На правах рукописи

ХАРЛАМОВА Анастасия Олеговна

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СКРЫТОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тула 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент **Мамонов Сергей Станиславович**

Официальные оппоненты: **Дружинина Ольга Валентиновна,** доктор физико-математических наук, профессор, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, главный научный сотрудник.

Мищенко Михаил Андреевич, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», старший преподаватель.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Защита состоится «10» апреля 2018 года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 212.271.05, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» (300012, г. Тула, проспект им. Ленина, 92, 12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, проспект им. Ленина, 92 и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-212-271-05/harlamova-ao/

Автореферат разослан «15» февраля 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Соколова Марина Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Синхронизация является одним из фундаментальных нелинейных явлений, имеющих разнообразные применения в технике. В радиофизике работы по синхронизации начинаются с первой половины 20 века, когда было обнаружено свойство захвата частоты колебаний триодного генератора периодическим сигналом (Appleton E.V., Van der Pol B.). Анализ данного явления был сделан в работах А.А. Андронова.

В дальнейшем синхронизация периодических колебаний применительно к системам различного вида и природы была изучена во множестве научных работ. Примерами таких систем являются синхронизируемые часы, ускоритель элементарных частиц, синхронные электрические генераторы и двигатели, устройства, управляющие ритмом сердечной деятельности, системы глобального позиционирования (GPS). В компьютерных архитектурах системы фазовой синхронизации (СФС) применяются для восстановления тактового сигнала, синхронизации данных, синтеза частот. Принципы СФС используются в оптических и нейронных сетях и многом другом.

Теория СФС для регулярных сигналов достаточно хорошо развита. В фазовом пространстве системы режиму синхронизации соответствует устойчивое состояние равновесия. Для систем фазовой автоподстройки (ФАП) в работах В.В. Матросова, В.Д. Шалфеева показано, что при разных видах фильтра нижних частот может произойти нарушение устойчивости состояния равновесия и возникновение около него устойчивого предельного цикла. В этом случае в системе устанавливается квазисинхронный режим, для которого усредненная частота колебаний генератора совпадает с частотой внешнего сигнала, что определяет существование режима фазовой синхронизации.

Скрытая синхронизация связана с термином *«скрытые колебания»*, используемым в работах Г.А. Леонова, Н.В. Кузнецова, И.М. Буркина. Характерной особенностью скрытых колебаний является невозможность попадания на него по траектории с начальными значениями из окрестности состояния равновесия. В данной работе под скрытой синхронизацией понимается наличие в системе устойчивого цикла первого рода, для которого усредненная частота колебаний генератора совпадает с частотой внешнего сигнала, при этом цикл не является «глобально устойчивым». Такие циклы определяют квазисинхронные режимы системы ФАП.

С квазисинхронными режимами взаимосвязано явление джиттера, под которым понимается отклонение временного положения информационных сигналов в трактах вычислительных и телекоммуникационных устройств от заданных значений. Джиттер является следствием совокупного действия множества дестабилизирующих факторов, специфичных для разных классов устройств хранения и передачи данных. Одним из факторов появления джиттера является фазовая модуляция сигнала, при этом частота отклонения фазы называется частотой джиттера. Проблема выделения компонент джиттера представляет собой сложную техническую задачу, требующую разработки математических методов определения фазовой синхронизации.

Вопросам динамики систем фазовой автоподстройки частоты посвящено значительное количество исследований. Наиболее известными в этой области являются труды Л.Н. Белюстиной, В.Н. Белых, И.М. Буркина, Г.А. Леонова, Т.Л. Чшиевой, А.А. Ляховкина, С.С. Мамонова, В.В. Матросова, В.Д. Шалфеева, В.В. Шахгильдяна, М.А. Мищенко, I. I. Blekhman, M. G. Rosenblum, P. V. Brennan, F. M. Gardner, S. C. Hong , M. Howard , W. C. Lindsey , C. M. Chie, E. Roland, W. Rosenkranz, R. E. Best и других авторов.

Фундаментальные результаты по синхронизации периодических колебаний с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений и теории бифуркации были получены в работах Н.В. Бутенина, Г.А. Леонова, Н.В. Кузнецова, И.М. Буркина, О.В. Дружининой, О.Н. Масиной, Ю.И. Неймарка, М.А. Красносельского, Малкина, В.В. Немыцкого, В.В. Степанова, В.А. Плисса, А. Пуанкаре, F. Tricomi других авторов.

Условиями формирования скрытой синхронизации являются наличие в системе ФАП режимов биения, колебательно-вращательных циклов или мультистабильности. В связи с этим актуальными являются разработка методов определения скрытой синхронизации, определение механизмов ее появления и задача создания численных алгоритмов, позволяющих находить в радиотехнических системах сложномодулированные колебания.

Цель и задачи работы. Целью работы является разработка аналитических и численных методов исследования скрытой синхронизации радиотехнических систем, которые могут быть использованы при математическом моделировании колебательных процессов в таких системах.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать новые аналитические методы обнаружения квазисинхронных режимов для математической модели системы ЧФАПЧ.

2. Разработать численно-аналитические методы исследования скрытой синхронизации при наличии режимов биения системы ЧФАПЧ, а также численно-аналитические методы поиска колебательно-вращательных циклов.

3. С помощью современных компьютерных технологий определить механизмы формирования мультистабильности математической модели системы ФАПЧ с запаздыванием.

4. Создать комплекс программ, позволяющий реализовать численные методы и алгоритмы определения скрытой синхронизации системы ЧФАПЧ.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использовались методы теории матриц, матричных уравнений, теории устойчивости, второй метод Ляпунова, метод нелокального сведения, методы функционального анализа, мультипликаторный анализ бифуркации цикла; при разработке вычислительных алгоритмов использовалась система компьютерной математики Maple.

Научная новизна и результаты, выносимые на защиту. В диссертационном исследовании разработаны новые аналитические и численные методы исследования возникновения скрытой синхронизации для математических моделей радиотехнических систем. Научную новизну составляют следующие результаты, выносимые на защиту:

- предложен новый аналитический метод нахождения колебательных циклов для математической модели системы частотно фазовой автоподстройки частоты, позволяющий определить области притяжения циклов;
- на базе системы компьютерной математики Maple разработан комплекс программ для обнаружения скрытой синхронизации при наличии режимов биения системы ЧФАПЧ;
- разработан метод многомерных систем нелокального сведения и комплекс программ для исследования скрытой синхронизации радиотехнических систем в случае отсутствия частотного кольца;
- на базе системы компьютерной математики Maple разработан комплекс программ для эффективного поиска колебательно-вращательных циклов системы ФАПЧ с ограниченным затуханием;
- разработан эффективный вычислительный метод исследования скрытой синхронизации в случае мультистабильности для математической модели системы ФАПЧ с запаздыванием;

Достоверность полученных результатов. Все положения, выносимые на защиту, математически строго доказаны и подтверждаются численными экспериментами.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы заключается в развитии методов исследования модуляционных колебаний радиотехнических систем.

Результаты диссертационной работы могут быть использованы специалистами в области теории нелинейных колебаний при анализе многомерных моделей динамических систем, а также при исследовании скрытой синхронизации систем ЧФАПЧ.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Россия, Тула, 2013, 2014); XIX, XX, XXI, XXII Всероссийских научно-технических конференциях студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании "НИТ 2014 - 2017"» (Россия, Рязань, 2014 - 2017); XIX научной конференции по радиофизике, посвященной 70-летию радиофизического факультета (Россия, Нижний Новгород, 2015); Двадцать третьей международной конференции «Математика, компьютер, образование» (Россия, Дубна, 2016); Международной конференции, посвященной 110-летию Иринарха Петровича Макарова «Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория» (Россия, Рязань, 2016); Международной научно-практической конференции

«Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования» (Россия, Рязань, 2016); Международной научно-методической конференции «Математика и естественные науки. Теория и практика» (Россия, Ярославль, 2016); Международной молодежной научной конференции «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения» (Россия, Воронеж, 2016); III Международной научно-практической конференции «Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования» (Россия, Елец, 2017); XIII Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (Россия, Саранск, 2017).

Публикации. Основные результаты работы отражены в 22 публикациях, в том числе 6 статей в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ, 14 публикаций тезисов докладов на конференциях различного уровня, 2 статьи в рецензируемых журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, заключения, списка литературы, включающего 167 наименование, и приложения. Работа изложена на 190 страницах машинного текста и содержит 101 рисунок.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приведен обзор литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель, поставлены задачи, показана научная новизна и практическая значимость представленной работы.

В первой главе диссертации предложены аналитические методы исследования квазисинхронных режимов для математической модели системы с частотно-фазовым управлением. В параграфе 1.1 рассматриваются радиотехнические системы, обладающие скрытой синхронизацией, в частности системы ЧФАПЧ с дробно-рациональным фильтром, системы ФАПЧ с запаздыванием.

В случае немодулированного эталонного сигнала без помех, уравнение системы ЧФАПЧ запишется в виде

$$p\sigma(t)+\Omega_1 K_1(p)F_1(\sigma(t))+\Omega_2 K_2(p)F_2(p\sigma(t))=\Omega_н, \tag{1}$$

где $p=d/dt$ − оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ − разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_1 − полоса удержания кольца ФАП, Ω_2 − полоса удержания кольца ЧФАПЧ, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ − коэффициенты передачи фильтров нижних частот в фазовой и частотных цепях управления, $F_1(\sigma)$ и $F_2(p\sigma)$ − характеристики фазового и частотного детекторов, $\Omega_н$ − начальная расстройка.

Система ЧФАПЧ, описываемая операторным уравнением (1), рассматривается в случае дробно-рациональных фильтров $K_1(p)=\sum\limits_{i=0}^{m}A_i p^{m-i}\Big/\sum\limits_{j=0}^{n}B_j p^{n-j}=$

$=\dfrac{R(p)}{Q(p)}$, $K_2(p)=Q^{-1}(p)$, при нелинейной характеристике частотного детектора $F_2(p\sigma)=\dfrac{2\beta p\sigma}{1+(\beta p\sigma)^2}$ (β – расстройка по частоте, при которой напряжение на выходе частотного детектора максимально). Заменой переменных уравнение (1) приводится к системе

$$\dot{x}=Ax+b\varphi(\sigma)+d\,\frac{2k(c^T x+\rho\varphi(\sigma))}{1+\beta^2(c^T x+\rho\varphi(\sigma))^2}, \quad \dot{\sigma}=c^T x+\rho\varphi(\sigma), \tag{2}$$

где $c,x,b\in R^2$, $\varphi(\sigma)$ – Δ-периодическая функция. Если в уравнении (1) значение $A_0=0$, то для (2) выполняется равенство $\rho=0$. Система (2) представляет собой систему дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, определяющую математическую модель системы частотно-фазовой автоподстройки частоты. Эти системы изучались в работах Шахгильдяна В.В., Шалфеева В.Д., Ляховкина А.А., Матросова В.В., Буркина И.М., Леонова Г.А., Кузнецова Н.В., Чшиевой Т.Л., Мамонова С.С., Пономаренко В.П., Roland E., Howard M.

В параграфе 1.2 сформулировано понятие скрытой синхронизации, определяемое квазисинхронными режимами системы ФАПЧ.

Определение 1. Пусть для системы (2) существует цикл первого рода рода $z^*(t)=colon(x^*(t),\sigma(t))$ с периодом T, для которого $<\dot{\sigma}>=T^{-1}\int_0^T\dot{\sigma}(t)dt=0$ и цикл $z^*(t)$ не является «глобально» устойчивым, тогда система обладает скрытой синхронизацией.

Для скрытой синхронизации усредненная частота колебаний генератора совпадает с частотой внешнего сигнала, то есть $<\dot{\sigma}>=0$, при этом понятие «скрытости» связано с наличием в системе ФАП режимов биения.

В параграфе 1.2 сделан обзор известных методов поиска циклов первого и второго рода.

В параграфе 1.3 рассматривается математическая модель системы ЧФАПЧ с дробно-рациональным фильтром нижних частот. Показано, что один из механизмов возникновения скрытой синхронизации связан с частотным управлением радиотехнической модели. В параграфе 1.3 на базе принципа тора предложены аналитические методы определения квазисинхронных режимов.

Теорема 1. Пусть для системы (2) выполнены условия:

1) $c^T b=-\Gamma$, $c^T A=l^T$, $l^T b=\nu>0$, $c^T d=\xi_2>0$, $l^T d=-\xi_1<0$, $rang\|c,l\|=2$, $l^T A=-\alpha_1 l^T-\beta_1 c^T$, $c^T A^{-1}b\neq 0$, $\alpha_1>0$, $\beta_1>0$, $k>0$, $\rho=0$;

2) $\varphi(\sigma)-\Delta$-периодическая функция, имеющая два нуля на периоде $\varphi(\sigma_1)=\varphi(\sigma_2)=0$, $0<\sigma_1<\sigma_2<\Delta$, для $\tilde{\sigma}=\sigma-\sigma_1$ справедливы соотношения

$\varphi(\sigma)=a_2\tilde{\sigma}+\tilde{\sigma}^2\varphi_2(\tilde{\sigma})$, $|\varphi_2(\tilde{\sigma})|\le\tau_1+\tau_2|\tilde{\sigma}|$, $\varphi(\sigma)=\varphi(\tilde{\sigma}+\sigma_1)=\varphi_0(\tilde{\sigma})$, $\dot{\varphi}_0(0)>0$, $\tilde{\sigma}_2=\sigma_2-\sigma_1$, $\dot{\varphi}_0(\tilde{\sigma}_2)<0$, $\dot{\varphi}(\tilde{\sigma})$ − ограничена на сегменте $[0;\Delta]$, $\tau_1\ge 0$, $\tau_2\ge 0$;

3) существуют $h_1,\lambda_1\in\mathrm{R}$, удовлетворяющие неравенствам

$$2k\xi_2-h_1-\nu\Gamma^{-1}>0,\quad h_2^2=a_2\Gamma-h_1(2k\xi_2-h_1-\nu\Gamma^{-1})>0,$$

$$h_2^2(2k\xi_2-h_1-\nu\Gamma^{-1})+h_1^2(2k\xi_2-h_1-\nu\Gamma^{-1})-h_1a_2\Gamma\le 0,$$

$$2\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\ge 0,\ \lambda_2^2=a_2\Gamma+\lambda_1(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1})>0,\ \lambda_1<\nu\Gamma^{-1};$$

4) для $\delta_1=\nu\Gamma^{-1}(\nu\Gamma^{-1}-\alpha_1)+\beta_1$, $\delta_2=\nu\Gamma^{-1}\xi_2-\xi_1$, $\nu\Gamma^{-1}-\alpha_1<0$ существуют R, r, r_1, $r_2\in\mathrm{R}$ такие, что $g(R)=R\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left(|\delta_1|+2k|\delta_2|\right)(\lambda_2(\alpha_1-\nu\Gamma^{-1}))^{-1}$ и выполняются следующие соотношения

$$r_1>g(R),\ r_2>g(R),\ r^*=\max\{r_1;r_2\},\ r^*+\left(\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)R+\frac{\Gamma}{\lambda_2^2}R^2\left(\tau_1+\frac{\tau_2}{\lambda_2}R\right)+k\xi_2\frac{1}{\tau}<0,$$

$$-r^*+r\left(2k\xi_2-h_1-\nu\Gamma^{-1}\right)-\frac{\Gamma\tau_1}{h_2^2}r^2-\frac{\Gamma\tau_2}{h_2^3}r^3-2k\xi_2\tau^2\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{h_2^2}\right)^{\frac{3}{2}}r^3>0,\quad \mathrm{R}<\tilde{\sigma}_2\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2};$$

5) для функций $\mathrm{U}^{\pm}(\tilde{\sigma})=\tilde{\sigma}h_1\pm\sqrt{r^2-\tilde{\sigma}^2h_2^2}$ справедливы следующие неравенства $\left(\mathrm{U}^{\pm}(\tilde{\sigma})+\tilde{\sigma}\lambda_1\right)^2+\tilde{\sigma}^2\lambda_2^2-R^2<0$, где $\tilde{\sigma}\in[-r/h_2;r/h_2]$.

Тогда система (2) имеет предельный цикл первого рода.

Тороидальное множество строится с помощью вложенных цилиндрических поверхностей. Проверка условий теоремы 1 сводится к исследованию корней многочлена третьей степени, а ее результаты позволяют провести анализ системы ЧФАПЧ с фильтрами второго порядка.

Пример 1. В работе рассмотрена система частотно-фазовой автоподстройки частоты, описываемая операторным уравнением (1), где $K_1(p)=\dfrac{A_1p+A_2}{B_0p^2+B_1p+B_2}$, $K_2(p)=\dfrac{D_1p+D_2}{B_0p^2+B_1p+B_2}$, $F_1(\sigma)=\sin(\sigma)$, $F_2(p\sigma)=-\dfrac{2\beta(p\sigma)}{1+\beta^2(p\sigma)^2}$. Условия теоремы 1 позволяют определить область притяжения цикла первого рода системы (2). С помощью пакета Maple, составлен комплекс программ для определения частотно-амплитудных характеристик цикла. Показано, что уменьшение коэффициента передачи частотного кольца $\xi_1=-D_2B_0^{-1}+B_1D_1B_0^{-2}$ приводит к увеличению амплитуды при уменьшении частоты квазисинхронного режима. Увеличение параметра k частотного детектора приводит к росту амплитуды при фиксированной частоте. С помощью программ, реализованных в системе Maple, получены средние значения функции $\dot{\sigma}(t)$. Показано, что квазисинхронные режимы могут наблюдаться как при наличии частотного кольца, так и при его отсутствии.

В параграфе 1.4 предложен аналитический метод определения квазисинхронных режимов, в основу которого положено построение тороидального положительно инвариантного множества с помощью форм второго порядка, определяемых решением системы трех матричных уравнений. В частности, для построения тора используются шар и пересекающий его цилиндр.

Во второй главе работы предложены аналитические методы обнаружения скрытой синхронизации системы ЧФАПЧ, сопровождающейся режимами биений или автомодуляционными режимами второго рода. Предложенные методы позволили разработать эффективные аналитико-численные алгоритмы изучения математических моделей радиотехнических систем.

В параграфе 2.1 рассматриваются системы трех матричных уравнений, используемых при изучении как квазисинхронных режимов, так и режимов биений системы ЧФАПЧ. Для систем матричных уравнений определены виды решений, что позволяет определить область притяжения автомодуляционных колебаний и предложить эффективные численные методы обнаружения скрытой синхронизации.

Лемма 1. Система матричных уравнений

$$A^T H + HA = L_1 + 2\varepsilon_1 cc^T - 2\alpha H \ ,$$

$$(A+2kdc^T)^T H + H(A+2kdc^T) = L_2 + 2\varepsilon_2 cc^T - 2\alpha H \ , Hb = r \ , \tag{3}$$

относительно матриц H, L_1, L_2 и значений ε_1, ε_2 для случая, когда $A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $l^T b = \nu > 0$, $\Delta_b = b^T b$, $\tau_c = c^T J b = c_2 b_1 - c_1 b_2$, $\Delta_c = c^T c$, $w_c = c^T J d = c_2 d_1 - c_1 d_2$, $w_b = b^T J d = b_2 d_1 - b_1 d_2$, $r = c$, имеет решение $H = H_1$, L_1, L_2, такое что

$$H_1 = -\gamma_1 cc^T + \gamma_2 (l + \nu\Gamma^{-1} c)(l + \nu\Gamma^{-1} c)^T \ , \ \gamma_1 = \Gamma^{-1} \ , \ \gamma_2 = \Gamma(\beta^2 \Delta_b \Delta_c)^{-1} \ ,$$

$$L_1 = -2\eta_1 (l + \eta_2 c)(l + \eta_2 c)^T \ , \ \eta_1 = \beta \Delta_c \theta_1^2 (\Delta_b \tau_c)^{-1} \ , \ \eta_2 = \theta_2 \theta_1^{-1} \ , \ \theta_1 = \frac{\Delta_b \Delta_c - \Gamma^2}{\Delta_c(\nu - \alpha\Gamma)} \ ,$$

$$\theta_2 = \frac{\alpha \Delta_b \Delta_c - \Gamma \nu}{\Delta_c(\nu - \alpha\Gamma)} \ , \ L_2 = -2\nu_1 (l + \nu_2 c)(l + \nu_2 c)^T \ , \ \nu_1 = \frac{\Delta_c \beta \theta_1^2}{\Delta_b \tau_c} \ , \ \nu_2 = \frac{\beta\theta_2 + k w_b}{\beta\theta_1} \ ,$$

$$\varepsilon_1 = \beta \tau_c^{-1} \ , \ \varepsilon_2 = -\frac{\Delta_b}{4\beta\Delta_c\tau_c} \det L_0 \ , \ \det L_0 = -4\Delta_c \Delta_b^{-2}(k^2 \Delta_c w_b^2 + 2k\beta w_c \Delta_b + \beta^2 \Delta_b) \ .$$

Матрица H_1 имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение.

Для системы уравнений (3) в случае $r = -c$, получены решения $H = H_2 > 0$, M_1, M_2. На рис.1a изображены линии $L_1 = \{x : x^T H_1 x = R_1^2\}$, $L_2 = \{x : x^T H_2 x = R_2^2\}$, $L_3 = \{x : c^T x = \sqrt{\Gamma} \mathrm{R}_1\}$, $L_4 = \{x : c^T x = \sqrt{\Gamma} \mathrm{R}_2\}$, $L_5 = \{x : x^T (l + \nu\Gamma^{-1}) = 0\}$ при $R_1 < R_2$. На рис.1b изображены линии L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 для случая $R_1 = R_2$.

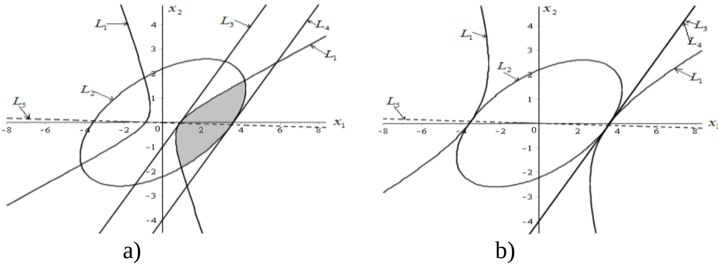


Рис.1. Линии, определяемые решениями матричных уравнений (5)

В параграфе 2.2 предложены аналитические методы определения условий существования для циклов второго рода. Разработан алгоритм определения параметров фильтров нижних частот для системы ЧФАПЧ для вращательных режимов, реализованный в пакете Maple. Использование вращения векторного поля позволило произвести расширение области параметров системы (2), при которых она имеет цикл второго рода, и уменьшить абсолютную погрешность для $\beta_1 = B_1/B_0$ на 64%.

В параграфе 2.3 предложен вычислительный алгоритм с применением вращения векторного поля для нахождения нескольких предельных циклов второго рода, один из которых является гиперболическим.

В параграфе 2.4 на основе метода нелокального сведения, с использованием решений системы трех матричных уравнений и циклов первого рода двумерной системы дифференциальных уравнений, получены области начальных условий режимов скрытой синхронизации. В качестве системы второго порядка рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = -\Gamma^{-3/2}\nu y - \varphi(\sigma) + \mu + 2\xi_2 ky\Gamma^{-1/2}(1+\tau^2\Gamma y^2)^{-1}, \quad \dot{\sigma} = y .$$

Для построения тороидальных положительно инвариантных множеств используются цилиндрические поверхности, изображенные на рис.2. На рис.3 представлено сечение тороидального множества плоскостью $P_1 = \{(x,\sigma): x_1 = 0\}$.

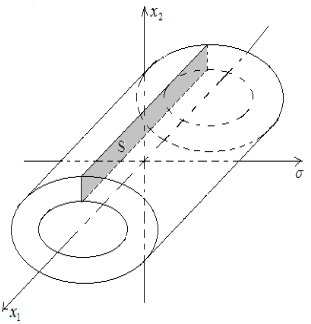


Рис.2.Тороидальное множество

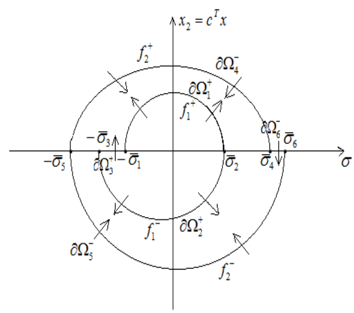


Рис.3. Сечение положительно инвариантного множества плоскостью $P_1 = \{(x,\sigma): x_1 = 0\}$

Применение вращения векторного поля позволило определить характеристики квазисинхронных режимов. Во второй главе показано, что скрытая синхронизация может быть обусловлена наличием частотного кольца.

Третья глава диссертации посвящена качественно-численным методам изучения механизмов возникновения скрытой синхронизации для системы ЧФАПЧ при отсутствии частотного кольца. В параграфе 3.1 разработан вычислительный алгоритм, реализованный в пакете Maple, для определения мультипликаторов циклов первого и второго рода математической модели системы ЧФАПЧ. Численными методами с использованием вращения векторного поля показано, что бифуркация цикла первого рода определяется как увеличением оборотности устойчивого цикла, так и формированием неустойчивых циклов на разных частотах. В §3.1 установлено, что система ЧФАПЧ может иметь квазисинхронные режимы сложной структуры, зависящей от характеристик фильтра нижних частот.

В параграфе 3.2 предложен метод определения квазисинхронных режимов системы ФАПЧ с ограниченным затуханием. Если фильтр нижних частот системы ФАПЧ задается равенством $K(p)=\dfrac{A_1p+A_2}{B_0p^2+B_1p+B_2}$, то ограниченность затухания определяет для системы (2) знак параметра $\nu=l^Tb=(B_1A_1B_0^{-1}-A_2)B_0^{-1}=$ $=-\nu_1<0$, где $l^T=c^TA$. Для математической модели системы (2) при $\rho=0$ рассматривается вспомогательная нефазовая система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=Ax+b\varphi(\sigma)\,,\quad \dot{\sigma}=c^Tx+u\psi(\sigma)\,, \tag{4}$$

где $x,b,c\in R^2$, $\psi(\sigma)=(\tau_1\varphi(\sigma)-\tau_2\sigma)$, $\tau_1,\tau_2\in R$, $u\in[0;1]$, и система дифференциальных уравнений второго порядка

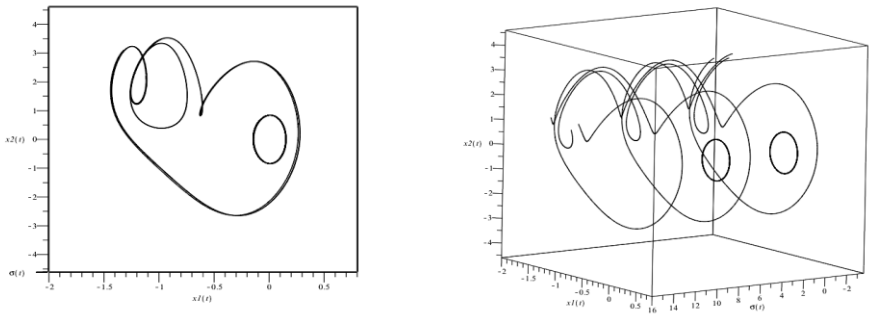
$$\dot{y}=-\beta_1\sigma-\Gamma\varphi(\sigma)\,,\quad \dot{\sigma}=y+u\psi(\sigma)\,. \tag{5}$$

С использованием аналитических методов, предложенных в двух первых главах работы, и свойств цикла первого рода системы (5), определяется значение параметра $u=u^*$, при котором существует цикл многомерной нефазовой системы дифференциальных уравнений (4). Разработаны численные методы анализа трансформации цикла нефазовой системы (4) в цикл фазовой системы дифференциальных уравнений (2) при уменьшении значения u от u^* до нуля.

В параграфе 3.3 показано, что одним из механизмов появления скрытой синхронизации является изменение затухания фильтра нижних частот. В §3.3 предложена классификация сложных колебательно-вращательных режимов системы ФАПЧ, сопровождающих скрытую синхронизацию.

Определение 2. Предельный цикл второго рода $\omega(t,z_0)=colon(x(t,z_0),\sigma(t,z_0))$ называется колебательно-вращательным циклом структуры $(k_1,k_2,\ldots,k_m)$, если для него существует $T>0$, и для любого $t\geq 0$ выполняются равенства

$x(t+T,z_0)=x(t,z_0)$, $\sigma(t+T,z_0)=\sigma(t,z_0)+m\Delta$, $\Delta-$период функции $\varphi(\sigma)$ системы (2), функция $\dot{\sigma}(t)$ имеет $2k_i$ нулей на промежутке $\sigma\in[(i-1)\Delta;i\Delta]$, $i=\overline{1,m}$.



a) b)

Рис.4. Колебательно-вращательные циклы системы (2) при $k=0$

На рис.4a изображены проекции колебательно-вращательного цикла и цикла квазисинхронного режима. На рис.4b представлена геометрическая интерпретация скрытой синхронизации при наличии режимов биений.

В §3.4 рассмотрена система фазовой автоподстройки с запаздыванием. Динамика рассматриваемой системы фазовой автоподстройки с запаздыванием описывается операторным уравнением

$$p\sigma+K_\varphi(p)K_\tau(p)\Omega_y F(\sigma)=\Omega_н, \tag{6}$$

$K_\varphi(p)$ − коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p)=e^{-\tau p}\approx(1-\tau p)$ − операторный коэффициент запаздывания, τ − время запаздывания. Операторное уравнение (6) рассматривается в случае дробно-рационального фильтра $K_\varphi(p)=\dfrac{A_1p+A_2}{B_0p^2+B_1p+B_2}$ и $K_\tau(p)=(1-\tau p)$. Пусть $K(p)=K_\varphi(p)K_\tau(p)$, тогда справедливо равенство $K(p)=\dfrac{a_0p^2+a_1p+a_2}{B_0p^2+B_1p+B_2}$, где $a_0=-\tau A_1<0$, $a_1=A_1-\tau A_2$, $a_2=A_2>0$. Заменой переменных уравнение (6) приводится к системе дифференциальных уравнений (2), для которой $k=0$, $\rho>0$. Запаздывание в системе автоподстройки определяет значение параметра $\rho>0$, при отсутствии запаздывания выполняется равенство $\rho=0$.

Для математической модели системы (2) рассматривается вспомогательная нефазовая система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=Ax+b\varphi(\sigma),\quad \dot{\sigma}=c^Tx+\rho_1\varphi(\sigma)+\rho_0(1-u)\varphi(\sigma)-\alpha_1\sigma u, \tag{7}$$

где $x,b,c\in\mathrm{R}^2$, $u\in[0;1]$, $\alpha_1,\rho_1,\rho_0\in\mathrm{R}$, $\rho=\rho_0+\rho_1$ и система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\beta_1\sigma - \Gamma\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = y + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1\sigma u .$$

Аналитическими методами определяются условия для параметра $u = u^*$, при котором существует цикл многомерной нефазовой системы дифференциальных уравнений (7). Численными методами определяется трансформация цикла системы (7) в цикл системы при $u = 0$. Рассмотрен пример электрической цепи фильтра нижних частот и найдены условия, определяющие значения коэффициентов фильтра нижних частот и запаздывания для вынужденной фазовой синхронизации. Показано, что запаздывание может быть использовано для подавления хаотически модулированных режимов биений и формирования на их базе квазисинхронных режимов обеспечивающих фазовую синхронизацию. На рис.5 представлено взаимное расположение устойчивых циклов $z_{1_0}(t)$, $z_{2_0}(t)$ и неустойчивого цикла $z_0^-(t)$ системы (2) в случае запаздывания. На рис. 6 изображены режим биения при отсутствии затухания $\rho = 0$ и квазисинхронные режимы при наличии затухания $\rho = 1.16$.

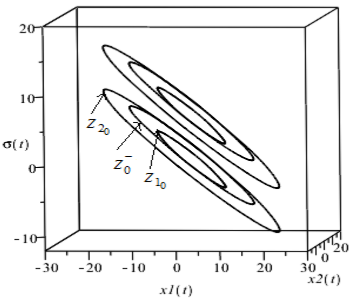


Рис. 5. Мультистабильность в случае запаздывания

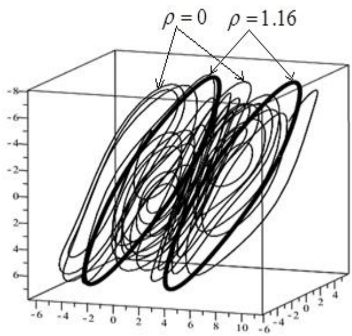


Рис. 6. Формирование квазисинхронных режимов при изменении запаздывания

В параграфе 3.4 определено, что механизмом возникновения скрытой синхронизации является формирование мультистабильности, связанной с характеристиками запаздывания.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложен новый аналитический метод нахождения колебательных циклов для математической модели системы частотно-фазовой автоподстройки частоты, позволяющий определить области, содержащие циклы.
2. На базе системы компьютерной математики Maple разработан комплекс программ для определения скрытой синхронизации при наличии режимов биений системы ЧФАПЧ.

3. Разработан метод многомерных систем нелокального сведения и комплекс программ для исследования скрытой синхронизации радиотехнических систем в случае отсутствия частотного кольца.
4. На базе системы компьютерной математики Maple разработан комплекс программ для эффективного поиска колебательно-вращательных циклов системы ФАПЧ с ограниченным затуханием.
5. Предложен эффективный вычислительный метод исследования скрытой синхронизации в случае мультистабильности для математической модели системы ФАПЧ с запаздыванием.

Публикации автора по теме диссертации:

1. **Харламова А.О. Условия существования предельных циклов второго рода для модели системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Мамонов С.С., Харламова А.О., Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 13. № 4. С. 51 – 57.**
2. **Харламова А.О. Влияние частотного кольца системы фазовой автоподстройки на условия существования циклов второго рода // Мамонов С.С., Харламова А.О., Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 14. № 5. С. 55 – 60.**
3. **Харламова А.О. Отделение циклов второго рода системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Мамонов С.С., Харламова А.О., Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 15. № 3. С. 97 – 102.**
4. **Харламова А.О. Квазисинхронные режимы фазовой системы // Мамонов С.С., Харламова А.О., Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2016. № 56. С. 45–51.**
5. **Харламова А.О. Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Мамонов С.С., Харламова А.О., Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т.19, №1. С. 67–76.**
6. **Харламова А.О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Мамонов С.С., Харламова А.О., Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 62. С. 26–35.**
7. Харламова А.О. Определение условий существования предельных циклов второго рода для модели системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы XIX Всерос. науч.-тех. конф. студентов, молодых ученых и специалистов. РГРТУ. 2014. С. 61–62.
8. Харламова А.О. Автомодуляционные режимы в системе частотно-фазовой автоподстройки частоты // Мамонов С.С., Харламова А.О., Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Междунар. науч. конф. Тула, 2013. С.85–87.

9. Харламова А.О. Решение матричных уравнений для системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Мамонов С.С., Харламова А.О., Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Междунар. науч. конф. Тула, 2014. С.67–69.
10. Харламова А.О. Исследование модели системы частотно-фазовой автоподстройки частоты на наличие предельных циклов второго рода // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы XX Всерос. науч.-тех. конф. студентов, молодых ученых и специалистов. РГРТУ. 2015. С. 117–118.
11. Харламова А.О. Вращательные режимы системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Мамонов С.С., Харламова А.О., Труды XIX научной конференции по радиофизике. ННГУ. 2015. С. 91–92.
12. Харламова А.О. Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами второго порядка // Материалы Двадцать третьей международной конференции "Математика, компьютер, образование". Дубна, 2016. С. 229.
13. Харламова А.О. Колебательные циклы фазовой системы // Мамонов С.С., Харламова А.О., Материалы Международной научно-практической конференции "Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования". Рязань: РГУ имени С.А. Есенина, 2016. С. 146–153.
14. Харламова А.О. Автомодуляционные режимы фазовых систем // Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория. Тезисы докладов Международной конференции, посвящённой 110-летию со дня рождения профессора Иринарха Петровича Макарова. Рязань: РГУ имени С.А. Есенина, 2016. С. 31–32.
15. Харламова А.О. Предельные циклы первого рода фазовых систем // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 16. № 3. С. 68 – 74.
16. Харламова А.О. Модулированные колебания системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы XXI Всерос. науч.-тех. конф. студентов, молодых ученых и специалистов. РГРТУ. 2016. С. 92–93.
17. Харламова А.О. Периодические решения системы с цилиндрическим фазовым пространством // Мамонов С.С., Харламова А.О., Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 45 – 51.
18. Харламова А.О. Условия существования предельных циклов первого рода для модели системы частотно-фазовой автоподстройки частоты. // Материалы молодёжной международной научной конференции «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения». Вып. 5. Воронеж: Издат. «Научная книга», 2016. С. 308 – 309.
19. Харламова А.О. Квазисинхронные режимы математической модели системы фазовой синхронизации // Мамонов С.С., Харламова А.О., Материалы III

Международной научно-практической конференции "Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования". Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2017. С. 23–24.
20. Харламова А.О. Анализ сценария бифуркаций предельных циклов фазовой системы дифференциальных уравнений // Мамонов С.С., Харламова А.О., Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции. Саранск: СВМО, 2017. С. 75 – 79.
21. Харламова А.О. Численно-аналитическое определение циклов первого рода фазовой системы дифференциальных уравнений // Мамонов С.С., Харламова А.О., Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 17. № 4. С. 48 – 56.
22. Харламова А.О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы XXII Всерос. науч.-тех. конф. студентов, молодых ученых и специалистов. РГРТУ. 2017. С. 302–303.

Подписано в печать 08.02.2018.
Формат бумаги 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 0,9. Уч.-изд. л. 0,8.
Тираж 100 экз. Заказ № 12.

Тульский государственный университет.
300012, г. Тула, просп. Ленина, 92.

Отпечатано в Издательстве ТулГу.
300012, г. Тула, просп. Ленина, 97а.