На правах рукописи

ШАВЫРИН ДМИТРИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тверь – 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Тверской государственный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Зингерман Константин Моисеевич
Официальные оппоненты:	Горбачев Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, профессор кафедры механики композитов
	Димитриенко Юрий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика»
Ведущая организация:	Общество с ограниченной ответственностью научно-производственный коммерческий центр «ВЕСКОМ», г. Москва

Защита состоится «27» декабря 2016 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.271.05 при ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92, (12-105).

С диссертаций можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92 и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-212-271-05/shavirin-da/

Автореферат разослан «31» октября 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МСоколов Соколова Марина Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Диссертация посвящена моделированию напряжённо-деформированного состояния (НДС) в вязкоупругих неоднородных телах при конечных деформациях. В диссертационной работе предложено приближённое аналитическое решение задачи плоской квазистатической задачи теории вязкоупругости о напряжённо-деформированном состоянии бесконечно протяжённого вязкоупругого тела, в котором имеется круговое вязкоупругое включение с другими свойствами. При решении задачи учитываются нелинейные эффекты, связанные как с геометрической нелинейностью, проявляющейся при больших деформациях, так и с физической нелинейностью, источником которой являются свойства материала. Решение задачи найдено как для сжимаемых вязкоупругих материалов, так и для несжимаемых вязкоупругих материалов.

Актуальность темы работы определяется широким применением композиционных материалов в современной технике, их особыми свойствами и эксплуатационными характеристиками, необходимостью прогнозировать напряжённо-деформированное состояние вязкоупругих элементов конструкций, в том числе и с учетом нелинейных эффектов, обусловленных конечностью деформаций. Примером таких конструкций являются изделия из композитов, в том числе с наноразмерными частицами наполнителя, подвергающиеся динамическим нагрузкам: резинокордные оболочки амортизаторов, узлы агрегатов, шины и др. Постановки новых прикладных задач стимулируют развитие общих методов и поиск многочисленных частных решений. Соответственно, представляет интерес построение и исследование математических моделей напряжённо-деформированного состояния в этих материалах.

При математическом моделировании напряжённо-деформированного состояния вязкоупругих тел с включениями можно использовать различные методы, как аналитические, так и численные (например, метод конечных элементов). Недостатками численных методов являются невозможность получения точного решения, потребление значительных ресурсов ЭВМ для достижения необходимой точности. Подход, основанный на применении приближённых аналитических методов и аналитических (символьных) вычислений на ЭВМ, позволяет существенно сократить затраты на решение задач. Ранее он был применён для задач о напряженном состоянии вблизи отверстий, имеющихся или образующихся в упругих и вязкоупругих телах. Плоские задачи нелинейной теории вязкоупругости для неоднородных тел при конечных деформациях ранее не были решены приближенными аналитическими методами.

Целью диссертационной работы является построение математической модели и разработка приближённых аналитических методов, алгоритмов и программного обеспечения для исследования напряжённо-деформированного состояния в нелинейно-вязкоупругих телах с вязкоупругими включениями при конечных деформациях.

Основные результаты

Для достижения цели исследования в диссертации исследуются и решаются следующие основные **задачи**:

- построение математических моделей напряжённо-деформированного состояния вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением при конечных деформациях, для сжимаемого вязкоупругого материала с учётом геометрической нелинейности, для сжимаемого вязкоупругого материала с учётом физической нелинейности, для несжимаемого вязкоупругого материала;
- развитие приближённых аналитических методов, использованных ранее для случая упругих тел, для расчёта напряжённо-деформированного состояния в вязкоупругом теле с вязкоупругим включением;
- построение алгоритма решения задачи для определения основных характеристик напряжённо-деформированного состояния, как-то: напряжения, деформации, перемещения, давление;
- разработка программного комплекса, реализующего данный метод и алгоритм для бесконечно протяжённых вязкоупругих тел с круговым вязкоупругим включением, в среде системы компьютерной алгебры Maple;
- проведение серии вычислительных экспериментов с целью исследования зависимости напряжённо-деформированного состояния в теле от параметров модели: величин приложенных нагрузок, вязкоупругих характеристик материалов тела и включения; от времени нагружения.

Методы исследования: метод возмущений (метод малого параметра), метод Колосова–Мусхелишвили, интегральное преобразование Лапласа.

Научная новизна полученных результатов

В работе построена математическая модель, описывающая напряжённо-деформированное состояние бесконечно протяжённого тела (матрицы) с круговым вязкоупругим включением для сжимаемых и несжимаемых вязкоупругих материалов как с учётом геометрической нелинейности, так и с учётом физической нелинейности.

Получено новое приближённое аналитическое решение класса плоских задач нелинейной теории вязкоупругости для неоднородных тел при конечных деформациях — задач о НДС бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением.

Найдено решение задачи о квазистатическом нагружении бесконечно протяжённого тела с круговым вязкоупругим включением для случаев сжимаемых и несжимаемых вязкоупругих материалов. Для случая сжимаемых вязкоупругих материалов решение найдено как с учётом геометрической нелинейности, так и с учётом физической нелинейности.

Развит приближённый аналитический метод для решения указанного класса задач. Метод основан на модификации математических методов, применяемых ранее для решения задач теории упругости и теории вязкоупругости для случая однородных тел (метод возмущений, метод Колосова–Мусхелишвили). Расчётные формулы и алгоритмы для неоднородных вязкоупругих тел отличаются от соответствующих формул и алгоритмов для однородных вязкоупругих тел и тел с отверстиями. На границе вязкоупругих материалов в теле используются условия идеального контакта — условия непрерывности вектора перемещений и вектора нормальных напряжений.

Теоретическая значимость работы заключается в дальнейшем развитии приближённых аналитических методов решения плоских задач нелинейной теории вязкоупругости и тем, что эти методы могут быть обобщены на задачи теории многократного наложения больших вязкоупругих деформаций.

Предложенные алгоритмы могут быть модифицированы для решения задач о вязкоупругом включении с вязкоупругим межфазным слоем, задач о плосконапряжённом состоянии, задач, в которых материал тела, содержащего включение, является сжимаемым, а материал включения — несжимаемым, или наоборот и др.

Практическая значимость

Разработан программный комплекс для ЭВМ, реализующий математические методы и алгоритмы, описанные в диссертации. Программный комплекс реализован с использованием системы компьютерной алгебры Maple на языке этой системы. Комплекс позволяет приближённо решать задачи для тел из нелинейно-вязкоупругих материалов в случае плоской деформации. Предусмотрена возможность расчёта для одноосного нагружения тела, для одновременного нагружения по двум осям, для касательных нагрузок. Нагрузки на бесконечности могут задаваться как функции времени.

С помощью программного комплекса можно решать практические задачи по выполнению прочностных расчётов композиционных материалов при конечных деформациях. Результаты расчётов могут быть использованы на стадии проектирования изделий из полимерных и резиноподобных материалов, в задачах мониторинга, а также для анализа и верификации численных решений.

Обоснованность и достоверность результатов

Обоснованность базируется на использовании при постановке задачи уравнений и граничных условий, использованных ранее другими авторами, и апробированных определяющих соотношений, реалистично описывающих механические свойства материалов.

Механические свойства сжимаемого вязкоупругого материала определяются соотношениями, обобщающими на случай вязкоупругости соотношения для потенциала Мурнагана. Физическая нелинейность определяется записью определяющих соотношений в виде нелинейной зависимости между вторым тензором напряжений Пиолы–Кирхгофа и тензором деформаций Грина, обобщающими на случай вязкоупругости определяющие соотношения для пятиконстантного потенциала Мурнагана. Для несжимаемого вязкоупругого материала определяющие соотношения записываются в виде нелинейной зависимости между тензором обобщённых напряжений и тензорной мерой Коши–Грина, обобщающей на случай вязкоупругости определяющие соотношения для потенциала Трелоара. Во всех этих соотношениях упругие постоянные заменены интегральными операторами вида свёртки по времени.

Достоверность полученных результатов подтверждается согласованностью с результатами решения задачи об упругом включении в упругой среде, точным выполнением для каждого приближения: условия равновесия, граничных условий на границе между включением и матрицей, условия несжимаемости (для несжимаемых материалов).

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались: на международных научных конференциях «Современные проблемы математики, механики, информатики» в 2013 и 2014 гг. (г. Тула, ТулГУ); на Десятой международной конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения» в 2014 г. (г. Казань, КФУ); на VIII Международном научном симпозиуме «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела» в 2015 г. (г. Тверь, ТвГТУ), на Ломоносовских чтениях в 2016 г. (г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова) на научных семинарах НОЦ «Математическое моделирование сложных систем и процессов» ТвГУ под руководством проф. А.Н. Кудинова; на научных семинарах кафедры вычислительной математики ТвГУ.

Работа по теме диссертации проводилась в соответствии с тематическими планами НИР, в рамках реализации ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (соглашение о предоставлении субсидии № 14.579.21.0076, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57914X0076) в плане выполнения расчетов для несжимаемых материалов, в рамках базовой части Государственного задания в сфере научной деятельности (Задание 2014/220, проект 1153) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-01191) в плане выполнения расчетов для сжимаемых материалов.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 печатных работах, из них 6 в изданиях, включённых в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» решением ВАК. Две статьи опубликованы в журналах, входящих в международную реферативную базу данных и систему цитирования Scopus. На модули программного комплекса получены 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ в федеральной службе по интеллектуальной собственности.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 141 страницах машинописного текста, содержит 68 рисунков, список использованных источников из 95 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цель, решаемая научная задача и частные задачи исследования. Дана общая характеристика работы и её краткое содержание. Приведён обзор работ, посвящённых задачам нелинейной теории упругости и вязкоупругости, математическим моделям для описания механического поведения нелинейно-вязкоупругих материалов, применению аналитических методов к решению плоских задач нелинейной теории упругости и вязкоупругости.

В первой главе изложены основные положения нелинейной теории вязкоупругости и приведены общие постановки задач.

В п. 1.1. приводятся основные термины и обозначения нелинейной теории вязкоупругости, используемые в работе: u — вектор перемещений, характеризующий переход тела из начального состояния в конечное; f — вектор массовых (объёмных) сил; σ — тензор истинных напряжений, описывающий накопленные в теле напряжения при переходе из начального состояние в конечное (тензор Коши); $\overset{0}{\Sigma}$ — тензор обобщённых напряжений, определённый в координатном базисе начального состояния (тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода); Ψ — аффинор деформаций; Δ — относительное изменение объёма при переходе тела из начального состояния в конечное; $\overset{0}{E}$ — тензор полных деформаций, описывающий изменение деформаций при переходе тела из начального состояния в конечное и отнесённый к координатному базису начального состояния (тензор деформаций Грина); G — тензорная мера деформаций, описывающая изменение деформаций при переходе тела из начального состояния в конечное (тензорная мера Коши–Грина); p — неопределенный множитель Лагранжа, имеющий смысл среднего физического напряжения; $\overset{0}{\nabla}$ — оператор градиента, отнесённый к координатному базису начального состояния; I — единичный тензор второго ранга; $\overset{0}{\Gamma}$ — граница матрицы и включения в координатном базисе начального состояния; $\overset{0}{N}$ — нормаль к $\overset{0}{\Gamma}$; R — радиус включения; $\cdot$ — знак тензорного произведения со свёрткой; $:$ — знак двойной тензорной свёртки; $*$ — знак транспонирования.

В п. 1.2 подробно описывается математическая модель и приводится постановка задачи для упругого тела. В п. 1.3 проводится обзор линейных моделей вязкоупругого тела. Приводятся кинематические и динамические структурные соотношения, соответствующие моделям. В п. 1.4 приводятся механическая и математическая постановки задачи линейной вязкоупругости. В п. 1.5 рассмотрены модели нелинейной теории вязкоупругости, использованные в работе.

В п. 1.6 представляется понятийный аппарат нелинейной теории вязкоупругости: кинематические соотношения, уравнения равновесия и граничные условия, определяющие соотношения описывающие напряженно-деформированное состояние в теле при больших деформациях, в том числе определяющие соотношения для сжимаемого вязкоупругого материала и несжимаемого вязкоупругого материала.

В п. 1.7 формулируются постановки плоских задач нелинейной теории вязкоупругости при больших деформациях. Приводится пример постановки задачи о квазистатическом нагружении бесконечно протяжённого вязкоупругого тела (матрицы) с круговым вязкоупругим включением.

Постановки задач вязкоупругости рассматриваются в координатах начального (недеформированного) состояния, поскольку в случае вязкоупругости конечное состояние не является фиксированным, а меняется со временем. Индексом M отмечаются величины, относящиеся к матрице, а индексом B — к включению. Если индексы не указаны, то выражения относятся как к матрице, так и к включению. Система координат выбрана таким образом, чтобы направления нагружения совпали с осями декартовой системы координат x и y, а начало координат совпало с центром включения.

Для сжимаемых вязкоупругих материалов в базисе начального состояния используются соотношения[1]:

$$\overset{0}{\Sigma}(t) = I\int\limits_{-\infty}^{t}\left\{\lambda(t-\tau)\left(\frac{\partial \overset{0}{E}(\tau)}{\partial\tau}:I\right) + 3C_3(t-\tau)\left(\frac{\partial\left[\overset{0}{E}(\tau):I\right]^2}{\partial\tau}\right) + C_4(t-\tau)\left(\frac{\partial\left[\overset{0}{E}(\tau)\right]^2}{\partial\tau}:I\right)\right\}d\tau +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t}\left\{2\mu(t-\tau)\frac{\partial \overset{0}{E}(\tau)}{\partial\tau} + 2C_4(t-\tau)\left(\frac{\partial\left[\left(\overset{0}{E}(\tau):I\right)\overset{0}{E}(\tau)\right]}{\partial\tau}\right) + 3C_5(t-\tau)\left(\frac{\partial\left[\overset{0}{E}(\tau)\right]^2}{\partial\tau}\right)\right\}d\tau \tag{1}$$

Для физически линейных вязкоупругих материалов соотношения упрощаются до следующего вида:

$$\overset{0}{\Sigma}(t) = I\int\limits_{-\infty}^{t}\left\{\lambda(t-\tau)\left(\frac{\partial \overset{0}{E}(\tau)}{\partial\tau}:I\right)\right\}d\tau + 2\int\limits_{-\infty}^{t}\left\{\mu(t-\tau)\frac{\partial \overset{0}{E}(\tau)}{\partial\tau}\right\}d\tau\,. \tag{2}$$

Для несжимаемого вязкоупругого материала используются соотношения[2]

$$\overset{0}{\Sigma}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t}\mu(t-\tau)\left(I - \frac{1}{3}\frac{\partial\left[\left(G(\tau):I\right)\cdot G^{-1}(\tau)\right]}{\partial\tau}\right)d\tau - p(t)G^{-1}(t)\,. \tag{3}$$

---

[1] Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. — М.: МАИК Наука, Физматлит. — 1999. — 224 с.

[2] Адамов А.А., Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. — Екатеринбург: УрО РАН. — 2003. — 411 с.

Ядра релаксации в соотношениях (1)–(3) заданы в виде

$$\lambda(t)=\lambda_0+\lambda_1 e^{-\alpha t}, \quad \mu(t)=\mu_0+\mu_1 e^{-\beta t}, C_j(t)=C_{j_0} e^{-f_j t} \quad (j=3,4,5), \tag{4}$$

значения постоянных материала в матрице и во включении различны.

Во второй главе рассматриваются приближённые аналитические методы решения плоских задач о квазистатическом нагружении сжимаемых и несжимаемых вязкоупругих тел с включениями. Рассмотрено решение задачи о квазистатическом нагружении бесконечно протяжённого вязкоупругого тела (матрицы) с круговым вязкоупругим включением. При решении задачи используется тот факт, что постановка задачи для вязкоупругих материалов в изображениях по Лапласу совпадает с постановкой чисто упругой задачи в оригиналах.

В п. 2.1 рассмотрена сущность метода возмущений применительно к задачам нелинейной теории вязкоупругости.

Малый параметр ν выбирается в безразмерном виде

$$\nu=\frac{\max\limits_{i,j}\left|\overset{0}{\Sigma}{}_{ij}^{\infty}\right|}{\mu_0^M}, \tag{5}$$

и для всех величин, входящих в постановку задачи, записывается разложение в ряд по этому параметру. Например, для вектора перемещений u такое разложение может быть записано в виде ряда

$$u=u^{(0)}+u^{(1)}+\ldots, \qquad u^{(j)}\sim\nu^{j+1}. \tag{6}$$

В п. 2.2 рассмотрено применение метода Колосова–Мусхелишвили к плоским задачам теории упругости. Этот метод используется для решения линеаризованных задач для каждого приближения метода возмущений.

Метод Колосова–Мусхелишвили с использованием комплексных потенциалов является универсальным методом решения граничных задач линейной теории упругости. Метод Колосова–Мусхелишвили использует тот факт, что плоская задача может быть сформулирована в терминах теории функций комплексного переменного. Для этого вводятся в рассмотрение комплексные переменные $z=x+iy=re^{i\vartheta}$ и $\bar{z}=x-iy=re^{-i\vartheta}$, где x и y — декартовы координаты, а r и ϑ — радиус и угол в полярной системе координат, соответственно.

Основа метода Колосова–Мусхелишвили в том, что бигармоническое уравнение, описывающее плоское напряжённо-деформированное состояние или плоскую деформацию, имеет общее решение, которое может быть выражено через две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — комплексные потенциалы. Комплексные потенциалы определяются из граничных условий соответствующих краевых задач.

В п. 2.3 представлено описание алгоритма решения задачи для нулевого приближения. Рассмотрена постановка задачи в изображениях.

Для решения задачи применяется метод Колосова–Мусхелишвили. При его применении напряжения и перемещения выражаются через комплексные потенциалы — аналитические функции $\varphi_M(z)$, $\psi_M(z)$ для матрицы и $\varphi_B(z)$, $\psi_B(z)$ для включения.

Для нулевого приближения потенциалы определяются в следующем виде:

$$\varphi_M^{(0)}(z) = \frac{\overset{\infty}{\sigma}{}^{(0)}_{\mathrm{M}I}}{4} \sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(0)} z^{-k}, \qquad \psi_M^{(0)}(z) = \frac{\overset{\infty}{\sigma}{}^{(0)}_{\mathrm{M}II}}{2} \sum_{k=-1}^{\infty} b_k^{(0)} z^{-k}, \tag{7}$$

$$\varphi_B^{(0)}(z) = \frac{\overset{\infty}{\sigma}{}^{(0)}_{\mathrm{M}I}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(0)} z^{k}, \qquad \psi_B^{(0)}(z) = \frac{\overset{\infty}{\sigma}{}^{(0)}_{\mathrm{M}II}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(0)} z^{k}. \tag{8}$$

Граничные условия выражаются через комплексные потенциалы следующим образом:

$$\frac{1}{2\mu_M}\left[æ_M \varphi_M(z) - z\overline{\varphi_M'(z)} - \overline{\psi_M(z)}\right]\Big|_{\Gamma}^{0} = \frac{1}{2\mu_B}\left[æ_B \varphi_B(z) - z\overline{\varphi_B'(z)} - \overline{\psi_B(z)}\right]\Big|_{\Gamma}^{0}, \tag{9}$$

$$\varphi_M(z) + z\overline{\varphi_M'(z)} + \overline{\psi_M(z)}\Big|_{\Gamma}^{0} = \varphi_B(z) + z\overline{\varphi_B'(z)} + \overline{\psi_B(z)}\Big|_{\Gamma}^{0}. \tag{10}$$

Подставляя потенциалы, представленные в виде рядов (7), (8), в граничные условия (9), (10), получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения выражений для коэффициентов рядов через изображения нагрузок и ядер релаксации. Решая систему, получаем выражения для ненулевых коэффициентов. Подставляя в формулы, связывающие потенциалы с напряжениями, перемещениями и давлением выражения для потенциалов, получаем выражения в изображениях для напряжений, перемещений и давления. Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем решение для нулевого приближения в оригиналах.

В п. 2.4 рассмотрено аналитическое решения линеаризованных плоских задач теории вязкоупругости.

Постановки линеаризованных задач для вязкоупругих материалов в изображениях по Лапласу совпадают с постановками задач для упругих материалов. Таким образом, эти задачи могут быть решены методом Колосова–Мусхелишвили.

Решение линеаризованной задачи отыскивается в виде:

$$u = u_{н.} + u_{одн.}, \tag{11}$$

$$\overset{0}{\Sigma} = \overset{0}{\Sigma}_{н.} + \overset{0}{\Sigma}_{одн.}, \tag{12}$$

$$p = p_{н.} + p_{одн.}, \tag{13}$$

где $u_{н.}$, $\overset{0}{\Sigma}_{н.}$, $p_{н.}$ — некоторое частное решение линеаризованной задачи, а $u_{одн.}$, $\overset{0}{\Sigma}_{одн.}$, $p_{одн.}$ — решение линеаризованной задачи для однородной системы уравнений.

Записываются частные решения для каждого из рассмотренных случаев.

Для сжимаемых вязкоупругих материалов:

$$u_{н.} = \frac{1}{4\mu(\lambda + 2\mu)} \cdot \left[(\lambda + 3\mu) \int\int F \, dz \, d\bar{z} - (\lambda + \mu) \int\int \overline{F} \, dz \, dz \right]. \tag{14}$$

Для несжимаемых вязкоупругих материалов:

$$p_{н.} = \frac{4}{3} \mu H - \frac{1}{2} \left(\int F \, d\bar{z} + \int \overline{F} \, dz \right), \tag{15}$$

$$u_{н.} = \frac{1}{4\mu} \left(\int\int F \, dz \, d\bar{z} - \int\int \overline{F} \, dz \, dz \right) + \frac{1}{2} \int H \, dz. \tag{16}$$

Далее, рассматривается решение линеаризованной краевой задачи для однородной системы уравнений. Это решение может быть найдено с помощью комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, которые являются аналитическими функциями комплексной переменной z в области, занимаемой телом, и определяются из граничных условий соответствующей краевой задачи.

В п. 2.5 дана постановка задачи в изображениях для первого приближения. Отдельно рассмотрены случаи сжимаемых и несжимаемых вязкоупругих материалов. Приведён алгоритм для сжимаемых физически линейных вязкоупругих материалов. В описании алгоритма тильдой помечены те части первого приближения соответствующих величин, которые определяются нулевым приближением, то есть не зависят от $u^{(1)}$. Считается, что функции, которые зависят от аргумента s, являются изображениями по Лапласу. Через L обозначен оператор прямого преобразования Лапласа.

1. Определяется аффинор деформаций $\Psi^{(0)} = \overset{0}{\nabla} u^{(0)}$. (17)
2. Определяется относительное изменение объёма при переходе тела из начального состояния в конечное: $\Delta^{(0)} = \Psi^{(0)} : I$. (18)
3. Определяется поправка от учёта эффектов второго порядка для тензора деформаций Грина $\overset{0}{\tilde{E}}{}^{(1)} = \frac{1}{2} \Psi^{(0)} \cdot \Psi^{(0)*}$. (19)
4. Применяется преобразование Лапласа к тензору Грина и определяется в изображениях поправка от учёта эффектов второго порядка для тензора Пиолы–Кирхгофа второго рода $\overset{0}{\tilde{\Sigma}}{}^{(1)}$

$$\overset{0}{\tilde{\Sigma}}{}^{(1)}(s) = \lambda(s) \left(\overset{0}{\tilde{E}}{}^{(1)}(s) : I \right) I + 2\mu(s) \overset{0}{\tilde{E}}{}^{(1)}(s). \tag{20}$$

5. Определяется вектор фиктивных массовых сил $f^{(1)}$:

$$f^{(1)}(s) = -\overset{0}{\nabla} \cdot \left(\overset{0}{\tilde{\Sigma}}{}^{(1)}(s) + L \left[\overset{0}{\Sigma}{}^{(0)} \cdot \Psi^{(0)} \right] \right). \tag{21}$$

6. Из вектора $f^{(1)}$ находим частное решение неоднородного уравнения:

$$u^{(1)}_{н.}(s) = \frac{1}{4\mu(s)(\lambda(s)+2\mu(s))}\cdot$$

$$\cdot\left[(\lambda(s)+3\mu(s))\iint \frac{f^{(1)}(s)}{2}dz\,d\bar{z} - (\lambda(s)+\mu(s))\iint \overline{\frac{f^{(1)}(s)}{2}}dz\,dz\right]. \quad (22)$$

7. Находим тензор деформаций с учётом поправки от неоднородного решения $\overset{0}{E}{}^{(1)}$:

$$\overset{0}{E}{}^{(1)}(s) = \overset{0}{\tilde{E}}{}^{(1)}(s) + \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\nabla} u^{(1)}_{н.}(s) + \overset{0}{\nabla} u^{(1)*}_{н.}(s)\right). \quad (23)$$

8. Находим тензор обобщённых напряжений $\overset{0}{\Sigma}{}^{(1)}$:

$$\overset{0}{\Sigma}{}^{(1)}(s) = \overset{0}{\tilde{\Sigma}}{}^{(1)}(s) + \lambda(s)\left(\overset{0}{\nabla}\cdot u^{(1)}_{н.}(s)\right)I + \mu(s)\left(\overset{0}{\nabla} u^{(1)}_{н.}(s) + u^{(1)}_{н.}(s)\overset{0}{\nabla}\right). \quad (24)$$

9. Определяется тензор напряжений на бесконечности $\overset{0}{\Sigma}{}^{\infty(1)}_{M}$:

$$\overset{0}{\Sigma}{}^{\infty(1)}_{M}(s) = -\left(\overset{0}{\tilde{\Sigma}}{}^{(1)}(s) + L\left[\overset{0}{\Sigma}{}^{(0)}\cdot\Psi^{(0)}\right]\right)\Bigg|_{\infty}. \quad (25)$$

Для сжимаемых физически нелинейных вязкоупругих материалов алгоритм решения задачи отличается в формуле для определения в изображениях поправки от учёта эффектов второго порядка для тензора Пиолы–Кирхгофа второго рода $\overset{0}{\tilde{\Sigma}}{}^{(1)}$:

$$\overset{0}{\tilde{\Sigma}}{}^{(1)}(s) = I\left\{\lambda(s)\left(\overset{0}{\tilde{E}}{}^{(1)}(s):I\right) + 3C_3(s)L\left[\left(\overset{0}{\tilde{E}}{}^{(0)}:I\right)^2\right] + C_4(s)L\left[\left(\overset{0}{\tilde{E}}{}^{(0)}\right)^2:I\right]\right\} +$$

$$+\left\{2\mu(s)\overset{0}{\tilde{E}}{}^{(1)}(s) + 2C_4(s)L\left[\left(\overset{0}{\tilde{E}}{}^{(0)}:I\right)\cdot\overset{0}{\tilde{E}}{}^{(0)}\right] + 3C_5(s)L\left[\left(\overset{0}{\tilde{E}}{}^{(0)}\right)^2\right]\right\}. \quad (26)$$

Алгоритм для несжимаемых вязкоупругих материалов приведен в п. 2.5.4 диссертации.

На завершающем этапе алгоритмов, используя комплексные потенциалы, находим решение однородной системы уравнений по аналогии с нулевым приближением. Эти потенциалы представляются в виде, аналогичном (7), (8).

Подставляя потенциалы в граничные условия и решая систему линейных алгебраических уравнений, находим выражения для коэффициентов рядов через нагрузки и ядра релаксации. Подставляя выражения для потенциалов в формулы, связывающие потенциалы с напряжениями, перемещениями и давлением, получаем выражения в изображениях для напряжений, перемещений и давления. Применяя обратное преобразование Лапласа, находим решение в оригиналах.

В п. 2.6 приведено описание программной реализации алгоритмов решения задач.

В третьей главе приведены результаты решения плоских задач о квазистатическом нагружении сжимаемых и несжимаемых вязкоупругих тел с включениями, постановки и методы решения которых рассмотрены в первых двух главах. Исследуется напряжённо-деформированное состояние в зависимости от величин и типов нагружений, механических характеристик материалов. Анализируется влияние нелинейных эффектов.

В п. 3.1 приведены результаты для сжимаемых материалов с учётом геометрической и физической нелинейностей. На рис. 1 показаны результаты расчётов для одного из частных случаев, приведённых в диссертации. Сплошные линии соответствуют линейному решению, пунктирные — решению с учетом геометрической нелинейности, штрихпунктирные — решению, полученному с учётом геометрической и физической нелинейностей.

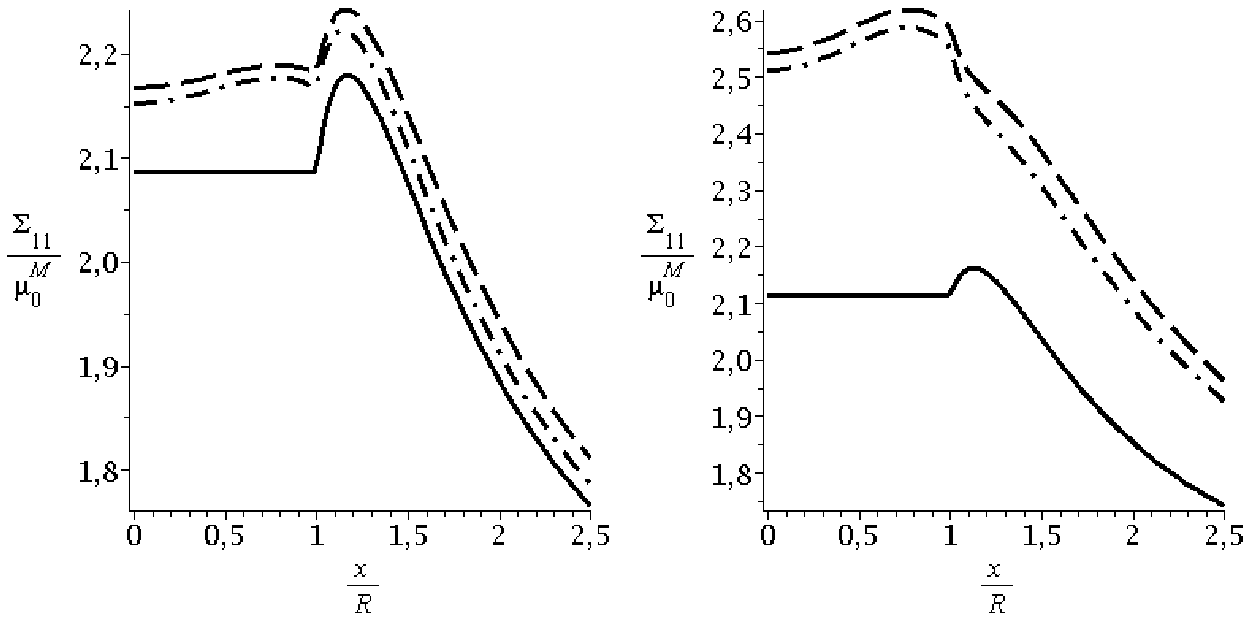

Рисунок 1. Распределение напряжений Σ_{11} вдоль оси x в моменты времени $t \cdot \beta_M = 0$ и $t \cdot \beta_M = 30$ для сжимаемого материала

При заданных нагрузках поправка от учёта нелинейных эффектов для компонент тензора напряжений не превосходит 22.5% без учёта физической нелинейности и 21% при её учёте. Поправки для вектора перемещений приблизительно совпадают и примерно равны 4%.

Для нулевого приближения приведено сравнение с численным решением, полученным в системе ABAQUS. Результаты показывают хорошее совпадение, максимальная ошибка для Σ_{11} составляет 0.45%.

В п. 3.2 приведены результаты для несжимаемых материалов.

На рис. 2 показаны результаты расчетов для одного из частных случаев, приведенных в диссертации. Сплошные линии соответствуют линейному решению, пунктирные — решению, полученному с учетом геометрической и физической нелинейностей.

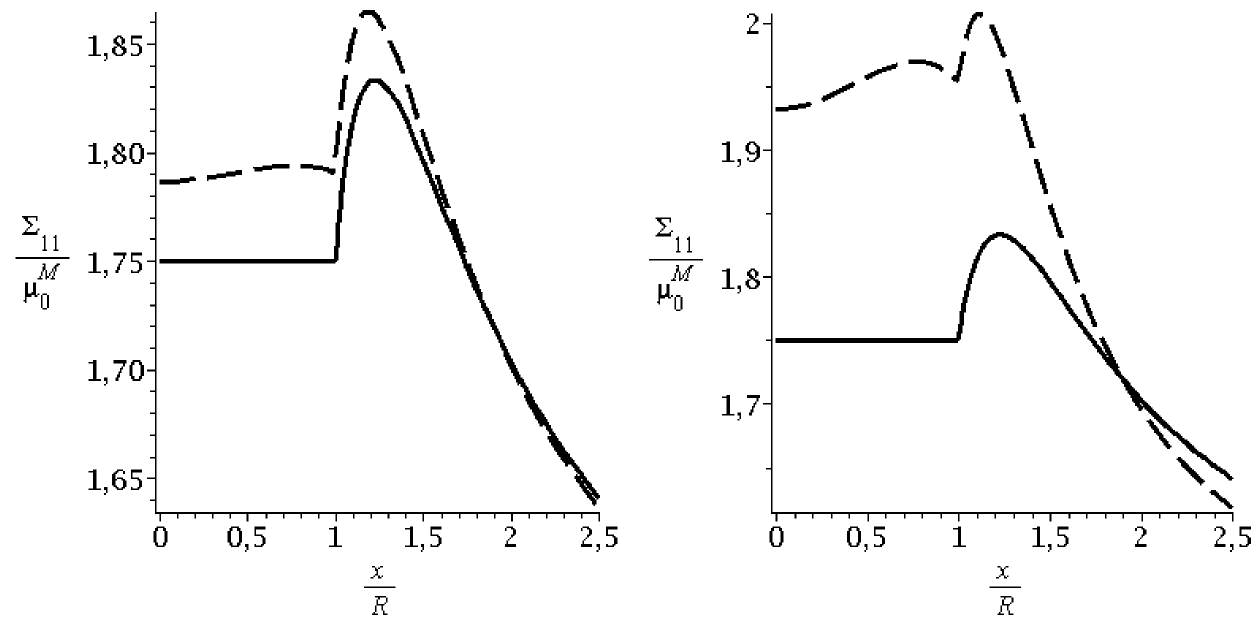

Рисунок 2. Распределение напряжений Σ_{11} вдоль оси x в моменты времени $t \cdot \beta_M = 0$ и $t \cdot \beta_M = 30$ для несжимаемого материала

При заданных нагрузках поправка от учёта нелинейных эффектов для компонент тензора напряжений не превосходит 12%, а для вектора перемещений — 46.5%.

Все приведённые результаты получены с использованием авторского проблемно-ориентированного программного комплекса.

В заключении приводятся основные результаты и выводы по работе.

В приложении приведён исходный код программного комплекса на языке системы компьютерной алгебры Maple.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

- Построена математическая модель, описывающая напряжённо-деформированное состояние бесконечно протяжённого тела (матрицы) с круговым вязкоупругим включением для сжимаемых и несжимаемых вязкоупругих материалов как с учётом геометрической нелинейности, так и с учётом физической нелинейности.
- Найдено новое решение класса плоских задач о квазистатическом нагружении бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением.
- Предложен приближённый аналитический метод для решения плоских задач о квазистатическом нагружении неоднородных тел из нелинейно-вязкоупругих сжимаемых и несжимаемых материалов при конечных деформациях.

- Разработан авторский программный комплекс, предназначенный для решения плоских задач линейной и нелинейной теорий вязкоупругости для бесконечно протяжённого тела с круговым включением.
- Дана оценка нелинейных эффектов для выполненных в диссертации расчетов. Например, для сжимаемого материала при заданных нагрузках и параметрах материала поправка от учёта нелинейных эффектов для компонент тензора напряжений не превосходит 22.5% без учёта физической нелинейности и 21% при её учёте.

Публикации по теме диссертации

В изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Шавырин Д.А. Аналитическое решение плоской задачи о квазистатической деформации бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением средствами компьютерной алгебры // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. — 2013. — № 1 (28). — С. 45–54.
2. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Расчет напряженного состояния в полимерном вязкоупругом теле с круговым вязкоупругим включением с учетом геометрической нелинейности // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. — 2014. — № 2. — С. 5–16.
3. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. О влиянии физической нелинейности на напряженное состояние вблизи вязкоупругого включения в вязкоупругом теле при конечных деформациях // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. — 2015. — № 4. — С. 5–16.
4. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Учёт несжимаемости материала при расчёте напряжений вблизи вязкоупругого включения в вязкоупругом теле при конечных деформациях // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. — 2016. — № 2. — С. 107–121.
5. Shavyrin D.A. Zingerman K.M., Approximate analytical solution for the problem of an inclusion in a viscoelastic solid under finite strains // Mechanics of Time-Dependent Materials. — 2016. — V. 20. Iss. 2. — P. 139–153.
6. Shavyrin D.A. Zingerman K.M., An approximate analytical method for stress analysis in a viscoelastic body with a circular inclusion considering the geometric and physical nonlinearity // Contemporary Engineering Sciences — 2016. — V. 9. Iss. 16. — P. 781–790.

В других изданиях

7. Шавырин Д.А. Аналитическое решение плоской задачи о равновесии бесконечно протяженного упругого тела с круговым упругим включением средствами компьютерной алгебры // Математика, информатика, их приложения и роль в образовании. Третья Российская школа-конференция для молодых ученых: Тезисы докладов. — Тверь: Твер. гос. ун-т. — 2013. — С. 68.
8. Шавырин Д.А. Аналитическое решение класса плоских задач о квазистатической деформации бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением средствами компьютерной алгебры // Студенческие научно-практические конференции факультета прикладной

математики и кибернетики: сб. трудов конференций от 26 апреля 2012 года и 25 апреля 2013 года. — Тверь: Твер. гос. ун-т. — 2013. — С. 57–61.

9. Шавырин Д.А. Аналитическое решение плоской задачи о квазистатической деформации бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ. — 2013. — С. 511–515.

10. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Расчёт напряжённого состояния в бесконечно протяжённом полимерном вязкоупругом теле с круговым вязкоупругим включением при конечных плоских деформациях // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ. — 2014. — С. 448–455.

11. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Расчёт напряжённого состояния в полимерном вязкоупругом теле с круговым вязкоупругим включением при конечных деформациях // Сеточные методы для краевых задач и приложения: материалы Десятой международной конференции. — Казань: Изд-во Казанского ун-та. — 2014. — С. 655–661.

12. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Влияние геометрической и физической нелинейностей на напряжённо-деформированное состояние полимерного вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением при конечных деформациях // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: Материалы VIII Международного научного симпозиума, посвященного 85-летию со дня рождения профессора В.Г. Зубчанинова (Тверь, 9–11 декабря 2015 года). Тверь: Тверской государственный технический университет. — 2015. — С. 280–285.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

13. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Решение плоской задачи о напряжённо-деформированном состоянии вблизи вязкоупругого включения в вязкоупругом сжимаемом теле при малых деформациях // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014662660, 05 декабря 2014 г.

14. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Расчёт напряжённого состояния вблизи вязкоупругого включения в вязкоупругом сжимаемом теле при конечных деформациях // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015618583, 12 августа 2015 г.

15. Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Расчёт напряжённого состояния вблизи вязкоупругого включения в теле из несжимаемого вязкоупругого материала при конечных деформациях // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016615121, 16 мая 2016 г.

Подписано в печать 19.10.2016. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 0,9. Тираж 100 экз.. Заказ № 441.
Редакционно-издательское управление
Тверского государственного университета
Адрес: 170100, г. Тверь, Студенческий пер. 12, корпус Б.
Тел. РИУ (4822) 35-60-63.