На правах рукописи

НГУЕН НГОК ХИЕН

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АТТРАКТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тула 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования
«Тульский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент Буркин Игорь Михайлович

Официальные оппоненты: Сидоров Сергей Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московская государственная академия водного транспорта», кафедра высшей математики, профессор.

Рыбаков Константин Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) », кафедра математической кибернетики, доцент.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО Санкт – Петербургский государственный университет.

Защита диссертации состоится *«22» июня 2016г. в* 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.271.05 при ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина 92,(12-105)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина 92 и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-212-271-05/nguen-nh/.

Автореферат разослан *«____» _____________ 2016г.*

Ученый секретарь
диссертационного совета МСоколова Соколова Марина Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы.

Теория нелинейных колебаний динамических систем, созданная в тридцатых годах XX века, первоначально была настолько прозрачна и понятна, что поколения исследователей могли успешно применять ее для решения задач из различных областей науки. При этом структура большинства изучаемых систем была такой, что факт существования колебательных режимов в них не вызывал сомнений, поэтому основные усилия исследователей были сосредоточены на анализе свойств и формы таких колебаний. В семидесятых годах стало понятно, что кроме орбитально устойчивых циклов и торов, имеющих единую природу, динамические системы могут обладать странными аттракторами, имеющими сложную топологическую структуру. В последующие десятилетия усилия многих математиков были сосредоточены на исследовании структуры странных аттракторов, их размерности, условий их возникновения и локализации в фазовом пространстве (Ильяшенко Ю.С., Нейман А.Б, Анищенко В.С., Магницкий Н.А., Сидоров С.В, Леонов Г.А., Feigenbaum M.J., Douady A., Oesterlé J., Temam K., Kaplan H., Yorke J.A. и др.). Впечатляющих результатов здесь удалось достичь благодаря тому, что аттракторы классических систем Лоренца, Рёсслера, Чуа, Чена, Лу, также как аттракторы моделей классических систем автоматического управления, содержат в своей области притяжения сколь угодно малые окрестности неустойчивых состояний равновесия. Такие аттракторы являются "самовозбуждающимися" в том смысле, что вычислительная процедура, "стартующая" из любой точки неустойчивого многообразия в окрестности состояния равновесия, "выходит" на аттрактор и рассчитывает его.

Однако самовозбуждающиеся аттракторы не исчерпывают все типы возможных аттракторов. Феномен существования аттракторов другого типа, не содержащих в своей области притяжения состояний равновесия – вложенных орбитально асимптотически устойчивых циклов, хорошо известен для случая двухмерных систем. Такие аттракторы называют "скрытыми". Хорошо известными примерами скрытых аттракторов у многомерных моделей систем автоматического управления являются построенные во второй половине XX века контрпримеры к гипотезам Айзермана и Калмана, демонстрирующие, что единственное устойчивое в малом состояние равновесия многомерной системы может сосуществовать с орбитально устойчивым циклом.

Проблемы обнаружения и локализации скрытых аттракторов оказываются чрезвычайно важными при моделировании сложных технических систем, подверженных внешним возмущениям. Наличие таких аттракторов может привести к тому, что наряду с желаемым устойчивым режимом работы в такой системе могут возникнуть другие нежелательные устойчивые и неустойчивые режимы, способные привести к авариям. Так, например, известно (Г.А.Леонов, Н.В.Кузнецов, Б.Р.Андриевский, А.Ю.Погромский, S. Jafari, J. Sprott), что именно наличие скрытых аттракторов в системах управления летательными аппаратами приводит к возникновению флаттера по тангажу у самолета или неуправляемому вращению ракеты. Скрытые аттракторы обнаруживаются также при нелинейном анализе систем фазовой автоподстройки частоты (Г.А.Леонов, Н.В.Кузнецов, М.В.Юлдашев, Р.В.Юлдашев), а также при моделировании буровых установок (Г.А.Леонов, Н.В.Кузнецов, Л.А.Киселева).

В 2010 году Г.А.Леоновым был предложен метод поиска скрытых аттракторов в многомерных моделях систем автоматического управления с одним нелинейным блоком, основанный на использовании метода гармонической линеаризации, метода малого параметра и метода описывающих функций. Дальнейшее развитие этого метода (Г.А.Леонов, Н.В.Кузнецов, Б.Р.Андриевский, В.О.Брагин), позволило впервые обнаружить хаотический скрытый аттрактор в контуре Чуа. Упомянутые работы вызвали волну интереса к исследованию многомерных динамических систем, которые либо не имеют состояний равновесия, либо имеют устойчивые в малом состояния равновесия и одновременно обладают орбитально устойчивыми циклами или странными аттракторами (S. Jafari, J. Sprott, M. Molaie, G. A. Chen, Z.Wei, X. Wang, Seng-Kin Lao, Y. Shekofteh, X.Wangand, C.Li, H.Zeng et al.).

Актуальной является задача разработки новых эффективных аналитико-численных методов локализации скрытых аттракторов систем автоматического управления, охватывающих модели многосвязных систем, а также методов поиска минимального глобального аттрактора таких систем, в котором сосуществуют несколько локальных скрытых аттракторов.

Цель и задачи работы. Целью настоящей работы является разработка новых аналитико-численных методов поиска скрытых аттракторов многомерных моделей систем автоматического управления, а также методов поиска и локализации в фазовом пространстве минимального глобального аттрактора таких систем, которые могут быть использованы при математическом моделировании колебательных процессов в многомерных динамических системах.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать новые аналитико-численные методы локализации и эффективного поиска скрытых аттракторов математических моделей многосвязных систем автоматического управления.

2. Разработать методы локализации неустойчивых многообразий многомерных систем управления, а также аналитико-численные методы поиска неустойчивых циклов.

3. Построить математическую модель многомерного аналога системы Льенара, обладающую скрытыми аттракторами.

4. Создать программный комплекс, позволяющий реализовать алгоритмы поиска скрытых аттракторов и минимального глобального аттрактора многомерных систем управления.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы использовались методы теории матриц, матричных уравнений и неравенств, теории устойчивости, второй метод Ляпунова, частотные методы; при разработке вычислительных алгоритмов использовалась система компьютерной математики Matlab.

Научная новизна и результаты, выносимые на защиту. В диссертационной работе предложен аналитико-численный метод поиска скрытых аттракторов многомерных моделей систем управления, позволяющий исследовать системы, обладающие одновременно несколькими скрытыми аттракторами, а также находить минимальный глобальный аттрактор таких систем.

Научную новизну составляют следующие результаты, выносимые на защиту:

1. Предложен новый аналитико-численный метод поиска скрытых аттракторов математических моделей многосвязных систем автоматического управления, являющийся существенно "менее затратным" на этапе подготовки к реализации численного алгоритма поиска скрытого аттрактора, чем методы, используемые другими авторами и позволяющий исследовать системы, обладающие одновременно несколькими скрытыми аттракторами.
2. На базе системы компьютерной математики Matlab разработан комплекс программ для поиска скрытых аттракторов многомерных моделей систем автоматического управления.
3. С помощью разработанных методов и комплекса программ найдены скрытые аттракторы классической и обобщенной систем Чуа, построен контрпример к гипотезе Калмана, обнаружены скрытые колебания в системах управления летательными аппаратами.
4. На базе системы компьютерной математики Matlab разработан комплекс программ для эффективного поиска неустойчивых циклов многомерных моделей систем автоматического управления, использующий "метод стрельбы".
5. Построена математическая модель многомерного аналога системы Льенара. Предложен аналитико-численный метод поиска минимального глобального аттрактора многомерных аналогов систем Льенара, позволивший найти минимальный глобальный аттрактор классической и обобщенной систем Чуа, а также трехмерной системы с полиномиальной нелинейностью.

Достоверность полученных результатов. Все положения, выносимые на защиту, математически строго доказаны и подтверждаются численными экспериментами.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы заключается в развитии новых методов исследования структуры аттракторов многомерных динамических систем и, в частности, многомерных моделей систем автоматического управления.

Результаты диссертационной работы могут быть использованы специалистами в области теории нелинейных колебаний при анализе многомерных моделей динамических систем, а также при анализе и синтезе систем автоматического управления.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на Международных научных конференциях "Современные проблемы математики, механики, информатики" (Россия, Тула, 2014), "Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы" (Россия, Москва, РУДН, 2014), а также на всероссийских конференциях " XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ 2014." (Россия, Москва, ИПУ, 2014). "Всероссийская конференция по истории математики и математического образования, посвященная 130-летию со дня рождения Н.Н. Лузина" (Россия, Елец, 2013 г).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ [1-7], в том числе две статьи [1,2] опубликованы в журналах из перечня ВАК.

В работе [1] И.М. Буркину принадлежат постановки задач и идеи методов исследования. Соискателю принадлежат доказательства теорем, разработка численных алгоритмов, программного комплекса и реализация процедуры поиска скрытых аттракторов. В работе [2] соискателю принадлежит разработка алгоритма поиска минимального глобального аттрактора многомерного аналога системы Льенара с полиномиальной нелинейностью с использованием "метода стрельбы". Соавторам принадлежит модель исследуемой системы и постановка задачи исследования.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, списка используемой литературы из 87 наименований, и 3 приложений; общий объем – 143 страниц машинописного текста, включая 123 рисунки и 7 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приведен обзор литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель, поставлены задачи, показана научная новизна и практическая значимость представленной работы.

В первой главе диссертации дан обзор известных методов синтезирования систем, обладающих скрытыми аттракторами и известных методов поиска скрытых аттракторов многомерных систем управления.

В разделе 1.1 даны понятия аттрактора и минимального глобального аттрактора, используемые в работе. Приведены примеры самовозбуждающиеся аттракторов.

В разделе 1.2, описываются предложенные Jafari S., Sprott J.C, Molaie M. Golpayegani S.M.R.H, Lao S.K, Shekofteh Y., Pham V.T, Volos C., Wei Z., Wang X. методы синтезирования трехмерных систем с квадратичными нелинейностями, имеющих единственное состояние равновесия, целую прямую состояний равновесия, а также не имеющих состояний равновесия и при этом обладающих скрытыми аттракторами.

В разделе 1.3, изложен метод Г.А.Леонова поиска аттракторов многомерных моделей систем автоматического управления с одной скалярной нелинейностью и приведены примеры реализации этого метода.

В разделе 1.4 приведены некоторые вспомогательные утверждения и теоремы, которые постоянно используются в диссертации.

Во второй главе настоящей работы предложен новый аналитико-численный метод поиска скрытых аттракторов многомерных моделей систем управления вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\xi,\ \xi = \varphi(\sigma),\ \sigma = C^* x, \tag{1}$$

где A, B, C – вещественные постоянные матрицы порядков, соответственно, $n \times n$, $n \times m$ и $n \times m$, где $m \le n$, $x \in R^n$. Предполагается, что $\xi_j = \varphi_j(\sigma_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, где $\varphi_j(\sigma_j)$ – непрерывные, дифференцируемые при $\sigma_j = 0$ функции. Передаточная $m \times m$-матрица системы $W(p) = C^*(A - pI_n)^{-1}B$, где p – комплексная переменная, предполагается невырожденной.

В основу предлагаемого подхода к поиску скрытых аттракторов системы (1) положен метод гомотопии. Пусть задано однопараметрическое семейство динамических систем

$$\dot{x} = \varphi(x, \varepsilon), \varepsilon \in [0,1], \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n \tag{2}$$

такое, что $\varphi(x,1) = f(x)$, и при малых $\varepsilon > 0$ система $\dot{x} = \varphi(x, \varepsilon)$ имеет легко обнаруживаемый самовозбуждающийся орбитально асимптотически устойчивый цикл. Численно отслеживается эволюция этого цикла при возрастании ε до 1. Возможна следующая альтернатива: либо при некотором $\varepsilon \in (0,1)$ происходит бифуркация исчезновения аттрактора, либо при $\varepsilon = 1$ обнаруживается скрытый аттрактор исследуемой динамической системы.

Для рассматриваемого класса систем (1) поиск "стартовой" системы, позволяющей начать процедуру поиска скрытого аттрактора с использованием метода гомотопии, основан на использовании теорем, доказанных в разделе 2.1.

Теорема 1. Пусть нелинейности $\varphi_j(\sigma_j)$ в системе (2) удовлетворяют соотношениям

$$\mu_j^1 \le \frac{\varphi_j(\sigma_{j2}) - \varphi_j(\sigma_{j1})}{\sigma_{j2} - \sigma_{j1}} \le \mu_j^2 \tag{3}$$

для всех $\sigma_j \in (-\infty, \infty), \sigma_{j1} \ne \sigma_{j2}$, $\varphi_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и существует число $\lambda > 0$ такое, что выполнены следующие условия.

1) Матрица $A + B\varphi'(0)C^*$, где $\varphi'(0) = diag(\varphi_1'(0), \ldots, \varphi_m'(0))$, имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \le \operatorname{Re} p \le 0$.

2) Матрица $A + BhC^*$, где $h = diag(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ является гурвицевой и $|\varphi(\sigma) - hC^*x| < \gamma < \infty$.

3) При всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\det \operatorname{Re}[I_m + \mu^1 W(i\omega - \lambda)]^*[I_m + \mu^2 W(i\omega - \lambda)] \ne 0, \mu^k = diag(\mu_1^k, \mu_2^k, \ldots, \mu_m^k), k = 1, 2. \tag{4}$$

Тогда система (1) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$.

Выполнение предположений (3) и неравенства (4) гарантирует существование неособой $n \times n$-матрицы $H = H^*$, имеющей ровно 2 отрицательных и $n-2$ положительных собственных значения и являющейся решением неравенства

$$2z^* H[(A + \lambda I)z + b\xi] + (\mu_2 c^* z - \xi)(\xi - \mu_1 c^* z) \le -\varepsilon(|z|^2 + \xi^2), z \in R^n, \xi \in R^1.$$

Следующая теорема используется, когда система (1) обладает одновременно несколькими скрытыми аттракторами.

Теорема 2 . Пусть справедливо неравенства (3) и (4). Пусть для некоторой матрицы $\tilde{M} = diag(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \dots, \tilde{\mu}_m)$, где $\tilde{\mu} \in (\mu_j^1, \mu_j^2)$ матрица $A + B\tilde{M}C^*$ не имеет собственных значений в полосе $-\lambda \le \operatorname{Re} p \le 0$. Тогда для всех решений $x(t)$ системы (2) с $\varphi(\sigma) = \tilde{M}C^* x$, для которых $x(0) \in \Omega = \{x : x^* Hx \le 0\}$ выполнено: $|x(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$.

В диссертации разработан алгоритм и комплекс программ на базе системы компьютерной математики Matlab для поиска скрытых аттракторов многомерных моделей систем автоматического управления (1).

Приведем примеры реализации численного алгоритма поиска скрытых аттракторов систем вида (1), опирающиеся на сформулированные теоремы.

Пример 1. (раздел 2.2) Рассмотрим систему с двумя нелинейностями

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 1.241x_1 + 8.45x_2 - 1.4365\frac{x_1^4 + 0.2}{0.34x_1^4 + 0.2}\tanh x_1, \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 + 0.1x_2^3, \\
\dot{x}_3 &= -12.1x_2 - 0.005x_3.
\end{aligned} \qquad (5)$$

Система (4) имеет состояния равновесия: $(0,0,0)$ и $(\pm 3.3862, \pm 1.3987 \times 10^{-3}, \mp 3.3862)$. При этом нулевое состояние равновесия устойчиво в малом, а два других состояния равновесия являются седло-фокусами. Эта система может быть записана в виде (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1.241 & 8.45 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -12.1 & -0.005 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -8.45 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

к функциями

$$\varphi_1(\sigma_1) = 0.17\frac{\sigma_1^4 + 0.2}{0.34\sigma_1^4 + 0.2}\tanh \sigma_1, \varphi_2(\sigma_2) = \sigma_2^3.$$

Проведя "линейный анализ" системы (5), убеждаемся, что при $\mu_1 \in [0.148, 0.2]$, $\mu_2 \in [0, 0.8]$ матрица $A + BMC^*, M = diag(\mu_1, \mu_2)$ является гурвицевой. При $\mu_1 \in [0.215, 0.9]$, $\mu_2 \in [0, 2]$ матрица $A + BMC^*, M = diag(\mu_1, \mu_2)$ имеет ровно 2 собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-1 \le \operatorname{Re} p \le 0$.

Пусть $\Pi(\omega) = \det \operatorname{Re}[I_2 + \mu^1 W(i\omega - \lambda)]^* [I_2 + \mu^2 W(i\omega - \lambda)]$, где $\lambda = 0.6$, $\mu^2 = diag(0.77, 1)$, $\mu^1 = diag(0.17, 0)$. Для такой функции справедливы соотношения (4) для указанных матриц μ^1 и μ^2. Заменим функций $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ в системе (5) на произвольные непрерывные кусочно-дифференцируемые функции, $\psi_1(x_1)$ и $\psi_2(x_2)$, для которых $\psi_1'(0) \in [0.215, 0.77], \psi_2'(0) \in [0, 1]$, на всех промежутках дифференцируемости выполнены условия $\psi_1'(x_1) \in [0.17, 0.77], \psi_2'(x_2) \in [0,1]$ и выполняются, например, соотношения

$$\lim_{|x_1|\to\infty} \frac{\psi_1(x_1)}{x_1} = 0.18, \ \lim_{|x_2|\to\infty} \frac{\psi_2(x_2)}{x_2} = 0.5. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что система при этом будет иметь единственное состояние равновесия $(0,0,0)$. Согласно теореме 1, система (5) с нелинейностями, удовлетворяющими условиям (6), будет иметь по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $(0,0,0)$.

Возьмем в качестве $\psi_1(x_1)$ и $\psi_2(x_2)$ следующие функции

$$\psi_1(x_1) = \begin{cases} 0.18x_1 - 0.11\ , x \le -0.5, \\ 0.4x_1, |x| \le 0.5, \\ 0.18x_1 + 0.11, x \ge 0.5, \end{cases} \quad , \quad \psi_2(x_2) = 0.5x_2.$$

"Стартуя" от системы с такими нелинейностями, реализуем описанный выше алгоритм поиска скрытого колебания системы (5). На рис. 1 показан цикл "стартовой" системы с начальными условиями $(0.1, 0.2, 0.3)$.

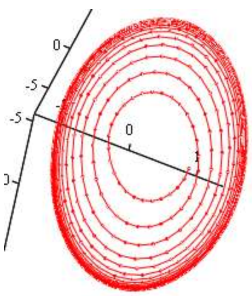

Рис.1. $\varepsilon = 0$

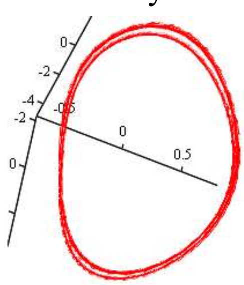

Рис.2. $\varepsilon = 0.9$

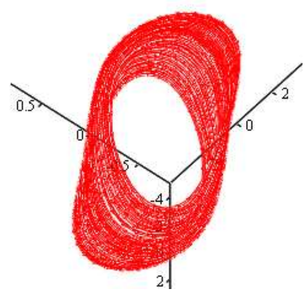

Рис.3. $\varepsilon = 1$

На рисунках 2,3 показана эволюция аттрактора системы при изменении ε.

Пример 2 (раздел 2.4). Цепи Чуа являются трехмерными аналогами автогенераторов. В безразмерных координатах математическая модель цепи Чуа может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x) - \alpha\varphi(x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned} \tag{7}$$

где функция $\varphi(x)$ характеризует нелинейный элемент ("диод Чуа"). Обобщенной системой Чуа называют систему (7) с нелинейностью вида

$$\varphi(x) = m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|) + 0.5(s - m_0)(|x + \delta_0| - |x - \delta_0|)$$

Запишем систему (7)-(8) в виде

$$\dot{X} = AX + B\varphi_1(\sigma), \sigma = C^* X; \ \ X = col(x, y, z),$$

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha(m_1+1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma) - m_1\sigma.$$

Выберем следующие значения параметров рассматриваемой системы: $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052, m_0 = 0.14, m_1 = -1.1468, \quad s = -0.9668, \delta_0 = 0.2$. Тогда нулевое состояние равновесия системы устойчиво в малом. При $\mu \in (-\infty, 0.14723)$ матрица $A_\mu = A + \mu BC^*$ имеет одно положительное собственное значение и два комплексно-сопряженных собственных значения в левой открытой полуплоскости. При некотором $\tilde{\mu}_1 \in (0.14723, 0.147231)$ положительное собственное значение переходит в левую полуплоскость и матрица A_μ становится гурвицевой. При $\mu \in (0.147231, 0.20986)$ матрица A_μ остается гурвицевой. При некотором $\tilde{\mu}_2 \in (0.20986, 0.20987)$ два собственных значения A_μ становятся чисто мнимыми, а одно остается в левой открытой полуплоскости. При $\mu \in (0.20987, 0.9596)$ матрица A_μ имеет два комплексно-сопряженных собственных значения с положительными вещественными частями и одно отрицательное (сектор неустойчивости степени 2). При некотором $\tilde{\mu}_3 \in (0.9596, 0.9597)$ матрица A_μ вновь имеет пару чисто мнимых и одно отрицательное собственное значение. Наконец, при $\mu \in (0.9597, \infty)$ матрица A_μ является гурвицевой.

Возьмем $\mu_1 = 0.17 \in (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2), \mu_2 = 4 > \tilde{\mu}_3, \lambda = 0.5$. Легко проверить, что для указанных значений справедливо соотношение (4). Процесс поиска скрытых колебаний начнем с построения вспомогательной нелинейности $g(\sigma)$ такой, чтобы система (7) с такой нелинейностью удовлетворяла всем условиям теоремы 1. Положим, например,

$$g(\sigma) = \begin{cases} 2\sigma + 0.3, & \sigma \le -0.2, \\ 0.5\sigma, & -0.2 \le \sigma \le 0.2, \\ 2\sigma - 0.3, & \sigma \ge 0.2. \end{cases}$$

Результат работы алгоритма поиска срытого колебания обобщенной системы Чуа представлен на рис. 4-6 (проекция на плоскость (x, y)).

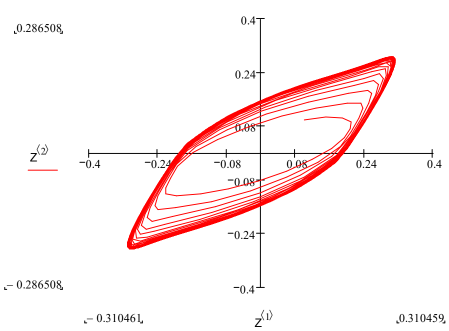

Рис.4. $\varepsilon = 0$

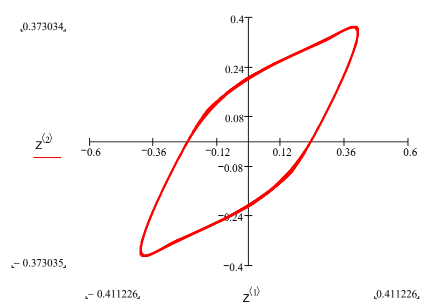

Рис.5. $\varepsilon = 0.5$

На рисунке 8 представлен график $x(t)$ для найденного цикла Γ. Из рис. 7 видно, что для цикла Γ выполнено соотношение $|x(t)| = |\sigma(t)| < 0.76$.

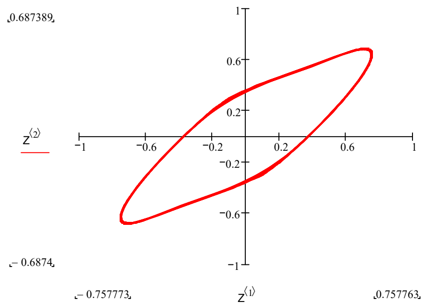

Рис.6 ($\varepsilon = 1$)

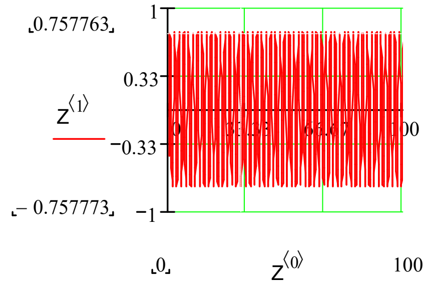

Рис. 7. график выхода $x(t)$

Теперь построим еще одну вспомогательную систему так, чтобы она имела цикл, заведомо отличный от найденного выше цикла Γ обобщенной системы Чуа. В качестве такой системы, согласно теореме 2, можно взять систему (7) с нелинейностью

$$g_1(\sigma) = \begin{cases} 0.18\sigma - 0.64, & \sigma \le 2, \\ 0.5\sigma, & -2 \le \sigma \le 2, \\ 0.18\sigma + 0.64, & \sigma \ge 2. \end{cases}$$

Результат работы алгоритма поиска аттрактора, отличного от цикла Γ, представлен на рисунке 8.

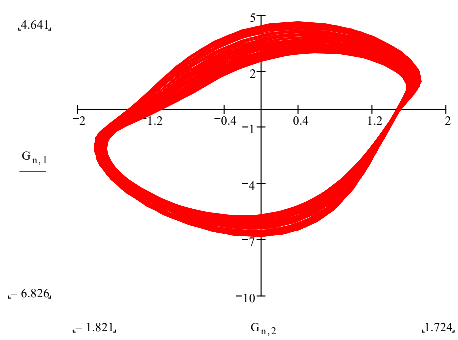

Рис.8. Скрытых аттракторов.

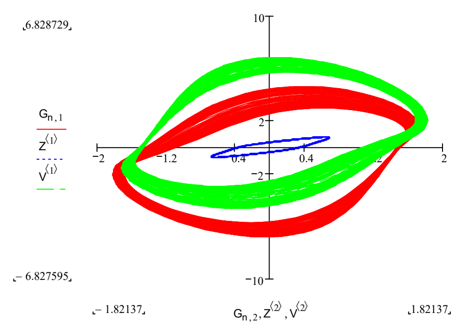

Рис.9. Скрытых аттракторов обобщенной системы Чуа

Найденный аттрактор обобщенной системы Чуа не симметричен относительно начала координат. В диссертации найден также симметричный аттрактор-близнец. На рис. 9 представлена проекция скрытых аттракторов обобщенной системы Чуа (7) на плоскость (x, y).

С помощью изложенного метода во второй главе диссертации найдены также скрытые аттракторы классической системы Чуа (раздел 2.4) и системы четвертого порядка, являющейся математической моделью системы управления ракетой-носителем (flexible space launch vehicle) (раздел 2.5), построен контрпример к гипотезе Калмана (раздел 2.3). Кроме того продемонстрировано, что метод, развитый для поиска скрытых аттракторов в системах управления вида (1) в некоторых случаях может быть применен для поиска и локализации аттракторов систем более общего вида. В частности, найден скрытый аттрактор системы, исследованной в работе Seng-Kin Lao, Y. Shekofteh, S. Jafari & J. Sprott (раздел 2.2)

Хорошо известно, что минимальный глобальный аттрактор многомерных систем наряду с устойчивыми многообразиями может содержать неустойчивые циклы и неустойчивые хаотические многообразия. Такие многообразия не могут быть найдены с помощью методов, развитых в работах Г.А.Леонова и Н.В.Кузнецова, а также методов, предлагаемых в главе 2 настоящей диссертационной работы.

Третья глава диссертации посвящена решению проблемы поиска минимального глобального аттрактора многомерных динамических систем. При этом особое внимание уделено синтезу так называемой обобщенной системы Льенара с полиномиальной нелинейностью, обладающей минимальным глобальным аттрактором сложной структуры и локализации его компонентов в фазовом пространстве.

Различные подходы к численно-аналитическому поиску неустойчивых циклов автономных систем были предложены в работах Н.А.Бобылева, А.В.Булатова, С.К.Коровина, Ф.Ф.Кутузова, И.Г.Исмаилова. В настоящей работе для поиска неустойчивых циклов многомерных систем используется алгоритм "метода стрельбы", предложенный авторами М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек в книге "Методы анализа нелинейных динамических моделей". На базе системы компьютерной математики Matlab разработан комплекс программ для эффективного поиска неустойчивых циклов многомерных моделей систем автоматического управления, использующий это метод.

В разделе 3.1 приведены известные примеры систем, обладающие минимальным глобальным аттрактором сложной структуры.

В разделе 3.2 предложен аналитико-численный алгоритм поиска неустойчивых циклов, базирующийся на использовании "метода стрельбы".

В разделе 3.3 с использованием метода стрельбы найден минимальный глобальный аттрактор классической и обобщенной систем Чуа. Продемонстрируем здесь предлагаемые методы на примере обобщенной системы Чуа.

Поскольку график нелинейности $\varphi_1(\sigma)$ системы (7) несколько раз последовательно “посещает” секторы гурвицевости и сектор неустойчивости степени 2, есть основания предположить, что рассматриваемая система имеет еще два орбитально неустойчивых цикла. Устойчивое состояние равновесия $O(0,0,0)$, также как и устойчивый цикл и хаотические аттракторы и имеют открытые области притяжения, границы которых могут содержать орбитально неустойчивые циклы. Опишем процедуру поиска этих неустойчивых циклов, использующую "метод стрельбы". Для поиска "малого" неустойчивого цикла выберем какую-либо точку (x_0, y_0, z_0) на устойчивом цикле Γ. Рассмотрим однопараметрическое семейство начальных условий $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$. Варьируя параметр δ с малым шагом и интегрируя систему с указанным начальным условием на достаточно большом промежутке времени, находим два близких значения параметра δ_1 и δ_2, при которых наблюдаются проекции фазового портрета исследуемой системы на плоскость (x, y), представленные на рис.10-11.

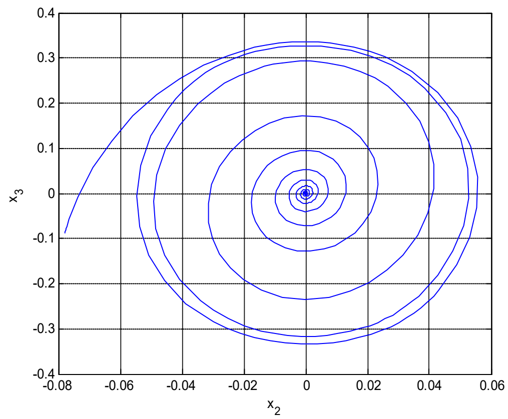

Рис. 10. $\delta = 0.12$

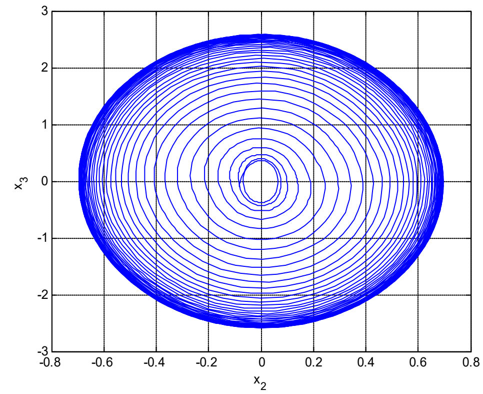

Рис. 11. $\delta = 0.13$

Выберем $\hat{\delta} \in (\delta_1, \delta_2)$ и точку $(\hat{\delta}x_0, \hat{\delta}y_0, \hat{\delta}z_0)$ возьмем в качестве начальной для реализации алгоритма метода стрельбы. В качестве "начального периода" искомого неустойчивого цикла выберем значение T_0 так, чтобы была малой норма $\| x(0,\hat{\delta}x_0) - x(T_0,\hat{\delta}x_0), \mathrm{y}(0,\hat{\delta}y_0) - y(T_0,\hat{\delta}y_0), \mathrm{z}(0,\hat{\delta}z_0) - z(T_0,\hat{\delta}z_0) \|$. Результат работы алгоритма поиска начального условия и периода "малого" неустойчивого цикла обобщенной системы Чуа представлен в табл.

Табл.

Метод стрельбы для поиска неустойчивости цикла с указанными начальными условиями и начальным периодом.

Итерация	x	y	z	T	$\|F\|$
0	-0.2188181933	-0.0235788854	0.3141969244	3.6	0.1704816858
1	-0.2477088510	-0.0050089594	0.3141969244	3.6648555155	0.2065384457
2	-0.2297037736	-0.0146978321	0.3141969244	3.0037124572	0.1071947257
3	-0.2455898394	-0.0230680465	0.3141969244	3.0755452958	0.0326270824
4	-0.2191356411	-0.0236379222	0.3141969244	3.0085833595	0.0012802491
5	-0.2189289754	-0.0237576121	0.3141969244	3.0011086662	0.0000339161
6	-0.2189304530	-0.0237637490	0.3141969244	3.0010254178	0.0000000026
7	-0.2189304525	-0.0237637494	0.3141969244	3.0010254146	

Значения начальных условий и периода найденного неустойчивого цикла представлены в последней строке таблицы.

С помощью аналогичного подхода находим "большой" неустойчивый цикл исследуемой обобщенной системы Чуа. На рис.11- 12 представлены проекции найденного минимального глобального аттрактора исследуемой системы на плоскости (y,z) и (x,y)

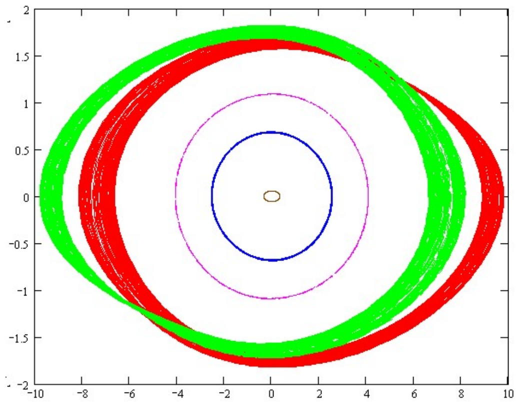

Рис.12. Проекция на плоскость (y, z)

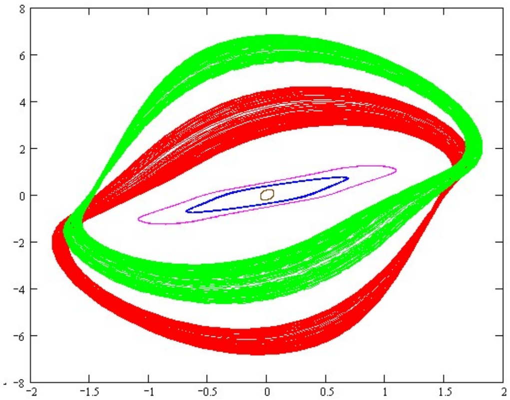

Рис.13. Проекция на плоскость (x, y)

На рубеже XX-XXI веков известный американский математик С.Смейл, сформулировал 18 наиболее важных проблем, которые предстоит разрешить математикам в XXI веке. Проблема №13, по сути дела, повторяет известную 16-ю проблему Гильберта, которая состоит в нахождении максимального числа и взаимного расположения предельных циклов систем второго порядка с полиномиальными нелинейностями степени *n*. Однако, ввиду выявившихся трудностей при решении этой проблемы в общем виде, акцент в 13 проблеме С.Смейла сделан на изучение специального класса систем второго порядка – систем Льенара: $\dot{x} = y - F(x), \dot{y} = -G(x)$.

В разделе 3.4 диссертации решается следующая задача: Пусть $n \geq 3$, а $\varphi(\sigma)$ - полином степени k. Необходимо построить математическую модель вида (1), являющуюся многомерным аналогом системы Льенара. Указать возможную структуру минимального глобального аттрактора такой модели и визуализировать его.

В качестве такой модели в диссертации рассмотрена следующая система третьего порядка с нелинейностью – полиномом пятой степени.

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -8.6x_2 - x_3 + \varphi(\sigma), \\ &\varphi(\sigma) = 7.5\sigma - 0.81\sigma^3 + 0.0215\sigma^5 \\ &\sigma = -18x_1 - x_2 - x_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Линейный анализ системы (8) показывает, что график функции $\varphi(\sigma)$ "поочередно пребывает" в секторах гурвицевости и неустойчивости степени 2. Это факт дает основание предположить, что рассматриваемая система имеет минимальный глобальный аттрактор сложной структуры, содержащий скрытые аттракторы. С использованием предложенной в диссертации техники поиска скрытых аттракторов систем вида (1), а также алгоритма метода стрельбы в диссертации найден минимальный глобальный аттрактор системы (8). Этот аттрактор представляет собой совокупность пяти состояний равновесия, трех хаотических аттракторов, орбитально устойчивого и двух орбитально неустойчивых циклов. На рис. 14 представлена проекция минимального глобального аттрактора системы (8) на плоскость (x, y).

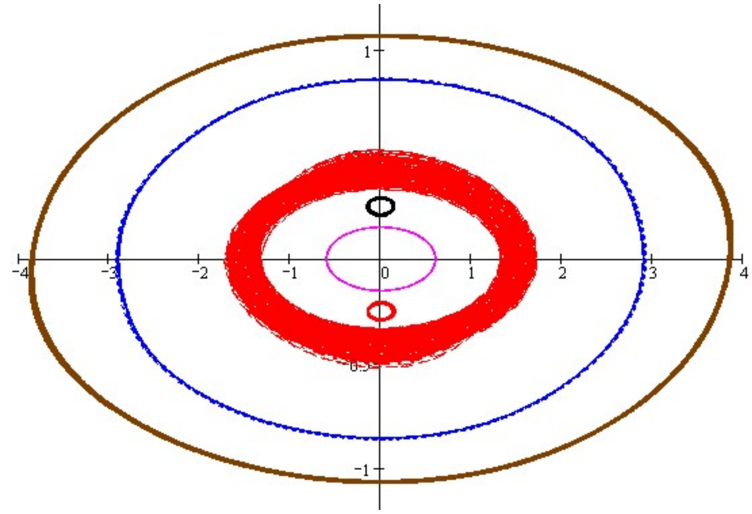

Рис.14. Проекция минимального глобального аттрактора системы на плоскость (x, y).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложен новый аналитико-численный метод поиска скрытых аттракторов многомерных моделей систем автоматического управления, позволяющий исследовать системы с несколькими нелинейными блоками, а также системы, обладающие одновременно несколькими скрытыми аттракторами.
2. Для компьютерной реализации предложенного метода на базе системы компьютерной математики Matlab разработан комплекс программ.
3. На базе системы компьютерной математики Matlab разработан комплекс программ для эффективного поиска неустойчивых циклов многомерных моделей систем автоматического управления.
4. С использованием развитых методов исследования и разработанных комплексов программ построен контрпример к гипотезе Калмана, найдены скрытые аттракторы классической и обобщенной систем Чуа, а также скрытые аттракторы математической модели системы управления ракетой-носителем.
5. Найден минимальный глобальный аттрактор построенной математической модели многомерного аналога системы Льенара с полиномиальной нелинейностью, а также минимальный глобальный аттрактор классической и обобщенной систем Чуа.

Публикации автора по теме диссертации:

1. **Буркин И.М., Нгуен Нгок Хиен. Аналитико-численные методы поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах. Дифференциальные уравнения и процессы управления № 2. 2014. С. 34-59.**
(I. M. Burkin and Nguen Ngok Khien.// Analytical-Numerical methods of finding hidden oscillations in multidimensional Dynamical systems// Differential equation. 2014. Vol 50. No.13.P.1695-1717.)

2. **Буркин И.М., Буркина Л.И., Нгуен Нгок Хиен. О структуре минимального глобального аттрактора обобщенной системы Льенара с полиномиальной нелинейностью// Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып.2. С. 46-58.**
3. Буркин И.М., Буркина Л.И., Нгуен Нгок Хиен. Структура минимального глобального аттрактора трехмерной системы с полиномиальной нелинейностью.// Вестник ТулГУ. Сер. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2015. Вып 1. С. 3-25.
4. Буркин И.М., Буркина Л.И., Нгуен Нгок Хиен. Об одном подходе к поиску скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблема Калмана.// Сборник трудов Всероссийской конференции по истории математики и математического образования, посвященной 130-летию со дня рождения Н.Н. Лузина. Елец. 2013. С. 91-96.
5. Буркин И.М., Нгуен Нгок Хиен. Аналитико-численные алгоритмы локализации аттракторов обобщенной системы Чуа// Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ 2014. М.: ИПУ, 2014. С. 391-395.
6. Буркин И.М., Нгуен Нгок Хиен. Скрытые колебания в системах управления летательными аппаратами// Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ. 2014. С.16-20.
7. Буркин И.М., Нгуен Нгок Хиен. Скрытые аттракторы систем управления летательными аппаратами// Материалы Международной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы». М.: РУДН. 2014. С. 194-195.

Подписано в печать …...
Формат бумаги $60\times84\ {}^{1}\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 0,9. Уч.-изд. л. 0,8.
Тираж 100 экз. Заказ ….

Тульский государственный университет.
300012, г. Тула, просп. Ленина, 92.

Отпечатано в Издательстве ТулГУ.
300012, г. Тула, пр. Ленина, 97, а.