На правах рукописи

СТЁПИН НИКИТА ЕВГЕНЬЕВИЧ

АЛГОРИТМ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЫБОРА РЕШАТЕЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕФОРМАЦИЙ СЖИМАЕМЫХ И НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЁТОМ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Левин Владимир Анатольевич.

Официальные оппоненты: Петров Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (государственный университет)».

Христич Дмитрий Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, и.о. заведующего кафедрой «Вычислительная механика и математика», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук».

Защита диссертации состоится «27» декабря 2016 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.271.05 при ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г.Тула, пр.Ленина 92, (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина 92 и на сайте: http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-212-271-05/styopin-ne/.

Автореферат разослан «31» октября 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета МСоколова Соколова Марина Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

При конечно-элементном расчете напряжений в деформируемых телах требуется решать системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности. Матрицы этих систем имеют различную структуру для сжимаемых и несжимаемых материалов, могут быть решены различными методами, для которых могут быть использованы возможности распараллеливания алгоритма, поэтому возникает проблема выбора решателя для той или иной постановки задачи и различных доступных вычислительных ресурсов компьютера.

В диссертационной работе рассматривается алгоритм автоматического выбора и настройки решателей СЛАУ с разреженной матрицей в задачах механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ), его реализация в качестве программного модуля. Рассматриваются и используются модификации алгоритма Узавы и его применение к задачам МДТТ для несжимаемых материалов. С помощью программного модуля были проведены численные эксперименты, анализ результатов которых приведён в работе.

Особенностью алгоритма автоматического выбора и настройки решателей является учёт механической постановки задачи, размерности матрицы СЛАУ и возможностей компьютера.

Особенности алгоритма Узавы заключаются в том, что он позволяет с помощью итерационного процесса свести решение СЛАУ с блоком нулей в правом нижнем углу (так называемые *системы с седловой точкой*, т.е. матрица системы обладает собственными значениями разных знаков) к последовательному решению системы меньшей размерности общего вида, что позволяет улучшить сходимость итерационных методов решения СЛАУ. Системы такой структуры возникают при решении задач теории упругости для несжимаемых и слабосжимаемых материалов.

В диссертационной работе описаны постановки задач теории упругости и математические модели сжимаемого и несжимаемого материалов. Задачи основываются на соотношениях механики деформируемого твёрдого тела для случая конечных деформаций. Предлагается модель образования сжимаемого включения (кристаллизации) в теле из несжимаемого материала.

Рассмотрен алгоритм численного решения поставленных задач с помощью метода конечных элементов. Описаны особенности реализации этого алгоритма на языке программирования C++. Дано описание системы компьютерного моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) тел из резиноподобных материалов при образовании в них кристаллических включений. Проведено большое количество численных экспериментов, некоторые результаты которых приведены в работе.

Исследовано влияние на выбор эффективного решателя несжимаемости материалов, различных форматов хранения матрицы в памяти компьютера, размерности матриц, их симметричности, использования различных предобуславливателей и эффективности распараллеливания. Анализ показывает важность учёта всех этих особенностей при решении задачи.

Актуальность инженерных прочностных расчётов для несжимаемых материалов, в том числе при больших деформациях, определяется актуальностью прочностных расчётов конструкций из этих материалов. Из резинокорда (анизотропный армированный композитный материал, в состав которого входит резина – слабосжимаемый материал), например, изготавливаются такие детали пневматической шины как каркас и брекер. Максимальные напряжения возникают в области пятна контакта шины с поверхностью. Возникающие при этом деформации являются конечными.

В связи с разработкой новых материалов (в том числе резиноподобных и полимерных), конструкции из которых способны испытывать в процессе изготовления и эксплуатации конечные деформации, а также усложнением самих конструкций и сложностью их нагружения, возникает необходимость в создании адекватных механических моделей и разработке систем инженерного анализа (либо программных модулей способных интегрироваться в существующие системы инженерного анализа) для оценки прочностных характеристик элементов таких конструкций. В ряде случаев необходимо учитывать несжимаемость материалов, чтобы точнее определить процессы, происходящие в таких конструкциях при их эксплуатации и хранении. Стоит также учитывать изменения механических характеристик материалов в некоторых областях, подвергающихся наибольшему воздействию, что можно моделировать как образование включения из другого материала (например, кристаллизация резины). Анализ этих процессов важен потому, что позволяет конструктору еще на этапе проектирования оценить возможность разрушения элемента конструкции.

На сегодняшний день существует большой выбор различных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих в подобных задачах. Каждый из этих методов по-своему удобен и эффективен в той или иной задаче, а какие-то могут оказаться неприменимыми в отдельных ситуациях. Существует много различных реализаций тех или иных методов, ориентированных под определённые вычислительные устройства. Актуальным и удобным становится на сегодняшний день собрать наиболее часто используемые и наиболее эффективные из них в одном программном модуле, предоставив пользователю либо самому выбирать, какой из них он хотел бы использовать, либо делать такой выбор в автоматическом режиме без необходимости для пользователя разбираться во всём разнообразии и особенностях этих методов.

Цель диссертационной работы – предложить модель для оценки напряжённо-деформированного состояния при образовании упругих включений в теле из упругого несжимаемого материала после предварительного нагружения с учётом конечных деформаций и их перераспределения для случая сжимаемого включения и разработать программный модуль для выбора подходящего решателя для задач МДТТ.

Основными задачами диссертационной работы являются:

- предложить модель для оценки напряжённо-деформированного состояния при образовании упругих включений в теле из упругого несжимаемого материала после предварительного нагружения с учётом конечных деформаций и их перераспределения для случая сжимаемого включения;

- разработать метод численного расчета напряжённо-деформированного состояния при образовании упругих включений в теле из упругого несжимаемого материала после предварительного нагружения на основе метода конечных элементов;
- разработать алгоритм и программное обеспечение (систему компьютерного моделирования) для расчета напряжённо-деформированного состояния при образовании упругих включений в теле из упругого несжимаемого материала при конечных деформациях;
- модификация алгоритма Узавы применительно к задачам МДТТ для несжимаемых материалов с учётом конечных деформаций и их перераспределения;
- анализ различных решателей СЛАУ и разработка алгоритма автоматического выбора и настройки решателей в задачах МДТТ в зависимости от механической постановки задачи, размерности матрицы СЛАУ и возможностей компьютера;
- разработка программного модуля, позволяющего из имеющихся решателей выбирать наиболее эффективный в данной задаче МДТТ на данном компьютере, в том числе для несжимаемых материалов;
- проведение с помощью программного модуля численных экспериментов, включая расчёт напряжённо-деформированного состояния при образовании упругих включений в теле из упругого несжимаемого материала после предварительного нагружения; анализ полученных результатов.

Научная новизна. Предложена математическая модель для оценки напряжённо-деформированного состояния при образовании включений в теле из упругого несжимаемого материала после его предварительного нагружения с учётом конечных деформаций и их перераспределения для случая сжимаемого включения. Получены результаты численного анализа на основе этой модели.

Модифицирован алгоритм Узавы применительно к задачам механики деформированного твёрдого тела для несжимаемых материалов в случае малых и конечных деформаций.

Разработан алгоритм автоматического выбора и настройки решателей СЛАУ при конечно-элементном решении задач МДТТ в зависимости от механической постановки задачи, размерности матрицы жёсткости и возможностей компьютера.

Достоверность полученных результатов основывается на корректной математической постановке задачи, использовании апробированных соотношений механики деформируемого твёрдого тела, применении общепризнанных численных методов (метод конечных элементов) и рядом аналитических решений при конечных деформациях для несжимаемых материалов.

Полученные результаты для эталонного теста NAFEMS совпадают с аналитическим решением и результатами, полученными в программном комплексе ANSYS.

Точность решения систем линейных алгебраических уравнений проверялась подстановкой полученного результата в начальную систему уравнений.

Практическая значимость. Разработан программный модуль на основе алгоритма, позволяющего из имеющихся решателей выбрать наиболее эффективный в данной задаче МДТТ на данном компьютере, в том числе для несжимаемых материалов при малых и конечных деформациях. Его эффективность подтверждается проведением большого числа численных экспериментов с разнообразными исходными данными.

Результаты диссертационной работы были использованы при выполнении работ по гранту РФФИ №11-08-01284, госконтракту №11418р/17126 от 27 февраля 2012 г. по программе «Участник Молодёжного Научно-Инновационного Конкурса» («У.М.Н.И.К.»). Исследования, представленные в диссертации, проводились при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение о предоставлении субсидии №14.579.21.0112, идентификатор проекта RFMEFI57914X0112; соглашение о предоставлении субсидии №14.579.21.0076, идентификатор проекта RFMEFI57914X0076).

Программный модуль используется в программном комплексе инженерного анализа CAE FIDESYS.

Положения, выносимые на защиту. Математическая модель для оценки напряжённо-деформированного состояния (НДС) при образовании включений в теле из упругого несжимаемого материала после его предварительного нагружения с учётом конечности деформаций и их перераспределения для случая, когда материал включения является сжимаемым. Разработка алгоритма расчёта НДС на основе этой модели и программного обеспечения, реализующего этот алгоритм.

Модификация алгоритма Узавы (предложены варианты выбора коэффициентов релаксации) применительно к задачам механики деформируемого твёрдого тела для несжимаемых материалов, в том числе для случая конечных деформаций.

Алгоритм автоматического выбора и настройки решателей в задачах механики деформируемого твёрдого тела в зависимости от механической постановки задачи, размерности матрицы СЛАУ и возможностей компьютера.

Программный модуль на основе полученного алгоритма, позволяющий эффективно решать задачи механики деформируемого твёрдого тела, в том числе для несжимаемых материалов, при малых и конечных деформациях.

Результаты численных экспериментов с помощью программного модуля, анализ которых показал достоверность полученных результатов и эффективность выбора метода.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научно-технических конференциях: «Ломоносовские чтения» в 2009, 2010 и 2012 годах (г. Москва) [9, 11, 16]; «Ломоносов» в 2011 и 2012 годах (г. Москва) [13, 15]; «Современные проблемы математики, механики, информатики» в 2009 и 2012 годах (г. Тула) [10, 17]; на XXII симпозиуме «Проблемы шин и резинокордных композитов» в 2011 году (г. Москва) [14];

на X и XI Всероссийских съездах по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в 2011 (г. Нижний Новгород) и 2015 (г. Казань) годах [12, 18].

Результаты работы в числе прочих были изложены на семинаре ОИВТ под руководством академика В.Е.Фортова 15 февраля 2016 года в докладе «Цифровое средство производства для прочностного инженерного анализа Фидесис: Результаты разработки и внедрения. Развитие Фидесис на основе теории наложения больших деформаций».

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в 15 публикациях, в том числе 5 из перечня рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ.

На основе результатов диссертации было зарегистрировано 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка использованных источников из 146 наименований. Работа изложена на 115 страницах машинописного текста, содержит 25 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведено краткое содержание диссертации, дан обзор литературы по исследованию образования трещин и включений в упругих материалах при малых и конечных деформациях, а также литературы по исследованию многократного наложения больших деформаций. Помимо этого, дан обзор литературы по методам решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в том числе возникающих в задачах механики деформированного твёрдого тела (МДТТ). Обоснована актуальность темы исследования. Сформулированы цели и задачи работы. Обоснованы новизна, достоверность и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе изложены основные соотношения нелинейной теории упругости. Приводятся основные определения и обозначения, используемые в работе в дальнейшем:

$*$ – знак транспонирования;

$:$ – знак двойной скалярной свёртки;

I – единичный тензор;

$\underset{k}{\nabla}$ – оператор градиента в координатах *k*-го состояния;

$\underset{k}{\Sigma}_{0,n}$ – тензор обобщённых полных напряжений в *n*-ом состоянии в координатах *k*-го состояния;

$F_{k,n}$ – тензорная мера деформаций, описывающая изменение деформаций при переходе тела из состояния k в состояние m, соответствующая мере Фигнера ($F_{0,1}$ – тензорная мера Фингера);

$\Psi_{m,n}$ – аффинор полных деформаций при переходе из *m*-го в *n*-е состояние;
Ψ_e – аффинор упругих деформаций;
Ψ_t – аффинор собственных деформаций;
$\sigma_{0,k}$ – тензор полных истинных напряжений в *k*-м состоянии;
$\sigma^{\infty}_{0,k}$ – тензор истинных напряжений на бесконечности в *k*-м состоянии;
$p_{0,n}$ – множитель Лагранжа, определяемый из уравнений краевой задачи с учётом условий несжимаемости, которые в общем случае представляют систему *N* уравнений ($\Delta_{0,n} \equiv 0$);

$\Delta_{m,n}$ – относительное изменение объёма при переходе из *m*-го в *n*-е состояние;
u_k – вектор перемещений при переходе из *(k-1)*-го в *k*-е состояние.

Индекс 0 соответствует начальному состоянию, индекс *N* – конечному.

Описана постановка краевой задачи нелинейной теории упругости: уравнения движения, граничные условия. Приведены используемые в работе определяющие соотношения Мурнагана (с помощью которых описываются механические свойства включений), Муни и, в частности, Трелоара (используемые для моделирования материала, в котором эти включения образуются).

Определяющие соотношения для несжимаемого материала – потенциал Муни: $\overset{n}{\Sigma}_{0,n} = \dfrac{\mu}{2}\left[(1+\beta)\overset{n}{F}_{0,n} - (1-\beta)\overset{n}{F}{}_{0,n}^{-1}\right] - p_{0,n} I$

Частный случай (при β=1) – потенциал Трелоара: $\overset{n}{\Sigma}_{0,n} = \mu \overset{n}{F}_{0,n} - p_{0,n} I$.

Кинематические соотношения:

$$\overset{0}{\mathrm{E}}_e = \frac{1}{2}\left(\Psi_e \cdot \Psi_e^* - \mathrm{I}\right) \qquad F = \Psi^* \cdot \Psi = \left(I - 2E\right)^{-1}$$

$$\Psi_e = \Psi_t^{-1} \cdot \Psi_{0,p} \qquad \Psi_{p-1,p} = \mathrm{I} + \overset{p-1}{\nabla} u_p$$

$$\Psi_{0,p} = \Psi_{0,p-1} \cdot \Psi_{p-1,p}$$

Уравнения равновесия:

$$\overset{p-1}{\nabla} \cdot \left[\left(1 + \Delta_{0,p-1}\right)^{-1} \overset{p-1}{\Sigma}_{0,p} \cdot \Psi_{p-1,p}\right] = 0 \qquad \overset{p-1}{\Sigma}_{0,p} = \Psi^*_{0,p-1} \cdot \overset{0}{\Sigma}_{0,p} \cdot \Psi_{0,p-1}$$

Граничные условия:

$$\sigma_{0,p}\Big|_{\Gamma внеш.} = \sigma^{\infty} \qquad N \cdot \sigma_{0,p}\Big|_{Тело} = N \cdot \sigma_{0,p}\Big|_{Включение}$$

$$N \cdot \sigma_{0,p}\Big|_{\Gamma отверстия} = \sigma^{0} \qquad u_{включ}\Big|_{Г.вклюения} = u_{тела}\Big|_{Г.включения}$$

Условие несжимаемости:

$\Delta_{0,n} \equiv 0$ или $\det(\Psi_{0,n}) = 1$.

Предложена модель образования упругих включений в телах из несжимаемых материалов после предварительного нагружения при малых и конечных деформациях. Механическая постановка такой модели формулируется на основе теории многократного наложения деформаций в телах из упругого материала, в которых после предварительного нагружения возникают области с другими упругими свойствами (включения). Механические свойства исходного материала описываются определяющими соотношениями типа Муни или Трелоара, а материала включений – либо определяющими соотношениями типа Мурнагана, либо по-прежнему определяющими соотношениями типа Муни или Трелоара, но уже с другими константами материала.

Рассматривается тело (элемент конструкции) из несжимаемого материала. В этом теле под воздействием внешних нагрузок возникают статические деформации и напряжения, которые будем называть начальными. Тело перешло в *первое промежуточное состояние*. Далее в этом теле мысленно намечается замкнутая поверхность (будущая граница включения) с помощью некоторого критерия. Например, область, где превышена некоторая (заранее выбранная) критериальная величина. Например, в качестве критериальной величины может быть выбрана величина максимального главного напряжения. Часть напряженного тела, ограниченная намеченной поверхностью, мысленно удаляется, а ее действие на оставшуюся часть тела заменяется по принципу освобождаемости от связей силами, распределенными по этой поверхности. Такое действие не изменит напряженно-деформированное состояние оставшейся части тела.

Затем полость, образованная удалением части тела, заполняется упругим материалом с другими свойствами (материалом включения). При этом считается, что вставляемое включение изначально не деформировано.

Обосновать такой подход можно следующим образом. Из экспериментов известно, что при кристаллизации напряжения уменьшаются, а энергия высвобождается и превращается в тепло. Таким образом, будет логично предположить, что после кристаллизации напряжения будут зависеть от дополнительных деформаций, которые возникли после того, как материал перешёл в следующее состояние. Другими словами, используя терминологию теории фазового превращения, предполагается, что собственные деформации при кристаллизации, совпадают с начальными деформациями, накопленными в теле до кристаллизации.

Далее оставшаяся часть исходного тела (*матрица*) и включение «склеиваются» с сохранением действующих на них сил (термин «склеивание» понимается в смысле выполнения граничных условий, т.е. означает, что при дальнейшем деформировании тела перемещения граничных точек матрицы будут равны перемещениям соответствующих граничных точек включения).

Затем в каждой точке границы между матрицей и включением сумма сил, приложенных к матрице, и сил, приложенных к включению, квазистатически (например, изотермически) уменьшается до нуля. Это вызывает возникновение новых деформаций и напряжений, которые накладываются на уже имеющиеся (начальные) деформации и напряжения. Меняется форма границы между матрицей и включением. Тело (матрица и включение) переходит в конечное состояние.

Рассмотренная модель легко может быть обобщена на случай одновременного или последовательного образования нескольких включений. Отметим, что в случае последовательного образования близко расположенных включений имеет место многократное наложение деформаций.

Предложенная модель представляет собой существенное упрощение реальных процессов, происходящих при кристаллизации резины. Тем не менее, она позволяет смоделировать наиболее важные с точки зрения механики деформируемого твёрдого тела явления, происходящие при этом. В первую очередь это многократное увеличение жёсткости при переходе в кристаллическое состояние. В то же время наблюдается процесс релаксации (уменьшения) напряжений во время кристаллизации.

Приводятся краткие сведения о приведении дифференциальных уравнений теории упругости, определённых в области, к системе линейных алгебраических уравнений с помощью метода Галёркина, метода конечных элементов и метода Ньютона.

Во второй главе приводится алгоритм автоматизации выбора решателя СЛАУ для задач МДТТ. Описаны основные идеи алгоритма и влияние различных факторов на выбор. Кратко описан разработанный программный модуль (вошедший в состав программного комплекса CAE FIDESYS), реализующий данный алгоритм. Для автоматического выбора подходящего способа хранения матрицы, решателя, метода и предобуславливателя используются следующие критерии:

- Размер матрицы СЛАУ и доступная оперативная память;
- Симметричность матрицы СЛАУ;
- Наличие возможности использовать технологию CUDA;
- Механическая постановка задачи (например, если имеется несжимаемый материал).

Приводится краткое описание основных реализованных в программном модуле методов и предобуславливателей.

Приводятся краткие сведения о технологии CUDA, позволяющей эффективно использовать для решения СЛАУ графические процессоры, и особенности, которые необходимо учитывать при использования этой технологии. В частности, рассматриваются различные реализованные в программном модуле варианты хранения матрицы в памяти, имеющие важное значение при рассчётах на GPU.

В описанных в 1 главе механической и математической постановках задачи при наличии несжимаемого материала полученная в результате СЛАУ будет иметь особый вид, когда в матрице будет присутствовать на главной диагонали большой нулевой блок. Это происходит потому, что в системе уравнений появляются помимо неизвестных, связанных с компонентами перемещений, новые неизвестные, связанные с давлением, а к системе уравнений добавляются условия несжимаемости, которые зависят только от компонент перемещений. Матрица такой системы будет иметь собственные значения разных знаков (так называемая система уравнений с седловой точкой), число обусловленности такой системы заметно ухудшается, а использование предобуславливателей является затруднительным (большинство не позволяют иметь на главной диагонали матрицы системы нулей). Таким образом использование стандартных прямых и итерационных методов является затруднительным. В гидродинамике очень часто для решения подобных СЛАУ используется алгоритм Узавы, который представляет из себя итерационный процесс, сводящий решение всей системы в целом к многократному решению на каждой итерации СЛАУ меньшей размерности с матрицей, представляющей из себя часть начальной матрицы, получающуюся вычёркиванием строк и столбцов, соответствующих нулевому блоку. Такую систему уже можно решать обычными методами, при этом сама матрица не меняется, что позволяет однократно получить LU-разложение или построить эффективный предобуславливатель, а затем многократно эффективно решать систему с различными правыми частями. Сам итерационный процесс алгоритма Узавы имеет некоторые коэффициенты, которые высчитываются на каждой итерации, а их выбор похож на выбор коэффициентов для стандартных итерационных методов (таких как метод сопряжённых градиентов и прочие).

Приводится один из вариантов алгоритма, реализующего метод Узавы на основе трехслойной схемы метода сопряженных градиентов для системы вида: $\begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ (причём $C = B^T$).

1. Задание начального приближения $x^{(0)} = \begin{pmatrix} u^{(0)} \\ p^{(0)} \end{pmatrix}$ и начальных значений параметров α_0 , τ_0 .
2. Задание начального значения счетчика итераций: $k := 0$.
3. Вычисление нормы вектора начальной невязки $\left\| r^{(0)} \right\| = \left\| R - Mx^{(0)} \right\|$.
4. Решение системы $Au^{(k+1)} = f - Cp^{(k)}$ относительно $u^{(k+1)}$ (если эта СЛАУ решается итерационным методом, то в качестве начального приближения можно взять $u^{(k)}$).
5. Решение системы $Ay^{(k+1)} = CBu^{(k+1)}$ относительно $y^{(k+1)}$ (если эта СЛАУ решается итерационным методом, то в качестве начального приближения можно взять нулевой вектор).
6. $\tau_{k+1} := \dfrac{(Bu^{(k+1)}, Bu^{(k+1)})}{(By^{(k+1)}, Bu^{(k+1)})}$
7. $\widehat{p}^{(k+1)} := p^{(k)} + \tau_{k+1} Bu^{(k+1)}$
8. $\alpha_{k+1} := \left[1 - \dfrac{\tau_{k+1}(Bu^{(k+1)}, Bu^{(k+1)})}{\tau_k (Bu^{(k)}, Bu^{(k)})\alpha_k} \right]^{-1}$
9. $p^{(k+1)} := \alpha_{k+1}\widehat{p}^{(k+1)} + (1-\alpha_{k+1})p^{(k)}$
10. Вычисление нормы вектора невязки $\left\| r^{(k+1)} \right\| = \left\| R - Mx^{(k+1)} \right\|$.
11. Если $\left\| r^{(k+1)} \right\| < \varepsilon \left\| r^{(0)} \right\|$, то завершение работы алгоритма, иначе $k := k+1$ и переход к п. 4.

Численные эксперименты показали, что такой выбор коэффициентов не всегда приводит к сходимости методов в задачах МДТТ, поэтому в работе были предложены модификации этих коэффициентов для метода Узавы на основе трёхслойных схем метода сопряжённых градиентов и метода сопряжённых невязок, что дало улучшение сходимости методов. Предлагается заменить выбор расчёт-ных формул соответствующих коэффициентов

$$\alpha_{k+1} := \left[1 - \frac{\tau_{k+1}(Bu^{(k+1)}, Bu^{(k+1)})}{\tau_k(Bu^{(k)}, Bu^{(k)})\alpha_k}\right]^{-1} \text{ и } \alpha_{k+1} := \left[1 - \frac{\tau_{k+1}(SBu^{(k+1)}, Bu^{(k+1)})}{\tau_k(SBu^{(k)}, Bu^{(k)})\alpha_k}\right]^{-1}$$

для этих методов на

$$\alpha_{k+1} := \left[1 + \frac{\tau_{k+1}(Bu^{(k+1)}, Bu^{(k+1)})}{\tau_k(Bu^{(k)}, Bu^{(k)})\tau_k}\right]^{-1} \text{ и } \alpha_{k+1} := \left[1 + \frac{\tau_{k+1}(SBu^{(k+1)}, Bu^{(k+1)})}{\tau_k(SBu^{(k)}, Bu^{(k)})\tau_k}\right]^{-1}$$ соответственно.

Здесь $S = -BA^{-1}C$ – так называемая матрица Шура, а решение СЛАУ для матрицы А на шагах 4 и 5 позволяет избежать нобходимость искать её в явном виде.

Третья глава посвящена исследованию производительности различных методов решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей, возникающих в задачах линейной и нелинейной теории упругости для сжимаемых и несжимаемых материалов, и тестированию разработанного программного модуля.

Приводится решение трёхмерной задачи для тела из материала Мурнагана, а затем, на её примере, сравнивается эффективность методов и подтверждается правильность выбора критериев в алгоритме выбора решателя. Сравниваются прямые и итерационные решатели. Сравниваются различные предобуславливатели для итерационных методов для решения на центральном процессоре и предобуславливатели для решения на графическом процессоре. Сравнивается производительность вычислений на CPU и GPU и подтверждается эффективность использования графических процессоров. Показаны результаты использования различных вариантов хранения разреженной матрицы при расчётах на графическом процессоре и сопостовляется эффективность их использования.

В рамках предлагаемой в 1 главе модели получено решение двумерной задачи для тела из несжимаемого материала. В этой задаче рассматривается плоская деформация тела из несжимаемого материала с эллиптическим отверстием (концентратор напряжения), которое растягивается под воздействием внешних сил. Используются определяющие соотношения Трелоара с параметрами, соответствующими резине при -40°С.

При приложении внешней нагрузки в окрестностях вершин эллиптического отверстия происходит кристаллизация резины. Для определения области, в которой происходит кристаллизация, используется следующий подход. Вычисляется максимальное главное напряжение и выбирается область (множество элементов сетки), в которых напряжение отличается не более, чем на 5%, от этой величины. Считается, что в этой области (на этих элементах) произошла кристаллизация, и происходит замена материала на сжимаемый материал, описываемый определяющими соотношениями Трелоара, в которых параметры материала (модули упругости) существенно больше, чем у исходного материала. В литературе на основании опытных данных показано, что модули упругости материала возрастают на 1-2 порядка при кристаллизации, поэтому такой вариант выбора материала для кристаллизованной области является обоснованным опытами.

Далее рассматривается вариант образования включения, описанный в главе 1.

На основании этой модели был разработан программный модуль в составе CAE Fidesys, который позволяет осуществлять моделирование напряжённого состояния в теле с возникающими включениям. Некоторые результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии тела из резиноподобного материала при образовании в нем кристаллического включения приведены на рис.1.

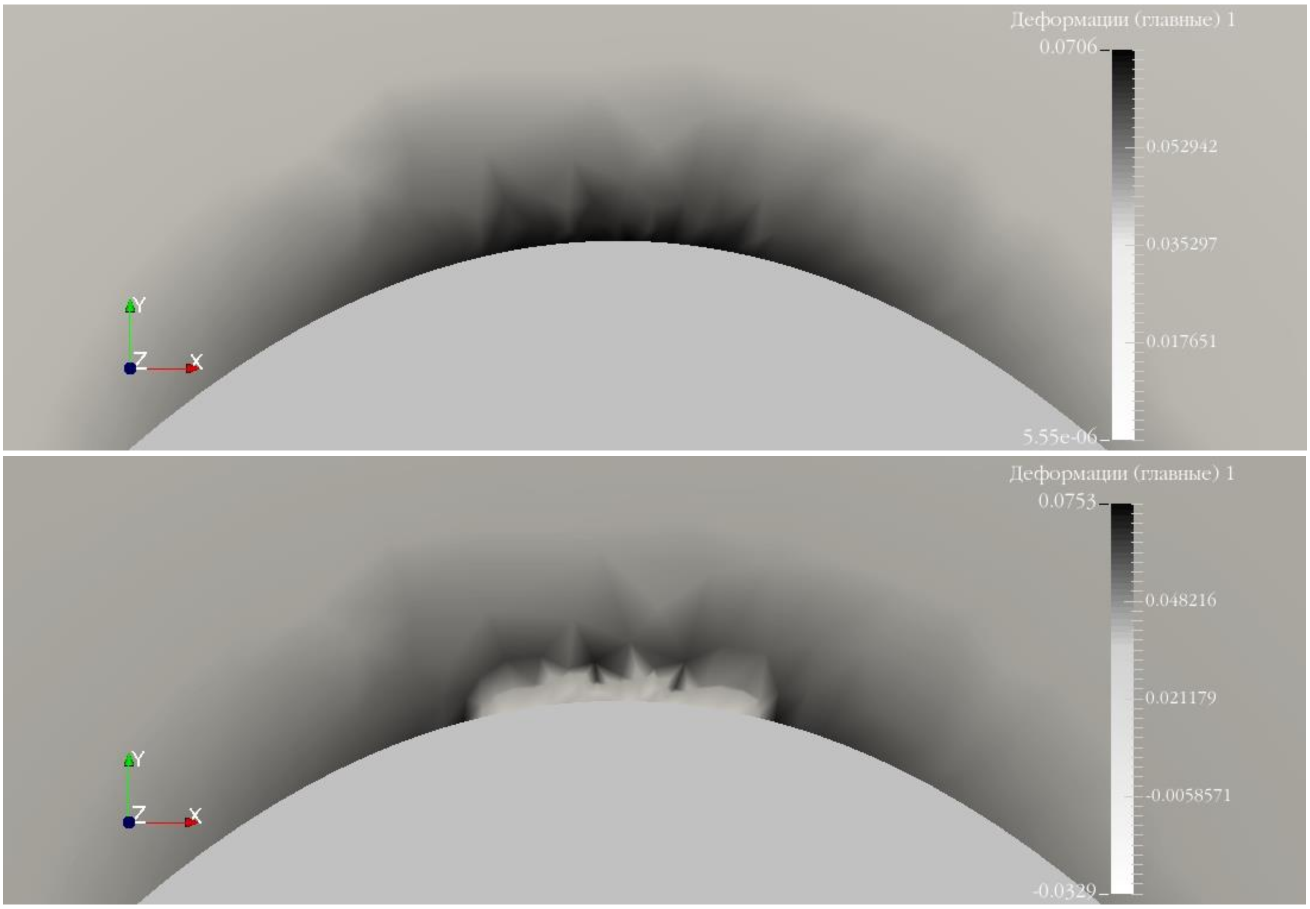

Рис.1. Распределение деформаций до замены материала в области кристаллизации (вверху) и их изменение после замены материала и пересчёта равновесного состояния (внизу).

Эта задача даёт представление об использовании данной модели образования упругих включений в телах из несжимаемого материала, а также на её примере рассматривается эффективность различных вариантов алгоритма Узавы, в том числе предложенных модификаций, и приводится их сравнение.

Например, приводятся результаты сходимости различных вариантов алгоритма Узавы, из которых видно, что благодаря модификации этого алгоритма, предложенной в диссертации, начинают сходиться те варианты метода, которые раньше могли не сойтись. При этом число итераций и время расчёта оказывается больше, но всё ещё приемлемо по сравнению с другими вариантами, основанными на двухслойных схемах (минимальных невязок и наискорейшего градиентного спуска). Метод простой итерации оказывается достаточно быстрым благодаря тому, что для него приходится всего один раз за итерацию искать решение системы для главного блока матрицы, но из-за того, что итерационный параметр τ постоянен и не меняется от итерации к итерации, немаловажен выбор значения для τ. В работе приводятся результаты, показывающие, что для решенных в ней модельных задач количество итераций алгоритма Узавы почти не зависит от размерности матрицы, но, тем не менее, время расчёта увеличивается с увеличением размерности матрицы. Это связано с увеличением времени, потраченного на одну итерацию алгоритма и решение СЛАУ с *главным* блоком матрицы, размерность которого тоже увеличивается, поэтому эффективным является использование прямых методов, которые только один раз строят LU-разложение, или «сильных» предобуславливателей. Также показано, что наиболее эффективным и стабильным является метод Узавы, основанный на методе сопряжённых невязок (CRes).

В заключении приводятся основные результаты и выводы диссертационной работы:

Предложена модель для оценки напряжённо-деформированного состояния при образовании упругих включений в теле из упругого несжимаемого материала после предварительного нагружения с учётом конечных деформаций и их перераспределения для случая сжимаемого включения.

На основе этой модели разработан алгоритм расчета НДС при образовании включений с использованием метода конечных элементов и программное обеспечение – система компьютерного моделирования НДС тел из резиноподобных материалов при образовании кристаллических включений.

Модифицирован алгоритм Узавы применительно к задачам МДТТ для несжимаемых материалов с учётом конечных деформаций и их перераспределения.

Проведён анализ различных решателей СЛАУ и разработан алгоритм автоматического выбора и настройки решателей в задачах МДТТ в зависимости от механической постановки задачи, размерности матрицы СЛАУ и возможностей компьютера.

На основе полученного алгоритма разработан программный модуль, позволяющий из имеющихся решателей выбирать наиболее эффективный в данной задаче МДТТ на данном компьютере, в том числе для несжимаемых материалов.

Проведены численные эксперименты, анализ результатов которых показал эффективность алгоритма выбора решателя, а также влияние упругих включений на напряжённо-деформированное состояние тел из несжимаемых материалов.

Разработанные программные модули (при промышленной реализации) могут быть использованы при инженерных прочностных расчётах элементов конструкций из несжимаемых материалов, например, шин.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях из перечня ВАК:

1. Styopin N.E., Vershinin A.V., Zingerman K.M., Levin V.A. Comparative Analysis of Different Variants of the Uzawa Algorithm in Problems of the Theory of Elasticity for Incompressible Materials// Journal of Advanced Research. 2016. V.7. №5. P.703-707.

2. Styopin N.E., Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V. A Model for Stress Analysis of Elastomer Samples' Crystallisation in a Solid Mechanics Problem Accounting for Superimposed Finite Strains// Contemporary Engineering Sciences. 2016. Vol.9. №25. P.1217-1227.

3. Стёпин Н.Е. Разработка программного модуля для автоматического выбора решателей систем линейных алгебраических уравнений для прочностного анализа// Программные продукты и системы. 2014. №4 (108). С.162-166.

4. Стёпин Н.Е. Реализация и сравнение различных вариантов алгоритма Узавы в задачах упругости для несжимаемых материалов// Инженерный вестник Дона. 2013. №2. (http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1626)

5. Стёпин Н.Е., Левин В.А., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Сравнительный анализ различных вариантов алгоритма Узавы в задачах упругости для несжимаемых материалов// Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика. 2012. Вып.3(26). С.29-34.

Зарегистрированные программные средства:

6. Стёпин Н.Е., Вершинин А.В., Левин В.А. Модуль выбора решателя СЛАУ в задачах МДТТ// Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617039 от 29.06.2015.

7. Стёпин Н.Е., Вершинин А.В., Левин В.А., Зингерман К.М. Модуль решения матриц СЛАУ на основе алгоритма Узавы в задачах МДТТ// Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015616895 от 25.06.2015.

8. Стёпин Н.Е. и др. Полнофункциональная многоплатформенная система прочностного инженерного анализа с реализацией при конечных деформациях учета перераспределения деформаций, дискретного или непрерывного изменения массы, формы, свойств части материала элемента конструкции, адаптация под гибридные супер-ЭВМ// Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013617002 от 30.07.2013.

Остальные публикации:

9. Стёпин Н.Е., Вершинин А.В., Левин В.А., Прокопенко А.С. Об одном случае использования технологии CUDA// Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения». 2009. С. 40.

10. Стёпин Н.Е., Левин В.А., Вершинин А.В., Траченко А.В., Прокопенко А.С. Некоторые результаты использования технологии CUDA при решении СЛАУ для задач прочности при перераспределении конечных деформаций// Материалы 10-ой Международной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". 2009. С.223-225.

11. Стёпин Н.Е., Вершинин А.В., Левин В.А., Прокопенко А.С. К решению нелинейных задач прочности с использованием технологии CUDA// Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения». 2010. С.53-54.

12. Стёпин Н.Е., Кукса Е.А., Труфен К.Н. Решение задач теории упругости для несжимаемых материалов методом МКЭ// Тезисы докладов X Всероссийского

съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2011. С.190.

13. Стёпин Н.Е. Программный модуль по решению больших систем линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей в задачах теории упругости// Тезисы докладов международной научной конференции «Ломоносов 2011». 2011.
http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2011/1258/35026_d8db.pdf

14. Стёпин Н.Е. О выборе решателя СЛАУ для програмного комплекса CAE FIDESYS// Тезисы докладов XXII симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». 2011. С.73-76.

15. Стёпин Н.Е. Моделирование развития дефектов с использованием различных вариантов нелокальных критериев прочности// Тезисы докладов международной научной конференции «Ломоносов 2012». 2012.
http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1796/35026_cbd9.pdf

16. Стёпин Н.Е., Левин В.А. Уточнение представления нелокального критерия прочности при моделировании развития дефектов при конечных деформациях и их наложении// Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения». 2012. С.110.

17. Стёпин Н.Е. Моделирование развития дефекта с использованием уточнённого представления нелокального критерия прочности// Тезисы докладов XIII Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». 2012. С.224.

18. Стёпин Н.Е. Решение задачи об образовании упругого включения в теле из несжимаемого материала с помощью CAE Fidesys// Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2015. С.3602-3604.