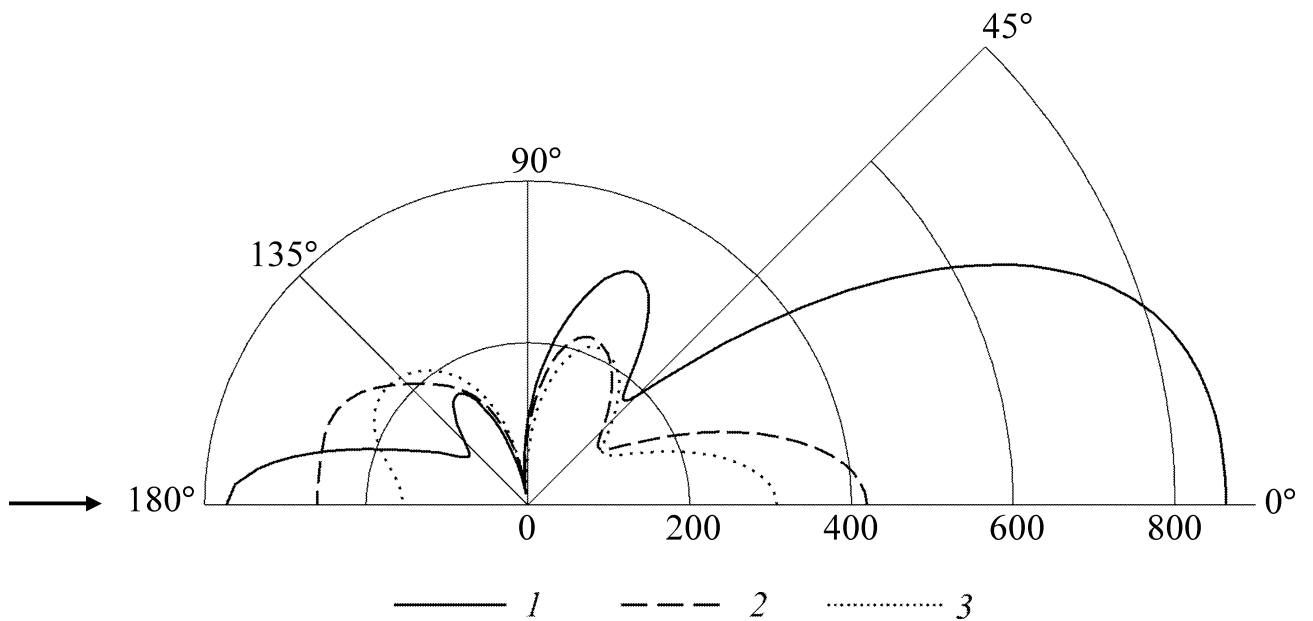


Рис. 2.4.10. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для сферического слоя с волновым размером $\varpi = 4$ при удалении на расстояние $r_i = 1.2 r_l$ от рассеивателя источника сферической волны с единичной амплитудой:
 1 — однородный термоупругий слой, 2 — неоднородный термоупругий слой, 3 — неоднородный упругий слой

Из графиков следует, что характер влияния удаленности точечного источника звуковых волн от сферического слоя, а также степень влияния термоупругости и неоднородности материала этого слоя на рассеяние звука такие же, как и в случае цилиндрических линейного источника и слоя.

2.4.3. Рассеяние цилиндрических звуковых волн неоднородным термоупругим сферическим слоем

Рассматриваемая в этом разделе дифракционная задача с математической точки зрения значительно сложнее по сравнению с осесимметричными задачами дифракции плоской и сферической звуковых волн.

Постановка задачи. Пусть на описанный в разделе 2.3 непрерывно-слоистый термоупругий сферический слой, граничащий с теплопроводными жидкостями, падает цилиндрическая звуковая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота. В дальнейшем временной множитель будем опускать. Определим волновые поля в теле и жидкостях.

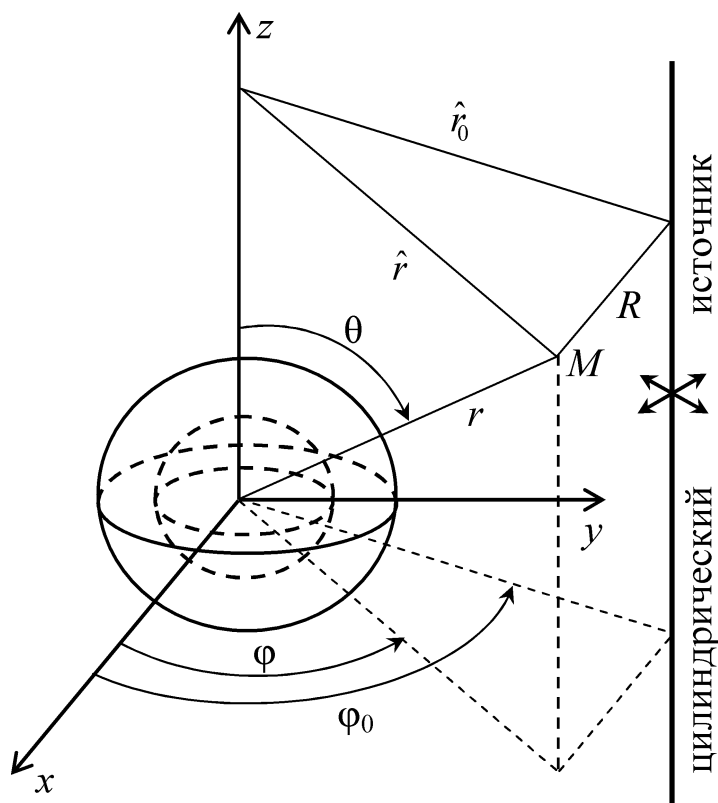


Рис. 2.4.11. Геометрия задачи

Уравнения волновых полей. Для решения задачи выберем сферическую (r, θ, φ) и цилиндрическую (\hat{r}, φ, z) системы координат, начала которых совмещены с центром сферического слоя (рис. 2.4.11). При этом линейный источник параллелен оси z и имеет цилиндрические координаты (\hat{r}_0, φ_0) .

Потенциал скоростей падающей волны имеет вид [168]

$$\Psi_i(R) = A_i H_0(k_{11}R), \quad R = \left[\hat{r}^2 + \hat{r}_0^2 - 2\hat{r}\hat{r}_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \right]^{1/2},$$

где R – расстояние от источника до произвольной точки M внешнего пространства; A_i – амплитуда волны; k_{11} – волновое число звуковых волн в окружающей тело жидкости; $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка. Для точек пространства, таких что $\hat{r} < \hat{r}_0$, падающая волна может быть представлена разложением [40]

$$\Psi_i(\hat{r}, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m J_m(k_{11}\hat{r}) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad \eta_m = A_i (2 - \delta_{0m}) H_m(k_{11}\hat{r}_0),$$

где $J_m(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка m ; $H_m(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; δ_{0m} – символ Кронекера.

Хотя падающее поле двумерно, искомые волновые поля будут трехмерными.

С учетом условий излучения на бесконечности потенциалы скоростей рассеянной телом звуковой волны Ψ_{11} и возбужденной во внешнем пространстве тепловой волны Ψ_{12} записываются в виде [74, 199]

$$\Psi_{1s}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n V_{smn} h_n(k_{1s}r) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad s = 1, 2, \quad (2.4.6)$$

где k_{12} – волновое число тепловых волн в окружающей тело жидкости; $h_n(x)$ – сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $P_n^m(\cos \theta)$ – присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m .

С учетом условий ограниченности потенциалы скоростей звуковой волны Ψ_{21} и тепловой волны Ψ_{22} в полости слоя записываются в виде [74, 199]

$$\Psi_{2s}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n W_{smn} j_n(k_{2s}r) P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad s = 1, 2, \quad (2.4.7)$$

где k_{21}, k_{22} – волновые числа звуковых и тепловых волн в полости слоя; $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя порядка n .

Поля скоростей, давлений и температур снаружи и в полости сферического слоя определяются из выражений (2.1.1).

Волновые поля в сферическом слое описываются уравнениями линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела (1.2.39) – (1.2.42), записанными в сферической системе координат ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$). Для полярной u_θ и азимутальной u_φ составляющих вектора смещения в теле вводятся вспомогательные функции, такие что [182]

$$u_\theta = \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial \theta}.$$

Введенные функции, радиальная составляющая u_r вектора смещения и приращение температуры T в теле представляются разложениями в ряды по ортогональным поверхностным сферическим гармоникам [74, 199]:

$$u_r(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{1mn}(r) P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

$$u_2(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{2mn}(r) P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0),$$

$$u_3(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{3mn}(r) P_n^m(\cos\theta) \sin m(\varphi - \varphi_0),$$

$$T(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{4mn}(r) P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0).$$

При этом вид зависимостей от азимутальной координаты φ в этих разложениях определяется соображениями симметрии вектора смещения и приращения температуры относительно плоскости $\varphi = \varphi_0, \varphi_0 + \pi$.

Функции $U_{\tau mn}(r)$ ($\tau = 1, 2, 3, 4$) для каждой пары индексов m, n ($n = 0, 1, \dots; m \leq n$) являются решением системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [74, 199]:

$$A_n \mathbf{U}_{mn}'' + B_n \mathbf{U}_{mn}' + C_n \mathbf{U}_{mn} = 0, \quad (2.4.8)$$

где $\mathbf{U}_{mn} = (U_{1mn}, U_{2mn}, U_{3mn}, U_{4mn})^T$, штрихи обозначают дифференцирование по r . Выражения для элементов матриц четвертого порядка A_n, B_n, C_n , зависящих только от индекса n , приведены ранее [74, 199].

Из граничных условий на поверхностях контакта слоя и жидкостей получены выражения для неизвестных коэффициентов в рядах (2.4.6), (2.4.7)

$$\begin{aligned} V_{smn} &= \alpha_{sn}^{(1)} U_{1mn}(r_1) + \alpha_{sn}^{(2)} U_{4mn}(r_1) + \alpha_{sn}^{(3)} \gamma_{mn}, \\ W_{smn} &= \beta_{sn}^{(1)} U_{1mn}(r_2) + \beta_{sn}^{(2)} U_{4mn}(r_2), \quad s = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.4.8)

$$(A_n \mathbf{U}_{mn}' + E_{1n} \mathbf{U}_{mn}) \Big|_{r=r_1} = \gamma_{mn} \mathbf{D}_n, \quad (A_n \mathbf{U}_{mn}' + E_{2n} \mathbf{U}_{mn}) \Big|_{r=r_2} = 0. \quad (2.4.10)$$

Выражения для коэффициентов $\alpha_{sn}^{(1)}, \alpha_{sn}^{(2)}, \alpha_{sn}^{(3)}, \beta_{sn}^{(1)}, \beta_{sn}^{(2)}$, элементов матриц четвертого порядка E_{1n}, E_{2n} и вектора \mathbf{D}_n , зависящих только от индекса n , а также выражение для множителя γ_{mn} , зависящего от индексов m и n , приведены ранее [74, 199].

Из выражений (2.4.9) следует, что волновые поля в граничащих с телом жидкостях могут быть определены лишь после нахождения поля смещений и температурного поля в теле, для чего необходимо решить краевую задачу (2.4.8), (2.4.10). Анализ этой краевой задачи показал (см. [74, 199]), что функция $U_{3mn}(r) \equiv 0$. Откуда следует, что $u_3(r, \theta, \varphi) \equiv 0$.

Поскольку элементы всех матриц, присутствующих в краевой задаче (2.4.8), (2.4.10), не зависят от индекса m , а индекс m входит только в множитель γ_{mn} в краевых условиях (2.4.10), то вводятся новые неизвестные функции $U_{1n}(r), U_{2n}(r), U_{4n}(r)$ по формулам [74]

$$U_{1mn}(r) = \gamma_{mn} U_{1n}(r), \quad U_{2mn}(r) = \gamma_{mn} U_{2n}(r), \quad U_{4mn}(r) = \gamma_{mn} U_{4n}(r),$$

позволяющие перейти от решения краевой задачи, записанной для каждой пары индексов m, n , к решению краевой задачи, записанной только для индекса n .

Функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$, $U_{4n}(r)$ являются решением краевой задачи вида (2.4.8), (2.4.10), где вместо вектора \mathbf{U}_{mn} рассматривается вектор $\mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n}, U_{4n})^T$, множитель γ_{mn} равен единице, $A_n, B_n, C_n, E_{1n}, E_{2n}$ – матрицы третьего порядка, которые получены из соответствующих прежних матриц четвертого порядка вычеркиванием третьей строки и третьего столбца, \mathbf{D}_n – вектор из трех компонент. Полученная краевая задача решена методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических B -сплайнов [74].

Результаты расчетов. С использованием выражения [74]

$$F(\varpi, \theta, \varphi) = \frac{2}{A_i k_{11} r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-i)^{n+1} V_{1mn} P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0)$$

проведены расчеты амплитуды рассеянной звуковой волны $|F(\varpi, \theta, \varphi)|$ в дальней зоне поля для сферического слоя при $r_1/r_2 = 2$, граничащего с водой. Рассматривался случай падения звуковой волны с единичной амплитудой, излучаемой линейным источником, расположенным в направлении $\varphi_0 = \pi$ на расстоянии $\hat{r}_0 = 1.2r_1$ от центра сферического слоя.

Расчеты проводились для неоднородного термоупругого сферического слоя из материала на основе поливинилбутирала. При этом рассматривались два вида неоднородности, которые характеризуются изменением плотности слоя:

$$\rho_k(r) = \tilde{\rho} g_k(r), \quad k = 1, 2,$$

$$\lambda(r) = \tilde{\lambda}, \quad \mu(r) = \tilde{\mu}, \quad \alpha_T(r) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon, \quad r_2 \leq r \leq r_1,$$

где функция $g_k(r)$ ($k = 1, 2$) определяется выражением (2.2.8).

Для оценки влияния термоупругости неоднородного сферического слоя на рассеяние звука расчеты выполнялись и для упругого неоднородного слоя с плотностью $\rho_1(r)$.

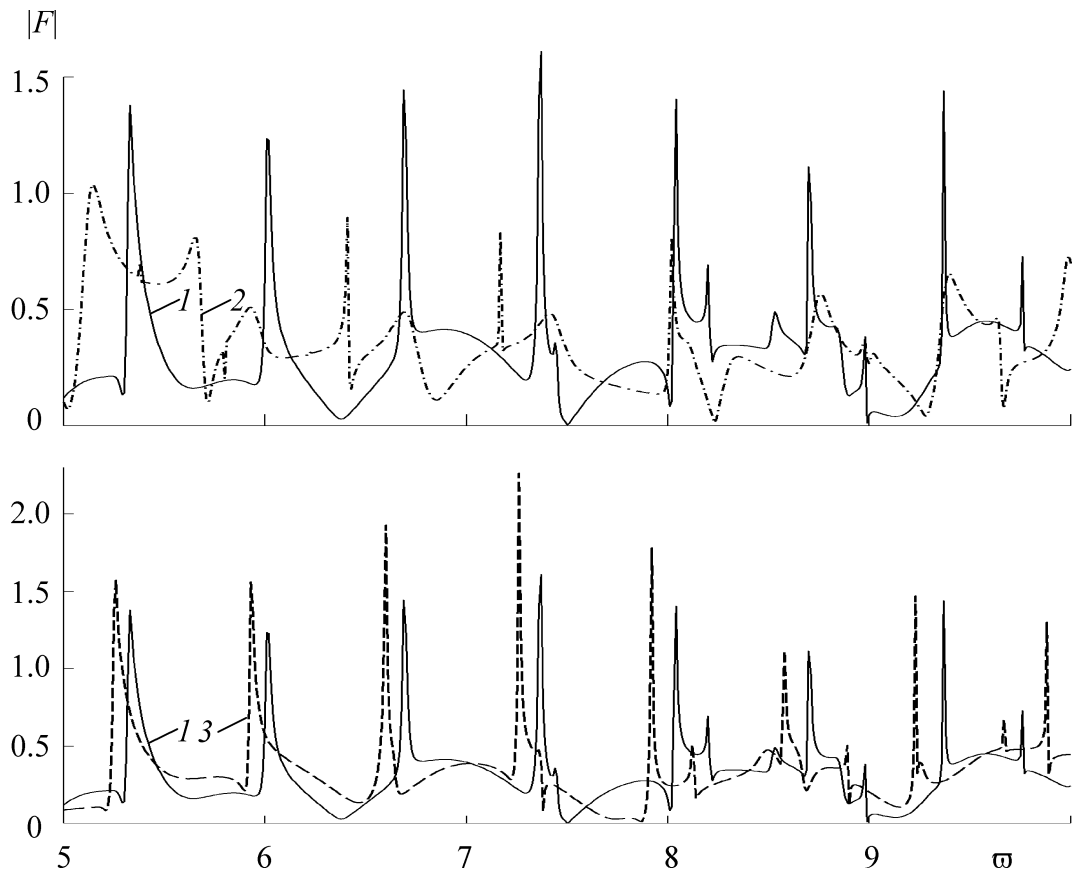


Рис. 2.4.12. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера сферического слоя из полимерного материала в интервале $5 \leq a \leq 10$:
 1 — термоупругий слой с плотностью $\rho_1(r)$, 2 — термоупругий слой с плотностью $\rho_2(r)$, 3 — упругий слой с плотностью $\rho_1(r)$

На рис. 2.4.12 приведены графики зависимости амплитуды рассеяния звука $|F|$ от волнового размера сферического слоя a , рассчитанные в интервале $5 \leq a \leq 10$ при углах $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi$. Из верхней части рисунка видно различие частотных характеристик обратного рассеяния звука, обусловленное разными законами изменения плотности материала тела. Нижняя часть рисунка показывает, что учет термоупругости материала тела приводит к отчетливому сдвигу резонансных пиков функции $|F|$.

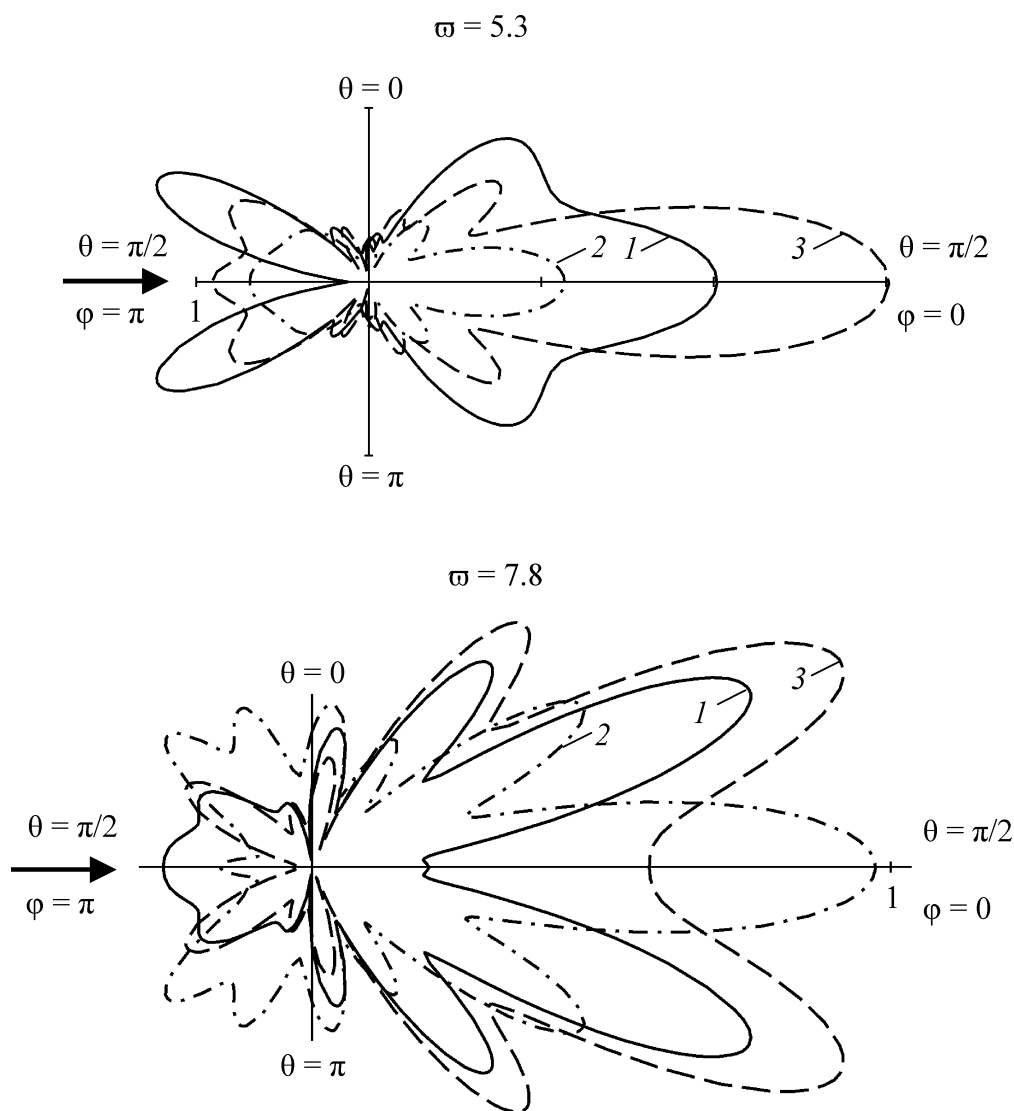


Рис. 2.4.13. Зависимость амплитуды рассеяния звука от полярного угла для сферического слоя из полимерного материала (обозначения приведены на рис. 2.4.4); стрелка – направление распространения падающей волны

На рис. 2.4.13 представлены графики зависимости $|F|$ от полярного угла θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), рассчитанные в плоскости $\varphi = 0, \pi$ для частот, соответствующих волновым размерам слоя $\varpi = 5.3$ и $\varpi = 7.8$. Видно, что на рассматриваемых частотах как термоупругость, так и неоднородность материала сферического слоя существенно изменяют форму круговых диаграмм направленности амплитуды рассеянной звуковой волны.

2.5. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругой пластине с неоднородным покрытием

В этом разделе решены задачи о дифракции звука на однородной термоупругой плоской пластине произвольной толщины с покрытием. Рассмотрены случаи непрерывно-слоистого и дискретно-слоистого термоупругих покрытий.

2.5.1. Случай непрерывно-слоистого покрытия

Постановка задачи. Рассмотрим граничащую с жидкими полупространствами однородную изотропную термоупругую плоскую пластину толщиной H с покрытием в виде непрерывно-слоистого изотропного термоупругого слоя толщиной h (рис. 2.5.1). Система прямоугольных координат (x, y, z) выбрана таким образом, что ось x лежит на границе раздела пластины и жидкости, ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины. Материал пластины имеет плотность ρ^0 , упругие постоянные Ламе λ^0, μ^0 , температурный коэффициент линейного расширения α_T^0 , коэффициент теплопроводности λ_T^0 , объемную теплоемкость c_ε^0 . Плотность материала покрытия $\rho = \rho(z)$ и его объемная теплоемкость $c_\varepsilon = c_\varepsilon(z)$ описываются непрерывными функциями координаты z , а его модули упругости $\lambda = \lambda(z), \mu = \mu(z)$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T = \alpha_T(z)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda_T = \lambda_T(z)$ – дифференцируемыми функциями координаты z . Источники тепла в пластине с покрытием отсутствуют.

Нижнее ($r=1$) и верхнее ($r=2$) полупространства заполнены теплопроводными однородными сжимаемыми жидкостями, имеющими плотность ρ_r , скорость звука c_r , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ_r , температуропроводность χ_r^T , коэффициент температурного расширения α_r^T , теплопроводность λ_r^T . Считаем, что в невозмущенном состоянии тело и жидкости имеют одну и ту же постоянную температуру T_0 .

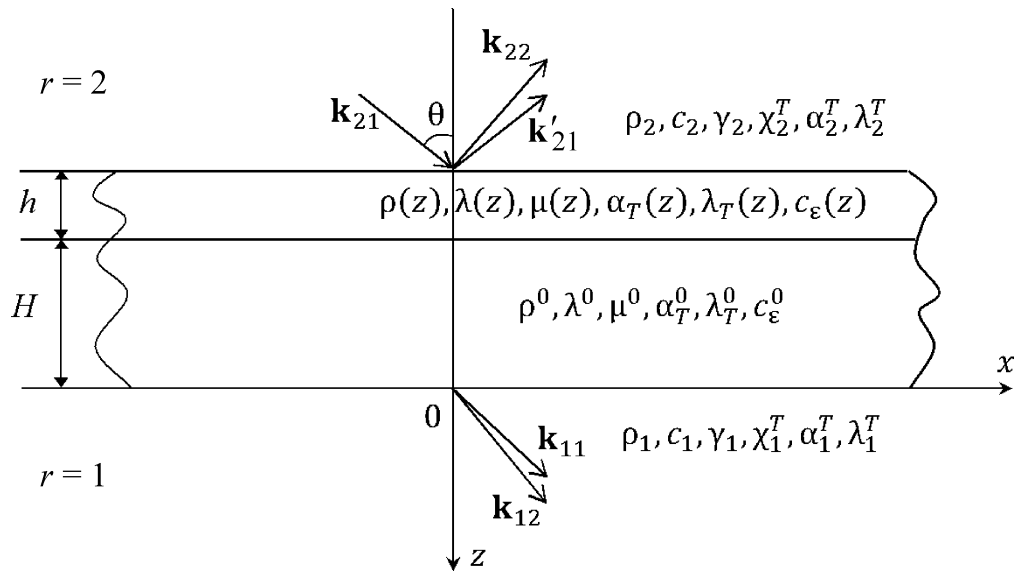


Рис. 2.5.1. Схема задачи

Пусть из верхнего полупространства на пластину с покрытием наклонно падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой имеет вид

$$\Psi_i = A_i \exp \left\{ i \left[k_{21}^x x + k_{21}^z (z + H + h) - \omega t \right] \right\},$$

где

$$k_{21}^x = k_{21} \sin \theta, \quad k_{21}^z = k_{21} \cos \theta,$$

A_i – амплитуда падающей волны; k_{21}^x , k_{21}^z – проекции волнового вектора падающей волны \mathbf{k}_{21} на оси координат x и z соответственно; k_{21} – волновое число звуковых волн в верхнем полупространстве; ω – круговая частота; θ – угол падения волны. Без ограничения общности полагаем, что волновой вектор падающей волны лежит в плоскости xz . Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опускаем.

При падении звуковой волны на рассматриваемое термоупругое тело в верхнем и нижнем полупространствах возникают соответственно отраженная от тела и прошедшая через него звуковые волны. Кроме того в этих полупространствах возбуждаются тепловые волны. Само тело деформируется, его температура изменяется. На рис. 2.5.1 через \mathbf{k}'_{21} , \mathbf{k}_{11} обозначены волновые векто-

ры отраженной и прошедшей звуковых волн, через \mathbf{k}_{12} , \mathbf{k}_{22} – волновые векторы возбужденных тепловых волн.

Определим отраженное от пластины с покрытием акустическое поле.

Уравнения волновых полей. Рассматриваемая задача является двумерной. Кроме того, в пластине и покрытии отсутствует смещение частиц термоупругой среды вдоль оси y .

Скорость частиц жидкости в нижнем ($r=1$) и верхнем ($r=2$) полупространствах представим в виде

$$\mathbf{v}_r = \text{grad}(\Psi_{r1} + \Psi_{r2}), \quad r=1,2, \quad (2.5.1)$$

где $\Psi_{21} = \Psi_i + \Psi'_{21}$ – потенциал полного акустического поля в верхнем полупространстве; Ψ'_{21} , Ψ_{11} – потенциалы скоростей отраженной и прошедшей волн; Ψ_{22} , Ψ_{12} – потенциалы скоростей тепловых волн в верхнем и нижнем полупространствах соответственно.

Потенциальные функции Ψ_{r1} , Ψ_{r2} ($r=1,2$) являются решениями уравнений Гельмгольца

$$\Delta \Psi_{rs} + k_{rs}^2 \Psi_{rs} = 0, \quad r=1,2, \quad s=1,2, \quad (2.5.2)$$

где k_{r1} , k_{r2} – волновые числа звуковых и тепловых волн в r -й среде соответственно. При этом

$$k_{rs}^2 = \frac{-\hat{B}_r - (-1)^s \sqrt{\hat{B}_r^2 + 4\hat{A}_r \hat{C}_r}}{2\hat{C}_r}, \quad (2.5.3)$$

$$\hat{A}_r = \gamma_r \frac{\omega^2}{c_r^2}, \quad \hat{B}_r = \gamma_r \left(1 - \frac{i\omega \chi_r^T}{c_r^2} \right), \quad \hat{C}_r = \frac{i\chi_r^T}{\omega}.$$

Решения уравнений (2.5.2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Psi'_{21} &= V_1 \exp\left[i\left(k_{21}^x x - k_{21}^z (z + H + h)\right)\right], \\ \Psi_{22} &= V_2 \exp\left[i\left(k_{22}^x x - k_{22}^z (z + H + h)\right)\right], \\ \Psi_{1s} &= W_s \exp\left[i\left(k_{1s}^x x + k_{1s}^z z\right)\right], \quad s=1,2, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

где V_1, W_1 – коэффициенты отражения и прохождения соответственно; V_2, W_2 – коэффициенты возбуждения тепловых волн; k_{rs}^x, k_{rs}^z ($r=1,2, s=1,2$) – проекции волнового вектора \mathbf{k}_{rs} на оси x и z соответственно, причем $(k_{rs}^x)^2 + (k_{rs}^z)^2 = k_{rs}^2$. Согласно закону Снеллиуса $k_{11}^x = k_{12}^x = k_{22}^x = k_{21}^x$.

Определим волновые поля в однородной термоупругой пластине на основе линейной связанной динамической задачи термоупругости (1.2.22), (1.2.23). Смещение частиц в пластине представим в виде

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad}(\Phi_1 + \Phi_2) + \text{rot}\Phi_3, \quad (2.5.5)$$

где потенциалы Φ_1, Φ_2, Φ_3 являются решениями уравнений Гельмгольца

$$\Delta\Phi_s + \kappa_s^2\Phi_s = 0, \quad \Delta\Phi_3 + \kappa_3^2\Phi_3 = 0, \quad s=1,2, \quad (2.5.6)$$

κ_s, κ_3 – волновые числа продольных термоупругих и поперечных упругих волн соответственно. При этом

$$\begin{aligned} \kappa_s^2 &= \frac{k_l^2}{2} \left[1 + \delta(1 + \varepsilon) - (-1)^s \sqrt{1 - 2\delta(1 - \varepsilon) + \delta^2(1 + \varepsilon)^2} \right], \quad s=1,2, \\ \kappa_3 &= \frac{\omega}{c_\tau}, \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{k_T^2}{k_l^2}, \quad k_l = \frac{\omega}{c_l}, \quad k_T = \left(\frac{\omega}{2\chi_T} \right)^{1/2} (1+i), \quad \chi_T = \frac{\lambda_T^0}{c_\varepsilon^0}, \\ c_l &= \left(\frac{\lambda^0 + 2\mu^0}{\rho^0} \right)^{1/2}, \quad c_\tau = \left(\frac{\mu^0}{\rho^0} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{(\beta^0)^2 T_0}{(\lambda^0 + 2\mu^0) c_\varepsilon^0}, \quad \beta^0 = (3\lambda^0 + 2\mu^0) \alpha_T^0, \end{aligned}$$

где k_l, k_T – волновые числа продольных упругих и тепловых волн соответственно; c_l, c_τ – скорости продольных и поперечных упругих волн соответственно; χ_T – коэффициент температуропроводности.

Так как рассматриваемая дифракционная задача является двумерной, то $\Phi_3 = \Phi_3(x, z)\mathbf{e}_y$, где \mathbf{e}_y – орт оси y . Тогда векторное уравнение (2.5.6) сводится к одному скалярному уравнению $\Delta\Phi_3 + \kappa_3^2\Phi_3 = 0$.

Скалярные функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 будем искать в виде

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= B_1 \exp[i(\kappa_{1x}x + \kappa_{1z}z)] + B_2 \exp[i(\kappa_{1x}x - \kappa_{1z}z)], \\ \Phi_2 &= C_1 \exp[i(\kappa_{2x}x + \kappa_{2z}z)] + C_2 \exp[i(\kappa_{2x}x - \kappa_{2z}z)], \\ \Phi_3 &= D_1 \exp[i(\kappa_{3x}x + \kappa_{3z}z)] + D_2 \exp[i(\kappa_{3x}x - \kappa_{3z}z)],\end{aligned}\tag{2.5.8}$$

где κ_{mx}, κ_{mz} ($m=1,2,3$) – проекции волновых векторов продольных термоупругих волн $\mathbf{\kappa}_m$ ($m=1,2$) и поперечных упругих волн $\mathbf{\kappa}_3$ на оси x и z соответственно, причем $\kappa_{mx}^2 + \kappa_{mz}^2 = \kappa_m^2$. Согласно закону Снеллиуса $\kappa_{1x} = \kappa_{2x} = \kappa_{3x} = k_{21}^x$.

Распространение малых возмущений в покрытии опишем системой уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела (1.2.39) – (1.2.42). В прямоугольных координатах ($q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$) эта система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = -\rho\omega^2 u_x, \quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho\omega^2 u_z,\tag{2.5.9}$$

$$\lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda'_T \frac{\partial T}{\partial z} + i\omega T_0 \beta \operatorname{div} \mathbf{u} = -i\omega \epsilon_T T\tag{2.5.10}$$

($\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$, штрих означает дифференцирование по z),

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T, \quad \sigma_{xz} = 2\mu\epsilon_{xz}, \\ \sigma_{zz} &= 2\mu\epsilon_{zz} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T,\end{aligned}\tag{2.5.11}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{zz},\tag{2.5.12}$$

где (2.5.9) – уравнения движения сплошной среды, (2.5.10) – уравнение притока тепла, (2.5.11) – соотношения Дюгамеля – Неймана, (2.5.12) – связь деформаций со смещениями.

Составляющие u_x , u_z вектора смещения \mathbf{u} и приращение температуры T в покрытии будем искать с учетом закона Снеллиуса в виде

$$(u_x(x, z), u_z(x, z), T(x, z)) = (U_1(z), U_2(z), U_3(z)) \exp(ik_{21}^x x). \quad (2.5.13)$$

Подставляя выражения (2.5.11) – (2.5.13) в уравнения (2.5.9), (2.5.10), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_1(z)$, $U_2(z)$, $U_3(z)$

$$AU'' + BU' + CU = 0, \quad \mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T, \quad (2.5.14)$$

где

$$A = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}, \quad B = (b_{mn})_{3 \times 3}, \quad C = (c_{mn})_{3 \times 3}.$$

Здесь

$$a_{11} = \mu, \quad a_{22} = \lambda + 2\mu, \quad a_{33} = \lambda_T,$$

$$b_{11} = \mu', \quad b_{12} = b_{21} = ik_{21}^x(\lambda + \mu), \quad b_{13} = b_{31} = c_{32} = 0,$$

$$b_{22} = \lambda' + 2\mu', \quad b_{23} = -\beta, \quad b_{32} = i\omega T_0 \beta, \quad b_{33} = \lambda'_T,$$

$$c_{11} = \rho\omega^2 - (k_{21}^x)^2(\lambda + 2\mu), \quad c_{12} = ik_{21}^x\mu', \quad c_{13} = -ik_{21}^x\beta, \quad c_{21} = ik_{21}^x\lambda',$$

$$c_{22} = \rho\omega^2 - (k_{21}^x)^2\mu, \quad c_{23} = -\beta', \quad c_{31} = -k_{21}^x\omega T_0\beta, \quad c_{33} = i\omega c_\varepsilon - (k_{21}^x)^2\lambda_T.$$

Коэффициенты V_s , W_s , B_s , C_s , D_s ($s=1,2$) в выражениях (2.5.4), (2.5.8) определяются из граничных условий.

На соприкасающихся с жидкостями поверхностях термоупругого тела граничные условия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, в отсутствии касательных напряжений, в равенстве нормального напряжения и акустического давления, в непрерывности акустической температуры и теплового потока:

$$z = -(H + h): \quad -i\omega u_z = \mathfrak{G}_{2n}, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p_2,$$

$$T = \Theta_2, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_2^T \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}. \quad (2.5.15)$$

$$z=0: -i\omega u_z^0 = \mathfrak{G}_{1n}, \sigma_{xz}^0 = 0, \sigma_{zz}^0 = -p_1, \\ T^0 = \Theta_1, \lambda_T^0 \frac{\partial T^0}{\partial z} = \lambda_1^T \frac{\partial \Theta_1}{\partial z}, \quad (2.5.16)$$

На поверхности, разделяющей пластину и покрытие, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц термоупругих сред, касательные и нормальные напряжения, температура и тепловой поток:

$$z=-H: u_x^0 = u_x, u_z^0 = u_z, \sigma_{xz}^0 = \sigma_{xz}, \sigma_{zz}^0 = \sigma_{zz}, \\ T^0 = T, \lambda_T^0 \frac{\partial T^0}{\partial z} = \lambda_T \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2.5.17)$$

Нормальные компоненты скоростей частиц жидкости \mathfrak{G}_{rn} , акустические давления p_r и акустические температуры Θ_r определяются из выражений

$$\mathfrak{G}_{rn} = \frac{\partial(\Psi_{r1} + \Psi_{r2})}{\partial z}, p_r = i\omega\rho_r(\Psi_{r1} + \Psi_{r2}), \\ \Theta_r = \frac{i}{\alpha_r^T} \left[\frac{\omega\gamma_r}{c_r^2}(\Psi_{r1} + \Psi_{r2}) + \frac{1}{\omega}\Delta(\Psi_{r1} + \Psi_{r2}) \right], \quad r=1,2. \quad (2.5.18)$$

Составляющие u_x^0, u_z^0 вектора смещения \mathbf{u}^0 и изменение температуры T^0 в пластине записываются через функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 в виде

$$u_x^0 = \frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}, u_z^0 = \frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial x}, \\ T^0 = \frac{\lambda^0 + 2\mu^0}{\beta^0} \left[k_l^2(\Phi_1 + \Phi_2) + \Delta(\Phi_1 + \Phi_2) \right]. \quad (2.5.19)$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz}^0, \sigma_{zz}^0$ связаны с величинами u_x^0, u_z^0, T^0 соотношениями Дюгамеля — Неймана (2.5.11), в которых функции λ, μ, α_T следует заменить константами $\lambda^0, \mu^0, \alpha_T^0$ соответственно.

Величины $\sigma_{xz}^0, \sigma_{zz}^0$ выражаются через функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 :

$$\sigma_{xz}^0 = 2\mu^0 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} \right) + \mu^0 \left(\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right),$$

$$\sigma_{zz}^0 = - \sum_{s=1}^2 \left[2\mu^0 \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2} + (\lambda^0 + 2\mu^0) k_l^2 \Phi_s \right] + 2\mu^0 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial z}.$$

Рассмотрим граничные условия (2.5.15). Используя условие равенства нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости и условие непрерывности акустической температуры, получим систему уравнений

$$A^{(1)} \mathbf{V} = B^{(1)} \mathbf{U} \Big|_{z=-(H+h)} + \mathbf{a}^{(1)},$$

где

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2)^T, \quad \mathbf{a}^{(1)} = (k_{21}^z A_i, -\zeta_{21} A_i)^T, \quad A^{(1)} = (a_{rs}^{(1)})_{2 \times 2}, \quad B^{(1)} = (b_{rm}^{(1)})_{2 \times 3},$$

$$a_{11}^{(1)} = k_{21}^z, \quad a_{12}^{(1)} = k_{22}^z, \quad a_{21}^{(1)} = \zeta_{21}, \quad a_{22}^{(1)} = \zeta_{22},$$

$$b_{11}^{(1)} = b_{13}^{(1)} = b_{21}^{(1)} = b_{22}^{(1)} = 0, \quad b_{12}^{(1)} = \omega, \quad b_{23}^{(1)} = 1,$$

$$\zeta_{2s} = \frac{i}{\alpha_2^T} \left(\frac{\omega \gamma_2}{c_2^2} - \frac{k_{2s}^2}{\omega} \right), \quad s = 1, 2.$$

Откуда находим выражения для коэффициентов V_1, V_2

$$\mathbf{V} = \left(A^{(1)-1} B^{(1)} \right) \mathbf{U} \Big|_{z=-(H+h)} + A^{(1)-1} \mathbf{a}^{(1)}. \quad (2.5.20)$$

Из оставшейся части граничных условий (2.5.15) получаем систему уравнений

$$\left(A \mathbf{U}' + C^{(1)} \mathbf{U} \right) \Big|_{z=-(H+h)} = D^{(1)} \mathbf{V} + \mathbf{b}^{(1)}, \quad (2.5.21)$$

где

$$\mathbf{b}^{(1)} = (0, -i\omega \rho_2 A_i, ik_{21}^z \lambda_2^T \zeta_{21} A_i)^T, \quad C^{(1)} = (c_{mn}^{(1)})_{3 \times 3}, \quad D^{(1)} = (d_{mr}^{(1)})_{3 \times 2},$$

$$c_{11}^{(1)} = c_{13}^{(1)} = c_{22}^{(1)} = c_{31}^{(1)} = c_{32}^{(1)} = c_{33}^{(1)} = 0, \quad c_{12}^{(1)} = ik_{21}^x \mu, \quad c_{21}^{(1)} = ik_{21}^x \lambda, \quad c_{23}^{(1)} = -\beta,$$

$$d_{11}^{(1)} = d_{12}^{(1)} = 0, \quad d_{21}^{(1)} = d_{22}^{(1)} = -i\omega \rho_2, \quad d_{31}^{(1)} = -ik_{21}^z \lambda_2^T \zeta_{21}, \quad d_{32}^{(1)} = -ik_{22}^z \lambda_2^T \zeta_{22}.$$

Подставляя выражение (2.5.20) в уравнение (2.5.21), получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.5.14) на границе $z = -(H + h)$:

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{U} \right)_{z=-(H+h)} = \mathbf{c}^{(1)}, \quad (2.5.22)$$

где $\mathbf{L}^{(1)} = \mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{D}^{(1)} \left(\mathbf{A}^{(1)-1} \mathbf{B}^{(1)} \right)$, $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)} + \mathbf{D}^{(1)} \left(\mathbf{A}^{(1)-1} \mathbf{a}^{(1)} \right)$.

Рассмотрим граничные условия (2.5.16). Используя условие равенства нормальных скоростей и условие непрерывности акустической температуры, получим соотношение

$$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{W} = \mathbf{B}^{(2)}\mathbf{K}, \quad (2.5.23)$$

где

$$\mathbf{W} = (W_1, W_2)^T, \quad \mathbf{K} = (B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2)^T,$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \left(a_{rs}^{(2)} \right)_{2 \times 2}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \left(b_{rj}^{(2)} \right)_{2 \times 6},$$

$$a_{11}^{(2)} = ik_{11}^z, \quad a_{12}^{(2)} = ik_{12}^z, \quad a_{21}^{(2)} = \zeta_{11}, \quad a_{22}^{(2)} = \zeta_{12},$$

$$b_{11}^{(2)} = -b_{12}^{(2)} = \omega \kappa_{1z}, \quad b_{13}^{(2)} = -b_{14}^{(2)} = \omega \kappa_{2z}, \quad b_{15}^{(2)} = b_{16}^{(2)} = \omega k_{21}^x,$$

$$b_{21}^{(2)} = b_{22}^{(2)} = \beta_1, \quad b_{23}^{(2)} = b_{24}^{(2)} = \beta_2, \quad b_{25}^{(2)} = b_{26}^{(2)} = 0,$$

$$\beta_s = \frac{\lambda^0 + 2\mu^0}{\beta^0} \left(k_l^2 - \kappa_s^2 \right), \quad \zeta_{1s} = \frac{i}{\alpha_1^T} \left(\frac{\omega \gamma_1}{c_1^2} - \frac{k_{1s}^2}{\omega} \right), \quad s = 1, 2.$$

Остальные три условия (2.5.16) приводят к соотношению

$$\mathbf{C}^{(2)}\mathbf{K} = \mathbf{D}^{(2)}\mathbf{W}, \quad (2.5.24)$$

где

$$\mathbf{C}^{(2)} = \left(c_{mj}^{(2)} \right)_{3 \times 6}, \quad \mathbf{D}^{(2)} = \left(d_{mr}^{(2)} \right)_{3 \times 2},$$

$$c_{11}^{(2)} = -c_{12}^{(2)} = -2\mu^0 k_{21}^x \kappa_{1z}, \quad c_{13}^{(2)} = -c_{14}^{(2)} = -2\mu^0 k_{21}^x \kappa_{2z},$$

$$c_{15}^{(2)} = c_{16}^{(2)} = \mu^0 \left(\kappa_{3z}^2 - \left(k_{21}^x \right)^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
c_{21}^{(2)} &= c_{22}^{(2)} = c_{23}^{(2)} = c_{24}^{(2)} = 2\mu^0 (k_{21}^x)^2 - (\lambda^0 + 2\mu^0) k_l^2, \\
c_{25}^{(2)} &= -c_{26}^{(2)} = -2\mu^0 k_{21}^x \kappa_{3z}, \\
c_{31}^{(2)} &= -c_{32}^{(2)} = \lambda_T^0 \beta_1 \kappa_{1z}, \quad c_{33}^{(2)} = -c_{34}^{(2)} = \lambda_T^0 \beta_2 \kappa_{2z}, \quad c_{35}^{(2)} = c_{36}^{(2)} = 0, \\
d_{11}^{(2)} &= d_{12}^{(2)} = 0, \quad d_{21}^{(2)} = d_{22}^{(2)} = -i\omega \rho_1, \quad d_{31}^{(2)} = \lambda_1^T \zeta_{11} k_{1z}^z, \quad d_{32}^{(2)} = \lambda_1^T \zeta_{12} k_{1z}^z.
\end{aligned}$$

Используя соотношения (2.5.23), (2.5.24), получим систему трех линейных уравнений для шести неизвестных компонентов вектора \mathbf{K} :

$$E^{(2)}\mathbf{K} = 0, \quad E^{(2)} = C^{(2)} - D^{(2)} \left(A^{(2)-1} B^{(2)} \right). \quad (2.5.25)$$

Рассмотрим граничные условия (2.5.17). Воспользовавшись условием равенства векторов смещения и условием равенства температур взаимодействующих термоупругих сред, получим систему трех уравнений

$$F^{(2)}\mathbf{K} = \mathbf{U}|_{z=-H}, \quad (2.5.26)$$

где

$$\begin{aligned}
F^{(2)} &= \left(f_{mj}^{(2)} \right)_{3 \times 6}, \\
f_{1s}^{(2)} &= ik_{21}^x \exp\left[(-1)^s i\kappa_{1z} H\right], \quad f_{1,s+2}^{(2)} = ik_{21}^x \exp\left[(-1)^s i\kappa_{2z} H\right], \\
f_{1,s+4}^{(2)} &= (-1)^s i\kappa_{3z} \exp\left[(-1)^s i\kappa_{3z} H\right], \\
f_{2s}^{(2)} &= (-1)^{s+1} i\kappa_{1z} \exp\left[(-1)^s i\kappa_{1z} H\right], \quad f_{2,s+2}^{(2)} = (-1)^{s+1} i\kappa_{2z} \exp\left[(-1)^s i\kappa_{2z} H\right], \\
f_{2,s+4}^{(2)} &= ik_{21}^x \exp\left[(-1)^s i\kappa_{3z} H\right], \\
f_{3s}^{(2)} &= \beta_1 \exp\left[(-1)^s i\kappa_{1z} H\right], \quad f_{3,s+2}^{(2)} = \beta_2 \exp\left[(-1)^s i\kappa_{2z} H\right], \\
f_{3,s+4}^{(2)} &= 0, \quad s = 1, 2.
\end{aligned}$$

Другие три граничных условия (2.5.17) дают систему уравнений

$$\left(A\mathbf{U}' + C^{(1)}\mathbf{U} \right) \Big|_{z=-H} = G^{(2)}\mathbf{K}, \quad (2.5.27)$$

где

$$\begin{aligned}
G^{(2)} &= \left(g_{mj}^{(2)} \right)_{3 \times 6}, \\
g_{1s}^{(2)} &= (-1)^s 2\mu^0 k_{21}^x \kappa_{1z} \exp\left[(-1)^s i\kappa_{1z} H\right], \\
g_{1,s+2}^{(2)} &= (-1)^s 2\mu^0 k_{21}^x \kappa_{2z} \exp\left[(-1)^s i\kappa_{2z} H\right], \quad g_{1,s+4}^{(2)} = c_{15}^{(2)} \exp\left[(-1)^s i\kappa_{3z} H\right], \\
g_{2s}^{(2)} &= c_{21}^{(2)} \exp\left[(-1)^s i\kappa_{1z} H\right], \quad g_{2,s+2}^{(2)} = c_{21}^{(2)} \exp\left[(-1)^s i\kappa_{2z} H\right], \\
g_{2,s+4}^{(2)} &= (-1)^s 2\mu^0 k_{21}^x \kappa_{3z} \exp\left[(-1)^s i\kappa_{3z} H\right], \\
g_{3s}^{(2)} &= (-1)^{s+1} i\kappa_{1z} \lambda_T^0 \beta_1 \exp\left[(-1)^s i\kappa_{1z} H\right], \\
g_{3,s+2}^{(2)} &= (-1)^{s+1} i\kappa_{2z} \lambda_T^0 \beta_2 \exp\left[(-1)^s i\kappa_{2z} H\right], \quad g_{3,s+4}^{(2)} = 0, \quad s = 1, 2.
\end{aligned}$$

Для определения шести компонентов вектора \mathbf{K} объединим три уравнения (2.5.25) с тремя уравнениями (2.5.26). После объединения получаем

$$H^{(2)} \mathbf{K} = \mathbf{a}^{(2)} \Big|_{z=-H}, \quad (2.5.28)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^{(2)} &= (U_1, U_2, U_3, 0, 0, 0)^T, \quad H^{(2)} = \left(h_{jk}^{(2)} \right)_{6 \times 6}, \\
h_{mj}^{(2)} &= f_{mj}^{(2)}, \quad h_{m+3,j}^{(2)} = e_{mj}^{(2)}, \quad m = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, 6,
\end{aligned}$$

$e_{mj}^{(2)}$ – компоненты матрицы $E^{(2)}$, присутствующей в выражении (2.5.25). Выразив из уравнения (2.5.28) вектор \mathbf{K} , находим

$$\mathbf{K} = Q^{(2)} \mathbf{a}^{(2)} \Big|_{z=-H}, \quad Q^{(2)} = H^{(2)-1} = \left(q_{jk}^{(2)} \right)_{6 \times 6}.$$

Так как вектор $\mathbf{a}^{(2)}$ содержит только три первые отличные от нуля компоненты, то имеем

$$\mathbf{K} = T^{(2)} \mathbf{U} \Big|_{z=-H}, \quad (2.5.29)$$

где $T^{(2)} = \left(t_{jm}^{(2)} \right)_{6 \times 3}$, причем $t_{jm}^{(2)} = q_{jm}^{(2)}$ ($j = 1, 2, \dots, 6$, $m = 1, 2, 3$).

Подставляя выражение (2.5.29) в уравнение (2.5.27), получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.5.14) на границе $z = -H$:

$$\left(AU' + L^{(2)}U \right) \Big|_{z=-H} = 0, \quad L^{(2)} = C^{(1)} - G^{(2)}T^{(2)}. \quad (2.5.30)$$

Из выражения (2.5.20) следует, что коэффициент отражения V_1 может быть вычислен лишь после решения краевой задачи (2.5.14), (2.5.22), (2.5.30).

Решение краевой задачи методом сплайн-коллокации. Найдем решение краевой задачи (2.5.14), (2.5.22), (2.5.30) методом сплайн-коллокации [44]. Введем на отрезке $[-(H+h), -H]$ равномерную сетку $-(H+h) = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = -H$ с шагом \hat{h} . Будем искать приближенное решение краевой задачи в виде кубических сплайнов $S_1(z)$, $S_2(z)$, $S_3(z)$ дефекта 1 с узлами на сетке. Здесь $S_j(z)$ ($j=1,2,3$) – сплайн-функции, приближающие функции $U_j(z)$ соответственно.

Представим кубические сплайны в виде разложения по базису из нормализованных кубических B -сплайнов [44]

$$S_j(z) = \sum_{k=-1}^{N+1} b_j^{(k)} B_k(z), \quad j=1,2,3, \quad (2.5.31)$$

где

$$B_k(z) = \frac{1}{6}(2 + \sigma_k(z))^3 B_{k-2}^0(z) + \left(\frac{2}{3} - \sigma_k(z)^2 - \frac{1}{2}\sigma_k(z)^3 \right) B_{k-1}^0(z) + \left(\frac{2}{3} - \sigma_k(z)^2 + \frac{1}{2}\sigma_k(z)^3 \right) B_k^0(z) + \frac{1}{6}(2 - \sigma_k(z))^3 B_{k+1}^0(z), \quad \sigma_k(z) = \frac{z - \xi_k}{\hat{h}},$$

$$B_k^0(z) = \begin{cases} 1; z \in [\xi_k, \xi_{k+1}), \\ 0; z \notin [\xi_k, \xi_{k+1}), \end{cases}$$

$b_j^{(k)}$ – коэффициенты разложения, которые подлежат определению; $B_k(z)$ – базисная сплайн-функция, определенная на интервале-носителе (ξ_{k-2}, ξ_{k+2}) со средним узлом ξ_k ; $B_k^0(z)$ – нормализованный B -сплайн нулевой степени.

Для того чтобы все базисные функции в (2.5.31) были определены, сетка должна быть дополнена узлами

$$\xi_{j-4} = \xi_0 + (j-4)\hat{h}, \quad \xi_{N+4-j} = \xi_N + (4-j)\hat{h}, \quad j=1,2,3.$$

Потребуем, чтобы сплайны $S_j(z)$ ($j=1,2,3$) удовлетворяли системе (2.5.14) и краевым условиям (2.5.22), (2.5.30) в узлах коллокации, совпадающих с узлами введенной сетки. Используя выражения для узловых значений B -сплайна и его производных [44] (здесь эти выражения приведены ниже в табл. 2.5.1), получим следующую систему $3N+9$ линейных алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами $b_j^{(k)}$:

$$P_0^{(1)}\mathbf{b}_0 = \mathbf{S}_0, \quad Q_k\mathbf{b}_k = 0, \quad k=0,1,\dots,N, \quad P_N^{(2)}\mathbf{b}_N = 0, \quad (2.5.32)$$

где

$$\mathbf{b}_k = \left(b_1^{(k-1)}, b_2^{(k-1)}, b_3^{(k-1)}, b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, b_3^{(k)}, b_1^{(k+1)}, b_2^{(k+1)}, b_3^{(k+1)} \right)^T,$$

$$\mathbf{S}_0 = 6\hat{h}^2\mathbf{c}^{(1)}, \quad P_0^{(1)} = \left(p_{j\alpha}^{(1)} \right)_{3 \times 9}, \quad Q_k = \left(q_{j\alpha} \right)_{3 \times 9}, \quad P_N^{(2)} = \left(p_{j\alpha}^{(2)} \right)_{3 \times 9}.$$

Здесь

$$p_{jm}^{(v)} = -3\hat{h}a_{jm} + \hat{h}^2 l_{jm}^{(v)}, \quad p_{j,m+3}^{(v)} = 4\hat{h}^2 l_{jm}^{(v)},$$

$$p_{j,m+6}^{(v)} = 3\hat{h}a_{jm} + \hat{h}^2 l_{jm}^{(v)}, \quad v=1,2,$$

$$q_{jm} = 6a_{jm} - 3\hat{h}b_{jm} + \hat{h}^2 c_{jm}, \quad q_{j,m+3} = -12a_{jm} + 4\hat{h}^2 c_{jm},$$

$$q_{j,m+6} = 6a_{jm} + 3\hat{h}b_{jm} + \hat{h}^2 c_{jm}, \quad j=1,2,3, \quad m=1,2,3,$$

$l_{jm}^{(v)}$ ($v=1,2$) – элементы матриц $L^{(v)}$, присутствующих в краевых условиях (2.5.22), (2.5.30). Нижний индекс k ($k=0,1,\dots,N$) у каждой матрицы системы (2.5.32) указывает на то, что ее элементы, зависящие от z , вычисляются при $z = \xi_k$.

Решив систему (2.5.32), и подставив найденные значения в выражения (2.5.31), найдем приближенное решение краевой задачи.

Определив по выражению (2.5.20) коэффициент V_1 , получим аналитическое описание акустического поля, отраженного от термоупругой пластины с неоднородным термоупругим покрытием по формуле (2.5.4).

Таблица 2.5.1

Узловые значения B -сплайна и его производных

γ	$B_\gamma(\xi_k)$	$B'_\gamma(\xi_k)$	$B''_\gamma(\xi_k)$
$k-1$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2\hat{h}}$	$\frac{1}{\hat{h}^2}$
k	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{\hat{h}^2}$
$k+1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2\hat{h}}$	$\frac{1}{\hat{h}^2}$

Результаты расчетов. Проведены расчеты коэффициента отражения по интенсивности

$$I(\varpi, \theta) = \left| \frac{V_1(\varpi, \theta)}{A_i} \right|^2$$

($\varpi = |k_{21}|H$ – волновой размер пластины) для пластины с покрытием, находящейся в воде при падении звуковой волны с единичной амплитудой.

Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0.05$ м с покрытием толщиной $h = 0.005$ м из материала на основе поливинилбутираля.

Заметим, что здесь и далее при проведении расчетов полагалось, что величины ρ^0 , λ^0 , μ^0 , α_T^0 , λ_T^0 , c_ε^0 – физико-механические характеристики алюминия, а величины $\tilde{\rho}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\alpha}_T$, $\tilde{\lambda}_T$, \tilde{c}_ε – физико-механические характеристики поливинилбутираля.

Расчеты выполнялись для четырех видов неоднородности термоупругого материала покрытия.

Первый вид неоднородности характеризуется изменением плотности материала покрытия по линейному закону:

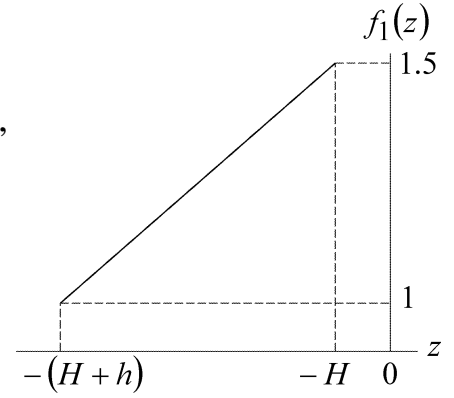
$$\rho(z) = \tilde{\rho} f_1(z), \quad -(H+h) \leq z \leq -H,$$

$$\lambda(z) = \tilde{\lambda}, \quad \mu(z) = \tilde{\mu}, \quad \alpha_T(z) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(z) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(z) = \tilde{c}_\varepsilon,$$

где

$$f_1(z) = 1 + \frac{z + H + h}{2h},$$

справа на рисунке показан график функции $f_1(z)$.



Второй вид неоднородности проявляется в изменении модулей упругости материала покрытия по квадратичным законам:

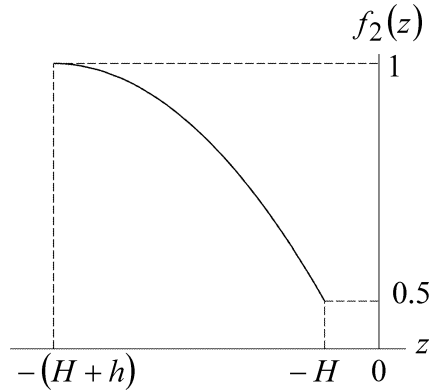
$$\lambda(z) = \tilde{\lambda} f_2(z), \quad \mu(z) = \tilde{\mu} f_2(z), \quad -(H+h) \leq z \leq -H,$$

$$\rho(z) = \tilde{\rho}, \quad \alpha_T(z) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(z) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(z) = \tilde{c}_\varepsilon,$$

где

$$f_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z + H + h}{h} \right)^2,$$

справа на рисунке показан график функции $f_2(z)$.



Третий и четвертый виды неоднородности состоят в изменении плотности и модулей упругости материала покрытия. При этом третий вид неоднородности описывается зависимостями

$$\rho(z) = \tilde{\rho} f_1(z), \quad \lambda(z) = \tilde{\lambda} f_2(z), \quad \mu(z) = \tilde{\mu} f_2(z), \quad -(H+h) \leq z \leq -H,$$

$$\alpha_T(z) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(z) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(z) = \tilde{c}_\varepsilon,$$

а четвертый вид неоднородности – зависимостями

$$\rho(z) = \tilde{\rho} f_1(z), \quad \lambda(z) = \tilde{\lambda} f_1(z), \quad \mu(z) = \tilde{\mu} f_1(z), \quad -(H+h) \leq z \leq -H,$$

$$\alpha_T(z) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(z) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(z) = \tilde{c}_\varepsilon.$$

Для оценки влияния покрытия и его неоднородности на звукоотражающие свойства пластины расчеты выполнялись и для термоупругой пластины без покрытия и для термоупругой пластины с однородным термоупругим покрытием.

Для контроля точности приближенного решения краевой задачи (2.5.14), (2.5.22), (2.5.30) методом сплайн-коллокации, расчеты проведены на сгущающихся сетках, причем каждая следующая сетка была в два раза мельче предыдущей. Результаты расчетов представлены на рис. 2.5.2 – 2.5.7.

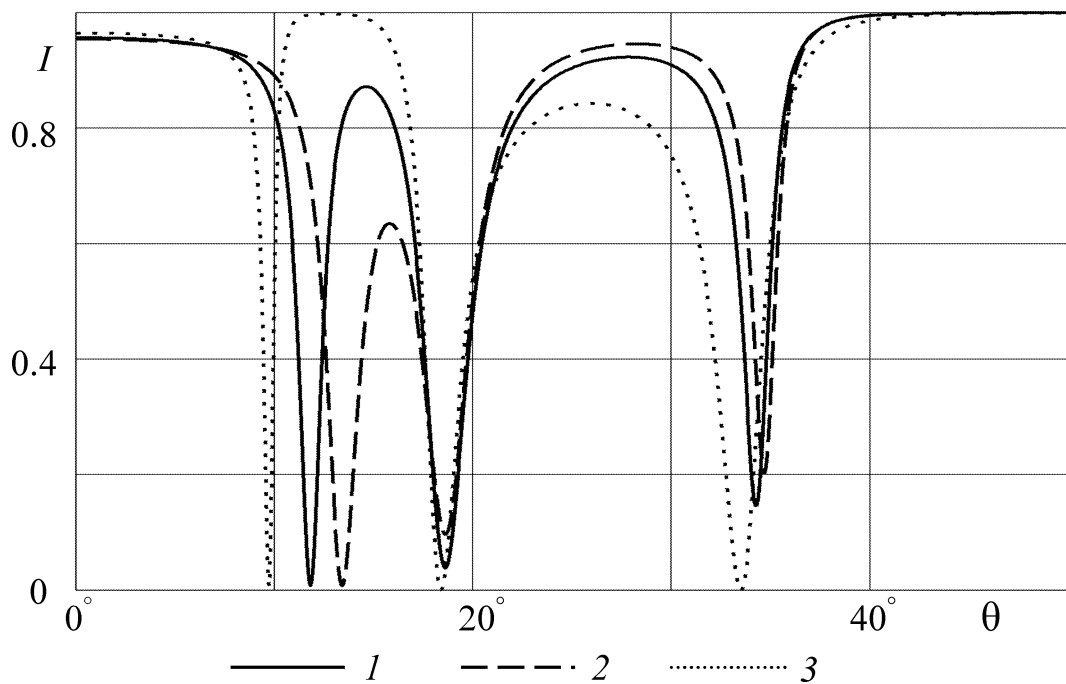


Рис. 2.5.2. Зависимость интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны: 1 — пластина с однородным покрытием, 2 — пластина с покрытием, имеющим неоднородность первого вида, 3 — пластина без покрытия

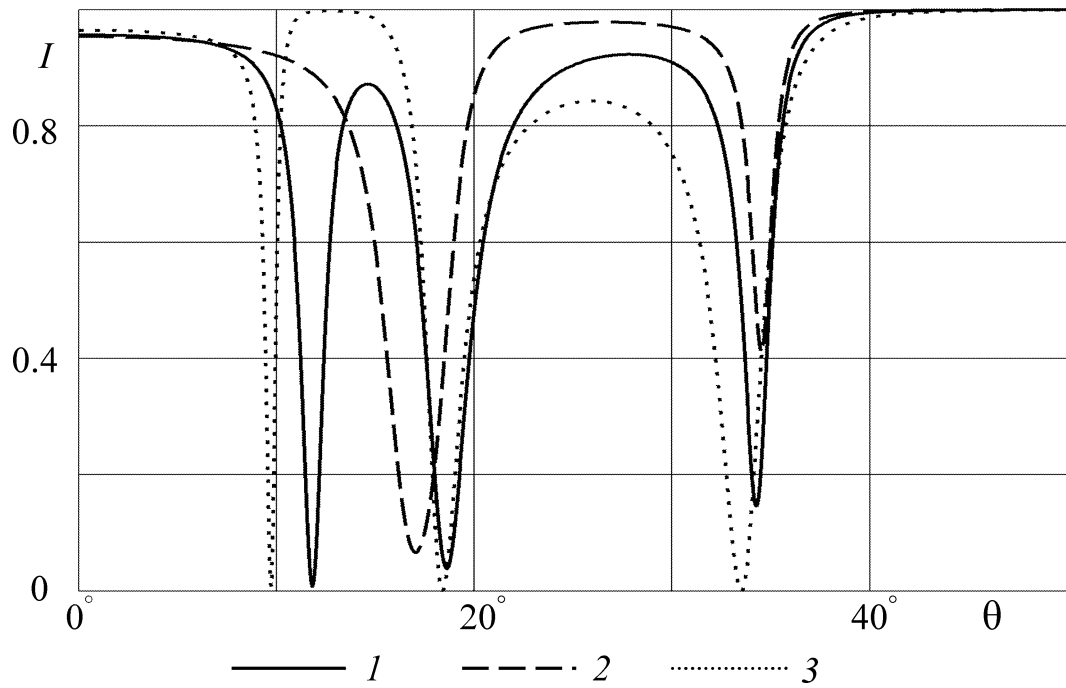


Рис. 2.5.3. Зависимость интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны: *1* — пластина с однородным покрытием, *2* — пластина с покрытием, имеющим неоднородность второго вида, *3* — пластина без покрытия

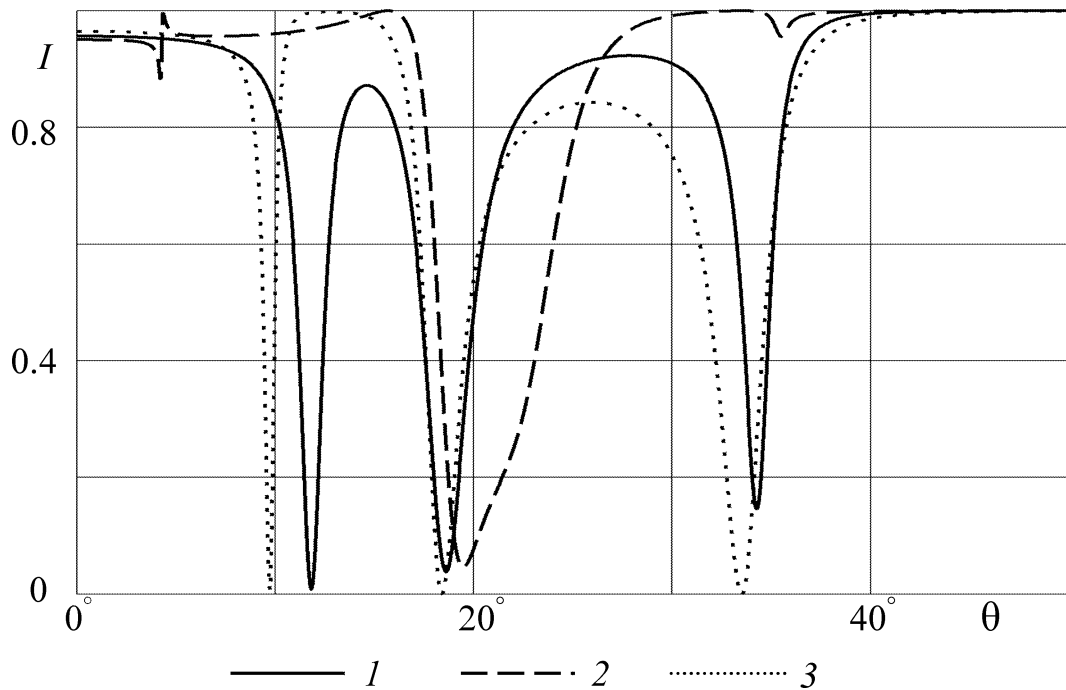


Рис. 2.5.4. Зависимость интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны: *1* — пластина с однородным покрытием, *2* — пластина с покрытием, имеющим неоднородность третьего вида, *3* — пластина без покрытия

На рис. 2.5.2 – 2.5.4 представлены графики зависимости интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны, рассчитанные в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ при волновом размере пластины $\varpi = 8.5$. Из рисунков видно, что на рассматриваемой частоте при углах падения близких к нормали покрытие практически не влияет на интенсивность звукоотражения пластины. Сравнение кривых 1 и 3 показывает, что наличие у пластины однородного покрытия приводит к сдвигу минимумов функции $I(8.5, \theta)$. Присутствие в покрытии неоднородности первого вида усиливает этот сдвиг (рис. 2.5.2). Из-за влияния покрытия с неоднородностью второго вида у функции $I(8.5, \theta)$ вместо трех минимумов существует только два (рис. 2.5.3). Учет в покрытии неоднородности третьего вида приводит к почти полному сглаживанию двух из трех минимумов функции $I(8.5, \theta)$ (рис. 2.5.4).

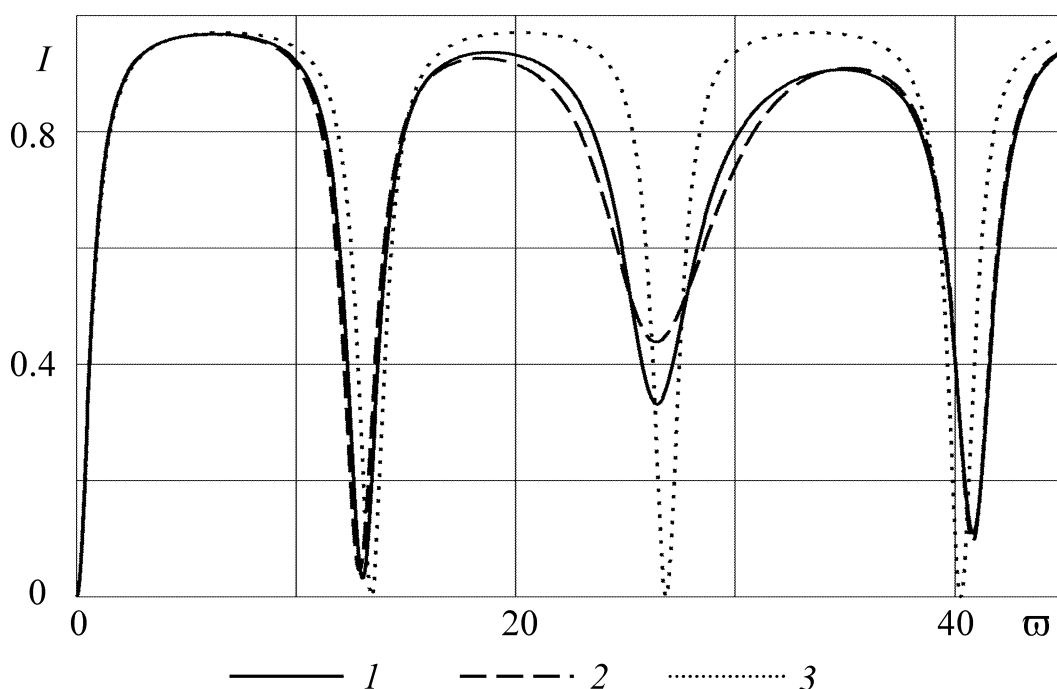


Рис. 2.5.5. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера пластины: 1 — пластина с однородным покрытием, 2 — пластина с покрытием, имеющим неоднородность первого вида, 3 — пластина без покрытия

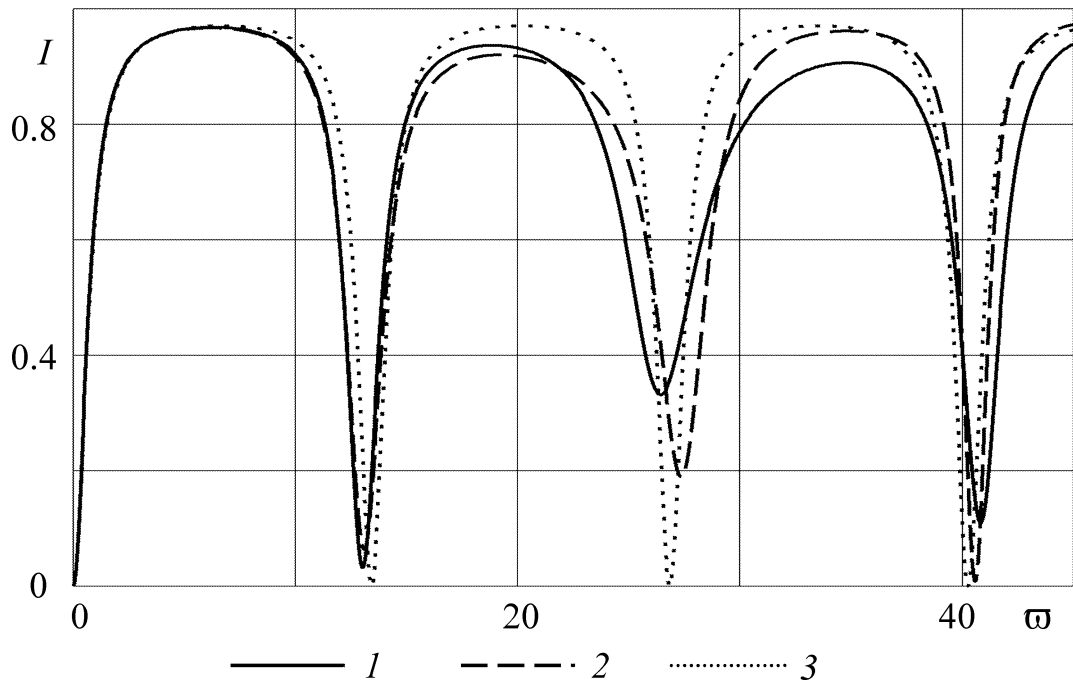


Рис. 2.5.6. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера пластины: 1 — пластина с однородным покрытием, 2 — пластина с покрытием, имеющим неоднородность второго вида, 3 — пластина без покрытия

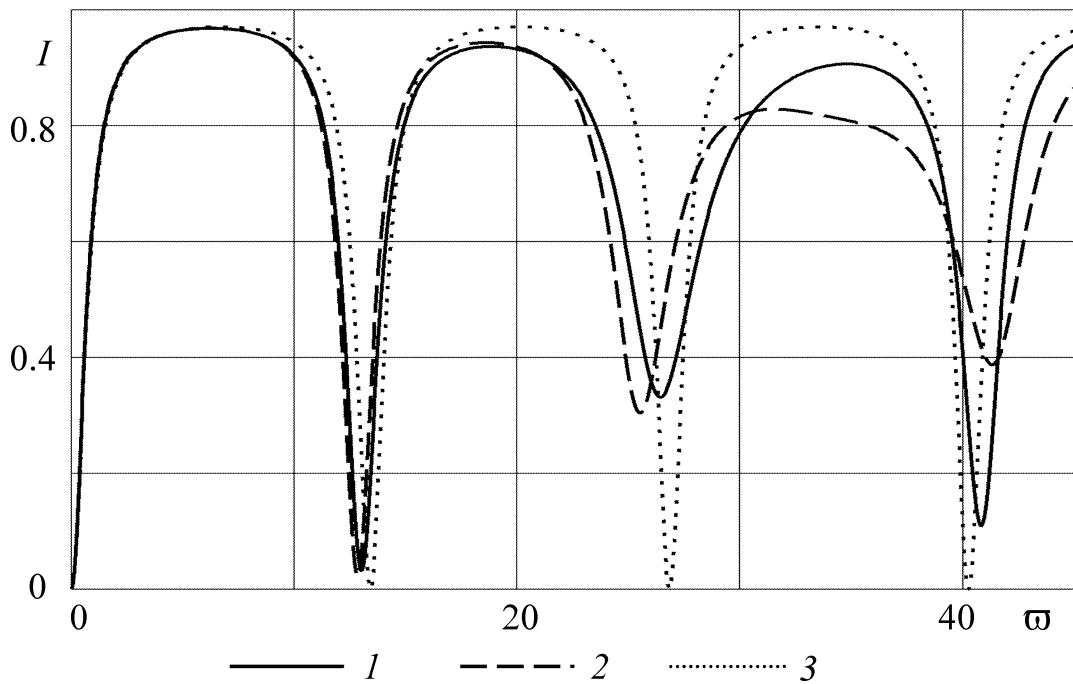


Рис. 2.5.7. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера пластины: 1 — пластина с однородным покрытием, 2 — пластина с покрытием, имеющим неоднородность четвертого вида, 3 — пластина без покрытия

На рис. 2.5.5 – 2.5.7 представлены графики зависимости интенсивности звукоотражения от волнового размера пластины, рассчитанные в интервале $0 < \varpi \leq 45$ при падении звуковой волны по нормали к поверхности покрытия пластины ($\theta = 0^\circ$). Из рисунков видно, что в диапазоне $0 < \varpi < 5$ величина $I(\varpi, 0^\circ)$ почти не зависит от наличия или отсутствия покрытия у пластины. С увеличением волнового числа ϖ влияние покрытия на звукоотражение пластины становится заметнее и проявляется в некотором сдвиге по ϖ и увеличении значений резонансных минимумов функции $I(\varpi, 0^\circ)$. При этом наблюдается различие в частотных характеристиках интенсивности звукоотражения, обусловленное влиянием неоднородности покрытия.

Таким образом, анализ результатов расчетов показывает возможность изменения звукоотражающих свойств термоупругого плоского тела за счет непрерывно-слоистой неоднородности его покрытия.

2.5.2. Случай дискретно-слоистого покрытия

Решение задачи для этого случая получим из решения задачи о дифракции плоской звуковой волны на системе однородных термоупругих плоских слоев.

Постановка задачи. Рассмотрим граничащую с жидкими полупространствами термоупругую дискретно-слоистую среду, состоящую из N ($N \geq 2$) однородных изотропных термоупругих плоских слоев (рис. 2.5.8). Каждый m -й слой ($m = 1, 2, \dots, N$) имеет толщину h_m . Материал m -го слоя имеет плотность $\rho^{(m)}$, упругие постоянные Ламе $\lambda^{(m)}$ и $\mu^{(m)}$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T^{(m)}$, теплопроводность $\lambda_T^{(m)}$, объемную теплоемкость $c_\varepsilon^{(m)}$. Источники тепла в термоупругой слоистой среде отсутствуют.

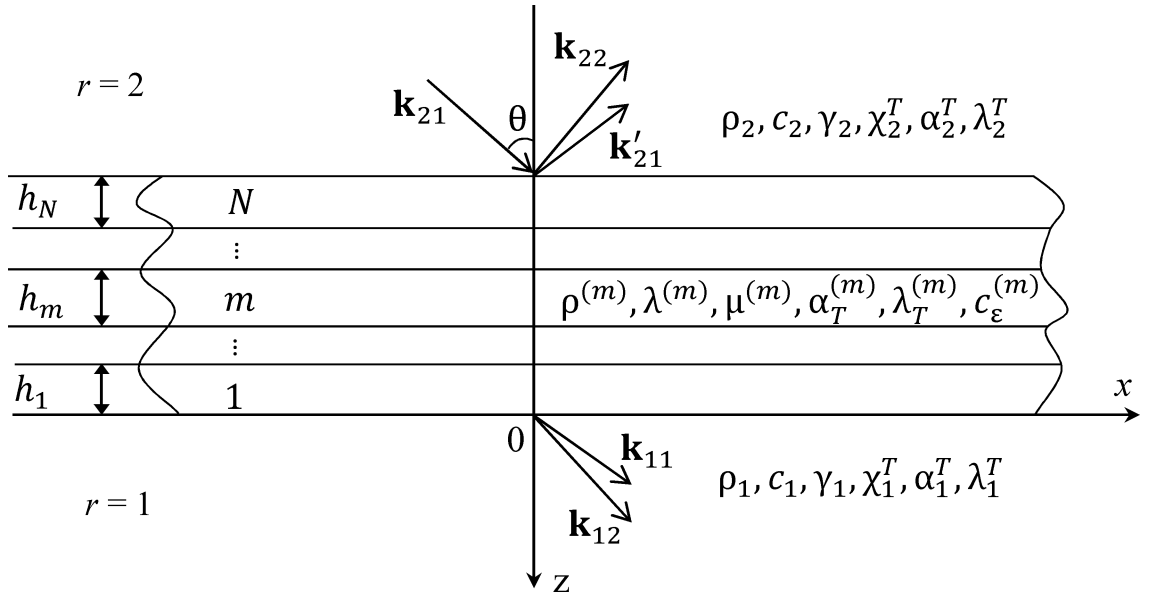


Рис. 2.5.8. Схема задачи

Система прямоугольных координат (x, y, z) выбрана таким образом, что ось x лежит на границе раздела первого слоя и жидкости, ось z направлена вниз по нормали к поверхностям слоев.

Нижнее ($r=1$) и верхнее ($r=2$) полупространства заполнены теплопроводными однородными сжимаемыми жидкостями, имеющими плотность ρ_r , скорость звука c_r , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ_r , температуропроводность χ_r^T , коэффициент температурного расширения α_r^T , теплопроводность λ_r^T . Считаем, что в невозмущенном состоянии твердая и жидкие среды имеют одну и ту же постоянную температуру T_0 .

Пусть из верхнего полупространства на границу раздела N -го слоя и жидкости падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой

$$\Psi_i = A_i \exp \left\{ i \left[k_{21}^x x + k_{21}^z (z + H_N) - \omega t \right] \right\},$$

где

$$k_{21}^x = k_{21} \sin \theta, \quad k_{21}^z = k_{21} \cos \theta, \quad H_N = \sum_{j=1}^N h_j,$$

A_i – амплитуда падающей волны; k_{21}^x , k_{21}^z – проекции волнового вектора падающей волны \mathbf{k}_{21} на оси координат x и z соответственно; k_{21} – волновое число звуковых волн в верхнем полупространстве; ω – круговая частота; θ – угол падения волны; H_N – толщина многослойной системы. Без ограничения общности полагаем, что волновой вектор падающей волны лежит в плоскости xz . Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

На рис. 2.5.8 через \mathbf{k}'_{21} и \mathbf{k}_{11} обозначены волновые векторы отраженной и прошедшей звуковых волн, а через \mathbf{k}_{12} и \mathbf{k}_{22} – волновые векторы возбужденных тепловых волн.

Определим волновые поля в жидкостях и термоупругих слоях.

Уравнения волновых полей. Рассматриваемая задача является двумерной. В каждом слое системы отсутствует смещение частиц термоупругой среды вдоль оси y .

Скорость частиц жидкости в нижнем и верхнем полупространствах представим через потенциалы скоростей звуковых и тепловых волн в виде (2.5.1). Эти потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца (2.5.2), будем искать в виде аналогичном (2.5.4):

$$\begin{aligned} \Psi'_{21} &= V_1 \exp\left[i\left(k_{21}^x x - k_{21}^z (z + H_N)\right)\right], \quad \Psi_{22} = V_2 \exp\left[i\left(k_{21}^x x - k_{22}^z (z + H_N)\right)\right], \\ \Psi_{1s} &= W_s \exp\left[i\left(k_{21}^x x + k_{1s}^z z\right)\right], \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

Волновые поля в однородном термоупругом m -м ($m = 1, 2, \dots, N$) слое системы определим на основе линейной связанной динамической задачи термоупругости (1.2.22), (1.2.23). Смещение частиц в m -м слое представим в виде

$$\mathbf{u}^{(m)} = \text{grad}\left(\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}\right) + \text{rot}\Phi_3^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (2.5.34)$$

где потенциалы $\Phi_1^{(m)}$, $\Phi_2^{(m)}$, $\Phi_3^{(m)}$ – решения уравнений Гельмгольца

$$\Delta\Phi_s^{(m)} + \kappa_s^{(m)} 2\Phi_s^{(m)} = 0, \quad \Delta\Phi_3^{(m)} + \kappa_3^{(m)} 2\Phi_3^{(m)} = 0, \quad s = 1, 2. \quad (2.5.35)$$

Здесь $\kappa_s^{(m)}$ ($s=1,2$), $\kappa_3^{(m)}$ – волновые числа продольных термоупругих и поперечных упругих волн соответственно. При этом

$$\kappa_s^{(m)2} = \frac{k_l^{(m)2}}{2} \left[1 + \delta^{(m)}(1 + \varepsilon^{(m)}) - (-1)^s \sqrt{1 - 2\delta^{(m)}(1 - \varepsilon^{(m)}) + \delta^{(m)2}(1 + \varepsilon^{(m)})^2} \right],$$

$$\kappa_3^{(m)} = \frac{\omega}{c_\tau^{(m)}}, \quad m=1,2,\dots,N, \quad s=1,2, \quad (2.5.36)$$

где

$$\delta^{(m)} = \left(\frac{k_T^{(m)}}{k_l^{(m)}} \right)^2, \quad k_l^{(m)} = \frac{\omega}{c_l^{(m)}}, \quad k_T^{(m)} = \left(\frac{\omega}{2\chi_T^{(m)}} \right)^{1/2} (1+i),$$

$$c_l^{(m)} = \left(\frac{\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}}{\rho^{(m)}} \right)^{1/2}, \quad c_\tau^{(m)} = \left(\frac{\mu^{(m)}}{\rho^{(m)}} \right)^{1/2}, \quad \chi_T^{(m)} = \frac{\lambda_T^{(m)}}{c_\varepsilon^{(m)}},$$

$$\varepsilon^{(m)} = \frac{\beta^{(m)2} T_0}{(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) c_\varepsilon^{(m)}}, \quad \beta^{(m)} = (3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) \alpha_T^{(m)},$$

$k_l^{(m)}$, $k_T^{(m)}$ – волновые числа продольных упругих и тепловых волн соответственно; $c_l^{(m)}$, $c_\tau^{(m)}$ – скорости продольных и поперечных упругих волн соответственно; $\chi_T^{(m)}$ – температуропроводность.

Так как рассматриваемая дифракционная задача является двумерной, то $\Phi_3^{(m)} = \Phi_3^{(m)}(x, z) \mathbf{e}_y$, где \mathbf{e}_y – орт оси y . Тогда векторное уравнение (2.5.35) сводится к одному скалярному уравнению Гельмгольца.

Решения уравнений (2.5.35) будем искать в виде

$$\Phi_1^{(m)} = B_1^{(m)} \exp[i(\kappa_{1x}^{(m)} x + \kappa_{1z}^{(m)} z)] + B_2^{(m)} \exp[i(\kappa_{1x}^{(m)} x - \kappa_{1z}^{(m)} z)],$$

$$\Phi_2^{(m)} = C_1^{(m)} \exp[i(\kappa_{2x}^{(m)} x + \kappa_{2z}^{(m)} z)] + C_2^{(m)} \exp[i(\kappa_{2x}^{(m)} x - \kappa_{2z}^{(m)} z)], \quad (2.5.37)$$

$$\Phi_3^{(m)} = D_1^{(m)} \exp[i(\kappa_{3x}^{(m)} x + \kappa_{3z}^{(m)} z)] + D_2^{(m)} \exp[i(\kappa_{3x}^{(m)} x - \kappa_{3z}^{(m)} z)],$$

где $\kappa_{jx}^{(m)}$, $\kappa_{jz}^{(m)}$ ($j=1,2,3$) – проекции волнового вектора $\kappa_j^{(m)}$ на оси x и z соответственно, причем $\kappa_{jx}^{(m)2} + \kappa_{jz}^{(m)2} = \kappa_j^{(m)2}$. Согласно закону Снеллиуса $\kappa_{1x}^{(m)} = \kappa_{2x}^{(m)} = \kappa_{3x}^{(m)} = k_{21}^x$.

Коэффициенты V_s , W_s , $B_s^{(m)}$, $C_s^{(m)}$, $D_s^{(m)}$ ($s=1,2$) в выражениях (2.5.33), (2.5.37) должны быть определены из граничных условий.

На соприкасающихся с жидкостями поверхностях первого и N -го термоупругих слоев граничные условия включают равенство нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, условие отсутствия касательных напряжений, равенство нормального напряжения и акустического давления, условие непрерывности акустической температуры и теплового потока:

$$z=0: -i\omega u_z^{(1)} = \mathfrak{G}_{1n}, \sigma_{xz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(1)} = -p_1, T^{(1)} = \Theta_1, \lambda_T^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = \lambda_T^1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z}, \quad (2.5.38)$$

$$z=-H_N: -i\omega u_z^{(N)} = \mathfrak{G}_{2n}, \sigma_{xz}^{(N)} = 0, \sigma_{zz}^{(N)} = -p_2, T^{(N)} = \Theta_2, \lambda_T^{(N)} \frac{\partial T^{(N)}}{\partial z} = \lambda_T^2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}.$$

На поверхностях, разделяющих термоупругие слои, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц термоупругих сред, касательные и нормальные напряжения, температура и тепловой поток:

$$z=-H_{\alpha-1}: u_x^{(\alpha-1)} = u_x^{(\alpha)}, u_z^{(\alpha-1)} = u_z^{(\alpha)}, \sigma_{xz}^{(\alpha-1)} = \sigma_{xz}^{(\alpha)}, \sigma_{zz}^{(\alpha-1)} = \sigma_{zz}^{(\alpha)},$$

$$T^{(\alpha-1)} = T^{(\alpha)}, \lambda_T^{(\alpha-1)} \frac{\partial T^{(\alpha-1)}}{\partial z} = \lambda_T^{(\alpha)} \frac{\partial T^{(\alpha)}}{\partial z}, \quad \alpha = 2,3,\dots,N. \quad (2.5.39)$$

Здесь $H_{\alpha-1} = \sum_{\gamma=1}^{\alpha-1} h_\gamma$.

Нормальные компоненты скоростей частиц жидкости \mathfrak{G}_{rn} , акустические давления p_r и акустические температуры Θ_r в нижнем ($r=1$) и верхнем ($r=2$) полупространствах определяются из выражений (2.5.18). Составляющие $u_x^{(m)}$,

$u_z^{(m)}$ вектора смещения $\mathbf{u}^{(m)}$ и возмущение температуры $T^{(m)}$ в m -м ($m=1,2,\dots,N$) слое записываются через функции $\Phi_1^{(m)}$, $\Phi_2^{(m)}$, $\Phi_3^{(m)}$:

$$\begin{aligned} u_x^{(m)} &= \frac{\partial(\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)})}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_3^{(m)}}{\partial z}, \quad u_z^{(m)} = \frac{\partial(\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)})}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_3^{(m)}}{\partial x}, \\ T^{(m)} &= \frac{\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}}{\beta^{(m)}} \left[k_l^{(m)} 2(\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}) + \Delta(\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.40)$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz}^{(m)}$, $\sigma_{zz}^{(m)}$ связаны с величинами $u_x^{(m)}$, $u_z^{(m)}$, $T^{(m)}$ соотношениями Дюгамеля — Неймана (2.5.11), которые здесь имеют вид

$$\sigma_{xz}^{(m)} = 2\mu^{(m)}\varepsilon_{xz}^{(m)}, \quad \sigma_{zz}^{(m)} = 2\mu^{(m)}\varepsilon_{zz}^{(m)} + \lambda^{(m)}\operatorname{div}\mathbf{u}^{(m)} - \beta^{(m)}T^{(m)},$$

где

$$\varepsilon_{xz}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^{(m)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(m)}}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(m)} = \frac{\partial u_z^{(m)}}{\partial z}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}^{(m)} = \frac{\partial u_x^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(m)}}{\partial z}.$$

С использованием формул (2.5.40) эти соотношения записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(m)} &= 2\mu^{(m)} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1^{(m)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_2^{(m)}}{\partial x \partial z} \right) + \mu^{(m)} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3^{(m)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi_3^{(m)}}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{zz}^{(m)} &= - \sum_{s=1}^2 \left[2\mu^{(m)} \frac{\partial^2 \Phi_s^{(m)}}{\partial x^2} + (\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) k_l^{(m)} 2\Phi_s^{(m)} \right] + 2\mu^{(m)} \frac{\partial^2 \Phi_3^{(m)}}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (2.5.41)$$

Для того чтобы решить данную задачу, необходимо построить с помощью всех граничных условий систему $6N + 4$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных коэффициентов в выражениях (2.5.33), (2.5.37), а затем решить эту систему. Однако более целесообразно использовать для решения рассматриваемой задачи матричный метод [10, 109].

Решение задачи матричным методом. Составляющие вектора смещения $u_x^{(m)}$, $u_z^{(m)}$, компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz}^{(m)}$, $\sigma_{zz}^{(m)}$, изменение температуры $T^{(m)}$ и тепловой поток $\lambda_T^{(m)} \partial T^{(m)} / \partial z$ будем искать в виде

$$\left(u_x^{(m)}, u_z^{(m)}, \sigma_{xz}^{(m)}, \sigma_{zz}^{(m)}, T^{(m)}, \lambda_T^{(m)} \frac{\partial T^{(m)}}{\partial z} \right)^T (x, z) = \mathbf{S}^{(m)}(z) \exp(ik_{21}^x x), \quad (2.5.42)$$

где

$\mathbf{S}^{(m)}(z) = \left(s_1^{(m)}(z), s_2^{(m)}(z), s_3^{(m)}(z), s_4^{(m)}(z), s_5^{(m)}(z), s_6^{(m)}(z) \right)^T$ ($m = 1, 2, \dots, N$) – вектор смещения-напряжения-температуры.

Введем вектор коэффициентов

$$\mathbf{K}^{(m)} = \left(B_1^{(m)}, B_2^{(m)}, C_1^{(m)}, C_2^{(m)}, D_1^{(m)}, D_2^{(m)} \right)^T.$$

Связь между векторами $\mathbf{S}^{(m)}(z)$ и $\mathbf{K}^{(m)}$ определяется формулой

$$\mathbf{S}^{(m)}(z) = M^{(m)}(z) \mathbf{K}^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (2.5.43)$$

где $M^{(m)}(z)$ – матрица шестого порядка с элементами, которые являются функциями координаты z ($-H_m \leq z \leq -H_{m-1}$, $H_0 = 0$). С учетом выражений (2.5.40) – (2.5.42) получаем

$$\begin{aligned} M_{1s}^{(m)} &= ik_{21}^x \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{1z}^{(m)} z\right], \quad M_{1,s+2}^{(m)} = ik_{21}^x \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{2z}^{(m)} z\right], \\ M_{1,s+4}^{(m)} &= (-1)^s ik_{3z}^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{3z}^{(m)} z\right], \\ M_{2s}^{(m)} &= (-1)^{s+1} ik_{1z}^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{1z}^{(m)} z\right], \\ M_{2,s+2}^{(m)} &= (-1)^{s+1} ik_{2z}^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{2z}^{(m)} z\right], \quad M_{2,s+4}^{(m)} = ik_{21}^x \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{3z}^{(m)} z\right], \\ M_{3s}^{(m)} &= (-1)^s 2\mu^{(m)} k_{21}^x \kappa_{1z}^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{1z}^{(m)} z\right], \\ M_{3,s+2}^{(m)} &= (-1)^s 2\mu^{(m)} k_{21}^x \kappa_{2z}^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{2z}^{(m)} z\right], \\ M_{3,s+4}^{(m)} &= \mu^{(m)} \left(\kappa_{3z}^{(m)2} - (k_{21}^x)^2 \right) \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{3z}^{(m)} z\right], \\ M_{4s}^{(m)} &= f^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{1z}^{(m)} z\right], \quad M_{4,s+2}^{(m)} = f^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{2z}^{(m)} z\right], \\ M_{4,s+4}^{(m)} &= (-1)^s 2\mu^{(m)} k_{21}^x \kappa_{3z}^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} ik_{3z}^{(m)} z\right], \end{aligned}$$

$$M_{5s}^{(m)} = \beta_1^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} i \kappa_{1z}^{(m)} z\right], \quad M_{5,s+2}^{(m)} = \beta_2^{(m)} \exp\left[(-1)^{s+1} i \kappa_{2z}^{(m)} z\right],$$

$$M_{5,s+4}^{(m)} = M_{6,s+4}^{(m)} = 0,$$

$$M_{6s}^{(m)} = (-1)^{s+1} i \kappa_{1z}^{(m)} \lambda_T^{(m)} M_{5s}^{(m)}, \quad M_{6,s+2}^{(m)} = (-1)^{s+1} i \kappa_{2z}^{(m)} \lambda_T^{(m)} M_{5,s+2}^{(m)}, \quad s = 1, 2,$$

где

$$f^{(m)} = 2\mu^{(m)} \left(k_{21}^x\right)^2 - \left(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}\right) k_l^{(m)2},$$

$$\beta_r^{(m)} = \frac{\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}}{\beta^{(m)}} \left(k_l^{(m)2} - \kappa_r^{(m)2}\right), \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad r = 1, 2.$$

Рассмотрим произвольный m -й слой ($m = 1, 2, \dots, N$). На границах этого слоя $z = -H_{m-1}$ и $z = -H_m$ из равенств (2.5.43) получаем соотношения

$$\mathbf{S}^{(m)}(-H_{m-1}) = M^{(m)}(-H_{m-1}) \mathbf{K}^{(m)},$$

$$\mathbf{S}^{(m)}(-H_m) = M^{(m)}(-H_m) \mathbf{K}^{(m)}.$$

Так как внутри m -го слоя ($m = 1, 2, \dots, N$) вектор $\mathbf{K}^{(m)}$ не меняется, то имеем

$$\mathbf{S}^{(m)}(-H_m) = M^{(m)}(-H_m) \left[M^{(m)}(-H_{m-1}) \right]^{-1} \mathbf{S}^{(m)}(-H_{m-1}). \quad (2.5.44)$$

Подставляя выражения (2.5.42) в граничные условия (2.5.39), при $z = -H_{\alpha-1}$ находим

$$\mathbf{S}^{(\alpha)}(-H_{\alpha-1}) = \mathbf{S}^{(\alpha-1)}(-H_{\alpha-1}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, N.$$

Тогда соотношение (2.5.44) записывается в виде

$$\mathbf{S}^{(\alpha)}(-H_{\alpha}) = P^{(\alpha)} \mathbf{S}^{(\alpha-1)}(-H_{\alpha-1}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, N, \quad \mathbf{S}^{(1)}(-H_1) = P^{(1)} \mathbf{S}^{(1)}(0), \quad (2.5.45)$$

где $P^{(\alpha)} = M^{(\alpha)}(-H_{\alpha}) \left[M^{(\alpha)}(-H_{\alpha-1}) \right]^{-1}$.

Используя формулы (2.5.45) для каждого слоя, получаем соотношение

$$\mathbf{S}^{(N)}(-H_N) = P \mathbf{S}^{(1)}(0), \quad P = P^{(N)} P^{(N-1)} \dots P^{(1)}, \quad (2.5.46)$$

из которого следует

$$s_l^{(N)}(-H_N) = \sum_{k=1}^6 p_{lk} s_k^{(1)}(0), \quad l = 2, 3, \dots, 6 \quad (2.5.47)$$

(p_{lk} – элементы матрицы P).

Равенство первых компонентов векторов в левой и правой частях равенства (2.5.46) не учитывается, так как на границе раздела термоупругой среды и жидкости условие непрерывности тангенциальной компоненты вектора смещения не выполняется.

Подставляя выражения (2.5.42) в граничные условия (2.5.38), находим

$$\begin{aligned} s_2^{(1)}(0) &= -\omega^{-1}(k_{11}^z W_1 + k_{12}^z W_2), \quad s_3^{(1)}(0) = 0, \quad s_4^{(1)}(0) = -i\omega \rho_1 (W_1 + W_2), \\ s_5^{(1)}(0) &= \zeta_{11} W_1 + \zeta_{12} W_2, \quad s_6^{(1)}(0) = ik_{11}^z \lambda_1^T \zeta_{11} W_1 + ik_{12}^z \lambda_1^T \zeta_{12} W_2, \\ s_2^{(N)}(-H_N) &= -\omega^{-1}(k_{21}^z A_i - k_{21}^z V_1 - k_{22}^z V_2), \quad s_3^{(N)}(-H_N) = 0, \\ s_4^{(N)}(-H_N) &= -i\omega \rho_2 (A_i + V_1 + V_2), \quad s_5^{(N)}(-H_N) = \zeta_{21} A_i + \zeta_{21} V_1 + \zeta_{22} V_2, \\ s_6^{(N)}(-H_N) &= ik_{21}^z \lambda_2^T \zeta_{21} A_i - ik_{21}^z \lambda_2^T \zeta_{21} V_1 - ik_{22}^z \lambda_2^T \zeta_{22} V_2, \end{aligned} \quad (2.5.48)$$

где

$$\zeta_{rs} = \frac{i}{\alpha_r^T} \left(\frac{\omega \gamma_r}{c_r^2} - \frac{k_{rs}^2}{\omega} \right), \quad r = 1, 2, \quad s = 1, 2.$$

Подставляя выражения (2.5.48) в равенства (2.5.47), получаем систему пяти линейных алгебраических уравнений с неизвестными $V_1, V_2, W_1, W_2, s_1^{(1)}(0)$. Определив эти коэффициенты, можно аналитически описать волновые поля в верхнем и нижнем полупространствах, а также в термоупругих слоях.

Решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на однородной термоупругой плоской пластине с дискретно-слоистым термоупругим покрытием является следствием полученного выше решения, поскольку показанную на рис. 2.5.8 многослойную систему можно рассматривать как однородную термоупругую пластину толщиной h_1 с дискретно-слоистым покрытием, имеющим толщину $h = H_N - h_1$ и состоящим из $N_1 = N - 1$ ($N \geq 2$) термоупругих слоев.

Результаты расчетов. На основе полученного решения задачи проведены два вычислительных эксперимента. В первом из них показана возможность математического моделирования непрерывно-слоистого термоупругого слоя толщиной H_N системой плоских слоев из однородных термоупругих материалов. Во втором – непрерывно-слоистое термоупругое покрытие толщиной h , которым оснащена однородная термоупругая пластина толщиной h_1 , моделируется дискретно-слоистым покрытием.

В первом вычислительном эксперименте проведены расчеты коэффициента прозрачности по интенсивности \bar{I}

$$\bar{I}(\varpi, \theta) = \frac{\rho_1 c_2}{\rho_2 c_1} \left| \frac{W_1(\varpi, \theta)}{A_i} \right|^2$$

($\varpi = |k_{21}| H_N$ – волновой размер плоского слоя) для термоупругих слоев из полимерного материала, имеющих толщину $H_N = 0.005$ м и находящихся в воде. Амплитуда падающей волны полагалась равной единице.

Вычислительный эксперимент проводился как для слоя из непрерывно-слоистого материала, так и для слоя из дискретно-слоистого материала. В случае непрерывно-слоистого материала расчеты выполнялись с помощью решения дифракционной задачи, полученного в п. 2.1. При этом неоднородность материала задавалась зависимостями

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \tilde{\rho} f_1(z), \quad \lambda(z) = \tilde{\lambda} f_2(z), \quad \mu(z) = \tilde{\mu} f_3(z), \\ \alpha_T(z) &= \tilde{\alpha}_T f_4(z), \quad \lambda_T(z) = \tilde{\lambda}_T f_5(z), \quad c_\varepsilon(z) = \tilde{c}_\varepsilon f_6(z), \quad -H_N \leq z \leq 0, \end{aligned}$$

где

$$f_k(z) = A_k z^2 + B_k z + C_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

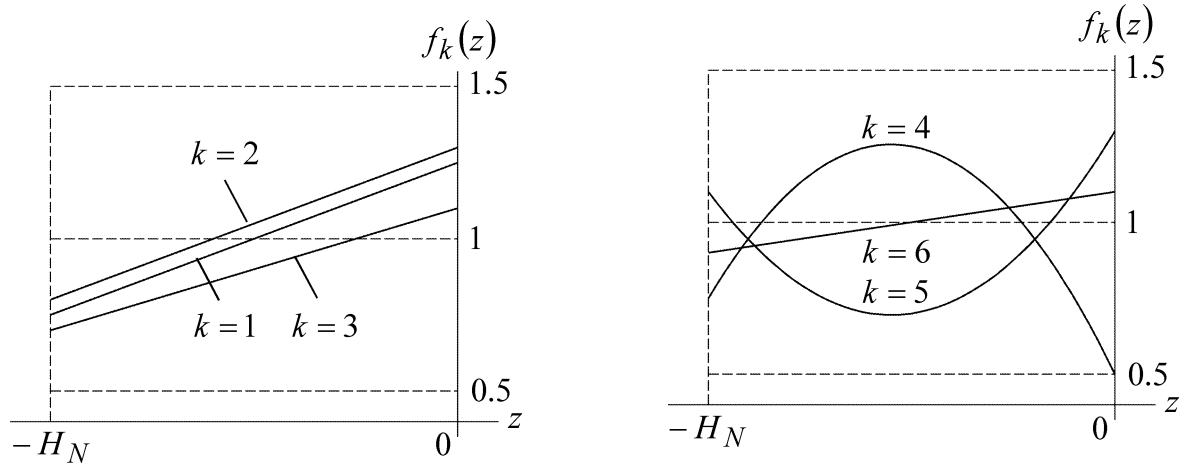
Здесь

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_6 = 0, \quad A_4 = -\frac{2.5}{H_N^2}, \quad A_5 = \frac{2}{H_N^2},$$

$$B_1 = B_2 = \frac{0.5}{H_N}, \quad B_3 = \frac{0.4}{H_N}, \quad B_4 = -\frac{2.75}{H_N}, \quad B_5 = \frac{2.2}{H_N}, \quad B_6 = \frac{0.2}{H_N},$$

$$C_1 = 1.25, \quad C_2 = 1.3, \quad C_3 = C_6 = 1.1, \quad C_4 = 0.5, \quad C_5 = 1.3.$$

Ниже на рисунках показаны графики функций $f_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots, 6$).



В случае многослойного материала коэффициент прозрачности был рассчитан для одинаковых по толщине однородных термоупругих слоев для $N = 2, 4, 10$. При этом распределения физико-механических характеристик по толщине дискретно-слоистого материала слоя определялись на основе кусочно-постоянной аппроксимации функций $f_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots, 6$) на интервале $[-H_N, 0]$:

$$\psi^{(1)} = \psi\left(-\frac{H_1}{2}\right), \quad -H_1 \leq z \leq 0,$$

$$\psi^{(\alpha)} = \psi\left(-\frac{H_{\alpha-1} + H_\alpha}{2}\right), \quad -H_\alpha \leq z < -H_{\alpha-1}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, N.$$

Здесь и далее $\psi = \rho, \lambda, \mu, \alpha_T, \lambda_T, c_\varepsilon$.

На рис. 2.5.9 представлены зависимости коэффициента прозрачности \bar{I} от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ при значении волнового числа слоя $\varpi = 8.5$ и от волнового числа, изменяющегося в интервале $0 < \varpi \leq 45$, при падении волны по нормали к поверхности слоя. На рис. 2.5.9,а видно, что линии 1 и 4 практически совпадают. Из рис. 2.5.9 следует, что с увеличением количества однородных слоев в многослойной теле кривые зависимостей коэффициента прозрачности от угла падения волны и от волнового чис-

ла для непрерывно- и дискретно-слоистого материалов сближаются. Это указывает на возможность моделирования непрерывно-слоистого термоупругого плоского слоя системой, состоящей из однородных термоупругих плоских слоев.

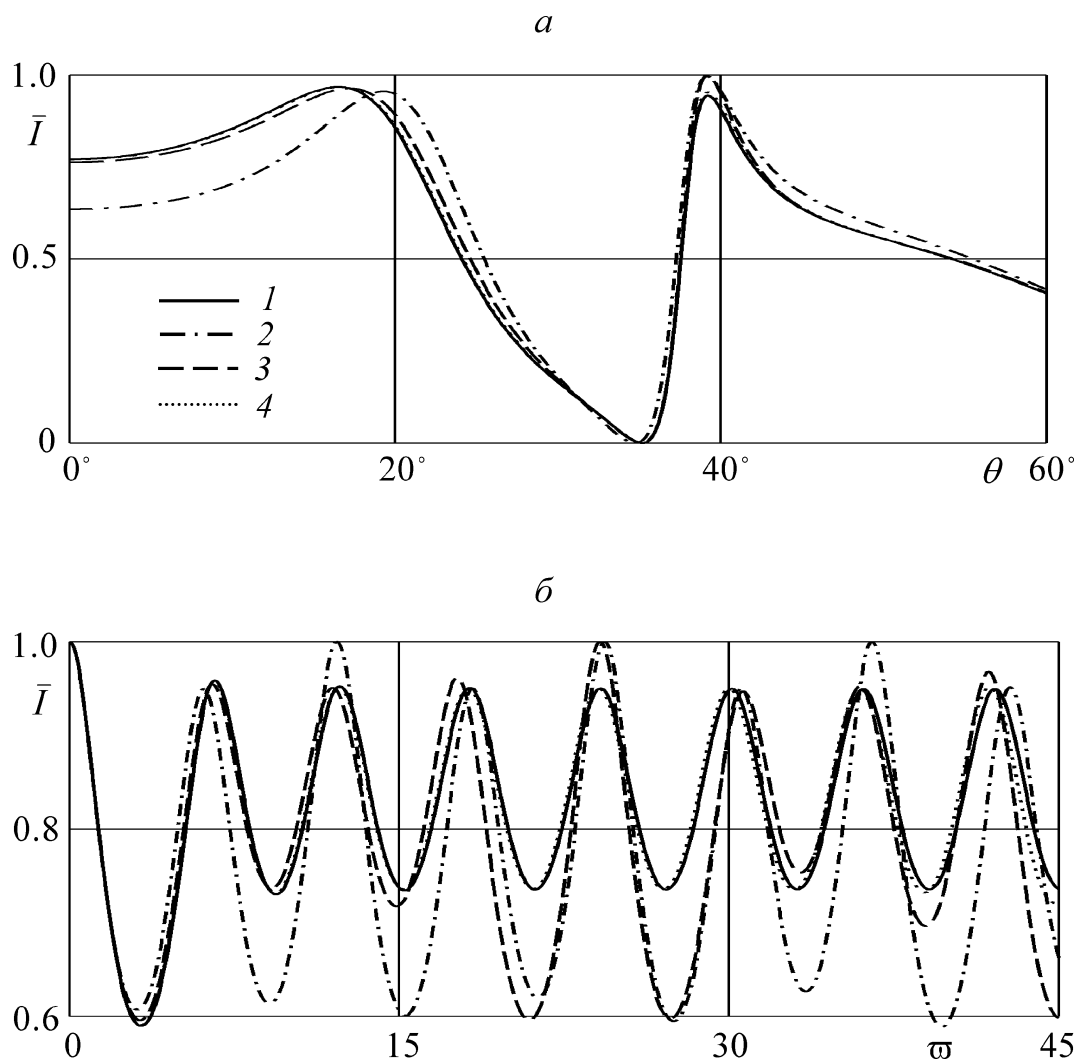


Рис. 2.5.9. Зависимость коэффициента прозрачности от угла падения звуковой волны (а) и волнового числа (б) для различных материалов пластины: 1 — непрерывно-слоистый термоупругий материал, 2–4 — дискретно-слоистый материал с однородными термоупругими слоями (2 — $N = 2$, 3 — $N = 4$, 4 — $N = 10$)

Во втором вычислительном эксперименте, в случае падения звуковой волны с единичной амплитудой, рассчитана интенсивность звукоотражения $I(\varpi, \theta)$ для находящейся в воде термоупругой алюминиевой пластины толщи-

ной $h_1 = 0.05$ м с дискретно-слоистым покрытием из полимерного материала, имеющим толщину $h = 0.005$ м и состоящим из $N_1 = 2, 3, 4, 6$ одинаковых по толщине однородных термоупругих слоев. Материальные константы этих слоев определялись с помощью кусочно-постоянной аппроксимации на отрезке $[-(h_1 + h), -h_1]$ функций $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\alpha_T(z)$, $\lambda_T(z)$, $c_\varepsilon(z)$ – физико-механических характеристик непрерывно-слоистого покрытия из материала на основе поливинилбутираля:

$$\psi^{(\alpha)} = \psi\left(-\frac{H_{\alpha-1} + H_\alpha}{2}\right), \quad -H_\alpha \leq z < -H_{\alpha-1}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, N_1 + 1$$

При этом рассматривались четыре вида непрерывной неоднородности покрытия, описанные в п. 2.5.1. Заметим, что индекс $\alpha = 1$ соответствует физико-механическим характеристикам алюминия.

На рис. 2.5.10 представлены графики зависимости интенсивности звукоотражения I от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ при значении волнового размера пластины $\varpi = 8.5$ ($\varpi = |k_{21}|h_1$). На рис. 2.5.11 изображены графики зависимости величины I от волнового размера пластины, изменяющегося в интервале $25 \leq \varpi \leq 45$, при падении звуковой волны по нормали к поверхности покрытия. Рис. 2.5.10 соответствует непрерывно-слоистому покрытию с неоднородностью третьего вида, а рис. 2.5.11 – непрерывно-слоистому покрытию с неоднородностью четвертого вида. На этих рисунках линии I это те же линии 2 на рис. 2.5.4, 2.5.7 (см. п. 2.5.1). Расчеты показали, что в интервале $0 < \varpi < 25$ кривые 1, 2, 3, 4, указанные на рис. 2.5.11, практически неразличимы.

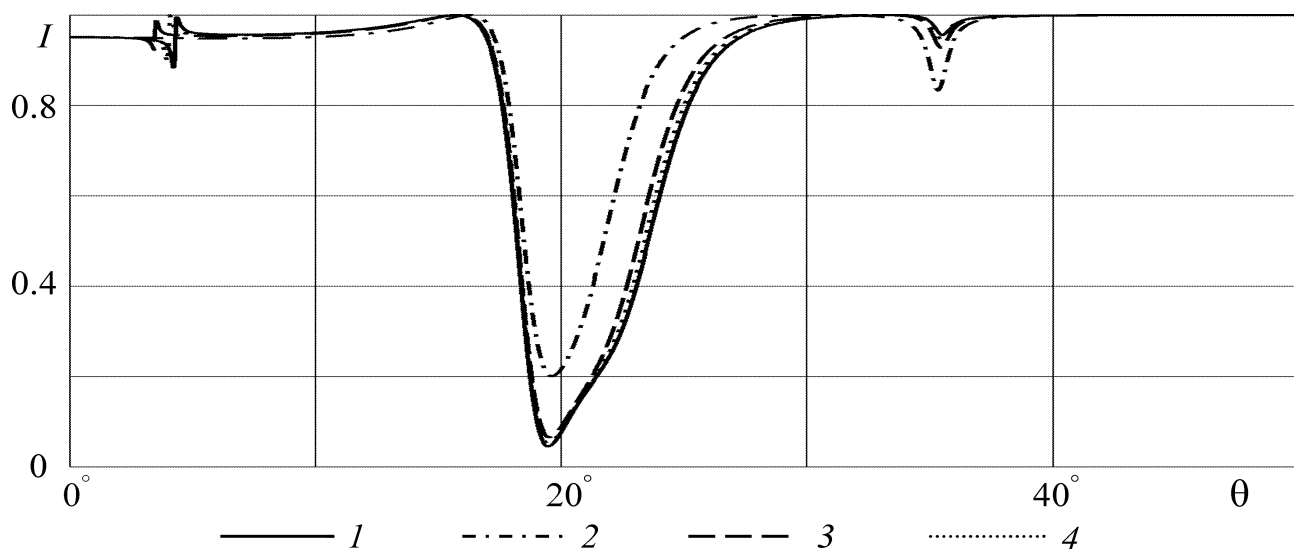


Рис. 2.5.10. Зависимость интенсивности звукоотражения от угла падения звуковой волны для термоупругой пластины с различными покрытиями:
 I — непрерывно-слоистое термоупругое покрытие, 2–4 — дискретно-слоистое покрытие из однородных термоупругих слоев (2 — $N_1 = 2$, 3 — $N_1 = 4$, 4 — $N_1 = 6$)

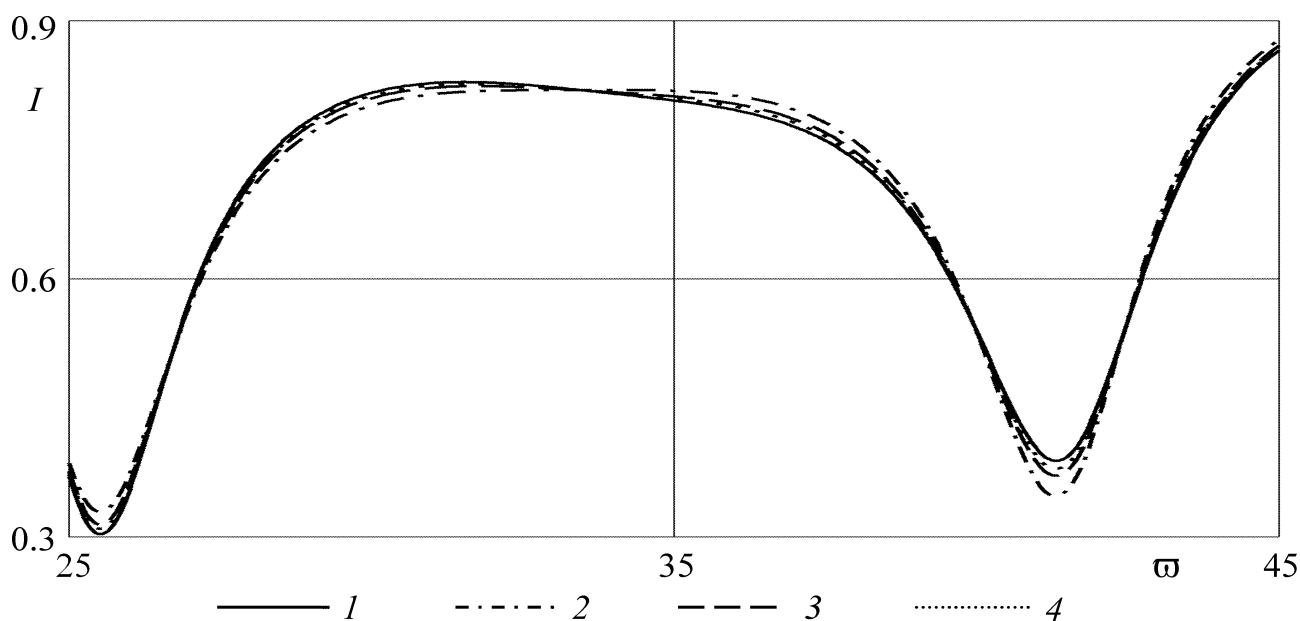


Рис. 2.5.11. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера пластины для термоупругой пластины с различными покрытиями:
 I — непрерывно-слоистое термоупругое покрытие, 2–4 — дискретно-слоистое покрытие из однородных термоупругих слоев (2 — $N_1 = 2$, 3 — $N_1 = 3$, 4 — $N_1 = 4$)

Из рис. 2.5.10, 2.5.11 следует, что с увеличением количества однородных слоев в дискретно-слоистом покрытии кривые зависимостей интенсивности звукоотражения от угла падения волны и от волнового размера пластины для

пластины с непрерывно- и дискретно-слоистым покрытиями сближаются. Это свидетельствует о возможности моделирования непрерывно-слоистого термоупругого покрытия пластины покрытием, состоящим из однородных термоупругих плоских слоев.

Расчеты показали, что аналогичные выводы можно сделать и при моделировании дискретно-слоистыми покрытиями непрерывно-слоистых покрытий пластины, имеющих неоднородности первого и второго видов.

2.6. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с неоднородным покрытием

В данном разделе решены задачи о дифракции звука на однородном термоупругом цилиндре с покрытием. Рассмотрены случаи непрерывно-слоистого и дискретно-слоистого термоупругих покрытий.

2.6.1. Случай непрерывно-слоистого покрытия

Постановка задачи. Рассмотрим однородный изотропный термоупругий бесконечный цилиндр радиусом r_0 , имеющий покрытие в виде неоднородного изотропного термоупругого цилиндрического слоя с внешним радиусом r_1 (рис. 2.6.1). Материал цилиндра имеет плотность ρ^0 , упругие постоянные Ламе λ^0 , μ^0 , температурный коэффициент линейного расширения α_T^0 , коэффициент теплопроводности λ_T^0 , объемную теплоемкость c_ε^0 . Модули упругости $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T = \alpha_T(r)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda_T = \lambda_T(r)$ материала покрытия являются дифференцируемыми функциями координаты r цилиндрической системы координат (r, φ, z) , ось z которой совпадает с осью вращения цилиндра. Плотность материала покрытия $\rho = \rho(r)$ и его удельная теплоемкость $c_\varepsilon = c_\varepsilon(r)$ являются непрерывными функциями координаты r . Источники тепла в цилиндрическом теле отсутствуют.

Окружающая цилиндр с покрытием жидкость является теплопроводной и имеет равновесную плотность ρ_0 , скорость звука c , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ , коэффициент температурного расширения α^T , теплопроводность λ^T , температуропроводность χ^T . Считаем, что в невозмущенном состоянии тело и жидкость имеют одну и ту же постоянную температуру T_0 .

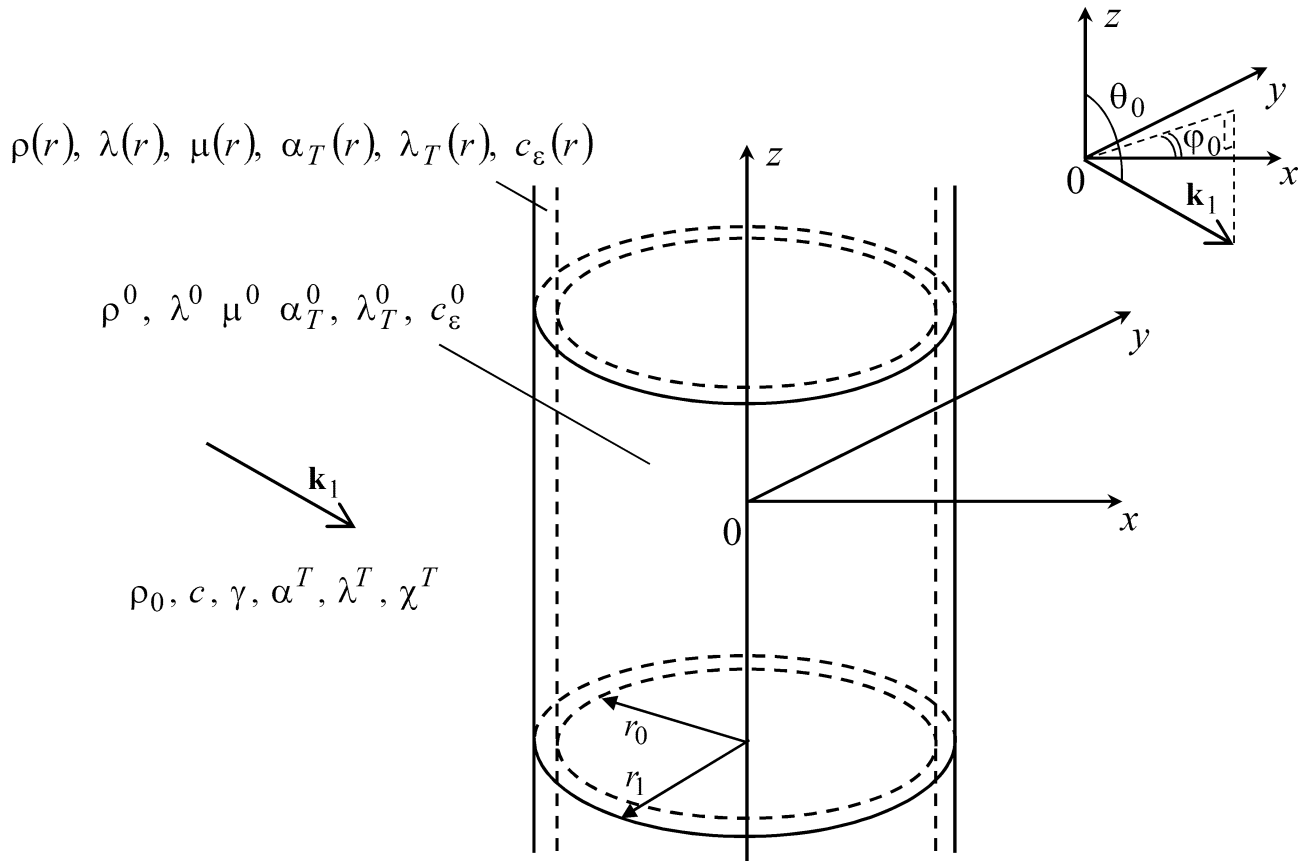


Рис. 2.6.1. Схема задачи

Пусть из жидкости на цилиндр с покрытием наклонно падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_i = A_i \exp[i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)], \quad (2.6.1)$$

где A_i – амплитуда волны; \mathbf{k}_1 – волновой вектор; \mathbf{r} – радиус-вектор; ω – круговая частота. Опуская далее временной множитель $\exp(-i\omega t)$, запишем выражение (2.6.1) в цилиндрической системе координат. Получим

$$\Psi_i(r, \varphi, z) = A_i \exp[ik_1(r \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + z \cos \theta_0)],$$

где k_1 – волновое число звуковых волн в жидкости, которое определяется из выражения (1.2.14); θ_0 и φ_0 – полярный и азимутальный углы падения волны.

При падении на рассматриваемое термоупругое тело звуковой волны, распространяющейся в теплопроводной жидкости, в последней возникают рассеянная телом звуковая и возбужденная тепловая волны, само тело деформируется, его температура изменяется.

Определим волновые поля в жидкости и термоупругом теле.

Уравнения волновых полей. Потенциал скоростей падающей волны может быть представлен в виде [49]

$$\Psi_i(r, \varphi, z) = e^{ik_{1z}z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n J_n(k_{1r}r) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad (2.6.2)$$

где

$$k_{1r} = k_1 \sin \theta_0, \quad k_{1z} = k_1 \cos \theta_0, \quad \alpha_n = A_i i^n,$$

k_{1r} , k_{1z} – проекции волнового вектора \mathbf{k}_1 на координатные оси r и z соответственно; $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n .

Представим вектор скорости частиц жидкости в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad}(\Psi_i + \Psi_1 + \Psi_2),$$

где потенциал рассеянной звуковой волны Ψ_1 и потенциал возбужденной тепловой волны Ψ_2 являются решениями уравнений Гельмгольца (1.2.17) в цилиндрической системе координат. Учитывая условия излучения на бесконечности (1.2.38), отвечающие уходящим от тела волнам, решения этих уравнений будем искать в виде

$$\Psi_q(r, \varphi, z) = e^{ik_{qz}z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{qn} H_n(k_{qr}r) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad q = 1, 2, \quad (2.6.3)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; k_{2r} , k_{2z} – проекции волнового вектора тепловых волн в жидкости \mathbf{k}_2 на координатные оси r и z .

натные оси, причем $k_{2r}^2 + k_{2z}^2 = k_2^2$; k_2 – волновое число тепловых волн в жидкости, которое определяется из (1.2.14). Согласно закону Снеллиуса $k_{2z} = k_{1z}$.

Волновые поля в однородном термоупругом цилиндре будем описывать уравнениями линейной связанной динамической задачи термоупругости (1.2.22), (1.2.23). Запишем вектор смещения частиц в однородном цилиндре через потенциалы продольных термоупругих волн Φ_1 , Φ_2 и поперечных упругих волн Φ_3 в виде (2.5.5). Эти потенциальные функции являются решениями уравнений Гельмгольца (2.5.6) в цилиндрической системе координат. Подстановкой [110]

$$\Phi_3 = \text{rot}(\Phi_{31}\mathbf{e}_z) + \kappa_3\Phi_{32}\mathbf{e}_z$$

(\mathbf{e}_z – орт оси z) векторное уравнение Гельмгольца приводится к двум скалярным уравнениям Гельмгольца для каждой из функций Φ_{31} , Φ_{32} .

С учетом условия ограниченности функции Φ_1 , Φ_2 , Φ_{31} , Φ_{32} будем искать в виде

$$\Phi_q(r, \varphi, z) = e^{i\kappa_{qz}z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{qn} J_n(\kappa_{qr}r) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad (2.6.4)$$

$$\Phi_{3q}(r, \varphi, z) = e^{i\kappa_{3z}z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{2+q,n} J_n(\kappa_{3r}r) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad q = 1, 2,$$

где κ_{qr} , κ_{qz} ($q = 1, 2$), κ_{3r} , κ_{3z} – проекции волновых векторов продольных термоупругих волн \mathbf{k}_q и поперечных упругих волн \mathbf{k}_3 на координатные оси, причем $\kappa_{jr}^2 + \kappa_{jz}^2 = \kappa_j^2$ ($j = 1, 2, 3$); κ_1 , κ_2 – волновые числа термоупругих волн, определяемые из выражений (2.5.7). Согласно закону Снеллиуса $\kappa_{1z} = \kappa_{2z} = \kappa_{3z} = k_{1z}$.

Волновые поля в покрытии будем описывать системой уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела (1.2.39) – (1.2.42), записанных в цилиндрической системе координат

($q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$). Эта система уравнений включает уравнения движения сплошной среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\rho \omega^2 u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\rho \omega^2 u_\varphi, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\rho \omega^2 u_z \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

и уравнение притока тепла

$$\lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\lambda'_T + \frac{\lambda_T}{r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda_T}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + i\omega T_0 \beta \operatorname{div} \mathbf{u} = -i\omega c_\varepsilon T \quad (2.6.6)$$

(здесь и далее штрих означает дифференцирование по аргументу), где компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} , ... связаны с компонентами u_r , u_φ , u_z вектора смещения \mathbf{u} и изменением температуры T в покрытии соотношениями Дюгамеля—Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right], \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T, \\ \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \quad \sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Используя соотношения (2.6.7), запишем систему уравнений (2.6.5), (2.6.6)

в виде

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} -$$

$$\begin{aligned}
& -\beta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \rho\omega^2 \right) u_r + \\
& + \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 3\mu}{r^2} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \lambda' \frac{\partial u_z}{\partial z} - \beta' T = 0,
\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \left(\frac{\mu'}{r} + \frac{\lambda + 3\mu}{r^2} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \\
& + \mu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \left(-\frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \rho\omega^2 \right) u_\varphi + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \varphi} - \frac{\beta}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial r} + \left(\mu' + \frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \\
& + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \rho\omega^2 u_z - \beta \frac{\partial T}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + i\omega T_0 \beta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(\lambda'_T + \frac{\lambda_T}{r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + i\omega T_0 \frac{\beta}{r} u_r + i\omega T_0 \frac{\beta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \\
& + i\omega T_0 \beta \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda_T}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + i\omega c_\varepsilon T = 0.
\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

Так как неоднородность материала покрытия проявляется лишь в радиальном направлении, то зависимость функций $u_r(r, \varphi, z)$, $u_\varphi(r, \varphi, z)$, $u_z(r, \varphi, z)$, $T(r, \varphi, z)$ от координаты z , согласно закону Снеллиуса, имеет вид $\exp(ik_{1z}z)$. Кроме того, эти функции являются периодическими по углу φ с периодом 2π . Поэтому их будем искать в виде следующих рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
& (u_r(r, \varphi, z), u_\varphi(r, \varphi, z), u_z(r, \varphi, z), T(r, \varphi, z)) = \\
& = e^{ik_{1z}z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (U_{1n}(r), U_{2n}(r), U_{3n}(r), U_{4n}(r)) e^{in(\varphi - \varphi_0)},
\end{aligned} \tag{2.6.12}$$

где $U_{\tau n}(r)$ ($\tau = 1, 2, 3, 4$) – неизвестные распределения компонент вектора смещения и изменения температуры по толщине покрытия.

Подставляя выражения (2.6.12) в систему уравнений (2.6.8) – (2.6.11), и используя условие ортогональности функций $\exp[in(\varphi - \varphi_0)]$, получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{\tau n}(r)$ ($\tau = 1, 2, 3, 4$) для каждого значения $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$A_n \mathbf{U}_n'' + B_n \mathbf{U}_n' + C_n \mathbf{U}_n = 0, \quad \mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n}, U_{3n}, U_{4n})^T, \quad (2.6.13)$$

где

$$A_n = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}\}, \quad B_n = (b_{\tau s})_{4 \times 4}, \quad C_n = (c_{\tau s})_{4 \times 4}.$$

Здесь

$$a_{11} = \lambda + 2\mu, \quad a_{22} = a_{33} = \mu, \quad a_{44} = \lambda_T,$$

$$b_{11} = \lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r}, \quad b_{12} = b_{21} = in \frac{\lambda + \mu}{r},$$

$$b_{13} = b_{31} = ik_{1z}(\lambda + \mu), \quad b_{14} = -\beta,$$

$$b_{22} = b_{33} = \mu' + \frac{\mu}{r}, \quad b_{23} = b_{24} = b_{32} = b_{34} = b_{42} = b_{43} = 0,$$

$$b_{41} = i\omega T_0 \beta, \quad b_{44} = \lambda'_T + \frac{\lambda_T}{r},$$

$$c_{11} = -n^2 \frac{\mu}{r^2} - k_{1z}^2 \mu + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \rho\omega^2,$$

$$c_{12} = in \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 3\mu}{r^2} \right), \quad c_{13} = ik_{1z} \lambda', \quad c_{14} = -\beta',$$

$$c_{21} = in \left(\frac{\mu'}{r} + \frac{\lambda + 3\mu}{r^2} \right), \quad c_{22} = -n^2 \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} - k_{1z}^2 \mu - \frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \rho\omega^2,$$

$$c_{23} = c_{32} = -nk_{1z} \frac{\lambda + \mu}{r}, \quad c_{24} = -in \frac{\beta}{r},$$

$$c_{31} = ik_{1z} \left(\mu' + \frac{\lambda + \mu}{r} \right), \quad c_{33} = -n^2 \frac{\mu}{r^2} - k_{1z}^2 (\lambda + 2\mu) + \rho\omega^2, \quad c_{34} = -ik_{1z} \beta,$$

$$c_{41} = i\omega T_0 \frac{\beta}{r}, \quad c_{42} = -n\omega T_0 \frac{\beta}{r},$$

$$c_{43} = -k_{1z} \omega T_0 \beta, \quad c_{44} = -n^2 \frac{\lambda_T}{r^2} - k_{1z}^2 \lambda_T + i \omega c_\varepsilon.$$

Индекс n , которым должны быть снабжены элементы матриц, здесь и в дальнейшем для простоты записи опускаем.

Граничные условия на внешней поверхности покрытия включают равенство нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, отсутствие касательных напряжений, равенство нормального напряжения и акустического давления, непрерывность акустической температуры и теплового потока:

$$r = r_1: -i \omega u_r = \mathfrak{S}_r, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad T = \Theta, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda^T \frac{\partial \Theta}{\partial r}. \quad (2.6.14)$$

На внутренней поверхности покрытия должны быть непрерывны компоненты вектора смещения частиц взаимодействующих однородной и неоднородной термоупругих сред, нормальные и касательные напряжения, температура и тепловой поток:

$$r = r_0: u_r = u_r^0, \quad u_\varphi = u_\varphi^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^0, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^0, \\ T = T^0, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_T^0 \frac{\partial T^0}{\partial r}. \quad (2.6.15)$$

Нормальная компонента скорости частиц жидкости \mathfrak{S}_r , акустическое давление p и акустическая температура Θ определяются из выражений

$$\mathfrak{S}_r = \frac{\partial}{\partial r} (\Psi_i + \Psi_1 + \Psi_2), \quad p = i \omega \rho_0 (\Psi_i + \Psi_1 + \Psi_2), \\ \Theta = \frac{i}{\alpha^T} \left[\frac{\omega \gamma}{c^2} (\Psi_i + \Psi_1 + \Psi_2) + \frac{1}{\omega} \Delta (\Psi_i + \Psi_1 + \Psi_2) \right]. \quad (2.6.16)$$

Для однородного цилиндра составляющие вектора смещения u_r^0 , u_φ^0 , u_z^0 записываются в виде

$$u_r^0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial r \partial z} + \frac{\kappa_3}{r} \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial \varphi},$$

$$u_{\varphi}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial \varphi \partial z} - \kappa_3 \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial r},$$

$$u_z^0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial z^2} + \kappa_3^2 \Phi_{31},$$

изменение температуры T^0 определяется из выражения (2.5.19), а компоненты тензора напряжений σ_{rr}^0 , $\sigma_{r\varphi}^0$, σ_{rz}^0 связаны с величинами u_r^0 , u_{φ}^0 , u_z^0 , T^0 соотношениями Дюгамеля — Неймана (2.6.7), в которых функции λ , μ , α_T следует заменить постоянными λ^0 , μ^0 , α_T^0 соответственно. Используя приведенные выше формулы, выразим величины σ_{rr}^0 , $\sigma_{r\varphi}^0$, σ_{rz}^0 через функции Φ_1 , Φ_2 , Φ_{31} , Φ_{32} . Получим

$$\sigma_{rr}^0 = \sum_{q=1}^2 \left(2\mu^0 \frac{\partial^2 \Phi_q}{\partial r^2} + \eta_q \Phi_q \right) + 2\mu^0 \frac{\partial^3 \Phi_{31}}{\partial r^2 \partial z} + \frac{2\mu^0 \kappa_3}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi_{32}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_{32} \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi}^0 = & \frac{2\mu^0}{r} \sum_{q=1}^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi_q}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_q \right) + \frac{2\mu^0}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} \left(\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_{31} \right) - \\ & - \mu^0 \kappa_3 \left(\frac{\partial^2 \Phi_{32}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{32}}{\partial \varphi^2} \right), \end{aligned}$$

$$\sigma_{rz}^0 = 2\mu^0 \sum_{q=1}^2 \frac{\partial^2 \Phi_q}{\partial r \partial z} + \mu^0 \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial z^2} + \kappa_3^2 \Phi_{31} \right) + \frac{\mu^0 \kappa_3}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{32}}{\partial \varphi \partial z},$$

где $\eta_q = 2\mu^0 \kappa_q^2 - (\lambda^0 + 2\mu^0) \kappa_l^2$, $q = 1, 2$.

Рассмотрим граничные условия (2.6.14). Из условия равенства нормальных скоростей частиц взаимодействующих сред и условия непрерывности акустической температуры получаем выражения для коэффициентов V_{1n} , V_{2n} :

$$r = r_1 : \mathbf{V}_n = (D_n^{-1} E_n) \mathbf{U}_n - D_n^{-1} \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{V}_n = (V_{1n}, V_{2n})^T, \quad (2.6.17)$$

где

$$\mathbf{a}_n = (k_{1r}J'_n(k_{1r}r), \zeta_1 J_n(k_{1r}r))^T \alpha_n, \quad D_n = (d_{qm})_{2 \times 2}, \quad E_n = (e_{ms})_{2 \times 4},$$

$$d_{1m} = k_{mr}H'_n(k_{mr}r), \quad d_{2m} = \zeta_m H_n(k_{mr}r), \quad \zeta_m = \frac{i}{\alpha^T} \left(\frac{\omega \gamma}{c^2} - \frac{k_m^2}{\omega} \right), \quad m=1,2,$$

$$e_{11} = -i\omega, \quad e_{12} = e_{13} = e_{14} = e_{21} = e_{22} = e_{23} = 0, \quad e_{24} = 1.$$

Из оставшихся четырех граничных условий (2.6.14) находим

$$r = r_1 : A_n \mathbf{U}'_n + F_n \mathbf{U}_n = G_n \mathbf{V}_n + \mathbf{b}_n, \quad (2.6.18)$$

где

$$\mathbf{b}_n = \left(-i\omega \rho_0 J_n(k_{1r}r), 0, 0, \lambda^T \zeta_1 k_{1r} J'_n(k_{1r}r) \right)^T \alpha_n,$$

$$F_n = (f_{\tau s})_{4 \times 4}, \quad G_n = (g_{\tau m})_{4 \times 2},$$

$$f_{11} = \frac{\lambda}{r}, \quad f_{12} = in \frac{\lambda}{r}, \quad f_{13} = ik_{1z} \lambda, \quad f_{14} = -\beta, \quad f_{21} = in \frac{\mu}{r}, \quad f_{22} = -\frac{\mu}{r},$$

$$f_{23} = f_{24} = f_{32} = f_{33} = f_{34} = f_{41} = f_{42} = f_{43} = f_{44} = 0, \quad f_{31} = ik_{1z} \mu,$$

$$g_{1m} = -i\omega \rho_0 H_n(k_{mr}r), \quad g_{2m} = g_{3m} = 0, \quad g_{4m} = \lambda^T \zeta_m k_{mr} H'_n(k_{mr}r), \quad m=1,2.$$

После подстановки выражения (2.6.17) в формулу (2.6.18) получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.6.13) на внешней поверхности покрытия

$$r = r_1 : A_n \mathbf{U}'_n + L_n^{(1)} \mathbf{U}_n = \mathbf{c}_n, \quad (2.6.19)$$

$$\text{где } L_n^{(1)} = F_n - G_n (D_n^{-1} E_n), \quad \mathbf{c}_n = \mathbf{b}_n - (G_n D_n^{-1}) \mathbf{a}_n.$$

Теперь рассмотрим граничные условия (2.6.15). Из условия непрерывности вектора смещения и условия непрерывности температуры получаем выражения для коэффициентов $W_{\tau n}$ ($\tau = 1, 2, 3, 4$)

$$r = r_0 : \mathbf{W}_n = T_n^{-1} \mathbf{U}_n, \quad \mathbf{W}_n = (W_{1n}, W_{2n}, W_{3n}, W_{4n})^T, \quad (2.6.20)$$

где

$$T_n = (t_{\tau s})_{4 \times 4},$$

$$t_{1m} = Z_{1m}, \quad t_{13} = ik_{1z} Z_{13}, \quad t_{14} = in \frac{\kappa_3}{r} Z_{03},$$

$$t_{2m} = in \frac{1}{r} Z_{0m}, \quad t_{23} = -nk_{1z} \frac{1}{r} Z_{03}, \quad t_{24} = -\kappa_3 Z_{13},$$

$$t_{3m} = ik_{1z} Z_{0m}, \quad t_{33} = (\kappa_3^2 - k_{1z}^2) Z_{03}, \quad t_{34} = t_{43} = t_{44} = 0, \quad t_{4m} = \beta_m Z_{0m},$$

$$\beta_m = \frac{\lambda^0 + 2\mu^0}{\beta^0} (k_l^2 - \kappa_m^2), \quad m=1,2,$$

$$Z_{0j} = J_n(\kappa_{jr}r), \quad Z_{1j} = \kappa_{jr} J'_n(\kappa_{jr}r), \quad j=1,2,3.$$

Из остальных четырех граничных условий (2.6.15) находим

$$r = r_0: A_n \mathbf{U}'_n + F_n \mathbf{U}_n = Y_n \mathbf{W}_n, \quad (2.6.21)$$

где

$$Y_n = (y_{\tau s})_{4 \times 4},$$

$$y_{1m} = 2\mu^0 Z_{2m} + \eta_m Z_{0m}, \quad y_{13} = 2i\mu^0 k_{1z} Z_{23}, \quad y_{14} = 2in\mu^0 \kappa_3 \frac{1}{r} \left(Z_{13} - \frac{1}{r} Z_{03} \right),$$

$$y_{2m} = 2in\mu^0 \frac{1}{r} \left(Z_{1m} - \frac{1}{r} Z_{0m} \right), \quad y_{23} = -2n\mu^0 k_{1z} \frac{1}{r} \left(Z_{13} - \frac{1}{r} Z_{03} \right),$$

$$y_{24} = -\mu^0 \kappa_3 \left(Z_{23} - \frac{1}{r} Z_{13} + \frac{n^2}{r^2} Z_{03} \right),$$

$$y_{3m} = 2i\mu^0 k_{1z} Z_{1m}, \quad y_{33} = \mu^0 (\kappa_3^2 - 2k_{1z}^2) Z_{13}, \quad y_{34} = -n\mu^0 k_{1z} \kappa_3 \frac{1}{r} Z_{03},$$

$$y_{4m} = \lambda_T^0 \beta_m Z_{1m}, \quad y_{43} = y_{44} = 0, \quad Z_{2j} = \kappa_{jr}^2 J''_n(\kappa_{jr}r), \quad m=1,2, \quad j=1,2,3.$$

После подстановки выражения (2.6.20) в формулу (2.6.21) получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.6.13) на внутренней поверхности покрытия

$$r = r_0: A_n \mathbf{U}'_n + L_n^{(0)} \mathbf{U}_n = 0, \quad (2.6.22)$$

$$\text{где } L_n^{(0)} = F_n - Y_n T_n^{-1}.$$

Из выражений (2.6.17), (2.6.20) следует, что коэффициенты V_{1n} , V_{2n} , W_{1n} , W_{2n} , W_{3n} , W_{4n} могут быть вычислены лишь после решения краевой задачи (2.6.13), (2.6.19), (2.6.22).

Решение краевой задачи методом сплайн-коллокации. Найдем решение краевой задачи (2.6.13), (2.6.19), (2.6.22) методом сплайн-коллокации. Введем на отрезке $[r_0, r_1]$ равномерную сетку $r_0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = r_1$ с шагом \hat{h} . Будем искать приближенное решение краевой задачи в виде кубических сплайнов $S_{\tau n}(r)$ ($\tau = 1, 2, 3, 4$) дефекта 1 с узлами на сетке. Здесь $S_{\tau n}(r)$ – сплайн-функция, приближающая функцию $U_{\tau n}(r)$.

Представим кубические сплайны в виде разложения по базису из нормализованных кубических B -сплайнов

$$S_{\tau n}(r) = \sum_{k=-1}^{N+1} b_{\tau n}^{(k)} B_k(r), \quad \tau = 1, 2, 3, 4, \quad (2.6.23)$$

где $b_{\tau n}^{(k)}$ – коэффициенты разложения, которые подлежат определению; $B_k(r)$ – базисная сплайн-функция, определенная на интервале-носителе (ξ_{k-2}, ξ_{k+2}) со средним узлом ξ_k (см. (2.5.31)).

Для того чтобы все базисные функции в (2.6.23) были определены, сетка должна быть дополнена узлами

$$\xi_{j-4} = \xi_0 + (j-4)\hat{h}, \quad \xi_{N+4-j} = \xi_N + (4-j)\hat{h}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Потребуем, чтобы сплайны $S_{\tau n}(r)$ удовлетворяли системе (2.6.13) и краевым условиям (2.6.19), (2.6.22) в узлах коллокации, совпадающих с узлами введенной сетки. Используя выражения для узловых значений B -сплайна и его производных (см. табл. 2.5.1), получим систему $4N + 12$ линейных алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных коэффициентов $b_{\tau n}^{(k)}$:

$$P_{0n}^{(0)} \mathbf{b}_{0n} = 0, \quad Q_{kn} \mathbf{b}_{kn} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad P_{Nn}^{(1)} \mathbf{b}_{Nn} = \mathbf{S}_{Nn}, \quad (2.6.24)$$

где

$$\mathbf{b}_{kn} = \left(b_{1n}^{(k-1)}, b_{2n}^{(k-1)}, b_{3n}^{(k-1)}, b_{4n}^{(k-1)}, b_{1n}^{(k)}, b_{2n}^{(k)}, b_{3n}^{(k)}, b_{4n}^{(k)}, b_{1n}^{(k+1)}, b_{2n}^{(k+1)}, b_{3n}^{(k+1)}, b_{4n}^{(k+1)} \right)^T$$

$$\mathbf{S}_{Nn} = 6\hat{h}^2 \mathbf{c}_n, \quad P_{0n}^{(0)} = \left(p_{\tau\alpha}^{(0)} \right)_{4 \times 12}, \quad Q_{kn} = \left(q_{\tau\alpha} \right)_{4 \times 12}, \quad P_{Nn}^{(1)} = \left(p_{\tau\alpha}^{(1)} \right)_{4 \times 12}.$$

Здесь

$$p_{\tau s}^{(\gamma)} = -3\hat{h}a_{\tau s} + \hat{h}^2 l_{\tau s}^{(\gamma)}, \quad p_{\tau, s+4}^{(\gamma)} = 4\hat{h}^2 l_{\tau s}^{(\gamma)},$$

$$p_{\tau, s+8}^{(\gamma)} = 3\hat{h}a_{\tau s} + \hat{h}^2 l_{\tau s}^{(\gamma)}, \quad \gamma = 0, 1,$$

$$q_{\tau s} = 6a_{\tau s} - 3\hat{h}b_{\tau s} + \hat{h}^2 c_{\tau s}, \quad q_{\tau, s+4} = -12a_{\tau s} + 4\hat{h}^2 c_{\tau s},$$

$$q_{\tau, s+8} = 6a_{\tau s} + 3\hat{h}b_{\tau s} + \hat{h}^2 c_{\tau s}, \quad \tau, s = 1, 2, 3, 4,$$

$l_{\tau s}^{(\gamma)}$ – элементы матриц $L_n^{(\gamma)}$, присутствующих в записи краевых условий (2.6.19), (2.6.22). Нижний индекс k ($k = 0, 1, \dots, N$) у каждой матрицы системы (2.6.24) указывает на то, что ее элементы, зависящие от r , вычисляются при $r = \xi_k$.

Решив систему уравнений (2.6.24), и подставив найденные значения в выражения (2.6.23), найдем приближенное решение краевой задачи.

Определив по выражениям (2.6.17), (2.6.20) коэффициенты в рядах (2.6.3), (2.6.4), получим возможность исследовать волновые поля в жидкости и цилиндрическом теле.

Результаты расчетов. Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическую формулу для цилиндрической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [49, 96] ($x \gg 1$)

$$H_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

из равенства (2.6.3) при $q = 1$ получаем

$$\Psi_1(r, \varphi, z) = A_i \sqrt{\frac{r_0}{2r}} \exp\left[i\left(k_{1r}r + k_{1z}z - \frac{\pi}{4}\right)\right] F(\varpi, \varphi).$$

Здесь

$$F(\varpi, \varphi) = \frac{2}{A_i \sqrt{\pi k_{1r} r_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n V_{1n} \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad (2.6.25)$$

где $\varpi = |k_1| r_0$ – волновой размер цилиндра без покрытия.

На основе полученного решения задачи проведены расчеты амплитуды рассеянной звуковой волны $|F(\varpi, \varphi)|$, для находящегося в воде алюминиевого цилиндра радиусом $r_0 = 1$ м с неоднородным покрытием толщиной 0.1 м из полимерного материала. При этом рассматривались четыре вида неоднородности покрытия, описываемые с помощью функций

$$f_k^s(r) = 1 + \frac{(-1)^s}{2} \left(\frac{r - r_0}{r_1 - r_0} \right)^k, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad k, s = 1, 2,$$

показанных на рисунке справа.

Первый ($s = 1$) и второй ($s = 2$) виды неоднородности характеризуются изменением плотности покрытия по линейному закону:

$$\rho(r) = \tilde{\rho} f_1^s(r), \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad s = 1, 2,$$

$$\lambda(r) = \tilde{\lambda}, \quad \mu(r) = \tilde{\mu}, \quad \alpha_T(r) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon.$$

Третий ($s = 1$) и четвертый ($s = 2$) виды неоднородности проявляются в изменении плотности покрытия по линейному закону, а модулей упругости покрытия – по квадратичным законам:

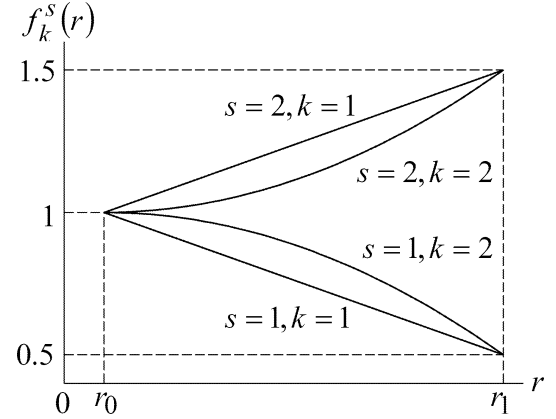
$$\rho(r) = \tilde{\rho} f_1^s(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda} f_2^s(r), \quad \mu(r) = \tilde{\mu} f_2^s(r), \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad s = 1, 2,$$

$$\alpha_T(r) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon.$$

При расчетах полагалось, что направление волнового вектора \mathbf{k}_1 падающей на цилиндрическое тело плоской звуковой волны с единичной амплитудой совпадает с направлением оси абсцисс ($\theta_0 = \pi/2, \varphi_0 = 0$).

Для сравнения амплитуда рассеянной звуковой волны рассчитывалась и для термоупругого цилиндра без покрытия и для термоупругого цилиндра с однородным покрытием.

Для контроля точности приближенного решения краевой задачи (для каждого значения n) расчеты проводились на сгущающихся сетках, причем каждая следующая сетка была в два раза мельче предыдущей. Вычисления заканчива-



лись, когда относительная погрешность значений $U_{1n}(r_\gamma)$, $U_{2n}(r_\gamma)$, $U_{4n}(r_\gamma)$ ($\gamma = 0,1$) на последней паре сеток не превосходила 0.1%.

При суммировании ряда (2.6.25) индекс n изменялся от $-N_0$ до N_0 , где $N_0 = 2[\varpi] + 3$; $[\cdot]$ – целая часть числа. Для рассматриваемых частот увеличение n практически не сказывается на результатах расчетов.

На рис. 2.6.2 – 2.6.5 представлены графики зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|F(\varpi, \pi)|$ от волнового размера цилиндра в интервале $0 < \varpi \leq 10$. Видно слабое влияние покрытия цилиндра на отражение звука в области низких частот ($\varpi < 1$). С увеличением волнового размера цилиндра это влияние становится сильнее, и в частности сказывается на увеличении резонансных частот. Неоднородность покрытия заметно проявляется в изменении величины $|F(\varpi, \pi)|$ в области $\varpi > 4$. При этом видно различие графиков частотной зависимости, обусловленное влиянием неоднородности покрытия.

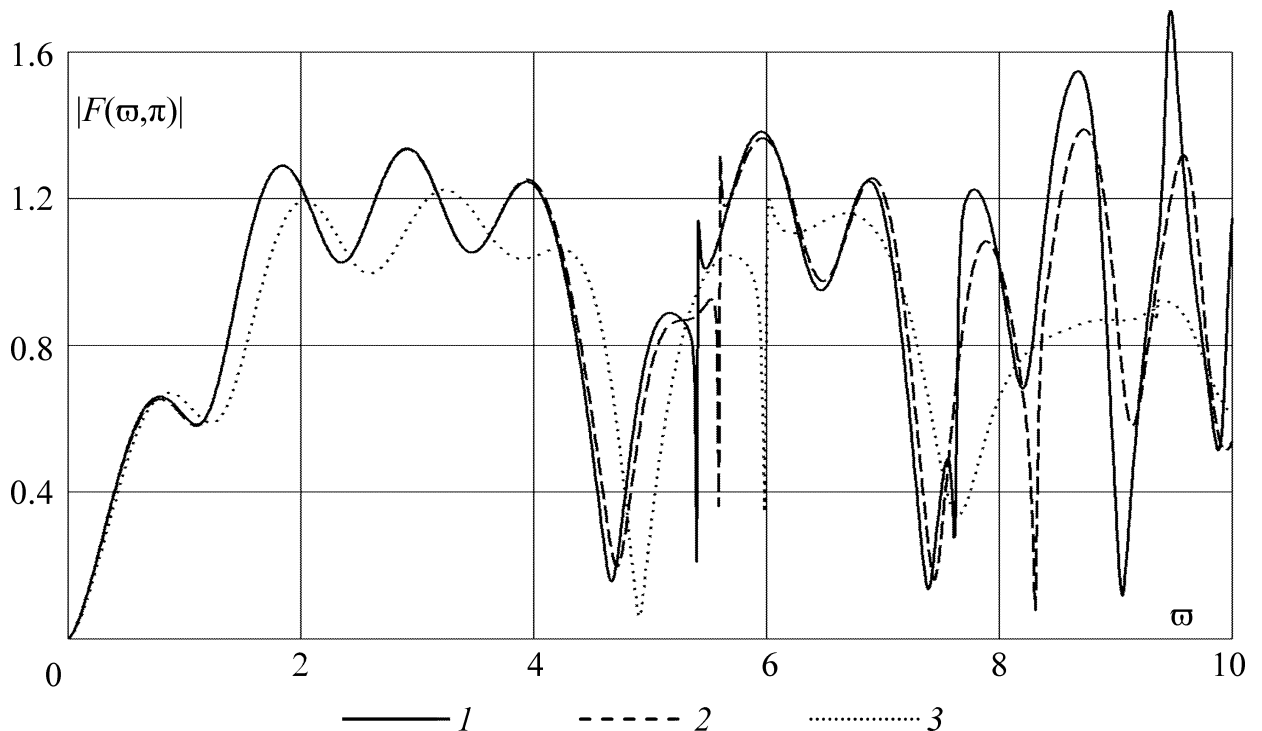


Рис. 2.6.2. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра: 1 — цилиндр с однородным покрытием, 2 — цилиндр с покрытием, имеющим неоднородность первого вида, 3 — цилиндр без покрытия

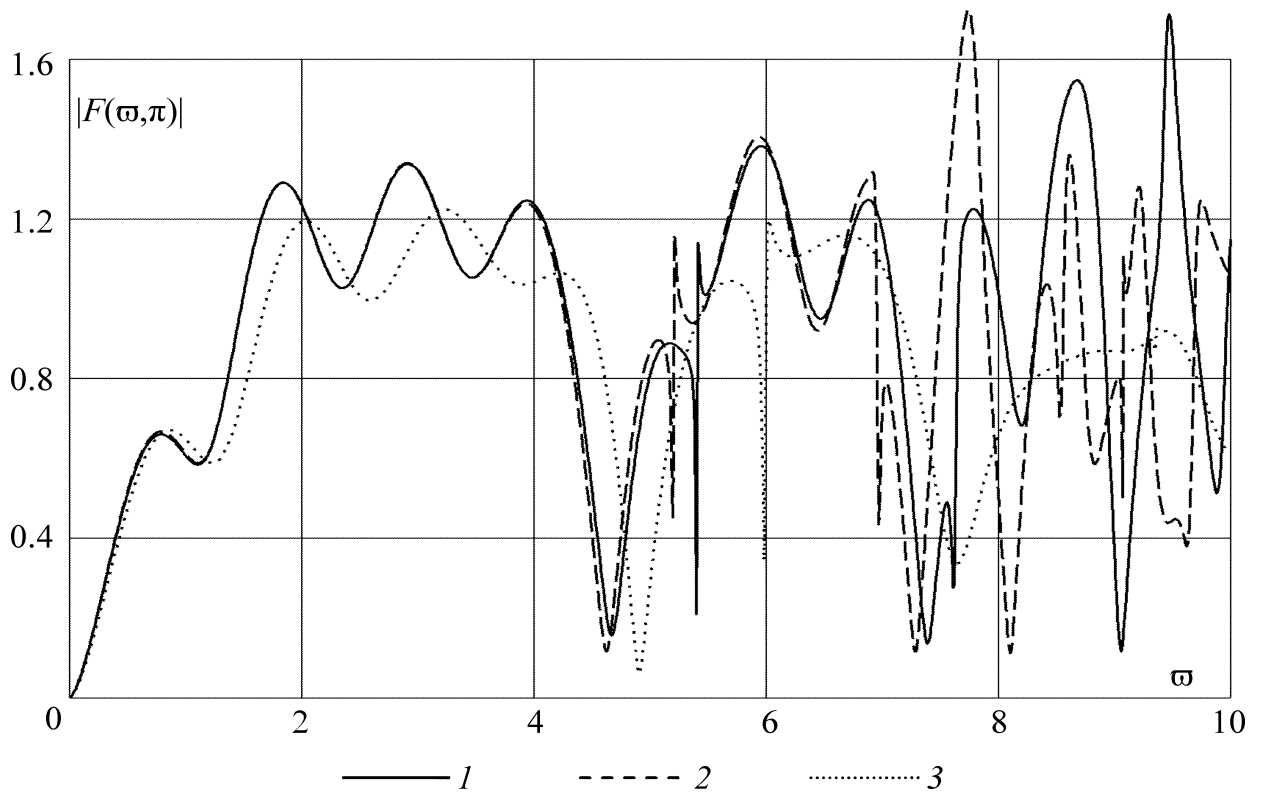


Рис. 2.6.3. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра: 1 — цилиндр с однородным покрытием, 2 — цилиндр с покрытием, имеющим неоднородность второго вида, 3 — цилиндр без покрытия

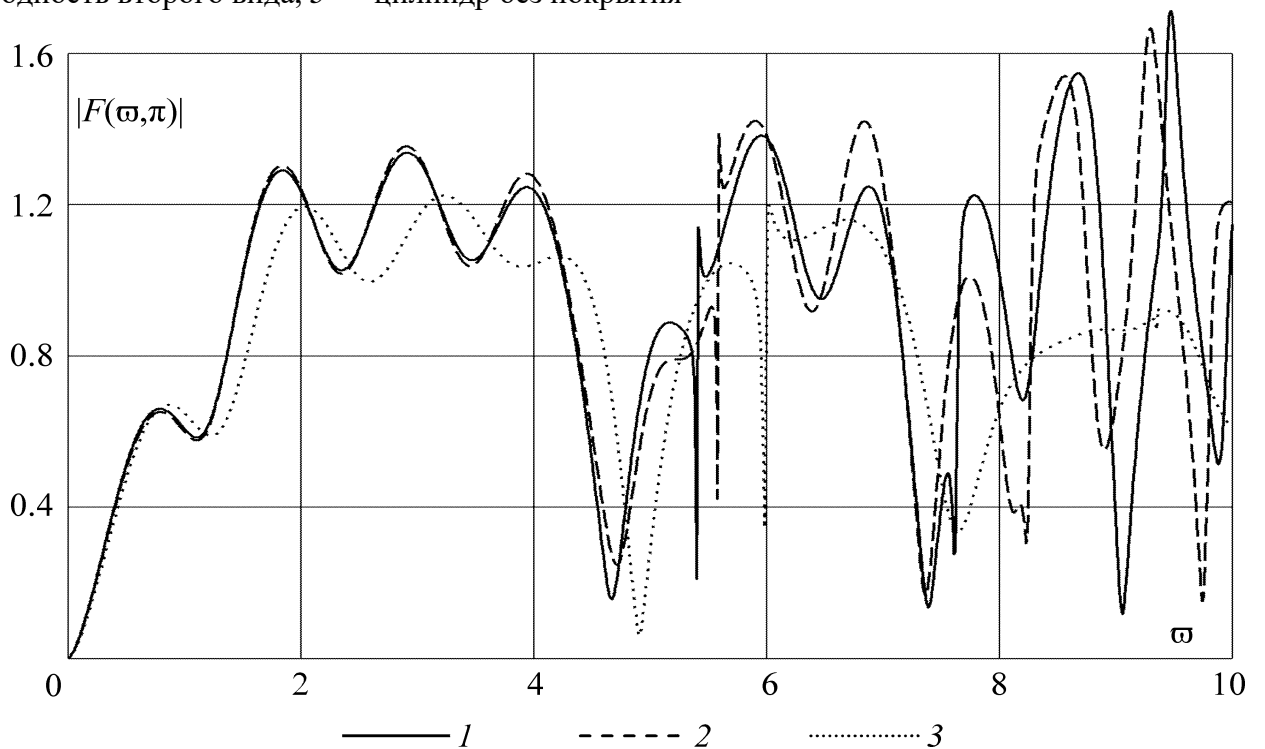


Рис. 2.6.4. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра: 1 — цилиндр с однородным покрытием, 2 — цилиндр с покрытием, имеющим неоднородность третьего вида, 3 — цилиндр без покрытия

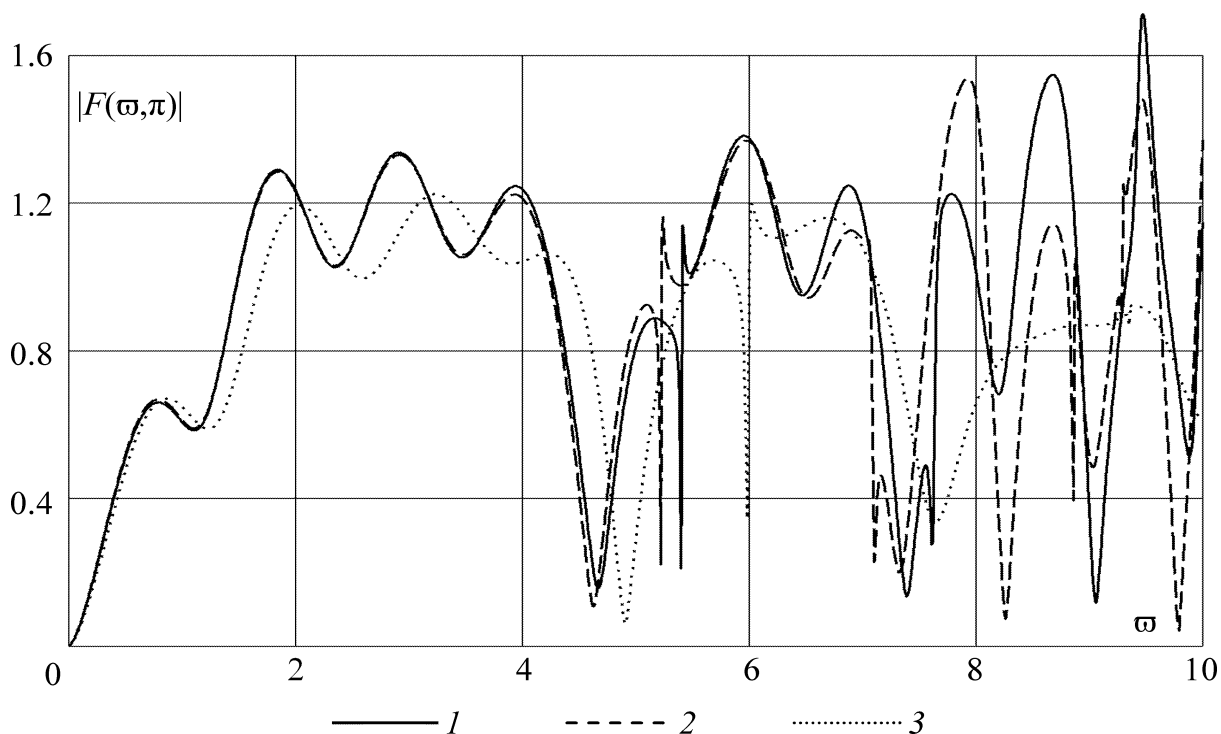


Рис. 2.6.5. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра: 1 — цилиндр с однородным покрытием, 2 — цилиндр с покрытием, имеющим неоднородность четвертого вида, 3 — цилиндр без покрытия

На рис. 2.6.6 – 2.6.9 представлены графики зависимости амплитуды рассеянной звуковой волны от полярного угла в интервале $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ при разных значениях волнового размера цилиндра. Стрелкой на рисунках показано направление распространения падающей плоской звуковой волны. Видно, что на рассматриваемых частотах наличие покрытия у цилиндра приводит к увеличению количества лепестков полярной диаграммы направленности и увеличению ее значений вблизи угла $\varphi = 0^\circ$. Кроме того, влияние покрытия проявляется в некотором изменении величины и ширины лепестков этой диаграммы. Различие кривых 1 и 2 на рис. 2.6.6 – 2.6.9 указывает на возможность изменения характеристик рассеянной цилиндром звуковой волны за счет неоднородности покрытия.

Отметим, что в работе [78] исследовано рассеяние звука таким же, как и выше алюминиевым цилиндром с неоднородным по плотности полимерным покрытием на частоте, соответствующей $\omega = 9.2$.

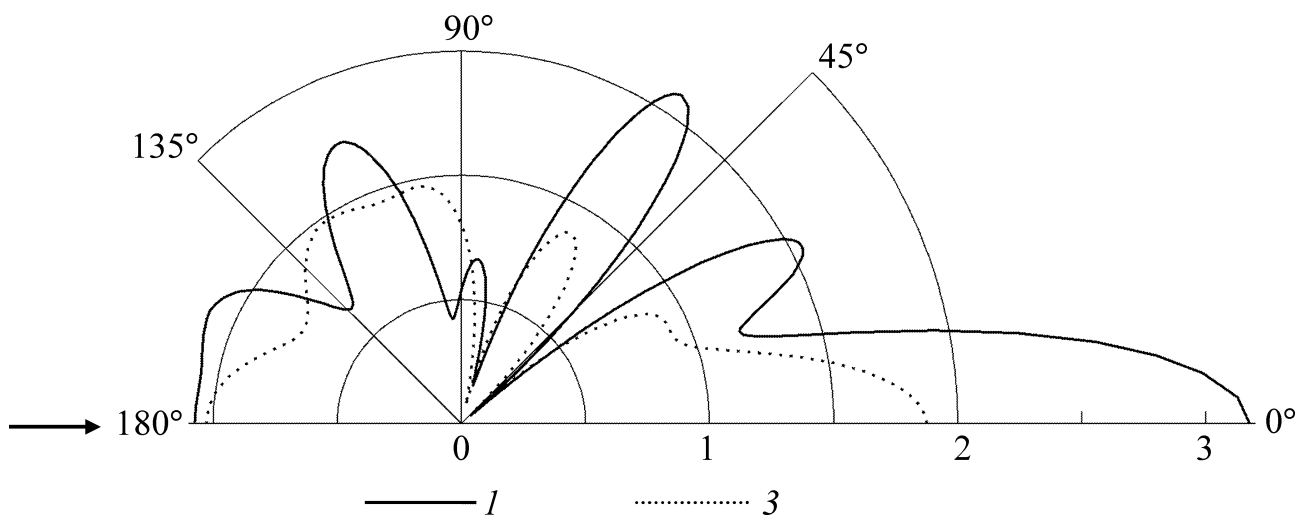
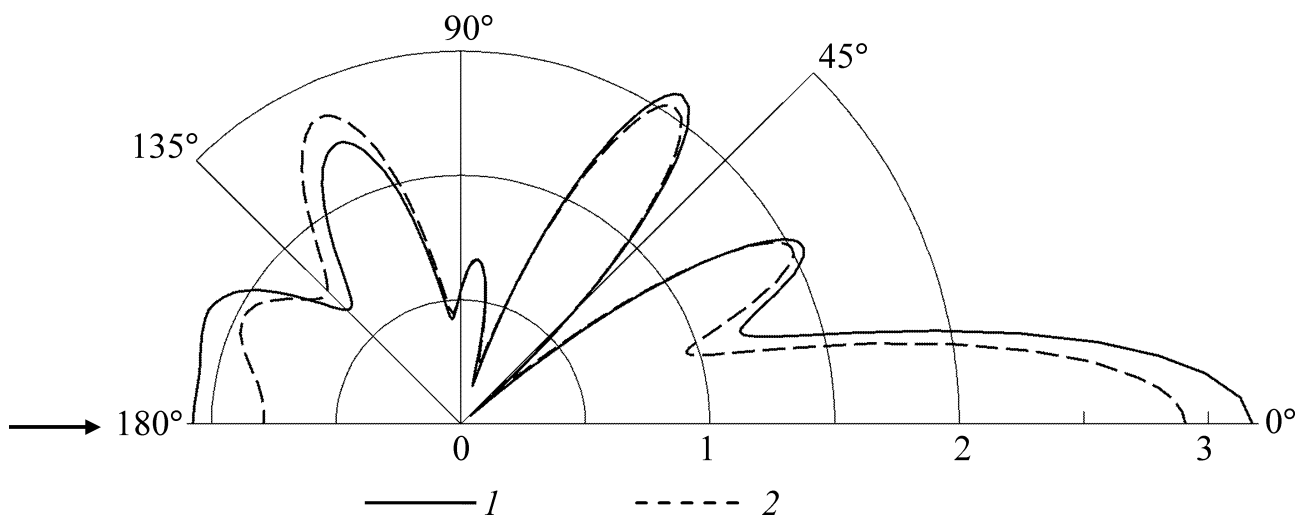


Рис. 2.6.6. Зависимость амплитуды рассеяния звука от полярного угла при $\varpi = 5.578$:
 1 — цилиндр с однородным покрытием, 2 — цилиндр с покрытием, имеющим неоднородность первого вида, 3 — цилиндр без покрытия

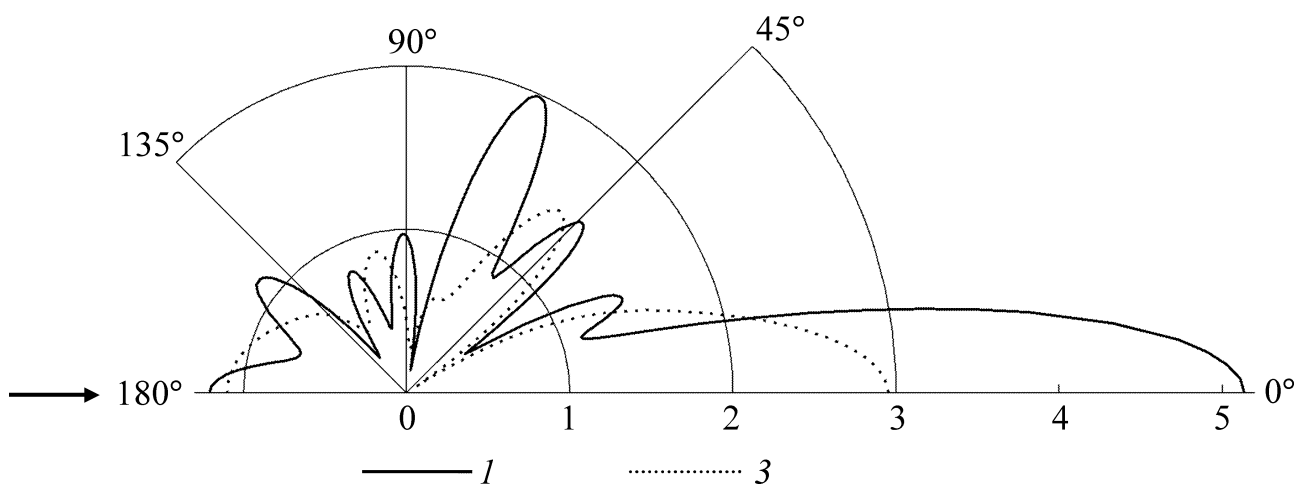
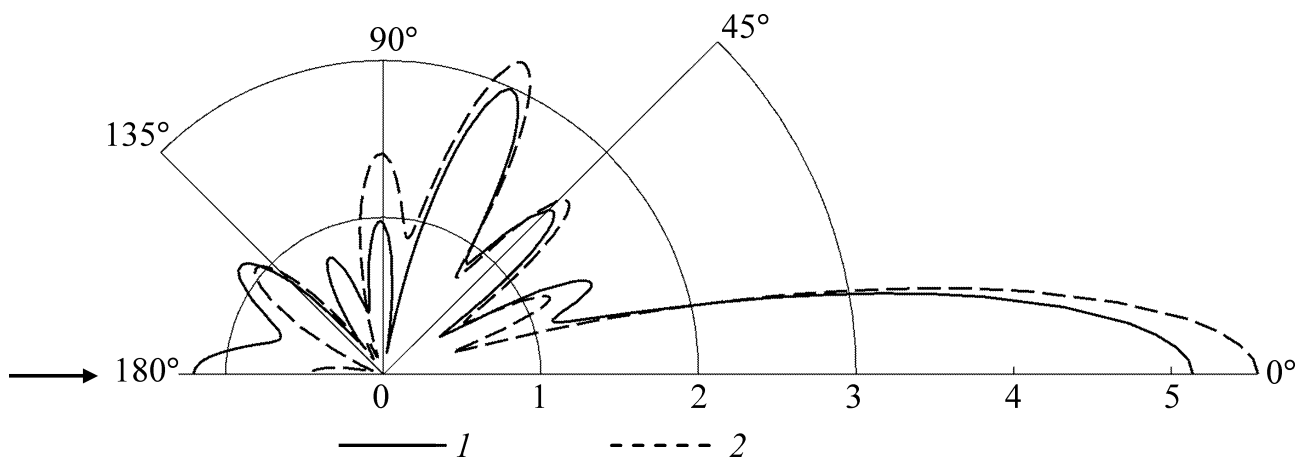


Рис. 2.6.7. Зависимость амплитуды рассеяния звука от полярного угла при $\omega = 6.967$:
 1 — цилиндр с однородным покрытием, 2 — цилиндр с покрытием, имеющим неоднородность второго вида, 3 — цилиндр без покрытия

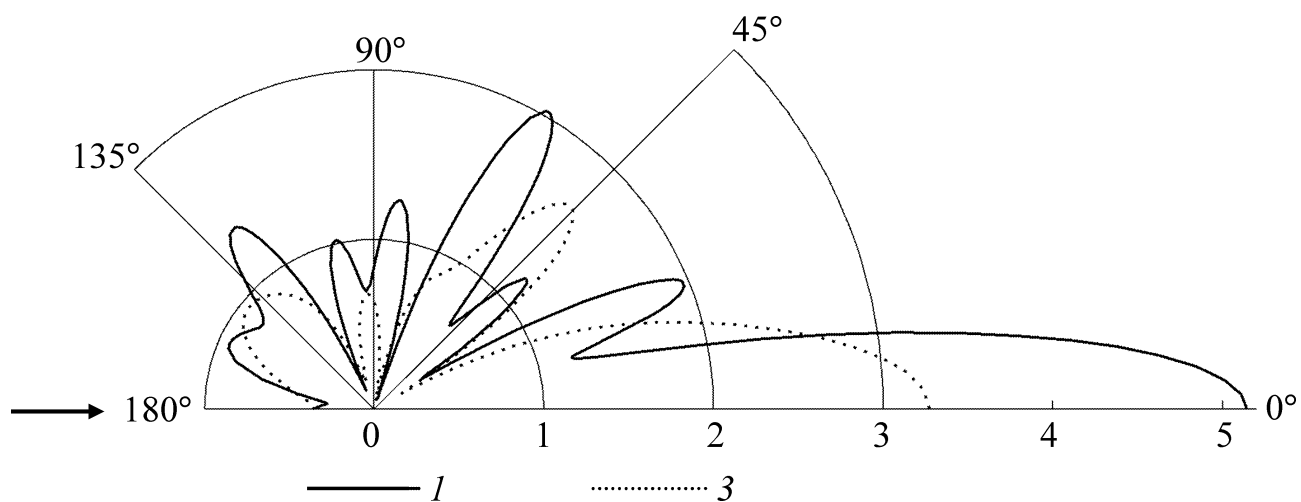
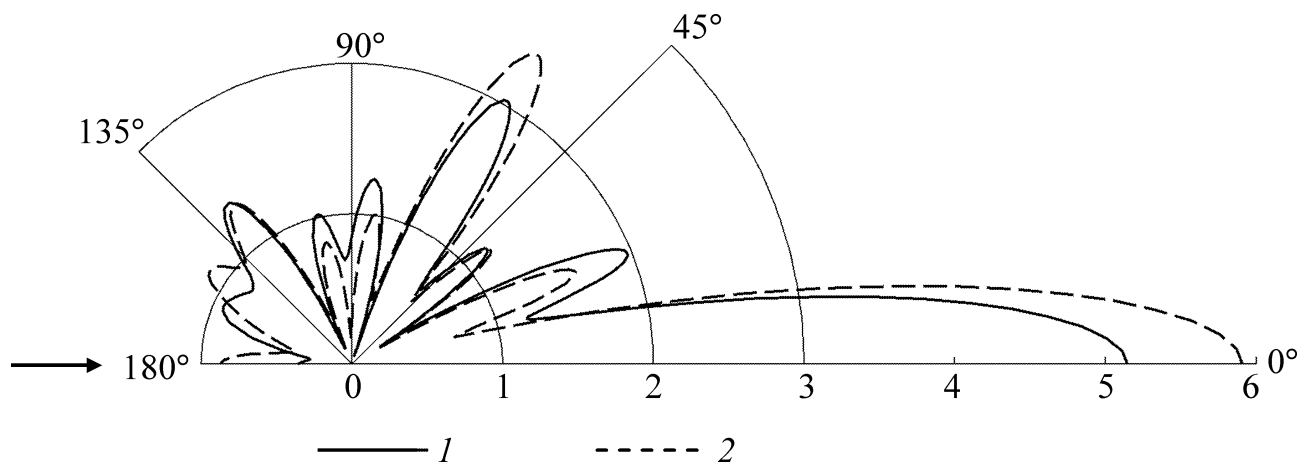


Рис. 2.6.8. Зависимость амплитуды рассеяния звука от полярного угла при $\varpi = 7.599$:
 1 — цилиндр с однородным покрытием, 2 — цилиндр с покрытием, имеющим неоднородность третьего вида, 3 — цилиндр без покрытия

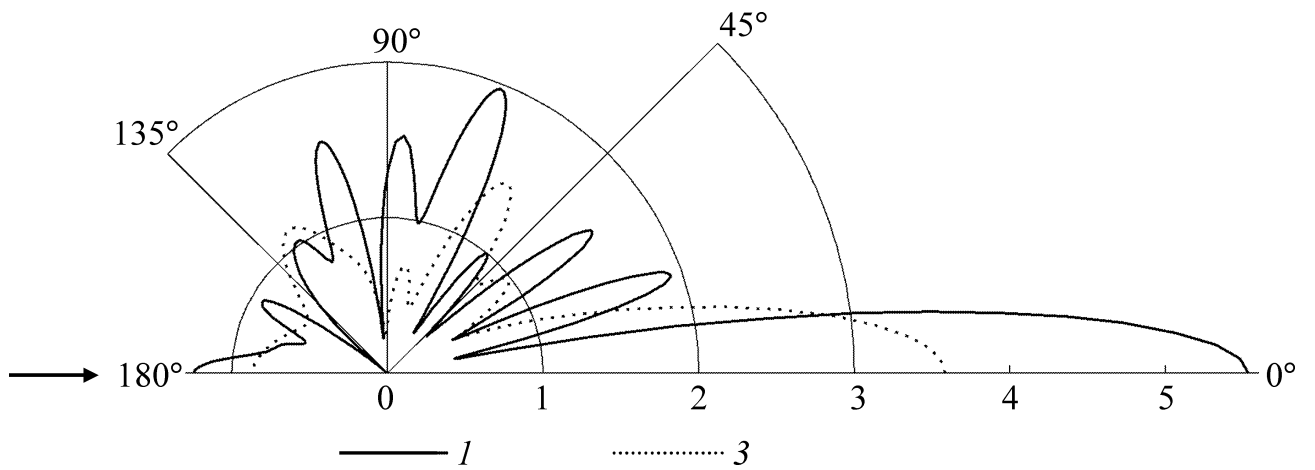
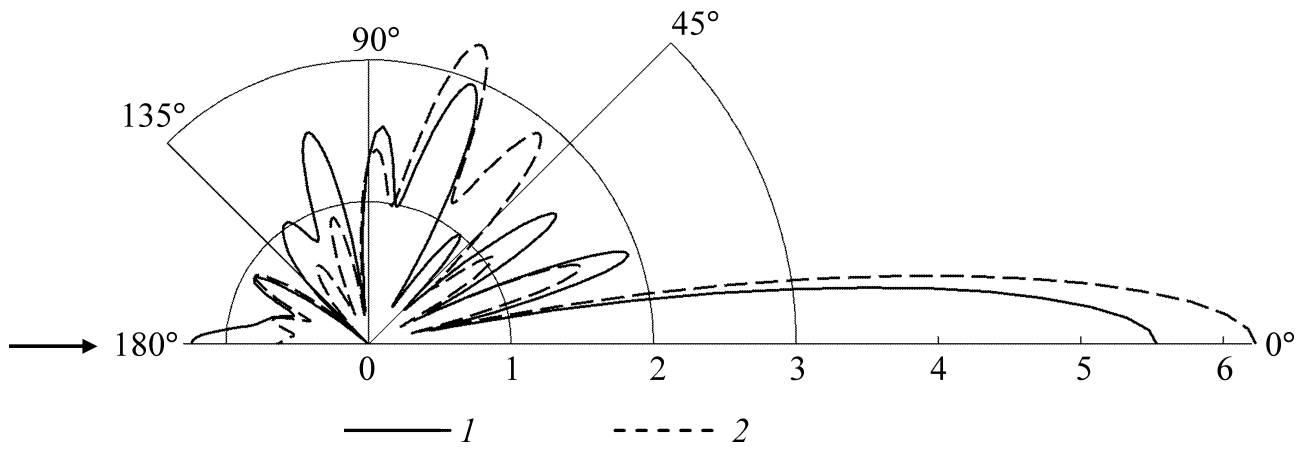


Рис. 2.6.9. Зависимость амплитуды рассеяния звука от полярного угла при $\sigma = 8.848$:
 1 — цилиндр с однородным покрытием, 2 — цилиндр с покрытием, имеющим неоднородность четвертого вида, 3 — цилиндр без покрытия

2.6.2. Случай дискретно-слоистого покрытия

Постановка задачи. Рассмотрим однородный изотропный термоупругий бесконечный цилиндр радиусом $r^{(0)}$. Цилиндр имеет покрытие из N коаксиальных однородных изотропных термоупругих цилиндрических слоев с внешними радиусами $r^{(1)} < r^{(2)} < \dots < r^{(N)}$ (рис. 2.6.10). Материал цилиндра ($m = 0$) и материал m -го слоя ($m = 1, 2, \dots, N$) имеют следующие физико-механические характеристики: плотность $\rho^{(m)}$, упругие постоянные Ламе $\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T^{(m)}$, коэффициент теплопроводности $\lambda_T^{(m)}$, объемную теплоемкость $c_\varepsilon^{(m)}$. Источники тепла в термоупругом теле отсутствуют.



Рис. 2.6.10. Нормальное сечение цилиндра с дискретно-слоистым покрытием

Окружающая тело жидкость – теплопроводная, ее равновесная плотность ρ_0 , скорость звука c , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ , коэффициент температурного расширения α^T , теплопроводность λ^T , температуропроводность χ^T . В невозмущенном состоянии тело и жидкость имеют одну и ту же постоянную температуру T_0 .

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , ось z которой совпадает с осью вращения цилиндра.

Пусть из жидкости на цилиндр с покрытием наклонно падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой имеет вид (2.6.1).

Определим волновые поля в жидкости и термоупругом теле.

Уравнения волновых полей. Как и в п. 2.6.1 потенциал скоростей падающей волны представим в виде ряда (2.6.2), а искомые потенциалы рассеянной звуковой и возбужденной тепловой волн в жидкости – в виде рядов (2.6.3).

Волновые поля в цилиндре с покрытием определим на основе линейной связанной динамической задачи термоупругости (1.2.22), (1.2.23). Смещение частиц в цилиндре ($m = 0$) и в m -м слое покрытия ($m = 1, 2, \dots, N$) представим в виде

$$\mathbf{u}^{(m)} = \text{grad}(\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}) + \text{rot}\Phi_3^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (2.6.26)$$

где потенциалы $\Phi_1^{(m)}$, $\Phi_2^{(m)}$, $\Phi_3^{(m)}$ – решения уравнений Гельмгольца (2.5.35) в цилиндрических координатах. Подстановкой

$$\Phi_3^{(m)} = \text{rot}(\Phi_{31}^{(m)} \mathbf{e}_z) + \kappa_3^{(m)} \Phi_{32}^{(m)} \mathbf{e}_z, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

векторное уравнение Гельмгольца приводится к двум скалярным уравнениям Гельмгольца для каждой из функций $\Phi_{31}^{(m)}$, $\Phi_{32}^{(m)}$.

С учетом закона Снеллиуса функции $\Phi_1^{(m)}$, $\Phi_2^{(m)}$, $\Phi_{31}^{(m)}$, $\Phi_{32}^{(m)}$ ($m = 0, 1, \dots, N$) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(m)}(r, \varphi, z) &= e^{ik_1 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_{1n}^{(m)} J_n(\kappa_{1r}^{(m)} r) + A_{2n}^{(m)} H_n(\kappa_{1r}^{(m)} r) \right] e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \\ \Phi_2^{(m)}(r, \varphi, z) &= e^{ik_1 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[B_{1n}^{(m)} J_n(\kappa_{2r}^{(m)} r) + B_{2n}^{(m)} H_n(\kappa_{2r}^{(m)} r) \right] e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \\ \Phi_{31}^{(m)}(r, \varphi, z) &= e^{ik_1 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C_{1n}^{(m)} J_n(\kappa_{3r}^{(m)} r) + C_{2n}^{(m)} H_n(\kappa_{3r}^{(m)} r) \right] e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \\ \Phi_{32}^{(m)}(r, \varphi, z) &= e^{ik_1 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[D_{1n}^{(m)} J_n(\kappa_{3r}^{(m)} r) + D_{2n}^{(m)} H_n(\kappa_{3r}^{(m)} r) \right] e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \end{aligned} \quad (2.6.27)$$

где $\kappa_{jr}^{(m)} = (\kappa_j^{(m)2} - k_{1z}^2)^{1/2}$ ($j=1,2,3$). При этом с учетом условия ограниченности функций $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(0)}$, $\Phi_{31}^{(0)}$, $\Phi_{32}^{(0)}$ имеем

$$A_{2n}^{(0)} = B_{2n}^{(0)} = C_{2n}^{(0)} = D_{2n}^{(0)} = 0.$$

Неизвестные коэффициенты в рядах, описывающих искомые потенциалы рассеянной звуковой и возбужденной тепловой волн в жидкости, и в рядах (2.6.27) должны быть определены из граничных условий.

На соприкасающейся с жидкостью поверхности цилиндрического тела граничные условия включают равенство нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, равенство нормального напряжения и акустического давления, условие отсутствия касательных напряжений, условие непрерывности акустической температуры и теплового потока:

$$r = r^{(N)} : -i\omega u_r^{(N)} = \mathfrak{S}_r, \quad \sigma_{rr}^{(N)} = -p, \quad \sigma_{r\varphi}^{(N)} = \sigma_{rz}^{(N)} = 0,$$

$$T^{(N)} = \Theta, \quad \lambda_T^{(N)} \frac{\partial T^{(N)}}{\partial r} = \lambda^T \frac{\partial \Theta}{\partial r}. \quad (2.6.28)$$

На поверхностях, разделяющих термоупругие среды, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц этих сред, нормальные и касательные напряжения, температура и тепловой поток:

$$r = r^{(m-1)} : u_r^{(m-1)} = u_r^{(m)}, \quad u_\varphi^{(m-1)} = u_\varphi^{(m)}, \quad u_z^{(m-1)} = u_z^{(m)},$$

$$\sigma_{rr}^{(m-1)} = \sigma_{rr}^{(m)}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(m-1)} = \sigma_{r\varphi}^{(m)}, \quad \sigma_{rz}^{(m-1)} = \sigma_{rz}^{(m)},$$

$$T^{(m-1)} = T^{(m)}, \quad \lambda_T^{(m-1)} \frac{\partial T^{(m-1)}}{\partial r} = \lambda_T^{(m)} \frac{\partial T^{(m)}}{\partial r}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6.29)$$

Нормальная компонента скорости частиц жидкости \mathfrak{S}_r , акустическое давление p и акустическая температура Θ определяются из выражений (2.6.16).

Для m -й термоупругой среды ($m=0,1,\dots,N$) компоненты вектора смещения $u_r^{(m)}$, $u_\varphi^{(m)}$, $u_z^{(m)}$ записываются через функции $\Phi_1^{(m)}$, $\Phi_2^{(m)}$, $\Phi_{31}^{(m)}$, $\Phi_{32}^{(m)}$:

$$\begin{aligned}
u_r^{(m)} &= \frac{\partial \Phi_1^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_2^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{31}^{(m)}}{\partial r \partial z} + \frac{\kappa_3^{(m)}}{r} \frac{\partial \Phi_{32}^{(m)}}{\partial \varphi}, \\
u_\varphi^{(m)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1^{(m)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2^{(m)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{31}^{(m)}}{\partial \varphi \partial z} - \kappa_3^{(m)} \frac{\partial \Phi_{32}^{(m)}}{\partial r}, \\
u_z^{(m)} &= \frac{\partial \Phi_1^{(m)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_2^{(m)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_{31}^{(m)}}{\partial z^2} + \kappa_3^{(m)2} \Phi_{31}^{(m)},
\end{aligned} \tag{2.6.30}$$

возмущение температуры $T^{(m)}$ определяется из выражения (2.5.40), а компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}^{(m)}$, $\sigma_{r\varphi}^{(m)}$, $\sigma_{rz}^{(m)}$ связаны с величинами $u_r^{(m)}$, $u_\varphi^{(m)}$, $u_z^{(m)}$, $T^{(m)}$ соотношениями Дюгамеля—Неймана, которые здесь записываются в виде аналогичном (2.6.7):

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(m)} &= 2\mu^{(m)} \frac{\partial u_r^{(m)}}{\partial r} + \lambda^{(m)} \left[\frac{\partial u_r^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi^{(m)}}{\partial \varphi} + u_r^{(m)} \right) + \frac{\partial u_z^{(m)}}{\partial z} \right] - \beta^{(m)} T^{(m)}, \\
\sigma_{r\varphi}^{(m)} &= \mu^{(m)} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r^{(m)}}{\partial \varphi} - u_\varphi^{(m)} \right) + \frac{\partial u_\varphi^{(m)}}{\partial r} \right], \quad \sigma_{rz}^{(m)} = \mu^{(m)} \left(\frac{\partial u_z^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(m)}}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{2.6.31}$$

Для решения рассматриваемой задачи используем матричный метод.

Решение задачи матричным методом. Составляющие вектора смещения, компоненты тензора напряжений, изменение температуры и тепловой поток в цилиндре ($m=0$) и в m -м слое покрытия ($m=1,2,\dots,N$) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
&\left(u_r^{(m)}, u_\varphi^{(m)}, u_z^{(m)}, \sigma_{rr}^{(m)}, \sigma_{r\varphi}^{(m)}, \sigma_{rz}^{(m)}, T^{(m)}, \lambda_T^{(m)} \frac{\partial T^{(m)}}{\partial r} \right)^T (r, \varphi, z) = \\
&= e^{ik_{1z}z} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{S}_n^{(m)}(r) e^{in(\varphi - \varphi_0)},
\end{aligned} \tag{2.6.32}$$

где

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r) = \left(S_{1n}^{(m)}(r), S_{2n}^{(m)}(r), S_{3n}^{(m)}(r), S_{4n}^{(m)}(r), S_{5n}^{(m)}(r), S_{6n}^{(m)}(r), S_{7n}^{(m)}(r), S_{8n}^{(m)}(r) \right)^T -$$

вектор смещения-напряжения-температуры.

Введем вектор коэффициентов

$$\mathbf{K}_n^{(m)} = \left(A_{1n}^{(m)}, A_{2n}^{(m)}, B_{1n}^{(m)}, B_{2n}^{(m)}, C_{1n}^{(m)}, C_{2n}^{(m)}, D_{1n}^{(m)}, D_{2n}^{(m)} \right)^T.$$

Связь между этими векторами определяется формулой

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r) = M_n^{(m)}(r) \mathbf{K}_n^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (2.6.33)$$

где $M_n^{(m)}(r)$ – матрица восьмого порядка с элементами $M_{kl}^{(m)} = M_{kl}^{(m)}(r)$ ($r^{(m-1)} \leq r \leq r^{(m)}, r^{(-1)} = 0$). Индекс n , которым должны быть снабжены элементы $M_{kl}^{(m)}$, для простоты записи будем опускать. С учетом выражения (2.5.40) для $T^{(m)}$ и выражений (2.6.30) – (2.6.32) получаем

$$M_{1q}^{(m)} = Y_{11}^{(m)}, \quad M_{1,q+2}^{(m)} = Y_{12}^{(m)}, \quad M_{1,q+4}^{(m)} = ik_{1z} Y_{13}^{(m)}, \quad M_{1,q+6}^{(m)} = in\kappa_3^{(m)} \frac{1}{r} Y_{03}^{(m)},$$

$$M_{2q}^{(m)} = in \frac{1}{r} Y_{01}^{(m)}, \quad M_{2,q+2}^{(m)} = in \frac{1}{r} Y_{02}^{(m)},$$

$$M_{2,q+4}^{(m)} = -nk_{1z} \frac{1}{r} Y_{03}^{(m)}, \quad M_{2,q+6}^{(m)} = -\kappa_3^{(m)} Y_{13}^{(m)},$$

$$M_{3q}^{(m)} = ik_{1z} Y_{01}^{(m)}, \quad M_{3,q+2}^{(m)} = ik_{1z} Y_{02}^{(m)}, \quad M_{3,q+4}^{(m)} = \left(\kappa_3^{(m)2} - k_{1z}^2 \right) Y_{03}^{(m)},$$

$$M_{3,q+6}^{(m)} = M_{7,q+4}^{(m)} = M_{7,q+6}^{(m)} = M_{8,q+4}^{(m)} = M_{8,q+6}^{(m)} = 0,$$

$$M_{4q}^{(m)} = 2\mu^{(m)} Y_{21}^{(m)} + \eta_1^{(m)} Y_{01}^{(m)}, \quad M_{4,q+2}^{(m)} = 2\mu^{(m)} Y_{22}^{(m)} + \eta_2^{(m)} Y_{02}^{(m)},$$

$$M_{4,q+4}^{(m)} = 2ik_{1z}\mu^{(m)} Y_{23}^{(m)}, \quad M_{4,q+6}^{(m)} = 2in\mu^{(m)} \kappa_3^{(m)} \frac{1}{r} \left(Y_{13}^{(m)} - \frac{1}{r} Y_{03}^{(m)} \right),$$

$$M_{5q}^{(m)} = 2in\mu^{(m)} \frac{1}{r} \left(Y_{11}^{(m)} - \frac{1}{r} Y_{01}^{(m)} \right), \quad M_{5,q+2}^{(m)} = 2in\mu^{(m)} \frac{1}{r} \left(Y_{12}^{(m)} - \frac{1}{r} Y_{02}^{(m)} \right),$$

$$M_{5,q+4}^{(m)} = -2nk_{1z}\mu^{(m)} \frac{1}{r} \left(Y_{13}^{(m)} - \frac{1}{r} Y_{03}^{(m)} \right),$$

$$M_{5,q+6}^{(m)} = -\mu^{(m)} \kappa_3^{(m)} \left(Y_{23}^{(m)} - \frac{1}{r} Y_{13}^{(m)} + \frac{n^2}{r^2} Y_{03}^{(m)} \right),$$

$$M_{6q}^{(m)} = 2ik_{1z}\mu^{(m)} Y_{11}^{(m)}, \quad M_{6,q+2}^{(m)} = 2ik_{1z}\mu^{(m)} Y_{12}^{(m)},$$

$$M_{6,q+4}^{(m)} = \mu^{(m)} \left(\kappa_3^{(m)2} - 2k_{1z}^2 \right) Y_{13}^{(m)}, \quad M_{6,q+6}^{(m)} = -nk_{1z} \mu^{(m)} \kappa_3^{(m)} \frac{1}{r} Y_{03}^{(m)},$$

$$M_{7q}^{(m)} = \beta_1^{(m)} Y_{01}^{(m)}, \quad M_{7,q+2}^{(m)} = \beta_2^{(m)} Y_{02}^{(m)},$$

$$M_{8q}^{(m)} = \lambda_T^{(m)} \beta_1^{(m)} Y_{11}^{(m)}, \quad M_{8,q+2}^{(m)} = \lambda_T^{(m)} \beta_2^{(m)} Y_{12}^{(m)}, \quad q = 1, 2,$$

где

$$Y_{0j}^{(m)} = Z_n \left(\kappa_{jr}^{(m)} r \right), \quad Y_{1j}^{(m)} = \kappa_{jr}^{(m)} Z_n' \left(\kappa_{jr}^{(m)} r \right), \quad Y_{2j}^{(m)} = \kappa_{jr}^{(m)2} Z_n'' \left(\kappa_{jr}^{(m)} r \right), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\eta_q^{(m)} = 2\mu^{(m)} \kappa_q^{(m)2} - \left(\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)} \right) k_l^{(m)2}, \quad Z_n(x) = \begin{cases} J_n(x) & \text{при } q = 1, \\ H_n(x) & \text{при } q = 2 \end{cases}$$

(выражения для $\beta_1^{(m)}$, $\beta_2^{(m)}$ даны в пояснениях к формуле (2.5.43)). Здесь и далее штрих означает дифференцирование по аргументу.

Рассмотрим произвольный m -й слой в покрытии ($m = 1, 2, \dots, N$). На его границах при $r = r^{(m-1)}$ и $r = r^{(m)}$ из равенств (2.6.33) получаем соотношения

$$\mathbf{S}_n^{(m)} \left(r^{(m-1)} \right) = M_n^{(m)} \left(r^{(m-1)} \right) \mathbf{K}_n^{(m)}, \quad \mathbf{S}_n^{(m)} \left(r^{(m)} \right) = M_n^{(m)} \left(r^{(m)} \right) \mathbf{K}_n^{(m)}.$$

Поскольку внутри m -го слоя вектор $\mathbf{K}_n^{(m)}$ не меняется, имеем

$$\mathbf{S}_n^{(m)} \left(r^{(m)} \right) = M_n^{(m)} \left(r^{(m)} \right) \left[M_n^{(m)} \left(r^{(m-1)} \right) \right]^{-1} \mathbf{S}_n^{(m)} \left(r^{(m-1)} \right), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6.34)$$

Подставляя выражения (2.6.32) в граничные условия (2.6.29), находим

$$\mathbf{S}_n^{(m-1)} \left(r^{(m-1)} \right) = \mathbf{S}_n^{(m)} \left(r^{(m-1)} \right), \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда соотношение (2.6.34) записывается в виде

$$\mathbf{S}_n^{(m)} \left(r^{(m)} \right) = Q_n^{(m)} \mathbf{S}_n^{(m-1)} \left(r^{(m-1)} \right), \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (2.6.35)$$

где $Q_n^{(m)} = M_n^{(m)} \left(r^{(m)} \right) \left[M_n^{(m)} \left(r^{(m-1)} \right) \right]^{-1}$.

Используя формулы (2.6.35) для каждого слоя, получаем соотношение

$$\mathbf{S}_n^{(N)} \left(r^{(N)} \right) = Q_n \mathbf{S}_n^{(0)} \left(r^{(0)} \right), \quad Q_n = Q_n^{(N)} Q_n^{(N-1)} \dots Q_n^{(1)}, \quad (2.6.36)$$

из которого следует

$$S_{kn}^{(N)} \left(r^{(N)} \right) = \sum_{l=1}^8 Q_{kl} S_{ln}^{(0)} \left(r^{(0)} \right), \quad k = 1, 4, 5, 6, 7, 8, \quad (2.6.37)$$

где Q_{kl} (индекс n опущен) – элементы матрицы Q_n . Равенство вторых, а также третьих компонентов векторов в левой и правой частях соотношения (2.6.36) использовать не будем, так как на границе термоупругого тела и жидкости непрерывность касательных компонентов вектора смещения нарушается.

Подставляя разложения (2.6.32) в граничные условия (2.6.28), находим

$$\begin{aligned}
 S_{1n}^{(N)}(r^{(N)}) &= i\omega^{-1}(Y_1\alpha_n + Y_{11}V_{1n} + Y_{12}V_{2n}), \\
 S_{4n}^{(N)}(r^{(N)}) &= -i\omega\rho_0(Y_0\alpha_n + Y_{01}V_{1n} + Y_{02}V_{2n}), \\
 S_{5n}^{(N)}(r^{(N)}) &= S_{6n}^{(N)}(r^{(N)}) = 0, \\
 S_{7n}^{(N)}(r^{(N)}) &= \zeta_1 Y_0\alpha_n + \zeta_1 Y_{01}V_{1n} + \zeta_2 Y_{02}V_{2n}, \\
 S_{8n}^{(N)}(r^{(N)}) &= \lambda^T (\zeta_1 Y_1\alpha_n + \zeta_1 Y_{11}V_{1n} + \zeta_2 Y_{12}V_{2n}),
 \end{aligned} \tag{2.6.38}$$

где

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= J_n(k_{1r}r^{(N)}), \quad Y_1 = k_{1r}J'_n(k_{1r}r^{(N)}), \\
 Y_{0q} &= H_n(k_{qr}r^{(N)}), \quad Y_{1q} = k_{qr}H'_n(k_{qr}r^{(N)}), \quad q = 1, 2
 \end{aligned}$$

(выражения для ζ_1, ζ_2 даны в пояснениях к формуле (2.6.17)).

Из равенств (2.6.33) при $m = 0$ и $r = r^{(0)}$ находим

$$\begin{aligned}
 S_{ln}^{(0)}(r^{(0)}) &= M_{l1}^{(0)}(r^{(0)})A_{1n}^{(0)} + M_{l3}^{(0)}(r^{(0)})B_{1n}^{(0)} + M_{l5}^{(0)}(r^{(0)})C_{1n}^{(0)} + M_{l7}^{(0)}(r^{(0)})D_{1n}^{(0)}, \\
 l &= 1, 2, \dots, 8.
 \end{aligned} \tag{2.6.39}$$

Подставляя выражения (2.6.38), (2.6.39) в равенства (2.6.37), получаем систему шести линейных алгебраических уравнений с неизвестными $V_{1n}, V_{2n}, A_{1n}^{(0)}, B_{1n}^{(0)}, C_{1n}^{(0)}, D_{1n}^{(0)}$. Определив эти коэффициенты, можно аналитически описать волновые поля в жидкости и термоупругом теле.

Результаты расчетов. С использованием расчетов амплитуды рассеяния звука $|F(\varpi, \varphi)|$ с помощью формулы

$$F(\varpi, \varphi) = \frac{2}{A_i \sqrt{\pi k_{1r} r^{(0)}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n V_{1n} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \quad (2.6.40)$$

($\varpi = |k_1| r^{(0)}$ – волновой размер цилиндра без покрытия), полученной аналогично выражению (2.6.25), проведен вычислительный эксперимент, в котором непрерывно-слоистое термоупругое цилиндрическое покрытие с внутренним радиусом $r^{(0)}$ и внешним радиусом $r^{(N)}$ моделировалось системой цилиндрических слоев из однородных термоупругих материалов.

Амплитуда рассеяния звука рассчитывалась для случая, когда плоская звуковая волна с единичной амплитудой падает на находящийся в воде алюминиевый цилиндр радиусом $r^{(0)} = 1$ м, оснащенный покрытием из полимерного материала толщиной 0.1 м. Причем полагали, что волна падает перпендикулярно оси цилиндра ($\theta_0 = \pi/2$) в направлении $\varphi_0 = 0$.

Расчеты величины $|F(\varpi, \varphi)|$ проводились как для цилиндра с покрытием из непрерывно-слоистого материала, так и для цилиндра с многослойным покрытием. В случае непрерывно-слоистого покрытия расчеты выполнялись с использованием результатов, полученных ранее в п. 2.6.1. При этом рассматривалось покрытие неоднородное по плотности и модулям упругости:

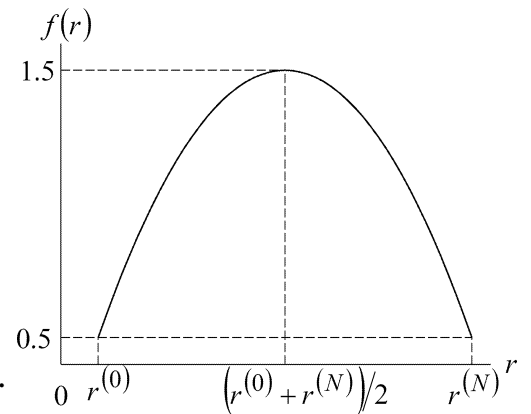
$$\rho(r) = \tilde{\rho} f(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda} f(r), \quad \mu(r) = \tilde{\mu} f(r), \quad r^{(0)} \leq r \leq r^{(N)},$$

$$\alpha_T(r) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon,$$

где

$$f(r) = 0.5 + 4 \frac{(r^{(N)} - r)(r - r^{(0)})}{(r^{(N)} - r^{(0)})^2},$$

на рисунке справа показан график функции $f(r)$.



В случае многослойного покрытия амплитуда рассеяния рассчитывалась для одинаковых по толщине однородных термоупругих слоев при $N = 3, 6, 9$. Распределение неоднородности по толщине дискретно-слоистого материала

покрытия определялось на основе кусочно-постоянной аппроксимации функций $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$ на интервале $[r^{(0)}, r^{(N)}]$:

$$\rho^{(m)} = \rho\left(\frac{r^{(m-1)} + r^{(m)}}{2}\right), \lambda^{(m)} = \lambda\left(\frac{r^{(m-1)} + r^{(m)}}{2}\right), \mu^{(m)} = \mu\left(\frac{r^{(m-1)} + r^{(m)}}{2}\right) \text{ при} \\ r^{(m-1)} < r \leq r^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь

$$r^{(m)} = r^{(0)} + mh_N, \quad h_N = (r^{(N)} - r^{(0)})/N.$$

Теплофизические характеристики этого материала при переходе от слоя к слою не менялись:

$$\alpha_T^{(m)} = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T^{(m)} = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon^{(m)} = \tilde{c}_\varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Заметим, что индекс $m = 0$ соответствует физико-механическим характеристикам алюминия.

Результаты вычислительного эксперимента приведены на рис. 2.6.11 – 2.6.13, где показаны графики зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|F(\varpi, \pi)|$ от волнового размера цилиндра в интервале $5 \leq \varpi \leq 10$ (рис. 2.6.11) и полярной диаграммы направленности амплитуды рассеяния звука в интервале углов наблюдения $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ при $\varpi = 5$ (рис. 2.6.12) и $\varpi = 5.298$ (рис. 2.6.13). Заметим, что вблизи значения $\varpi = 5.298$ расположен резонансный минимум функции $|F(\varpi, \pi)|$ (см. рис. 2.6.11).

При суммировании ряда (2.6.40) индекс n изменялся от $-N_0$ до N_0 , где $N_0 = 2[\varpi] + 3$; $[\cdot]$ – целая часть числа. Для рассматриваемых частот увеличение n практически не сказывается на результатах расчетов.

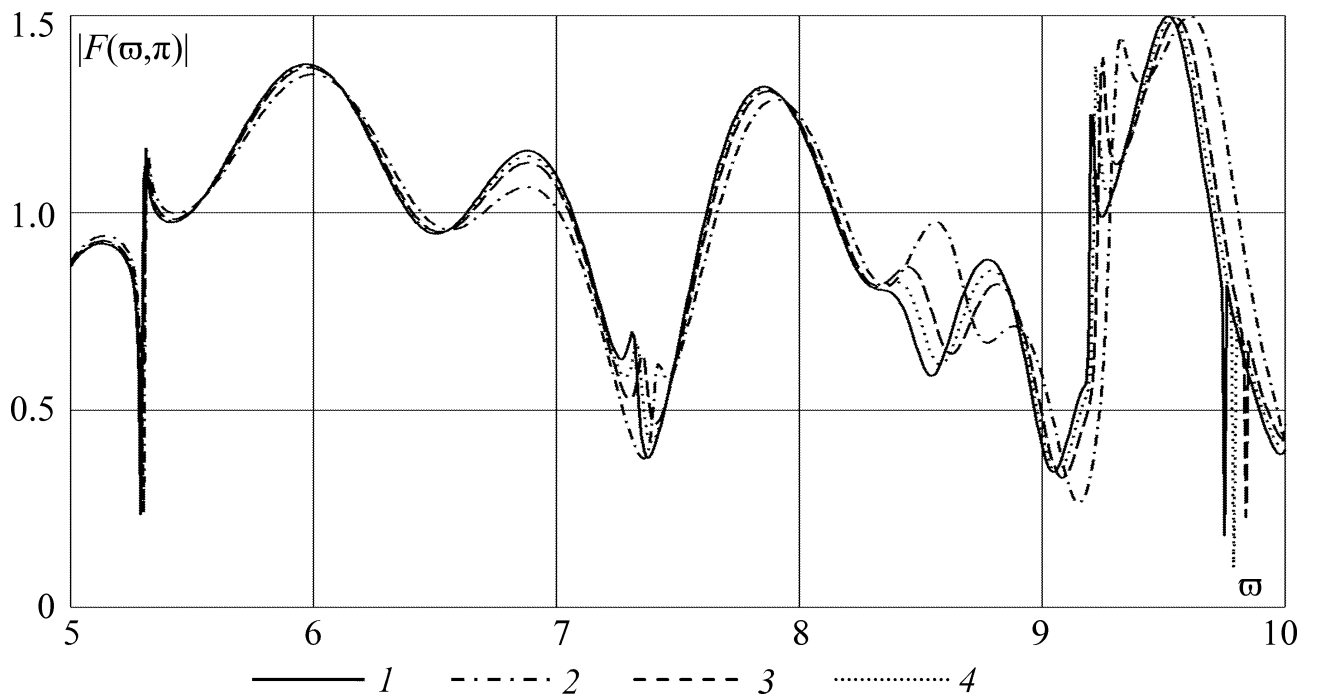


Рис. 2.6.11. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера цилиндра для термоупругого цилиндра с покрытием из различных материалов: 1 — непрерывно-слоистый термоупругий материал, 2, 3, 4 — дискретно-слоистый материал с однородными термоупругими слоями (2 — $N = 3$, 3 — $N = 6$, 4 — $N = 9$)

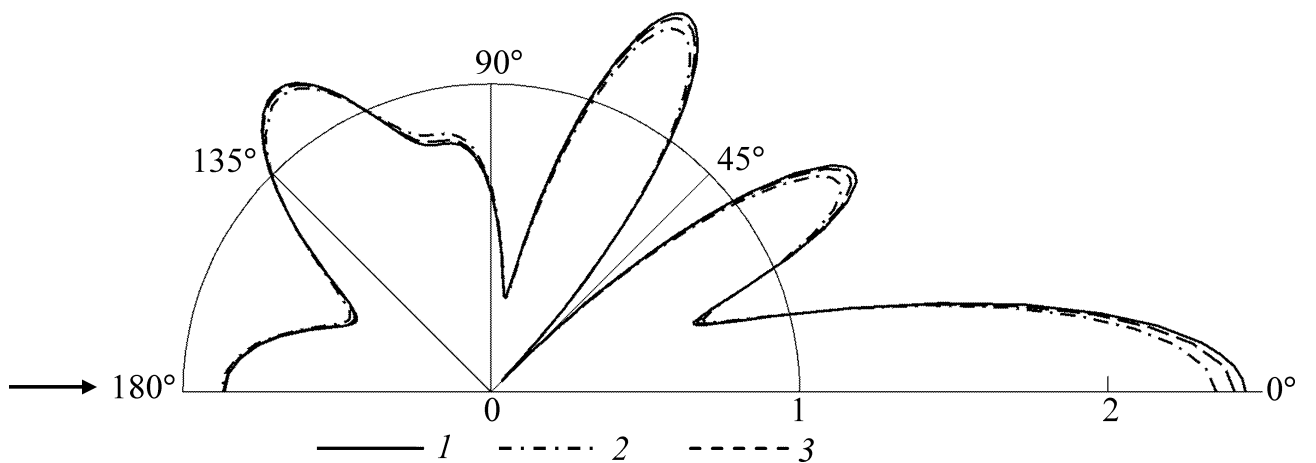


Рис. 2.6.12. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для термоупругого цилиндра с покрытием из различных материалов: 1 — непрерывно-слоистый термоупругий материал, 2, 3 — дискретно-слоистый материал с однородными термоупругими слоями (2 — $N = 3$, 3 — $N = 6$); стрелка — направление распространения падающей плоской волны

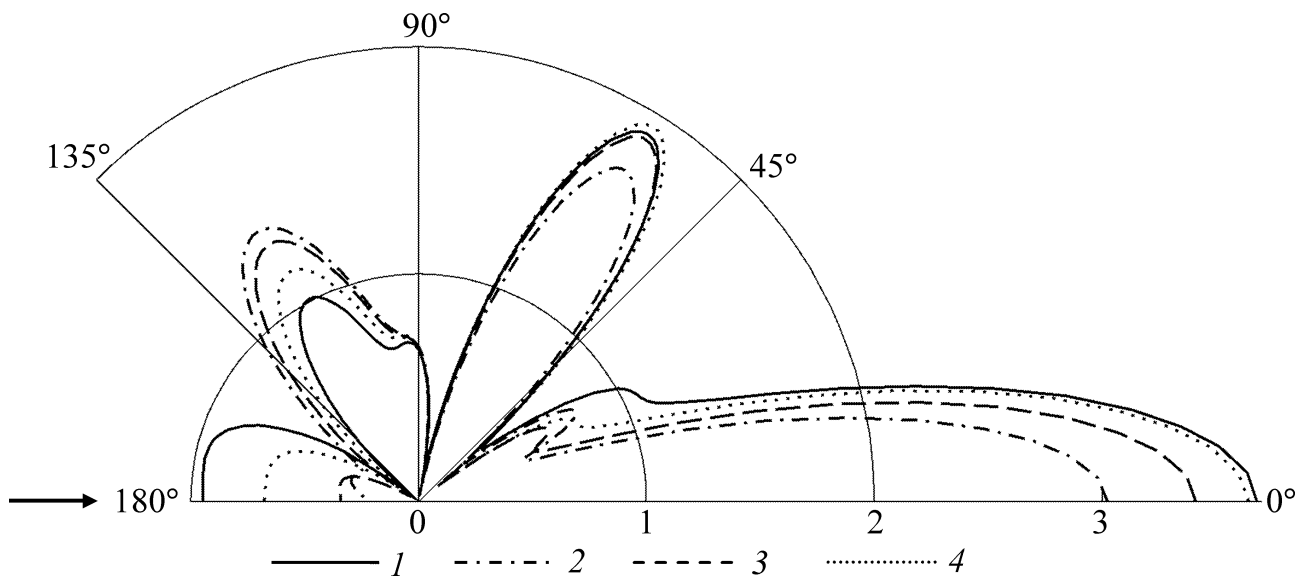


Рис. 2.6.13. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны для термоупругого цилиндра с покрытием из различных материалов: 1 — непрерывно-слоистый термоупругий материал, 2, 3, 4 — дискретно-слоистый материал с однородными термоупругими слоями (2 — $N = 3$, 3 — $N = 6$, 4 — $N = 9$); стрелка — направление распространения падающей плоской волны

Из рисунков видно, что с увеличением количества однородных слоев в многослойном покрытии кривые зависимостей амплитуды рассеяния звука от волнового размера цилиндра и от угла наблюдения для цилиндра с непрерывно-слоистым и дискретно-слоистым термоупругими покрытиями сближаются. Это показывает возможность моделирования непрерывно-слоистого термоупругого покрытия цилиндра покрытием, состоящим из системы однородных термоупругих цилиндрических слоев.

Отметим, что в работе [94] осуществлено математическое моделирование упругого непрерывно-слоистого покрытия цилиндра дискретно-слоистым покрытием.

Заметим также, что многослойные материалы имеют определенные недостатки, в частности, склонность к расслаиванию в процессе эксплуатации. В связи с этим в работе [200] на основе регрессионного анализа показана возможность численной реализации дискретно-слоистого покрытия упругого цилиндра непрерывно-слоистым покрытием с почти полным сохранением звукоотражающих свойств цилиндрического тела.

2.7. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом шаре с неоднородным покрытием

В настоящем разделе решены задачи о дифракции звука на однородном термоупругом шаре с покрытием. Рассмотрены случаи непрерывно-слоистого и дискретно-слоистого термоупругих покрытий.

2.7.1. Случай непрерывно-слоистого покрытия

Постановка задачи. Рассмотрим однородный изотропный термоупругий шар радиусом r_0 , имеющий покрытие в виде неоднородного изотропного термоупругого сферического слоя с внешним радиусом r_1 (рис. 2.7.1). Материал шара имеет плотность ρ^0 , упругие постоянные Ламе λ^0 , μ^0 , температурный коэффициент линейного расширения α_T^0 , коэффициент теплопроводности λ_T^0 , объемную теплоемкость c_ε^0 . Модули упругости $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T = \alpha_T(r)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda_T = \lambda_T(r)$ материала покрытия являются дифференцируемыми функциями координаты r сферической системы координат (r, θ, φ) , начало которой совпадает с центром шара. Плотность материала покрытия $\rho = \rho(r)$ и его удельная теплоемкость $c_\varepsilon = c_\varepsilon(r)$ являются непрерывными функциями координаты r . Источники тепла в теле отсутствуют.

Окружающая шар с покрытием жидкость является теплопроводной и имеет равновесную плотность ρ_0 , скорость звука c , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ , коэффициент температурного расширения α^T , теплопроводность λ^T , температуропроводность χ^T . Считаем, что в невозмущенном состоянии тело и жидкость имеют одну и ту же постоянную температуру T_0 .

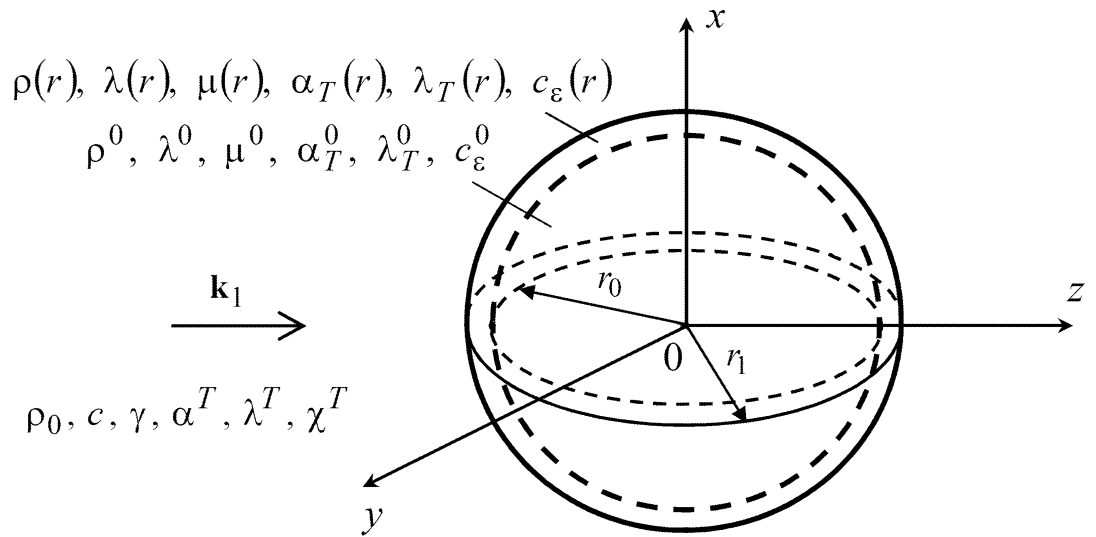


Рис. 2.7.1. Схема задачи

Пусть из внешнего пространства на шар с покрытием падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi_i = A_i \exp[i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)], \quad (2.7.1)$$

где A_i – амплитуда волны; \mathbf{k}_1 – волновой вектор; \mathbf{r} – радиус-вектор; ω – круговая частота. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается. Без ограничения общности будем полагать, что падающая волна распространяется в направлении $\theta = 0$. Тогда в сферической системе координат выражение (2.7.1) запишется в виде

$$\Psi_i(r, \theta) = A_i \exp(ik_1 r \cos \theta),$$

где k_1 – волновое число звуковых волн в жидкости (см. (1.2.14)).

Определим волновые поля в жидкости и термоупругом теле.

Уравнения волновых полей. Ввиду осевой симметрии задачи и свойств материалов шара и покрытия искомые волновые поля не будут зависеть от координаты φ .

Потенциал скоростей падающей волны может быть представлен разложением [49]

$$\Psi_i(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n j_n(k_1 r) P_n(\cos \theta), \quad (2.7.2)$$

где $\alpha_n = A_i i^n (2n+1)$; $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя порядка n ; $P_n(x)$ – многочлен Лежандра степени n .

Представим вектор скорости частиц жидкости в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad}(\Psi_i + \Psi_1 + \Psi_2),$$

где потенциал рассеянной звуковой волны Ψ_1 и потенциал возбужденной тепловой волны Ψ_2 являются решениями уравнений Гельмгольца (1.2.17) в сферической системе координат. Учитывая условия излучения на бесконечности (1.2.37), отвечающие уходящим от тела волнам, решения этих уравнений будем искать в виде

$$\Psi_q(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{qn} h_n(k_q r) P_n(\cos \theta), \quad q = 1, 2, \quad (2.7.3)$$

где $h_n(x)$ – сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Волновые поля в однородном термоупругом шаре будем описывать уравнениями линейной связанной динамической задачи термоупругости (1.2.22), (1.2.23). Запишем вектор смещения частиц в однородном шаре через потенциалы продольных термоупругих волн Φ_1 , Φ_2 и поперечных упругих волн Φ_3 в виде (2.5.5). Эти потенциальные функции являются решениями уравнений Гельмгольца (2.5.6) в сферической системе координат. В силу осевой симметрии задачи $\Phi_3 = \Phi_3(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi$, где \mathbf{e}_φ – единичный вектор оси φ . Тогда векторное уравнение Гельмгольца сводится к одному скалярному уравнению

$$\Delta \Phi_3 + \left(\kappa_3^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \Phi_3 = 0.$$

Учитывая условие ограниченности, функции Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 будем искать в виде

$$\begin{aligned}
& (\Phi_1(r, \theta), \Phi_2(r, \theta), \Phi_3(r, \theta)) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \left(W_{1n} j_n(\kappa_1 r), W_{2n} j_n(\kappa_2 r), W_{3n} j_n(\kappa_3 r) \frac{d}{d\theta} \right) P_n(\cos \theta). \quad (2.7.4)
\end{aligned}$$

Волновые поля в неоднородном покрытии опишем системой уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела (1.2.39) – (1.2.42), записанных в сферической системе координат ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$). Эта система уравнений включает уравнения движения сплошной среды

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) = -\rho \omega^2 u_r, \\
& \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{r\theta}] = -\rho \omega^2 u_\theta
\end{aligned} \quad (2.7.5)$$

и уравнение притока тепла

$$\lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\lambda'_T + \frac{2\lambda_T}{r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda_T}{r^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + i\omega T_0 \beta \operatorname{div} \mathbf{u} = -i\omega c_\varepsilon T \quad (2.7.6)$$

(здесь и далее штрих означает дифференцирование по аргументу). Компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ связаны с компонентами тензора деформаций ε_{rr} , $\varepsilon_{r\theta}$, $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ и изменением температуры T в покрытии соотношениями Дюгамеля — Неймана

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T, \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}, \\
& \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T,
\end{aligned} \quad (2.7.7)$$

где

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} (u_r + u_\theta \operatorname{ctg} \theta), \\
& \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right], \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi},
\end{aligned}$$

u_r, u_θ – радиальная и тангенциальная компоненты вектора смещения \mathbf{u} в покрытии.

Вводя в рассмотрение вспомогательную функцию u_2 [39], такую что $u_\theta = \partial u_2 / \partial \theta$, систему уравнений (2.7.5) – (2.7.7) можно привести к виду

$$\left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\lambda'}{r} - \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} L + \rho\omega^2 \right) u_r + \frac{1}{r} \left((\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} + \lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) L u_2 - \left(\beta \frac{\partial}{\partial r} + \beta' \right) T = 0, \quad (2.7.8)$$

$$\frac{1}{r} \left((\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} + \mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \left(\mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\mu' + \frac{2\mu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} L_1 + \rho\omega^2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{\beta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad (2.7.9)$$

$$\left(\lambda_T \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\lambda'_T + \frac{2\lambda_T}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda_T}{r^2} L + i\omega c_\varepsilon \right) T + i\omega T_0 \beta \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) u_r + \frac{i\omega T_0 \beta}{r} L u_2 = 0, \quad (2.7.10)$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad L_1 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

Функции u_r, u_2, T будем искать в виде разложений по многочленам Лежандра

$$(u_r(r, \theta), u_2(r, \theta), T(r, \theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} (U_{1n}(r), U_{2n}(r), U_{3n}(r)) P_n(\cos \theta), \quad (2.7.11)$$

где $U_{1n}(r), U_{2n}(r), U_{3n}(r)$ – неизвестные распределения компонент вектора смещения и изменения температуры по толщине покрытия.

Подставим ряды (2.7.11) в систему уравнений (2.7.8) – (2.7.10). Используя дифференциальные уравнения для многочленов Лежандра и присоединенных многочленов Лежандра [49]

$$\frac{d^2 P_n(\cos\theta)}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0,$$

$$\frac{d^2 P_n^1(\cos\theta)}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} + \left(n(n+1) - \frac{1}{\sin^2\theta} \right) P_n^1(\cos\theta) = 0$$

($P_n^1(\cos\theta) = -dP_n(\cos\theta)/d\theta$ – присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка 1), а также условие ортогональности [49]

$$\int_0^\pi P_n^k(\cos\theta) P_\tau^k(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \delta_{n\tau} \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \quad k=0,1$$

($\delta_{n\tau}$ – символ Кронекера), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $U_{mn}(r)$ ($m=1,2,3$) для каждого значения $n=0,1,2,\dots$

$$A_n \mathbf{U}_n'' + B_n \mathbf{U}_n' + C_n \mathbf{U}_n = 0, \quad \mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})^T, \quad (2.7.12)$$

где

$$A_n = \operatorname{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}, \quad B_n = (b_{ms})_{3 \times 3}, \quad C_n = (c_{ms})_{3 \times 3},$$

$$a_{11} = \lambda + 2\mu, \quad a_{22} = \mu, \quad a_{33} = \lambda_T,$$

$$b_{11} = \lambda' + 2\mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r}, \quad b_{12} = -n(n+1) \frac{\lambda + \mu}{r}, \quad b_{13} = -\beta,$$

$$b_{21} = \frac{\lambda + \mu}{r}, \quad b_{22} = \mu' + \frac{2\mu}{r}, \quad b_{23} = b_{32} = 0, \quad b_{31} = i\omega T_0 \beta, \quad b_{33} = \lambda'_T + \frac{2\lambda_T}{r},$$

$$c_{11} = \frac{2\lambda'}{r} - \frac{2(\lambda + 2\mu) + n(n+1)\mu}{r^2} + \rho\omega^2,$$

$$c_{12} = -\frac{n(n+1)}{r} \left(\lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right), \quad c_{13} = -\beta',$$

$$c_{21} = \frac{1}{r} \left[\mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right], \quad c_{22} = -\frac{\mu'}{r} - n(n+1) \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \rho\omega^2, \quad c_{23} = -\frac{\beta}{r},$$

$$c_{31} = \frac{2i\omega T_0\beta}{r}, \quad c_{32} = -n(n+1)\frac{i\omega T_0\beta}{r}, \quad c_{33} = -n(n+1)\frac{\lambda_T}{r^2} + i\omega c_\varepsilon.$$

Индекс n , которым должны быть снабжены элементы матриц, здесь и в дальнейшем для простоты записи опускаем.

Граничные условия на внешней поверхности покрытия включают равенство нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, равенство нормального напряжения и акустического давления, условие отсутствия касательного напряжения, условие непрерывности акустической температуры и теплового потока:

$$r = r_1 : -i\omega u_r = \mathfrak{F}_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad T = \Theta, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda^T \frac{\partial \Theta}{\partial r}. \quad (2.7.13)$$

На внутренней поверхности покрытия должны быть непрерывны компоненты вектора смещения частиц взаимодействующих однородной и неоднородной термоупругих сред, нормальные и касательные напряжения, температура и тепловой поток:

$$r = r_0 : u_r = u_r^0, \quad u_\theta = u_\theta^0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^0, \\ T = T^0, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_T^0 \frac{\partial T^0}{\partial r}. \quad (2.7.14)$$

Нормальная компонента скорости частиц жидкости \mathfrak{F}_r , акустическое давление p и акустическая температура Θ определяются из выражений (2.6.16).

Составляющие вектора смещения u_r^0 , u_θ^0 в однородном шаре определяются из выражений

$$u_r^0 = \frac{\partial}{\partial r}(\Phi_1 + \Phi_2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \Phi_3), \quad u_\theta^0 = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{\partial}{\partial r}(r \Phi_3) \right],$$

а изменение температуры T^0 – из выражения (2.5.19). Компоненты тензора напряжений σ_{rr}^0 , $\sigma_{r\theta}^0$ связаны с величинами u_r^0 , u_θ^0 , T^0 соотношениями Дюгамеля — Неймана вида (2.7.7) и записываются через функции Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 :

$$\sigma_{rr}^0 = \sum_{q=1}^2 \left(2\mu^0 \frac{\partial^2 \Phi_q}{\partial r^2} + \eta_q \Phi_q \right) + 2\mu^0 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \Phi_3 \right) \right],$$

$$\sigma_{r\theta}^0 = \frac{2\mu^0}{r} \sum_{q=1}^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Phi_q}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_q \right) + \mu^0 \left(\frac{2}{r^2} \Phi_3 - \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} \right) + \frac{\mu^0}{r^2} L_1(\Phi_3),$$

где $\eta_q = 2\mu^0 \kappa_q^2 - (\lambda^0 + 2\mu^0) k_l^2$, $q = 1, 2$.

Рассмотрим граничные условия (2.7.13). Из условия равенства нормальных скоростей и условия непрерывности акустической температуры находим выражения для коэффициентов V_{1n} , V_{2n} в рядах (2.7.3):

$$r = r_1 : \mathbf{V}_n = (D_n^{-1} E_n) \mathbf{U}_n - D_n^{-1} \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{V}_n = (V_{1n}, V_{2n})^T, \quad (2.7.15)$$

где

$$\mathbf{a}_n = (k_1 j_n'(k_1 r), \zeta_1 j_n(k_1 r))^T \alpha_n, \quad D_n = (d_{\alpha q})_{2 \times 2}, \quad E_n = (e_{\alpha m})_{2 \times 3},$$

$$d_{1q} = k_q h_n'(k_q r), \quad d_{2q} = \zeta_q h_n(k_q r), \quad q = 1, 2,$$

$$e_{11} = -i\omega, \quad e_{12} = e_{13} = e_{21} = e_{22} = 0, \quad e_{23} = 1$$

(выражение для ζ_q ($q = 1, 2$) дано в пояснениях к формуле (2.6.17)).

Из оставшихся трех граничных условий (2.7.13) находим

$$r = r_1 : A_n \mathbf{U}'_n + F_n \mathbf{U}_n = G_n \mathbf{V}_n + \mathbf{b}_n, \quad (2.7.16)$$

где

$$\mathbf{b}_n = \left(-i\omega \rho_0 j_n(k_1 r), 0, \lambda^T \zeta_1 k_1 j_n'(k_1 r) \right)^T \alpha_n, \quad F_n = (f_{ms})_{3 \times 3}, \quad G_n = (g_{mq})_{3 \times 2},$$

$$f_{11} = \frac{2\lambda}{r}, \quad f_{12} = -n(n+1) \frac{\lambda}{r}, \quad f_{13} = -\beta,$$

$$f_{21} = \frac{\mu}{r}, \quad f_{22} = -\frac{\mu}{r}, \quad f_{23} = f_{31} = f_{32} = f_{33} = 0,$$

$$g_{1q} = -i\omega \rho_0 h_n(k_q r), \quad g_{2q} = 0, \quad g_{3q} = \lambda^T \zeta_q k_q h_n'(k_q r), \quad q = 1, 2.$$

После подстановки выражения (2.7.15) в формулу (2.7.16) получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.7.12) на внешней поверхности покрытия:

$$r = r_1 : A_n \mathbf{U}'_n + L_n^{(1)} \mathbf{U}_n = \mathbf{c}_n, \quad (2.7.17)$$

где $L_n^{(1)} = F_n - G_n (D_n^{-1} E_n)$, $\mathbf{c}_n = \mathbf{b}_n - (G_n D_n^{-1}) \mathbf{a}_n$.

Теперь рассмотрим граничные условия (2.7.14). Из условия непрерывности компонентов вектора смещения и условия непрерывности температуры находим выражения для коэффициентов W_{mn} ($m = 1, 2, 3$) в рядах (2.7.4):

$$r = r_0 : \mathbf{W}_n = T_n^{-1} \mathbf{U}_n, \quad \mathbf{W}_n = (W_{1n}, W_{2n}, W_{3n})^T, \quad (2.7.18)$$

где

$$T_n = (t_{ms})_{3 \times 3},$$

$$t_{1q} = Z_{1q}, \quad t_{13} = -n(n+1) \frac{1}{r} Z_{03}, \quad t_{2q} = \frac{1}{r} Z_{0q}, \quad t_{23} = -\left(\frac{1}{r} Z_{03} + Z_{13} \right),$$

$$t_{3q} = \beta_q Z_{0q}, \quad t_{33} = 0, \quad q = 1, 2,$$

$$Z_{0m} = j_n(\kappa_m r), \quad Z_{1m} = \kappa_m j'_n(\kappa_m r), \quad m = 1, 2, 3$$

(выражение для β_q ($q = 1, 2$) дано в пояснениях к формуле (2.6.20)).

Из условия непрерывности компонентов тензора напряжений и условия непрерывности теплового потока находим

$$r = r_0 : A_n \mathbf{U}'_n + F_n \mathbf{U}_n = Y_n \mathbf{W}_n, \quad (2.7.19)$$

где

$$Y_n = (y_{ms})_{3 \times 3},$$

$$y_{1q} = 2\mu^0 Z_{2q} + \eta_q Z_{0q}, \quad y_{13} = n(n+1) \frac{2\mu^0}{r} \left(\frac{1}{r} Z_{03} - Z_{13} \right),$$

$$y_{2q} = \frac{2\mu^0}{r} \left(Z_{1q} - \frac{1}{r} Z_{0q} \right),$$

$$y_{23} = \mu^0 \left[(2 - n(n+1)) \frac{1}{r^2} Z_{03} - Z_{23} \right], \quad y_{3q} = \lambda_T^0 \zeta_q Z_{1q}, \quad y_{33} = 0,$$

$$\eta_q = 2\mu^0 \kappa_q^2 - (\lambda^0 + 2\mu^0) \kappa_l^2, \quad q=1,2, \quad Z_{2m} = \kappa_m^2 j_n''(\kappa_m r), \quad m=1,2,3.$$

После подстановки выражения (2.7.18) в формулу (2.7.19) получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.7.12) на внутренней поверхности покрытия

$$r = r_0: A_n \mathbf{U}'_n + L_n^{(0)} \mathbf{U}_n = 0, \quad (2.7.20)$$

где $L_n^{(0)} = F_n - Y_n T_n^{-1}$.

Таким образом, система уравнений для малых возмущений неоднородного термоупругого покрытия сведена к краевой задаче (2.7.12), (2.7.17), (2.7.20). Решив эту задачу, и определив по выражениям (2.7.15), (2.7.18) коэффициенты V_{1n} , V_{2n} , W_{1n} , W_{2n} , W_{3n} в рядах (2.7.3), (2.7.4), получаем возможность исследовать волновые поля в термоупругом теле и вне его.

Решение краевой задачи методом сплайн-коллокации. Решение краевой задачи (2.7.12), (2.7.17), (2.7.20) находится методом сплайн-коллокации аналогично решению краевой задачи в п. 2.6.1. Только теперь вместо четырех искомым сплайнов (2.6.23) рассматриваются три сплайна

$$S_{mn}(r) = \sum_{k=-1}^{N+1} b_{mn}^{(k)} B_k(r), \quad m=1,2,3,$$

приближающие соответственно функции $U_{mn}(r)$ ($m = 1,2,3$). Вследствие чего, система уравнений вида (2.6.24) вместо $4N + 12$ линейных алгебраических уравнений состоит теперь из $3N + 9$ уравнений с неизвестными $b_{mn}^{(k)}$. В этой новой системе уравнений вектор \mathbf{b}_{kn} имеет вид

$$\mathbf{b}_{kn} = \left(b_{1n}^{(k-1)}, b_{2n}^{(k-1)}, b_{3n}^{(k-1)}, b_{1n}^{(k)}, b_{2n}^{(k)}, b_{3n}^{(k)}, b_{1n}^{(k+1)}, b_{2n}^{(k+1)}, b_{3n}^{(k+1)} \right)^T,$$

вектор \mathbf{S}_{Nn} состоит из трех компонентов, а матрицы $P_{0n}^{(0)}$, Q_{kn} ($k = 0,1,\dots,N$),

$P_{Nn}^{(1)}$ имеют размерность 3×9 и состоят из элементов

$$p_{ms}^{(\gamma)} = -3\hat{h}a_{ms} + \hat{h}^2 l_{ms}^{(\gamma)}, \quad p_{m,s+3}^{(\gamma)} = 4\hat{h}^2 l_{ms}^{(\gamma)},$$

$$p_{m,s+6}^{(\gamma)} = 3\hat{h}a_{ms} + \hat{h}^2 l_{ms}^{(\gamma)}, \quad \gamma = 0,1,$$

$$q_{ms} = 6a_{ms} - 3\hat{h}b_{ms} + \hat{h}^2 c_{ms}, \quad q_{m,s+3} = -12a_{ms} + 4\hat{h}^2 c_{ms},$$

$$q_{m,s+6} = 6a_{ms} + 3\hat{h}b_{ms} + \hat{h}^2 c_{ms}, \quad m, s = 1, 2, 3,$$

где $l_{ms}^{(\gamma)}$ – элементы матриц $L_n^{(\gamma)}$, присутствующих в записи краевых условий (2.7.17), (2.7.20).

Результаты расчетов. Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическую формулу для сферической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [49, 96] ($x \gg 1$)

$$h_n(x) \approx (-i)^{n+1} \frac{\exp(ix)}{x},$$

из равенства (2.7.3) при $q = 1$ получаем

$$\Psi_1(r, \theta) = \frac{A_i r_0}{2r} \exp(ik_1 r) F(\varpi, \theta).$$

Здесь

$$F(\varpi, \theta) = \frac{2}{A_i k_1 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} V_{1n} P_n(\cos \theta), \quad (2.7.21)$$

где $\varpi = |k_1| r_0$ – волновой размер шара без покрытия.

На основе полученного решения задачи проведены расчеты амплитуды рассеяния звука $|F(\varpi, \theta)|$ для находящегося в воде алюминиевого шара радиусом $r_0 = 1$ м с неоднородным покрытием из полимерного материала, имеющим толщину 0.1 м. При этом рассматривались такие же четыре вида непрерывной неоднородности покрытия, что и в п. 2.6.1. При расчетах амплитуда падающей звуковой волны полагалась равной единице.

Для сравнения амплитуда рассеянной звуковой волны рассчитывалась и для термоупругого шара без покрытия и для термоупругого шара с однородным покрытием.

Для контроля точности приближенного решения краевой задачи (для каждого значения n) расчеты проводились на сгущающихся сетках, причем каждая следующая сетка была в два раза мельче предыдущей. Вычисления заканчивались, когда относительная погрешность значений $U_{mn}(r_j)$ ($m = 1, 2, 3; j = 0, 1$) на последней паре сеток не превосходила 0.1%.

При суммировании ряда (2.7.21) индекс n изменялся до значения $n = 2[\varpi] + 3$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Для рассматриваемых частот увеличение n практически не сказывается на результатах расчетов.

На рис. 2.7.2 – 2.7.5 приведены графики зависимости амплитуды обратного рассеяния звука $|F(\varpi, \pi)|$ от волнового размера шара в интервале $0 < \varpi \leq 10$. Сравнение этих графиков с графиками на рис. 2.6.2 – 2.6.5 показывает, что есть общие черты влияния покрытий шара и цилиндра на величину $|F(\varpi, \pi)|$, напри-

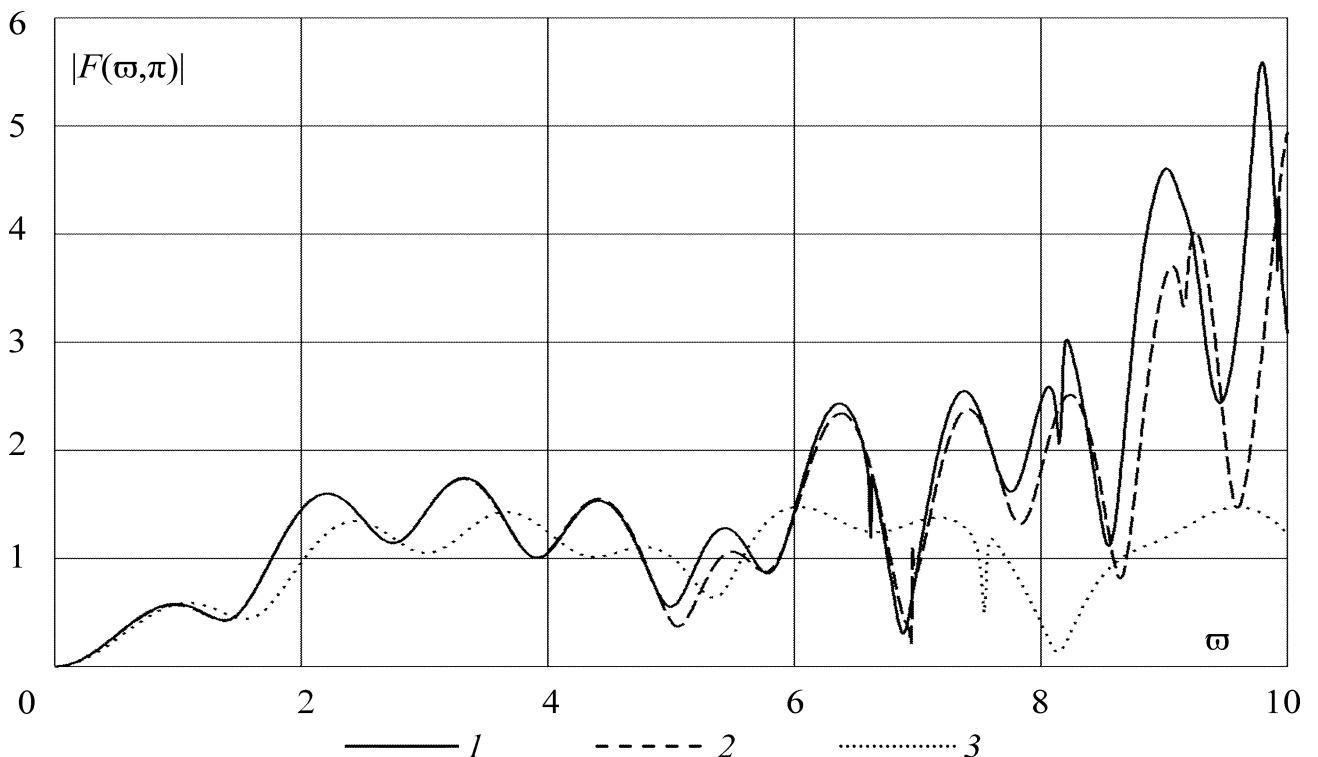


Рис. 2.7.2. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара: 1 — шар с однородным покрытием, 2 — шар с покрытием, имеющим неоднородность первого вида, 3 — шар без покрытия

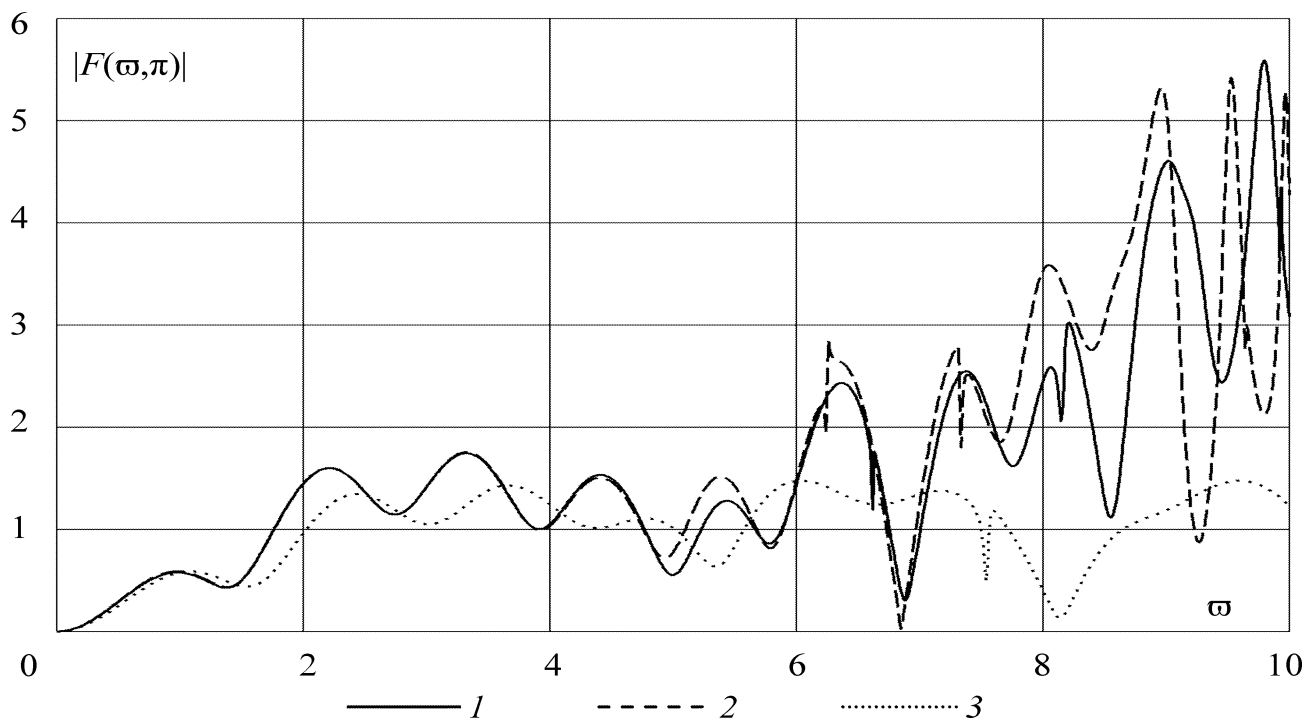


Рис. 2.7.3. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара: 1 — шар с однородным покрытием, 2 — шар с покрытием, имеющим неоднородность второго вида, 3 — шар без покрытия

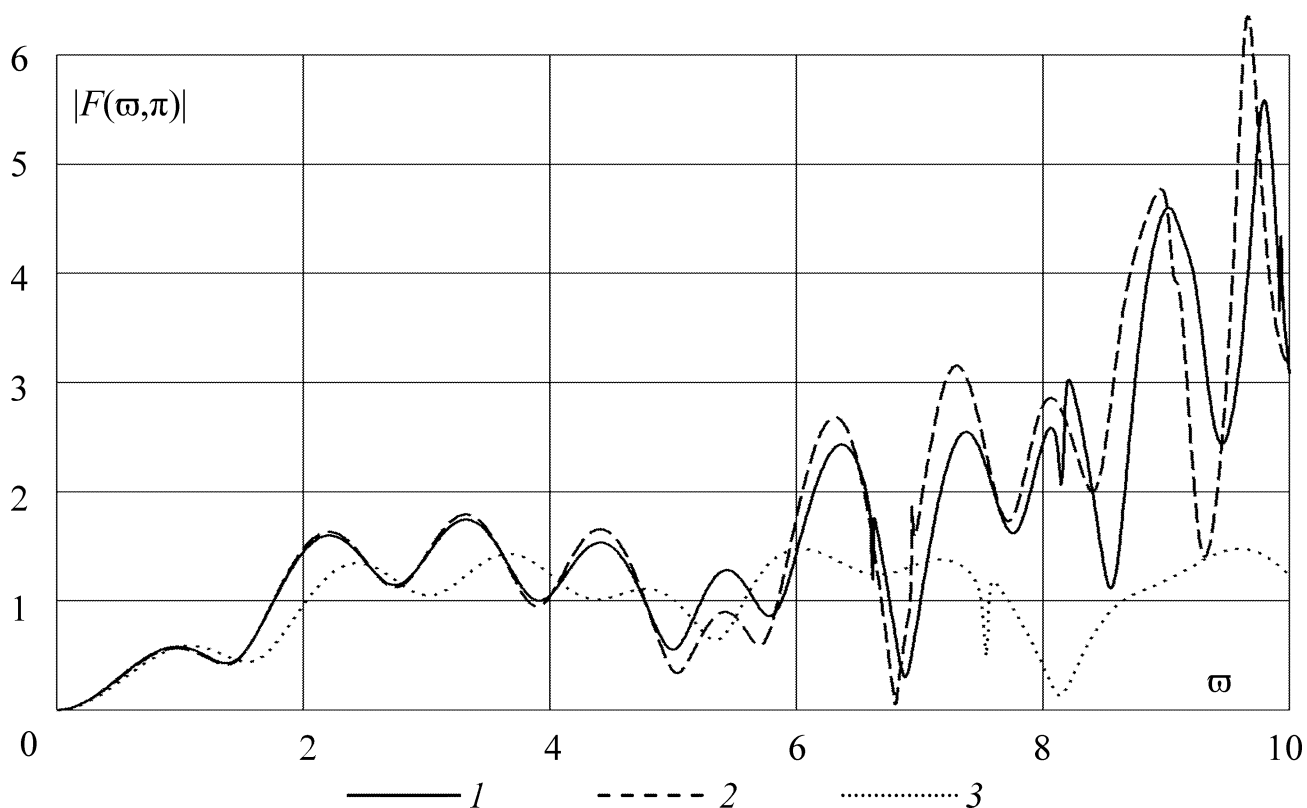


Рис. 2.7.4. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара: 1 — шар с однородным покрытием, 2 — шар с покрытием, имеющим неоднородность третьего вида, 3 — шар без покрытия

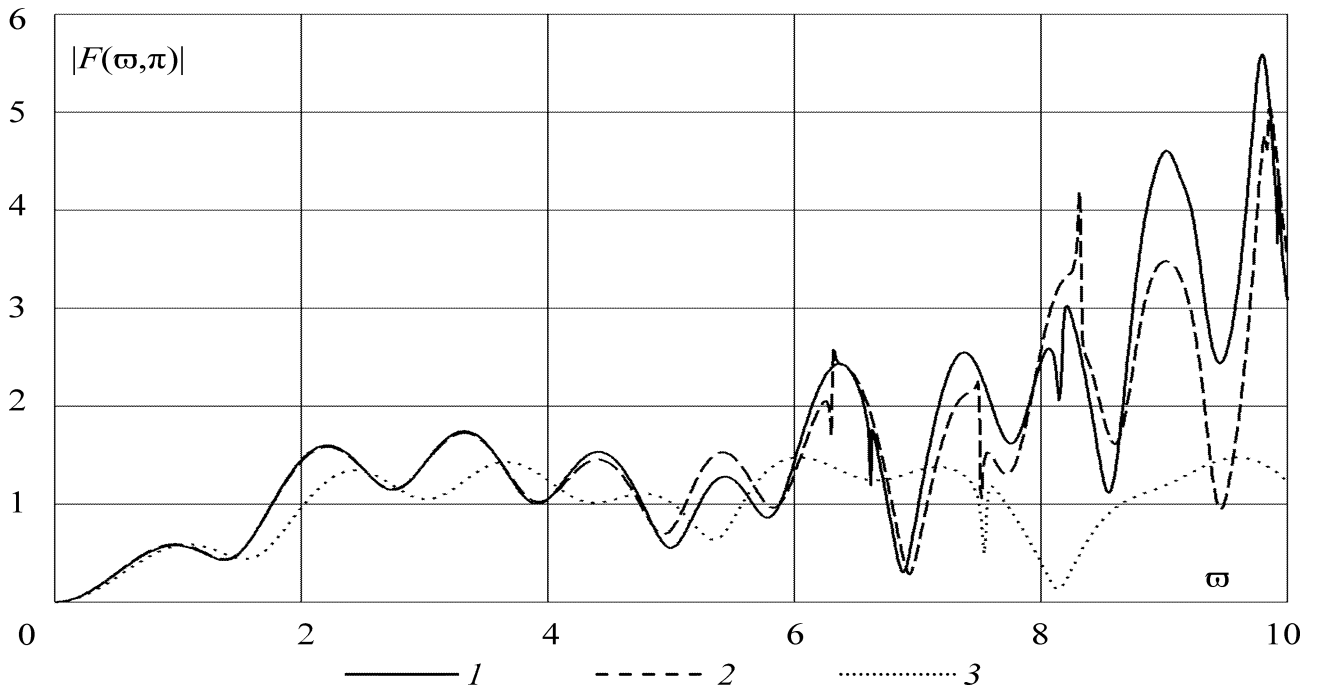


Рис. 2.7.5. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара: 1 — шар с однородным покрытием, 2 — шар с покрытием, имеющим неоднородность четвертого вида, 3 — шар без покрытия

мер, характер влияния в интервале $0 < \omega < 4$, увеличение резонансных частот с увеличением волнового числа ω , проявление неоднородности покрытия при $\omega > 4$. В области более высоких частот общность характера влияния покрытий нарушается. Так, в интервале $7 < \omega \leq 10$, для цилиндра с покрытием значение амплитуды обратного рассеяния звука осциллирует относительно значения, соответствующего цилиндру без покрытия, а для шара с покрытием, почти во всем этом интервале, наблюдается увеличение значения величины $|F(\omega, \pi)|$ по сравнению со значением, соответствующим непокрытому шару.

На рис. 2.7.6 – 2.7.13 представлены графики полярной диаграммы направленности амплитуды рассеянной звуковой волны в интервале $18^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ при различных значениях волнового размера шара. Стрелка на рисунках – направление распространения падающей плоской звуковой волны. Расчеты показали, что в направлении $\theta = 0^\circ$ из-за влияния покрытия происходит увеличение амплитуды рассеянной шаром звуковой волны более чем в два раза. Кроме того, на рис. 2.7.6 – 2.7.9 видно, что наличие покрытия у шара приводит к увеличе-

нию количества и изменению величины и ширины лепестков диаграммы рассеяния. Отметим, что похожие эффекты влияния покрытия на рассеяние звука наблюдались и в случае покрытия цилиндра (см. рис. 2.6.6 – 2.6.9).

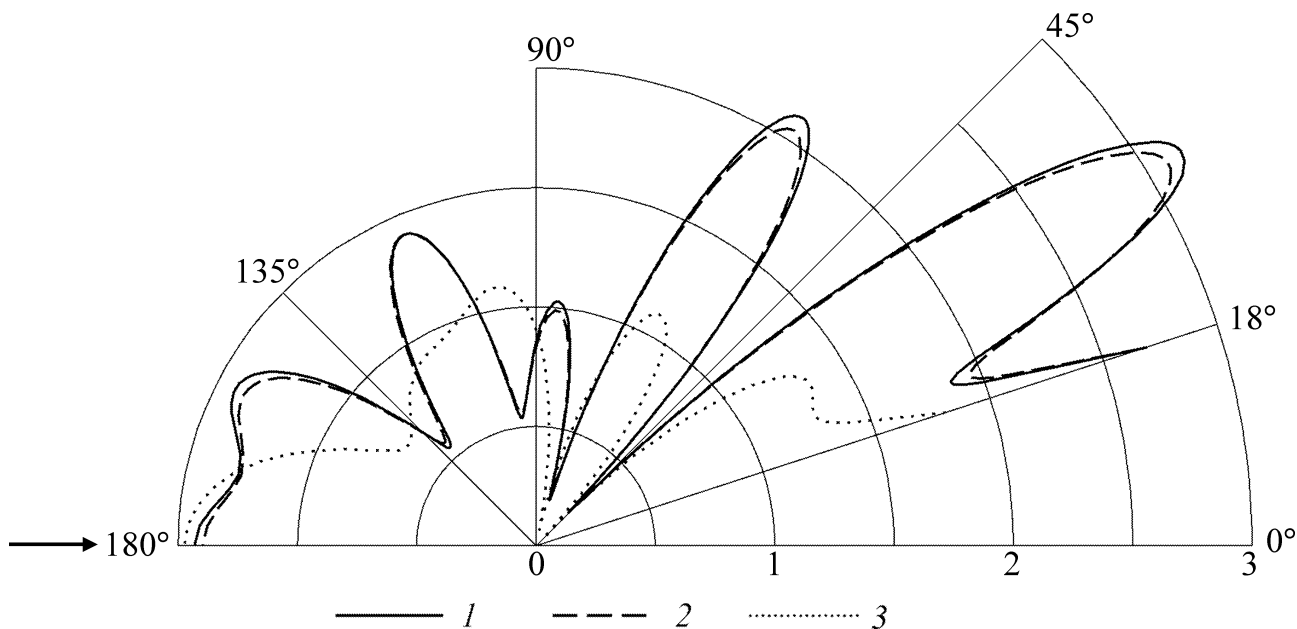


Рис. 2.7.6. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны при $\varpi = 6$: 1 — шар с однородным покрытием, 2 — шар с покрытием, имеющим неоднородность первого вида, 3 — шар без покрытия

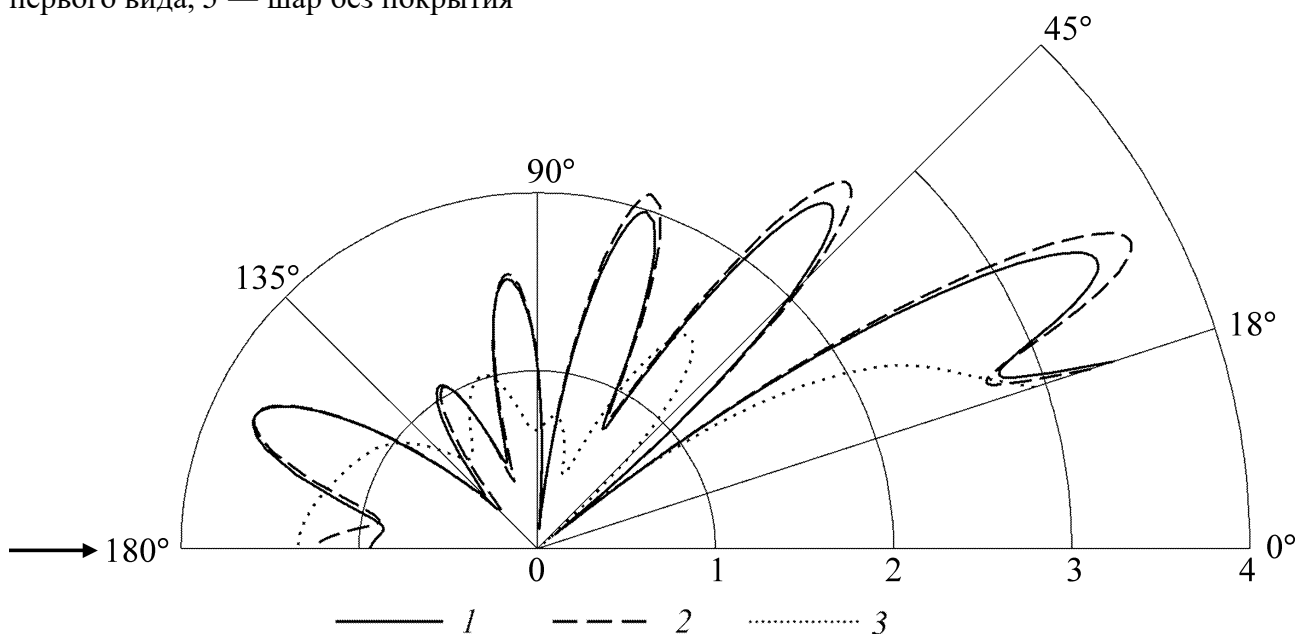


Рис. 2.7.7. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны при $\varpi = 7$: 1 — шар с однородным покрытием, 2 — шар с покрытием, имеющим неоднородность второго вида, 3 — шар без покрытия

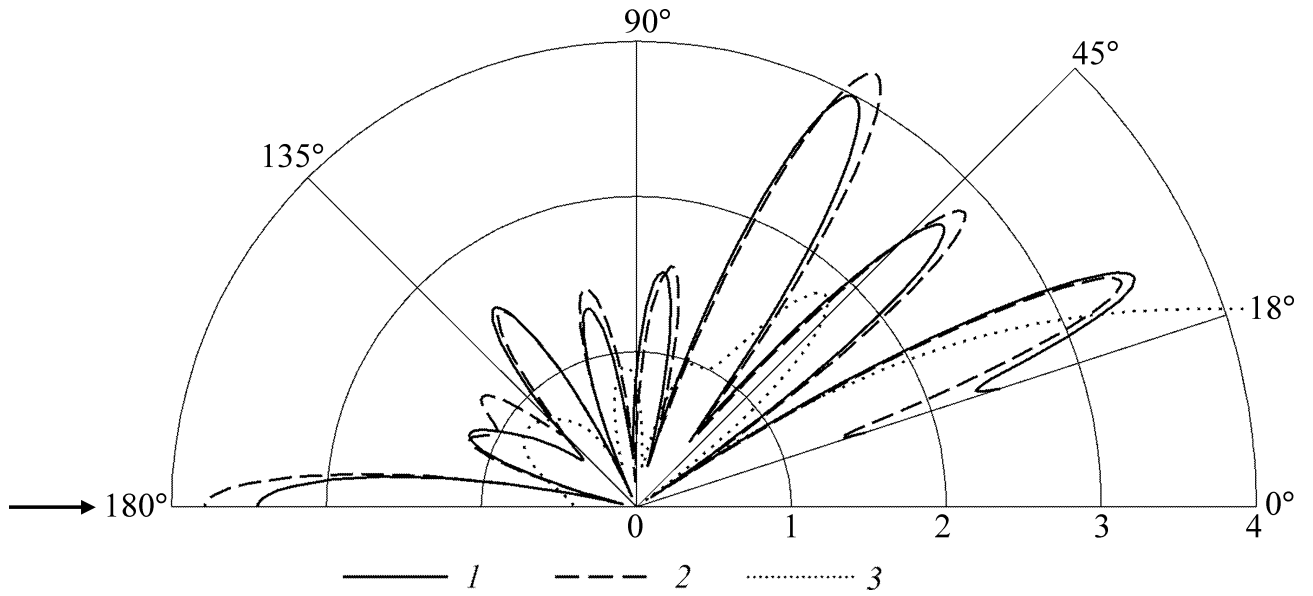


Рис. 2.7.8. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны при $\varpi = 8$: 1 — шар с однородным покрытием, 2 — шар с покрытием, имеющим неоднородность третьего вида, 3 — шар без покрытия

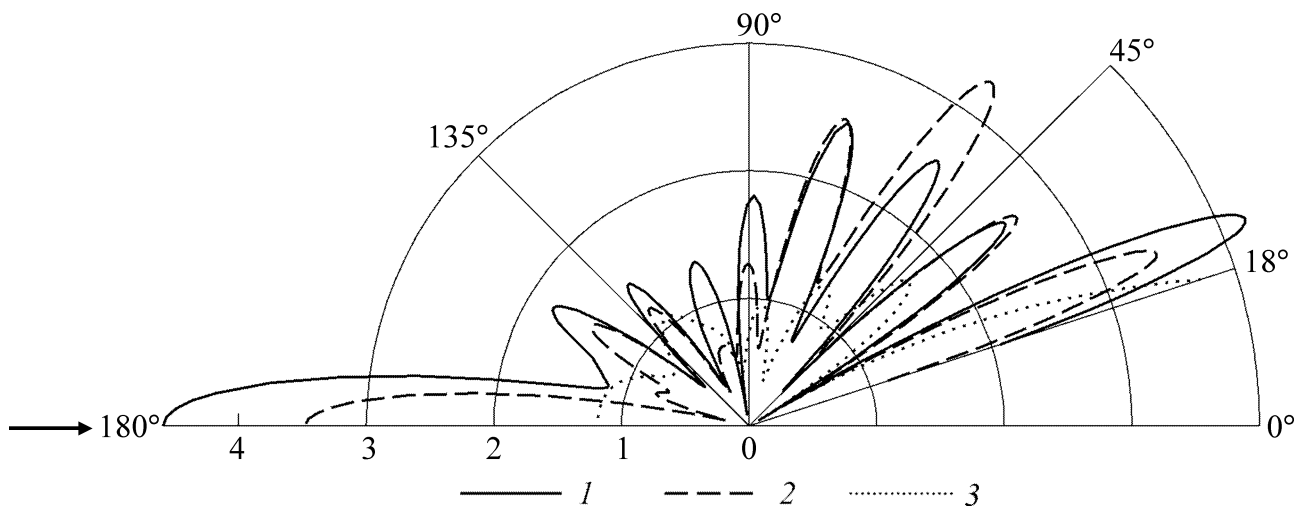


Рис. 2.7.9. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны при $\varpi = 9$: 1 — шар с однородным покрытием, 2 — шар с покрытием, имеющим неоднородность четвертого вида, 3 — шар без покрытия

Графики на рис. 2.7.10 – 2.7.13 показывают, что для разных видов неоднородности покрытия диаграммы рассеяния различаются.

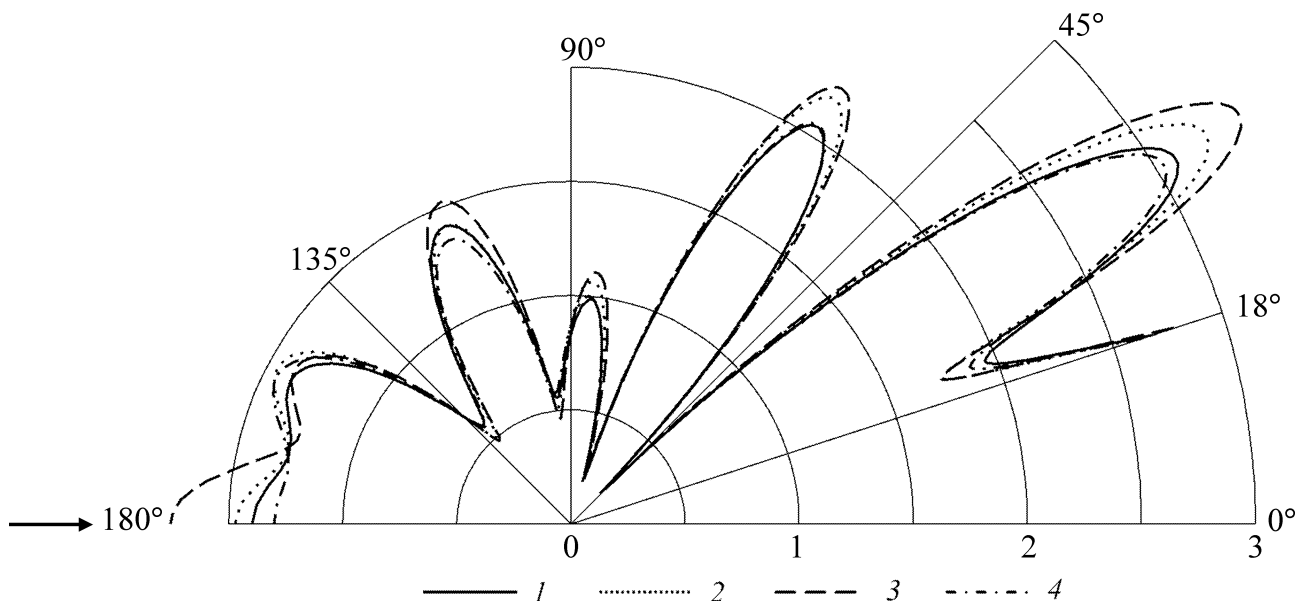


Рис. 2.7.10. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны при $\varpi = 6$ для шара с покрытием: 1 — покрытие с неоднородностью первого вида, 2 — покрытие с неоднородностью второго вида, 3 — покрытие с неоднородностью третьего вида, 4 — покрытие с неоднородностью четвертого вида

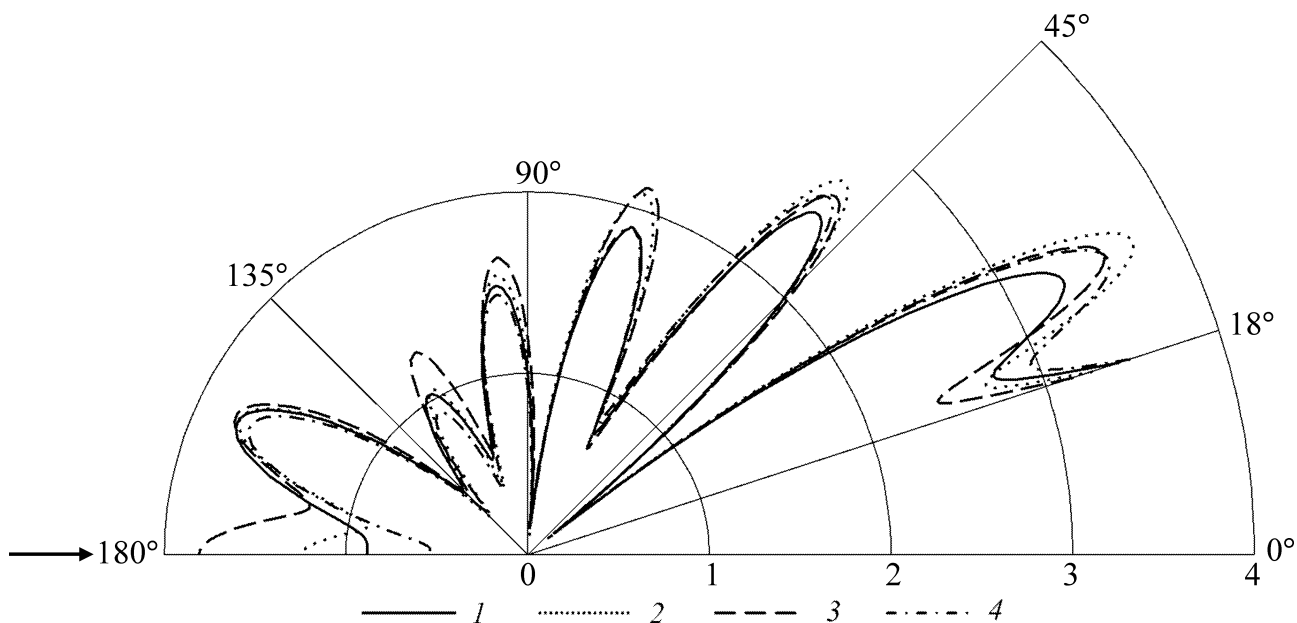


Рис. 2.7.11. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны при $\varpi = 7$ для шара с покрытием: 1 — покрытие с неоднородностью первого вида, 2 — покрытие с неоднородностью второго вида, 3 — покрытие с неоднородностью третьего вида, 4 — покрытие с неоднородностью четвертого вида

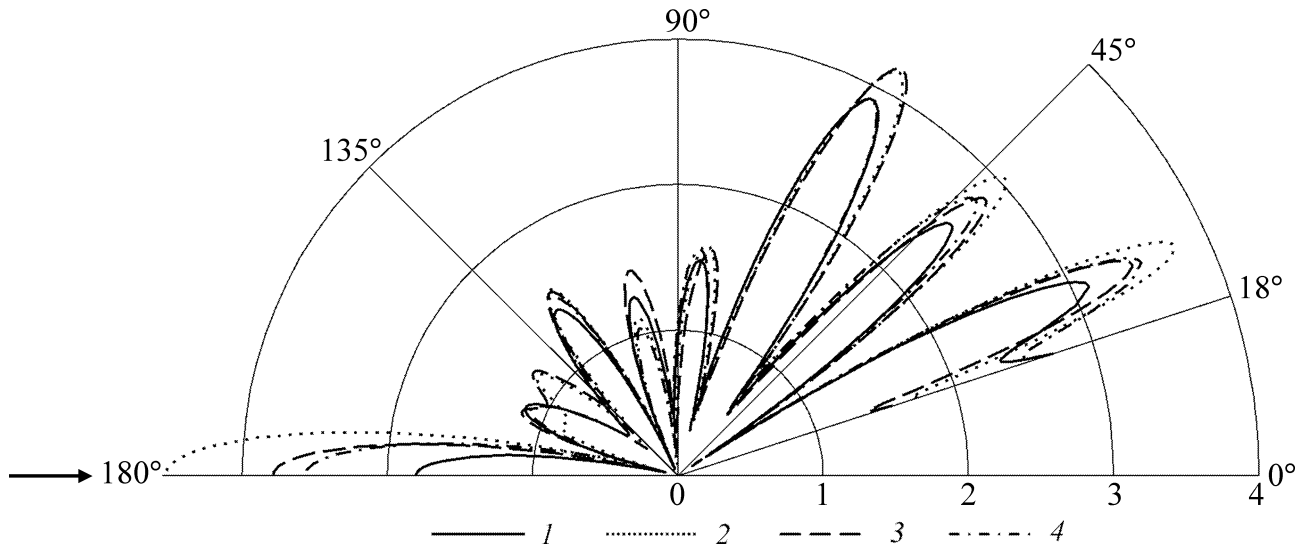


Рис. 2.7.12. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны при $\varpi = 8$ для шара с покрытием: 1 — покрытие с неоднородностью первого вида, 2 — покрытие с неоднородностью второго вида, 3 — покрытие с неоднородностью третьего вида, 4 — покрытие с неоднородностью четвертого вида

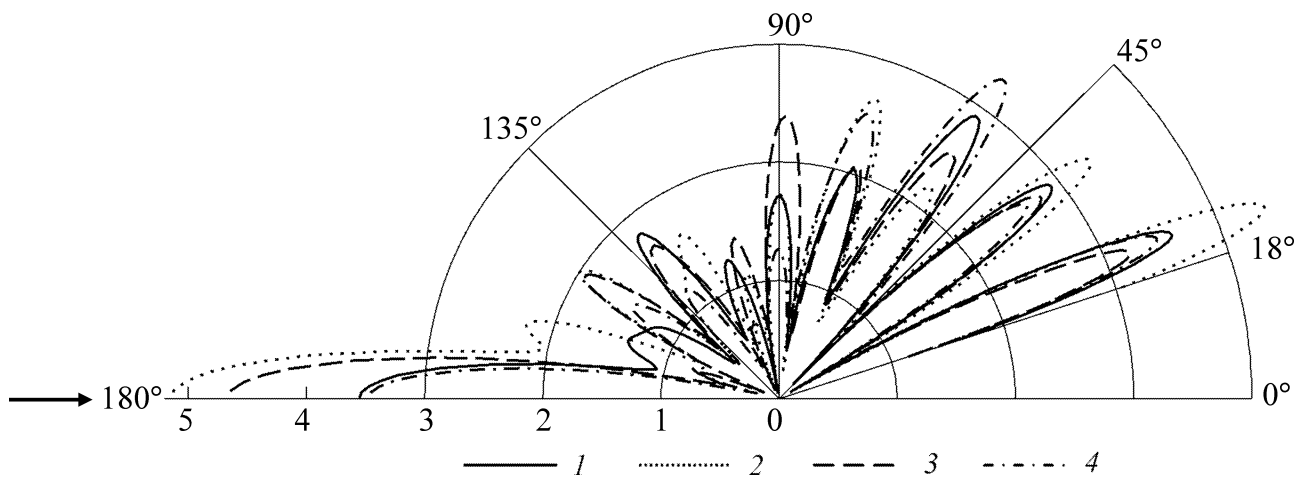


Рис. 2.7.13. Полярная диаграмма направленности амплитуды рассеянной звуковой волны при $\varpi = 9$ для шара с покрытием: 1 — покрытие с неоднородностью первого вида, 2 — покрытие с неоднородностью второго вида, 3 — покрытие с неоднородностью третьего вида, 4 — покрытие с неоднородностью четвертого вида

2.7.2. Случай дискретно-слоистого покрытия

Постановка задачи. Рассмотрим однородный изотропный термоупругий шар радиусом $r^{(0)}$. Шар имеет покрытие из N concentric однородных изотропных термоупругих сферических слоев с внешними радиусами $r^{(1)} < r^{(2)} < \dots < r^{(N)}$ (рис. 2.7.14). Материал шара ($m=0$) и материал m -го слоя ($m=1,2,\dots,N$) имеют следующие физико-механические характеристики: плотность $\rho^{(m)}$, упругие постоянные Ламе $\lambda^{(m)}$, $\mu^{(m)}$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T^{(m)}$, теплопроводность $\lambda_T^{(m)}$, объемную теплоемкость $c_\varepsilon^{(m)}$. Источники тепла в термоупругом теле отсутствуют.

m -й ($m = 1, 2, \dots, N$)
однородный термоупругий
сферический слой

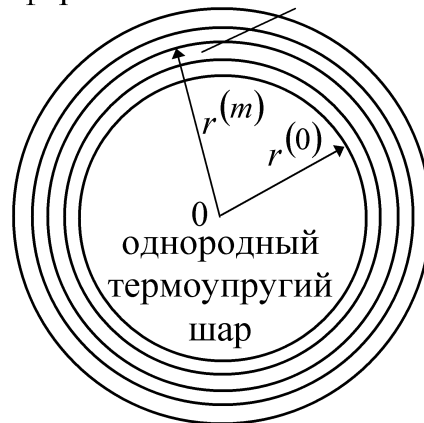


Рис. 2.7.14. Сечение шара с дискретно-слоистым покрытием диаметральной плоскостью

Окружающая тело жидкость – теплопроводная, ее равновесная плотность ρ_0 , скорость звука c , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ , коэффициент температурного расширения α^T , теплопроводность λ^T , температуропроводность χ^T . Считаем, что в невозмущенном состоянии тело и жидкость имеют одну и ту же постоянную температуру T_0 .

Пусть из жидкости на шар с покрытием падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой имеет вид (2.7.1). Введем сферическую систему ко-

ординат (r, θ, φ) с началом в центре шара. Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении $\theta = 0$.

Определим волновые поля в жидкости и термоупругом теле.

Уравнения волновых полей. Вследствие осевой симметрии задачи и свойств материалов шара и покрытия искомые волновые поля не зависят от координаты φ .

Потенциал скоростей падающей волны представим в виде ряда (2.7.2), а искомые потенциалы рассеянной звуковой и возбужденной тепловой волн в жидкости – в виде рядов (2.7.3).

Определим волновые поля в шаре с покрытием на основе линейной связанной динамической задачи термоупругости (1.2.22), (1.2.23). Смещение частиц в шаре ($m = 0$) и в m -м слое покрытия ($m = 1, 2, \dots, N$) запишем через потенциалы термоупругих волн $\Phi_1^{(m)}$, $\Phi_2^{(m)}$ и потенциал упругих волн $\Phi_3^{(m)}$ в виде (2.6.26). Эти потенциальные функции являются решениями уравнений Гельмгольца (2.5.35) в сферической системе координат. В силу осевой симметрии задачи единственной отличной от нуля составляющей векторного потенциала $\Phi_3^{(m)}$ будет азимутальная составляющая $\Phi_3^{(m)}$. Тогда векторное уравнение Гельмгольца сводится к одному скалярному уравнению

$$\Delta \Phi_3^{(m)} + \left(\kappa_3^{(m)2} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \Phi_3^{(m)} = 0.$$

Функции $\Phi_1^{(m)}$, $\Phi_2^{(m)}$, $\Phi_3^{(m)}$ ($m = 0, 1, \dots, N$) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(m)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_{1n}^{(m)} j_n(\kappa_1^{(m)} r) + B_{2n}^{(m)} h_n(\kappa_1^{(m)} r) \right] P_n(\cos \theta), \\ \Phi_2^{(m)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{1n}^{(m)} j_n(\kappa_2^{(m)} r) + C_{2n}^{(m)} h_n(\kappa_2^{(m)} r) \right] P_n(\cos \theta), \\ \Phi_3^{(m)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[D_{1n}^{(m)} j_n(\kappa_3^{(m)} r) + D_{2n}^{(m)} h_n(\kappa_3^{(m)} r) \right] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2.7.22)$$

При этом с учетом условия ограниченности функций $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(0)}$, $\Phi_3^{(0)}$ будем иметь

$$B_{2n}^{(0)} = C_{2n}^{(0)} = D_{2n}^{(0)} = 0.$$

Неизвестные коэффициенты в рядах, описывающих искомые потенциалы рассеянной звуковой и возбужденной тепловой волн в жидкости, и в рядах (2.7.22) должны быть определены из граничных условий.

На соприкасающейся с жидкостью поверхности сферического тела граничные условия включают равенство нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, равенство нормального напряжения и акустического давления, условие отсутствия касательного напряжения, условие непрерывности акустической температуры и теплового потока:

$$\begin{aligned} r = r^{(N)} : -i\omega u_r^{(N)} = \mathfrak{F}_r, \quad \sigma_{rr}^{(N)} = -p, \quad \sigma_{r\theta}^{(N)} = 0, \\ T^{(N)} = \Theta, \quad \lambda_T^{(N)} \frac{\partial T^{(N)}}{\partial r} = \lambda^T \frac{\partial \Theta}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.7.23)$$

На поверхностях, разделяющих термоупругие среды, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц этих сред, нормальные и касательные напряжения, температура и тепловой поток:

$$\begin{aligned} r = r^{(m-1)} : u_r^{(m-1)} = u_r^{(m)}, \quad u_\theta^{(m-1)} = u_\theta^{(m)}, \quad \sigma_{rr}^{(m-1)} = \sigma_{rr}^{(m)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(m-1)} = \sigma_{r\theta}^{(m)}, \\ T^{(m-1)} = T^{(m)}, \quad \lambda_T^{(m-1)} \frac{\partial T^{(m-1)}}{\partial r} = \lambda_T^{(m)} \frac{\partial T^{(m)}}{\partial r}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.7.24)$$

Нормальная компонента скорости частиц жидкости \mathfrak{F}_r , акустическое давление p и акустическая температура Θ определяются из выражений (2.6.16). Компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}^{(m)}$, $\sigma_{r\theta}^{(m)}$ связаны с компонентами вектора смещения $u_r^{(m)}$, $u_\theta^{(m)}$ и возмущением температуры $T^{(m)}$ в m -й термоупругой среде ($m = 0, 1, \dots, N$) соотношениями Дюгамеля — Неймана вида (2.7.7). Эти соотношения, с использованием выражений

$$u_r^{(m)} = \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Phi_3^{(m)}),$$

$$u_\theta^{(m)} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi_1^{(m)} + \Phi_2^{(m)}) - \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi_3^{(m)}) \right]$$
(2.7.25)

и выражения (2.5.40) для $T^{(m)}$, записываются через функции $\Phi_1^{(m)}$, $\Phi_2^{(m)}$, $\Phi_3^{(m)}$:

$$\sigma_{rr}^{(m)} = \sum_{q=1}^2 \left(2\mu^{(m)} \frac{\partial^2 \Phi_q^{(m)}}{\partial r^2} + \eta_q^{(m)} \Phi_q^{(m)} \right) + 2\mu^{(m)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} L_1 \Phi_3^{(m)} \right),$$
(2.7.26)

$$\sigma_{r\theta}^{(m)} = \mu^{(m)} \left[\frac{2}{r} \sum_{q=1}^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Phi_q^{(m)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_q^{(m)} \right) + \frac{2}{r^2} \Phi_3^{(m)} - \frac{\partial^2 \Phi_3^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} L_2 \Phi_3^{(m)} \right],$$

где

$$L_q = \frac{\partial^q}{\partial \theta^q} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^{q-1}}{\partial \theta} - \frac{q-1}{\sin^2 \theta}, \quad q=1,2$$

(выражение для $\eta_q^{(m)}$ ($q=1,2$) дано в пояснениях к формуле (2.6.33)).

Для решения рассматриваемой задачи используем матричный метод.

Решение задачи матричным методом. Функции $u_r^{(m)}$, $u_\theta^{(m)}$, $\sigma_{rr}^{(m)}$, $\sigma_{r\theta}^{(m)}$,

$T^{(m)}$, $\lambda_T^{(m)} \frac{\partial T^{(m)}}{\partial r}$ ($m=0,1,\dots,N$), зависящие от радиальной координаты r и угло-

вой координаты θ будем искать в виде разложений по многочленам Лежандра

$$u_r^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{1n}^{(m)}(r) P_n(\cos \theta), \quad u_\theta^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}^{(m)}(r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta),$$

$$\sigma_{rr}^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{3n}^{(m)}(r) P_n(\cos \theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{4n}^{(m)}(r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta),$$
(2.7.27)

$$T^{(m)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{5n}^{(m)}(r) P_n(\cos \theta), \quad \lambda_T^{(m)} \frac{\partial T^{(m)}(r, \theta)}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{6n}^{(m)}(r) P_n(\cos \theta).$$

Для шара ($m=0$) и m -го слоя в покрытии ($m=1,2,\dots,N$) введем вектор смещения-напряжения-температуры

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r) = \left(S_{1n}^{(m)}(r), S_{2n}^{(m)}(r), S_{3n}^{(m)}(r), S_{4n}^{(m)}(r), S_{5n}^{(m)}(r), S_{6n}^{(m)}(r) \right)^T$$

и вектор коэффициентов

$$\mathbf{K}_n^{(m)} = \left(B_{1n}^{(m)}, B_{2n}^{(m)}, C_{1n}^{(m)}, C_{2n}^{(m)}, D_{1n}^{(m)}, D_{2n}^{(m)} \right)^T.$$

Связь между этими векторами определяется формулой

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r) = M_n^{(m)}(r) \mathbf{K}_n^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (2.7.28)$$

где $M_n^{(m)}(r)$ – матрица шестого порядка с элементами $M_{kl}^{(m)} = M_{kl}^{(m)}(r)$ ($r^{(m-1)} \leq r \leq r^{(m)}, r^{(-1)} = 0$), которые должны быть снабжены индексом n . Последний для простоты записи опускаем. Используя выражение (2.5.40) для $T^{(m)}$ и выражения (2.7.25) – (2.7.27), находим

$$M_{1q}^{(m)} = Y_{11}^{(m)}, \quad M_{1,q+2}^{(m)} = Y_{12}^{(m)}, \quad M_{1,q+4}^{(m)} = -n(n+1) \frac{1}{r} Y_{03}^{(m)},$$

$$M_{2q}^{(m)} = \frac{1}{r} Y_{01}^{(m)}, \quad M_{2,q+2}^{(m)} = \frac{1}{r} Y_{02}^{(m)}, \quad M_{2,q+4}^{(m)} = -\left(\frac{1}{r} Y_{03}^{(m)} + Y_{13}^{(m)} \right),$$

$$M_{3q}^{(m)} = 2\mu^{(m)} Y_{21}^{(m)} + \eta_1^{(m)} Y_{01}^{(m)}, \quad M_{3,q+2}^{(m)} = 2\mu^{(m)} Y_{22}^{(m)} + \eta_2^{(m)} Y_{02}^{(m)},$$

$$M_{3,q+4}^{(m)} = n(n+1) \frac{2\mu^{(m)}}{r} \left(\frac{1}{r} Y_{03}^{(m)} - Y_{13}^{(m)} \right),$$

$$M_{4q}^{(m)} = \frac{2\mu^{(m)}}{r} \left(Y_{11}^{(m)} - \frac{1}{r} Y_{01}^{(m)} \right), \quad M_{4,q+2}^{(m)} = \frac{2\mu^{(m)}}{r} \left(Y_{12}^{(m)} - \frac{1}{r} Y_{02}^{(m)} \right),$$

$$M_{4,q+4}^{(m)} = \mu^{(m)} \left((2 - n(n+1)) \frac{1}{r^2} Y_{03}^{(m)} - Y_{23}^{(m)} \right),$$

$$M_{5q}^{(m)} = \beta_1^{(m)} Y_{01}^{(m)}, \quad M_{5,q+2}^{(m)} = \beta_2^{(m)} Y_{02}^{(m)}, \quad M_{5,q+4}^{(m)} = M_{6,q+4}^{(m)} = 0,$$

$$M_{6q}^{(m)} = \lambda_T^{(m)} \beta_1^{(m)} Y_{11}^{(m)}, \quad M_{6,q+2}^{(m)} = \lambda_T^{(m)} \beta_2^{(m)} Y_{12}^{(m)}, \quad q = 1, 2,$$

где

$$Y_{0\alpha}^{(m)} = Z_n(\kappa_\alpha^{(m)} r), \quad Y_{1\alpha}^{(m)} = \kappa_\alpha^{(m)} Z_n'(\kappa_\alpha^{(m)} r), \quad Y_{2\alpha}^{(m)} = \kappa_\alpha^{(m)2} Z_n''(\kappa_\alpha^{(m)} r), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$Z_n(x) = \begin{cases} j_n(x) & \text{при } q=1, \\ h_n(x) & \text{при } q=2 \end{cases}$$

(выражения для $\beta_1^{(m)}$, $\beta_2^{(m)}$ даны в пояснениях к формуле (2.5.43)). Здесь и далее штрих означает дифференцирование по аргументу.

Рассмотрим произвольный m -й слой в покрытии ($m=1,2,\dots,N$). На его границах при $r=r^{(m-1)}$ и $r=r^{(m)}$ из равенств (2.7.28) получаем соотношения

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m-1)}) = M_n^{(m)}(r^{(m-1)}) \mathbf{K}_n^{(m)}, \quad \mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m)}) = M_n^{(m)}(r^{(m)}) \mathbf{K}_n^{(m)}.$$

Поскольку внутри m -го слоя вектор $\mathbf{K}_n^{(m)}$ не меняется, имеем

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m)}) = M_n^{(m)}(r^{(m)}) \left[M_n^{(m)}(r^{(m-1)}) \right]^{-1} \mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m-1)}), \quad m=1,2,\dots,N. \quad (2.7.29)$$

Подставляя выражения (2.7.27) в граничные условия (2.7.24), и используя условие ортогональности многочленов Лежандра, находим

$$\mathbf{S}_n^{(m-1)}(r^{(m-1)}) = \mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m-1)}), \quad m=1,2,\dots,N.$$

Тогда соотношение (2.7.29) принимает вид

$$\mathbf{S}_n^{(m)}(r^{(m)}) = Q_n^{(m)} \mathbf{S}_n^{(m-1)}(r^{(m-1)}), \quad m=1,2,\dots,N, \quad (2.7.30)$$

где $Q_n^{(m)} = M_n^{(m)}(r^{(m)}) \left[M_n^{(m)}(r^{(m-1)}) \right]^{-1}$.

Используя формулы (2.7.30) для каждого слоя, получаем соотношение

$$\mathbf{S}_n^{(N)}(r^{(N)}) = Q_n \mathbf{S}_n^{(0)}(r^{(0)}), \quad Q_n = Q_n^{(N)} Q_n^{(N-1)} \dots Q_n^{(1)}, \quad (2.7.31)$$

из которого следует

$$S_{kn}^{(N)}(r^{(N)}) = \sum_{l=1}^6 Q_{kl} S_{ln}^{(0)}(r^{(0)}), \quad k=1,3,4,5,6, \quad (2.7.32)$$

где Q_{kl} (индекс n опущен) – элементы матрицы Q_n . Равенство вторых компонентов векторов в левой и правой частях соотношения (2.7.31) использовать не будем, так как на границе термоупругого тела и жидкости условие непрерывности тангенциальной компоненты вектора смещения нарушается.

Подставляя разложения (2.7.27) в граничные условия (2.7.23), находим

$$\begin{aligned}
S_{1n}^{(N)}(r^{(N)}) &= i\omega^{-1}(Y_1\alpha_n + Y_{11}V_{1n} + Y_{12}V_{2n}), \\
S_{3n}^{(N)}(r^{(N)}) &= -i\omega\rho_0(Y_0\alpha_n + Y_{01}V_{1n} + Y_{02}V_{2n}), \quad S_{4n}^{(N)}(r^{(N)}) = 0, \\
S_{5n}^{(N)}(r^{(N)}) &= \zeta_1 Y_0\alpha_n + \zeta_1 Y_{01}V_{1n} + \zeta_2 Y_{02}V_{2n}, \\
S_{6n}^{(N)}(r^{(N)}) &= \lambda^T (\zeta_1 Y_1\alpha_n + \zeta_1 Y_{11}V_{1n} + \zeta_2 Y_{12}V_{2n}).
\end{aligned} \tag{2.7.33}$$

Здесь

$$Y_0 = j_n(k_1 r^{(N)}), \quad Y_1 = k_1 j'_n(k_1 r^{(N)}), \quad Y_{0q} = h_n(k_q r^{(N)}), \quad Y_{1q} = k_q h'_n(k_q r^{(N)}), \quad q = 1, 2$$

(выражения для ζ_1, ζ_2 даны в пояснениях к формуле (2.6.17)).

Из равенств (2.7.28) при $m = 0, r = r^{(0)}$ следует

$$S_{ln}^{(0)}(r^{(0)}) = M_{l1}^{(0)}(r^{(0)})B_{1n}^{(0)} + M_{l3}^{(0)}(r^{(0)})C_{1n}^{(0)} + M_{l5}^{(0)}(r^{(0)})D_{1n}^{(0)}, \quad l = 1, 2, \dots, 6. \tag{2.7.34}$$

Подставляя выражения (2.7.33), (2.7.34) в равенства (2.7.32), получаем систему пяти линейных алгебраических уравнений с неизвестными $V_{1n}, V_{2n}, B_{1n}^{(0)}, C_{1n}^{(0)}, D_{1n}^{(0)}$. Определив эти коэффициенты, можно аналитически описать волновые поля в жидкости и термоупругом теле.

Результаты расчетов. С использованием расчетов амплитуды рассеяния звука $|F(\varpi, \theta)|$ с помощью формулы

$$F(\varpi, \theta) = \frac{2}{A_i k_1 r^{(0)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} V_{1n} P_n(\cos \theta) \tag{2.7.35}$$

($\varpi = |k_1| r^{(0)}$ – волновой размер шара без покрытия), полученной аналогично выражению (2.7.21), проведен вычислительный эксперимент, в котором непрерывно-слоистое термоупругое сферическое покрытие с внутренним радиусом $r^{(0)}$ и внешним радиусом $r^{(N)}$ моделировалось системой однородных термоупругих сферических слоев с различными значениями материальных констант.

Амплитуда рассеяния звука рассчитывалась для находящегося в воде алюминиевого шара радиусом $r^{(0)} = 1$ м с покрытием из полимерного материала толщиной 0.1 м. Амплитуда падающей волны полагалась равной единице.

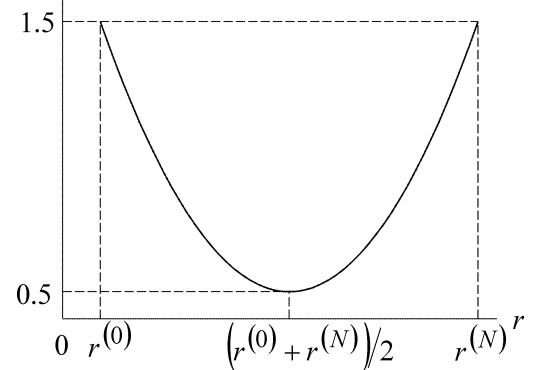
Расчеты величины $|F(\varpi, \theta)|$ проводились как для шара с покрытием из непрерывно-слоистого материала, так и для шара с многослойным покрытием. В случае непрерывно-слоистого покрытия расчеты выполнялись с использованием результатов, полученных ранее в п. 2.7.1. При этом рассматривалось покрытие неоднородное по плотности:

$$\rho(r) = \tilde{\rho}f(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda}, \quad \mu(r) = \tilde{\mu}, \quad r^{(0)} \leq r \leq r^{(N)} \quad f(r)$$

$$\alpha_T(r) = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T(r) = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon(r) = \tilde{c}_\varepsilon,$$

где

$$f(r) = 1.5 - 4 \frac{(r^{(N)} - r)(r - r^{(0)})}{(r^{(N)} - r^{(0)})^2},$$



справа на рисунке показан график функции $f(r)$.

В случае многослойного покрытия амплитуда рассеяния рассчитывалась для одинаковых по толщине однородных термоупругих слоев для $N = 2, 4, 6$. Распределение плотности по толщине дискретно-слоистого материала покрытия определялось на основе кусочно-постоянной аппроксимации функции $\rho(r)$ на интервале $[r^{(0)}, r^{(N)}]$:

$$\rho^{(m)} = \rho \left(\frac{r^{(m-1)} + r^{(m)}}{2} \right) \quad \text{при} \quad r^{(m-1)} < r \leq r^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

где $r^{(m)} = r^{(0)} + mh_N$, $h_N = (r^{(N)} - r^{(0)})/N$. Остальные физико-механические характеристики этого материала при переходе от слоя к слою не менялись:

$$\lambda^{(m)} = \tilde{\lambda}, \quad \mu^{(m)} = \tilde{\mu}, \quad \alpha_T^{(m)} = \tilde{\alpha}_T, \quad \lambda_T^{(m)} = \tilde{\lambda}_T, \quad c_\varepsilon^{(m)} = \tilde{c}_\varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Заметим, что индекс $m = 0$ соответствует физико-механическим характеристикам алюминия.

Результаты вычислительного эксперимента приведены на рис. 2.7.15, где показаны зависимость амплитуды обратного рассеяния звука $|F(\varpi, \pi)|$ от волнового размера шара в интервале $7 \leq \varpi \leq 12$ и полярная диаграмма направленности амплитуды $|F(10, \theta)|$ в угловом секторе $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

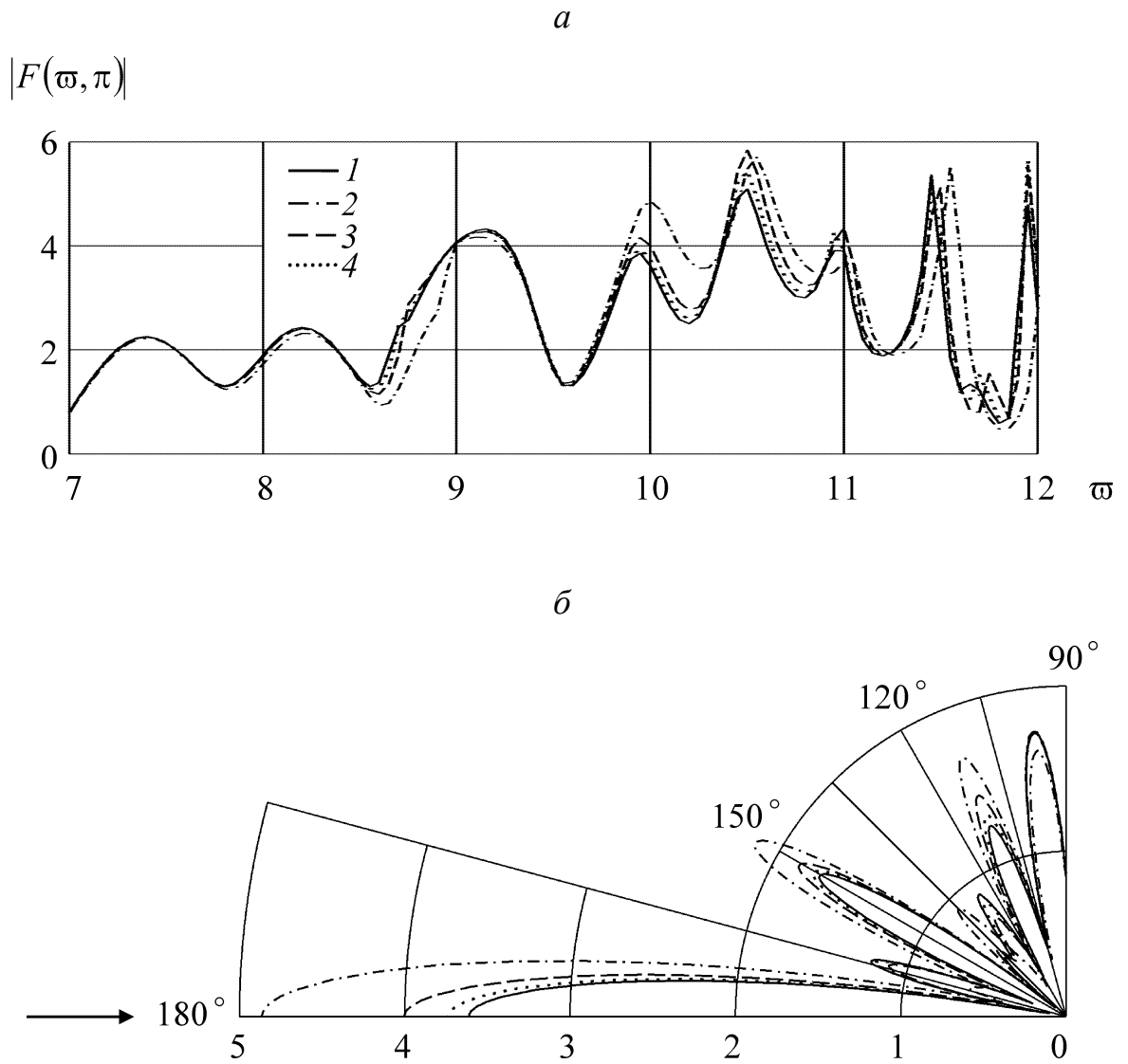


Рис. 2.7.15. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара (а) и полярная диаграмма направленности амплитуды рассеяния звука (б) для термоупругого шара с покрытием из различных материалов:

1 — непрерывно-слоистый термоупругий материал, 2–4 — дискретно-слоистый материал с однородными термоупругими слоями (2 — $N = 2$, 3 — $N = 4$, 4 — $N = 6$); стрелка — направление распространения падающей плоской волны

При суммировании ряда (2.7.35) индекс n изменялся до значения $n = 2[\varpi] + 3$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Установлено, что для рассматриваемых частот и углов наблюдения увеличение n практически не влияет на результаты расчетов.

Из рис. 2.7.15 видно, что с увеличением количества однородных слоев в многослойном покрытии зависимости амплитуды рассеяния звука от волнового размера шара и от угла наблюдения для шара с непрерывно-слоистым и дискретно-слоистым термоупругими покрытиями сближаются. Это свидетельствует о возможности моделирования непрерывно-слоистого термоупругого сферического покрытия покрытием, состоящим из системы однородных термоупругих сферических слоев.

2.8. Рассеяние термоупругим цилиндром с непрерывно-слоистым покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, в плоском волноводе

В предыдущих разделах решены дифракционные задачи, в которых рассматривались термоупругие тела в безграничном пространстве. В этом разделе получено решение задачи о рассеянии звука термоупругим телом в присутствии плоских границ.

Постановка задачи. Рассмотрим плоский волновод глубиной d , заполненный теплопроводной жидкостью с плотностью ρ_0 , скоростью звука c , отношением удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ , коэффициентом температурного расширения α^T , теплопроводностью λ^T , температуропроводностью χ^T . Полагаем, что одна граница волновода является либо абсолютно жесткой, либо акустически мягкой, а другая граница волновода близка к одной из таких идеальных границ.

В волновод помещен бесконечный однородный изотропный термоупругий цилиндр радиусом r_1 . Материал цилиндра имеет плотность ρ^0 , упругие посто-

янные Ламе λ^0 , μ^0 , температурный коэффициент линейного расширения α_T^0 , коэффициент теплопроводности λ_T^0 , объемную теплоемкость c_ε^0 . Ось вращения цилиндра параллельна стенкам волновода и совпадает с осью z цилиндрической системы координат (r, φ, z) .

Цилиндр имеет покрытие в виде коаксиального радиально-неоднородного изотропного термоупругого цилиндрического слоя с внешним радиусом r_2 . Модули упругости $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T = \alpha_T(r)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda_T = \lambda_T(r)$ материала покрытия являются дифференцируемыми функциями координаты r . Плотность материала покрытия $\rho = \rho(r)$ и его удельная теплоемкость $c_\varepsilon = c_\varepsilon(r)$ являются непрерывными функциями координаты r . Источники тепла в цилиндрическом теле отсутствуют.

В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) , связанной с цилиндрической системой координат, нижняя граница волновода определяется уравнением $y = -a$, верхняя граница – уравнением $y = b$. При этом $d = a + b$. Схема волноводной системы изображена на рис. 2.8.1.

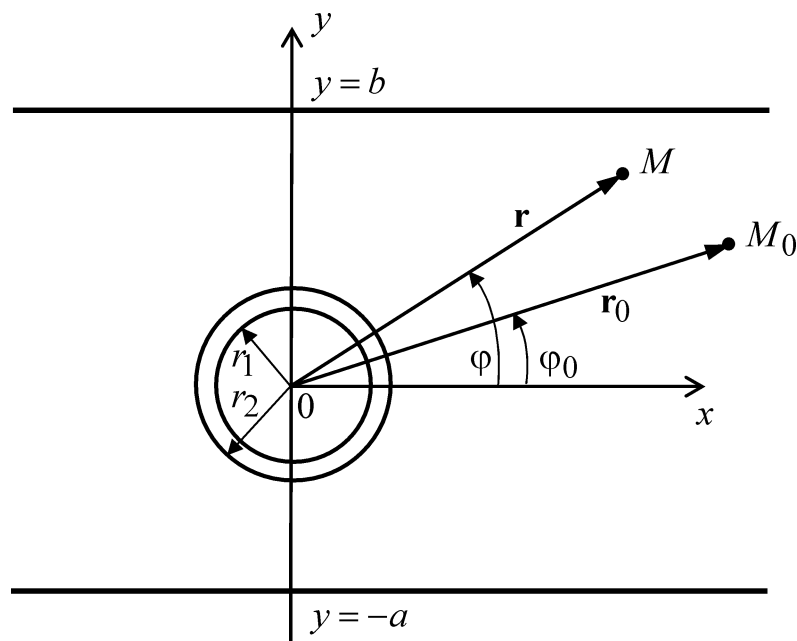


Рис. 2.8.1. Схема волноводной системы

В волноводе находится бесконечно длинный линейный источник, параллельный оси z , который генерирует монохроматическую симметричную цилиндрическую звуковую волну с круговой частотой ω и амплитудой A_i . Пусть положение источника определяется точкой M_0 , имеющей декартовы координаты (x_0, y_0) и цилиндрические координаты (r_0, φ_0) , M – точка наблюдения, координаты которой (x, y) и (r, φ) . Потенциал скорости цилиндрической волны представляется в виде

$$\tilde{\Psi}_i = \Psi_i \exp(-i\omega t),$$

где

$$\Psi_i = A_i H_0(k_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|), \quad (2.8.1)$$

$H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка; k_1 – волновое число звуковых волн в жидкости, которое определяется из выражения (1.2.14); \mathbf{r} , \mathbf{r}_0 – радиус-векторы точек M и M_0 соответственно. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

Определим волновое поле в волноводе.

Решение задачи. Рассматриваемая задача является двумерной. Волновые поля в неоднородном термоупругом цилиндрическом теле и граничащей с ним жидкости не зависят от координаты z .

Для решения задачи воспользуемся приближенным аналитическим методом, предложенным в [254]. Потенциал скорости искомого поля в волноводе Ψ представим в виде суммы вклада от источника Ψ^0 и вклада от рассеивателя. В свою очередь вклад от рассеивателя разделяется на акустическую Ψ^s и тепловую Ψ_2 составляющие. Таким образом

$$\Psi = \Psi^0 + \Psi^s + \Psi_2.$$

Вклад от источника. Рассмотрим вклад в волновое поле в волноводе от источника. Используя интегральное представление осесимметричной цилиндрической

дической волны $H_0(k_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ в свободном пространстве [227], выражение (2.8.1) запишем в виде

$$\Psi_i = A_i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} e^{i\eta_1|y-y_0|} d\xi, \quad (2.8.2)$$

где $\eta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$. Выбор знака корня $\sqrt{k_1^2 - \xi^2}$ из условия $\text{Im}\eta_1 \geq 0$ обеспечивает ограниченность Ψ_i при $|y| \rightarrow \infty$.

Произведение экспонент в подынтегральном выражении (2.8.2) представляет собой плоскую волну, направление распространения которой задается горизонтальной ξ и вертикальной η_1 компонентами волнового вектора звуковых волн \mathbf{k}_1 . Отраженная от границы цилиндрическая волна может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн, возникающих при отражении плоских волн, на которые раскладывается цилиндрическая волна.

При определении вклада от источника в искомое поле будем учитывать многократное отражение плоских звуковых волн от границ волновода. Возникающими при таком отражении тепловыми волнами пренебрегаем, поскольку эти волны существенны лишь в тонких тепловых пограничных слоях у поверхностей границ волновода [199].

Для учета всех возможных вариантов отражения плоских звуковых волн от стенок волновода представим потенциал Ψ^0 в виде ряда

$$\Psi^0 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^4 \Psi_{jm}^0. \quad (2.8.3)$$

Пусть V_a и V_b – коэффициенты отражения плоской звуковой волны от нижней и верхней границ волновода соответственно.

Рассмотрим случай, когда $y > y_0$.

В выражении (2.8.3) слагаемое Ψ_{01}^0 включает в себя вклад прямого распространения волны в свободном пространстве от точки источника $M_0(x_0, y_0)$ до точки наблюдения $M(x, y)$, то есть $\Psi_{01}^0 = \Psi_i$.

Слагаемое Ψ_{02}^0 характеризует единственное отражение от нижней границы волновода. Это соответствует распространению волны от точки M_0 ($y = y_0$) до точки нижней границы ($y = -a$) с последующим отражением и распространением до точки наблюдения M . При этом плоская волна проходит путь, проекции которого на оси координат x и y есть $(x - x_0)$ и $-(-a - y_0) + (y + a)$ соответственно. Тогда будем иметь

$$\Psi_{02}^0(x, y) = A_i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} \left[e^{-i\eta_1(-a-y_0)} V_a e^{i\eta_1(y+a)} \right] d\xi.$$

Слагаемое Ψ_{03}^0 описывает единственное отражение от верхней границы волновода, что соответствует распространению волны от точки M_0 до верхней границы ($y = b$) с отражением от нее и распространением до точки M . Имеем

$$\Psi_{03}^0(x, y) = A_i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} \left[e^{i\eta_1(b-y_0)} V_b e^{-i\eta_1(y-b)} \right] d\xi.$$

Для волны, отраженной сначала от нижней границы, а затем от верхней, то есть распространяющейся по пути от точки M_0 до нижней границы, затем до верхней и, наконец, до точки M , получаем следующее выражение

$$\Psi_{04}^0(x, y) = A_i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} \left[e^{-i\eta_1(-a-y_0)} V_a e^{i\eta_1(b+a)} V_b e^{-i\eta_1(y-b)} \right] d\xi.$$

Вариант, когда волна сначала отражается от верхней границы, а затем от нижней, при $j = 0$ не рассматривается. Этот вариант отражения будет учитываться при $j = 1$ и $m = 1$.

При $j = 1$ каждое слагаемое Ψ_{1m}^0 ($m = 1, 2, 3, 4$) описывает два дополнительных отражения от верхней и нижней границ волновода. Поэтому выражения для Ψ_{1m}^0 получаются из выражений для Ψ_{0m}^0 умножением на коэффициент $V_a V_b e^{2i\eta_1(a+b)}$, так как дополнительный набег фазы составляет $2i\eta_1(a+b)$.

При $j = 2$ учитываются еще два дополнительных отражения от границ и так далее.

В результате разложение (2.8.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi^0(x, y) = & A_i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} \times \\ & \times \left[e^{i\eta_1(y-y_0)} + V_a e^{i\eta_1(y+y_0+2a)} + V_b e^{-i\eta_1(y+y_0-2b)} + V_a V_b e^{-i\eta_1(y-y_0-2(a+b))} \right] \times \\ & \times \sum_{j=0}^{\infty} \left(V_a V_b e^{2i\eta_1(a+b)} \right)^j d\xi. \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

В случае $y < y_0$ выражение для Ψ^0 получаем перестановкой y и y_0 .

Таким образом, вклад от источника определяется выражением (2.8.4). Отметим, что если обе границы волновода были бы идеальными, то ряд

$\sum_{j=0}^{\infty} \left(V_a V_b e^{2i\eta_1(a+b)} \right)^j$ в (2.8.4) являлся бы расходящимся, поскольку для жесткой

границы $V = 1$, а для мягкой $V = -1$. Полагая, как и в [9], что имеет место малое отличие $|V_a|$ или $|V_b|$ от единицы, то есть выполняется условие $|V_a V_b| < 1$, просуммируем этот ряд как бесконечную геометрическую прогрессию.

В результате получаем выражение, описывающее вклад от источника

$$\begin{aligned} \Psi^0(x, y) = & A_i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} \frac{1}{1 - V_a V_b e^{2i\eta_1(a+b)}} \left[e^{i\eta_1|y-y_0|} + \right. \\ & \left. + V_a e^{i\eta_1(y+y_0+2a)} + V_b e^{-i\eta_1(y+y_0-2b)} + V_a V_b e^{-i\eta_1(|y-y_0|-2(a+b))} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Вклад от рассеивателя. При определении акустической составляющей вклада от рассеивателя Ψ^S не будем учитывать рассеяние телом волн, отраженных от границ волновода, а будем учитывать только рассеяние цилиндром волны, идущей непосредственно от источника. Такое допущение справедливо, когда стенки волновода отстоят от тела на достаточно больших расстояниях, то есть когда a и b велики по сравнению с радиусом тела r_2 .

Для учета многократного рассеяния звука стенками волновода потенциал Ψ^S представим в виде ряда аналогичного ряду (2.8.3):

$$\Psi^S = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^4 \Psi_{jm}^S. \quad (2.8.6)$$

Слагаемое Ψ_{01}^S в выражении (2.8.6) описывает вклад прямого распространения рассеянной телом звуковой волны в свободном пространстве до точки наблюдения $M(x, y)$, то есть $\Psi_{01}^S = \Psi_1$, где Ψ_1 – потенциал скорости рассеянного акустического поля, который является решением задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на однородном термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным термоупругим покрытием в безграничном пространстве, заполненном теплопроводной жидкостью. Приведем далее решение этой дифракционной задачи и попутно определим тепловую составляющую вклада от рассеивателя Ψ_2 , состоящую только из возбужденной в безграничном пространстве тепловой волны.

Дифракция цилиндрической звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-слоистым покрытием в свободном пространстве.

Полагая, что описанные в постановке задачи цилиндрическое тело и источник звуковых волн находятся в заполненном теплопроводной жидкостью безграничном пространстве, определим рассеянную телом звуковую и возбужденную тепловую волны в жидкости.

С использованием теоремы сложения для цилиндрических функций Бесселя потенциал скорости падающего поля (2.8.1) записывается в виде [183]

$$\Psi_i = A_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \begin{cases} H_n(k_1 r_0) J_n(k_1 r), & r < r_0 \\ J_n(k_1 r_0) H_n(k_1 r), & r > r_0 \end{cases},$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Потенциал скорости полного поля в жидкости

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_1 + \Psi_2.$$

Искомые потенциалы рассеянной телом звуковой и возбужденной тепловой волн являются решениями уравнений Гельмгольца (1.2.17) в цилиндрической системе координат и с учетом условий излучения на бесконечности представляются разложениями в ряд по волновым цилиндрическим функциям:

$$\Psi_q(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{qn} H_n(k_q r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad q = 1, 2. \quad (2.8.7)$$

Волновые поля в однородном термоупругом цилиндре описываются уравнениями линейной связанной динамической задачи термоупругости (1.2.22), (1.2.23). Вектор смещения частиц в однородном цилиндре записывается через потенциалы продольных термоупругих волн Φ_1 , Φ_2 и поперечных упругих волн Φ_3 в виде (2.5.5). Эти потенциальные функции являются решениями уравнений Гельмгольца (2.5.6) в цилиндрической системе координат. В силу постановки задачи $\Phi_3 = \kappa_3 \Phi_3(r, \varphi) \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z – единичный вектор оси z . Тогда векторное уравнение Гельмгольца (2.5.6) сводится к скалярному уравнению Гельмгольца. С учетом условия ограниченности функции Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 ищутся в виде

$$\Phi_l(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{ln} J_n(\kappa_l r) \exp[in(\varphi - \varphi_0)], \quad l = 1, 2, 3. \quad (2.8.8)$$

Волновые поля в покрытии описываются системой уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного

тела (1.2.39) – (1.2.42), записанных в цилиндрической системе координат ($q_1 = r$, $q_2 = \varphi$). Эта система уравнений включает уравнения движения сплошной среды

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\rho \omega^2 u_r, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} = -\rho \omega^2 u_\varphi \quad (2.8.9)$$

и уравнение притока тепла

$$\lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\lambda'_T + \frac{\lambda_T}{r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda_T}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + i\omega T_0 \beta \operatorname{div} \mathbf{u} = -i\omega c_\varepsilon T \quad (2.8.10)$$

(здесь и далее штрих означает дифференцирование по аргументу), где компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ связаны с компонентами u_r , u_φ вектора смещения \mathbf{u} и изменением температуры T в покрытии соотношениями Дюгамеля—Неймана (2.6.7).

Функции u_r , u_φ , T ищутся в виде следующих рядов Фурье:

$$(u_r(r, \varphi), u_\varphi(r, \varphi), T(r, \varphi)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (U_{1n}(r), U_{2n}(r), U_{3n}(r)) \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \quad (2.8.11)$$

где $U_{ln}(r)$ ($l = 1, 2, 3$) – неизвестные распределения компонент вектора смещения и изменения температуры по толщине покрытия.

Подставляя выражения (2.8.11) в систему уравнений (2.8.9), (2.8.10), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{ln}(r)$ ($l = 1, 2, 3$) для каждого значения $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$A_n \mathbf{U}_n'' + B_n \mathbf{U}_n' + C_n \mathbf{U}_n = 0, \quad \mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})^T, \quad (2.8.12)$$

где

$$A_n = \operatorname{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}, \quad B_n = (b_{ls})_{3 \times 3}, \quad C_n = (c_{ls})_{3 \times 3}.$$

Здесь

$$a_{11} = \lambda + 2\mu, \quad a_{22} = \mu, \quad a_{33} = \lambda_T,$$

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r}, \quad b_{12} = b_{21} = in \frac{\lambda + \mu}{r}, \quad b_{13} = -\beta, \\
b_{22} &= \mu' + \frac{\mu}{r}, \quad b_{23} = b_{32} = 0, \quad b_{31} = i\omega T_0 \beta, \quad b_{33} = \lambda'_T + \frac{\lambda_T}{r}, \\
c_{11} &= -n^2 \frac{\mu}{r^2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \rho\omega^2, \quad c_{12} = in \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 3\mu}{r^2} \right), \quad c_{13} = -\beta', \\
c_{21} &= in \left(\frac{\mu'}{r} + \frac{\lambda + 3\mu}{r^2} \right), \quad c_{22} = -n^2 \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} - \frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \rho\omega^2, \quad c_{23} = -in \frac{\beta}{r}, \\
c_{31} &= i\omega T_0 \frac{\beta}{r}, \quad c_{32} = -n\omega T_0 \frac{\beta}{r}, \quad c_{33} = -n^2 \frac{\lambda_T}{r^2} + i\omega c_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Индекс n , которым должны быть снабжены элементы матриц, здесь и в дальнейшем для простоты записи опускаем.

Граничные условия на внешней поверхности покрытия включают равенство нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, отсутствие касательного напряжения, равенство нормального напряжения и акустического давления, непрерывность акустической температуры и теплового потока:

$$r = r_2: -i\omega u_r = \mathfrak{S}_r, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad T = \Theta, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda^T \frac{\partial \Theta}{\partial r}. \quad (2.8.13)$$

На внутренней поверхности покрытия должны быть непрерывны компоненты вектора смещения частиц взаимодействующих однородной и неоднородной термоупругих сред, нормальные и касательные напряжения, температура и тепловой поток:

$$\begin{aligned}
r = r_1: u_r &= u_r^0, \quad u_\varphi = u_\varphi^0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^0, \\
T &= T^0, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_T^0 \frac{\partial T^0}{\partial r}.
\end{aligned} \quad (2.8.14)$$

Нормальная компонента скорости частиц жидкости \mathfrak{S}_r , акустическое давление p и акустическая температура Θ определяются из выражений (2.6.16).

Для однородного цилиндра составляющие вектора смещения u_r^0 , u_φ^0 записываются в виде

$$u_r^0 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} + \frac{\kappa_3}{r} \frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi}, \quad u_\varphi^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} - \kappa_3 \frac{\partial\Phi_3}{\partial r},$$

изменение температуры T^0 определяется из выражения (2.5.19), а компоненты тензора напряжений σ_{rr}^0 , $\sigma_{r\varphi}^0$ связаны с величинами u_r^0 , u_φ^0 , T^0 соотношениями Дюгамеля — Неймана (2.6.7), в которых функции λ , μ , α_T следует заметить постоянными λ^0 , μ^0 , α_T^0 соответственно. Используя приведенные выше формулы, выразим величины σ_{rr}^0 , $\sigma_{r\varphi}^0$ через функции Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 . Получим

$$\sigma_{rr}^0 = \sum_{q=1}^2 \left(2\mu^0 \frac{\partial^2\Phi_q}{\partial r^2} + \eta_q \Phi_q \right) + \frac{2\mu^0 \kappa_3}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_3 \right),$$

$$\sigma_{r\varphi}^0 = \frac{2\mu^0}{r} \sum_{q=1}^2 \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\partial\Phi_q}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_q \right) - \mu^0 \kappa_3 \left(\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_3}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\varphi^2} \right).$$

Рассмотрим граничные условия (2.8.13). Из условия равенства нормальных скоростей частиц взаимодействующих сред и условия непрерывности акустической температуры получаем выражения для коэффициентов V_{1n} , V_{2n} :

$$r = r_2 : \mathbf{V}_n = (D_n^{-1} E_n) \mathbf{U}_n - D_n^{-1} \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{V}_n = (V_{1n}, V_{2n})^T, \quad (2.8.15)$$

где

$$\mathbf{a}_n = (k_1 J'_n(k_1 r), \zeta_1 J_n(k_1 r))^T \alpha_n, \quad D_n = (d_{qm})_{2 \times 2}, \quad E_n = (e_{ml})_{2 \times 3},$$

$$\alpha_n = A_i H_n(k_1 r_0), \quad d_{1m} = k_m H'_n(k_m r), \quad d_{2m} = \zeta_m H_n(k_m r),$$

$$\zeta_m = \frac{i}{\alpha_T} \left(\frac{\omega \gamma}{c^2} - \frac{k_m^2}{\omega} \right), \quad e_{11} = -i\omega, \quad e_{12} = e_{13} = e_{21} = e_{22} = 0, \quad e_{23} = 1.$$

Из оставшихся трех граничных условий (2.8.13) находим

$$r = r_2 : A_n \mathbf{U}'_n + F_n \mathbf{U}_n = G_n \mathbf{V}_n + \mathbf{b}_n, \quad (2.8.16)$$

где

$$\mathbf{b}_n = \left(-i\omega\rho_0 J_n(k_1 r), 0, \lambda^T \zeta_1 k_1 J'_n(k_1 r) \right)^T \alpha_n, \quad F_n = (f_{ls})_{3 \times 3}, \quad G_n = (g_{lm})_{3 \times 2},$$

$$f_{11} = \frac{\lambda}{r}, \quad f_{12} = in \frac{\lambda}{r}, \quad f_{13} = -\beta, \quad f_{21} = in \frac{\mu}{r}, \quad f_{22} = -\frac{\mu}{r},$$

$$f_{23} = f_{31} = f_{32} = f_{33} = 0,$$

$$g_{1m} = -i\omega\rho_0 H_n(k_m r), \quad g_{2m} = 0, \quad g_{3m} = \lambda^T \zeta_m k_m H'_n(k_m r).$$

После подстановки выражения (2.8.15) в формулу (2.8.16) получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.8.12) на внешней поверхности покрытия

$$r = r_2 : A_n \mathbf{U}'_n + L_n^{(2)} \mathbf{U}_n = \mathbf{c}_n, \quad (2.8.17)$$

$$\text{где } L_n^{(2)} = F_n - G_n (D_n^{-1} E_n), \quad \mathbf{c}_n = \mathbf{b}_n - (G_n D_n^{-1}) \mathbf{a}_n.$$

Теперь рассмотрим граничные условия (2.8.14). Из условия непрерывности вектора смещения и условия непрерывности температуры получаем выражения для коэффициентов W_{ln} ($l = 1, 2, 3$)

$$r = r_1 : \mathbf{W}_n = T_n^{-1} \mathbf{U}_n, \quad \mathbf{W}_n = (W_{1n}, W_{2n}, W_{3n})^T, \quad (2.8.18)$$

где

$$T_n = (t_{ls})_{3 \times 3},$$

$$t_{1q} = Z_{1q}, \quad t_{13} = in \frac{\kappa_3}{r} Z_{03},$$

$$t_{2q} = in \frac{1}{r} Z_{0q}, \quad t_{23} = -\kappa_3 Z_{13},$$

$$t_{3q} = \beta_q Z_{0q}, \quad t_{33} = 0, \quad q = 1, 2,$$

$$Z_{0l} = J_n(\kappa_l r), \quad Z_{1l} = \kappa_l J'_n(\kappa_l r), \quad l = 1, 2, 3.$$

Из остальных трех граничных условий (2.8.14) находим

$$r = r_1 : A_n \mathbf{U}'_n + F_n \mathbf{U}_n = Y_n \mathbf{W}_n, \quad (2.8.19)$$

где

$$Y_n = (y_{ls})_{3 \times 3},$$

$$\begin{aligned}
y_{1q} &= 2\mu^0 Z_{2q} + \eta_q Z_{0q}, \quad y_{13} = 2in\mu^0 \kappa_3 \frac{1}{r} \left(Z_{13} - \frac{1}{r} Z_{03} \right), \\
y_{2q} &= 2in\mu^0 \frac{1}{r} \left(Z_{1q} - \frac{1}{r} Z_{0q} \right), \quad y_{23} = -\mu^0 \kappa_3 \left(Z_{23} - \frac{1}{r} Z_{13} + \frac{n^2}{r^2} Z_{03} \right), \\
y_{3q} &= \lambda_T^0 \beta_q Z_{1q}, \quad y_{33} = 0, \quad q = 1, 2, \quad Z_{2l} = \kappa_l^2 J_n''(\kappa_l r), \quad l = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

После подстановки выражения (2.8.18) в формулу (2.8.19) получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (2.8.12) на внутренней поверхности покрытия

$$r = r_1 : A_n \mathbf{U}'_n + L_n^{(1)} \mathbf{U}_n = 0, \quad (2.8.20)$$

где $L_n^{(1)} = F_n - Y_n T_n^{-1}$.

Из выражений (2.8.15), (2.8.18) следует, что коэффициенты V_{1n} , V_{2n} , W_{1n} , W_{2n} , W_{3n} могут быть вычислены лишь после решения краевой задачи (2.8.12), (2.8.17), (2.8.20). Эта краевая задача решена методом сплайн-коллокации аналогично решению краевой задачи в п. 2.7.1.

Интегральная форма записи вклада от рассеивателя. Возвращаясь к рассмотрению вклада от рассеивателя, воспользуемся интегральной формой записи волновых цилиндрических функций через декартовы базисные решения уравнения Гельмгольца:

$$H_n(k_q r) e^{in\varphi} = \frac{\gamma_n}{\pi k_q^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_q} (\eta_q - i\xi)^n e^{\pm i\xi x} e^{i\eta_q |y|} d\xi, \quad q = 1, 2, \quad (2.8.21)$$

где $\eta_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}$. Выбор знака корня $\sqrt{k_2^2 - \xi^2}$ из условия $\text{Im} \eta_2 \geq 0$ обеспечивает ограниченность правой части выражения (2.8.21) при $|y| \rightarrow \infty$. Знак плюс у показателя экспоненты и $\gamma_n = 1$ соответствуют $y > 0$, а знак минус и $\gamma_n = (-1)^n$ соответствуют $y < 0$. Формула (2.8.21) получена на основе соотношений, приведенных в [43, стр. 182].

Тогда разложения (2.8.7) запишутся в виде

$$\Psi_q(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n V_{qn} e^{-in\varphi_0} k_q^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_q} (\eta_q - i\xi)^n e^{\pm i\xi x} e^{i\eta_q |y|} d\xi, \quad q=1,2. \quad (2.8.22)$$

Эти выражения справедливы для точек наблюдения, лежащих за пределами окружности радиуса r_2 . Как и в (2.8.2), произведение экспонент в подынтегральном выражении (2.8.22) представляет собой плоскую волну. Поэтому, как и отраженное от границ волновода первичное акустическое поле, рассеянная телом звуковая волна после отражения от плоских границ может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн.

Рассматривая те же варианты отражения, что и при определении вклада от источника, получим выражения для слагаемых Ψ_{jm}^s ($m=1,2,3,4$; $j=0,1,2,\dots$).

В результате ряд многократного рассеяния (2.8.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi^s(x, y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n V_{1n} e^{-in\varphi_0} k_1^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} (\eta_1 - i\xi)^n e^{\pm i\xi x} \times \\ &\times \left[e^{i\eta_1 |y|} + V_a e^{i\eta_1 (y+2a)} + V_b e^{-i\eta_1 (y-2b)} + V_a V_b e^{-i\eta_1 (|y|-2(a+b))} \right] \times \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \left(V_a V_b e^{2i\eta_1 (a+b)} \right)^j d\xi. \end{aligned} \quad (2.8.23)$$

С учетом допущения, сделанного при получении формулы (2.8.5), из (2.8.23) получаем

$$\begin{aligned} \Psi^s(x, y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n V_{1n} e^{-in\varphi_0} k_1^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} (\eta_1 - i\xi)^n e^{\pm i\xi x} \frac{1}{1 - V_a V_b e^{2i\eta_1 (a+b)}} \times \\ &\times \left[e^{i\eta_1 |y|} + V_a e^{i\eta_1 (y+2a)} + V_b e^{-i\eta_1 (y-2b)} + V_a V_b e^{-i\eta_1 (|y|-2(a+b))} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.8.24)$$

Таким образом, вклад от рассеивателя определяется выражением

$$\begin{aligned} &\Psi^s(x, y) + \Psi_2(x, y) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n V_{1n} e^{-in\varphi_0} k_1^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} (\eta_1 - i\xi)^n e^{\pm i\xi x} \frac{1}{1 - V_a V_b e^{2i\eta_1 (a+b)}} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[e^{i\eta_1|y|} + V_a e^{i\eta_1(y+2a)} + V_b e^{-i\eta_1(y-2b)} + V_a V_b e^{-i\eta_1(|y|-2(a+b))} \right] d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n V_{2n} e^{-in\varphi_0} k_2^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_2} (\eta_2 - i\xi)^n e^{\pm i\xi x} e^{i\eta_2|y|} d\xi.$$

Результаты расчетов. Далее сначала приводятся результаты расчетов для цилиндрического тела, находящегося в безграничном пространстве, а затем — для волноводной системы.

Интенсивность рассеянного в безграничном пространстве акустического поля в дальней зоне как функция, зависящая от волнового размера цилиндра $\varpi = |k_1|r_1$ и полярного угла φ , имеет вид

$$I(\varpi, \varphi) = \left| \frac{2}{A_i \sqrt{\pi k_1 r_1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n V_{1n} \exp[in(\varphi - \varphi_0)] \right|^2.$$

Были проведены расчеты зависимости интенсивности отраженной в направлении $\varphi = \pi$ звуковой волны от волнового размера цилиндра $I(\varpi, \pi)$ в интервале $8 \leq \varpi \leq 12$. Расчеты проводились для стального (см. табл. 2.8.1) цилиндра радиусом 1 м с покрытием толщиной 0.1 м, неоднородным по плотности:

$$\rho(r) = \tilde{\rho} f(r), \quad f(r) = 0.5 + (2r - r_1 - r_2)^2 / (r_2 - r_1)^2,$$

где $\tilde{\rho}$ — плотность однородного покрытия из поливинилбутирала. Полагали, что окружающая цилиндрическое тело жидкость — вода, а падающая на тело звуковая волна с единичной амплитудой излучается линейным цилиндрическим источником, ось которого имеет координаты $r_0 = 1.2r_2$, $\varphi_0 = \pi$.

Таблица 2.8.1

Физико-механические характеристики стали

ρ^0 , кг/м ³	λ^0 , Н/м ²	μ^0 , Н/м ²	α_T^0 , 1/К	λ_T^0 , Вт/(м·К)	c_ε^0 , Дж/(м ³ ·К)
7850	1.2×10^{11}	7.9×10^{10}	1.2×10^{-5}	45.3	3.6×10^6

Результаты расчетов представлены на рис. 2.8.2, где сплошной линией показан график, построенный для термоупругого цилиндра с неоднородным термоупругим покрытием. Для сравнения на рис. 2.8.2,а приведен график, рассчитанный для упругого цилиндра с неоднородным упругим покрытием (штрихпунктирная линия), а на рис. 2.8.2,б – графики, рассчитанные для термоупругого цилиндра с однородным термоупругим покрытием (штриховая линия) и термоупругого цилиндра без покрытия (пунктирная линия).

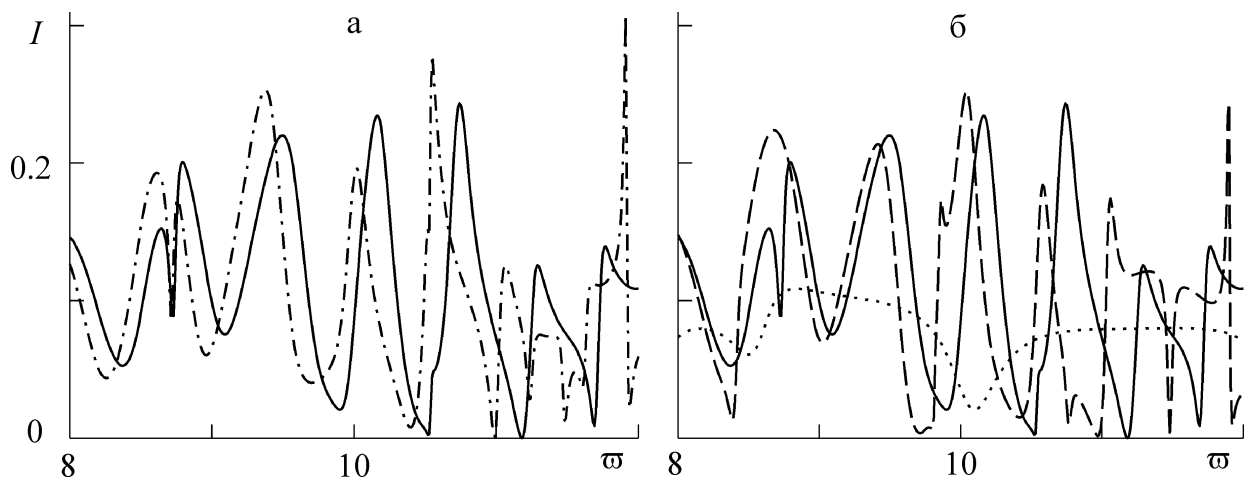


Рис. 2.8.2. Зависимость интенсивности отраженной звуковой волны от волнового размера цилиндра в безграничном пространстве

Из рис. 2.8.2,а следует, что термоупругость материалов цилиндра и его покрытия может оказывать существенное влияние на отражение звука. Рис. 2.8.2,б показывает возможность изменения звукоотражающих свойств термоупругого цилиндра за счет неоднородности его термоупругого покрытия при падении на цилиндрическое тело звуковой волны, излучаемой линейным источником в безграничном пространстве.

Для волноводной системы расчеты выполнялись для частного случая, когда волновод заполнен идеальной жидкостью, а помещенное в него тело представляет собой абсолютно жесткий цилиндр с непрерывно-слоистым упругим покрытием. В этом случае $\Psi = \Psi^0 + \Psi^s$, $k_1 = k = \omega/c$, а коэффициенты V_{1n} в (2.8.24) определяются из решения задачи о дифракции цилиндрической звуковой волны на абсолютно жестком цилиндре с непрерывно-слоистым упругим

покрытием в безграничном пространстве, заполненном идеальной жидкостью [204].

Были рассчитаны зависимость модуля потенциала полного акустического поля в волноводе $|\Psi|$ от волнового размера рассеивателя kr_2 и распределение модуля потенциала рассеянного акустического поля $|\Psi^s|$ по глубине волновода.

При вычислении интегралов в (2.8.5) и (2.8.24) интервал интегрирования разбивался на участки $(-\infty, -k)$, $(-k, 0)$, $(0, k)$, (k, ∞) . Точки $\xi = \pm k$ являются интегрируемыми особыми точками. Интегралы вычислялись с помощью пакетов прикладных программ MATLAB и Maple. Полученные результаты показали хорошее совпадение.

При суммировании ряда (2.8.24) индекс n изменялся от $-N$ до N , где $N = 2[kr_2] + 1$; $[\cdot]$ – целая часть числа. Дальнейшее увеличение $|n|$ практически не сказывается на результатах расчетов.

В расчетах полагалось, что волновод с абсолютно жесткой границей $y = -3r_2$ с коэффициентом отражения $V_a = 1$ и границей $y = 5r_2$ с коэффициентом отражения $V_b = -0.95$, близкой к акустически мягкой границе, заполнен водой. Цилиндр радиусом $r_1 = 1$ м имеет упругое покрытие с внешним радиусом $r_2 = 1.2$ м, а линейный источник излучает звуковую волну с единичной амплитудой и расположен в точке с координатами $r_0 = 7r_2$ и $\varphi_0 = 5\pi/6$.

Рассматривались как однородное покрытие из поливинилбутираля, так и неоднородное покрытие с материальными характеристиками

$$\rho(r) = \tilde{\rho}f(r), \quad \lambda(r) = \tilde{\lambda}f(r), \quad \mu(r) = \tilde{\mu}f(r),$$

где

$$f(r) = 1 - 0.5(r - r_1)/(r_2 - r_1), \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

$\tilde{\rho}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ – плотность и модули упругости однородного покрытия.

Результаты расчетов представлены на рис. 2.8.3 – 2.8.6, где кривая 1 соответствует цилиндру с неоднородным покрытием, а кривая 2 – цилиндру с однородным покрытием.

На рис. 2.8.3 – 2.8.5 представлены зависимости $|\Psi|$ от kr_2 , рассчитанные в разных точках наблюдения. Расчеты частотных характеристик проводились в интервале $3.8 \leq kr_2 \leq 5$, позволяющем показать влияние неоднородности покрытия на акустическое поле в волноводе. Было установлено, что в области $kr_2 < 3.8$ неоднородность материала покрытия слабо влияет на акустическое поле в волноводе. Однако с увеличением kr_2 это влияние становится заметнее.

Рис. 2.8.3 соответствует точке с координатами $x = -3.5r_2$, $y = -r_2$. Кривая 3 построена для случая, когда в волноводе отсутствует рассеиватель и полное поле в волноводе описывается только вкладом от источника. Из рисунка следует, что присутствие тела в волноводе заметно изменяет полное акустическое поле в волноводной системе. Видно, что все частотные зависимости имеют отчетливо выраженный резонансный характер.

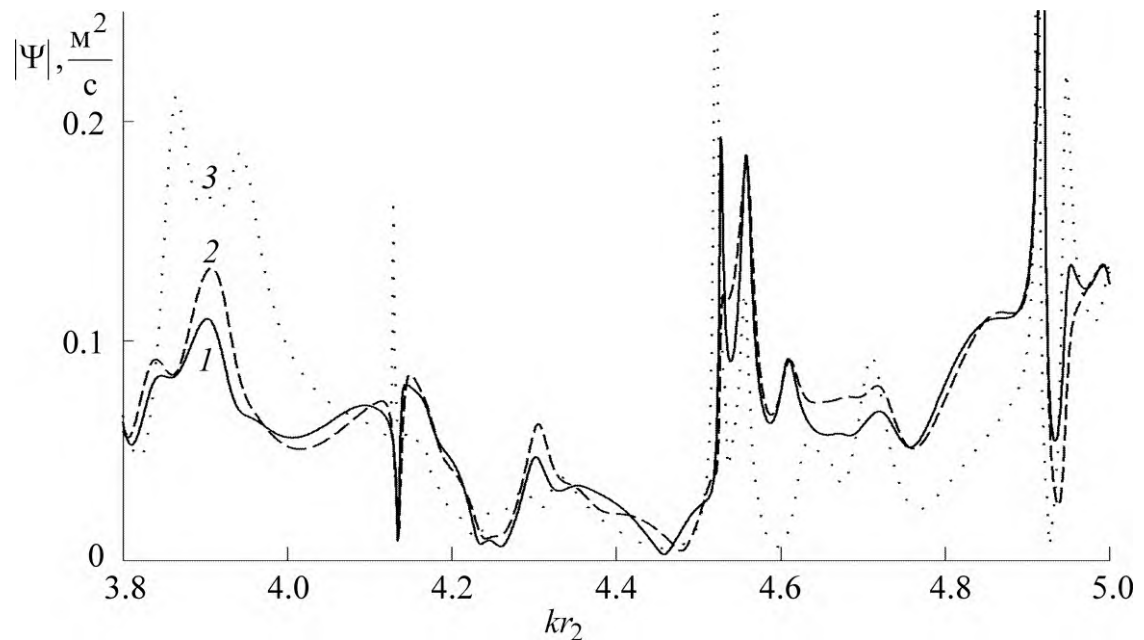


Рис. 2.8.3. Зависимость поля $|\Psi|$ от kr_2 при $x = -3.5r_2$, $y = -r_2$

Аналогичные особенности имеются и у частотных зависимостей, рассчитанных в точках около рассеивающего тела и имеющих координаты $r = 1.1r_2$, $\varphi = 5\pi/6$ (рис. 2.8.4) и $r = 1.1r_2$, $\varphi = 11\pi/6$ (рис. 2.8.5).

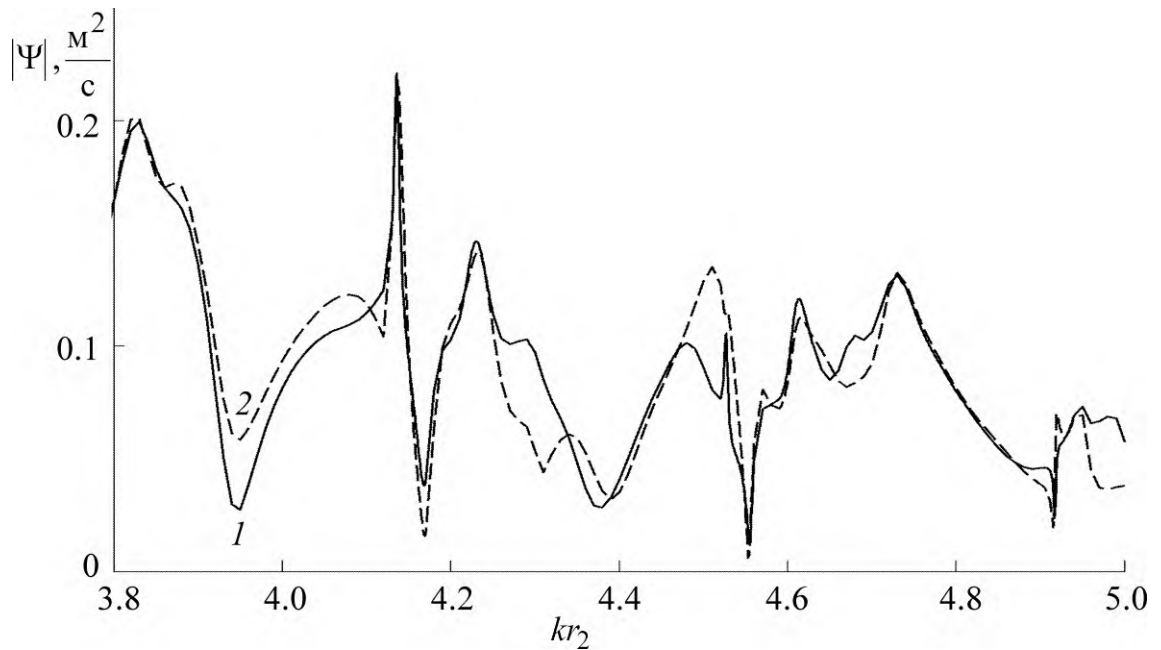


Рис. 2.8.4. Зависимость поля $|\Psi|$ от kr_2 при $r = 1.1r_2$, $\varphi = 5\pi/6$

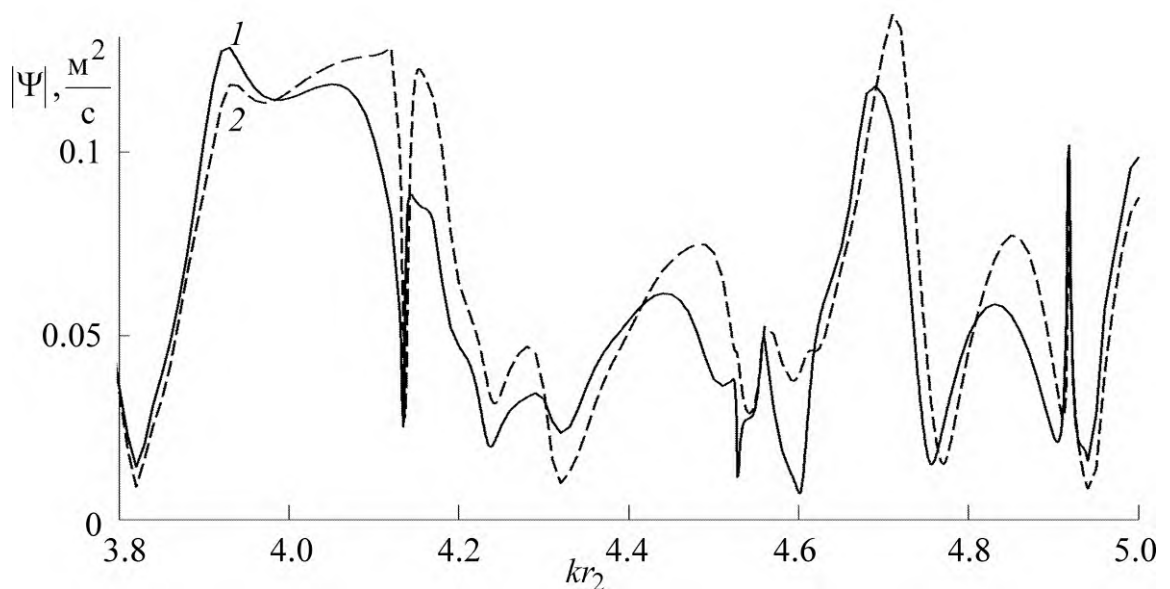


Рис. 2.8.5. Зависимость поля $|\Psi|$ от kr_2 при $r = 1.1r_2$, $\varphi = 11\pi/6$

На рис. 2.8.6 показано распределение поля $|\Psi^s|$ по глубине волновода при $x = -3.5r_2$, $kr_2 = 3.96$. Здесь кривая 3 построена для цилиндра с неоднородным покрытием, находящегося в безграничном пространстве.

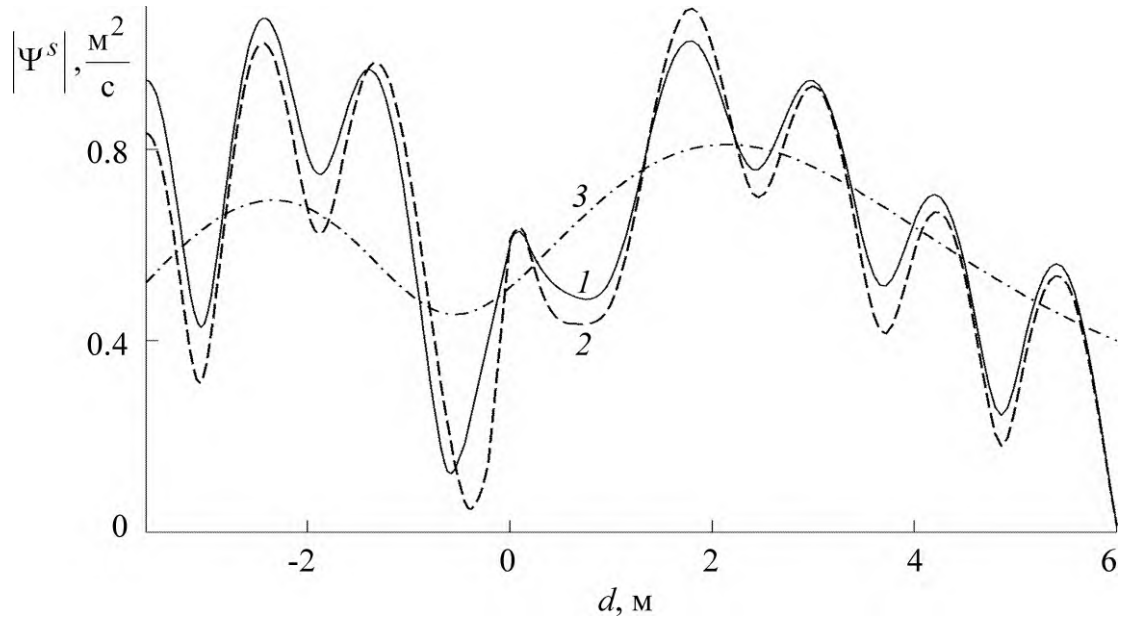


Рис. 2.8.6. Распределение поля $|\Psi^s|$ по глубине волновода d при $x = -3.5r_2$, $kr_2 = 3.96$

Видно, что функция $|\Psi^s|$ соответствующая телу, помещенному в волновод (кривая 1), имеет большее количество экстремумов и более широкий диапазон изменения по сравнению с функцией, построенной для такого же тела, находящегося в свободном пространстве (кривая 3). Такое изменение картины рассеянного поля является следствием многократного переотражения волн стенками волновода.

Сравнение кривых 1, 2 на каждом из рис. 2.8.3 – 2.8.6 показывает как за счет неоднородности упругого покрытия можно изменять звукоотражающие свойства цилиндрического тела, находящегося в волноводе.

3. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЗВУКА НА НЕОДНОРОДНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛАХ

В предыдущей главе показана возможность изменения звукоотражающих свойств термоупругих тел с помощью непрерывно-слоистых термоупругих покрытий. Если подобрать соответствующие законы неоднородности таких покрытий, то можно добиться требуемого звукоотражения телами. Таким образом, возникает необходимость в решении обратных дифракционных задач для неоднородных термоупругих тел.

В известных работах, посвященных коэффициентным обратным задачам термоупругости, поиск решения осуществлялся по некоторой дополнительной информации. Например, в [24–28, 101] заранее принятым ограничением при решении обратных задач является задание значений температуры и/или перемещений на поверхности исследуемого тела.

В данной главе предложен метод решения обратных задач дифракции звуковых волн на неоднородных термоупругих телах, использующий исключительно решения прямых дифракционных задач и не требующий экспериментальных замеров акустических откликов. Решены обратные задачи дифракции звука для непрерывно-слоистых термоупругих тел плоской, цилиндрической и сферической формы и для однородных термоупругих тел (пластины, цилиндра, шара) с непрерывно-слоистыми термоупругими покрытиями.

Результаты исследований, изложенные в настоящей главе, отражены в работах [75, 76, 78, 82, 89, 90, 95, 205, 206].

3.1. Метод решения обратных задач дифракции звуковых волн на неоднородных термоупругих телах

Постановка задачи. На основе решения прямой задачи дифракции звука на неоднородном термоупругом теле определим законы неоднородности его материала, обеспечивающие наименьшее рассеяние звука телом в заданном

диапазоне частот при фиксированном угле наблюдения α , равном α_* , а также в заданном угловом секторе наблюдения $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ при фиксированной частоте. При этом диапазон частот определяется интервалом изменения волнового размера тела $\varpi_1 \leq \varpi \leq \varpi_2$, а фиксированная частота – фиксированным значением волнового размера тела, равным ϖ_* .

Решение задачи. Полагаем, что все физико-механические характеристики материала тела – ρ , λ , μ , α_T , λ_T , c_ε , или часть из них, описываются многочленами второй степени с независимой переменной ξ и неизвестными коэффициентами $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$:

$$\eta(\xi) = \tilde{\eta} \bar{\eta}(\xi), \quad (3.1.1)$$

где

$$\bar{\eta}(\xi) = \eta^{(0)} + \eta^{(1)}\xi + \eta^{(2)}\xi^2, \quad a \leq \xi \leq b. \quad (3.1.2)$$

Здесь ξ – координата, по которой проявляется непрерывно-слоистая неоднородность материала; $\eta = \{\rho, \lambda, \mu, \alpha_T, \lambda_T, c_\varepsilon\}$; $\tilde{\eta}$ – характерная величина однородного материала. Другая часть (если она присутствует) физико-механических характеристик материала тела считаются известными.

Построим функционалы I_1, I_2 вида

$$I_1[\rho, \lambda, \mu, \alpha_T, \lambda_T, c_\varepsilon] = \frac{1}{\varpi_2 - \varpi_1} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} I(\varpi, \alpha_*) d\varpi, \quad (3.1.3)$$

$$I_2[\rho, \lambda, \mu, \alpha_T, \lambda_T, c_\varepsilon] = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\varpi_*, \alpha) d\alpha, \quad (3.1.4)$$

определенные на классе квадратичных функций (3.1.1) и выражающие осредненные значения интенсивности рассеяния звука телом $I(\varpi, \alpha)$ в заданных диапазоне частот и интервале углов наблюдения соответственно.

Для каждого функционала найдем такие значения коэффициентов функций (3.1.2), при которых он достигает минимального значения.

Для минимизации функционалов (3.1.3), (3.1.4) введем ограничения

$$C_{1\eta} \leq \bar{\eta}(\xi) \leq C_{2\eta}, \quad (3.1.5)$$

где $C_{1\eta}$, $C_{2\eta}$ – некоторые положительные константы.

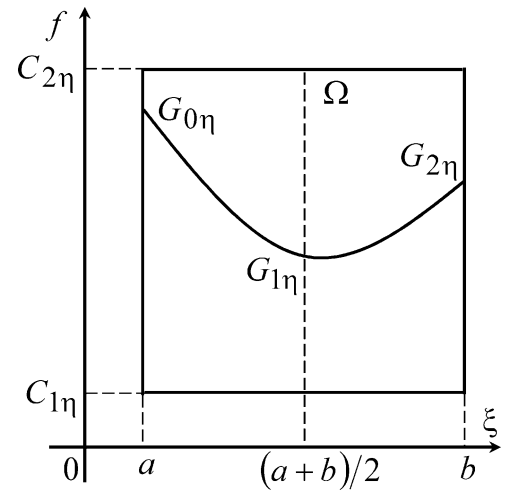


Рис. 3.1.1. Область Ω

Геометрически каждое из неравенств (3.1.5) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс ξ и осью ординат f бесконечное множество кривых $\bar{\eta}(\xi)$, лежащих в прямоугольной области

$$\Omega(\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = \{(\xi, f) : a \leq \xi \leq b, C_{1\eta} \leq f \leq C_{2\eta}\},$$

показанной на рис. 3.1.1.

В области $\Omega(\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)})$ каждую параболу (3.1.2) определим тремя точками $G_{0\eta}(a, f_{0\eta})$, $G_{1\eta}((a+b)/2, f_{1\eta})$, $G_{2\eta}(b, f_{2\eta})$, где $f_{q\eta} \in [C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ ($q=0,1,2$). Подстановкой координат этих точек в выражение (3.1.2), получим систему трех линейных алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$\boldsymbol{\eta} = R^{-1} \mathbf{f}_\eta, \quad (3.1.6)$$

$$\text{где } \boldsymbol{\eta} = (\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)})^T, \mathbf{f}_\eta = (f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta})^T, R = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & (a+b)/2 & (a+b)^2/4 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}.$$

Выбирая из отрезка $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ значения для ординат $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$ и вычисляя с помощью соотношений (3.1.6) значения коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, получим квадратичные (линейные при $\eta^{(2)} = 0$) законы

неоднородности материала тела. При этом, если абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[a, b]$, то ордината этой вершины должна принадлежать отрезку $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$, т. е. требуется проверка совместного выполнения условий

$$a \leq -\frac{\eta^{(1)}}{2\eta^{(2)}} \leq b, \quad C_{1\eta} \leq \eta^{(0)} - \frac{\eta^{(1)2}}{4\eta^{(2)}} \leq C_{2\eta}. \quad (3.1.7)$$

Нахождение значений неизвестных коэффициентов функций (3.1.2), удовлетворяющих условиям (3.1.5) и минимизирующих функцию восемнадцати переменных

$$I_m(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, c_\varepsilon^{(0)}, c_\varepsilon^{(1)}, c_\varepsilon^{(2)}) \rightarrow \min, \quad m = 1, 2 \quad (3.1.8)$$

осуществим с помощью следующего алгоритма.

Для ординаты $f_{q\eta}$ точки $G_{q\eta}$ ($q = 0, 1, 2$) на отрезке $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ введем равномерную сетку

$$f_{q\eta}^{(l_{q\eta})} = C_{1\eta} + l_{q\eta} h_{q\eta}, \quad q = 0, 1, 2, \quad (3.1.9)$$

где $l_{q\eta} = 0, 1, \dots, n_{q\eta}$ – номер узла сетки, $h_{q\eta} = (C_{2\eta} - C_{1\eta})/n_{q\eta}$ – шаг q -й сетки, $n_{q\eta}$ – количество равных частей, на которые разбит отрезок $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$. Таким образом, построены двумерные сетки в каждой из шести областей Ω , соответствующих неравенствам (3.1.5). На этих сетках с использованием соотношений (3.1.6) и условий (3.1.7) рассчитываются наборы значений коэффициентов функций (3.1.2).

Нахождение оптимального набора коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ осуществим с помощью процедуры поиска минимума функции (3.1.8). Эта вычислительная процедура построена на основе комбинации методов случайного поиска и покоординатного спуска и включает два этапа. При этом в качестве восемнадцати искомым координат выступают не сами коэффициенты $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, а соответствующие им наборы величин $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$, присутствующие в выражениях (3.1.6).

На первом этапе случайным образом выбирается начальная точка \mathbf{f} – совокупность восемнадцати значений $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$ из множества допустимых дискретных сочетаний на введенной многомерной сетке:

$$\mathbf{f} = (f_{0\rho}, f_{1\rho}, f_{2\rho}, \dots, f_{0c_\varepsilon}, f_{1c_\varepsilon}, f_{2c_\varepsilon}).$$

На втором этапе в случайном порядке выбирается одна из координат и выполняется поиск минимума функции I_m ($m = 1, 2$) при изменении значений этой координаты во всех возможных узлах с номерами $l_{q\eta}$. При этом значения семнадцати других координат не меняются. Процедура случайного выбора координат повторяется до тех пор, пока не будет осуществлен поиск по всем координатам. По окончании второго этапа получаем значение локального минимума функции I_m и соответствующий набор координат \mathbf{f} , по которому с помощью формул (3.1.6) вычисляются искомые коэффициенты $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$.

Локальный минимум функции I_m и соответствующий ему набор материальных параметров зависят и от выбора начальной точки, и от порядка перебора координат при покоординатном спуске. Поэтому процедура поиска локального минимума повторяется M раз. В качестве конечного решения выбирается набор коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, обеспечивающий наименьшее значение I_m среди локальных решений. Получаемое таким образом оптимальное решение является приближенным, точность которого зависит от выбора шага сетки $h_{q\eta}$ и числа M .

3.2. Определение законов неоднородности непрерывно-слоистых термоупругих тел с заданными звукоотражающими свойствами

В этом разделе решены обратные задачи дифракции плоских звуковых волн на непрерывно-неоднородных по толщине термоупругих слоях плоской, цилиндрической и сферической формы.

3.2.1. Решение задачи для плоского слоя

Постановка и решение задачи. На основе полученного в разделе 2.1 решения прямой задачи определим законы неоднородности материала термоупругого плоского слоя, обеспечивающие наименьшее отражение звука в заданном диапазоне частот при фиксированном угле падения волны $\theta = \theta_*$, а также в заданном интервале углов падения $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ при фиксированной частоте волны.

Решение этой обратной задачи найдено методом, предложенным в разделе 3.1, где полагалось, что $\varpi = 2|k_{11}|h$ – волновой размер плоского слоя, угол наблюдения α заменялся углом падения волны θ , координата ξ – координатой z , отрезок $[a, b]$ – отрезком $[-h, h]$.

Результаты расчетов. Были рассчитаны зависимости (3.1.1) для плотности и модулей упругости материала термоупругого плоского слоя, обеспечивающие наименьшее звукоотражение в частотном диапазоне $5 \leq \varpi \leq 15$ при нормальном падении волны ($\theta_* = 0^\circ$), а также в интервале углов падения волны $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ на частоте $\varpi_* = 8.5$. Рассматривалось падение плоской звуковой волны с единичной амплитудой на находящийся в воде термоупругий плоский слой толщиной $2h = 0.005$ м из материала на основе поливинилбутираля.

При расчетах полагали, что $C_{1\rho} = C_{1\lambda} = C_{1\mu} = 0.5$, $C_{2\rho} = C_{2\lambda} = C_{2\mu} = 1.5$. Такие значения границ неравенств (3.1.5) обеспечивают достаточно широкий диапазон изменения функций (3.1.1), когда максимально возможные значения функций больше минимально допустимых значений в три раза. При этом в трех областях $\Omega(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $\Omega(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $\Omega(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$, соответствующих неравенствам (3.1.5), строились одинаковые сетки (3.1.9), причем сначала с шагами $h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.5$ ($q = 0, 1, 2$), а затем более густые – с шагами

$h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.25$. Рассчитанные на этих сетках наборы коэффициентов $(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$ определяют в каждой из трех областей Ω все допустимые функции $\bar{\rho}(z)$, $\bar{\lambda}(z)$, $\bar{\mu}(z)$ для механических параметров слоя $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$, показанные на рис. 3.2.1. Из этих параметров выбирались те, для которых значение I_m ($m=1,2$) минимально. При этом $M = 63$.

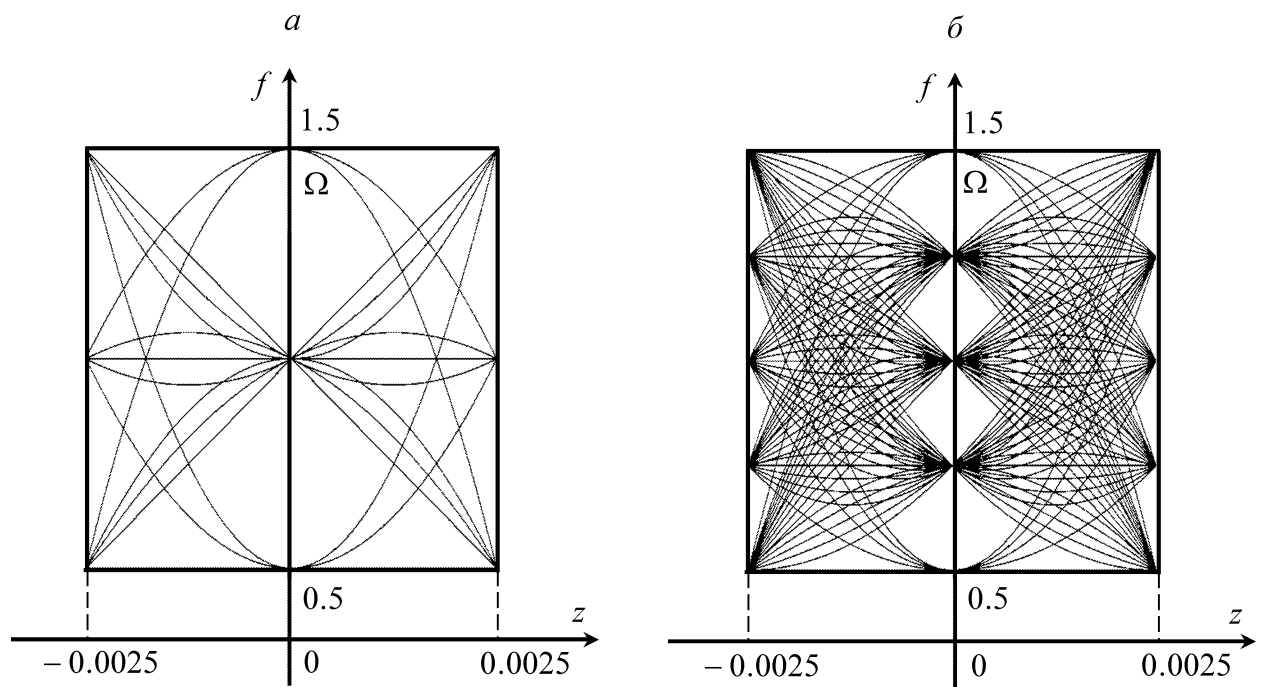


Рис. 3.2.1. Область Ω и допустимые функции $\bar{\rho}(z)$, $\bar{\lambda}(z)$, $\bar{\mu}(z)$ при шагах сеток $h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.5$ (а) и $h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.25$ (б)

Результаты расчетов оптимальных наборов коэффициентов представлены в табл. 3.2.1, 3.2.2, из которых следует, что измельчение сеток может позволить значительно уменьшить значения величин I_1 , I_2 из-за существенного увеличения числа допустимых решений. Например, на менее густых сетках (см. табл. 3.2.1) для термоупругого плоского слоя найден закон неоднородности

$$\rho(z) = 1070 \cdot (1.5 - 16 \cdot 10^4 z^2), \quad \lambda(z) = 3.9 \cdot 10^9, \quad \mu(z) = 9.8 \cdot 10^8,$$

$$\alpha_T(z) = 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(z) = 0.2, \quad c_\varepsilon(z) = 1.2 \cdot 10^6,$$

при котором минимальное значение $I_2 = 0.106$, тогда как при сгущении сеток вдвое (см. табл. 3.2.2) для такого слоя удастся построить неоднородность

$$\begin{aligned} \rho(z) &= 1070 \cdot (0.75 - 4 \cdot 10^4 z^2), \quad \lambda(z) = 3.9 \cdot 10^9, \quad \mu(z) = 9.8 \cdot 10^8, \\ \alpha_T(z) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(z) = 0.2, \quad c_\varepsilon(z) = 1.2 \cdot 10^6, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

при которой достигается минимальное значение $I_2 = 0.056$.

Заметим, что схожий эффект от сгущения сеточной области наблюдался и в работе [89] при определении линейных законов неоднородности плоского упругого слоя, обеспечивающих наименьшее звукоотражение и в работе [90] при нахождении квадратичных законов неоднородности покрытия плоского упругого слоя с оптимальными звукоотражающими свойствами.

Таблица 3.2.1

Оптимальные наборы коэффициентов при шагах сеток $h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.5$

m	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	I_m
1	1	100	$-4 \cdot 10^4$	1	-200	0	1	-100	$-4 \cdot 10^4$	0.115
	1	-100	$-4 \cdot 10^4$	1	200	0	1	100	$-4 \cdot 10^4$	
2	1.5	0	$-16 \cdot 10^4$	1	0	0	1	0	0	0.106

Таблица 3.2.2

Оптимальные наборы коэффициентов при шагах сеток $h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.25$

m	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	I_m
1	1	100	$-4 \cdot 10^4$	1	-100	$-4 \cdot 10^4$	1	-50	$-6 \cdot 10^4$	0.069
	1	-100	$-4 \cdot 10^4$	1	100	$-4 \cdot 10^4$	1	50	$-6 \cdot 10^4$	
2	0.75	0	$-4 \cdot 10^4$	1	0	0	1	0	0	0.056

Из табл. 3.2.1, 3.2.2 видно, что оптимальное решение оказывается единственным, если все коэффициенты с верхним индексом 1 равны нулю. В других случаях для каждого из приведенных вариантов расчета существует по два набора оптимальных коэффициентов $(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$, различающихся знаком при коэффициентах с индексом 1, то

тесть имеется два оптимальных решения. Например, из табл. 3.2.2 следует, что минимальному значению $I_1 = 0.069$ соответствует как плоский слой с физико-механическими характеристиками

$$\begin{aligned} \rho(z) &= 1070 \cdot (1 + 100z - 4 \cdot 10^4 z^2), \quad \lambda(z) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (1 - 100z - 4 \cdot 10^4 z^2), \\ \mu(z) &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (1 - 50z - 6 \cdot 10^4 z^2), \\ \alpha_T(z) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(z) = 0.2, \quad c_\varepsilon(z) = 1.2 \cdot 10^6, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

так и слой с физико-механическими характеристиками

$$\begin{aligned} \rho(z) &= 1070 \cdot (1 - 100z - 4 \cdot 10^4 z^2), \quad \lambda(z) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (1 + 100z - 4 \cdot 10^4 z^2), \\ \mu(z) &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (1 + 50z - 6 \cdot 10^4 z^2), \\ \alpha_T(z) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(z) = 0.2, \quad c_\varepsilon(z) = 1.2 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

При этом функции (3.2.2), описывающие механические параметры слоя, симметричны относительно оси ординат соответствующим функциям (3.2.3).

Таким образом, в исследуемом диапазоне частот в случае одинаковых граничащих с неоднородным термоупругим плоским слоем жидкостей, при квадратичных законах неоднородности этого слоя таких, что теплофизические параметры постоянны, а плотность и модули упругости симметрично распределены относительно срединной плоскости слоя, последний неразличим по отраженному звуковому полю. Аналогичные наблюдения сделаны в работе [89] для плоского упругого слоя в случае линейных законов его неоднородности.

С целью сравнения были рассчитаны значения $I_1 = 0.191$, $I_2 = 0.546$ для однородного термоупругого плоского слоя из поливинилбутираля. Найденные оптимальные законы неоднородности (3.2.1) – (3.2.3) приводят к уменьшению этих значений на 64 и 90 процентов соответственно.

3.2.2. Решение задачи для цилиндрического слоя

Постановка и решение задачи. На основе полученного в разделе 2.2 решения прямой задачи, определим законы неоднородности материала термо-

упругого цилиндрического слоя, для которых будем иметь наименьшее рассеяние звука в интервале волновых чисел $\varpi_1 \leq \varpi \leq \varpi_2$ при фиксированном угле наблюдения $\varphi = \varphi_*$, а также в заданном угловом секторе наблюдения $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ при фиксированном волновом размере слоя $\varpi = \varpi_*$.

Решение этой обратной задачи найдено методом, предложенным в разделе 3.1, где полагалось, что $\varpi = |k_{11}|r_1$ – волновой размер цилиндрического слоя, угол α заменялся углом φ , координата ξ – координатой r , отрезок $[a, b]$ – отрезком $[r_2, r_1]$, а подынтегральная функция в (3.1.3), (3.1.4) определялась выражением $I(\varpi, \varphi) = |F(\varpi, \varphi)|^2$, где $F(\varpi, \varphi)$ имеет вид (2.2.6).

Результаты расчетов. При численной реализации метода расчеты проводились для граничащего с водой цилиндрического слоя с внешним радиусом $r_1 = 1.1$ м и внутренним радиусом $r_2 = 1$ м из материала на основе поливинилбутирала. Рассматривался случай падения плоской звуковой волны с единичной амплитудой на цилиндрический слой перпендикулярно его оси вращения. При расчетах полагали, что неоднородность термоупругого материала слоя проявляется в изменении плотности $\rho(r)$ и модулей упругости $\lambda(r)$, $\mu(r)$. При этом для функций $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\lambda}(r)$, $\bar{\mu}(r)$ вводились ограничения (3.1.5), в которых $C_{1\rho} = C_{1\lambda} = C_{1\mu} = 0.5$, $C_{2\rho} = C_{2\lambda} = C_{2\mu} = 1.5$.

В каждой из трех областей $\Omega(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $\Omega(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $\Omega(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$ строились сетки (3.1.9) для одинаковых шагов ($h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.25$, $q = 0, 1, 2$). Рассчитанные на этих сетках наборы коэффициентов $\rho^{(q)}$, $\lambda^{(q)}$, $\mu^{(q)}$ определяют в каждой из областей все допустимые функции $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\lambda}(r)$, $\bar{\mu}(r)$ для законов неоднородности материала цилиндрического слоя, показанные на рис. 3.2.2. Из этих законов при $M = 65$ выбирались те, для которых значения I_1 , I_2 минимальны.

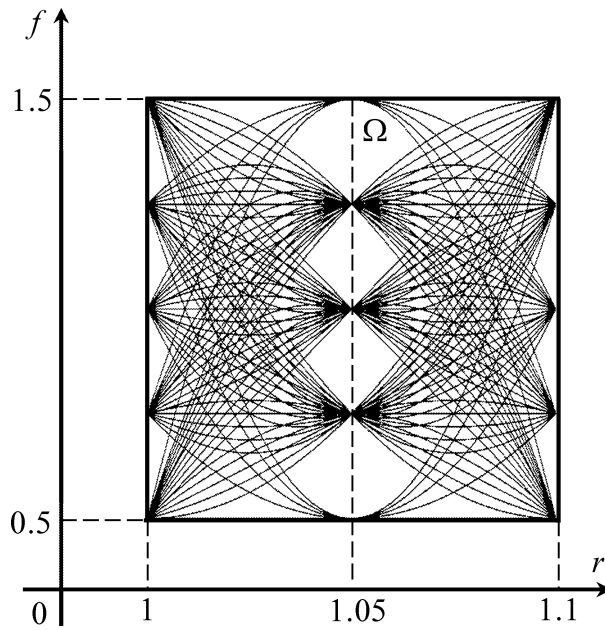


Рис. 3.2.2. Область Ω и допустимые функции $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\lambda}(r)$, $\bar{\mu}(r)$

Таблица 3.2.3

Оптимальные наборы коэффициентов

m	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	I_m
1	48	-97.5	50	1	0	0	1	0	0	0.161
2	-109	210	-100	-109.5	210	-100	-57	107.5	-50	0.120

В первой строке табл. 3.2.3 приведены значения оптимальных коэффициентов $\rho^{(q)}$, $\lambda^{(q)}$, $\mu^{(q)}$ ($q = 0,1,2$), обеспечивающие наименьшее обратное ($\varphi_* = \pi$) рассеяние звука термоупругим цилиндрическим слоем в интервале $5.5 \leq \varpi \leq 7.5$. Можно видеть, что минимальному значению I_1 равному 0.161 соответствует цилиндрический слой, неоднородность которого проявляется в изменении плотности:

$$\rho(r) = 1070 \cdot (48 - 97.5r + 50r^2), \lambda(r) = 3.9 \cdot 10^9, \mu(r) = 9.8 \cdot 10^8, \\ \alpha_T(r) = 2.3 \cdot 10^{-4}, \lambda_T(r) = 0.2, c_\varepsilon(r) = 1.2 \cdot 10^6. \quad (3.2.4)$$

Результаты расчетов, приведенные во второй строке табл. 3.2.3, получены для угла наблюдения, изменяющегося в секторе $0 \leq \varphi \leq \pi$, при волновом размере цилиндрического слоя $\varpi_* = 5$. Наименьшее рассеяние звука в этом угловом

секторе со значением $I_2 = 0.120$ достигается при следующем законе неоднородности цилиндрического слоя:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 1070 \cdot (-109 + 210r - 100r^2), \quad \lambda(r) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (-109.5 + 210r - 100r^2), \\ \mu(r) &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (-57 + 107.5r - 50r^2), \\ \alpha_T(r) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(r) = 0.2, \quad c_\varepsilon(r) = 1.2 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Для сравнения были рассчитаны значения $I_1 = 0.501$, $I_2 = 0.483$ для однородного термоупругого цилиндрического слоя из поливинилбутираля. Найденные оптимальные законы неоднородности (3.2.4), (3.2.5) дают возможность уменьшить эти значения на 68 и 75 процентов соответственно.

Для оценки влияния частотного диапазона на оптимальные звукоотражающие свойства неоднородного термоупругого цилиндрического слоя проведена минимизация функционала I_1 в интервале $7.5 \leq \varpi \leq 10.5$. В этом интервале наименьшей осредненной интенсивности отражения звука со значением $I_1 = 0.093$ соответствует слой, неоднородность которого проявляется в изменении модулей упругости:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 1070, \quad \lambda(r) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (110.75 - 210r + 100r^2), \\ \mu(r) &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (-439.5 + 840r - 400r^2), \\ \alpha_T(r) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(r) = 0.2, \quad c_\varepsilon(r) = 1.2 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Таким образом, оптимальные законы неоднородности термоупругого цилиндрического слоя для разных частотных интервалов могут существенно различаться. Это подтверждают и значение $I_1 = 0.354$, рассчитанное в интервале $7.5 \leq \varpi \leq 10.5$ при законе неоднородности оболочки (3.2.4), и значение $I_1 = 0.226$, рассчитанное в интервале $5.5 \leq \varpi \leq 7.5$ при законе неоднородности оболочки (3.2.6). Заметим также, что неоднородность (3.2.6) позволяет уменьшить на 63% значение $I_1 = 0.254$, рассчитанное в интервале $7.5 \leq \varpi \leq 10.5$ для однородного термоупругого цилиндрического слоя из поливинилбутираля.

Отметим, что в работе [88] последовательным перебором множества допустимых линейных функций, описывающих механические параметры материала упругого цилиндрического слоя, определены оптимальные плотность и модули упругости этого материала, обеспечивающие наименьшее рассеяние звука в заданном направлении при фиксированном волновом размере слоя.

3.2.3. Решение задачи для сферического слоя

Постановка и решение задачи. На основе полученного в разделе 2.3 решения прямой задачи, определим законы неоднородности материала термоупругого сферического слоя, для которых будем иметь наименьшее рассеяние звука в интервале волновых чисел $\varpi_1 \leq \varpi \leq \varpi_2$ при фиксированном угле наблюдения $\theta = \theta_*$, а также в заданном угловом секторе наблюдения $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ при фиксированном волновом размере слоя $\varpi = \varpi_*$.

Решение этой обратной задачи найдено методом, предложенным в разделе 3.1, где полагалось, что $\varpi = |k_{11}|r_1$ – волновой размер сферического слоя, угол α заменялся углом θ , координата ξ – координатой r , отрезок $[a, b]$ – отрезком $[r_2, r_1]$, а подынтегральная функция в (3.1.3), (3.1.4) определялась выражением $I(\varpi, \theta) = |F(\varpi, \theta)|^2$, где $F(\varpi, \theta)$ имеет вид (2.3.7).

Результаты расчетов. При численной реализации метода полагали, что плоская звуковая волна с единичной амплитудой падает на граничащий с водой сферический слой с внешним радиусом $r_1 = 1.1$ м и внутренним радиусом $r_2 = 1$ м из материала на основе поливинилбутираля. Были проведены расчеты оптимальных коэффициентов $\rho^{(q)}$, $\lambda^{(q)}$, $\mu^{(q)}$ ($q = 0, 1, 2$) функций $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\lambda}(r)$, $\bar{\mu}(r)$, обеспечивающих наименьшее рассеяние звука термоупругим сферическим слоем в интервале углов наблюдения $0 \leq \theta \leq \pi$ при фиксированных значениях волнового размера слоя $\varpi_* = 5$, $\varpi_* = 7$. При этом рассматривался такой же набор допустимых зависимостей для функций $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\lambda}(r)$, $\bar{\mu}(r)$, что и в случае цилиндрического слоя (рис. 3.2.2).

Результаты расчетов приведены в табл. 3.2.4, где первая строка соответствует волновому числу $\varpi_* = 5$, а вторая строка – $\varpi_* = 7$. Из этой таблицы следует, что для разных частот падающей волны оптимальные законы неоднородности термоупругого сферического слоя, обеспечивающие наименьшее рассеяние звука в заданном интервале углов наблюдения, могут существенно различаться.

Таблица 3.2.4

Оптимальные наборы коэффициентов

$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	I_2
111.5	-210	100	1	0	0	1	0	0	0.647
221.5	-420	200	6	-5	0	-4.5	5	0	1.529

Для сравнения были рассчитаны значения I_2 при $\varpi_* = 5$ и $\varpi_* = 7$ для однородного термоупругого сферического слоя из поливинилбутираля, которые оказались равными 3.620 и 6.018 соответственно. Приведенные в табл. 3.2.4 оптимальные наборы коэффициентов позволяют уменьшить эти значения в 5.6 и 3.9 раза.

3.3. Математическое моделирование неоднородных покрытий термоупругих тел с требуемыми звукоотражающими свойствами

В данном разделе решены обратные задачи дифракции плоских звуковых волн на однородных термоупругих телах плоской, цилиндрической и сферической формы с непрерывно-слоистыми термоупругими покрытиями.

3.3.1. Моделирование покрытия пластины

Постановка и решение задачи. На основе полученного в п. 2.5.1 решения прямой задачи, определим законы неоднородности покрытия термоупругой пластины, для которых будем иметь наименьшее звукоотражение в заданном интервале волновых чисел $\varpi_1 \leq \varpi \leq \varpi_2$ при фиксированном угле падения волны $\theta = \theta_*$, а также в заданном интервале углов падения $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ при фиксированном волновом размере пластины $\varpi = \varpi_*$.

Решение этой обратной задачи найдено методом, предложенным в разделе 3.1, где полагалось, что $\varpi = |k_{21}|H$ – волновой размер пластины, угол α заменялся углом падения волны θ , а физико-механические характеристики материала тела (3.1.1) отождествлялись с соответствующими физико-механическими характеристиками материала покрытия. При этом в (3.1.1) переменная ξ , изменяющаяся на отрезке $[a, b]$, заменялась переменной $z \in [-(H + h), -H]$. Физико-механические характеристики материала пластины полагались известными.

Результаты расчетов. При численной реализации метода были рассчитаны зависимости (3.1.1) для плотности и модулей упругости термоупругого материала покрытия, обеспечивающие наименьшее звукоотражение в интервале волновых чисел $5 \leq \varpi \leq 10$ при фиксированном угле падения волны $\theta_* = 25^\circ$, а также в интервале углов падения $20^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ при фиксированном волновом числе $\varpi = 8.5$. Рассматривался случай, когда плоская звуковая волна с единичной амплитудой падает на находящуюся в воде алюминиевую пластину толщиной $H = 0.05$ м, оснащенную покрытием, имеющим толщину $h = 0.005$ м и изготовленным из материала на основе поливинилбутираля.

При расчетах полагали, что $C_{1\rho} = C_{1\lambda} = C_{1\mu} = 0.5$, $C_{2\rho} = C_{2\lambda} = C_{2\mu} = 1.5$. При этом в областях $\Omega(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $\Omega(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $\Omega(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$ строились одинаковые сетки (3.1.9), такие что $h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.25$ ($q = 0, 1, 2$). Рассчитанные на этих сетках допустимые функции для механических параметров материала покрытия показаны на рис. 3.3.1. Из этих параметров при $M = 63$ выбирались те, для которых значения I_1 , I_2 минимальны.

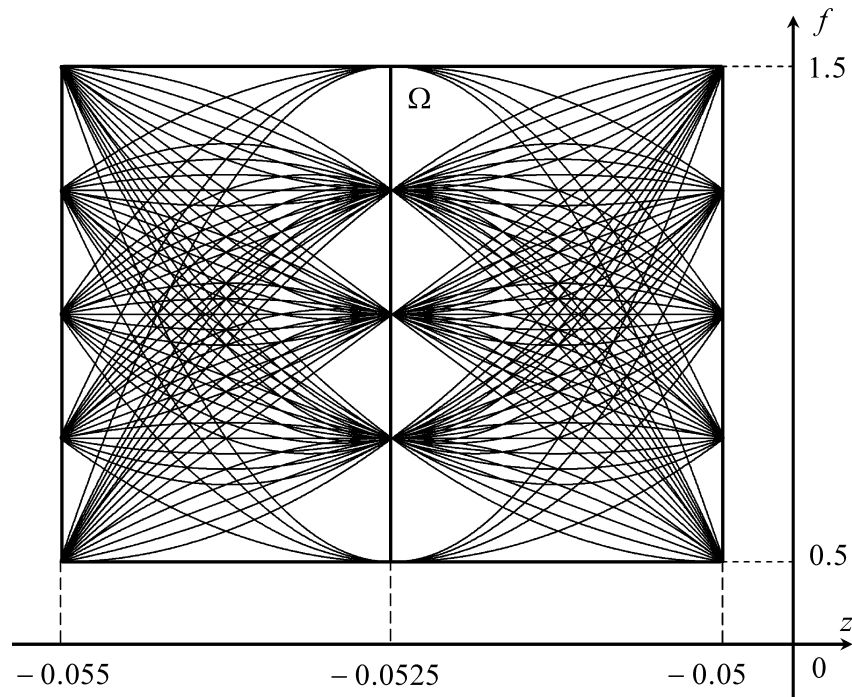


Рис. 3.3.1. Область Ω и допустимые функции $\bar{\rho}(z)$, $\bar{\lambda}(z)$, $\bar{\mu}(z)$

Найденные оптимальные наборы коэффициентов $\rho^{(q)}$, $\lambda^{(q)}$, $\mu^{(q)}$ ($q = 0, 1, 2$) приведены в табл. 3.3.1.

Таблица 3.3.1

Оптимальные наборы коэффициентов

m	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	I_m
1	1.5	0	0	-9.5	-200	0	-219.5	-8400	-80000	0.699
2	-4	-100	0	-9.5	-200	0	-109.5	-4200	-40000	0.472

Из табл. 3.3.1 следует, что минимальному значению $I_1 = 0.699$ соответствует термоупругое покрытие с законом неоднородности

$$\begin{aligned} \rho(z) &= 1070 \cdot 1.5, \quad \lambda(z) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (-9.5 - 200z), \\ \mu(z) &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (-219.5 - 8400z - 80000z^2), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$\alpha_T(z) = 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(z) = 0.2, \quad c_\varepsilon(z) = 1.2 \cdot 10^6,$$

а минимальному значению $I_2 = 0.472$ – термоупругое покрытие с законом неоднородности

$$\begin{aligned} \rho(z) &= 1070 \cdot (-4 - 100z), \quad \lambda(z) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (-9.5 - 200z), \\ \mu(z) &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (-109.5 - 4200z - 40000z^2), \\ \alpha_T(z) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(z) = 0.2, \quad c_\varepsilon(z) = 1.2 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Для сравнения были рассчитаны значения величин I_1 , I_2 для термоупругой пластины без покрытия, которые оказались равными 0.854 и 0.792. Неоднородные термоупругие покрытия с оптимальными свойствами (3.3.1), (3.3.2) позволяют уменьшить эти значения на 18 и 40 процентов соответственно.

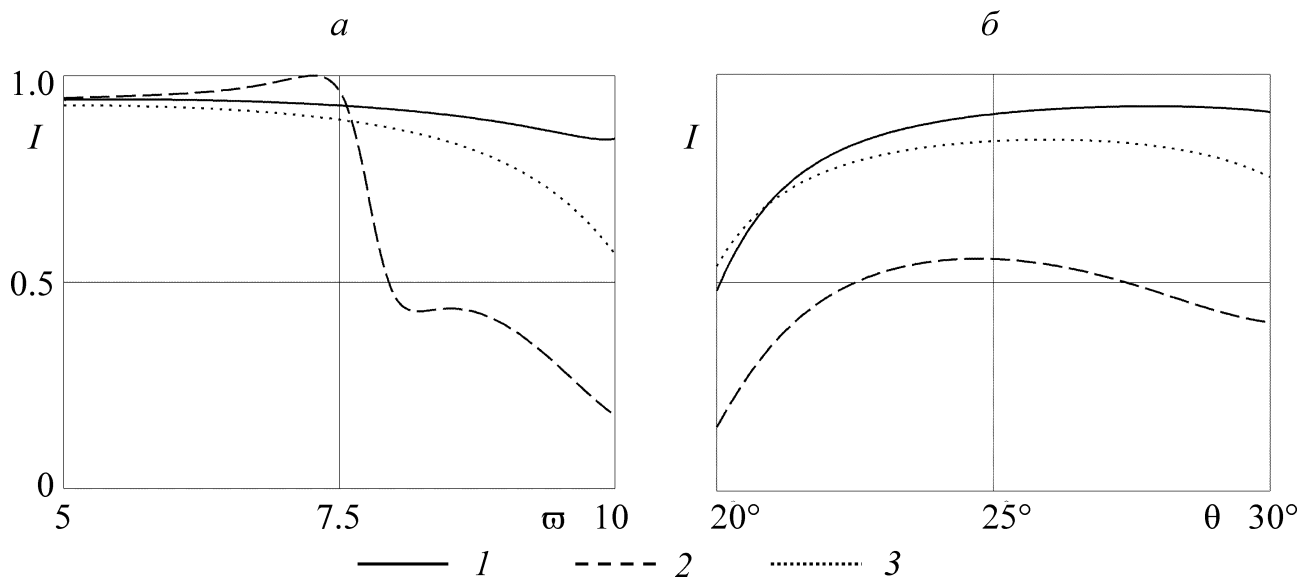


Рис. 3.3.2. Зависимость интенсивности звукоотражения от волнового размера пластины (а) и угла падения волны (б): 1 — термоупругая пластина с однородным термоупругим покрытием, 2 — термоупругая пластина с неоднородным термоупругим покрытием с оптимальными звукоотражающими свойствами, 3 — термоупругая пластина без покрытия

На рис. 3.3.2 проиллюстрирована эффективность покрытий с физико-механическими характеристиками (3.3.1), (3.3.2). Из рис. 3.3.2,а видно, что во всей первой половине исследуемого интервала волновых чисел $5 \leq \varpi \leq 10$ наличие у пластины покрытия со свойствами (3.3.1) приводит к некоторому увеличению интенсивности звукоотражения I , а во второй половине этого интервала, за исключением его небольшого начального участка, с помощью неоднородного покрытия можно заметно уменьшить значение величины I . Рис.

3.3.2,б показывает, что наличие у пластины покрытия со свойствами (3.3.2) позволяет существенно снизить интенсивность звукоотражения во всем рассматриваемом интервале углов падения $20^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$. Кроме того, из рис. 3.3.2 следует, что в исследуемом интервале волновых чисел однородное термоупругое покрытие пластины оказывается неэффективным, а в заданном интервале углов падения – малоэффективным.

3.3.2. Моделирование покрытия цилиндра

Постановка и решение задачи. На основе полученного в п. 2.6.1 решения прямой задачи, определим законы неоднородности покрытия термоупругого цилиндра, для которых будем иметь наименьшее рассеяние звука при фиксированном угле наблюдения $\varphi = \varphi_*$ в заданном диапазоне частот, соответствующем интервалу волновых чисел $\varpi_1 \leq \varpi \leq \varpi_2$, а также в заданном угловом секторе наблюдения $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ при фиксированной частоте, соответствующей волновому размеру цилиндра $\varpi = \varpi_*$.

Решение этой обратной задачи найдено методом, предложенным в разделе 3.1, где полагалось, что $\varpi = |k_1| r_0$ – волновой размер непокрытого цилиндра, угол α заменялся углом наблюдения φ , а физико-механические характеристики материала тела (3.1.1) отождествлялись с соответствующими физико-механическими характеристиками материала покрытия. При этом в (3.1.1) переменная ξ , изменяющаяся на отрезке $[a, b]$, заменялась переменной $r \in [r_0, r_1]$. Физико-механические характеристики материала цилиндра полагались известными. Подынтегральная функция в (3.1.3), (3.1.4) определялась выражением $I(\varpi, \varphi) = |F(\varpi, \varphi)|^2$, где $F(\varpi, \varphi)$ имеет вид (2.6.25).

Результаты расчетов. При численной реализации метода расчеты проводились для находящегося в воде алюминиевого цилиндра радиусом $r_0 = 1$ м, оснащенного покрытием на основе поливинилбутираля, имеющим толщину 0.1 м. Рассматривался случай, когда плоская звуковая волна с единичной амплиту-

дой падает на цилиндрическое тело в направлении оси абсцисс ($\theta_0 = \pi/2, \varphi_0 = 0$). При расчетах полагали, что неоднородность термоупругого материала покрытия проявляется в изменении плотности и модулей упругости. Для этих механических параметров рассматривался набор допустимых зависимостей, рассчитанных при $h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.5$ ($q = 0,1,2$) и показанных на рис. 3.3.3.

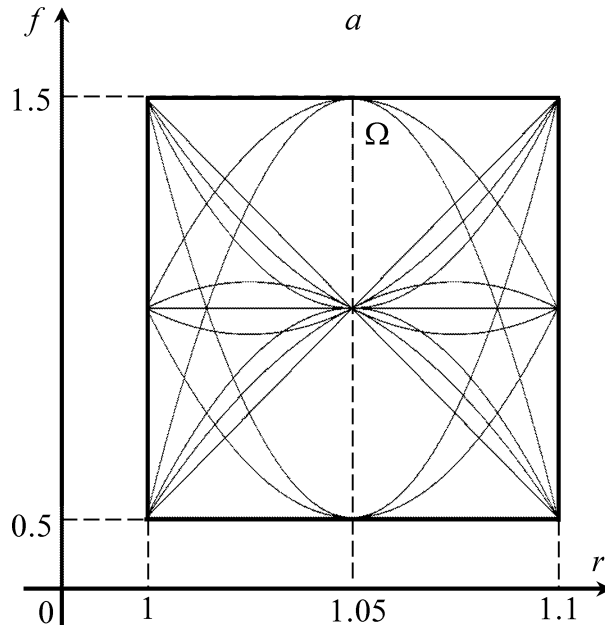


Рис. 3.3.3. Область Ω и допустимые функции $\bar{\rho}(z)$, $\bar{\lambda}(z)$, $\bar{\mu}(z)$

В первой строке табл. 3.3.2 приведены значения оптимальных коэффициентов $\rho^{(q)}$, $\lambda^{(q)}$, $\mu^{(q)}$ ($q = 0,1,2$), обеспечивающих наименьшее обратное ($\varphi_* = \pi$) рассеяние звука цилиндром с покрытием в частотном диапазоне, который определялся изменением волнового размера цилиндра в интервале $11 \leq \varpi \leq 12$. В этом диапазоне частот минимальному значению I_1 , найденному при $M = 63$ и равному 0.728, соответствует термоупругое покрытие, неоднородность которого задается зависимостями:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 1070 \cdot (-9.5 + 10r), \quad \lambda(r) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (116.5 - 215r + 100r^2), \\ \mu(r) &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (-219.5 + 420r - 200r^2), \\ \alpha_T(r) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(r) = 0.2, \quad c_\varepsilon(r) = 1.2 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Заметим, что оптимальные законы неоднородности покрытия цилиндра для разных частотных диапазонов могут существенно различаться. Такой случай показан в работе [205].

Таблица 3.3.2

Оптимальные наборы коэффициентов

$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	I_m
-9.5	10	0	116.5	-215	100	-219.5	420	-200	0.728 ($m=1$)
11.5	-10	0	1	0	0	1	0	0	0.545 ($m=2$)

Результаты расчетов, приведенные во второй строке табл. 3.3.2, получены для случая фиксированной частоты, которой соответствует волновое число $\varpi_* = 11.8$. При этом угол наблюдения изменялся в интервале $3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi$. В этой освещенной зоне наименьшее рассеяние звука со значением $I_2 = 0.545$ достигается с помощью неоднородного по плотности покрытия:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 1070 \cdot (11.5 - 10r), \quad \lambda(r) = 3.9 \cdot 10^9, \quad \mu(r) = 9.8 \cdot 10^8, \\ \alpha_T(r) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(r) = 0.2, \quad c_\varepsilon(r) = 1.2 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Для сравнения были рассчитаны значения $I_1 = 1.259$, $I_2 = 0.733$ для термоупругого цилиндра без покрытия. Эти значения показывают, что в рассматриваемых диапазоне частот и секторе углов наблюдения покрытия, законы неоднородности которых имеют вид (3.3.3), (3.3.4), позволяют уменьшить среднее значение интенсивности рассеяния звука цилиндром на 42 и 26 процентов соответственно.

Рис. 3.3.4 иллюстрирует эффективность покрытий с найденными оптимальными звукоотражающими свойствами. Из рис. 3.3.4,а видно, что наличие у цилиндра покрытия со свойствами (3.3.3) приводит к уменьшению интенсивности звукоотражения во всем исследуемом частотном диапазоне. Рис. 3.3.4,б показывает, что с помощью покрытия со свойствами (3.3.4) можно добиться снижения рассеянного акустического поля в рассматриваемом угловом секторе, за исключением углов вблизи $\varphi = 140^\circ$.

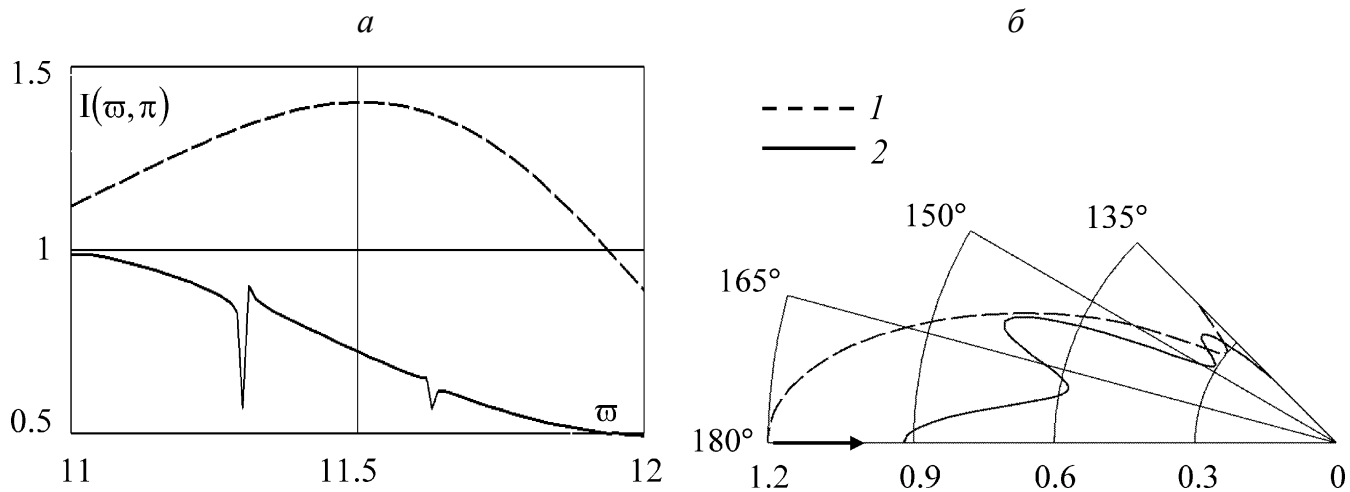


Рис. 3.3.4. Зависимость интенсивности рассеяния звука от волнового размера цилиндра (а) и полярного угла (б): 1 — термоупругий цилиндр без покрытия, 2 — термоупругий цилиндр, оснащенный неоднородным термоупругим покрытием с оптимальными звукоотражающими свойствами; стрелка — направление распространения падающей плоской волны

Отметим также, что на основе полученного в разделе 2.8 решения прямой задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на однородном термоупругом цилиндре, имеющем непрерывно-слоистое неоднородное термоупругое покрытие и находящемся в безграничном пространстве, предложенным в разделе 3.1 методом моделировались неоднородные по плотности термоупругие покрытия, обеспечивающие наименьшее рассеяние звука в частотном диапазоне $8.5 \leq \omega \leq 9$ при $\varphi_* = \pi$ и в секторе углов наблюдения $3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi$ при $\omega_* = 11$. При расчетах полагали, что на граничащий с водой стальной цилиндр радиусом 1 м с покрытием из материала на основе поливинилбутирала толщиной 0.1 м падает звуковая волна с единичной амплитудой, излучаемая линейным источником, ось которого имеет координаты $r_0 = 1.2r_2$, $\varphi_0 = \pi$. Рассматривался набор допустимых функций $\bar{\rho}(r)$ показанный на рис. 3.2.2. Поскольку данный набор состоит из восьмидесяти пяти функций, то минимизация функционалов I_1, I_2 осуществлялась последовательным перебором этих функций.

Расчеты показали, что минимальные значения $I_1 = 0.082$, $I_2 = 0.045$ достигаются с помощью термоупругих покрытий с плотностью $\rho(r) = 1070 \cdot (53.75 - 102.5r + 50r^2)$ и $\rho(r) = 1070 \cdot (-57 + 107.5r - 50r^2)$

соответственно. Рассчитанные для термоупругого цилиндра без покрытия значения $I_1 = 0.096$, $I_2 = 0.066$ показывают, что в заданных диапазоне частот и угловом секторе неоднородное термоупругое покрытие с оптимальными звукоотражающими свойствами уменьшает среднее значение интенсивности рассеяния звука на 15 и 32 процента соответственно.

3.3.3. Моделирование покрытия шара

Постановка и решение задачи. На основе полученного в п. 2.7.1 решения прямой дифракционной задачи, определим законы неоднородности покрытия термоупругого шара, для которых будем иметь наименьшее рассеяние звука в заданном диапазоне частот ($\varpi_1 \leq \varpi \leq \varpi_2$) при фиксированном угле наблюдения $\theta = \theta_*$ и в заданном секторе углов наблюдения $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ при фиксированной частоте ($\varpi = \varpi_*$).

Решение этой обратной задачи найдено методом, предложенным в разделе 3.1, где полагалось, что $\varpi = |k_1|r_0$ – волновой размер непокрытого шара, угол α заменялся углом наблюдения θ , а физико-механические характеристики материала тела (3.1.1) отождествлялись с соответствующими физико-механическими характеристиками материала покрытия. При этом в (3.1.1) переменная ξ , изменяющаяся на отрезке $[a, b]$, заменялась переменной $r \in [r_0, r_1]$. Физико-механические характеристики материала шара полагались известными. Подынтегральная функция в (3.1.3), (3.1.4) определялась выражением $I(\varpi, \theta) = |F(\varpi, \theta)|^2$, где $F(\varpi, \theta)$ имеет вид (2.7.21).

Результаты расчетов. При численной реализации метода рассчитаны оптимальные механические параметры термоупругого материала покрытия. В расчетах полагали, что плоская звуковая волна с единичной амплитудой падает на погруженный в воду алюминиевый шар радиусом $r_0 = 1$ м, оснащенный покрытием толщиной 0.1 м из материала на основе поливинилбутирала.

В табл. 3.3.3 представлены результаты расчетов, которые получены при допустимых зависимостях, изображенных на рис. 3.3.3.

Таблица 3.3.3

Оптимальные наборы коэффициентов

$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	I_m
-9.5	10	0	116.5	-215	100	441.5	-840	400	0.866 ($m = 1$)
-114.5	215	-100	116.5	-215	100	441.5	-840	400	0.387 ($m = 2$)

Первая строка табл. 3.3.3 соответствует случаю минимизации рассеянного шаром с покрытием акустического поля в частотном диапазоне $11.5 \leq \omega \leq 12.5$ при $\theta_* = \pi$, а вторая строка – в угловом секторе $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ при $\omega_* = 12$. Из таблицы следует, что в заданном диапазоне частот наименьшее среднее значение интенсивности звукоотражения равно 0.866 (найденное при $M = 63$) достигается при следующем законе неоднородности термоупругого покрытия:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 1070 \cdot (-9.5 + 10r), \quad \lambda(r) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (116.5 - 215r + 100r^2), \\ \mu(r) &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (441.5 - 840r + 400r^2), \\ \alpha_T(r) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(r) = 0.2, \quad c_\varepsilon(r) = 1.2 \cdot 10^6, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

В указанном секторе углов наблюдения минимальное среднее значение интенсивности рассеяния звука равно 0.387 получено для шара с покрытием, имеющим физико-механические характеристики, отличающиеся от характеристик (3.3.5) только законом изменения плотности:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 1070 \cdot (-114.5 + 215r - 100r^2), \quad \lambda(r) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (116.5 - 215r + 100r^2), \\ \mu(r) &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (441.5 - 840r + 400r^2), \\ \alpha_T(r) &= 2.3 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_T(r) = 0.2, \quad c_\varepsilon(r) = 1.2 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Покрyтия с оптимальными законами неоднородности (3.3.5), (3.3.6) приводят к уменьшению значений $I_1 = 1.973$, $I_2 = 0.821$, рассчитанных для термо-

упругого шара без покрытия, более чем на 50 процентов. Иллюстрация эффективности данных покрытий показана на рис. 3.3.5.

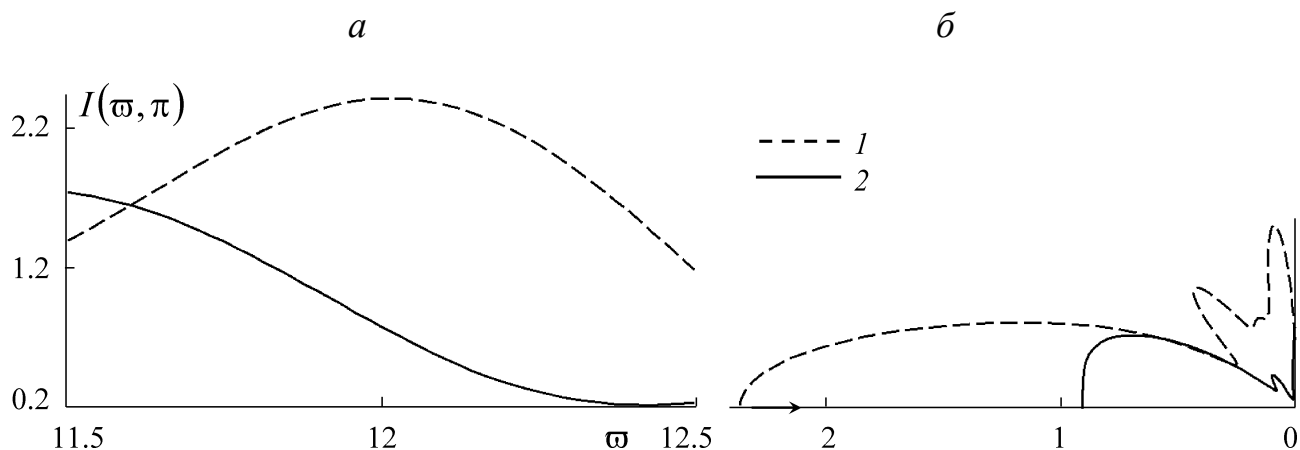


Рис. 3.3.5. Зависимость интенсивности рассеяния звука от волнового размера шара (а) и полярного угла (б): 1 — термоупругий шар без покрытия, 2 — термоупругий шар, оснащенный неоднородным термоупругим покрытием с оптимальными звукоотражающими свойствами; стрелка — направление распространения падающей плоской волны

В табл. 3.3.4 приведены значения для коэффициентов оптимальных законов неоднородности термоупругого покрытия шара и соответствующие им минимальные значения величин I_1 , I_2 , рассчитанные при допустимых зависимостях, показанных на рис. 3.2.2. Первая строка данной таблицы соответствует расчетам в частотном диапазоне $14 \leq \omega \leq 15$ при $\theta_* = \pi$, а вторая строка – в угловом секторе $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ при $\omega_* = 14.5$.

Таблица 3.3.4

Оптимальные наборы коэффициентов

m	$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	I_m
1	11.5	-10	0	116.5	-215	100	441.5	-840	400	0.338
2	48	-97.5	50	-62	112.5	-50	105.75	-205	100	0.331

Сравнение приведенных в табл. 3.3.4 значений I_1 , I_2 со значениями $I_1 = 1.588$, $I_2 = 0.694$, рассчитанными для непокрытого шара, снова показывает возможность значительного (на 76% в частотном диапазоне и 52% в угловом секторе) снижения интенсивности рассеяния звука термоупругим шаром с по-

мощью неоднородного термоупругого покрытия с оптимальными звукоотражающими свойствами.

Из рис. 2.7.2 – 2.7.5, приведенных в п. 2.7.1 следует, в частности, что в диапазоне частот $9 \leq \omega \leq 10$ наличие у алюминиевого шара покрытия (как однородного, так и неоднородного) из поливинилбутираля приводит к существенному увеличению среднего значения интенсивности отраженного акустического поля. Причем это увеличение характерно для всех четырех рассматриваемых в п. 2.7.1 видов неоднородности покрытия. В связи с этим представляет интерес математическое моделирование для этого шара покрытия с оптимальными звукоотражающими свойствами, которое бы способствовало уменьшению в интервале $9 \leq \omega \leq 10$ значения величины I_1 по сравнению со значением этой величины, рассчитанной для шара без покрытия.

Ряд проведенных вычислительных экспериментов с покрытием из материала на основе поливинилбутираля не позволили осуществить такое моделирование. Поэтому было рассмотрено покрытие на основе другого полимерного материала – полиамида [160, 171] (см. табл. 3.3.5), причем неоднородное только по плотности. Набор допустимых зависимостей $\bar{\rho}(r)$, для которых осуществлялся поиск минимума функционала I_1 , приведен на рис. 3.2.2. Минимизация функционала I_1 проводилась последовательным перебором этих зависимостей.

Таблица 3.3.5

Физико-механические характеристики полиамида

$\tilde{\rho}$, кг/м ³	$\tilde{\lambda}$, Н/м ²	$\tilde{\mu}$, Н/м ²	$\tilde{\alpha}_T$, 1/К	$\tilde{\lambda}_T$, Вт/(м·К)	\tilde{c}_ϵ , Дж/(м ³ ·К)
1140	7.695×10^9	2.918×10^9	8.0×10^{-5}	0.28	1.6×10^6

Расчеты показали, что в интервале $9 \leq \omega \leq 10$ термоупругое полиамидное покрытие с оптимальным законом изменения плотности $\rho(r) = 1140 \cdot (-98.5 + 200r - 100r^2)$ позволяет на 31% уменьшить значение $I_1 = 1.889$, рассчитанное для термоупругого алюминиевого шара без покрытия.

Следует отметить, что в работе [206] для упругого непрерывно-слоистого покрытия шара найдены обеспечивающие наименьшее рассеяние звука оптимальные законы неоднородности, которые описаны многочленами третьей степени. При этом для минимизации функционалов I_1 , I_2 использовался генетический алгоритм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получила развитие теория дифракции звуковых волн. Получен ряд новых результатов, краткое содержание которых излагается ниже.

1. Построена математическая модель дифракции гармонических звуковых волн на неоднородных термоупругих телах, граничащих с теплопроводными жидкостями.

2. Предложен аналитико-численный метод решения прямых задач дифракции звука на неоднородных термоупругих телах. Метод заключается в аналитическом описании волновых полей во внешней области в виде разложений по базисным решениям уравнения Гельмгольца и в построении краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения волнового поля в неоднородном термоупругом теле.

3. Получены решения прямых задач о рассеянии гармонических звуковых волн (плоских, цилиндрических, сферических) непрерывно-неоднородными по толщине термоупругими слоями разной геометрической формы (плоской, цилиндрической, сферической). Выявлено существенное совместное влияние неоднородности и термоупругости материала тел на рассеяние звука. Обнаружены характерные черты этого влияния, которые являются следствием особенности рассматриваемых материалов. Показано, что характер дифракции цилиндрических и сферических волн отличается от характера дифракции плоской волны. Это отличие становится более выраженным при приближении источника к рассеивателю.

4. Решены прямые задачи дифракции плоских звуковых волн на однородных термоупругих телах (плоском слое, цилиндре, шаре) с непрерывно- или дискретно-слоистыми термоупругими покрытиями в безграничном пространстве и в плоском волноводе. Показана возможность изменения звукоотражающих свойств тел, как в свободном пространстве, так и вблизи плоских границ с

помощью неоднородных покрытий. Осуществлено математическое моделирование непрерывно-слоистых термоупругих покрытий покрытиями, состоящими из системы однородных термоупругих слоев.

5. Предложен метод решения обратных дифракционных задач об определении законов неоднородности термоупругих тел с требуемыми звукоотражающими свойствами. Он заключается в построении и минимизации функционалов, выражающих осредненную интенсивность рассеянного звукового поля. Метод использует исключительно решения прямых дифракционных задач и не требует экспериментальных замеров акустических откликов.

6. Получены решения обратных дифракционных задач для непрерывно-слоистых термоупругих тел плоской, цилиндрической и сферической формы и для однородных термоупругих тел (пластины, цилиндра, шара) с непрерывно-слоистыми покрытиями. Для достижения требуемого звукоотражения тел в заданном диапазоне частот и угловом секторе осуществлено математическое моделирование неоднородных термоупругих покрытий. Найдены функциональные зависимости для физико-механических характеристик материала термоупругих слоев, обеспечивающие минимальное рассеяние звука.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // Акустический журнал. 2008. Т.54. №3. С.469-482.
2. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина // Акустический журнал. 2005. Т.51. №4. С.437-446.
3. Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акустический журнал. 1986. Т.32. №6. С.762-766.
4. Бобровницкий Ю.И. Научные основы акустического стелса // Доклады РАН. 2012. Т.442. №1. С.41-44.
5. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журнал. 2008. Т.54. №6. С.879-889.
6. Бобровницкий Ю.И. Теория новых поглощающих и нерассеивающих покрытий повышенной эффективности // Акустический журнал. 2007. Т.53. №5. С.613-624.
7. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журнал. 2010. Т.56. №2. С.147-151.
8. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (Обзор) // Акустический журнал. 2018. Т.64. №5. С.517-525.
9. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343с.
10. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 412с.
11. Бригадирова Т.Е., Медведский А.Л. Дифракции нестационарной акустической волны на неоднородной трансверсально-изотропной

- полой сфере // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т.13. №1. С.119-130.
12. Бригадирова Т.Е., Медведский А.Л. Дифракция гармонических упругих волн на неоднородной трансверсально-изотропной сфере // Механика композиционных материалов и конструкций. 2006. Т.12. №4. С.530-540.
 13. Бригадирова Т.Е., Медведский А.Л. Дифракция нестационарных упругих волн на неоднородном сферическом включении // Материалы XIII Между-народного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А.Г. Горшкова». Избранные доклады. М.: МАИ, 2007. С.58-76.
 14. Бригадирова Т.Е., Медведский А.Л. Дифракция плоской нестационарной акустической волны давления на неоднородном трансверсально-изотропном шаре // Материалы XII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». Избранные доклады. М.: МАИ, 2006. С.24-34.
 15. Буров В.А., Вечерин С.Н., Морозов С.А., Румянцева О.Д. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // Акустический журнал. 2010. Т.56. №4. С.516-536.
 16. Буров В.А., Касаткина Е.Е., Марьин А.О., Румянцева О.Д. Оценки максимального правдоподобия в корреляционной акустической томографии // Акустический журнал. 2007. Т.53. №4. С.580-596.
 17. Буров В.А., Попов А.Ю., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Акустическая томография океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей // Акустический журнал. 2005. Т.51. №5. С.602-613.
 18. Буров В.А., Прудникова И.П., Сироткина Н.С. Обратная задача рас-

- сеяния ультразвука на граничной неоднородности в изотропном твердом теле // Акустический журнал. 1992. Т.38. №6. С.1013-1018.
19. Буров В.А., Румянцева О.Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // Акустический журнал. 2003. Т.49. №5. С.590-603.
 20. Буров В.А., Румянцева О.Д. Обратные волновые задачи акустической томографии: Обратные задачи излучения в акустике Ч.1. М.: УРСС, 2018. 384с.
 21. Буров В.А., Румянцева О.Д. Обратные волновые задачи акустической томографии: Обратные задачи акустического рассеяния Ч.2. М.: УРСС, 2019. 760с.
 22. Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение двумерной обратной задачи акустического рассеяния на основе функционально-аналитических методов // Акустический журнал. 1992. Т.38. №3. С.413-420.
 23. Буров В.А., Шмелев А.А. Численное и физическое моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // Акустический журнал. 2009. Т.55. №4-5. С.466-480.
 24. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. 225с.
 25. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для функционально-градиентных материалов // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т.76. №4. С.335-342.
 26. Ватульян А.О., Нестеров С.А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // Инженерно-физический журнал. 2015. Т.88. №4. С.951-959.
 27. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Неоднородные материалы с покрытиями: моделирование и идентификация // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2018. Т.12. С.30-39.

28. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном подходе к идентификации термомеханических характеристик слоистой биологической ткани // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. №2. С.29-36.
29. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Численная реализация итерационной схемы решения обратных задач термоупругости для неоднородных тел с покрытиями // Вычислительные технологии. 2017. Т.22. №5. С.14-26.
30. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородного предварительно напряженного состояния в термоупругих телах // Прикладная математика и механика. 2017. Т.81. №1. С.103-110.
31. Векслер Н.Д., Корсунский В.М., Рыбак С.А. Рассеяние плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акустический журнал. 1990. Т.36. №1. С.12-16.
32. Ворович И.И., Сумбатян М.А. Восстановление образа дефекта по рассеянному полю в акустическом приближении // Известия АН СССР: МТТ. 1990. №6. С.79-84.
33. Гаев А.В. Дифракция плоской нестационарной акустической волны на неоднородном трансверсально-изотропном сферическом слое // Известия Тульского государственного университета. Серия Информатика. 2001. Т.7. Вып.3. С.29-38.
34. Гаев А.В. Нестационарное рассеяние акустических волн на неоднородных анизотропных упругих телах: дисс. ... к-та физ.-мат. наук. Тула, 2003. 196с.
35. Гаев А.В. Нестационарное рассеяние плоского акустического импульса неоднородным трансверсально-изотропным цилиндрическим слоем // Известия Тульского государственного университета. Серия Информатика. 2002. Т.8. Вып.3. С.51-56.

36. Гаев А.В. Рассеяние сферической нестационарной акустической волны неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Известия Тульского государственного университета. Серия Механика. 2002. Т.8. Вып.2. С.58-64.
37. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И., Жанг Ч. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акустический журнал. 2012. Т.58. №3. С.370-385.
38. Горюнов А.Л., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 152с.
39. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища шк., 1985. 190с.
40. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 256с.
41. Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Алгоритм решения одномерной связанной задачи термоупругости с учетом диффузии для слоя // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. М.: МАИ, 2016. С.56-58.
42. Добровольский Н.Н., Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. О решениях обратных задач дифракции звуковых волн // Чебышевский сборник. 2019. Т.20. №3. С.220-245.
43. Ерофеев В.Т. Теоремы сложения: Справочник. Минск: Наука и техника, 1989. 255с.
44. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352с.
45. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: ИЛ, 1950. 456с.
46. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Влияние неоднородного покрытия на прохождение звука через упругую оболочку // Известия Тульского

- государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып.3. С.179-192.
47. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып.2. С.132-145.
48. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журнал. 2006. Т.52. №6. С.791-798.
49. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584с.
50. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496с.
51. Карташов Э.М., Ожерелкова Л.М. Новые модельные представления в проблеме теплового удара // Математическое моделирование. 2002. Т.14. №2. С.95-108.
52. Клещев А.А. Рассеяние звука упругой сжатой сфероидальной оболочкой // Акустический журнал. 1975. Т.21. №6. С.938-940.
53. Клещев А.А. Резонансное рассеяние звука на упругих сфероидальных телах и оболочках // Акустический журнал. 2014. Т.60. №3. С.253-261.
54. Клещев А.А. Трехмерные и двумерные (осесимметричные) характеристики упругих сфероидальных рассеивателей // Акустический журнал. 1986. Т.32. №2. С.268-271.
55. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 308с.
56. Коваленко Г.П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акустический журнал. 1987. Т.33. №6. С.1060-1063.
57. Коваленко Г.П. Определение коэффициентов отражения и трансформации волн на границе жидкости и твердой неоднородной среды // Акустический журнал. 1985. Т.31. №3. С.342-347.

58. Коваленко Г.П. Отражение и преломление звуковой волны на границе неоднородного твердого полупространства и жидкости // Акустический журнал. 1975. Т.21. №6. С.894-899.
59. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир. 1987. 311с.
60. Коровайцева Е.А., Пшеничнов С.Г. Об исследовании переходных волновых процессов в линейно-вязкоупругих телах с учетом непрерывной неоднородности материала // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т.78. №3. С.262-270.
61. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т.46. №1. С.34-37.
62. Кузнецов С.В. Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акустический журнал. 2014. Т.60. №1. С.90-100.
63. Кулько В.Ф., Михнова М.С. Резонансные явления, возникающие при падении акустических волн на шар // Отбор и передача информации. 1979. №58. С.128-132.
64. Ларин Н.В. Дифракция сферических звуковых волн на неоднородной термоупругой сферической оболочке // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2003. Т.9. Вып.2. С.115-128.
65. Ларин Н.В. Анализ резонансного рассеяния звука термоупругой пластиной // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып.4. С.109-123.
66. Ларин Н.В. Рассеяние звука упругой цилиндрической оболочкой с неоднородным покрытием и неконцентрической эллиптической полостью // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып.2. С.146-163.

67. Ларин Н.В. Прохождение звука через однородный термоупругий плоский слой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып.3. С.145-153.
68. Ларин Н.В. Рассеяние звука твердым цилиндром с неоднородным термоупругим покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып.3. С.154-164.
69. Ларин Н.В. Рассеяние плоской звуковой волны однородным термоупругим сплошным цилиндром // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. Вып.7. Ч.2. С.191-202.
70. Ларин Н.В. Рассеяние плоской звуковой волны однородным термоупругим шаром // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. Вып.7. Ч.2. С.221-230.
71. Ларин Н.В. Дифракция звука на термоупругих телах с неоднородными покрытиями // Сб. тр. Межд. научн.-техн. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, ВГУ, 17–19 декабря 2018. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2019. С.1175-1182.
72. Ларин Н.В. Математическое моделирование дифракции звука на неоднородных термоупругих телах // Сб. тр. 10-й Всероссийской научной конференции с международным участием "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, 17–19 ноября 2020. М.: ИПРИМ РАН, 2020. С.155-164.
73. Ларин Н.В. Дифракция звуковых волн на термоупругих телах с неоднородными покрытиями. Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 125 с.
74. Ларин Н.В. Дифракция цилиндрической звуковой волны на непрерывно-неоднородной термоупругой сферической оболочке // Механика композиционных материалов и конструкций. 2019. Т.24. №4. С.644-659.

75. Ларин Н.В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. Вып.11. Ч.2. С.216-234.
76. Ларин Н.В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып.6. С.154-173.
77. Ларин Н.В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом цилиндре с дискретно-неоднородным покрытием // Сборник трудов Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, Воронежский государственный университет, 18–20 декабря 2017). Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2017. С.1133-1140.
78. Ларин Н.В. О влиянии непрерывно-неоднородного покрытия на звукоотражающие свойства термоупругого цилиндра // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып.9. Ч.1. С.395-403.
79. Ларин Н.В. Дифракция плоской звуковой волны на термоупругом шаре с дискретно-неоднородным покрытием // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т.59. №6. С.65-74.
80. Ларин Н.В. Дифракция цилиндрической звуковой волны на термоупругом цилиндре с непрерывно-неоднородным покрытием // Сборник трудов 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (Россия, Москва, ИПРИМ РАН, 18-19 декабря 2018). М.: ИПРИМ РАН, 2019. С.56-62.

81. Ларин Н.В. О влиянии термоупругости тел неоднородной структуры на рассеяние звука // Сборник трудов 11-й Всероссийской научной конференции с международным участием "Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред" им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (Россия, Москва, ИПРИМ РАН, 23-25 ноября 2021). М.: ООО «Сам Полиграфист», 2021. С.95-104.
82. Ларин Н.В. Определение законов неоднородности термоупругого цилиндрического слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 13-15 декабря 2021). Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2022. С.1252-1258.
83. Ларин Н.В. Программа расчета интенсивности звуковых волн, отраженных от непрерывно-слоистых термоупругих оболочек. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2019662933, 07.10.2019. 1с.
84. Ларин Н.В. Программа расчета коэффициента звукопроницаемости многослойной термоупругой пластины. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2019664126, 30.10.2019. 1с.
85. Ларин Н.В. Программа расчета амплитуды акустического поля, рассеянного термоупругим шаром с многослойным покрытием. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2019664127, 30.10.2019. 1с.
86. Ларин Н.В. Программа расчета коэффициента звукопроницаемости термоупругой пластины из функционально-градиентного материала. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2020663607, 29.10.2020. 1с.

87. Ларин Н.В. Программа расчета амплитуды акустического поля, рассеянного упругим цилиндром с многослойным покрытием. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2021668806, 19.11.2021. 1с.
88. Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып.4. С.54-62.
89. Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акустический журнал. 2015. Т.61. №5. С.552-558.
90. Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т.80. №4. С.480-488.
91. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикладная математика и механика. 2006. Т.70. № 4. С. 650–659.
92. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном термоупругом цилиндрическом слое, граничащем с невязкими теплопроводными жидкостями // Прикладная математика и механика. 2009. Т.73. №3. С.474-483.
93. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем // Прикладная математика и механика. 2010. Т.74. №4. С.645-654.

94. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т.79. №2. С.242-250.
95. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние звука термоупругим шаром с непрерывно-неоднородным покрытием в теплопроводной жидкости // Математическое моделирование. 2019. Т.31. №5. С.20-38.
96. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз., 1963. 358с.
97. Лобанов А.В. Дифракция звуковых волн на неоднородных упругих эллиптических цилиндрах и сфероидах: дисс. ... к-та физ.-мат. наук. Тула, 2012. 148с.
98. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В. Влияние формы набегающей волны на звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины сложной структуры // Труды МАИ. 2015. №82. С.1-20.
99. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В. Исследование звукоизоляционных свойств трехслойной пластины при воздействии плоской волны // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. №1 (670). С.27-34.
100. Ломазов В.А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: ОрелГТУ, 2002. 168с.
101. Ломазов В.А. Математическое моделирование термоупругой диагностики неоднородных анизотропных тел: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Белгород, 2005. 334с.
102. Лонкевич М.П. Прохождение звука через слой трансверсально-изотропного материала конечной толщины // Акустический журнал. 1971. Т.17. №1. С.85-92.
103. Лямшев Л.М. Рассеяние звука упругими цилиндрами // Акустический журнал. 1959. Т.5. №1. С.58-63.

- 104.Маляров К.В. Передача звука через упругую слоистую цилиндрическую оболочку // Акустический журнал. 1974. Т.20. №1. С.71-75.
- 105.Мачевариани М.М., Тютюкин В.В., Шкварников А.П. Импедансный метод расчета характеристик упругих слоисто-неоднородных сред // Акустический журнал. 1971. Т.17. №1. С.97-101.
- 106.Медведский А.Л. Динамика неоднородной трансверсально-изотропной сферы в акустической среде // Вестник МАИ. 2010. Т.17. №1. С.181-186.
- 107.Медведский А.Л. Задача о дифракции нестационарных упругих волн на неоднородной трансверсально изотропной сфере // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т.14. №3. С.473-489.
- 108.Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В. Дифракция плоских нестационарных упругих волн на неоднородном трансверсально изотропном цилиндре // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. М.: ООО «ТР-принт», 2012. С.53.
- 109.Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201с.
- 110.Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.2. М.: ИЛ, 1960. 886с.
- 111.Нгуен Т.Ш., Толоконников Л.А. Численный анализ прохождения цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным прилегающим слоем // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 13-15 декабря 2021). Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2022. С.1285-1290.

112. Нгуен Тхи Шанг. Об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2021. Вып.5. С.404-414.
113. Ниборг В. Акустические течения. В кн.: Физическая акустика. Т.2. Ч.Б. Свойства полимеров и нелинейная акустика. М.: Мир, 1969. С.344-357.
114. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256с.
115. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
116. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688с.
117. Пешков Н.Ю., Скобельцын С.А. Рассеяние звука упругим цилиндром с кусочно-непрерывным неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. Вып.10. С.214-226.
118. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368с.
119. Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. О собственных частотах и формах колебаний радиально-слоистых упругих тел // Прикладная механика. 1987. Т.23. №6. С.9-14.
120. Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акустический журнал. 1986. Т.32. №2. С.212-218.
121. Пшеничников С.Г. О построении решений нестационарных динамических задач связанной термоупругости // Вестник Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2009. Т.15. Вып.2. Механика. С.70-82.

- 122.Ринкевич А.Б., Смирнов А.Н. Распространение упругих волн в неоднородной трансверсально-изотропной пластине // Дефектоскопия. 2000. №8. С.78-83.
- 123.Рождественский К.Н., Толоконников Л.А. Акустические течения около сфероида // Журнал прикладной механики и технической физики. 1988. №6. С.99-102.
- 124.Рождественский К.Н., Толоконников Л.А. О рассеянии звуковых волн на упругом сфероиде // Акустический журнал. 1990. Т.36. №5. С.927-930.
- 125.Романов А.Г., Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на неоднородном упругом полом цилиндре в слое жидкости с жесткими границами // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2009. Вып.1. С.81-88.
- 126.Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т.75. №5. С.850-857.
- 127.Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным упругим полым цилиндром в вязкой жидкости // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып.1. С.62-70.
- 128.Садомов А.А. Дифракция звука на неоднородной анизотропной цилиндрической оболочке в волноводе с жесткими границами при симметричном распределении источников первичного поля // Вестник Тульского государственного университета. Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2007. Вып.1. С.76-83.
- 129.Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1994. 528с.
- 130.Скобельцын С.А. Дифракция звука полым упругим сфероидом с внешним неоднородным покрытием // Материалы международной

научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С.404-410.

131. Скобельцын С.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом эллипсоиде с неоднородным анизотропным покрытием // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 13-15 декабря 2021). Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2022. С.1305-1312.
132. Скобельцын С.А. Задача о дифракции плоской звуковой волны на упругом цилиндре с трансверсально-изотропным неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2021. Вып.11. С.230-239.
133. Скобельцын С.А. Задача о рассеянии упругих цилиндрических волн неоднородным цилиндром // Известия Тульского государственного университета. Серия Геодинамика, физика, математика, термодинамика, геоэкология. 2006. Вып.3. С.126-138.
134. Скобельцын С.А. Идентификация параметров анизотропного покрытия упругого шара по отраженному звуку // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. Вып.11. Ч.2. С.144-156.
135. Скобельцын С.А. Идентификация плотности материала упругого цилиндра по рассеянному акустическому полю // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып.4. С.158-169.
136. Скобельцын С.А. Идентификация размера и положения полости в упругом шаре по отражению звуковой волны // Сборник трудов Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж: «Научно-исследовательские публикации». 2017. С.1255-1262.

137. Скобельцын С.А. Минимизация рассеяния звука сфероидом вблизи идеальной поверхности выбором параметров внешнего слоя // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып.9. С.421-437.
138. Скобельцын С.А. Некоторые задачи рассеяния звуковых волн слоисто-неоднородными анизотропными упругими телами: дисс. ... к-та физ.-мат. наук. Чебоксары, 1991. 250с.
139. Скобельцын С.А. Некоторые обратные задачи рассеяния звука на неоднородных анизотропных упругих телах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2021. 244с.
140. Скобельцын С.А. Определение направления оси упругой симметрии анизотропного шара по рассеянному звуковому полю // Сборник трудов II Всероссийской акустической конференции, совмещенной с XXX сессией Российского акустического общества. Н. Новгород: ИПФ РАН. 2017. С.1699-1705.
141. Скобельцын С.А. Определение ориентации осей упругого эллипсоида по рассеянному звуковому полю // Вестник Тульского государственного университета. Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2021. Вып.1. С.73-80.
142. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородного покрытия упругого цилиндра с полостью для обеспечения заданных звукоотражающих свойств // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. №7. С.163-175.
143. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. Вып.7. Ч.2. С.246-257.
144. Скобельцын С.А. Определение параметров неоднородности покрытия эллиптического цилиндра по рассеянию звука в присутствии

- упругого полупространства // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып.9. С.290-302.
145. Скобельцын С.А. Определение положения границы разделения двухслойной упругой пластины по отражению звука // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып.3. С.122-130.
146. Скобельцын С.А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. №7. С.83-92.
147. Скобельцын С.А. Рассеяние звуковых волн конечной упругой криволинейной пластиной с неоднородным покрытием и полостью // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып.4. С.93-101.
148. Скобельцын С.А. Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью // Чебышевский сборник. 2018. Т.19. №1. С.220-237.
149. Скобельцын С.А. Решение задач акустики с использованием метода конечных элементов. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 224с.
150. Скобельцын С.А., Бирюков Д.Р. Дифракция акустической волны на жестком шаре с упругим анизотропным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2021. Вып.11. С.177-184.
151. Скобельцын С.А., Иванов В.И. Моделирование задачи идентификации положения полости в упругом препятствии по рассеянному звуковому полю // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. Вып.3. С.74-86.
152. Скобельцын С.А., Королев А.Н. Метод конечных элементов в задаче о рассеянии плоской упругой волны неоднородным цилиндром // Известия Тульского государственного университета. Серия Мате-

- матика. Механика. Информатика. 2005. Т.11. Вып.5. С.187-200.
153. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Дифракция звука в полупространстве на конечном упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып.7. С.158-174.
154. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным внешним слоем вблизи плоскости // Чебышевский сборник. 2021. Т.22. №4. С.224-239.
155. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Определение геометрических параметров полости упругого цилиндра по рассеянному акустическому полю // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып.8. С.148-159.
156. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Определение геометрических параметров конечного цилиндра, расположенного у границы полупространства, по рассеянному звуку // Сборник трудов Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж: «Научно-исследовательские публикации». 2018. С.1263-1269.
157. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Определение положения эллиптической полости в упругом цилиндре по отражению звука // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып.1. С.109-121.
158. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Определение толщины неоднородного покрытия конечного упругого цилиндра по рассеянному звуку в полупространстве // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. Вып.10. С.172-183.
159. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Рассеяние звука неоднородным упругим эллиптическим цилиндром в акустическом полупростран-

- стве // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып.7. С.183-200.
160. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Дифракция звука на шаре с неоднородным покрытием в плоском волноводе // Прикладная математика и механика. 2020. Т.84. №5. С.625-639.
161. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып.2. С.64-75.
162. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Моделирование рассеяния звука шаром с неоднородным покрытием в плоском волноводе // Известия ТулГУ. Технические науки. 2019. Вып.9. С.150-158.
163. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. О дифракции звука на упругом сфероиде с непрерывно-неоднородным покрытием // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С.457-464.
164. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акустический журнал. 1990. Т.36. №4. С.740-744.
165. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Акустический журнал. 1995. Т.41. №6. С.917-923.
166. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акустический журнал. 1995. Т.41. №1. С.134-138.
167. Скобельцын С.А., Федотов И.С., Титова А.С. Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве // Чебышевский сборник. 2018. Т.19. №4. С.177-193.

168. Скучик Е. Основы акустики. Т.2. М.: Мир, 1976. 542с.
169. Соляник Ф.И. Прохождение плоских волн через слоистую среду из анизотропных материалов // Акустический журнал. 1977. Т.23. №6. С.933-938.
170. Стретт Дж.В (Рэлей). Теория звука. Т.2. М.: Гостехиздат, 1955. 476с.
171. Толковый словарь-справочник. Зарубежные промышленные полимерные материалы и их компоненты. М.: АНСССР, 1963. 429с.
172. Толоконников Л.А. Дифракция звука на трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины в волноводе с акустически мягкими границами // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып.3. С.154-163.
173. Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полом цилиндра // Оборонная техника. 1998. №4-5. С.11-14.
174. Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с акустически мягкими границами // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып.1. С.43-53.
175. Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып.2. С.76-83.
176. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на двух упругих цилиндрах с неоднородными покрытиями // Чебышевский сборник. 2018. Т.19. №1. С.238-254.
177. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи

- плоской поверхности // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып.9. С.276-289.
178. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып.2. С.181-193.
179. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи плоскости // Чебышевский сборник. 2018. Т.19. №2. С.199-216.
180. Толоконников Л.А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т.19. №4. С.215-226.
181. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // Оборонная техника. 1998. №4-5. С.9-11.
182. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т.79. Вып.5. С.663-673.
183. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып.3. С.202-208.
184. Толоконников Л.А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // Прикладная математика и механика. 2017. Т.81. Вып.6. С.699-707.
185. Толоконников Л.А. Определение законов неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, обеспечиваю-

- щих минимальное звукоотражение // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып.4. С.67-81.
186. Толоконников Л.А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т.40. №5. С.179-184.
187. Толоконников Л.А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // Прикладная математика и механика. 1998. Т.62. №6. С.1029-1035.
188. Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сборник. 2019. Т.20. №1. С.270-281.
189. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып.2. Ч.2. С.265-274.
190. Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2014. Т.78. Вып.4. С.519-526.
191. Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны шаром с неоднородным анизотропным покрытием в присутствии плоской поверхности // Чебышевский сборник. 2021. Т.22. №5. С.224-234.
192. Толоконников Л.А. Резонансное рассеяние звука трансверсально-изотропной цилиндрической оболочкой // Известия Тульского государственного университета. Серия Геодинамика, физика, математика, термодинамика, геоэкология. 2006. Вып.3. С.106-113.
193. Толоконников Л.А., Белкин А.Э. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражения звука // Чебышевский сборник. 2020. Т.21. №4. С.354-368.

194. Толоконников Л.А., Бирюков Д.Р. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с оптимальными звукоотражающими свойствами, находящегося вблизи плоской поверхности // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. Вып.9. С.139-148.
195. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2021. Т.85. Вып.6. С.779-791.
196. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т.22. №1. С.460-472.
197. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник. 2022. Т.23. №1. С.293-311.
198. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сборник. 2020. Т.21. №4. С.369-381.
199. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Рассеяние звука неоднородными термоупругими телами. Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. 232с.
200. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Моделирование дискретно-слоистого покрытия упругого цилиндра радиально-неоднородным слоем в задаче рассеяния звука. Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып.2. С.194-202.
201. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теп-

- лопроводными жидкостями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т.58. №1. С.108-116.
202. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра, находящегося в плоском волноводе // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып.9. С.315-323.
203. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. О влиянии неоднородного покрытия упругого цилиндра на рассеяние звука в присутствии плоской поверхности // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. Вып.9. С.111-118.
204. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Рассеяние цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых линейным источником, в плоском волноводе // Математическое моделирование. 2021. Т.33. №8. С.97-113.
205. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т.58. №4. С.189-199.
206. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Математическое моделирование. 2017. Т.29. №.11. С.89-98.
207. Толоконников Л.А., Лобанов А.В. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом эллиптическом цилиндре с полостью // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. Вып.3. С.126-136.
208. Толоконников Л.А., Лобанов А.В. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом сфероиде // Известия Тульского

- государственного университета. Естественные науки. 2011. Вып.2. С.176-191.
209. Толоконников Л.А., Лобанов А.В. О рассеянии плоской звуковой волны неоднородным упругим сфероидом // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. Вып.3. С.119-125.
210. Толоконников Л.А., Логвинова А.Л. Дифракция плоской звуковой волны на двух неоднородных упругих цилиндрах с жесткими включениями // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып.1. С.54-66.
211. Толоконников Л.А., Нгуен Т. Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т.20. Вып.2. С.311-324.
212. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т.23. Вып.1. С.312-327.
213. Толоконников Л.А., Нгуен Тхи Шанг. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып.6. С.362-372.
214. Толоконников Л.А., Родионова Г.А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып.3. С.131-137.
215. Толоконников Л.А., Романов А.Г. Дифракция цилиндрических звуковых волн на неоднородном полом цилиндре в вязкой жидкости // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып.2. С.151-160.

216. Толоконников Л.А., Романов А.Г. Распространение звука в волноводе в присутствии неоднородной цилиндрической оболочки произвольной толщины // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып.2. С.161-176.
217. Толоконников Л.А., Садо́мов А.А. О дифракции звука на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке в слое жидкости // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т.12. Вып.5. С.208-216.
218. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А. Дифракция звуковых волн на неоднородных и анизотропных телах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. 200с.
219. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А. Задача о рассеянии плоской упругой волны упругим цилиндром с неоднородным анизотропным внешним слоем // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2000. Т.6. Вып.2. С.134-140.
220. Толоконников Л.А., Скобельцын С.А. О рассеянии плоской упругой волны сферическим включением с неоднородным трансверсально-изотропным внешним слоем // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2000. Т.6. Вып.2. С.141-147.
221. Толоконников Л.А., Толоконников С.Л. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем // Чебышевский сборник. 2021. Т.22. Вып.4. С.332-343.
222. Толоконников Л.А., Толоконников С.Л. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизо-

- тропным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т.22. Вып.3. С.423-437.
223. Толоконников Л.А., Ходюшина Е.В. Определение радиуса концентрической полости упругой сферы по известному рассеянному акустическому полю // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып.3. С.211-218.
224. Толоконников Л.А., Юдачев В.В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып.3. С.219-226.
225. Тютюкин В.В. Импедансный метод расчета характеристик упругих неоднородных радиально-слоистых цилиндрических тел // Акустический журнал. 1983. Т.29. №4. С.529-536.
226. Тютюкин В.В. Нормальные волны твердых слоистых неоднородных волноводов // Акустический журнал. 1984. Т.30. №3. С.373-380.
227. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т.2. М.: Мир, 1978. 558с.
228. Хашеминеджад С.М., Малеки М. Резонансное рассеяние звука погруженной анизотропной сферой // Акустический журнал. 2008. Т.54. №2. С.205-218.
229. Цой П.И., Толоконников Л.А. Рассеяние коротких звуковых волн эллипсоидом вращения в вязкой среде // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений в решении прикладных задач. Тула: ТулПИ, 1980. С.112-117.
230. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Прохождение плоской звуковой волны через слоистый композит с компонентами упругого и вязкоупругого материалов // Акустический журнал. 2015. Т.61. №1. С.10-20.

231. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Прохождение плоской звуковой волны через композит из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. №1. С.32-44.
232. Швец Р.Н., Лопатьев А.А. Распространение плоских волн в теплопроводящей слоистой среде жидкость-твердое тело // Математические методы и физико-механические поля. Сборник АН УССР. №1. Киев: Наукова думка, 1975. С.131-135.
233. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348с.
234. Шендеров Е.Л. Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Акустический журнал. 2002. Т.48. №2. С.266-276.
235. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304с.
236. Шендеров Е.Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акустический журнал. 1984. Т.30. №1. С.122-129.
237. Colton D. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves. SIAM Review. 1984. V.26. P.323-350.
238. Colton D., Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory. New York: Wiley-Interscience, 1983. 320p.
239. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, 2nd edition. New York: Springer, 1998. 336p.
240. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Berlin: Springer, 2013. 430p.
241. Daneshjou K., Shokrieh M.M., Moghaddam M.G., Talebitooti R. Analytical model of sound transmission through relatively thick FGM cylinder

- dricl shells considering third order shear deformation theory // *Composite Structures*. 2010. V.93. №1. P.67-78.
242. Doolittle R.D., Uberall H. Sound scattering by elastic cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1966. V.39. №2. P.272-275.
243. Dym C.L., Lang M.A. Transmission of sound through sandwich panels // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1974. V.56. P.1523-1532.
244. Fan Y., Honavar F., Sinclair F.N., Jafary M.R. Circumferential resonance modes of solid elastic cylinders excited by obliquely incident acoustic waves // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2003. V.113. №1. P.102-113.
245. Faran J.J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1951. V.23. № 4. P.405-418.
246. Flax L., Dragonette L., Varadan V.K., Varadan V.V. Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1982. V.71. №5. P.1077-1082.
247. Flax L., Dragonette L.R., Uberall H. Theory of elastic resonance excitation by sound scattering // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1978. V.63. №3. P.723-731.
248. Flax L., Varadan V.K., Varadan V.V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. V.68. №6. P.1832-1835.
249. Gaunard G.C., Uberall H. RST-analysis of monostatic and bistatic acoustic echoes from an elastic sphere // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1983. V.73. P.1-12.
250. Goodman R.D., Stern R. Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1962. V.34. №3. P.338-344.
251. Goryunov A.A. Matrix Green's function formalism in acoustic intrascopy problems // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 1992. V.27. №6. P.381-386.

252. Goryunov A.A., Rychagov M.N. Reconstruction of a refraction inhomogeneity by the method of averages // Soviet Journal of Nondestructive Testing. 1989. V.24. №12. P.805-809.
253. Guild M.D., Alu A., Haberman M.R. Cancellation of acoustic scattering from an elastic sphere // J. Acoust. Soc. Amer. 2011. V.129. P.1355-1365.
254. Hackman R.H., Sammelman G.S. Multiple-scattering analysis for a target in oceanic waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V.84. №5. P.1813-1825.
255. Hackman R.H., Sammelmann G.S., Williams K.L., Trivett D.H. A reanalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V.83. №4. P.1255-1266.
256. Hasheminejad S.M., Safari N. Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids// J. of Sound and Vibration. 2005. V.280. P.101-125.
257. Huang C., Nutt S. An analytical study of sound transmission through unbounded panels of functionally graded materials // J. of Sound and Vibration. 2011. V.330. №6. P.1153-1165.
258. Junger M.C. Sound scattering by thin elastic shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. V.24. №4. P.366-373.
259. Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G. Study of transient wave processes in continuously inhomogeneous elastic and viscoelastic bodies. Chapter 1. // Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications: Nova Science Publishers, Inc. New York. 2020. P.1-28.
260. Kuznetsov S.V. Guided waves in periodically stratified plates: Deficiency of homogenizations // Composite Structures (276)1, 1-9, 2021.

261. Kuznetsov S.V. Lamb waves in functionally graded plates: Proof of stratification convergence // *Mechanics of Advanced Materials and Structures* (28), 1-6, 2021.
262. Kuznetsov S.V. Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves in Random and Complex Media*, 77, 11, 2021.
263. Kuznetsov S.V. Low frequency limits for Lamb waves in homogeneous, stratified and functionally graded anisotropic plates // *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 28, 2-11, 2021.
264. Kuznetsov S.V. On disappearing Stoneley waves in functionally graded plates // *International Journal of Mechanics and Materials in Design* (17), 1-8, 2021.
265. Levy A., Sorek S., Ben-Dor G., Bear J. Evolution of the balance equations in saturated thermoelastic porous media following abrupt simultaneous changes in pressure and temperature // *Transport in Porous Media*. 1995. №21. P.241-268.
266. Lukasiewicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // *Journal of Thermal Stresses*. 2003. V.26. №1. P.13-23.
267. Marston P.L. GTD for backscattering from elastic spheres and cylinders in water and the coupling of surface elastic waves with the acoustic field // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. V.83. №1. P.25-37.
268. Mogilner L.Y., Smorodinskii Y.G. Ultrasonic Flaw Detection: Adjustment and Calibration of Equipment Using Samples with Cylindrical Drilling // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2018. V.54. №9 P.630-637.
269. Nouri A., Astaraki S. Optimization of Sound Transmission Loss through a Thin Functionally Graded Material Cylindrical Shell // *Shock and Vibration*. 2014. P.1-10.

270. Perov D.V., Rinkevich A.V., Smorodinskii Y.G., Keler B. Using wavelets for analyzing ultrasonic fields detected by a laser interferometer. Flaw detection and localization in an aluminum single-crystal // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2001. V.37. №12. P.889-899.
271. Rinkevich A.V., Smorodinskii Y.G., Burkhanov A.M., Krivonosova A.S., Keller B. Analysis of ultrasonic fields and flaw detection in aluminum single crystals based on laser detection technique // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2000. V.36. №11. P.831-838.
272. Rinkevich A.V., Smorodinskii Y.G., Volkova N.N., Zagrebin B.N. Group velocity of ultrasonics in transverse-isotrope media // Defectscopy (rus). 1994. №2. P.58-63.
273. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. A slightly inhomogeneous surface wave in a two-layered medium involving an isotropic layer and weakly anisotropic half-space // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. V.94. №6. P.3295-3301.
274. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Application of weakly anisotropic models of a continuous medium for solving the problems of wave dynamics // Applied Mechanics Reviews. 2000. V.53. №3. P.37-85.
275. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Boundary-value problems resulting in thermoelastic shock wave propagation // Encyclopedia of Thermal Stresses. 2014. Springer. P.474-486.
276. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Conversion of sh wave into a stoneley wave under weak distortion of a crystal lattice of the elastic isotropic space material // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V.97. №5. P.2826-2835.
277. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. D'alembert method in dynamic problems of thermoelasticity // Encyclopedia of Thermal Stresses. 2014. Springer. P.859-872.
278. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Dynamic response of spatially curved thermoelastic thin-walled beams of generic open profile subjected to

- thermal shock // *Journal of Thermal Stresses*. 2012. Vol.35. №№1–3. P.205-234.
279. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Hyperbolic thermoelasticity, transient dynamic contact problems // *Encyclopedia of Thermal Stresses*. 2014. Springer. P.2343-2361.
280. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Ray method for solving boundary-value problems of anisotropic thermoelasticity with thermal relaxation // *Encyclopedia of Thermal Stresses*. 2014. Springer. P.4131-4146.
281. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Transient thermoelastic Rayleigh waves on the surfaces of bodies of revolution // *Encyclopedia of Thermal Stresses*. 2014. Springer. P.6225-6244.
282. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Shitikov V.V. Ray expansion theory in the problem of impact of a thermoelastic rod against a heated wall // *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol.42. №S1. P.65-72.
283. Schoenberg M. Plane wave propagation in stratified anisotropic media // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1974. V.55. №5. P.922-925.
284. Sharma M.D. Wave propagation in thermoelastic saturated porous medium. *J Earth Syst Sci* **117**, 951 (2008).
285. Skobelt'syn S.A., Peshkov N.Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. V.1203.012023. P.1-10.
286. Sorek S., Bear J., Ben-Dor G., Mazor G. Shock waves in saturated thermoelastic porous media // *Transport in Porous Media*. 1992. №9. P.1-13.
287. Vogt R.H., Neubauer W.G. Relationship between acoustic reflection and vibrational modes of elastic spheres // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1976. V.60. №1. P.15-22.
288. Vorovich I.I., Boyev N.V., Sumbatyan M.A. Reconstruction of the obstacle shape in acoustic medium under ultrasonic scanning // *Inverse*

Problems in Engineering. 2001. V.9. №4. P.315-337.

289. Wang T., Li S., Nutt S.R. Optimal design of acoustical sandwich panels with a genetic algorithm // Journal of Applied Acoustics. 2009. V.70. №3. P.416-425.
290. Xiao-mei Xu, Yi-ping Jiang, Heow-pueh Lee, Ning Chen. Sound insulation performance optimization of lightweight sandwich panels // Journal of vibroengineering. 2016. V.18. №4. P.2574-2586.